# Simulação Física INF1608 – Análise Numérica

Departamento de Informática, PUC-Rio





#### Equação de movimento

Segunda Lei de Newton

$$f = ma$$

► EDO de segunda ordem

$$x'' = \frac{f}{m}$$

► Transformando em duas EDOs de primeira ordem acopladas

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = \frac{f}{m} \end{cases}$$





Movimento de partícula no espaço 2D

Estado da partícula

$$\mathbf{s} = \left[ egin{array}{c} \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \end{array} 
ight]$$

Estado e sua derivada

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{c} \mathbf{v} \\ \mathbf{f}/m \end{array}\right]$$

Considerando o espaço bidimensional

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ v_x \\ v_y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ f_x/m \\ f_y/m \end{bmatrix}$$





#### Movimento de partícula no espaço 2D

- ightharpoonup Determinar  $\mathbf{s}(t)$ 
  - **D**adas as forças atuantes no sistema:  $\mathbf{f}(t, \mathbf{s})$
  - Dadas as condições iniciais: s(0)
- ► Método de Euler explícito

$$\mathbf{s}_0 = \left[ \begin{array}{c} x_0 \\ y_0 \\ v_{x_0} \\ v_{y_0} \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \\ v_{x_{i+1}} \\ v_{y_{i+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ v_{x_i} \\ v_{y_i} \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} v_{x_i} \\ v_{y_i} \\ f_x(t_i, \mathbf{s}_i)/m \\ f_y(t_i, \mathbf{s}_i)/m \end{bmatrix}$$





Exemplos de forças:  $\mathbf{f} = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ 

► Força de gravidade (constante):

$$\mathbf{f} = m\mathbf{g}$$

Força de vento:

$$\mathbf{f}_w = c\mathbf{v}_w(t, \mathbf{x})$$

► Forças dissipativas:

$$\mathbf{f}_d = -k_d \|\mathbf{v}\|^n \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

Força de viscosidade:

$$\mathbf{f}_d = -c\mathbf{v}$$

onde c representa o coeficiente de viscosidade





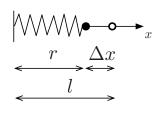
Exemplos de forças:  $\mathbf{f} = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ 

► Força de mola

Lei de Hooke (peq. deslocamentos)

$$f_s = -K_s \Delta x, \quad \Delta x = I - r$$

 $ightharpoonup K_s$  é o coeficiente de rigidez





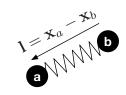


Exemplos de forças:  $\mathbf{f} = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ 

► Força de mola entre partículas

$$\mathbf{f}_{a} = -K_{s}\Delta\mathbf{x} = -K_{s}\left(\|\mathbf{I}\| - r\right)\frac{\mathbf{I}}{\|\mathbf{I}\|}$$

$$\mathbf{f}_{b} = -\mathbf{f}_{a}$$



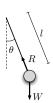
► Mola com amortecimento

$$\mathbf{f}_{a} = -\left[K_{s}(\|\mathbf{I}\| - r) + K_{d}\mathbf{I}'\frac{\mathbf{I}}{\|\mathbf{I}\|}\right]\frac{\mathbf{I}}{\|\mathbf{I}\|}$$
$$\mathbf{I}' = \mathbf{v}_{a} - \mathbf{v}_{b}$$





#### Movimento de um pêndulo



Equação diferencial

$$\theta'' + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Para valores de  $\theta$  pequenos:  $\sin \theta \approx \theta$ 

$$\theta'' + \frac{g}{I}\theta = 0$$

Solução analítica

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$$

Período

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{g}}$$





#### Movimento de um pêndulo

- ightharpoonup Solução para heta qualquer, via método numérico
- ► Equação diferencial de segunda ordem

$$\theta'' = -\frac{g}{I}\sin\theta$$

- ► EDO's acopladas (Sistema com 2 equações de 1ª ordem)
  - Estado: posição e velocidade angulares
  - ► Derivada: velocidade e aceleração angulares

$$\left[\begin{array}{c}\theta\\w\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{c}w\\-\frac{g}{l}\sin\theta\end{array}\right]$$





#### Movimento de um pêndulo

▶ Método de Euler

$$\begin{bmatrix} \theta_{i+1} \\ w_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_i \\ w_i \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} w_i \\ -\frac{g}{l} \sin \theta_i \end{bmatrix}$$

