

Interpolação de Polinômios

INF1608 – Análise Numérica

Departamento de Informática, PUC-Rio



Interpolação de Polinômios

Motivação

- ▶ Funções polinomiais são avaliadas de forma eficiente
 - ▶ Fatoração natural
 - ▶ $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$ (4 somas e 10 multiplicações)
 - ▶ $a + x(b + x(c + x(d + ex)))$ (4 somas e 4 multiplicações)
- ▶ **Compressão**
 - ▶ Aproximar conjuntos de amostras por funções polinomiais
- ▶ **Desempenho**
 - ▶ Aproximar funções complexas por funções polinomiais



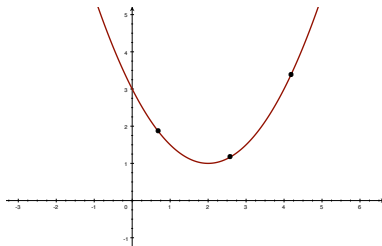
Interpolação de Polinômios

Definição

- ▶ $y = f(x)$ interpola um conjunto de pontos (x_i, y_i) se, e somente se, $y_i = f(x_i) \quad \forall (x_i, y_i)$.

Exemplo

- ▶ Existe uma parábola que interpola 3 pontos não colineares



Como $f(x)$ é uma função, é necessário que x_i sejam distintos. Se forem, o polinômio $y = P(x)$ **sempre existe**



Interpolação de Polinômios: Interpolação de Lagrange

Dados n pontos $(x_0, y_0) \dots (x_{n-1}, y_{n-1})$, existe um polinômio interpolante de grau $n - 1$ dado pela fórmula de Lagrange:

$$P_{n-1}(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_{n-1} L_{n-1}(x)$$

onde $L_k(x)$ é dado por:

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_{n-1})}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_{n-1})}$$

Resulta em um polinômio de grau no máximo igual a $n - 1$



Interpolação de Lagrange

Exemplo: Dados 3 pontos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$

$$P_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

► Note que:

$$P_2(x_0) = y_0$$

$$P_2(x_1) = y_1$$

$$P_2(x_2) = y_2$$



Interpolação de Polinômios: Unicidade

Pergunta...

- ▶ Dado um conjunto qualquer com n pontos com x_i distintos, existe um **único polinômio interpolante**?



Interpolação de Polinômios: Unicidade

Pergunta...

- ▶ Dado um conjunto qualquer com n pontos com x_i distintos, existe um **único polinômio interpolante**?

Prova de unicidade

- ▶ Suponha que existe $P(x)$ e outro polinômio interpolante $Q(x)$.
- ▶ Se definirmos $H(x) = P(x) - Q(x)$
 - ▶ O grau de $H(x)$ é no máximo $n - 1$

No entanto, como H se anula em todos os pontos:

$$H(x_0) = 0, H(x_1) = 0, \dots H(x_{n-1}) = 0$$

$\Rightarrow H(x)$ tem n raízes distintas

Logo: $H(x)$ é identicamente zero e $P(x) \equiv Q(x)$



Interpolação de Polinômios

- ▶ Interpolador de Lagrange gera um polinômio cuja avaliação computacional é cara, pois não favorece a fatoração
-



Interpolação de Polinômios

- ▶ Interpolador de Lagrange gera um polinômio cuja avaliação computacional é cara, pois não favorece a fatoração

Interpolação por Diferenças Divididas de Newton

- ▶ Interpolação linear

$$\begin{aligned}f_1(x) &= f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) \\&= b_0 + b_1(x - x_0)\end{aligned}$$



Interpolação por Diferenças Divididas de Newton

► Interpolação quadrática

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

► Onde...

$$b_0 = f(x_0)$$

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$b_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$



Interpolação por Diferenças Divididas de Newton

Fórmula geral dos Polinômios por Diferenças Divididas de Newton

- Considerando n pontos

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + b_{n-1}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-2})$$

onde:

$$b_0 = f[x_0]$$

$$b_1 = f[x_0 \ x_1]$$

$$b_2 = f[x_0 \ x_1 \ x_2]$$

...

