Resolução de Sistemas Lineares

INF1608 – Análise Numérica

Departamento de Informática, PUC-Rio

Sistema de Equações Lineares

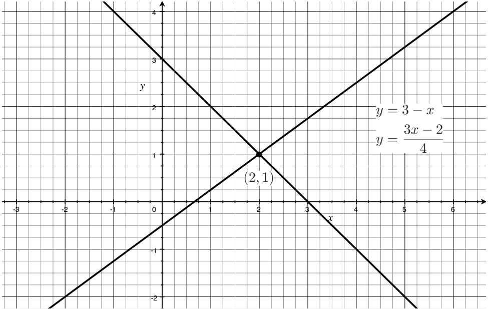
$$A_{n\times n}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_n$$

Exemplo:

$$x + y = 3$$
$$3x - 4y = 2$$

Ponto de vista geométrico

- Interseção de duas retas no plano xy



Forma matricial

Exemplo:

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ 2x + y - 2z &= 3 \\ -3x + y + z &= -6 \end{aligned}$$

Forma matricial:

$$A \quad \mathbf{x} \quad = \quad \mathbf{b}$$

$$\begin{array}{cl} & \longrightarrow j \\ \begin{array}{c} \downarrow \\ i \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix} \end{array}$$

Propriedades de sistemas lineares

O sistema não se altera se:

- Trocarmos a ordem das equações
- Multiplicarmos uma equação por k tal que $k \neq 0$
- Adicionarmos (ou subtrairmos) uma equação por outra
    - A equação resultante substitui uma das duas

Eliminação de Gauss

Objetivo

- Transformar a matriz A em uma matriz triangular superior:
  - Sem alterar o sistema

$$a_{ij} = 0 \quad \forall \quad i > j$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

- Daí achamos as incógnitas em ordem regressiva

$$z = \frac{\gamma}{f}$$

$$y = \frac{\beta - ez}{d}$$

$$x = \frac{\alpha - by - cz}{a}$$

Eliminação de Gauss

Eliminar os elementos da coluna j abaixo da diagonal ($i > j$)

- Para eliminar aij, fazemos:

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{ij}}{a_{jj}} L_j$$

$$\text{onde } L_i = a_{ik}, k = 0, 1, 2, ...$$

- O valor $f_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{jj}}$ é chamado **fator** da eliminação
- Exemplo: zerar primeira coluna
  - Todos os elementos de uma linha podem mudar

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{00} & a_{01} & a_{02} & b_0 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{rl} f_{10} = & \frac{a_{10}}{a_{00}} \\ L_1 = & L_1 - L_0 f_{10} \\ f_{20} = & \frac{a_{20}}{a_{00}} \\ L_2 = & L_2 - L_0 f_{20} \end{array}$$

Eliminação de Gauss

Para a coluna $j = 0$:

- Para eliminar a_{10}:
  - Fator
    $$f_{10} = \frac{a_{10}}{a_{00}} = \frac{2}{1} = 2$$
  - Alterando a L_1
    $$L_1 = L_1 - f_{10} L_0$$

Representação matricial compacta:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 1 & -6 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \\ -3 & 1 & 1 & -6 \end{array}\right]$$

Eliminação de Gauss

Para a coluna $j = 0$:

- Para eliminar a_{20}:
  - Fator

$$f_{20} = \frac{a_{20}}{a_{00}} = \frac{-3}{1} = -3$$

  - Alterando a L_2

$$L_2 = L_2 - f_{20} L_0$$

Representação matricial compacta:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 1 & -6 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{7} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} \end{array}\right]$$

Eliminação de Gauss

Para a coluna $j = 1$:

- Para eliminar a_{21}:
  - Fator

$$f_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{7}{-3} = -\frac{7}{3}$$

  - Alterando a L_2

$$L_2 = L_2 - f_{21} L_1$$

Representação matricial compacta:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 7 & -2 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{-4} \end{array}\right]$$

Eliminação de Gauss

Retro-substituição (*back substitution*)

- Determinar x_2, x_1, x_0, nesta ordem

$$a_{ii}\,x_i + \sum_{j=i+1}^{n-1} a_{ij}\,\underbrace{x_j}_{\text{já conhecidos, pois } j>i} = b_i$$

$$\therefore\; x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n-1} a_{ij}x_j}{a_{ii}}$$

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} z &= \frac{b_2}{a_{22}} \\ y &= \frac{b_1 - a_{12}z}{a_{11}} \\ x &= \frac{b_0 - a_{02}z - a_{01}y}{a_{00}} \end{aligned}$$

Eliminação de Gauss

Retro-substituição no exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ \mathbf{-4} \end{bmatrix} \qquad x_2 = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \mathbf{-3} \\ -4 \end{bmatrix} \qquad x_1 = \frac{-3 - 0}{-3} = 1$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} \qquad x_0 = \frac{3 - (2 - 2)}{1} = 3$$

Eliminação de Gauss

Algoritmo: **Eliminação**

```
for j = 0 to n − 2
    // elimina coluna j
    for i = j + 1 to n − 1
        // calcula fator de eliminação da coluna j na linha L_i
        f = a_ij / a_jj
        for k = j to n − 1
            // atualiza linha L_i, em cada a_ik ∀ k ≥ j
            a_ik = a_ik − a_jk f
        b_i = b_i − b_j f
```

- Obs 1: Note que o **for** de k pode começar em $k = j + 1$, pois sabemos que a_{ij} resulta em zero e que valor não será usado
- Obs 2: a_{ij} e a_{jj} podem não corresponder aos valores originais da matriz, para $j > 0$

Eliminação de Gauss

Algoritmo: **Retro-substituição**

for $i = n - 1$ **to** 0 **step** -1
  // calcula cada x_i
  $s = 0$
  for $j = i + 1$ **to** $n - 1$
    // calcula somatório com x_i já calculados
    $s = s + a_{ij}\, x_j$
  // após for, $a_{ii} x_i + s = b_i$
  $x_i = \dfrac{b_i - s}{a_{ii}}$

Custo computacional:

- Eliminação: $O(n^3)$
- Retro-substituição: $O(n^2)$
- **Total**: $O(n^3)$

Medição de erros: Fontes de erros

Matriz mal condicionada

- Não pode ser evitado

Divisão por zero (pivô igual a zero ou muito pequeno)

- Pode ser evitado

Matriz mal condicionada: Fator de ampliação do erro

$$F_{AE} = \frac{e_{prog_{rel}}}{e_{reg_{rel}}}$$

Medição de erros: Norma máxima de vetor e matriz

Norma máxima de um vetor

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

Norma máxima de uma matriz

$$\|A\|_\infty = \max_i \left(\sum_j |a_{ij}| \right)$$

Medição de erros: Resolução de sistemas lineares

Erro regressivo (avaliado na entrada)

$$\underbrace{\mathbf{r}}_{\text{resíduo}} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_c, \text{ onde } \mathbf{x}_c \text{ é a solução computada}$$

$$e_{reg} = \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}_c\|_\infty$$

Erro progressivo (avaliado na saída)

$$e_{prog} = \|\mathbf{x}_e - \mathbf{x}_c\|_\infty$$

se conhecêssemos $\mathbf{x}_e$, a solução exata

Se e_{prog} for grande, e e_{reg} for pequeno, mesmo um $\mathbf{x}_c$ distante de $\mathbf{x}_e$, irá gerar $\mathbf{b} \approx A\mathbf{x}_c$ (e será considerada uma solução), representando um alto fator de ampliação de erro.

Medição de erros: Fator de ampliação do erro

Erros relativos

$$e_{reg_{rel}} = \frac{\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}_c\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty} = \frac{\|\mathbf{r}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty}$$

$$e_{prog_{rel}} = \frac{\|\mathbf{x}_e - \mathbf{x}_c\|_\infty}{\|\mathbf{x}_e\|_\infty}$$

Fator de ampliação do erro

$$F_{AE} = \frac{e_{prog_{rel}}}{e_{reg_{rel}}}$$

No entanto, geralmente não sabemos o valor de x_e...

