n três tipos de cores diferentes.) A voltagem aceleradora em um cinescópio de TV (dada r V_1 na discussão precedente) é em geral da ordem de 20 kV. Os visores de computadores s monitores funcionam com o mesmo princípio, usando um feixe de elétrons que sofre flexão sob a ação de campos magnéticos para traçar imagens sobre uma tela fluorescente. sse contexto, o dispositivo é chamado de visor CRT ou de visor VDT (terminal para visor vídeo).

4.8 Cálculo do Potencial Elétrico de um Condutor Carregado

Um Caso Analisado com o Computador

As técnicas usadas neste capítulo para calcular o potencial e o campo elétrico são úteis somente quando a distribuição de cargas é conhecida. Contudo, em muitas situações práticas, a distribuição de cargas *não* é conhecida; em vez disso, o valor do potencial é conhecido nas fronteiras de uma região. Por exemplo, em uma situação eletrostática, a superfície de um condutor é sempre uma superfície equipotencial, porém a distribuição de cargas sobre a superfície geralmente não é uniforme e não pode ser calculada facilmente pelas técnicas usadas neste capítulo. Considere uma região do espaço com um ou mais condutores mantidos em potenciais fixos (por exemplo, usando-se uma bateria). Como podemos determinar o potencial em função da posição nessa região?

A chave para resolver esse tipo de problema consiste em usar a seguinte propriedade do potencial elétrico: *em uma região onde não existe nenhuma carga, o valor do potencial em um dado ponto é igual à média dos valores dos potenciais dos pontos de suas vizinhanças.* Vamos demonstrar essa afirmação usando a lei de Gauss com a Equação (24.19), que fornece o campo elétrico em termos das derivadas parciais do potencial.

Vamos limitar nossa discussão a situações para as quais o potencial depende apenas das coordenadas x e y. Como exemplo, considere o potencial devido a um cilindro carregado muito longo, conforme discutimos no Exemplo 24.10 (Seção 24.4); o potencial em um ponto depende apenas da coordenada do ponto sobre um plano perpendicular ao plano do cilindro, e não da coordenada z ao longo do eixo do cilindro. Para tal situação bidimensional, considere um ponto P com coordenadas (x, y, z) e envolva esse ponto por uma superfície gaussiana sob a forma de uma caixa cúbica com aresta $2\Delta l$ centralizada no ponto P (Figura 24.23). Quando não existe nenhuma carga no interior dessa caixa, o fluxo elétrico total Φ_E através da caixa é igual a zero. Pela Equação (24.19), o componente z do campo $E_z = -\partial V/\partial z$ é zero porque o potencial V não é uma função de z. Logo, não existe nenhum fluxo elétrico através das duas faces do cubo paralelas ao plano x, y. Uma vez que a caixa é pequena, podemos dizer que o fluxo elétrico através das outras quatro faces do cubo é aproximadamente igual ao produto da área de cada face $(2\Delta l)^2$ pelo componente normal

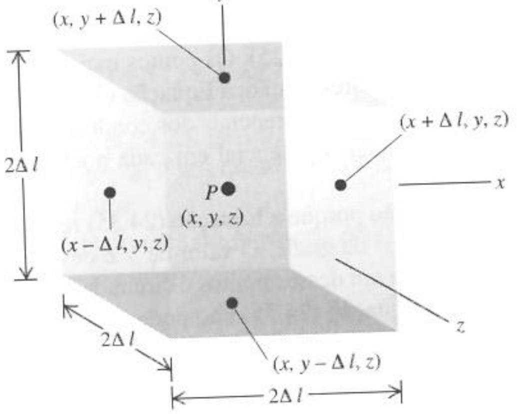

FIGURA 24.23 Em uma região onde não existe nenhuma carga, o valor do potencial em um ponto P é igual à média dos valores dos potenciais dos pontos das vizinhanças de P.

de $\vec{E}$ no centro da respectiva face. O fluxo elétrico total (igual a zero) através da caixa pode ser expresso por

$$\Phi_E = E_x(x + \Delta l, y, z)(2\Delta l)^2 + (-E_x(x - \Delta l, y, z))(2\Delta l)^2 \quad (24.33)$$
$$+ E_y(x, y + \Delta l, z)(2\Delta l) + (-E_y(x, y - \Delta l, z))(2\Delta l)^2 = 0.$$

