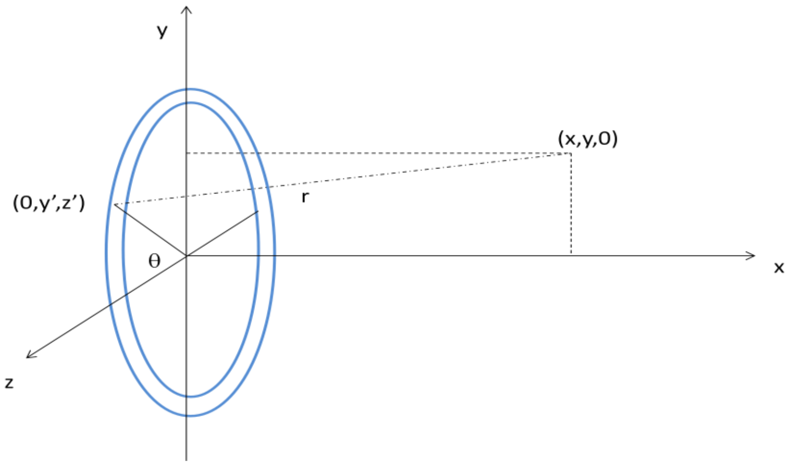
Cálculo do campo elétrico de um anel uniformemente carregado – Posição qualquer

Considere um anel circular de raio R e carga total Q, correspondendo a uma densidade de carga linear $\lambda = Q/2\pi R$, vide a figura.

Queremos calcular o campo elétrico num ponto qualquer, por exemplo, em $(x, y, 0)$.



A expressão para o campo é:

$$\vec{E}(x,y,0) = K\int \frac{dq}{r^2}\hat{r} = K\int \frac{dq}{r^3}\vec{r} = K\int \frac{dq}{r^3}(r_x\hat{\imath} + r_y\hat{\jmath} + r_z\hat{k}),$$

onde:

$$r_x = x, \qquad r_y = y - y' = y - R.\sin\theta, \qquad r_z = -z' = -R.\cos\theta.$$

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$$

A integral é feita sobre o anel. Podemos fazê-la integrando sobre o ângulo θ. Para isto, vamos escrever o elemento de carga como:

$$dq = \lambda.dl = \lambda.R.d\theta.$$

Assim, temos finalmente:

$$\vec{E}(x,y,0) = K.\lambda.R.\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{r^3}(r_x\hat{\imath} + r_y\hat{\jmath} + r_z\hat{k}).$$

Ou as componentes em separado:

$$E_x(x,y,0) = K.\lambda.R.\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{r^3}(r_x),$$

$$E_y(x,y,0) = K.\lambda.R.\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{r^3}(r_y),$$

$$E_z(x,y,0) = K.\lambda.R.\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{r^3}(r_z) = 0.$$

Método Numérico

Os dados de entrada são:

a) Carga Q, b) Raio R, c) Constante K, d) Coordenadas do ponto $(x, y, 0)$. Use valores no S.I.

A integral pode ser transformada numa soma pela discretização:

$$\theta \rightarrow \quad \theta_i = i.\Delta\theta = \ i.\frac{2\pi}{N}, \qquad i = 1,2, \ldots N.$$

$$\int d\theta \rightarrow \sum_i \frac{2\pi}{N}. \quad \text{(use, por exemplo, } N\text{=100)}$$

Defina a grade de pontos da posição $(x, y, 0)$:

Faça o cálculo do campo apenas no primeiro quadrante do plano xy (por simetria, você tem o campo nos os outros quadrantes) Para isto, discretize x e y de zero até, por exemplo, a uma distância $(3.R)$:

$$x \rightarrow x_j = j.\frac{3.R}{N_x}, \qquad y \rightarrow y_j = j.\frac{3.R}{N_x}, \qquad j = 1,2 \ldots N_x \ \ (N_x = 20\text{, por exemplo. Total de 400 pontos)}$$

Lógica:

1) Defina as constantes de entrada
2) Defina a grade dos pontos onde E será calculado
3) Faça um *loop* em x e em y para cobrir todos os pontos da grade. Calcule E_x e E_y para cada ponto na grade. Guarde estes valores num arquivo no formato x, y, E_x, E_y
4) Gráficos:
   a) Importe este arquivo no Origin®. Plote o gráfico do campo com setinhas, usando >Plot > Vector xyXY.
   b) Melhor se usar Python, plote os vetores campo elétrico (também pode-se plotar as linhas de campo)

Checar seu resultado: Você deve checar o seu resultado numérico com algo conhecido. Por exemplo, pode-se usar o resultado analítico (já conhecido e calculado em sala) ao longo do eixo do anel, isto é, em $z = y = 0$:

$E_x(x, 0,0) = \frac{KQ\,x}{(x^2+R^2)^{3/2}} = \frac{K\lambda 2\pi}{R}\frac{(\frac{x}{R})}{\left(\left(\frac{x}{R}\right)^2+1\right)^{3/2}}$, para checar o resultado numérico calculado pelo programa de numérico.

Faça um gráfico que sobreponha os $E_x(x, 0,0)$ analítico e o seu numérico (em $y = 0$). Devem ser iguais!

Links para plotar usando Phyton:

https://scipython.com/blog/visualizing-a-vector-field-with-matplotlib/

Bom trabalho.

Ponto EXTRA para quem apresentar o resultado num desenho/gráfico 3D, algo assim: