

UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas
FCA - Faculdade de Ciências Aplicadas
Curso de Engenharia de Manufatura e Engenharia de Produção



Disciplina: Física Geral III (LE404)

Docente: Marcelo Zoéga Maialle

Prática: Trabalho Numérico 01

Data de entrega: 30/09/2021

Trabalho Numérico 01:

Cálculo do Campo Elétrico de um Anel Uniformemente Carregado

Turma: A

Integrantes do Grupo:

Nome: Augusto Chebel Machado	R.A.: 231762
Nome: Leonardo de Lima Paiva	R.A.: 220057
Nome: Lucas Tramonte	R.A.: 182697
Nome: Vinícius Consentino Muniz	R.A.: 245271

RESUMO

O projeto numérico busca a visualização e compreensão acerca do campo elétrico produzido por um anel uniformemente carregado no espaço, através da elaboração de um campo vetorial no plano xy, das linhas de campo formadas e de comparações analíticas sobre os resultados obtidos. Durante a simulação, realizada utilizando a linguagem de programação *Python* na plataforma *Google Colaboratory*, percebeu-se que os parâmetros numéricos que caracterizam o sistema e o código possuem influência direta na solução final, devendo ser considerados atenciosamente a fim de uma maior precisão.

Ao final, com os devidos resultados obtidos, a partir das variáveis estabelecidas, obteve-se valores que divergiram cerca de 1,0% em relação aos esperados teoricamente, quando aplicados ao eixo x, cuja fórmula é de relativa simplicidade de obtenção e utilização. Ademais, as plotagens dos campos elétricos se mostraram satisfatórias, apresentando um comportamento fiel e esperado tanto para uma carga positiva quanto para uma carga negativa.

INTRODUÇÃO

O conceito físico do campo elétrico permite um olhar mais profundo sobre a interação eletrostática entre partículas carregadas no espaço. A ação à distância da força eletrostática é mediada por um campo elétrico, originado por uma carga geradora Q decorrente de uma distribuição de cargas q_j , sendo $j = 1, 2, \dots, n$. Pelo princípio da superposição, a soma vetorial dos campos das cargas individuais constitui o campo elétrico total E :

$$\vec{E} = \sum_{j=1}^n \vec{E}_{q_j}. \quad (1)$$

Dentro desse contexto, ao considerar uma distribuição uniforme de cargas de um anel de raio R e carga total Q , como apresentado na Figura 1, compreende-se que todos os pontos do espaço sofrem a presença do campo elétrico gerado, independente de existir uma carga de prova q_o que comprove a existência do campo. No entanto, a direção do vetor campo depende do sinal da carga geradora, uma vez que, se o anel estiver carregado positivamente ($Q > 0$), em cada ponto do espaço o campo elétrico será de afastamento, e será de aproximação caso o anel for carregado negativamente ($Q < 0$).

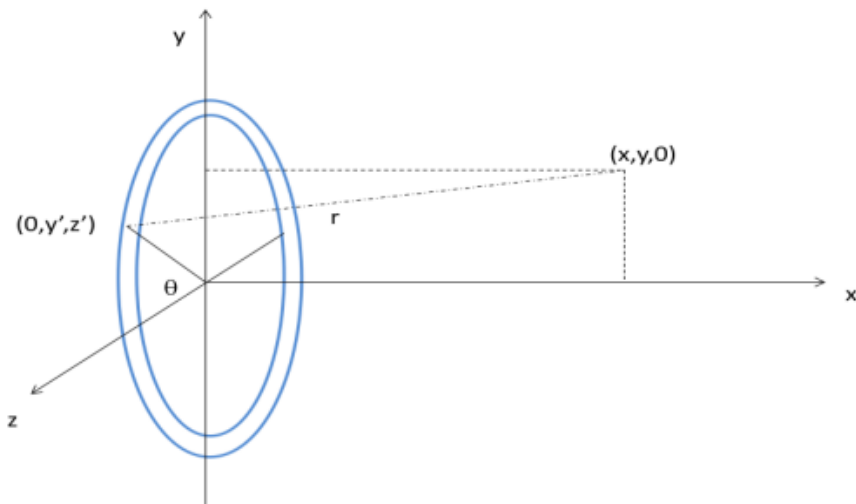


Figura 1 : Anel uniformemente carregado no plano yz.

Como a distribuição é uniforme em todo o comprimento do anel, a densidade linear de carga λ é constante. Logo, ao considerar um elemento infinitesimal de carga dq , contido em um comprimento de arco dL , temos:

$$\lambda = \frac{Q}{2\pi R} = \frac{dq}{dL} = \frac{dq}{Rd\theta} . \quad (2)$$

A fim de calcular o campo elétrico em um ponto $(x, y, 0)$ do espaço, é necessário determinar a sua distância r à um ponto $(0, y', z')$ qualquer pertencente ao anel:

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}, \quad (3)$$

sendo r_x , r_y , e r_z as componentes do vetor \mathbf{r} .

Realizando as devidas projeções, temos :

$$r_x = x . \quad (4)$$

$$r_y = y - y' = y - R \cdot \sin(\theta) . \quad (5)$$

$$r_z = -z' = -R \cdot \cos(\theta) . \quad (6)$$

Dessa forma, para calcular o campo elétrico:

$$\vec{E}(x, y, 0) = k \int \frac{dq}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = k \int \frac{dq}{r^3} (r_x \hat{i} + r_y \hat{j} + r_z \hat{k}). \quad (7)$$

Podemos calcular cada componente do campo, discretizando o ângulo θ a partir da equação (2) :

$$E_x(x, y, 0) = K \cdot \lambda \cdot R \int_0^{2\pi} \frac{r_x}{r^3} d\theta = K \cdot \lambda \cdot R \int_0^{2\pi} \frac{x}{[x^2 + y^2 - 2yR \sin(\theta) + R^2]^{3/2}} d\theta. \quad (8)$$

$$E_y(x, y, 0) = K \cdot \lambda \cdot R \int_0^{2\pi} \frac{r_y}{r^3} d\theta = K \cdot \lambda \cdot R \int_0^{2\pi} \frac{y - R \cdot \sin(\theta)}{[x^2 + y^2 - 2y \cdot R \cdot \sin(\theta) + R^2]^{3/2}} d\theta. \quad (9)$$

$$E_z(x, y, 0) = K \cdot \lambda \cdot R \int_0^{2\pi} \frac{r_z}{r^3} d\theta = 0. \quad (10)$$

Como as integrais expressas nas equações (8), (9), e (10) são não-elementares, torna-se necessário o uso de integração numérica. Para tanto, diferencia-se θ no intervalo $[0, 2\pi]$ em $N - 1$ intervalos¹ :

$$\theta_j = j \Delta\theta = j \cdot \frac{2\pi}{N}, \quad (11)$$

sendo $j = 1, 2, \dots, N$.

Definindo $f_x(\theta)$ como o integrando da equação (8) , temos:

$$f_x(\theta) = \frac{K \cdot \lambda \cdot R \cdot x}{[x^2 + y^2 - 2yR \sin(\theta) + R^2]^{3/2}}. \quad (12)$$

Portanto, a integração numérica é realizada pela soma de Riemann dos retângulos aproximantes:

$$\int_0^{2\pi} \frac{r_y}{r^3} d\theta = \sum_{j=1}^{N-1} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} f_x(\theta) d\theta \approx \sum_{j=1}^{N-1} f_x(\bar{\theta}_j) \Delta\theta, \quad (13)$$

sendo $\bar{\theta}_j$ um valor arbitrário dentro do intervalo $[\theta_j, \theta_{j+1}]$. Como exemplo, pode-se adotar a regra do ponto médio:

¹ O índice N é escolhido arbitrariamente, desde que a escolha seja conveniente, ou seja, N deve ser um valor suficientemente alto para que o erro da integração numérica não seja significativo.

$$\bar{\theta}_j = \frac{\theta_j + \theta_{j+1}}{2}. \quad (14)$$

Dessa forma, o mesmo raciocínio é utilizado para a componente y do campo elétrico, possibilitando calcular o vetor campo elétrico resultante em (x, y, 0):

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j}. \quad (15)$$

Ademais, a magnitude do campo também pode ser calculada :

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}. \quad (16)$$

Logo, para verificar o resultado obtido numericamente, é possível comparar com o resultado analítico conhecido para y = z = 0, o qual , segundo² Moysés Nussenzveig^[1] (1997, p.11) :

$$E_x(x, 0, 0) = \frac{KQx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (17)$$

Por fim, com o fito de investigar o que ocorre com a magnitude do campo elétrico para $x \gg R$, podemos manipular a equação (17), sabendo que $(\frac{R}{x})^2 \rightarrow 0$:

$$E_x(x, 0, 0) = \frac{KQx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{KQx}{x^3 [1 + (\frac{R}{x})^2]^{3/2}} \approx \frac{KQ}{x^2}, \quad (18)$$

como esperado para uma carga pontual.

OBJETIVOS

O intuito deste trabalho constitui em concretizar a visão abstrata sobre o campo elétrico, desenvolvendo mais familiaridade com a linguagem computacional, que possibilita, além de uma ótica estabelecida para um panorama espacial, no qual não se limita a pontos particulares,

² Na referência indicada , o autor apresenta a magnitude da força elétrica total perpendicular ao plano do anel. Logo, para calcular o módulo do campo elétrico, basta dividir a magnitude da força pela carga q.

a visualização e a forma de disposição das linhas de campo geradas por um anel uniformemente carregado.

METODOLOGIA

O procedimento numérico empregado para a elaboração do campo vetorial e das linhas de campo de uma anel carregado uniformemente pode ser realizado de diferentes maneiras. A linguagem de programação escolhida foi *Python* e todo o processo se desenvolve na plataforma *Google Colaboratory*. Além dos comandos nativos da linguagem, é conveniente a utilização de bibliotecas específicas para o objetivo almejado, fazendo-se a importação das bibliotecas *numpy*^[2], *matplotlib.pyplot*^[3], *pandas*^[4] e *math*^[5].

Os parâmetros de entrada, como o valor da carga Q e o raio R , para o anel, e a constante eletrostática $K = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$, são pré-determinados como variáveis que acompanharão toda a aplicação do código, caracterizando o objeto de estudo.

Após o conhecimento das expressões que calculam o campo elétrico nas direções desejadas - equações (8), (9) e (10) - para pontos quaisquer, necessita-se a criação de uma grade de coordenadas (x, y) onde o campo E será calculado. Apenas valores positivos dos eixos podem ser considerados, a obtenção do campo nos demais quadrantes pode ser realizada por simetria.

A discretização do anel em pequenos elementos $d\theta$ é determinada pela equação (11). Quanto maior o número de discretizações empregado, maior a precisão do cálculo numérico, por isso é importante que esse valor seja elevado (utilizou-se $N = 100$). Uma vez que a grade de pontos é construída e o anel é repartido em pequenas porções angulares, o método numérico consiste na aplicação das fórmulas discretizadas de campo elétrico conhecidas, nas direções x e y , na forma da equação (13), representando um somatório referente a cada parcela $d\theta$, realizado através de um laço que percorre cada par (x, y) da grade. Os valores obtidos são então armazenados em coleções de direções E_x e E_y , que serão empregadas na plotagem dos gráficos e figuras.

Para a elaboração visual do campo vetorial, utilizou-se o comando, importado das bibliotecas anteriormente, `plt.quiver()`, o qual utilizou como argumentos: (lista referente às coordenadas x , lista referente às coordenadas y , lista referente às direções de E_x , lista referente às direções de E_y). As linhas de campo podem ser construídas a partir do comando `plt.streamplot()`, que faz uso dos mesmos argumentos anteriores, mas no formato matricial (*arrays*).