Usando a Equação (24.19), podemos escrever os componentes do campo elétrico com o mesmo grau de aproximação do seguinte modo:

$$E_x(x + \Delta l, y, z) = -\frac{\partial V(x + \Delta l, y)}{\partial x} = -\frac{V(x + \Delta l, y) - V(x, y)}{\Delta l},$$

$$E_x(x - \Delta l, y, z) = -\frac{\partial V(x - \Delta l, y)}{\partial x} = -\frac{V(x, y) - V(x - \Delta l, y)}{\Delta l},$$

$$E_y(x, y + \Delta l, z) = -\frac{\partial V(x, y + \Delta l)}{\partial y} = -\frac{V(x, y + \Delta l) - V(x, y)}{\Delta l},$$

$$E_y(x, y - \Delta l, z) = -\frac{\partial V(x, y - \Delta l)}{\partial y} = -\frac{V(x, y) - V(x, y - \Delta l)}{\Delta l}. \quad (24.34)$$

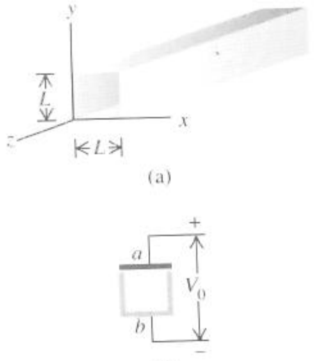

FIGURA 24.24 (a) Uma caixa condutora com um comprimento z muito maior do que a dimensão L ao longo dos eixos Ox e Oy. (b) Um corte transversal da caixa, mostrando os dois segmentos isolados da caixa e a diferença de potencial entre os segmentos.

Substituindo a Equação (24.34) na Equação (24.33) e dividindo ambos os membros por $4\Delta l$, encontramos

$$-[V(x + \Delta l, y) - V(x, y)] + [V(x, y) - V(x - \Delta l, y)]$$
$$-[V(x, y + \Delta l) - V(x, y)] + [V(x, y) - V(x, y - \Delta l)] = 0.$$

Explicitando $V(x, y)$, o potencial no ponto P, obtemos

$$V(x, y) = \frac{1}{4}[V(x + \Delta l, y) + V(x - \Delta l, y) + V(x, y + \Delta l) + V(x, y - \Delta l)]. \quad (24.35)$$

O que significa que o valor do potencial no ponto P é igual à média dos valores dos potenciais das vizinhanças do ponto P. Essa afirmação torna-se exata no limite quando Δl torna-se infinitamente pequeno.

Para sabermos como aplicar a Equação (24.35) para determinar o potencial produzido por um conjunto de condutores carregados, vamos examinar uma situação específica. Indicamos na Figura 24.24a uma caixa condutora oca com uma seção reta quadrada e com um comprimento muito longo paralelo ao eixo Oz. O comprimento da caixa é muito maior do que a dimensão L. O topo da caixa, designado pela letra a, está isolado das outras três faces, identificadas coletivamente pela letra b; isso é obtido usando-se na face do topo uma placa metálica apoiada sobre um isolante que preenche um buraco que a separa das faces verticais (Figura 24.24b). Uma diferença de potencial fixa V_0 é mantida entre os segmentos a e b da caixa. Escolhemos o potencial dos segmentos inferiores como $V_b = 0$, de modo que o potencial do segmento superior é $V_b = V_0$. Em virtude dessa diferença de potencial, existe uma carga positiva sobre a (que possui o potencial mais elevado do condutor) e uma carga negativa sobre b (que possui o potencial mais baixo do condutor).

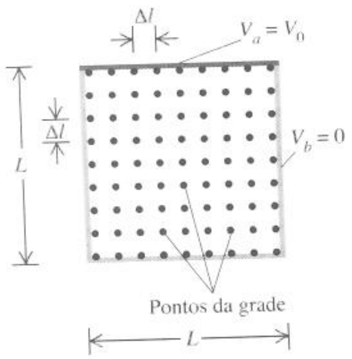

FIGURA 24.25 Um corte transversal da caixa condutora, mostrando uma grade retangular cujos pontos estão separados por Δl.