$$b_{n-1} = f[x_0 \dots x_{n-1}]$$

- $f[x_i \dots x_j]$: diferenças divididas de Newton de x_i a x_j
- Note que o polinômio gerado favorece fatoração



Interpolação por Diferenças Divididas de Newton

Diferenças divididas

► Ordem 0:

$$f[x_k] = f(x_k)$$

► Ordem 1:

$$f[x_k, x_{k+1}] = \frac{f[x_{k+1}] - f[x_k]}{x_{k+1} - x_k}$$

► Ordem 2:

$$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}] - f[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k}$$

► Ordem n :

$$f[x_i, \dots, x_j] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_j] - f[x_i, \dots, x_{j-1}]}{x_j - x_i}$$



Interpolação por Diferenças Divididas de Newton

Algoritmo: Diferenças Divididas de Newton

Determinar $f[x_i \dots x_j]$, com $i \leq j$:

if $i = j$

return $f(x_i)$

else

return $\frac{f[x_{i+1} \dots x_j] - f[x_i \dots x_{j-1}]}{x_j - x_i}$

Algoritmo ineficiente

- ▶ Múltiplas avaliações das mesmas diferenças divididas



Interpolação por Diferenças Divididas de Newton

Estrutura recursiva na avaliação das diferenças divididas

$$\begin{array}{ccccccccc} f[x_0] & \rightarrow & f[x_0 \ x_1] & \rightarrow & f[x_0 \dots x_2] & \rightarrow & f[x_0 \dots x_3] & \rightarrow & f[x_0 \dots x_4] \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & f[x_1] & \rightarrow & f[x_1 \ x_2] & \rightarrow & f[x_1 \dots x_3] & \rightarrow & f[x_1 \dots x_4] \\ & & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & & & f[x_2] & \rightarrow & f[x_2 \ x_3] & \rightarrow & f[x_2 \dots x_4] \\ & & & & & & \uparrow & & \uparrow \\ & & & & & & f[x_3] & \rightarrow & f[x_3 \ x_4] \\ & & & & & & & & \uparrow \\ & & & & & & & & f[x_4] \end{array}$$

Solução eficiente

- Implementação **bottom-up**, ou
 - Implementação com **cache**
- } Exige armazenamento de ordem quadrática



Interpolação de Polinômios

Como obter polinômio na forma convencional?

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_{n-1}x^{n-1}$$

- ▶ Não existe fórmula para determinar o polinômio nesta forma
- ▶ Solução seria resolver um sistema linear $n \times n$
 - ▶ Ineficiente computacionalmente
 - ▶ Instável numericamente
 - ▶ Sistemas tendem a ser mal condicionados para n grandes
 - ▶ Perde-se o controle do erro na determinação dos coeficientes

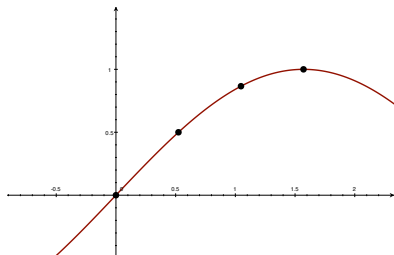


Interpolação de Polinômios

Exemplo

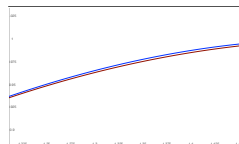
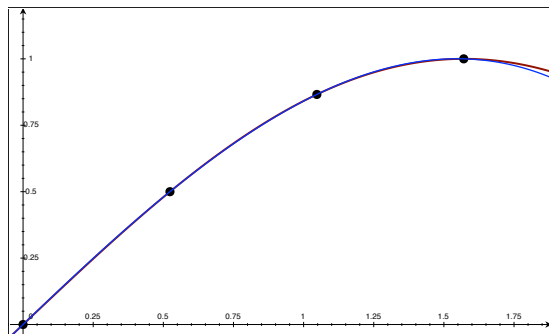
- Aproximar $f(x) = \sin x$ usando 4 amostras igualmente espaçadas entre 0 e $\frac{\pi}{2}$

x_i	$y_i = \sin x_i$
0	0
$(\pi)/6$	0.5
$(\pi)/3$	0.866
$(\pi)/2$	1



Interpolação de Polinômios

Exemplo: Interpolação de $f(x) = \sin x$



► Qual o erro da interpolação?



Interpolação de Polinômios

Erro da Interpolação

- ▶ Considere a interpolação da função $f(x)$ pelo polinômio $P(x)$
- ▶ **Teorema**

$$f(x) - P(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})}{n!} f^{[n]}(c)$$

- ▶ onde:

$$c \in [\min(x, x_0), \max(x, x_{n-1})]$$

- ▶ Erros no meio do intervalo tendem a ser menores
 - ▶ Termos do produtório tendem a ser menores
- ▶ Teorema define um limite superior do erro (pior caso)



Erro da Interpolação

No exemplo:

$$\sin x - P(x) = \frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{3})(x-\frac{\pi}{2})}{4!} f^{[4]}(c)$$

- Como $f^{[4]}(x) = \sin x$, o máximo em $[0, \frac{\pi}{2}]$ é 1

$$|\sin - P(x)| \leq \frac{|(x-0)(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{3})(x-\frac{\pi}{2})|}{24}$$

- Alguns valores

$$|\sin(1.0) - P(1.0)| \leq 0.0005348$$

$$|\sin(0.2) - P(0.2)| \leq 0.00313$$



Erro da Interpolação

Como reduzir o erro da interpolação?

Espaçar as amostras igualmente é o mais adequado?

Pode-se...

- ▶ Diminuir a taxa de amostragem no meio do intervalo
- ▶ Mover algumas amostras para os extremos do intervalo



Espaçamento de Amostras

Teorema de Chebyshev: minimização do erro da interpolação

$$\frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})}{n!} f^{[n]}(c)$$

- ▶ Considerando, inicialmente, $x \in [-1, 1]$
- ▶ Objetivo: minimizar polinômio numerador

$$N(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

- ▶ usando as raízes do polinômio de chebyshev

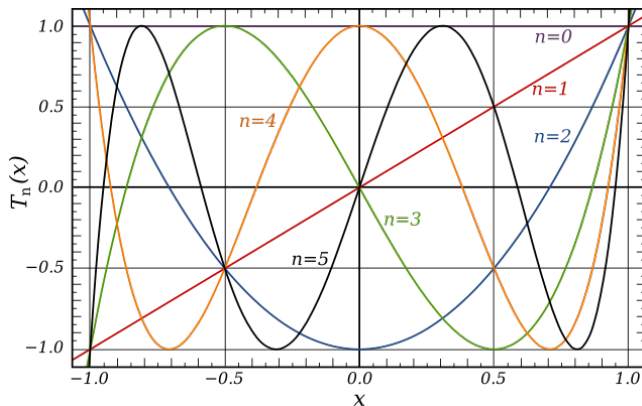
$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

Exemplo: raízes de Chebyshev considerando 9 amostras ($T_9(x)$)

$$\cos \frac{\pi}{18}, \cos \frac{3\pi}{18}, \dots, \cos \frac{17\pi}{18}$$



Polinômio de Chebyshev



Espaçamento de Amostras

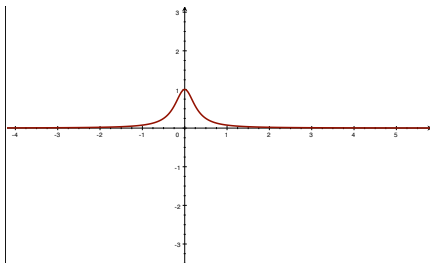
Amostras de Chebyshev

Exemplo

- Interpolação com 27 amostras, com $x \in [-2, 2]$ da função:

$$f(x) = \frac{1}{1 + 12x^2}$$

- Função original



Espaçamento de Amostras

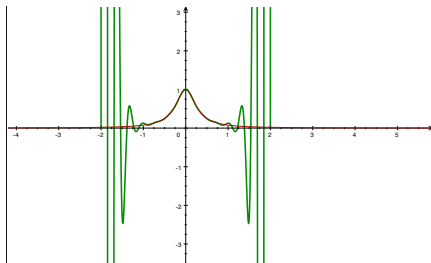
Amostras de Chebyshev

Exemplo

- ▶ Interpolação com 27 amostras, com $x \in [-2, 2]$ da função:

$$f(x) = \frac{1}{1 + 12x^2}$$

- ▶ Função original
- ▶ Amostras regulares ("wiggles")



Espaçamento de Amostras

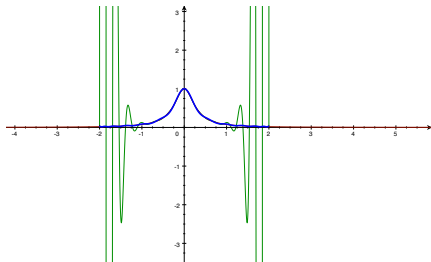
Amostras de Chebyshev

Exemplo

- ▶ Interpolação com 27 amostras, com $x \in [-2, 2]$ da função:

$$f(x) = \frac{1}{1 + 12x^2}$$

- ▶ Função original
- ▶ Amostras regulares ("wiggle")
- ▶ Amostras de Chebyshev

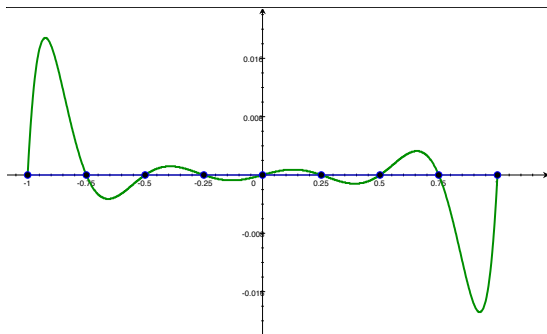


Amostras de Chebyshev

Plotagem do polinômio numerador com 9 amostras

$$N(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

► Regulares

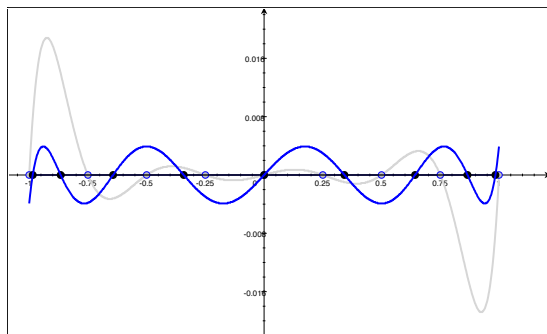


Amostras de Chebyshev

Plotagem do polinômio numerador com 9 amostras

$$N(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

- Regulares
- Chebyshev



Teorema de Chebyshev

Fórmula geral para $x \in [-1, 1]$

$$x_i = \cos \frac{\beta\pi}{2n}, \text{ onde } \beta = 1, 3, \dots, 2n - 1$$

- Valor máximo do polinômio numerador

$$|N(x)|_{\max} = \frac{1}{2^{n-1}}$$



Teorema de Chebyshev

Mudança de intervalo:

$$[-1, 1] \longrightarrow [a, b]$$

$$\begin{aligned} \cos \frac{\beta\pi}{2n} &\longrightarrow \underbrace{\frac{b-a}{2} \cos \frac{\beta\pi}{2n}}_{\left[-\frac{b-a}{2}, +\frac{b-a}{2} \right]} + \frac{a+b}{2} \\ &\underbrace{\left[\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}, \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \right]}_{[a, b]} \end{aligned}$$



Teorema de Chebyshev

Fórmula geral para $x \in [a, b]$

$$x_i = \frac{b-a}{2} \cos \frac{\beta\pi}{2n} + \frac{a+b}{2}, \text{ onde } \beta = 1, 3, \dots, 2n-1$$

- Valor máximo do polinômio numerador

$$|N(x)|_{\max} = \frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^n}{2^{n-1}}$$



Teorema de Chebyshev

Fórmula geral para $x \in [a, b]$

$$x_i = \frac{b-a}{2} \cos \frac{\beta\pi}{2n} + \frac{a+b}{2}, \text{ onde } \beta = 1, 3, \dots, 2n-1$$

- Valor máximo do polinômio numerador

$$|N(x)|_{\max} = \frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^n}{2^{n-1}}$$

Exemplo

- Erro máximo na aproximação de $\sin x$ com $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, considerando 4 amostras:

$$|\sin x - P_3(x)|_{\max} \leq \frac{\left(\frac{\frac{\pi}{2}-0}{2}\right)^4}{2^3 4!} 1 = 0.001981793$$



Interpolação de Polinômios

Exercício: Interpolarmos a função $\sin x$ com 10 dígitos de precisão

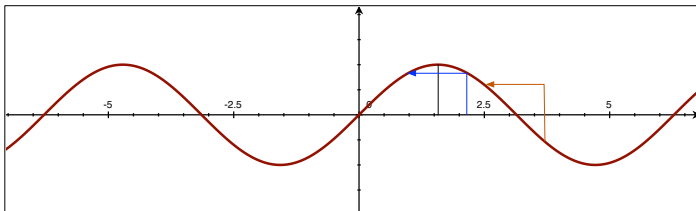
- Sabe-se que interpolar o intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ é suficiente
 - Mapeamento da abscissa

$$x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \longrightarrow \sin(x) = \sin(\pi - x)$$

$$x \in [\pi, 2\pi] \longrightarrow \sin(x) = -\sin(2\pi - x)$$

$$x > 2\pi \longrightarrow \sin(x) = \sin(x \bmod 2\pi)$$

$$x < 0 \longrightarrow \sin(x) = -\sin(-x)$$



Interpolação de Polinômios

Exercício: Quantas amostras vamos precisar

► Usando Chebyshev

$$|\sin x - P_{n-1}(x)| \leq \frac{\left(\frac{\frac{\pi}{2} - 0}{2}\right)^n}{2^{n-1} n!} 1$$

► Por tentativa:

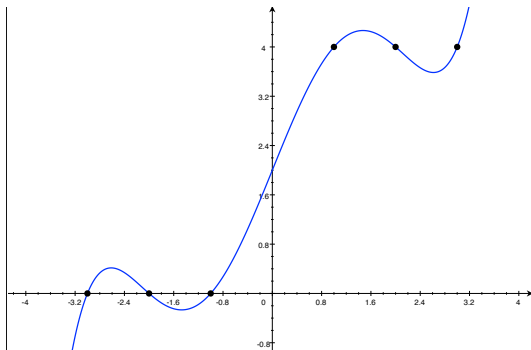
$$n = 9 \longrightarrow \approx 0.1224 \times 10^{-8}$$

$$n = 10 \longrightarrow \approx 0.4807 \times 10^{-10}$$



Interpolação por Partes

O polinômio interpolante “oscila” por variações abruptas ou discontinuidades



Alternativa: interpolação por **splines** (por partes)



Interpolação por Partes

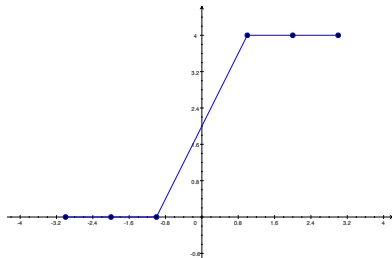
Splines lineares

- n pontos, n partes (segmentos de reta)

$$f(x) = \begin{cases} f(x_0) + m_0(x - x_0) & x_0 \leq x \leq x_1 \\ f(x_1) + m_1(x - x_1) & x_1 < x \leq x_2 \\ \dots & \\ f(x_{n-2}) + m_{n-2}(x - x_{n-2}) & x_{n-2} < x \leq x_n \end{cases}$$

- com:

$$m_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$



Interpolação por Partes

Continuidade entre partes

- ▶ Continuidade C^0 : continuidade de **posição**
- ▶ Continuidade C^1 : continuidade de **tangente**
- ▶ Continuidade C^2 : continuidade de **curvatura**

Continuidade entre partes de splines

- ▶ Spline **linear**: C^0
- ▶ Spline **quadrática**: C^0 e C^1
- ▶ Spline **cúbica**: C^0 , C^1 e C^2



Interpolação por Partes

Splines cúbica

$$s_0(x) = y_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3, \quad x \in [x_0, x_1]$$

$$s_1(x) = y_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3, \quad x \in [x_1, x_2]$$

...

$$s_{n-2}(x) = y_{n-2} + b_{n-2}(x - x_{n-2}) + c_{n-2}(x - x_{n-2})^2 + d_{n-2}(x - x_{n-2})^3, \\ x \in [x_{n-2}, x_{n-1}]$$