- Determinando o período numericamente...
  - ► Monitorar mudança de sinal de w
    - Exemplo:  $w_1 = w(t_1)$  e  $w_2 = w(t_2)$ , com  $w_1 w_2 <= 0$

$$T = 2\left[t_1 + \frac{|w_1|}{|w_1| + |w_2|}(t_2 - t_1)\right]$$





#### Integração de Verlet

Da série de Taylor:

$$x(t+h) = x(t) + \dot{x}h + \frac{1}{2}\ddot{x}h^2 + \frac{1}{6}x^{(3)}(h)h^3 + O(h^4)$$
$$x(t-h) = x(t) - \dot{x}h + \frac{1}{2}\ddot{x}h^2 - \frac{1}{6}x^{(3)}(h)h^3 + O(h^4)$$

Somando as duas expressões:

$$x(t + h) = 2x(t) - x(t - h) + \ddot{x}h^{2} + O(h^{4})$$

Para a física de partícula:

$$\mathbf{x}_{i+1} = 2\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1} + \frac{h^2}{m}\mathbf{f_i}$$

- ▶ Não armazena explicitamente (e não avalia) a velocidade
- ▶ Reversível para sistemas conservativos:  $\mathbf{f} = -\nabla \mathbf{V}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$





## Utilização da integração de Verlet

Sistemas conservativos:  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ 

Condições iniciais: 
$$\begin{cases} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{cases}$$

Para determinação de  $x_1$ , pode-se usar Euler:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + h \dot{\mathbf{x}}_0$$

$$\mathbf{x}_{i+1} = 2\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1} + \frac{h^2}{m}\mathbf{f}(t_i, \mathbf{x}_i)$$





## Utilização da integração de Verlet

Sistemas não conservativos:  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ 

Pode-se estimar a velocidade utilizando ordens diferentes

$$\dot{\mathbf{x}}_{i} = \frac{\mathbf{x}_{i} - \mathbf{x}_{i-1}}{h}, \quad O(h)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{i} = \frac{\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_{i-1}}{2h}, \quad O(h^{2})$$

A partir disso, temos a evolução do sistema:

$$\mathbf{x}_{1} = \mathbf{x}_{0} + h \dot{\mathbf{x}}_{0}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{i} = \frac{\mathbf{x}_{i} - \mathbf{x}_{i-1}}{h}$$

$$\mathbf{x}_{i+1} = 2\mathbf{x}_{i} - \mathbf{x}_{i-1} + \frac{h^{2}}{m}\mathbf{f}(t_{i}, \mathbf{x}_{i}, \dot{\mathbf{x}}_{i})$$





# Estratégia de predição & correção

Objetiva melhorar a estimativa de x

#### Predição:

$$\overline{\dot{\mathbf{x}}_{i}} = \frac{\mathbf{x}_{i} - \mathbf{x}_{i-1}}{h}$$

$$\overline{\mathbf{x}_{i+1}} = 2\mathbf{x}_{i} - \mathbf{x}_{i-1} + \frac{h^{2}}{m}\mathbf{f}(t_{i}, \mathbf{x}_{i}, \overline{\dot{\mathbf{x}}}_{i})$$

#### Correção:

$$\dot{\mathbf{x}}_{i} = \frac{\overline{\mathbf{x}_{i+1}} - \mathbf{x}_{i-1}}{2h}$$

$$\mathbf{x}_{i+1} = 2\mathbf{x}_{i} - \mathbf{x}_{i-1} + \frac{h^{2}}{m}\mathbf{f}(t_{i}, \mathbf{x}_{i}, \dot{\mathbf{x}}_{i})$$





#### Emulando viscosidade

$$\mathbf{f}_d = -k \mathbf{v}$$

Reescrevendo a equação de integração:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}) + \frac{h^2}{m}\mathbf{f}$$

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + (1 - \delta)(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}) + \frac{h^2}{m}\mathbf{f}$$

- $\blacktriangleright$  onde  $\delta$  representa o "coeficiente" de viscosidade (e.g.  $10^{-2}$ )
- remove a necessidade de calcular explicitamente a velocidade
- ightharpoonup ou podemos calcular a velocidade e incluir  $\mathbf{f}_d$  em  $\mathbf{f}$