Medição de erros: Número de Condicionamento

Definição

- Representa o máximo fator de ampliação de erro na solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, para qualquer $\mathbf{b}$

$$F_{AE\,max} = cond(A) = \|A\|\|A^{-1}\|, \ \|A\| \to \|A\|_\infty$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.0001 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} -10000 & 10000 \\ 10001 & -10000 \end{bmatrix}$$

Logo:

$$cond(A) = 2.0001\ 20001 \approx 40004$$

- A matriz A é mal condicionada
  - Dificilmente teremos controle do erro da solução

Eliminação de Gauss

Tratamento de divisão por zero e afins

- Troca de linhas durante Eliminação de Gauss
  - Evitar divisão por zero (ou por um número pequeno)
  - Evitar Swamp (perda de termos de uma equação)

Exemplo sem troca de linhas: $f_{10} = 10^{20}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 10^{-20} & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 10^{-20} & 1 & 1 \\ 0 & 2 - 10^{20} & 4 - 10^{20} \end{array}\right] \therefore x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo com troca de linhas: $f_{10} = 10^{-20}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 10^{-20} & 1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 - 2 \times 10^{-20} & 1 - 4 \times 10^{-20} \end{array}\right] \therefore x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Solução ainda não exata, mas próxima

Pivotamento

Objetivo: Manter $|f| \leq 1$

- Antes da eliminação em cada coluna, identifica-se a linha com elemento na coluna de **maior valor absoluto** e trocam-se as linhas, mantendo o maior valor absoluto como pivô.

Logo, o pivô será:

$$|a_{pj}| \geq |a_{ij}| \ \forall \ j \leq i \leq n-1$$

- Linhas L_i, para $i < j$, já está prontas
  - Não são mais atualizadas durante a eliminação
  - Contém os pivôs das colunas zeradas
- Ex: Se estamos elimininando a col. 2, L_0 e L_1 estão prontas
  - L_0 contém o pivô em a_{00} e L_1 em a_{11}
  - Não necessariamente a_{11} é um valor original da matriz

Pivotamento

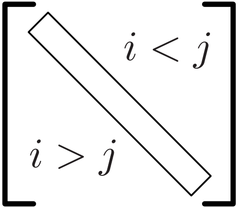
Algortimo: injetado na eliminação de gauss

```
...
// antes da eliminação da coluna j
p = j
for k = j + 1 to n − 1
    // busca linha k com maior pivô
    if |a_kj| > |a_pj|
        p = k
// troca linhas j e p
for k = j to n − 1
    a_jk ↔ a_pk
b_j ↔ b_p
...
// elimina coluna j de cada linha i > j
```

Fatoração LU

Representação matricial da Eliminação de Gauss

$$\text{Matriz triangular} \begin{cases} \text{inferior } (L) \\ \text{superior } (U) \end{cases}$$



$$l_{ij} = 0 \ \forall \ i < j$$
$$u_{ij} = 0 \ \forall \ i > j$$

Permite avaliar o mesmo sistema Ax para diferentes vetores b

Fatoração LU

Sistema

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Fatoração da matriz

$$A = L\,U$$

- Eliminação de Gauss $\longrightarrow$ produz U
- Como determinar L?

Fatoração LU

Sistema

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Fatoração da matriz

$$A = L\,U$$

- Eliminação de Gauss $\longrightarrow$ produz U
- Como determinar L?

$$l_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \text{ (diagonal)} \\ f_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{jj}}, \text{ se } i > j \end{cases}$$

  - Elementos inferiores são os fatores da Eliminação de Gauss

Fatoração LU

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

- Eliminação: $f_{10} = \frac{3}{2}$

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 - 2\frac{3}{2} & -4 - 2\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$$

- Triangular inferior

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Comprovação

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = A$$

Fatoração LU

Dado que $A = LU$, como resolver o sistema?

$$Ax = L\,Ux = \mathbf{b}$$

$$\begin{cases} L\mathbf{y} & = \mathbf{b} \quad [1] \\ U\mathbf{x} & = \mathbf{y} \quad [2] \end{cases}$$

- Acha-se **y** por **substituição progressiva** [1]
- Acha-se **x** por **substituição regressiva** (retro-substituição) [2]

Note que, nesse caso, a fatoração de A não altera b

- Solução para diferentes b pode ser obtida em tempo $O(n^2)$
  - Mas o tempo de fatoração é $O(n^3)$
- No entanto, e se for necessário realizar **pivotamento**?

Fatoração $PA = LU$

Como combinar fatoração e pivotamento?

- Registrar permutações durante processo de fatoração

Matriz de permutação: P

- Registra permutação de linhas
- Obtida trocando-se linhas da matriz identidade
  - Exemplo: troca da segunda com terceira linha

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Note que:

- $PA \rightarrow$ troca linhas de A
- $P\mathbf{b} \rightarrow$ troca linhas (elementos) de $\mathbf{b}$
- A partir de P, temos a relação $PA = LU$

Fatoração $PA = LU$

Resolvendo o sistema

$$P\,A\mathbf{x} = P\mathbf{b}$$
$$L\,U\mathbf{x} = P\mathbf{b}$$
$$\begin{cases} L\mathbf{y} & = P\mathbf{b} \\ U\mathbf{x} & = \mathbf{y} \end{cases}$$

Fatoração $PA = LU$ – Armazenamento

Como armazenar LU de forma otimizada?

- Transforma A em LU, *in place*
- Diagonal de L implícita
- Permutação move **todos** os elementos da linha

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} & u_{02} \\ l_{10} & u_{11} & u_{12} \\ l_{20} & l_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$$

E para armazenar P de forma otimizada?

- Registro das permutações em um vetor $\mathbf{p}$
  - Inicialização: $\mathbf{p}_i = i$
  - Troca de i com j: $\mathbf{p}_i \leftrightarrow \mathbf{p}_j$
  - Permutação em $\mathbf{b}$: $\mathbf{b}_{\mathbf{p}_i}$

Fatoração

Podemos diminuir o espaço de memória da fatoração?

- Se A for simétrica, é possível usar metade do espaço?

Fatoração

Podemos diminuir o espaço de memória da fatoração?

- Se A for simétrica, é possível usar metade do espaço?

- Sim, com **Fatoração de Cholesky**,
  se matriz for **simétrica positiva definida**

Matriz Simétrica Positiva Definida

Propriedades:

$$A^T = A, \quad \mathbf{x}^T A\,\mathbf{x} > 0, \quad \forall \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

1. Elementos da diagonal principal são positivos
2. Autovalores são todos positivos
3. Qualquer submatriz principal é também positiva

Fatoração de Cholesky

Dada a matriz A simétrica positiva definida

- Objetivo: encontrar matriz triangular superior R tal que:

$$A = R^T R$$

Caso $n = 2$:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ u & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{a} & u \\ 0 & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & u\sqrt{a} \\ u\sqrt{a} & u^2 + v^2 \end{bmatrix}$$

$$b = u\sqrt{a} \quad \therefore \quad u = \frac{b}{\sqrt{a}}$$

$$c = u^2 + v^2 = \frac{b^2}{a} + v^2 \quad \therefore \quad v = \sqrt{c - \frac{b^2}{a}}$$

Fatoração de Cholesky

Caso $n \times n$:

$$A = \left[\begin{array}{c|c} a & \mathbf{b}^T \\ \hline \mathbf{b} & C \end{array}\right] = R^T R$$

$$R^T R = \left[\begin{array}{c|ccc} \sqrt{a} & 0 & \dots & 0 \\ \hline \mathbf{u} & & V^T & \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \sqrt{a} & \mathbf{u}^T \\ \hline 0 & \\ \vdots & V \\ 0 & \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} a & \sqrt{a}\mathbf{u}^T \\ \hline \sqrt{a}\mathbf{u} & \mathbf{u}\,\mathbf{u}^T + V^T V \end{array}\right] \left\{\begin{array}{l} \mathbf{u} = \frac{\mathbf{b}}{\sqrt{a}} \\ V^T V = C - \mathbf{u}\mathbf{u}^T = A_1 \end{array}\right.$$