Nosso objetivo é determinar o potencial em todos os pontos do volume do interior da caixa. Como a caixa possui um comprimento muito grande, o potencial no interior da caixa é uma função somente de x e de y. Fazemos uma grade retangular de pontos imaginários separados por uma distância Δl (Figura 24.25). Os pontos mais externos da grade estão sobre as próprias superfícies dos condutores. Então, a Equação (24.35) relaciona os potenciais dos diversos pontos da grade; visto que os potenciais dos condutores são mantidos com valores especificados, podemos determinar o potencial em cada ponto da grade da parte vazia no interior da caixa.

Surge então uma complicação porque a Equação (24.35) relaciona os valores dos potenciais em quatro diferentes pontos da grade. O valor de V é desconhecido em cada ponto da grade no interior da caixa e cada um desses pontos é circundado por dois ou três pontos também desconhecidos. Logo, a Equação (24.35) não pode ser usada em uma única etapa para determinar o potencial em cada ponto da grade no interior da caixa. Em vez disso, devemos usar um método *iterativo*; faremos uma série de aproximações sucessivas para estabelecermos um conjunto de valores de V no interior da caixa de tal modo que a Equação (24.35) seja satisfeita para esses pontos. O procedimento adotado denomina-se *método da relaxação*.

A seguir, apresentamos as principais etapas para a elaboração de um programa de computador para realizar esses cálculos.

Etapa 1: Escolha um valor *positivo* para a diferença de potencial V_0. (O procedimento descrito a seguir apresenta dificuldades se $V_0 < 0$.)

Etapa 2: Escolha o número m de pontos da grade na direção vertical ou horizontal da Figura 24.25. O número total dos pontos da grade é então m^2 e o número total dos pontos da grade no interior da caixa é $(m - 2)^2$. Valores de m entre 10 e 40 fornecem bons resultados. Valores de m muito elevados exigem cálculos muito longos; pequenos valores de m fornecem uma resolução pequena.

Etapa 3: Chame de (j, k) um par de índices inteiros que identificam um ponto particular e sua localização na grade (a j–ésima coluna e a k–ésima linha da grade); esses índices devem variar de 1 até m.

Etapa 4: Comece um *loop* (ou laço) em k de $k = 1$ até $k = m$ (linhas sucessivas dos pontos da grade).

Etapa 5: Comece um laço em j de $j = 1$ até $j = m$ (colunas sucessivas dos pontos da grade).

Etapa 6: Atribua um valor inicial para o potencial $V(j, k)$ de cada ponto da grade. Quando $k = 1$ (a linha do topo, correspondente à superfície superior do condutor a na Figura 24.25), faça $V(j, k)$ igual a V_0. Quando $j = 1$, $j = m$ ou $k = m$, faça $V(j, k)$ igual a zero; esses valores correspondem, respectivamente, à face da esquerda, à face da direita e à base do condutor inferior b indicado na Figura 24.25. Para todos os demais valores correspondentes aos pontos da parte vazia no interior da caixa, atribua valores arbitrários para $V(j, k)$. Quanto mais próximos esses valores são dos valores reais, menor é o número de iterações necessárias para obter uma boa solução. Porém, qualquer valor maior do que 0 e menor do que V_0 satisfaz. Uma boa escolha para os valores arbitrários poderia ser $0{,}5V_0$ para todos os pontos do interior da grade. Você *não* deve escolher $V = 0$, pois essa escolha pode produzir dificuldades na Etapa 13.

Etapa 7: Final dos laços para j e k.

Etapa 8: Especifique a precisão desejada para seus resultados, expressas mediante uma incerteza fracionária. O programa inicia com a iteração para encontrar $V(j, k)$ nos pontos do interior da caixa, e a iteração termina quando a variação fracionária de uma iteração para outra for menor do que a precisão desejada. Valores razoáveis estão entre 0,01 e 0,001; quanto menor for o valor escolhido tanto maior será o número de iterações necessárias.

Etapa 9: Defina uma grandeza δ ("delta" minúsculo) e faça seu valor igual a zero.

Etapa 10: Comece outro laço para k, dessa vez de $k = 2$ até $k = m - 1$ (somente para pontos internos).