Achar spline interpolante

- Determinar b_i , c_i e $d_i \rightarrow 3(n-1)$ incógnitas



Splines Cúbicas

Spline com n pontos, $n - 1$ partes

- ▶ Determinar $3(n - 1) = 3n - 3$ incógnitas

Equações das propriedades

- ▶ Continuidade C^0
 - ▶ $s_i(x_i) = y_i$: já satisfeitas pelas expressões de $s_i(x)$
 - ▶ $s_i(x_{i+1}) = y_{i+1}, i = 0, \dots, n - 2 : n - 1$ equações
- ▶ Continuidade C^1
 - ▶ $s'_{i-1}(x_i) = s'_i(x_i), i = 1, \dots, n - 2 : n - 2$ equações
- ▶ Continuidade C^2
 - ▶ $s''_{i-1}(x_i) = s''_i(x_i), i = 1, \dots, n - 2 : n - 2$ equações

Total de equações: $3n - 5$

- ▶ Faltam duas equações



Splines Cúbicas

Spline natural

- ▶ Impõe curvatura nula nas extremidades

$$s_0''(x_0) = 0$$

$$s_{n-2}''(x_{n-1}) = 0$$

- ▶ Existem outras possibilidades, quase sempre envolvendo imposições nos extremos



Splines Cúbicas: Montagem do sistema

Queremos calcular os valores de b_i , c_i , d_i para:

$$s_i(x) = y_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

Iremos expressar b_i e d_i em função de c_i :

- ▶ Com isso, podemos definir um sistema para achar apenas c_i

Para simplificar, iremos considerar:

$$\delta_i = x_{i+1} - x_i, \quad i = 0, \dots, n-2$$

$$\Delta_i = y_{i+1} - y_i, \quad i = 0, \dots, n-2$$



Splines Cúbicas: Montagem do sistema

Pela continuidade C^2 , temos que:

$$s''_{i-1}(x_i) = s''_i(x_i), \text{ sendo } s''_i(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_i)$$

Substituindo...

$$2c_{i-1} + 6d_{i-1}(x_i - x_{i-1}) = 2c_i + 6d_i(x_i - x_i)$$

$$2c_{i-1} + 6d_{i-1}(x_i - x_{i-1}) = 2c_i + 0, \text{ pois } x_i - x_i = 0$$

Com isso, definimos as seguintes relações...

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3(x_{i+1} - x_i)} = \frac{c_{i+1} - c_i}{3\delta_i}, \quad i = 0, \dots, n-2$$

$$c_{n-1} = \frac{s''_{n-2}(x_{n-1})}{2}$$

(sendo $s''_0(x_0) = 0$ e $s''_{n-2}(x_{n-1}) = 0$ definido pela spline natural)



Splines Cúbicas: Montagem do sistema

Pela continuidade C^0 , temos que:

$$y_{i+1} = s_i(x_{i+1})$$

Substituindo...

$$y_{i+1} = y_i + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i(x_{i+1} - x_i)^2 + d_i(x_{i+1} - x_i)^3$$

$$\Delta_i = b_i\delta_i + c_i\delta_i^2 + d_i\delta_i^3, \text{ substituindo } d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3\delta_i}$$

$$\Delta_i = b_i\delta_i + c_i\delta_i^2 + \left(\frac{c_{i+1} - c_i}{3\delta_i}\right)\delta_i^3$$

$$\Delta_i = b_i\delta_i + c_i\delta_i^2 + \frac{c_{i+1}\delta_i^2}{3} - \frac{c_i\delta_i^2}{3} = b_i\delta_i + \frac{2c_i\delta_i^2}{3} + \frac{c_{i+1}\delta_i^2}{3}$$

Isolando b_i ...

$$b_i = \frac{\Delta_i}{\delta_i} - \frac{\delta_i}{3}(2c_i + c_{i+1}), \quad i = 0, \dots, n-2$$



Splines Cúbicas: Montagem do sistema

Por fim, pela continuidade C^1 , temos que:

$$s'_{i-1}(x_i) = s'_i(x_i), \quad s'_i(x) = b_i + 2c_i(x - x_i) + 3d_i(x - x_i)^2$$

Substituindo... (considerando $2c_i(x_i - x_i) = 0$ e $3d_i(x_i - x_i)^2 = 0$)

$$b_{i-1} + 2c_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + 3d_{i-1}(x_i - x_{i-1})^2 = b_i$$

$$b_{i-1} + 2c_{i-1}\delta_{i-1} + 3d_{i-1}\delta_{i-1}^2 = b_i$$

Substituindo b_{i-1} , b_i e d_{i-1} ...

$$c_{i-1}\delta_{i-1} + c_i(2\delta_{i-1} + 2\delta_i) + c_{i+1}\delta_i = \frac{3\Delta_i}{\delta_i} - \frac{3\Delta_{i-1}}{\delta_{i-1}}, \quad i = 1, \dots, n-2$$

Para $i = 0$ e $i = n-1$:

$$c_0 = \frac{s''_0(x_0) - 6d_0(x_0 - x_0)}{2} = 0 \quad \text{e} \quad c_{n-1} = \frac{s''_{n-2}(x_{n-1})}{2} = 0$$



Splines Cúbicas: Montagem do sistema

Resolve-se o sistema em c_i :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \delta_0 & 2\delta_0 + 2\delta_1 & \delta_1 \\ \dots & \delta_1 & 2\delta_1 + 2\delta_2 & \delta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3\frac{\Delta_1}{\delta_1} - 3\frac{\Delta_0}{\delta_0} \\ 3\frac{\Delta_2}{\delta_2} - 3\frac{\Delta_1}{\delta_1} \\ \dots \\ 3\frac{\Delta_{n-2}}{\delta_{n-2}} - 3\frac{\Delta_{n-3}}{\delta_{n-3}} \\ 0 \end{bmatrix}$$



Splines Cúbicas

Algoritmo: Spline natural

► Dados

► $x = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ e $y = y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$

for $i = 0$ **to** $n - 2$

$$\delta_i = x_{i+1} - x_i$$

$$\Delta_i = y_{i+1} - y_i$$

Solve System for $c_0 \dots c_{n-1}$

for $i = 0$ **to** $n - 2$

$$b_i = \frac{\Delta_i}{\delta_i} - \frac{\delta_i}{3}(2c_i + c_{i+1})$$

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3\delta_i}$$

Spline natural:

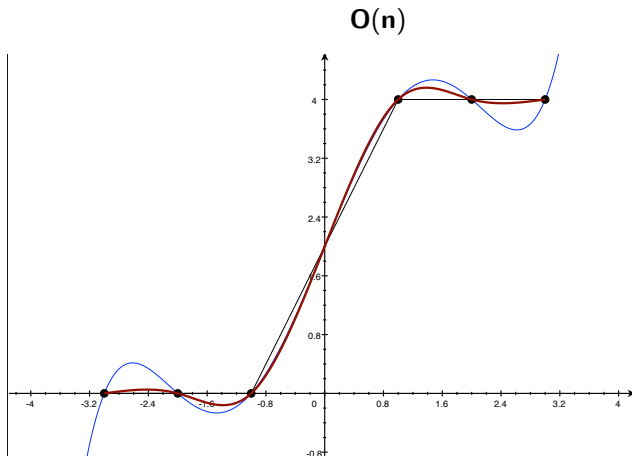
$$s_i(x) = y_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$



Splines Cúbicas

Tempo esperado

- ▶ Dominado pela resolução do sistema
 - ▶ Sistema tridiagonal



Exercícios proposto

1. Use Interpolação de Lagrange para achar o polinômio interpolante dos pontos $(0, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 0)$.
2. Se o objetivo no item anterior era criar o polinômio interpolante de uma função no intervalo $[0, 3]$, use a Amostragem Chebyshev para determinar os 3 valores x_i que minimizam o erro.



Respostas

1. $4x^2 - 11x - 3$

2. $x_i = \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{\beta\pi}{2n}\right) + \frac{a+b}{2}$

2.1 $x_0 = \frac{3}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 1 \right)$

2.2 $x_1 = \frac{3}{2} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{6}\right) + 1 \right)$

2.3 $x_2 = \frac{3}{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + 1 \right)$

