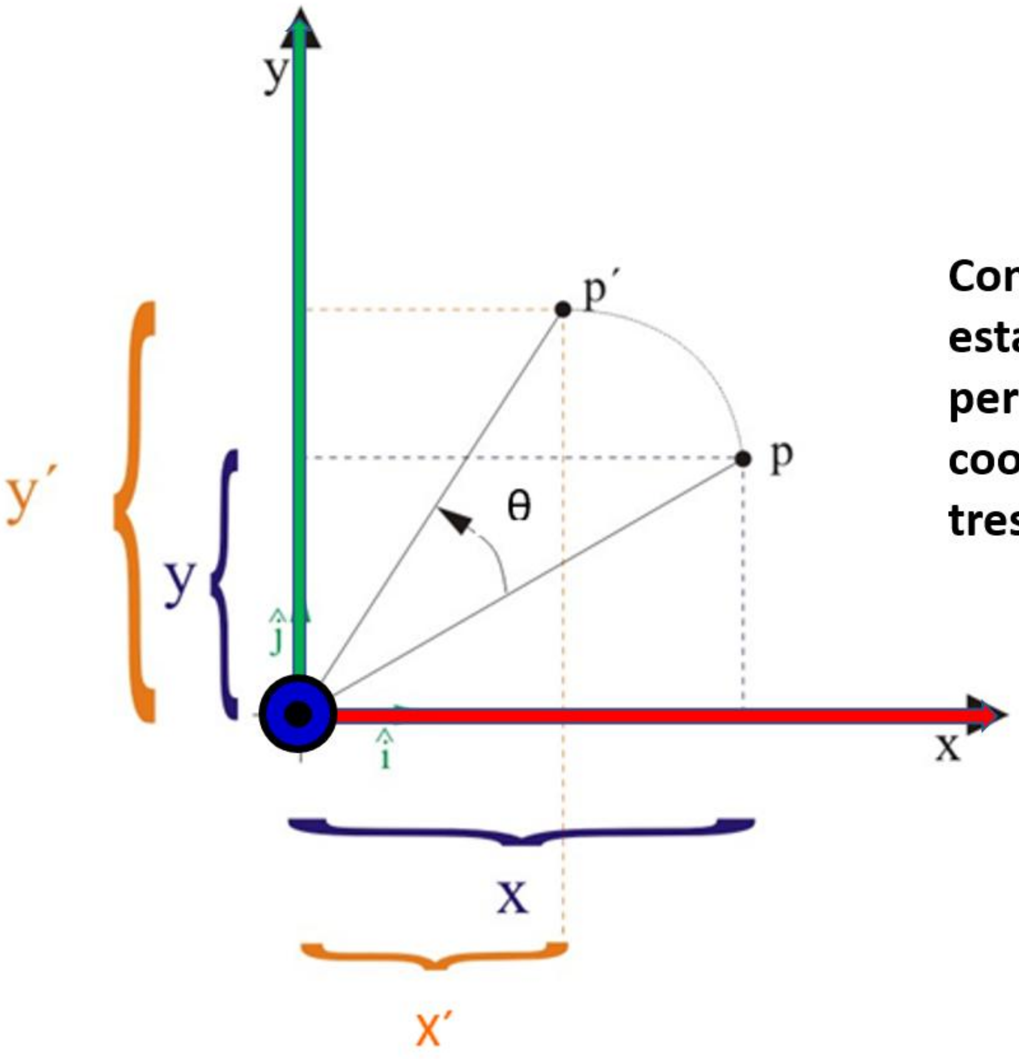
Composición de Matrices H

Robótica Espacial

Dictada por: Hugo Pailos
Lisandro Lanfranco
Ariel Libal

Repaso



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

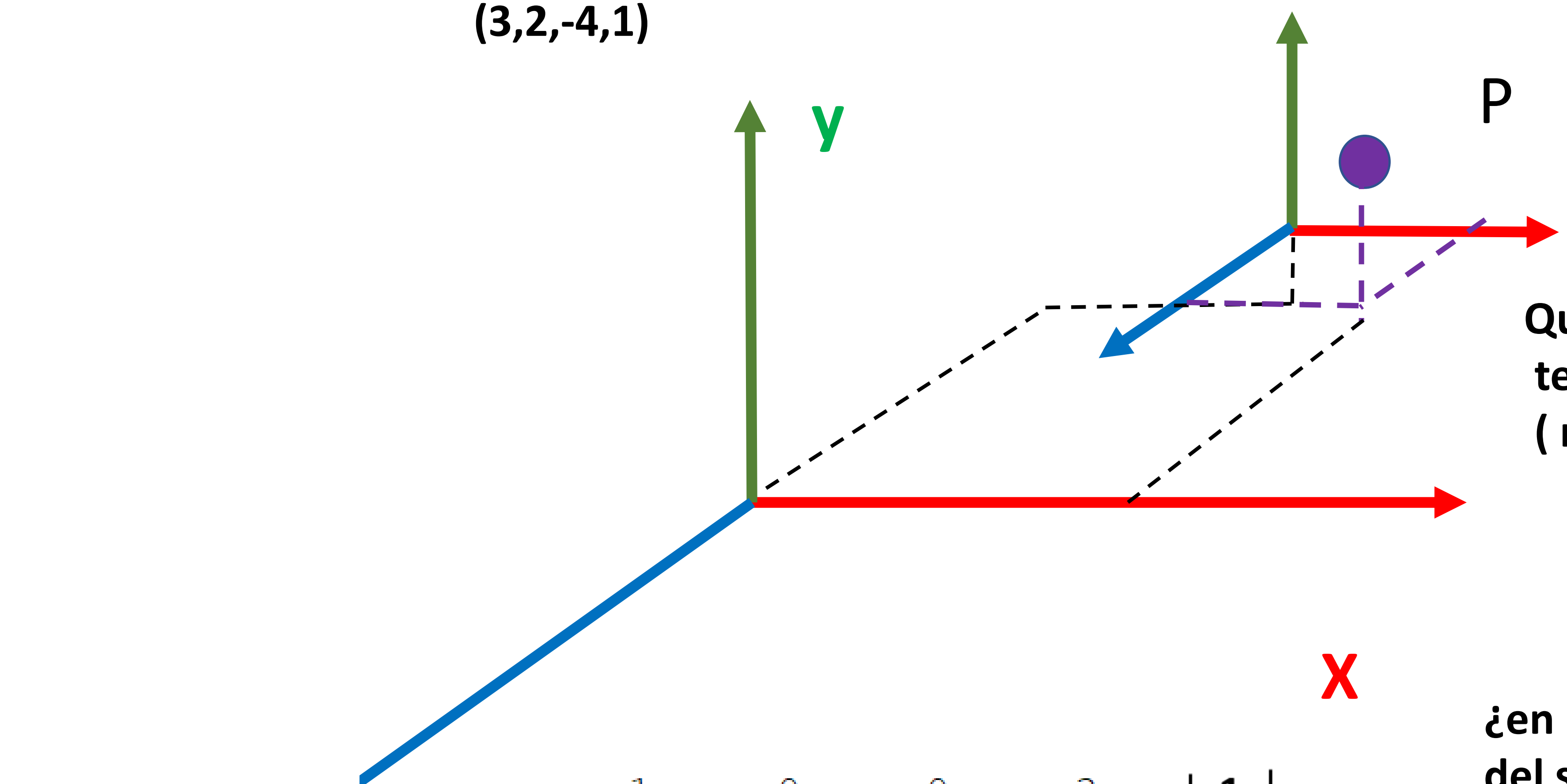
Como ocurrió en el caso de la traslación, podemos expresar esta matriz de 2x2 como una de 4x4 homogénea, que nos permita pre-multiplicar ésta por un vector, y lograr las nuevas coordenadas del punto *p'*; la matriz homogénea así definida en tres dimensiones es:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 & 0 \\ sen(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Origen del sistema desplazado:
(3,2,-4,1)