Etapa 11: Comece outro laço para j, dessa vez de $j = 2$ até $j = m - 1$ (somente para pontos internos).

Etapa 12: Calcule novos valores para $V_{\text{novo}}(j, k)$ para cada ponto do interior da grade, usando a Equação (24.35). (Os laços para os valores de j e de k não incluem os valores de 1 e m porque os valores do potencial sobre as superfícies dos condutores são fixos.) Ou seja, considere

$$V_{\text{novo}}(j, k) = \frac{1}{4}[V(j+1, k) + V(j-1, k) + V(j, k+1) + V(j, k-1)].$$

Tomando como referência a Figura 24.25, isso significa que o novo valor do potencial em (j, k) é a média dos valores antigos de V nos quatro pontos da grade imediatamente situados à direita, à esquerda, abaixo e acima.

Etapa 13: Calcule a variação fracionária do potencial $\Delta V/V$ entre o valor antigo e o valor novo e tome o valor absoluto dessa diferença:

$$\frac{\Delta V}{V} = \left|\frac{V_{\text{novo}}(j, k) - V(j, k)}{V(j, k)}\right|.$$

Um erro decorre da divisão por zero quando $V(j, k) = 0$; essa é a razão da nossa advertência feita no final da Etapa 6. Quando $\Delta V/V$ for maior do que δ, faça δ igual a $\Delta V/V$.

Etapa 14: Substitua o valor antigo de V pelo valor novo. Ou seja, faça $V(j, k)$ igual a $V_{\text{novo}}(j, k)$.

Etapa 15: Final dos laços para j e k.

Etapa 16: Caso o valor de δ seja maior do que a precisão desejada especificada na Etapa 8, existe pelo menos um ponto no interior da grade para o qual a variação de V durante a iteração realizada foi maior do que a precisão desejada. Logo, uma ou mais iterações são necessárias e o programa deve retornar para a Etapa 10. Caso o valor de δ seja inferior ou igual ao da precisão desejada, os valores de $V(j, k)$ são adequados e o programa poderá passar para a etapa 17.

Etapa 17: Imprima os resultados do potencial para cada ponto da grade.

Etapa 18: FIM.

A Figura 24.26 mostra o resultado desse cálculo.

Usando uma *spreadsheet* (ou "malha de trabalho"), o programa que acaba de ser descrito pode ser implementado de modo mais fácil do que mediante o uso de linguagens, tais como o BASIC ou o Pascal. Uma *spreadsheet* geralmente permite cálculos iterativos e vai automaticamente para as etapas descritas anteriormente. Para realizar o cálculo, escolha uma grade quadrada das células da *spreadsheet*, entre com os valores dos potenciais nas células das periferias da grade e entre com a fórmula correspondente da Equação (24.35) em cada célula interior. Os resultados indicados na Figura 24.26 foram obtidos usando-se uma *spreadsheet*.

É fácil modificar o programa anterior para tratar outros tipos de contornos condutores. Os valores dos potenciais sobre as superfícies condutoras podem ser escolhidos arbitrariamente. A caixa quadrada pode ser substituída por uma caixa retangular na qual o número de linhas não é igual ao número de colunas. As caixas também podem ter outras formas geométricas além de quadrados e retângulos. Diversas sugestões são apresentadas nos exercícios.

Uma vez determinados os valores dos potenciais em todos os pontos da grade, os componentes do campo elétrico E_x e E_y podem também ser calculados usando-se relações semelhantes às indicadas na Equação (24.34). Para um ponto (x, y) no interior da caixa, podemos encontrar E_x e E_y usando os seguintes resultados aproximados:

$$E_x(x, y) = -\frac{\partial V(x, y)}{\partial x} \approx -\frac{V(x + \Delta l, y) - V(x - \Delta l, y)}{2\Delta l},$$
$$E_y(x, y) = -\frac{\partial V(x, y)}{\partial y} \approx -\frac{V(x, y + \Delta l) - V(x, y - \Delta l)}{2\Delta l}. \tag{24.36}$$

1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
0,00	0,49	0,68	0,76	0,80	0,82	0,82	0,80	0,76	0,68	0,49	0,00
0,00	0,28	0,46	0,57	0,62	0,65	0,65	0,62	0,57	0,46	0,28	0,00
0,00	0,18	0,33	0,42	0,48	0,50	0,50	0,48	0,42	0,32	0,18	0,00
0,00	0,13	0,23	0,31	0,36	0,38	0,38	0,36	0,31	0,23	0,13	0,00
0,00	0,09	0,17	0,23	0,27	0,29	0,29	0,27	0,23	0,17	0,09	0,00
0,00	0,06	0,12	0,17	0,20	0,21	0,21	0,20	0,17	0,12	0,06	0,00
0,00	0,05	0,09	0,12	0,14	0,15	0,15	0,14	0,12	0,09	0,05	0,00
0,00	0,03	0,06	0,08	0,10	0,11	0,11	0,10	0,08	0,06	0,03	0,00
0,00	0,02	0,04	0,05	0,06	0,07	0,07	0,06	0,05	0,04	0,02	0,00
0,00	0,01	0,02	0,02	0,03	0,03	0,03	0,03	0,02	0,02	0,01	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

FIGURA 24.26 Potenciais depois de 75 iterações para a situação indicada na Figura 24.25 com $V_0 = 1{,}00$ V. Para maior clareza, sombreamos os pontos da grade situados sobre as superfícies dos condutores. Para essa grade, $m = 12$. O potencial diminui quando você se desloca do potencial mais elevado na superfície do topo para o potencial mais baixo nas faces laterais e na base.

O módulo do campo elétrico é

$$E = \sqrt{E_x^{\,2} + E_y^{\,2}}. \tag{24.37}$$

Para indicar a direção de $\vec{E}$ em cada ponto do interior da grade, o programa pode solicitar o desenho de uma linha de comprimento c entre os dois pontos com coordenadas

$$(x,\ y) \quad \text{e} \quad \left(x + \frac{cE_x}{E},\ y + \frac{cE_y}{E}\right). \tag{24.38}$$

Você pode verificar que a distância entre os dois pontos é igual a c e que a direção da linha é a mesma do vetor $\vec{E}$ no ponto (x, y).

Para desenhar linhas que indicam a direção de $\vec{E}$ em cada ponto do interior da grade, você deve inserir as etapas descritas a seguir entre as etapas 17 e 18 do programa mencionado anteriormente. (*Nota:* Nesse caso, é mais fácil usar linguagens como o BASIC ou o Pascal do que empregar a *spreadsheet.*)

Etapa 17A: Escolha as coordenadas da tela (endereços de cada *pixel* sobre a tela) no interior das quais os pontos da grade e as linhas que fornecem a direção de $\vec{E}$ devem ser desenhadas, ou seja, os valores limites $x_{\text{mín}}$, $y_{\text{mín}}$, $x_{\text{máx}}$ e $y_{\text{máx}}$. Esses valores podem ser determinados pelas características do seu computador. Por exemplo, para um Macintosh com um monitor de 14 polegadas ou para um PC com vídeo VGA, temos $x_{\text{mín}} = 0$, $x_{\text{máx}} = 639$, $y_{\text{mín}} = 0$ e $y_{\text{máx}} = 479$. Algumas linguagens permitem que você troque o intervalo das coordenadas da tela. Em BASIC, por exemplo, o comando WINDOW permite que se escolha arbitrariamente qualquer intervalo de x e y; ele faz a conversão da escala das coordenadas da tela para você.

Etapa 17B: Escolha a distância Δl (o espaçamento, usando a unidade de *pixel* entre os pontos da grade sobre a tela). Por exemplo, para um número de linhas e colunas $m = 20$, escolha Δl como 1/20 do *menor* dos valores $(x_{\text{máx}} - x_{\text{mín}})$ e $(y_{\text{máx}} - y_{\text{mín}})$. Faça o comprimento c igual a Δl.

Etapa 17C: Comece um laço para k, de $k = 2$ até $k = m - 1$ (somente para pontos internos).

Etapa 17D: Comece um laço para j, de $j = 2$ até $j = m - 1$ (somente para pontos internos).