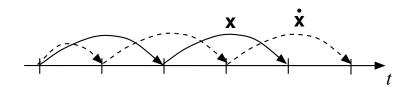
# Método "leap frog"

Série de Taylor para velocidade:

$$\dot{\mathbf{x}}(t+h) = \dot{\mathbf{x}}(t) + h \ddot{\mathbf{x}}(t) + \frac{h^2}{2} \mathbf{x}^{(3)}(t) + \dots$$
$$\dot{\mathbf{x}}(t-h) = \dot{\mathbf{x}}(t) - h \ddot{\mathbf{x}}(t) + \frac{h^2}{2} \mathbf{x}^{(3)}(t) - \dots$$

Subtraindo e usando passo intercalado:

$$\dot{\mathbf{x}}(t+h/2) = \dot{\mathbf{x}}(t-h/2) + h\ddot{\mathbf{x}}(t) + O(h^3)$$



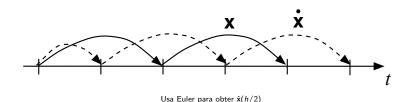




## Método "leap frog"

Para sistemas conservativos

$$\dot{\mathbf{x}}(t+h/2) = \dot{\mathbf{x}}(t-h/2) + h\ddot{\mathbf{x}}(t)$$
$$\mathbf{x}(t+h) = \mathbf{x}(t) + h\dot{\mathbf{x}}(t+h/2)$$





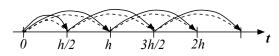


#### Para sistemas não conservativos: Método intercalado

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \frac{h}{2}\dot{\mathbf{x}}_0$$

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \dot{\mathbf{x}}_0 + \frac{h}{2m}\mathbf{f}(0, \mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)$$

$$\mathbf{x}_{i+2} = \mathbf{x}_i + h\dot{\mathbf{x}}_{i+1}$$
  
 $\dot{\mathbf{x}}_{i+2} = \dot{\mathbf{x}}_i + \frac{h}{m}\mathbf{f}(t_{i+1}, \mathbf{x}_{i+1}, \dot{\mathbf{x}}_{i+1})$ 



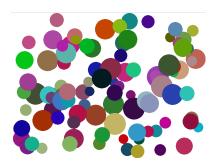




# Detecção e resposta à colisão

#### Método da relaxação

► Tratamento de colisão com amortecimento total





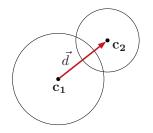




#### Evitando sobreposição de círculos

#### Método da relaxação

- ► Para cada círculo:
  - Verifica interseção com todos os demais
  - ► Computa soma vetorial da interseção (50% de cada interseção)
  - ► Desloca círculo no sentido contrário



$$\vec{d} = \mathbf{c_2} - \mathbf{c_1}$$

$$\hat{u} = \frac{\vec{d}}{\|\vec{d}\|}$$

$$\delta = \|\vec{d}\| - r_1 - r_2$$

$$\mathbf{c_1} = \mathbf{c_1} - 0.5\delta \hat{u}$$

- Para cada círculo:
  - Limite sua posição aos limites da janela: se o círculo estiver total ou parcialmente fora do limite, corrija sua posição





#### Exercícios propostos

- 1. Explique por que o método de Euler para solução de Equações Diferenciais Ordinárias não é capaz de gerar resultados precisos para um corpo lançado com velocidade inicial num meio onde apenas a força da gravidade terrestre se aplica:  $\ddot{x} = mg$ , sendo dados  $x(0) = x_0$  e  $v(0) = v_0$ .
- 2. Para uso do Método de Verlet, escreva uma estratégia para avaliação da velocidade em sistemas não conservativos, isto é, sistemas em que a avaliação da força depende da velocidade?





## Exercícios propostos

3. Considere a simulação de uma partícula sendo lançada para cima com uma velocidade inicial de 5 m/s, a partir da posição  $x_0=0$ , como ilustrado na figura. Considere a aceleração da gravidade igual a  $10 \ m/s^2$ , sendo a gravidade a única força atuante. Considerando a Lei de Newton que rege o movimento desta partícula ( $\ddot{x}=f/m$ ), indique a posição e a velocidade da partícula no tempo  $t=0.3 \ s$  considerando o emprego do método de Euler com passo igual a  $h=0.1 \ s$  para resolução de equações diferenciais ordinárias.