$$P = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

El Punto P en coordenadas del sistema Modificado

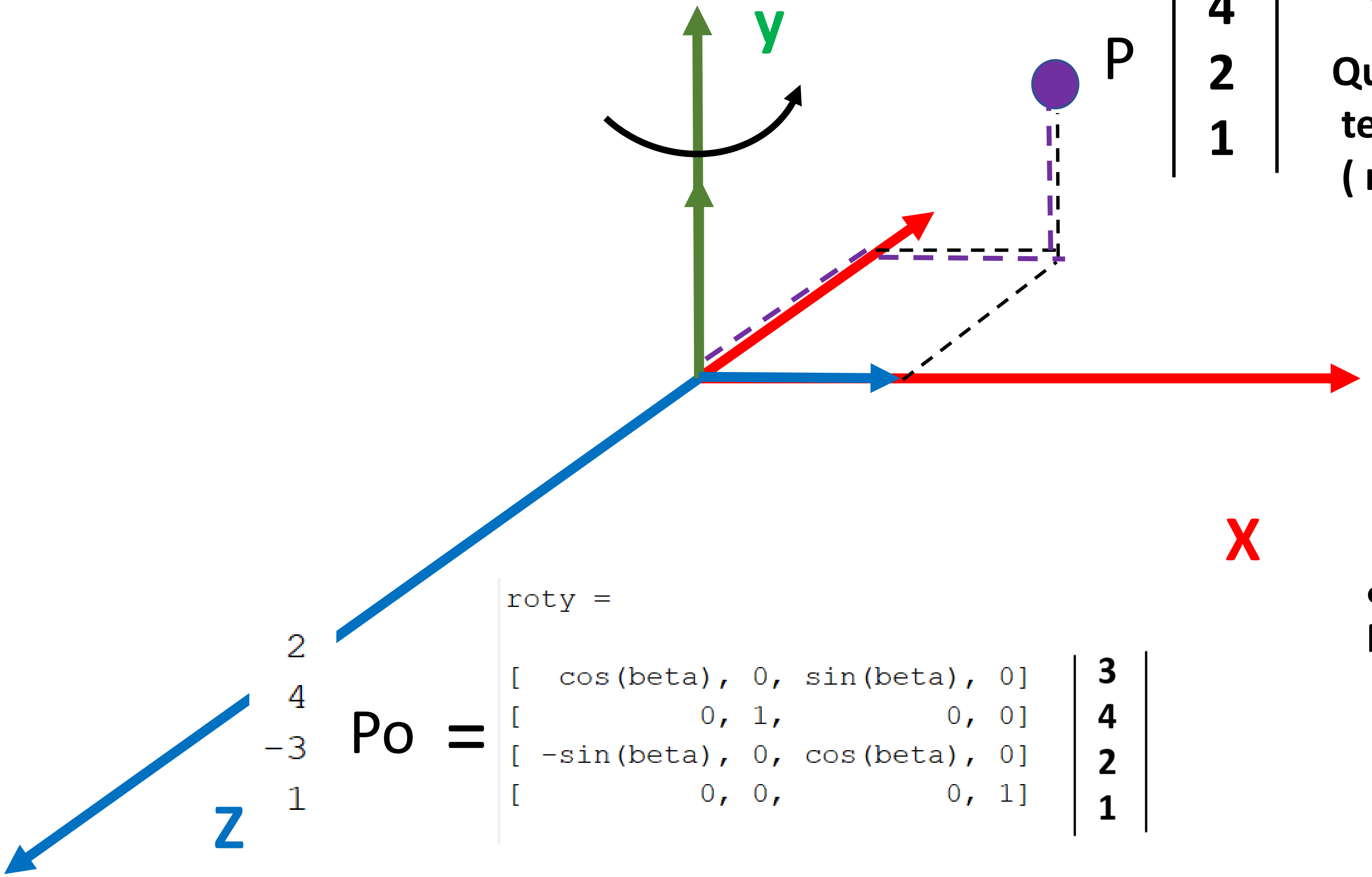


Queremos saber que coordenadas tendrá P en el sistema original (no desplazado)

¿en que lugar (x,y,z) está el origen del sistema trasladado?

$$\begin{matrix} 4 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{matrix} \quad Po = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

El origen es (0,0,0,1)



$$P \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

El Punto P en coordenadas del sistema Modificado en este caso Rot y, +pi/2

