Métodos Iterativos para Solução de Sistemas Lineares

INF1608 – Análise Numérica

Departamento de Informática, PUC-Rio

Sistemas Lineares

Resolução de sistemas lineares

- Eliminação de Gauss
  - Método direto
  - Solução exata (teoricamente)
  - Complexidade computacional: $O(n^3)$

Métodos iterativos

- Solução, em geral, aproximada
- Complexidade computacional: $m\delta$
  - m é o número de iterações
  - δ é a complexidade em cada iteração

Métodos Iterativos

Sistemas lineares

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Método de Jacobi

- Forma de iteração de Ponto Fixo para sistemas de equações
- Aplica Iteração de PF na i-ésima equação para achar x_i

Exemplo:

$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

Reescrevendo:

$$\begin{cases} x = \frac{5-y}{3} \\ y = \frac{5-x}{2} \end{cases}$$

Métodos Iterativos

Método de Jacobi

$$\begin{cases} x = \frac{5-y}{3} \\ y = \frac{5-x}{2} \end{cases}$$

Iterando:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{10}{9} \\ \frac{25}{12} \end{bmatrix} \rightarrow \cdots$$

- Converge para...

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- (Solução exata)

Métodos Iterativos

Método de Jacobi

- Invertendo a ordem das equações

Exemplo:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$$

Reescrevendo:

$$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ y = 5 - 3x \end{cases}$$

Métodos Iterativos

Método de Jacobi

- Invertendo a ordem das equações

Exemplo:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$$

Reescrevendo:

$$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ y = 5 - 3x \end{cases}$$

Iterando:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -5 \\ -10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 25 \\ 20 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -35 \\ -70 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots$$

- Não converge!

Métodos Iterativos

Definição: **Matriz Estritamente Diagonal Dominante**

- Uma matriz $A_{n \times n}$ é estritamente diagonal dominante se:

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

  - Isto é, o valor absoluto da diagonal é maior que a soma dos valores absolutos dos demais elementos da linha da matriz

No exemplo:

- 1o caso:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- 2o caso:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

- O método de Jacobi converge se a matriz for estritamente diagonal dominante (convergência é garantida)

Métodos Iterativos

Formulação do Método de Jacobi

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

- Decomposição da matriz

$$A = L + D + U$$

  - L: matriz com os elementos abaixo da diagonal
  - D: matriz com os elementos da diagonal
  - U: matriz com os elementos acima da diagonal
- Reescrevendo em forma de iteração de Ponto Fixo:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ (D + L + U)\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ D\mathbf{x} &= \mathbf{b} - (L + U)\mathbf{x} \\ \mathbf{x} &= D^{-1}(\mathbf{b} - (L + U)\mathbf{x}) \end{aligned}$$

  - Note que D tem inversa trivial

Métodos Iterativos

Algoritmo: Método de Jacobi

$$\mathbf{x}_0 = \text{estimativa inicial}$$
$$\mathbf{x}_{k+1} = D^{-1}(\mathbf{b} - (L+U)\mathbf{x}_k), \quad k = 1, 2, 3, \cdots$$

No exemplo:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{5-y_k}{3} \\ \frac{5-x_k}{2} \end{bmatrix}$$

Métodos Iterativos

Método de Gauss-Seidel

- Iteração de Jacobi que usa valores mais recentes dentro da mesma iteração
  - Impede computação em paralelo
- Convergência mais rápida, em geral
  - Ainda condicionada a matriz Estritamente Diagonal Dominante

Exemplo:

$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

Jacobi:

$$\begin{cases} x_{i+1} = \frac{5-y_i}{3} \\ y_{i+1} = \frac{5-x_i}{2} \end{cases}$$

Gauss-Seidel:

$$\begin{cases} x_{i+1} = \frac{5-y_i}{3} \\ y_{i+1} = \frac{5-x_{i+1}}{2} \end{cases}$$

Métodos Iterativos

Exemplo: (Solução $[1,2]$)
$$\begin{cases} x = \frac{5-y}{3} \\ y = \frac{5-x}{2} \end{cases}$$

Iterações de Jacobi:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{10}{9} \\ \frac{25}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1111 \\ 2.0833 \end{bmatrix}$$

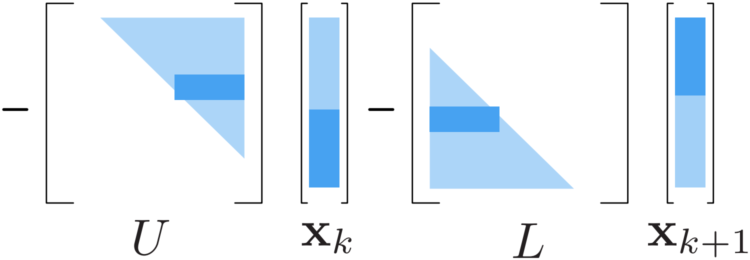
Iterações de Gauss-Seidel:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{10}{9} \\ \frac{35}{18} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{55}{54} \\ \frac{215}{108} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0185 \\ 1.9907 \end{bmatrix}$$

Métodos Iterativos

Algoritmo: Método de Gauss-Seidel

$$\mathbf{x}_0 = \text{estimativa inicial}$$
$$\mathbf{x}_{k+1} = D^{-1}(\mathbf{b} - U\mathbf{x}_k - L\mathbf{x}_{k+1}), \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$



- Na prática, trabalha-se com um único vetor (*in place*)

Métodos Iterativos

Relaxação sucessiva

$$\mathbf{x}_{k+1} = (1 - w)\mathbf{x}_k + w \text{ [fórmula para determinar } \mathbf{x}_{k+1}]$$

- Se $w < 1$, tem-se sub-relaxação (interpolação)
  - Usado para convergir sistemas não convergentes ou acelerar a convergência amortecendo oscilações
- Se $w > 1$, tem-se sobre-relaxação (extrapolação)
  - Usado para acelerar convergência de um sistema convergente
  - Esta estratégia é muito usada!
- Aplicado durante cada iteração para cada $x[i]$
  - Para cada $x_k[i]$
    - Calcula $x_{k+1}[i]$
    - Aplica relaxação em $x_{k+1}[i]$

Métodos Iterativos

Exemplo (Solução $[2, -1, 1]$)

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} x_{k+1} = \frac{4 - y_k + z_k}{3} \\ y_{k+1} = \frac{1 - 2x_{k+1} - z_k}{4} \\ z_{k+1} = \frac{1 + x_{k+1} - 2y_{k+1}}{5} \end{array}$$

Métodos Iterativos

Exemplo (Solução $[2, -1, 1]$)

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} x_{k+1} = \frac{4 - y_k + z_k}{3} \\ y_{k+1} = \frac{1 - 2x_{k+1} - z_k}{4} \\ z_{k+1} = \frac{1 + x_{k+1} - 2y_{k+1}}{5} \end{array}$$

Utilizando Gauss-Seidel:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1.3333 \\ -0.4167 \\ 0.6333 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1.6833 \\ -0.7500 \\ 0.8367 \end{bmatrix}$$

Métodos Iterativos

Exemplo (Solução $[2, -1, 1]$)

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{r} x_{k+1} = \frac{4 - y_k + z_k}{3} \\ y_{k+1} = \frac{1 - 2x_{k+1} - z_k}{4} \\ z_{k+1} = \frac{1 + x_{k+1} - 2y_{k+1}}{5} \end{array}$$

Utilizando Gauss-Seidel:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1.3333 \\ -0.4167 \\ 0.6333 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1.6833 \\ -0.7500 \\ 0.8367 \end{bmatrix}$$

Utilizando Gauss-Seidel + Relaxação sucessiva $w = 1.25$:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1.6667 \\ -0.7292 \\ 1.0312 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1.9835 \\ -1.0672 \\ 1.0216 \end{bmatrix}$$

Métodos Iterativos

Custo computacional

- Custo por iteração: $O(n^2)$
  - Operação dominante: multiplicação de matriz por vetor
- Custo total: $mO(n^2)$
  - Lembrando custo total da eliminação de Gauss: $O(n^3)$
- Em condições especiais
  - **Sistemas esparsos**
    - Complexidade de cada interação: $O(n)$
  - **Sistemas coerentes** (boas estimativas iniciais)
    - Número de iterações: $O(1)$
    - Ex: calcular a solução $Ax_0 = b_0$ e usar x_0 como estimativa inicial para um segundo caso $Ax_1 = b_1$, onde b_1 é próximo de b_0 (*Polishing*)
    - Ideia interessante para sistemas que evoluem ao longo do tempo e precisam ser resolvidos várias vezes
  - Complexidade computacional total: $O(n)$

Métodos Iterativos

Sistemas esparsos

- Por que utilizar um método iterativo?
- Matriz com a grande maioria dos elementos nulos
- Armazenar e processar apenas os elementos não nulos
  - Eliminação de Gauss transformaria em matriz cheia

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0.5 \\ -1 & 3 & -1 & \cdots & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & \cdots & 0.5 & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0.5 & \cdots & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & \cdots & -1 & 3 & -1 \\ 0.5 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 1.5 \\ 1.5 \\ \vdots \\ 1.5 \\ 1.5 \\ 2.5 \end{bmatrix}, \text{ solução } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Métodos Iterativos

Sistemas esparsos

Exemplo: $n = 100\,000$

- Matriz cheia: $n^2 = 10^{10}$ valores
  - Memória: $8 \times 10^{10} = 80$ Gbytes!
  - Processamento por Eliminação de Gauss $O(n^3)$
    - $\approx 10^{15}$ operações
- Considerando o sistema esparso
  - Memória: $\approx 4n$
  - Número de operações por iteração: $2 \times 4n = 8 \times 10^5$
    - 100 iterações: 8×10^7
- Suponha máquina de 10^8 flops (op. de ponto flutuante)
  - Tempo p/ El. de Gauss: $\frac{10^{15}}{10^8} = 10^7$ segundos!
    - Um ano tem 3×10^7 segundos
  - Para sistema esparso: ≈ 1 segundo para 100 iterações!

Exercícios propostos

1. Qual a diferença entre o Método de Jacobi e o Método de Gauss-Seidel para solução iterativa de sistemas lineares?