A visualização do código e da lógica de programação empregada estão disponíveis em apêndices, através do link de direcionamento ao *Google Colaboratory* do trabalho numérico (Apêndice A), e *prints* das partes mais importantes do código, exibidos no Apêndice B.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A partir de toda a fundamentação exposta, os parâmetros que caracterizam o objeto de estudo - um anel carregado uniformemente no plano yz (Figura 1) - foram: carga total, em módulo, $|Q| = 10 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ e raio $R = 10 \text{ m}$. Considerou-se $N_x = N_y = 20$ pontos em cada eixo coordenado distribuídos regularmente em um intervalo numérico de $[0, 3R] = [0, 30]$. Para uma maior precisão, discretizou-se o ângulo θ em $N = 100$ elementos $d\theta$.

As plotagens obtidas dos campos vetoriais no plano xy, para uma carga positiva e negativa, são exposta pelas Figuras 2 e 3³, respectivamente. Para uma maior harmonia gráfica, a escala dos vetores foi alterada (em relação aos seus comprimentos originais), mas a proporcionalidade foi mantida, não havendo qualquer prejuízo na compreensão do fenômeno.

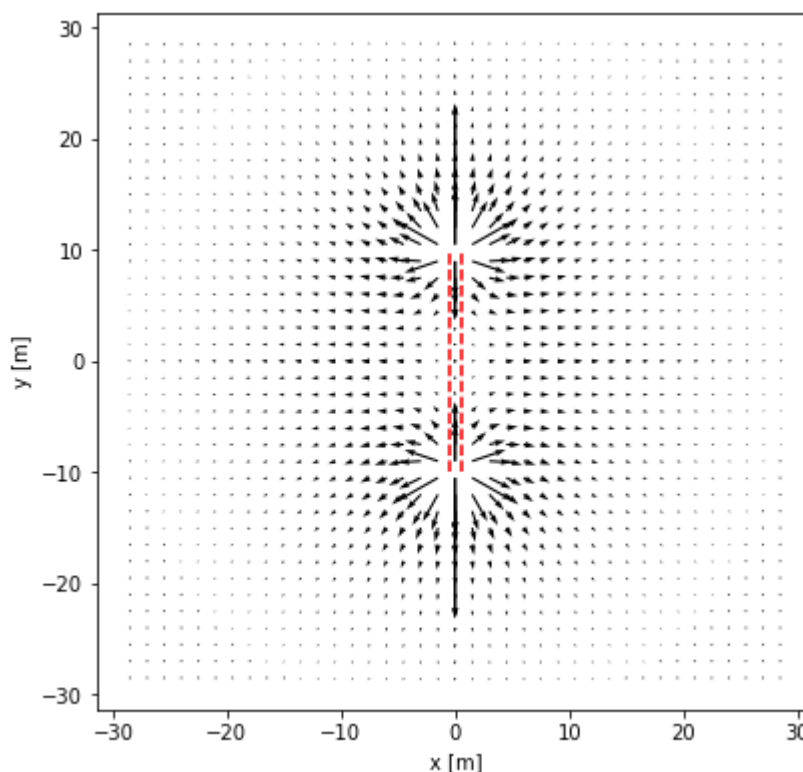


Figura 2 - Campo elétrico gerado pelo anel carregado positivamente de maneira uniforme.

³ As linhas tracejadas em vermelho são apenas ilustrativas, representando o anel, para uma visualização facilitada. O anel é linear, portanto, a espessura deve ser desconsiderada.

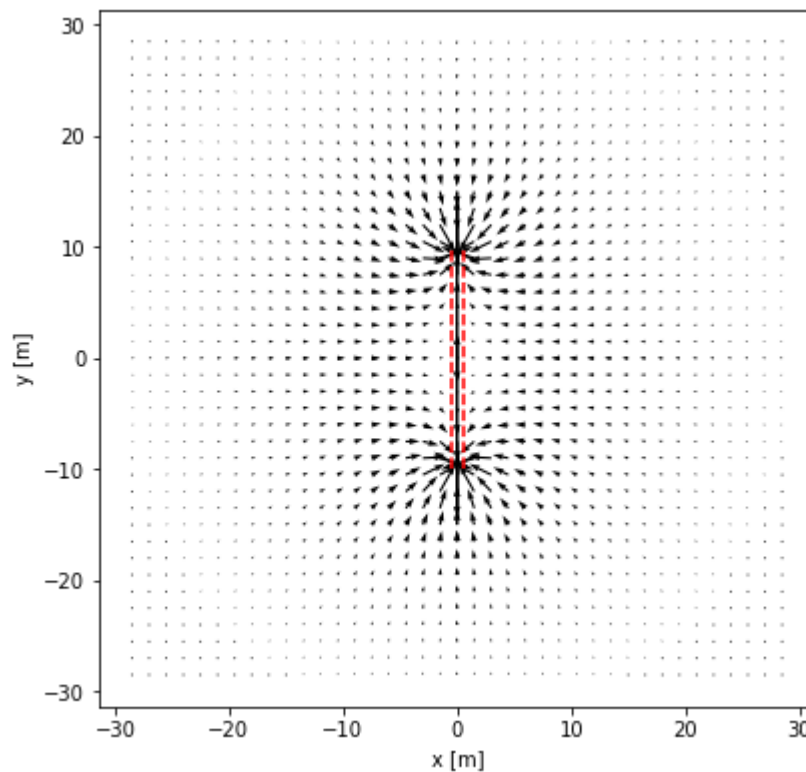


Figura 3 - Campo elétrico gerado pelo anel carregado negativamente de maneira uniforme.

Nota-se, primeiramente, que para a situação em que a carga é positiva, os vetores de campo elétrico se afastam do anel, ao passo de que para uma carga negativa as direções são de aproximação, sendo um resultado esperado, estando em conformidade teórica. Além disso, percebe-se também que a intensidade do campo, representada pelo tamanho dos vetores na figura, é crescente nas proximidades do anel, mas à medida que as localizações se distanciam a magnitude é menor. Para fins comparativos e verificação, plotou-se de forma sobreposta ao campo numericamente alcançado, os vetores de intensidade teórica para pontos no eixo x, calculados pela equação (17). O resultado para cargas de sinais opostos são visíveis através das Figuras 4 e 5.

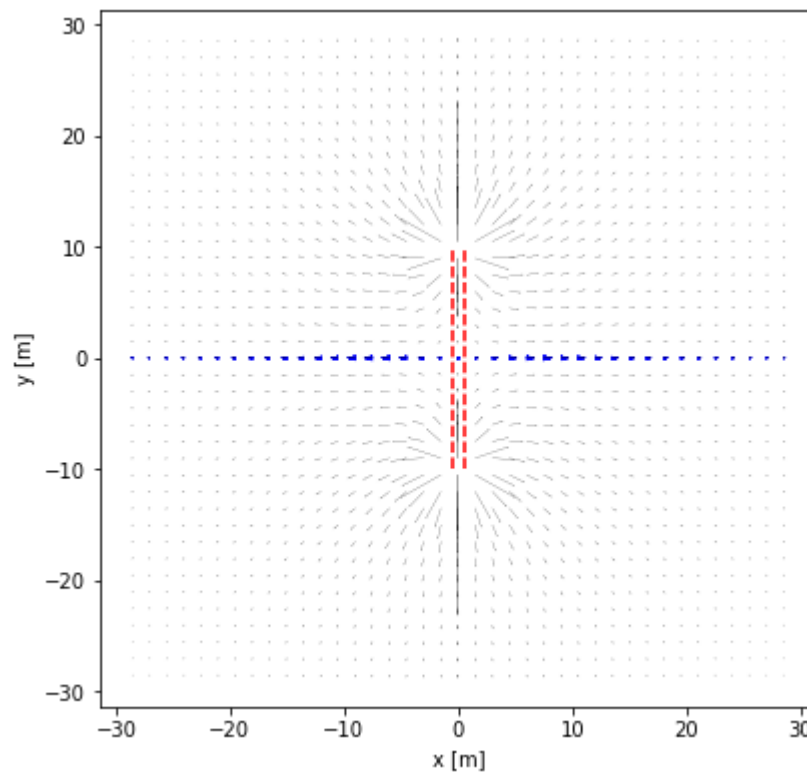


Figura 4: Visualização dos vetores teóricos no eixo x sobrepostos aos obtidos numericamente, para uma carga positiva no anel.

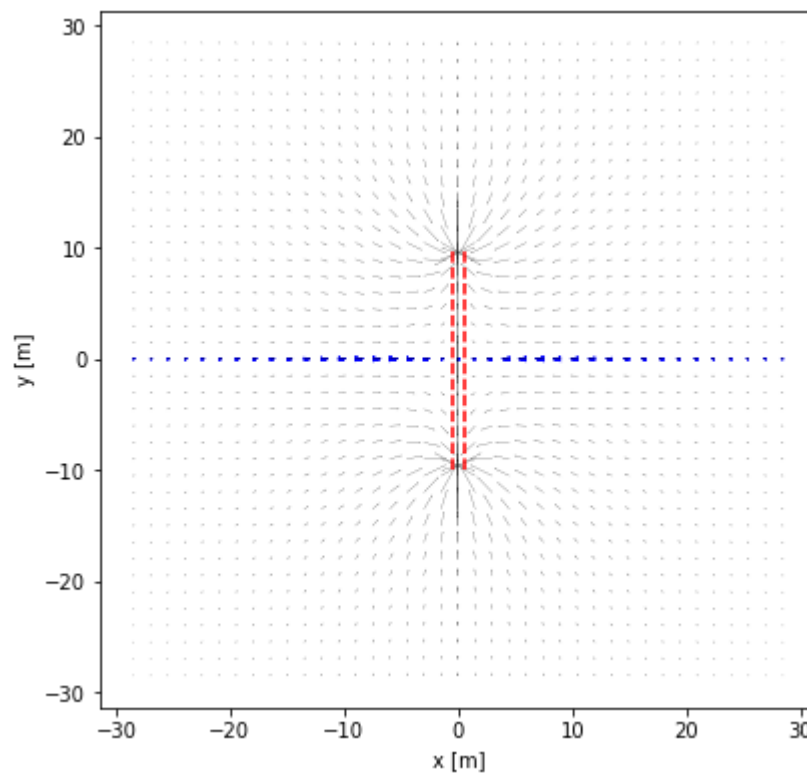


Figura 5: Visualização dos vetores teóricos no eixo x sobrepostos aos obtidos numericamente, para uma carga negativa no anel.

Os vetores teóricos, à primeira vista, parecem estar de acordo com resultado numérico, quando analisado sob aspectos visuais. No entanto, buscando uma maior segurança na plotagem realizada, elaborou-se uma tabela e um gráfico, comparando os valores absolutos entre as magnitudes numéricas e teóricas do campo no eixo da abscissa, - através das equações (16) e (17) respectivamente, como pode ser visualizado na Tabela 1 e na Figura 6.

	Coordenada x [m]	E numérico [N/C]	E teórico [N/C]	Erro [%]
0	0.0	0.0283	0.0000	inf
1	1.5	13.1875	13.0569	1.0002
2	3.0	23.9632	23.7260	0.9997
3	4.5	31.0205	30.7134	0.9999
4	6.0	34.3880	34.0475	1.0001
5	7.5	34.9056	34.5600	1.0000
6	9.0	33.5961	33.2634	1.0002
7	10.5	31.3076	30.9976	1.0001
8	12.0	28.6194	28.3360	1.0001
9	13.5	25.8790	25.6227	1.0003
10	15.0	23.2718	23.0414	0.9999
11	16.5	20.8831	20.6764	0.9997
12	18.0	18.7408	18.5552	1.0003
13	19.5	16.8421	16.6754	0.9997
14	21.0	15.1701	15.0199	1.0000
15	22.5	13.7015	13.5659	0.9996
16	24.0	12.4124	12.2895	1.0000
17	25.5	11.2796	11.1680	0.9993
18	27.0	10.2824	10.1806	0.9999
19	28.5	9.4024	9.3093	1.0001

Tabela 1 - Comparação entre a intensidade do campo E numérico e teórico, no eixo x, e erro relativo⁴.

⁴ Erro calculado através da relação $100 * |(E_{\text{teórico}} - E_{\text{numérico}}) / E_{\text{teórico}}|$.

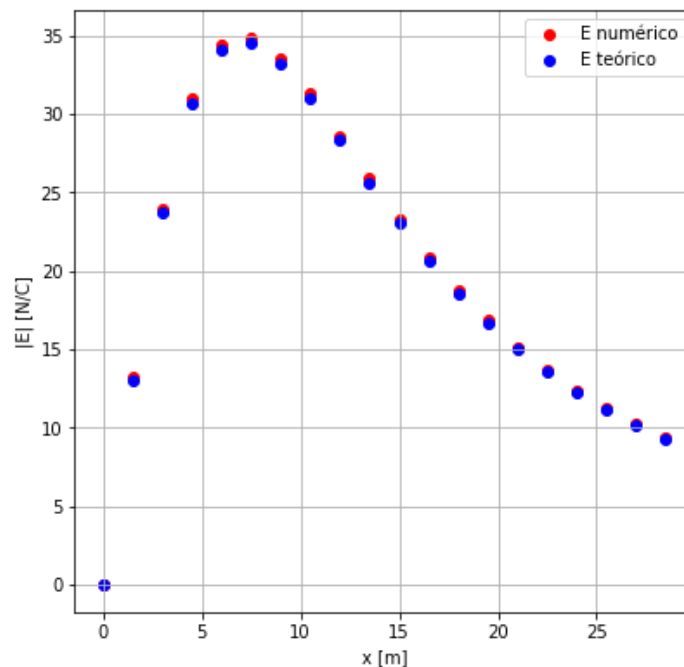


Figura 6 - Comportamento gráfico do campo elétrico sobre o eixo x e comparação entre E numérico e E teórico.

Há uma aproximação satisfatória entre os valores numéricos e teóricos, com erro de aproximadamente 1% apenas, o que denota uma congruência nos resultados. Percebeu-se que para uma discretização de θ com menos parcelas, os resultados divergiram mais, comprovando-se a necessidade de se realizar uma quantidade elevada de iterações para se alcançar uma convergência eficiente.

Ademais, observa-se que, na análise do campo elétrico ao longo do eixo x , o maior valor que ele assume na análise para os pontos discretizados é 34,9056 N/C numericamente e 34,5600 N/C analiticamente no valor de $x = 7,5$ m.

Contudo, por meio da análise contínua da equação (campo teórico), o maior valor do campo elétrico para as condições do problema é 34,6410 N/C no valor de $x = 7,0710$ m. Assim, depreende-se que o estudo realizado pelos valores discretizados apontaram um valor máximo extremamente próximo do real, como pode ser visualizado na Figura 7.

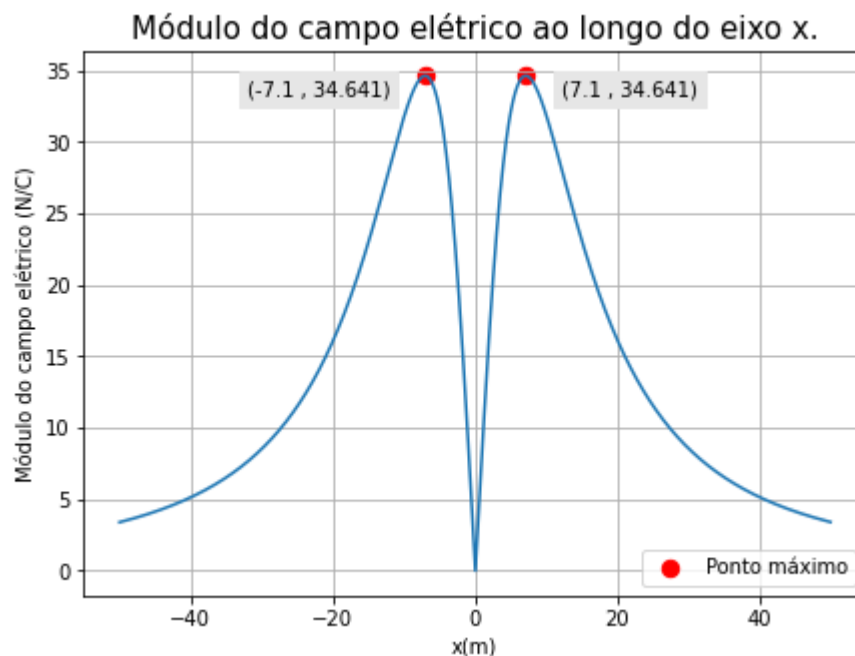


Figura 7 - Gráfico do módulo do campo elétrico $E(x)$ versus distância x .

Não obstante, observa-se também, na Figura 7, simetria no valor do módulo do campo elétrico no eixo x em relação à origem do sistema, onde encontra-se o anel, o que comprova que, nesta situação, a intensidade do campo não depende do sentido adotado no eixo.

No entanto, a simetria não é apenas observada nesta situação, uma vez que a Figura 2 e a Figura 3 evidenciam que o campo elétrico é simétrico em relação aos eixos coordenados, ou seja, observa-se um comportamento análogo nos quatro quadrantes.

Além do mais, realizou-se a construção das linhas de campo, para uma visualização mais contínua, com menos poluição visual, para uma anel carregado positivamente e negativamente, como pode ser visto nas figuras 8 e 9.