Queremos saber que coordenadas tendrá en el sistema original (no rotado)

$$Po \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \\ 1 \end{vmatrix}$$

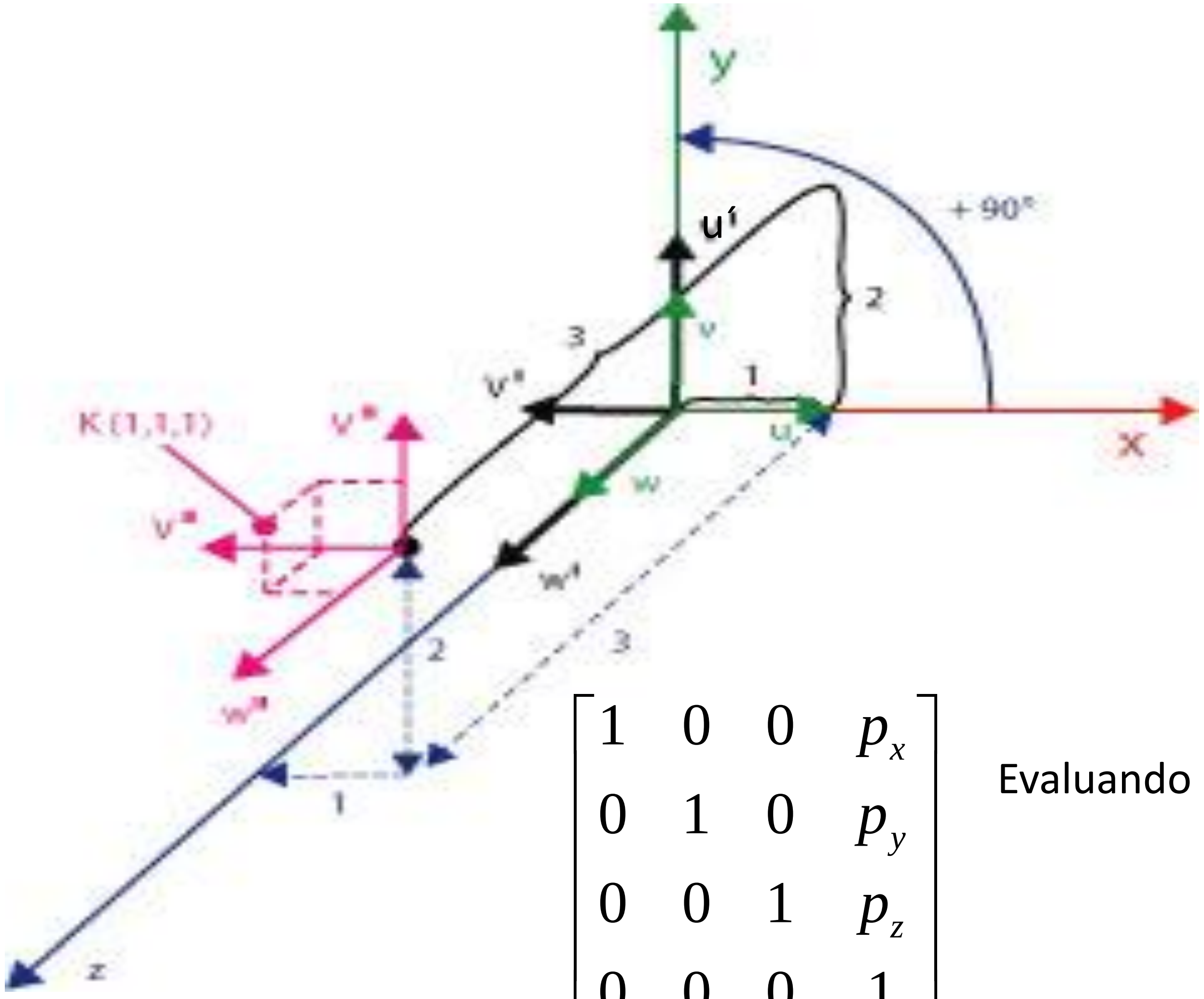
¿De que forma lo podemos hacer Matemáticamente ?

```
roty =

[   cos(beta), 0, sin(beta), 0]
[           0, 1,         0, 0]
[  -sin(beta), 0, cos(beta), 0]
[           0, 0,         0, 1]
```

$$\begin{matrix} 2 \\ 4 \\ -3 \\ 1 \end{matrix} \quad Po = \text{roty} \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

¿ en que lugar (x,y,z) está el origen del sistema otado?

