

# **Apresentação**

## **INF1608 – Análise Numérica**

Departamento de Informática, PUC-Rio



# Apresentação

Leonardo Quatrin Campagnolo

- ▶ [lquatrin@tecgraf.puc-rio.br](mailto:lquatrin@tecgraf.puc-rio.br)
- ▶ (Sala 6o andar, Instituto Tecgraf)



# Apresentação

Leonardo Quatrin Campagnolo

- ▶ [lquatrin@tecgraf.puc-rio.br](mailto:lquatrin@tecgraf.puc-rio.br)
- ▶ (Sala 6o andar, Instituto Tecgraf)

Salas de aula

- ▶ 3as: Aula conceitual – L164
- ▶ 5as: Aula de laboratório – LABGRAD



# Apresentação

Leonardo Quatrin Campagnolo

- ▶ [lquatrin@tecgraf.puc-rio.br](mailto:lquatrin@tecgraf.puc-rio.br)
- ▶ (Sala 6o andar, Instituto Tecgraf)

Salas de aula

- ▶ 3as: Aula conceitual – L164
- ▶ 5as: Aula de laboratório – LABGRAD

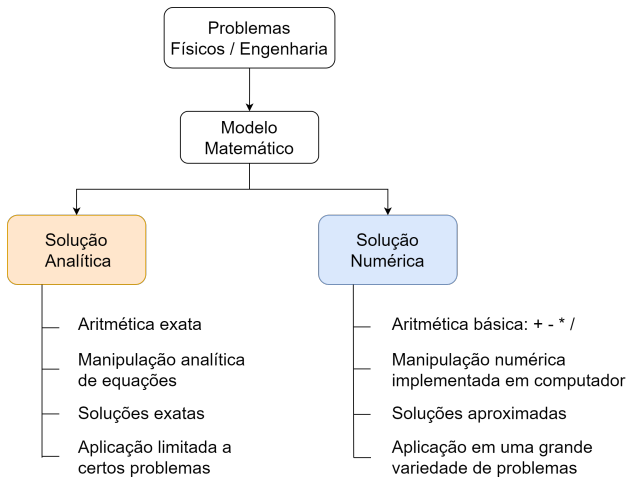
Material do curso

- ▶ EAD



# Apresentação

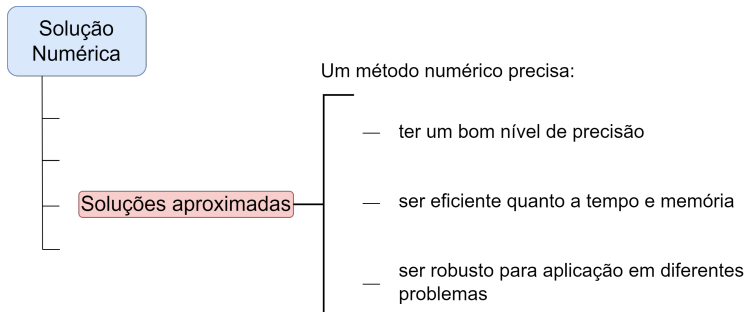
## Motivação



# Apresentação

## Análise Numérica

- Projeto e análise de técnicas **aproximadas** mas com **erros controlados** para soluções de **problemas complexos**



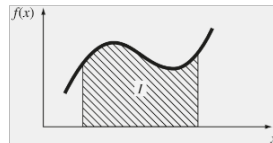
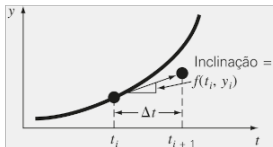
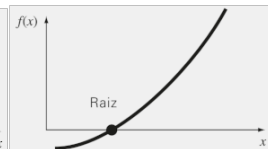
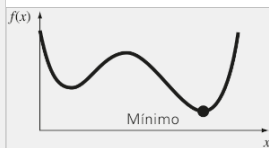
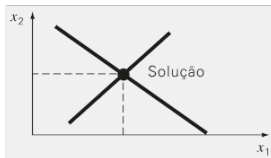
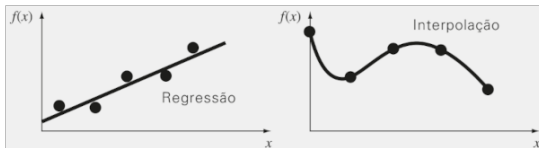
# Apresentação