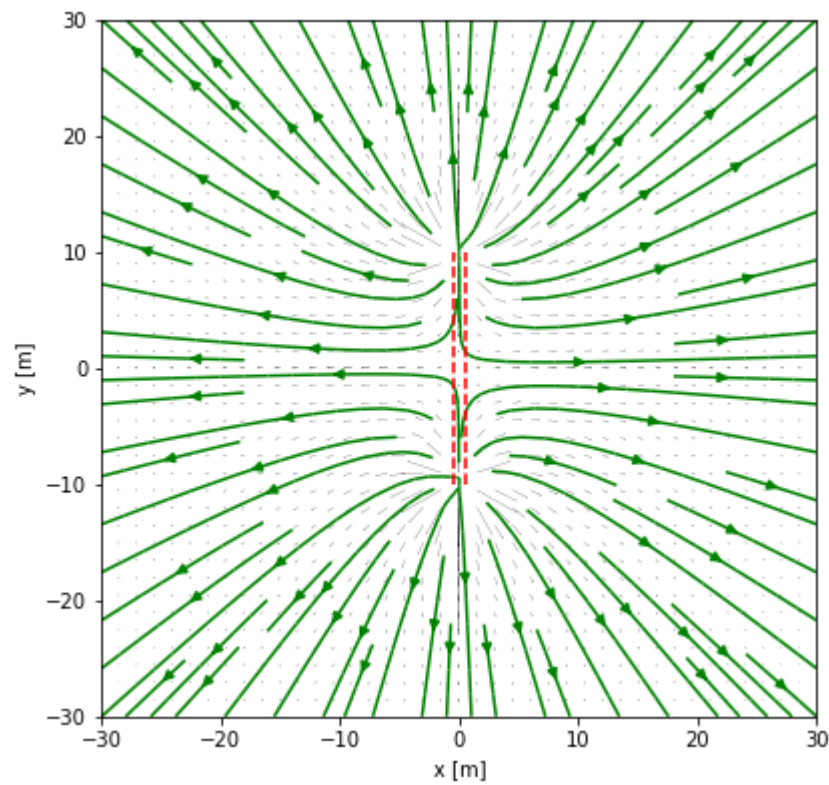


Figura 8 - Linhas de campo elétrico de um anel carregado positivamente.

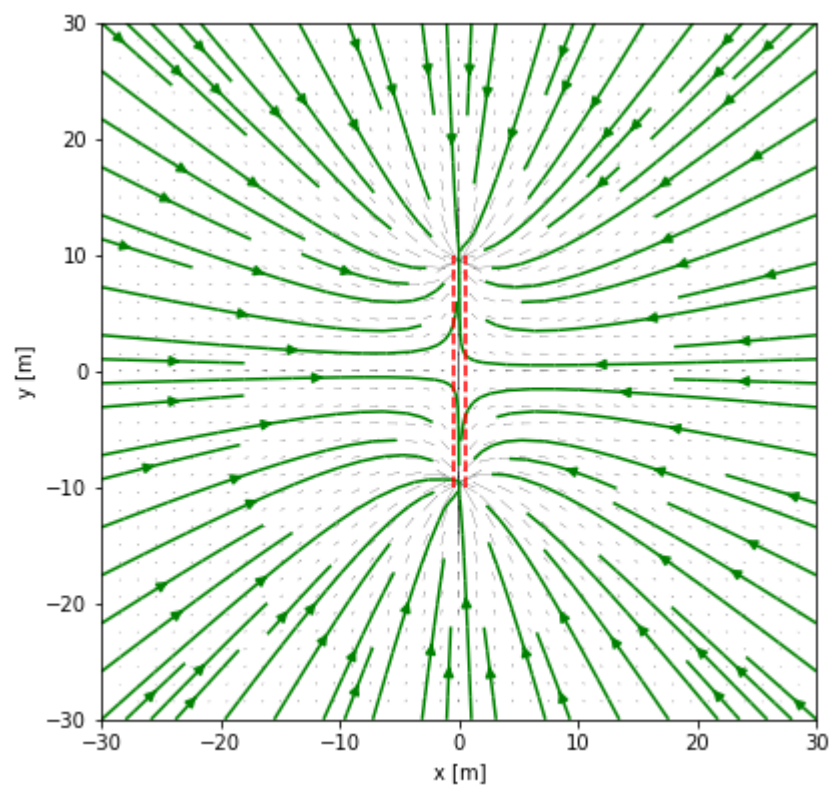


Figura 9 - Linhas de campo elétrico de um anel carregado negativamente.

Neste sentido, depreende-se que quanto mais próximas as linhas de campo estiverem

uma das outras significa que o campo elétrico é mais intenso nessa região, fato este observado na região próxima aos extremos do anel no eixo y, vide a Figura 8 e a Figura 9. Ademais, esse evento está em consonância com os vetores do campo elétrico mostrados na Figura 2 e na Figura 3, cuja intensidade é maior no setor assinalado.

A tabela 2 exemplifica alguns valores intensos de campo elétrico na região apresentada, localizada nas “extremidades” superior e inferior do anel (no eixo y e proximidades), bem como as coordenadas onde ela acontece. Por essa lógica, o maior valor de campo é 590,12 N/C e ele é observado na coordenada $x = 0$ e $y = 10,5$

	Coordenada x [m]	Coordenada y [m]	E numérico [N/C]
0	0.0	9.0	247.000625
1	1.5	9.0	148.721895
2	0.0	10.5	590.118564
3	1.5	10.5	194.231357
4	3.0	10.5	103.230936
5	0.0	12.0	162.406237
6	1.5	12.0	129.423635

Tabela 2 - valores intensos da magnitude do campo elétrico obtidos numericamente.

Esse comportamento, por sua vez, é resultado da contribuição simultânea da parte inferior e superior do anel na região próxima do objeto no eixo y, assim privilegiando a soma dos campos produzidos por cada uma, fato esse diferente do observado ao longo eixo x, onde a contribuição de cada componente é conflitante, resultando em anulação de parcela do campo produzido.

A verificação de tais plotagens de linhas de campo pôde ser realizada através da utilização do site *Paul Falstad* ^[6], o qual disponibiliza ferramentas que calculam e exibem diversos conceitos matemáticos e físicos. Ao selecionarmos as opções *Math and Physics Applets* e em seguida *3-D Electrostatic Fields Applets*, consegue-se gerar o campo elétrico de diversos objetos no espaço, inclusive de um anel carregado uniformemente. Neste sentido, a visualização no plano xy que tal programa sugere para as linhas de campo é exposta pela Figura 10, estando com aparência bastante próxima à obtida em *Python*.

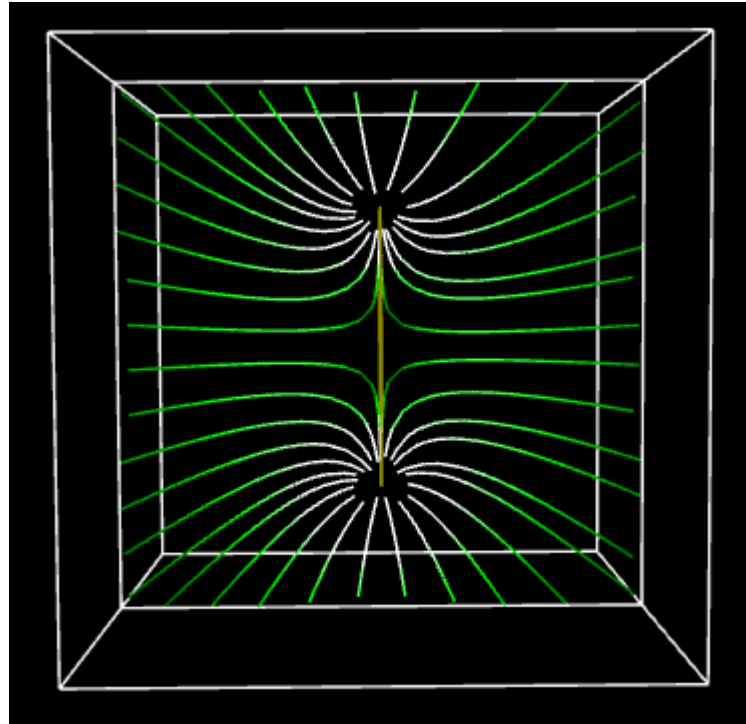


Figura 10 - Linhas de campo elétrico geradas pelo site *Paul Falstad*, para um anel carregado.

CONCLUSÃO

Antes de tudo, constata-se que a linguagem de programação *Python* foi um bom artifício para a implementação da análise do problema proposto.

Ademais, diante do que foi exposto, infere-se que a discretização dos pontos para o estudo do campo elétrico produzido por um anel uniformemente carregado, ao longo do plano xy , assim como o ajuste da escala do campo vetorial foram eficientes ao promoverem uma plotagem a qual proporciona não somente uma boa visualização, mas também uma excelente compreensão do comportamento vetorial do campo elétrico em cada quadrante.

Neste sentido, percebeu-se que o campo elétrico é simétrico em relação aos eixos coordenados e possui maior magnitude nas regiões próximas ao anel no eixo y , vide o tamanho e a disposição dos vetores na Figura 2 e na Figura 3. Todavia, infere-se que a medida que se afasta do objeto, a magnitude do campo decai progressivamente.

Por conseguinte, conclui-se que o modelo numérico adotado para calcular a magnitude do campo elétrico ao longo do espaço foi eficiente, ressaltando a implementação da regra do ponto médio para o aprimoramento dos resultados. Devido a isso, o processo de comparação entre os valores do procedimento numérico e do teórico para o eixo x apresentou um erro, em média, de 1%, fato este que evidenciou a qualidade da análise.

Por fim, ao analisar as linhas de campo na Figura 8, e compará-las com o campo vetorial na Figura 2, evidencia-se que quanto mais próximas as linhas estiverem, maior será a magnitude do campo elétrico naquela região. Além disso, depreende-se que o campo não possui uma direção e um sentido fixo, diferindo do comportamento de um campo elétrico constante e de um formado por uma esfera uniformemente carregada.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] NUSSENZVEIG, H. Moysés, Curso de Física Básica 3 Eletromagnetismo, Ed. Edgard Blücher LTDA São Paulo, 1997.
- [2] NUMPY. NumPy: The fundamental package for scientific computing with Python, 2019-2021. Página inicial. Disponível em: <<https://numpy.org>>. Acesso em: 27 de setembro de 2021.
- [3] MATPLOTLIB. matplotlib: Pyplot tutorial, an introduction to the pyplot interface, 2012-2021. Página inicial. Disponível em: <<https://matplotlib.org/stable/tutorials/introductory/pyplot.html>>. Acesso em: 27 de setembro de 2021.
- [4] NumFOCUS. pandas: pydata, 2015. Página inicial. Disponível em: <<https://pandas.pydata.org>>. Acesso em: 26 de setembro de 2021.
- [5] PYTHON. math - Mathematical functions, 2001-2021. Página inicial. Disponível em: <<https://docs.python.org/3/library/math.html>>. Acesso em: 24 de setembro de 2021.
- [6] FALSTAD, Paul. Falstad: pfalstad's stats, Found: 13199 / Hidden: 152 em geocaching.com. Página inicial. Disponível em: <<https://www.falstad.com>>. Acesso em: 26 de setembro de 2021.