El sistema *uvw* se a girado +π/2 alrededor del eje *z* , posteriormente, trasladado según el punto *p* cuyas coordenadas son: *p* = (1,2,3), ¿que coordenadas en el sistema de origen tiene el punto k= (1,1,1) en el sistema rotado y trasladado?



$$Rot(z,\theta)=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 & 0\\ sen(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

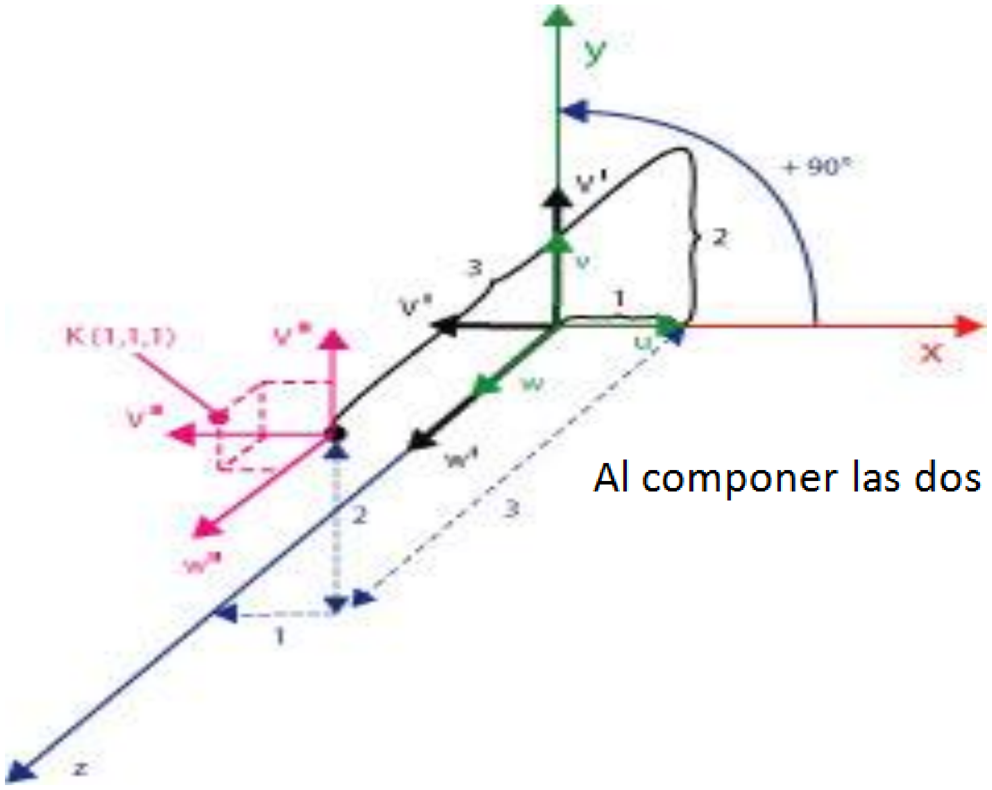
Evaluando en 90 grados

$$Rot(z,\theta)=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & p_x\\ 0 & 1 & 0 & p_y\\ 0 & 0 & 1 & p_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Evaluando en 1
2
3
1

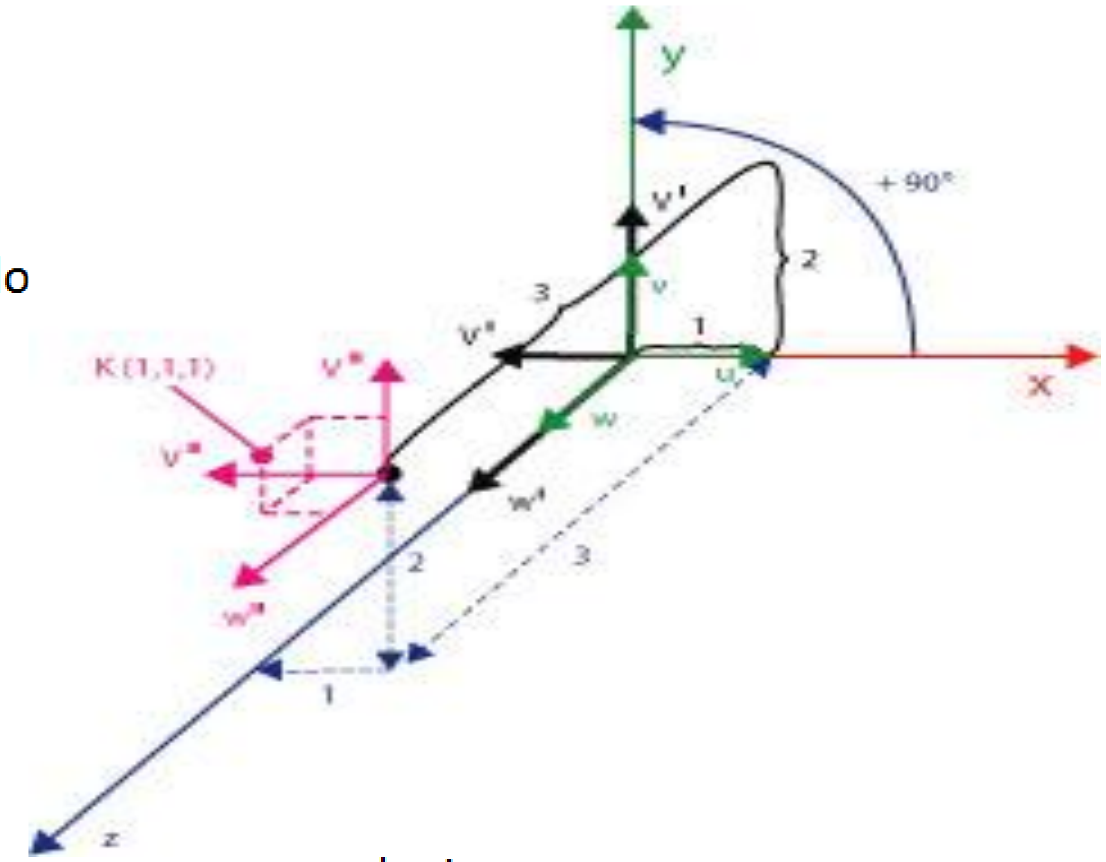
$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$



Al componer las dos matrices, hallaremos la T total, que describe la *uvw* con respecto al *xyz*.

$$\underbrace{\begin{matrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{matrix}}_{\text{Traslación}} \quad \underbrace{\begin{matrix}0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{matrix}}_{\text{Rotación}} \quad = \quad \underbrace{\begin{matrix}0 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{matrix}}_{H}$$

Pre- multipliquemos H por k = (1,1,1), para verificar el resultado



$$\begin{array}{cccc|c} & & & & 1\\ & & & & 1\\ & & & & 1\\ & & & & 1\\ \hline 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

H

H

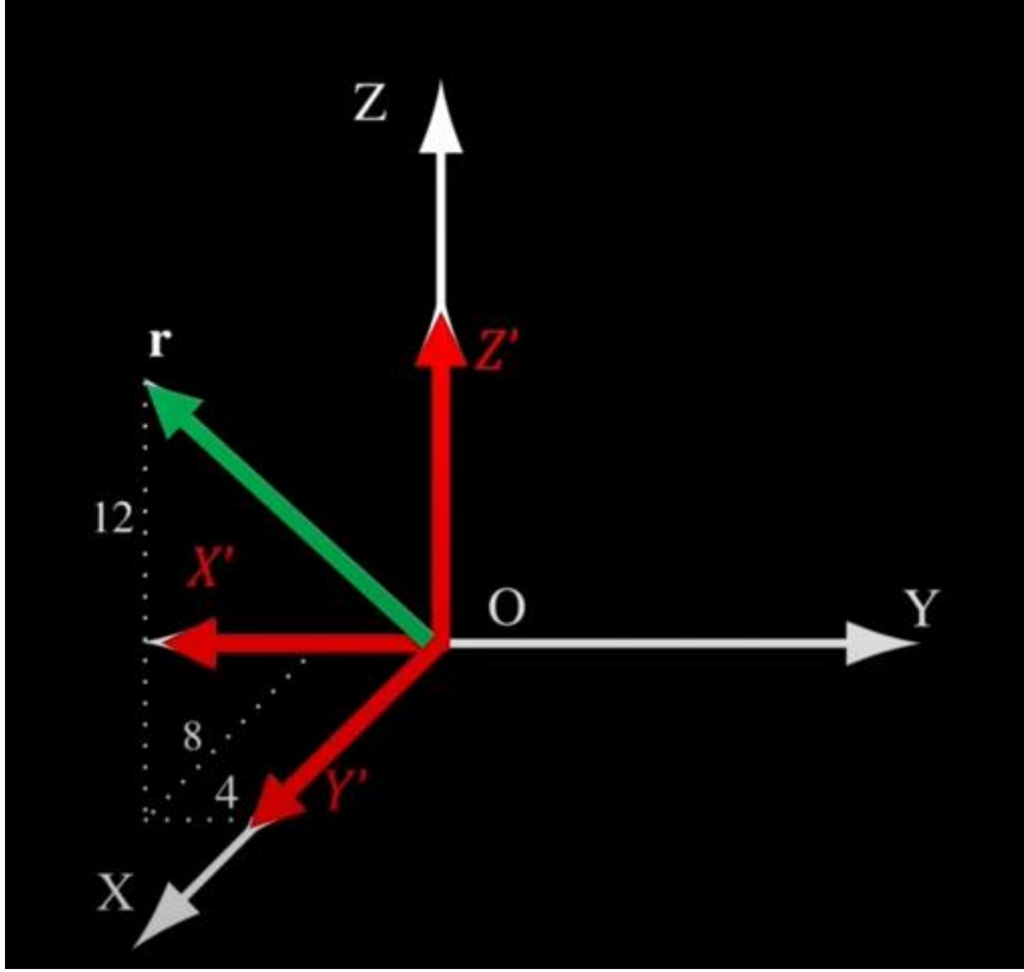
El punto k, expresado en el sistema xyz, que es el mismo resultado al que hemos llegado haciendo el análisis gráfico.

Rotaciones homogéneas

el sistema $OX'Y'Z'$ se encuentra girado -90° alrededor del eje Z con respecto al sistema OXYZ. Calcular las coordenadas del vector r_{xyz} si sus coordenadas en el sistema $OX'Y'Z'$ son $r_{X'Y'Z'}$ $(4, 8, 12)^T$.

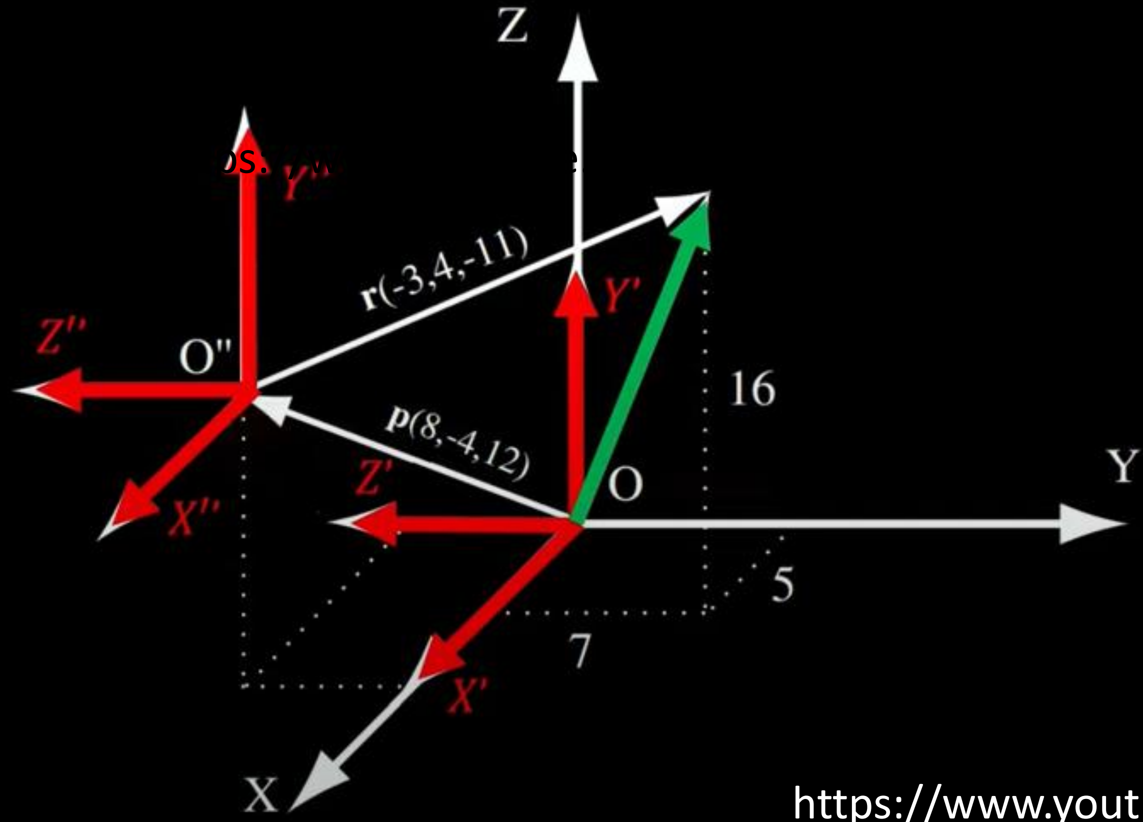
```
rotz =

[ cos(gama), -sin(gama), 0, 0]
[ sin(gama),  cos(gama), 0, 0]
[         0,          0, 1, 0]
[         0,          0, 0, 1]
```

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Rotación seguida de traslación

Un sistema $OX'Y'Z'$ ha sido girado 90° alrededor del eje OX y, posteriormente, trasladado un vector $p(8,4,12)$ con respecto al sistema $OXYZ$ Calcular las coordenadas $(rx\ ,ry\ ,rz\ )$ del vector r con coordenadas $rx'y'z'(-3,4,-11)$

