Série de Taylor

INF1608 – Análise Numérica

Departamento de Informática, PUC-Rio

Problema

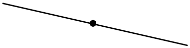
Avaliar uma função $f(x)$, com $x = x_0 + \Delta x$ conhecendo-se apenas informações discretas (pontuais) da mesma

- Ponto: $f(x_0)$

Problema

Avaliar uma função $f(x)$, com $x = x_0 + \Delta x$ conhecendo-se apenas informações discretas (pontuais) da mesma

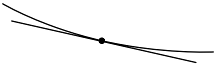
- Ponto: $f(x_0)$
- Derivada: $f'(x_0)$



Problema

Avaliar uma função $f(x)$, com $x = x_0 + \Delta x$ conhecendo-se apenas informações discretas (pontuais) da mesma

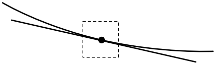
- Ponto: $f(x_0)$
- Derivada: $f'(x_0)$
- Curvatura: $f''(x_0)$



Problema

Avaliar uma função $f(x)$, com $x = x_0 + \Delta x$ conhecendo-se apenas informações discretas (pontuais) da mesma

- Ponto: $f(x_0)$
- Derivada: $f'(x_0)$
- Curvatura: $f''(x_0)$

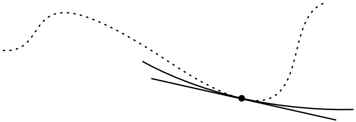


- Podemos aproximar localmente a função
- Mais derivadas = mais correções para aproximar $f(x_0 + \Delta x)$

Problema

Avaliar uma função $f(x)$, com $x = x_0 + \Delta x$ conhecendo-se apenas informações discretas (pontuais) da mesma

- Ponto: $f(x_0)$
- Derivada: $f'(x_0)$
- Curvatura: $f''(x_0)$



- Podemos aproximar localmente a função
- Mais derivadas = mais correções para aproximar $f(x_0 + \Delta x)$)
- Qual é o erro da aproximação?

Série de Taylor

Considere $f(x)$ uma função contínua e diferenciável. Se conhecemos o valor de f no ponto x_0, $f(x_0)$, e as derivadas da função em x_0, $f^{[k]}(x_0)$, podemos aproximar o valor de $f(x)$, para x próximo a x_0, usando a Série de Taylor

- Aproximação de Ordem 0: constante

$$f(x) \approx f(x_0)$$

- Aproximação de Ordem 1: reta

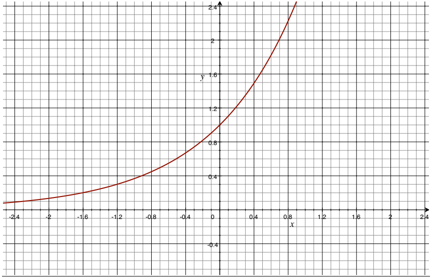
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

- Aproximação de Ordem 2: parábola

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

Exemplo

Aproximar função $f(x) = e^x$ em torno de $x_0 = 0$

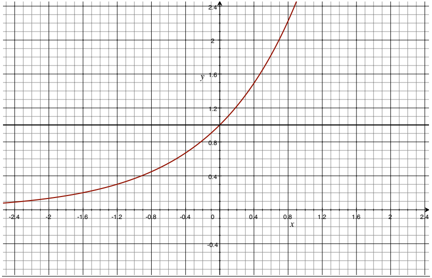


Exemplo

Aproximar função $f(x) = e^x$ em torno de $x_0 = 0$

- Ordem 0:

$$f(x) = e^0 = 1$$



Exemplo

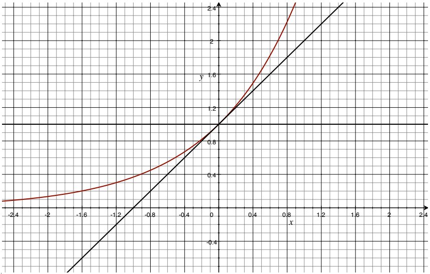
Aproximar função $f(x) = e^x$ em torno de $x_0 = 0$

- Ordem 0:

$$f(x) = e^0 = 1$$

- Ordem 1:

$$f(x) = e^0 + e^0(x - 0) = 1 + x$$



Exemplo

Aproximar função $f(x) = e^x$ em torno de $x_0 = 0$

- Ordem 0:

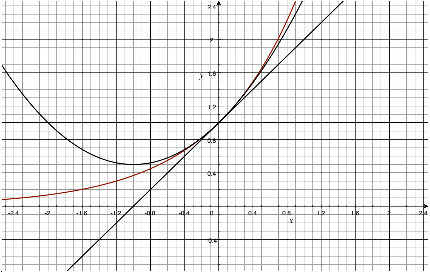
$$f(x) = e^0 = 1$$

- Ordem 1:

$$f(x) = e^0 + e^0(x-0) = 1 + x$$

- Ordem 2:

$$f(x) = e^0 + e^0(x-0) + \frac{e^0}{2}(x-0)^2$$
$$= 1 + x + \frac{x^2}{2}$$



Expansão de Taylor

- Caso de série de potências:

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + \frac{f^{[1]}(x_0)}{1!}(\Delta x) + \frac{f^{[2]}(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + \frac{f^{[3]}(x_0)}{3!}(\Delta x)^3 + \\ + \ldots + \frac{f^{[n]}(x_0)}{n!}(\Delta x)^n + \ldots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{[m]}(x_0)}{m!}(\Delta x)^m$$

- Qual é o erro gerado se utilizarmos um conjunto finito de termos? (desconsiderando termos de maior ordem)

Teorema de Taylor com Resíduo

Sejam x e x_0 dois número reais, e uma função f podendo ser até $k+1$ vezes diferenciável no intervalo entre x e x_0, existe um valor c entre x e x_0 tal que:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \\ + \ldots + \frac{f^{[k]}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \underbrace{\frac{f^{[k+1]}(c)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}}_{\text{Resíduo da Série de Taylor}}$$

onde:

$$c \in [x_0, x]$$

- Polinômio de Taylor de ordem/grau k: aproximação de $f(x)$
  - Contendo $k+1$ termos
- Resíduo: encontrar erro máximo da aproximação
  - Se o resíduo for pequeno, tem-se uma boa aproximação

Série de Taylor

Voltando ao exemplo: Função $f(x) = e^x$, em torno de $x_0 = 0$

- Avaliar o valor aproximado de $f(1)$
  - Sabe-se: $f(0) = e^0 = 1 \quad \text{e} \quad f'(x) = f(x)$
- Ordem 1: $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 1 + x$
  - Valor aproximado: $f(1) = 2$
- Ordem 2:
  $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2}$
  - Valor aproximado: $f(1) = 2.5$
- Ordem 3: $f(x) \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$
  - Valor aproximado: $f(1) = 2.66667$
- Ordem 4: $f(x) \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$
  - Valor aproximado: $f(1) = 2.70833$

Série de Taylor

Exemplo: Aproximação do valor de e

- Ordem 4: $f(x) \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$
  - Valor aproximado: $f(1) = 2.70833$
- Resíduo:

$$r(x) = f^{[5]}(c)\frac{(x - x_0)^5}{5!} = e^c \frac{x^5}{120}, \text{ com } c \in [0, 1]$$

  - Resíduo máximo: e^c tem valor máximo quando $c = 1$:

$$r_{max} = e\frac{1}{120} \approx \frac{2.71828}{120} = 0.02265$$

  - Verificando:

$$erro = 2.71828 - 2.70833 = 0.00995 < 0.02265$$

Série de Taylor

Podemos usar a Série de Taylor para avaliar uma função, de forma aproximada, de forma mais eficiente

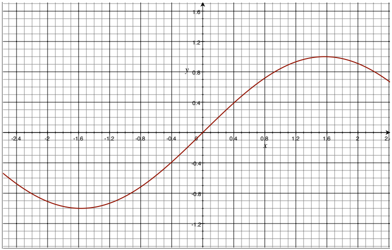
---

Exemplo

- Aproximar o valor de $\sin x$ usando os primeiros 5 termos da série em torno do ponto $x_0 = 0$

Sabe-se:

$$
\begin{array}{rrcrr}
f(x) = & \sin x & \Rightarrow & f(0) = & 0 \\
f'(x) = & \cos x & \Rightarrow & f'(0) = & 1 \\
f''(x) = & -\sin x & \Rightarrow & f''(0) = & 0 \\
f'''(x) = & -\cos x & \Rightarrow & f'''(0) = & -1 \\
f^{[4]}(x) = & \sin x & \Rightarrow & f^{[4]}(0) = & 0
\end{array}
$$



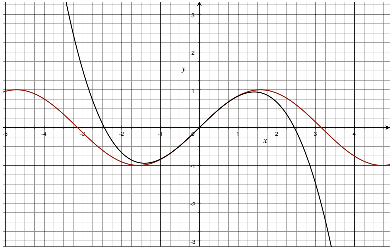
Série de Taylor

- Aproximação da função $\sin x$ em torno de $x_0 = 0$

$$f(x) \approx 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4$$
$$f(x) \approx x - \frac{x^3}{6}$$