## Aplicações

- ▶ Computação científica
  - ▶ Métodos numéricos
- ▶ Ciências de dados
  - ▶ Mineração de dados
  - ▶ Análise de tendências
- ▶ Aprendizado de máquinas
  - ▶ Otimização
- ▶ Jogos
  - ▶ Simulação física
- ▶ Etc



# Apresentação





# Apresentação

## Tópicos

- ▶ Representação de ponto flutuante
- ▶ Série de Taylor
- ▶ Raízes de funções
- ▶ Sistemas lineares
- ▶ Interpolação de polinômios
- ▶ Método dos mínimos quadrados
- ▶ Derivação e integração
- ▶ Equações diferenciais ordinárias
- ▶ Método iterativos para sistemas lineares
- ▶ Método dos Gradientes Conjugados
- ▶ Otimização



# Apresentação

Critério de avaliação para aprovação (Critério 1)

- ▶  $NF \geq 5.0$
- ▶  $NF = \frac{2 G1 + 3 G2}{5}$
- ▶ Se  $G2 < 3$ ,  $NF = \frac{G1 + 3 G2}{4}$



# Apresentação

## Composição dos graus

- ▶  $G_1$ 
  - ▶ 50% laboratório ( $L_1$ )
    - ▶ 5 melhores notas de 6 laboratórios
  - ▶ 50% prova ( $P_1$ )
- ▶  $G_2$ 
  - ▶ 30% laboratório ( $L_2$ )
    - ▶ 4 melhores notas de 5 laboratórios
  - ▶ 40% prova ( $P_2$ )
  - ▶ 30% projeto ( $Pr$ )



# Apresentação

## Observações importantes:

- ▶ Os laboratórios serão corrigidos por **testes automáticos e detecção de códigos similares**
- ▶ Entrega atrasada do laboratório, penalidade de 1.0
- ▶ Falta no laboratório, a entrega será descartada
  - ▶ Os laboratórios serão entregues durante horário de aula
  - ▶ Com exceção dos laboratórios remotos
- ▶ Faltas para reprovação: 17



# Programa de aulas

11-mar. 3a	<b>Aula 0 - Apresentação, Erros, Cprog</b>	13-maio 3a	<b>Aula 7 - Equações Diferenciais Ordinárias + entrega de P1</b>
13-mar. 5a	Lab 0 - Representação de Vetor e Matriz	16-maio 5a	Lab7 - Eq. Diferenciais Ordinárias
18-mar. 3a	<b>Aula 1 - Representação Binária e Série de Taylor</b>	20-maio 3a	<b>Aula 8 - Simulação Física</b>
20-mar. 5a	Lab 1 - Série de Taylor	22-maio 5a	Lab 8 - Simulação Física
25-mar. 3a	<b>Aula 2 - Raízes de Funções</b>	27-maio 3a	<b>Aula 9 - Métodos Iterativos</b>
27-mar. 5a	Lab 2 - Raízes de Funções	29-maio 5a	Lab 9 - Métodos Iterativos
01-abr. 3a	<b>Aula 3 - Sistemas Lineares</b>	03-jun. 3a	<b>Aula 10 - Método dos Gradientes Conjugados</b>
03-abr. 5a	Lab 3 - Sistemas Lineares	05-jun. 5a	Lab 10 - Método dos Gradientes Conjugados
08-abr. 3a	<b>Aula 4 - Interpolação de Polinômios</b>	10-jun. 3a	<b>Aula 11 - Otimização sem Restrição</b>
10-abr. 5a	Lab 4 - Interpolação de Polinômios	12-jun. 5a	Lab 11 - Otimização sem Restrição
15-abr. 3a	<b>Aula 5 - Método dos Mínimos Quadrados</b>	17-jun. 3a	<b>Revisão P2</b>
17-abr. 5a	Semana Santa / Páscoa	19-jun. 5a	Corpus Christi
22-abr. 3a	<b>Recesso de Tiradentes</b>	24-jun. 3a	<b>PROVA P2</b>
24-abr. 5a	Lab Remoto 5 - Método dos Mínimos Quadrados	26-jun. 5a	
29-abr. 3a	<b>Aula 6 - Derivação e Integração Numéricas</b>	01-jul. 3a	<b>Entrega P2</b>
01-maio 5a	Dia do trabalhador - Lab Remoto 6 - Derivação e Integração Numéricas	03-jul. 5a	
06-maio 3a	<b>Revisão P1</b>	08-jul. 3a	
08-maio 5a	<b>PROVA P1</b>	10-jul. 5a	<b>Entrega Projetos</b>
		14-jul. 2a	Término das atividades acadêmicas
		15-jul. 3a	Prazo final para lançamento das notas



# Bibliografia

## Principal

- ▶ Sauer, Timothy  
*Numerical Analysis*  
3rd Edition; Pearson, 2017.

## Adicional

- ▶ Ruggiero, Márcia A. Gomes; Lopes, Vera Lucia da Rocha  
*Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais*  
McGraw-Hill, 1988.
- ▶ Chapra, Steven C.; Canale, Raymond P.  
*Métodos Numéricos para Engenharia*  
McGraw-Hill, 2008.



# Análise numérica

Análise numérica: Aproximação vs Precisão

- ▶ Projeto e análise de técnicas aproximadas
- ▶ Soluções precisas para problemas complexos

Estudo de algoritmos: métodos numéricos

- ▶ Uso de aproximações numéricas
  - ▶ Em oposição a manipulação simbólica
- ▶ Avaliação e controle do **erro**



# Fontes de erros

## Erro de arredondamento

- ▶ Inerente ao uso de representação finita (computador)

$$\frac{1}{3} \approx 0.33333333$$

## Erro de truncamento

- ▶ Uso de termos insuficiente na avaliação do resultado

$$\sin x = \sum_0^{\inf} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

## Erro humano

- ▶ Erro na escolha do método; erro de codificação

## Erro devido a problema mal condicionado

- ▶ Instabilidade numérica; exige reformulação do problema





# Erros e Aproximações

Fontes de erros:

1. Erro de arredondamento
2. Erro de truncamento
3. Erro humano
4. Erro devido a problema mal condicionado

Principais  
causas



# Representação de números

Problema:

- ▶ Como representar números grandes
  - ▶ Ex. escala astronômica
- ▶ Como representar números pequenos
  - ▶ Ex. escala molecular



# Representação de números

Problema:

- ▶ Como representar números grandes
  - ▶ Ex. escala astronômica
- ▶ Como representar números pequenos
  - ▶ Ex. escala molecular

Solução: Notação científica

- ▶ Representação de ponto flutuante

$$\begin{aligned}732.48 &\longrightarrow 7.3248 \times 10^2 \\ -0.00234 &\longrightarrow -2.34 \times 10^{-3}\end{aligned}$$

Espaço para a representação

**sinal   mantissa   base   expoente**

- ▶ onde a base é representada implicitamente



# Representação finita com notação científica

Exemplo: calculadora com 7 dígitos de mantissa

- Qual o resultado da avaliação da expressão abaixo?

$$52.34 \times 10^4 + 9.4 \times 10^{-5} - 5.234 \times 10^5$$

Representações:

5.234000E+5  
9.400000E-5  
5.234000E+5

Resultado da soma:

523400.  
0.000094  
-----  
523400.000094



# Representação finita com notação científica

Exemplo: calculadora com 7 dígitos de mantissa

- Qual o resultado da avaliação da expressão abaixo?

$$52.34 \times 10^4 + 9.4 \times 10^{-5} - 5.234 \times 10^5$$

Representações:

5.234000E+5  
9.400000E-5  
5.234000E+5

Resultado da soma:

523400.  
0.000094  
-----  
523400.000094

Representação da soma:

5.234000E+5

Resultado: 0

- Ao invés de  $9.4 \times 10^{-5}$
- Valor menor foi desprezível frente ao número maior na soma



# Representação finita

## Orientação

- ▶ Não adicionar um número pequeno a um número grande

Pergunta:

Qual seria a melhor forma de calcular o somatório de números de diferentes grandezas?



# Representação finita

Exemplo: achar raízes da equação  $x^2 + 9^{12}x - 3 = 0$

- Fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Temos então:

$$x = \frac{-9^{12} \pm \sqrt{9^{24} + 12}}{2}$$



# Representação finita

Exemplo: achar raízes da equação  $x^2 + 9^{12}x - 3 = 0$

- Fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Temos então:

$$x = \frac{-9^{12} \pm \sqrt{9^{24} + 12}}{2}$$

- Na soma, 12 é insignificante; ficamos então com:

$$x_1 = \frac{-9^{12} - \sqrt{9^{24}}}{2} = -9^{12}$$

- OK, a perda de 12 é insignificante





# Representação finita

Exemplo: achar raízes da equação  $x^2 + 9^{12}x - 3 = 0$

- Fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Temos então:

$$x = \frac{-9^{12} \pm \sqrt{9^{24} + 12}}{2}$$

- Na soma, 12 é insignificante; ficamos então com:

$$x_1 = \frac{-9^{12} - \sqrt{9^{24}}}{2} = -9^{12}$$

- OK, a perda de 12 é insignificante

$$x_2 = \frac{-9^{12} + \sqrt{9^{24}}}{2} = 0$$

- ERRO, a perda de 12 é significativa!



# Representação finita

Raízes da equação  $x^2 + 9^{12}x - 3 = 0$

- Solução: re-fatorar a fórmula de Bhaskara para  $x_2$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{\left(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right) \left(b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{2a \left(b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}$$

$$x_2 = \frac{b^2 - 4ac - b^2}{2a \left(b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)} = \frac{-2c}{\left(b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}$$



# Representação finita

Raízes da equação  $x^2 + 9^{12}x - 3 = 0$

► Solução: re-fatorar a fórmula de Bhaskara para  $x_2$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{\left(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right) \left(b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{2a \left(b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}$$

$$x_2 = \frac{b^2 - 4ac - b^2}{2a \left(b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)} = \frac{-2c}{\left(b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}$$

Substituindo os valores da equação:

$$x_2 = \frac{-2(-3)}{\left(9^{12} + \sqrt{9^{24} + 12}\right)} = \frac{6}{2(9^{12})} = 1.0622 \times 10^{-11}$$



# Erro de arredondamento

## Regra de arredondamento

- ▶ Considerando a calculadora de 7 dígitos de mantissa

Número		Representação
1.23456 <u>7</u> 8	→	1.23456 <u>8</u>
1.00045 <u>3</u> 2	→	1.00045 <u>3</u>
4.2348 <u>4</u> 65000000	→	?

- ▶ Para não favorecer um dos lados, podemos fazer o arredondamento baseado no dígito anterior ( $6^0$ ):
  - ▶ Se  $< 5$ : arredonda para baixo
  - ▶ Se  $\geq 5$ : arredonda para cima
- ▶ Logo, no exemplo acima, ficamos com: 4.234846
  - ▶ Pois  $4 < 5$