Fatoração de Cholesky: Iteração para caso $n \times n$

$$A = \left[\begin{array}{c|ccc} \sqrt{a} & 0 & \dots & 0 \\ \hline \\ \mathbf{u} & & V^T & \\ \\ \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \sqrt{a} & \mathbf{u}^T \\ \hline 0 & \\ \vdots & V \\ 0 & \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} \sqrt{a} & 0 & \dots & 0 \\ \hline \\ \mathbf{u} & & I & \\ \\ \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \sqrt{a} & \mathbf{u}^T \\ \hline 0 & \\ \vdots & I \\ 0 & \end{array}\right]$$

- Iteração se repete para o caso $n-1 \times n-1$, fatorando A_1

Fatoração de Cholesky: Procedimento

- Primeira linha

$$r_{00} = \sqrt{a_{00}}$$
$$\mathbf{u}^T = \frac{\mathbf{b}^T}{r_{00}}$$
$$A_1 = C - \mathbf{u}\mathbf{u}^T$$

- onde:
  - A_1 é uma matriz $(n-1) \times (n-1)$
  - $A_1 = V^T V$, onde V é triangular superior
- Procedimento repete em A_1
- Até chegar em caso 1×1

Fatoração de Cholesky: Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 11 \end{bmatrix}, R^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- $r_{00} = \sqrt{a_{00}} = 2$
- $\mathbf{u}^T = \frac{\mathbf{b}^T}{r_{00}} = \frac{[-2,2]}{2} = [-1, 1]$
- $A_1 = C - \mathbf{u}\mathbf{u}^T$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}$$

Fatoração de Cholesky: Exemplo

$$A* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 10 \end{bmatrix}, R^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- $r_{11} = \sqrt{a_{11}} = 1$
- $\mathbf{u}^T = \frac{\mathbf{b}^T}{r_{11}} = \frac{-3}{1} = -3$
- $A_2 = C - \mathbf{u}\mathbf{u}^T$:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

Fatoração de Cholesky: Exemplo

$$A* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

- $r_{22} = \sqrt{a_{22}} = 1$
- Caso 1×1, termina.

$$R^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}, onde\ R^T R = A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 11 \end{bmatrix}$$

Fatoração de Cholesky: Algoritmo (fatoração *in place*)

- Entrada: $A_{n \times n}$, triangular
- Saída: R^T, triangular

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{for } k = 0 \textbf{ to } n-1 & \\
\quad A_{kk} = \sqrt{A_{kk}} & = r_{kk} \\
\quad \textbf{for } i = k+1 \textbf{ to } n-1 & \\
\quad\quad A_{ik} = A_{ik} / A_{kk} & = \mathbf{u} \textit{ (vetor coluna)} \\
\quad \textbf{for } i = k+1 \textbf{ to } n-1 & \\
\quad\quad \textbf{for } j = k+1 \textbf{ to } i & \\
\quad\quad\quad A_{ij} = A_{ij} - A_{ik} A_{jk} & = A_{ij} - \mathbf{u}\mathbf{u}^T
\end{array}
$$

Fatoração de Cholesky: Resolvendo sistema

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$R^T R\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\begin{cases} R^T\mathbf{y} &= \mathbf{b} \\ R\mathbf{x} &= \mathbf{y} \end{cases}$$

- Acha-se **y** por **substituição progressiva**
- Acha-se **x** por **substituição regressiva** (retro-substituição)

Observação

- Na fatoração de Cholesky,
  não é necessário uso de pivotamento

Exercícios propostos

Considerando a resolução de sistemas lineares na forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, baseado no método de Eliminação de Gauss, a fatoração LU pode resultar numa única matriz F que representa, de forma compacta, os elementos de L e de U. Para uma matriz 2×2, temos:

$$F = \begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} \\ l_{10} & u_{11} \end{bmatrix}$$

Considere a matriz A dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Indique os valores da matriz F resultante da fatoração LU de A considerando os casos de:

1. Não usar pivotamento
2. Usar pivotamento

Exercícios propostos

Ache a fatoração de Cholesky $A = R^T R$ para:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$