APÊNDICE A

O projeto, realizado através da plataforma *Google Colaboratory*, está disponível em: <https://colab.research.google.com/drive/1XvlqBLBhTeYuQrZkwXvjwLPI944j4Hyq?usp=sharing>

APÊNDICE B

A visualização das principais etapas do projeto numérico em *Python* estão documentadas através de imagens referentes ao código elaborado, cuja totalidade encontra-se

no *Google Colaboratory*, disponível no Apêndice A. As figuras 11, 12, 13, 14 e 15 correspondem ao código elaborado.

```
# dados de entrada:
Q = 10**(-6) # [C]
R = 10       # [m]
K = 9*10**(9) # [N*m²/C²]

dlc = Q/(2*np.pi*R) # densidade linear de carga

N_elem = 20          # número de elementos geradores dos pontos da grade (x e y)

elem = 0
lista_elem = [0]
for i in range(0, N_elem - 1): # gerando os elementos
    elem = elem + (3*R/N_elem) # valores no passo de (3*R/20)
    lista_elem.append(elem)     # adicionando à lista

coord_x = N_elem*lista_elem    # lista que armazena as coordenadas x

coord_y = []                   # lista que armazena as coordenadas y
for i in range(0, N_elem):
    cont = 0
    while (cont < N_elem):
        coord_y.append(lista_elem[i])
        cont = cont + 1
# ao final desse processo, temos duas listas x e y, que juntas formam os pontos (x, y) da grade
```

Figura 11 - Atributos do anel e criação da grade de pontos.

```
N = 100          # nº de pedaços "infinitesimais" de theta (anel)
dtheta = 2*np.pi/N # um pedaço "infinitesimal" dtheta

# definindo as funções Ex e Ey, para x e y informados (integração numérica - regra do ponto médio):
def Ex(x, y):
    result = 0
    for i in range(0, N+1):
        result = result + dtheta*K*dlc*R*x/((np.sqrt(x**2 + y**2 - 2*y*R*np.sin(dtheta/2 + i*dtheta) + R**2)**3))
    return result

def Ey(x, y):
    result = 0
    for i in range(0, N+1):
        result = result + dtheta*K*dlc*R*(y-R*np.sin(dtheta/2 + i*dtheta))/((np.sqrt(x**2 + y**2 - 2*y*R*np.sin(dtheta/2 + i*dtheta) + R**2)**3))
    return result
```

Figura 12 - Definição do elemento infinitesimal $d\theta$ e integração numérica.

```

dirEx = [] # intensidade de E na direção x (será o indicador da direção na função quiver())
dirEy = [] # intensidade de E na direção y
for i in range (0, len(coord_x)):
    dirEx.append(Ex(coord_x[i], coord_y[i]))
    dirEy.append(Ey(coord_x[i], coord_y[i]))
coord_x_neg = [] # criando os pontos com coordenadas negativas
coord_y_neg = []
dirEx_neg = [] # criando as direções com coordenadas negativas
dirEy_neg = []
for i in range (0, len(coord_x)):
    coord_x_neg.append(-1*coord_x[i])
    coord_y_neg.append(-1*coord_y[i])
    dirEx_neg.append(-1*dirEx[i])
    dirEy_neg.append(-1*dirEy[i])
# ao final desse processo temos para cada par (x,y) uma direção (Ex, Ey) para todos os pontos da grade
# plotando o campo vetorial
plt.figure(1, figsize=[6.4, 6.4]) # cria a figura
plt.quiver(coord_x, coord_y, dirEx, dirEy, scale=3000) # plt.quiver tem como argumentos: (ponto x, ponto y, direção x, direção y)
plt.quiver(coord_x_neg, coord_y_neg, dirEx_neg, dirEy_neg, scale=3000)
plt.quiver(coord_x, coord_y, dirEx, dirEy, scale=3000)
plt.quiver(coord_x_neg, coord_y_neg, dirEx_neg, dirEy_neg, scale=3000)
plt.title("Campo elétrico vetorial para um anel carregado uniformemente - plano xy")
plt.xlabel('x [m]')
plt.ylabel('y [m]')
plt.vlines(-0.05*R, -R, R, colors='red', linestyle='dashed') # representação do anel
plt.vlines(0.05*R, -R, R, colors='red', linestyle='dashed') # apenas para efeitos de visualização, o anel não possui "espessura", é linear
    
```

Figura 13 - Atribuindo as direções e magnitudes para as componentes Ex e Ey e plotagem do campo vetorial.

```

# plotando as linhas de campo com o campo vetorial de fundo:
plt.figure(4, figsize=[6.4, 6.4])
plt.streamplot(x, y, Ex(x), Ey(y), density=1.0, color='green')
plt.quiver(coord_x, coord_y, dirEx, dirEy, width=0.0005, scale=3000)
plt.quiver(coord_x_neg, coord_y_neg, dirEx_neg, dirEy_neg, width=0.0005, scale=3000)
plt.quiver(coord_x, coord_y, dirEx, dirEy, width=0.0005, scale=3000)
plt.quiver(coord_x_neg, coord_y_neg, dirEx_neg, dirEy_neg, width=0.0005, scale=3000)
plt.title("Linhas de campo - plano xy")
plt.xlabel('x [m]')
plt.ylabel('y [m]')
plt.vlines(-0.05*R, -R, R, colors='red', linestyle='dashed') # apenas para efeitos de visualização, o anel não possui "espessura", é linear
plt.vlines(0.05*R, -R, R, colors='red', linestyle='dashed')

plt.show()
    
```

Figura 14 - Plotando as linhas de campo.

```

import pandas as pd
import math

# definindo a função que vai calcular a magnitude do campo a partir das componentes Ex e Ey numéricas
def mag_E(E_x, E_y):
    return np.sqrt(np.power(E_x, 2) + np.power(E_y, 2))

magEnum = [] # magnitude de cada ponto (numérico)
for i in range(0, len(lista_elem)):
    magEnum.append(round(mag_E(dirEx[i], dirEy[i]), 4))

magEteor = []
for x in lista_elem:
    magEteor.append(round(mag_E(x), 4))

erro = []
for i in range (0, len(magEnum)):
    erro_num_teor = 100*math.fabs((magEteor[i] - magEnum[i])/magEteor[i])
    erro.append(round(erro_num_teor, 4))

# criando a tabela:
dados = {'Coordenada x [m]': lista_elem, '|E numérico|[N/C]': magEnum, '|E teórico|[N/C]': magEteor, 'Erro [%]': erro}

pd.DataFrame(dados)
    
```

Figura 15 - Criando a tabela de comparação entre valores teóricos e numéricos.