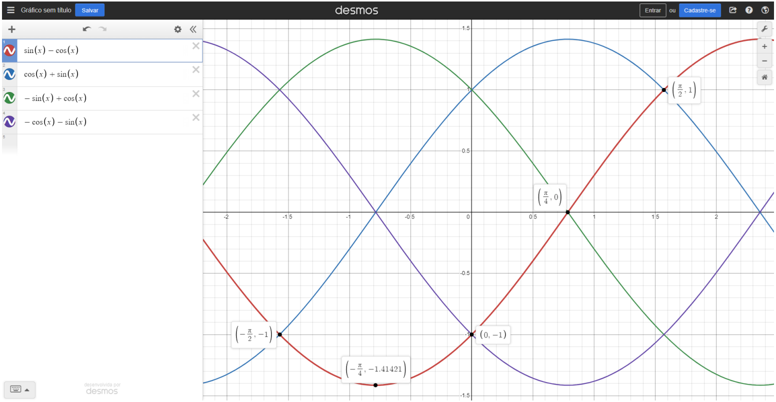
- Termo residual:

$$r(x) = \frac{f^{[5]}(c)}{5!}x^5$$
$$r(x) = \frac{x^5}{120}\cos c$$
$$r(x)_{max} = \frac{x^5}{120}$$



Exercício proposto

Usando a Série de Taylor, escreva um polinômio que aproxime a função $f(x) = \sin x - \cos x$, em torno de $x_0 = 0$, com $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Garanta que o erro máximo seja menor que 0.3.



Exercício proposto

Calcular os primeiros termos da Série de Taylor.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin x - \cos x & \Rightarrow \quad f(x_0) &= -1 \\
f'(x) &= \cos x + \sin x & \Rightarrow \quad f'(x_0) &= 1 \\
f''(x) &= -\sin x + \cos x & \Rightarrow \quad f''(x_0) &= 1 \\
f'''(x) &= -\cos x - \sin x & \Rightarrow \quad f'''(x_0) &= -1 \\
f^{[4]}(x) &= \sin x - \cos x & \Rightarrow \quad f(x_0) &= -1 \\
f^{[5]}(x) &= \cos x + \sin x & \Rightarrow \quad f'(x_0) &= 1
\end{aligned}
$$

$$
f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{f^{[1]}(x_0)}{1!}(\Delta x) + \ldots + \frac{f^{[n]}(x_0)}{n!}(\Delta x)^n + \ldots
$$

$$
\Delta x = x - x_0 = x - 0 = x
$$

$$
f(x) \approx -1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} \ldots
$$

Exercício proposto

Queremos achar qual valor de resíduo onde:

$$r_{max}(x) = \left| \frac{f^{[k+1]}(c)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1} \right| < 0.3$$

1. Calcular resíduo quando 2 termos são utilizados ($k = 1$):

$$f(x) \approx -1 + x$$
$$r(x) = \frac{f''(c)}{2}x^2$$
$$f''(x) = -\sin x + \cos x$$

Maximizar o resíduo (em módulo) para obter o pior caso...

- $x = -\pi/2$, e $c \in [-\pi/2, 0]$
- Para $c = -\pi/4$, $f''(c) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$
- Logo $r(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\frac{\pi}{2})^2 = 1.74471604990972$

Exercício proposto

Queremos achar qual valor de resíduo onde:

$$r_{max}(x) = \left| \frac{f^{[k+1]}(c)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1} \right| < 0.3$$

2. Calcular resíduo quando 3 termos são utilizados ($k = 2$):

$$f(x) \approx -1 + x + \frac{x^2}{2}$$
$$r(x) = \frac{f'''(c)}{6}x^3$$
$$f'''(x) = -\cos x - \sin x$$

Maximizar o resíduo (em módulo) para obter o pior caso...

- $x = \pi/2$, e $c \in [0, \pi/2]$
- Para $c = \pi/4$, $f'''(c) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$
- Logo $r(x) = -\frac{\sqrt{2}}{6}(\frac{\pi}{2})^3 = -0.9135311874994299$

Exercício proposto

Queremos achar qual valor de resíduo onde:

$$r_{max}(x) = \left| \frac{f^{[k+1]}(c)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1} \right| < 0.3$$

3. Calcular resíduo quando 4 termos são utilizados ($k = 3$):

$$f(x) \approx -1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

$$r(x) = \frac{f^{[4]}(c)}{24} x^4$$

$$f^{[4]}(x) = \sin x - \cos x$$

Maximizar o resíduo (em módulo) para obter o pior caso...

- $x = -\pi/2$, e $c \in [-\pi/2, 0]$
- Para $c = -\pi/4$, $f^{[4]}(c) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$
- Logo $r(x) = -\frac{\sqrt{2}}{24}(-\frac{\pi}{2})^4 = -0.3587428584341711$

Exercício proposto

Queremos achar qual valor de resíduo onde:

$$r_{max}(x) = \left| \frac{f^{[k+1]}(c)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1} \right| < 0.3$$

4. Calcular resíduo quando 5 termos são utilizados ($k = 4$):

$$f(x) \approx -1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

$$r(x) = \frac{f^{[5]}(c)}{120}x^5$$

$$f^{[5]}(x) = \cos x + \sin x$$

Maximizar o resíduo (em módulo) para obter o pior caso...

- $x = \pi/2$, e $c \in [0, \pi/2]$
- Para $c = \pi/4$, $f^{[5]}(c) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$
- Logo $r(x) = \frac{\sqrt{2}}{120}(\frac{\pi}{2})^5 = 0.1127023928584595$