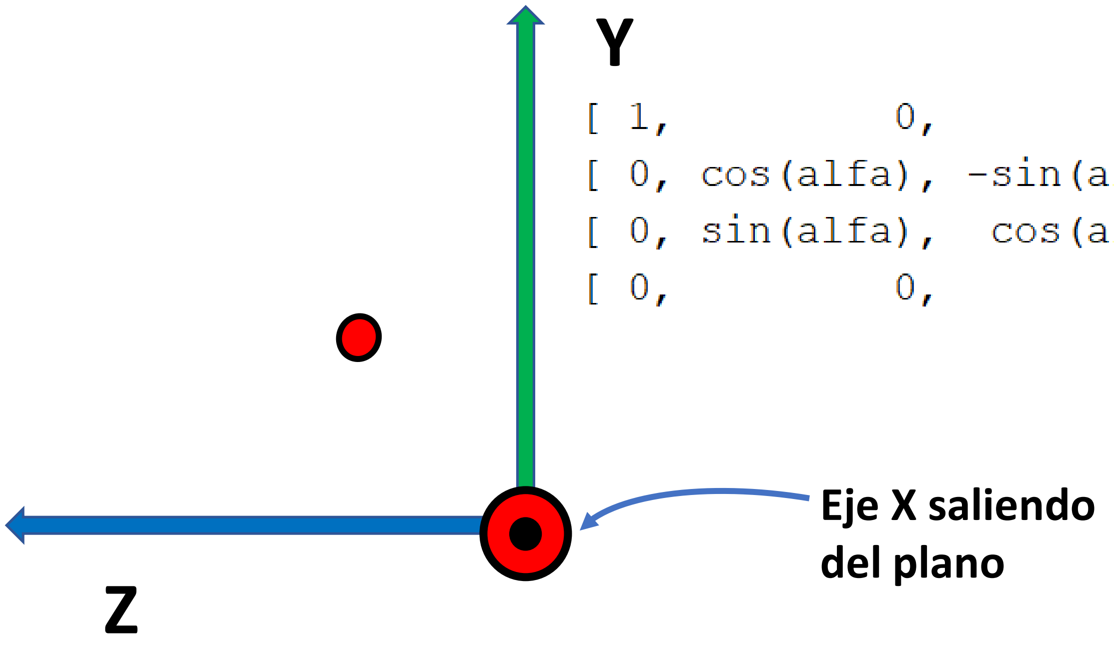


https://www.youtube.com/watch?v=TEVZZqU3790

Propiedad de H

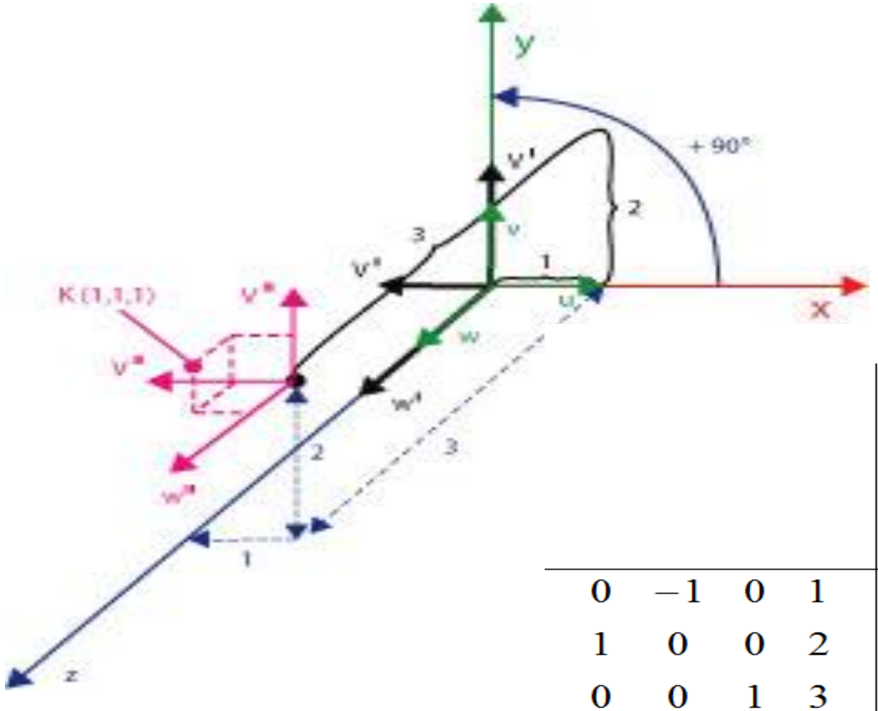
O sea que una matriz de trasformación homogénea además de representar una traslación o rotación de un punto en el espacio, puede representar un sistema trasladado y rotado desde uno original considerado fijo.

Si premultiplicamos la matriz que representa esas traslaciones y rotaciones por un punto cuyas coordenadas están es ese sistema modificado con respecto al original, obtendremos las coordenadas de ese punto en el sistema fijo




```
[ 1,          0,           0, 0]
[ 0, cos(alfa), -sin(alfa), 0]
[ 0, sin(alfa),  cos(alfa), 0]
[ 0,          0,           0, 1]
```

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{array}{cccc|c} & & & & 1 \\ & & & & 1 \\ & & & & 1 \\ & & & & 1 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

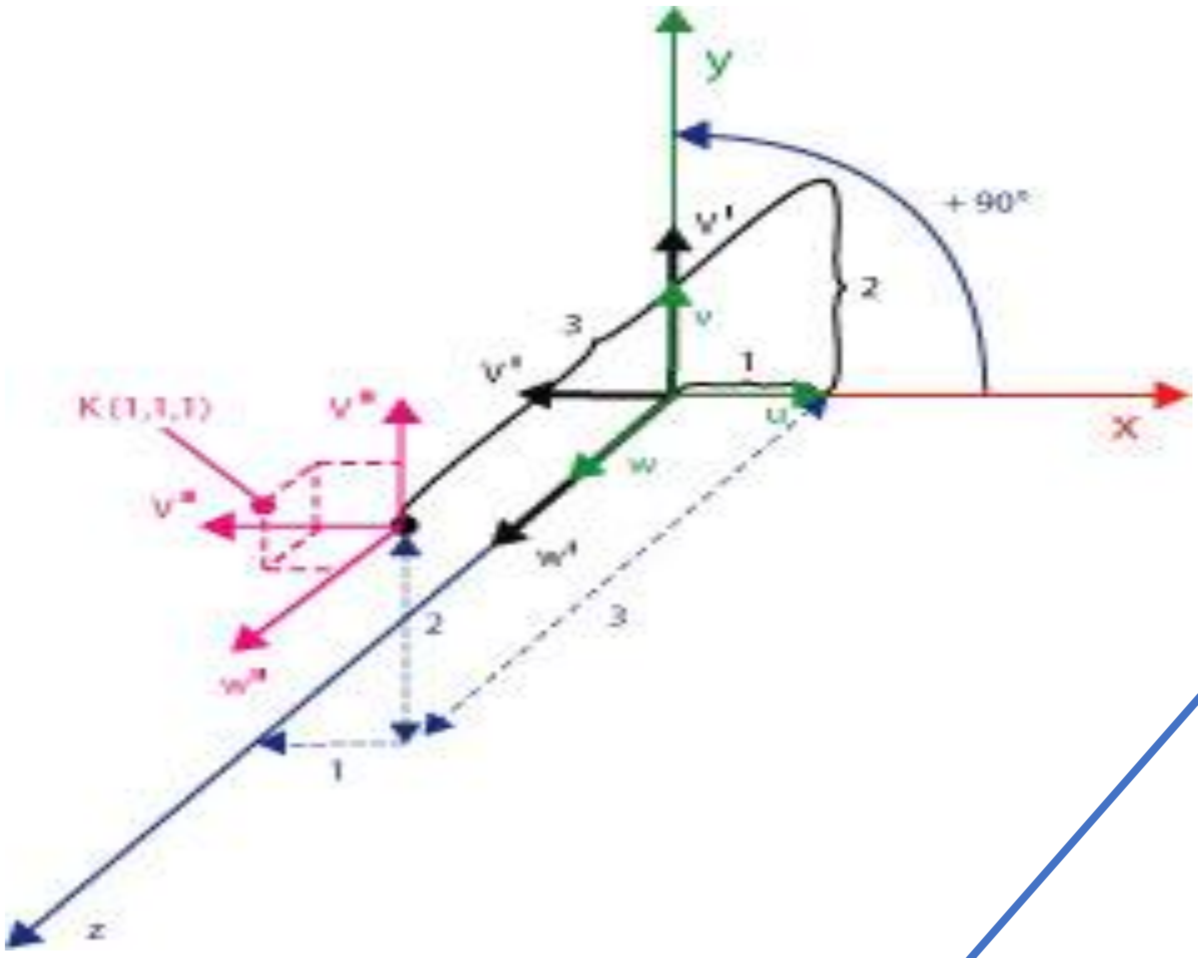
$\underbrace{\qquad\qquad}_{H}$

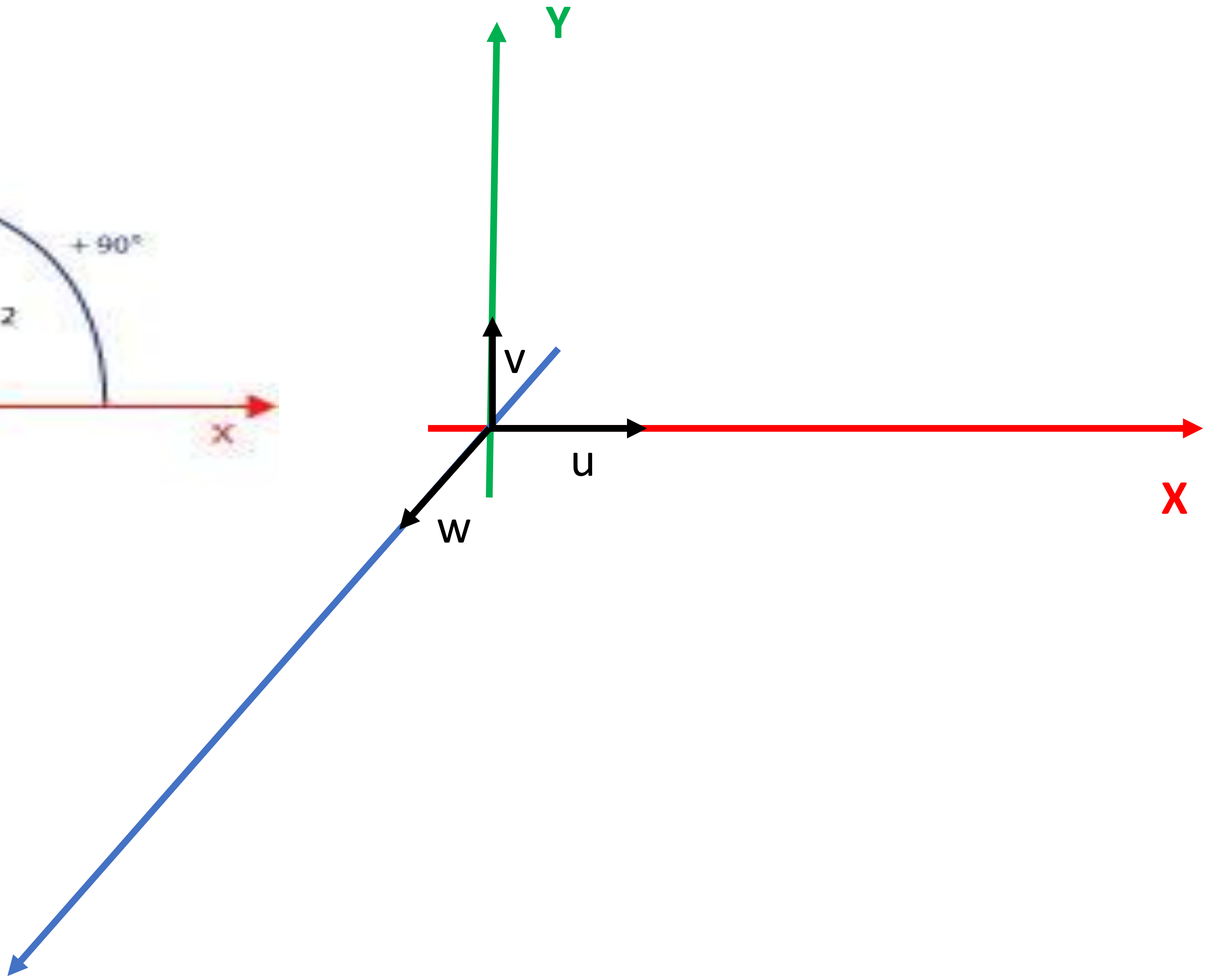
https://www.youtube.com/watch?v=TEVZZqU3790

https://www.youtube.com/watch?v=Hk1iOttyYQw

O sea que una matriz de trasformación homogénea además de representar una traslación o rotación de un punto en el espacio, puede representar un sistema trasladado y girado desde uno original

Ejercitación
(Ir al apunte)


y
+90°
v'
2
3
v
1
v'
u
x
K(1,1,1)
v*
w
w'
2
3
1
z


Y
v
u
X
w