Etapa 17E: Calcule as coordenadas x e y dos pontos da tela correspondentes aos pontos da grade:

$$x = x_{\text{mín}} + j\,\Delta l \qquad \text{e} \qquad y = y_{\text{mín}} + k\,\Delta l.$$

Etapa 17F: Calcule os componentes do campo elétrico no ponto (j, k) do interior da grade usando a Equação (24.36):

$$E_x = -\frac{V(j+1,\ k) - V(j-1,\ k)}{2\Delta l} \qquad \text{e} \qquad E_y = -\frac{V(j,\ k+1) - V(j,\ k-1)}{2\Delta l}.$$

Etapa 17G: Se $E_x = 0$ e $E_y = 0$, não desenhe uma linha para a direção de $\vec{E}$ (visto que o campo elétrico é zero); em vez disso, vá para o ponto seguinte da grade. Se esses componentes não forem nulos, use a Equação (24.37).

Etapa 17H: Desenhe uma linha ligando os pontos fornecidos pela Equação (24.38).

Etapa 17I: Final dos laços para j e k.

A Figura 24.27 mostra o resultado desse cálculo para a situação indicada na Figura 24.25.

Talvez você queira refinar os cálculos para poder desenhar em cada ponto da grade um vetor cujo comprimento seja proporcional ao módulo do campo elétrico E; isso mostra tanto o módulo quanto a direção do campo. Basta trocar o parâmetro c na Etapa 17H por um múltiplo de E. Talvez você precise fazer experiências para achar o fator de escala mais apropriado para seu melhor desenho.

Mediante simples modificação da técnica usada para mapear o campo elétrico, é possível mapear as linhas equipotenciais no plano xy (as seções transversais desse plano com as *superfícies* equipotenciais). Usamos o fato de que uma linha equipotencial é perpendicular ao campo elétrico. Para mapear as linhas equipotenciais, desenhamos em cada ponto da grade uma linha que seja perpendicular à linha do campo elétrico nesse ponto. De acordo com a geometria analítica, quando duas linhas são perpendiculares, suas inclinações são tais que a inclinação de uma das curvas é o inverso da outra com o sinal contrário. A inclinação de uma linha de campo elétrico é E_y/E_x; logo, a inclinação de uma linha equipotencial no

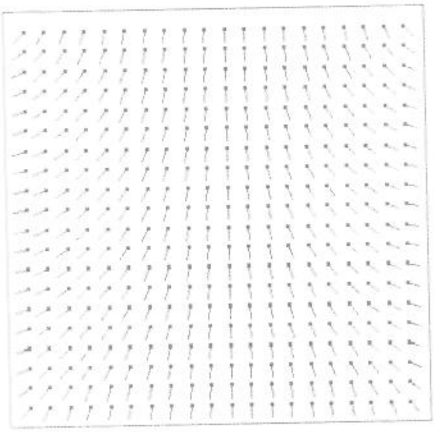

FIGURA 24.27 Mapa do campo elétrico para a situação indicada na Figura 24.25. Cada ponto da grade é marcado com um ponto. Para essa grade, $m = 22$. O campo elétrico é orientado para fora das cargas positivas sobre a superfície do topo com $V = V_0$ e entra nas cargas negativas nas superfícies laterais e na base com $V = 0$.

FIGURA 24.28 Segmentos de linhas equipotenciais para a situação indicada na Figura 24.25. Cada ponto da grade é marcado com um ponto. Para essa grade, $m = 22$. À medida que você se aproxima das superfícies condutoras no topo, na esquerda, na direita e na base, os segmentos equipotenciais tornam-se cada vez mais paralelos às respectivas superfícies.

mesmo ponto é $-E_x/E_y$. Tomando como referência a Equação (24.38) que usamos para desenhar linhas de comprimento c paralelas ao campo elétrico, vemos que basta substituir na expressão E_x por E_y e E_y por $-E_x$ para obtermos uma linha perpendicular ao vetor $\vec{E}$ nesse ponto. Ou seja, em vez de usar a Equação (24.38) na etapa 17H, você deve empregar a seguinte equação:

$$(x, y) \quad \text{e} \quad \left(x + \frac{cE_y}{E},\ y - \frac{cE_x}{E}\right). \tag{24.39}$$

A Figura 24.28 mostra o resultado desse cálculo. Compare o resultado com o mapa do campo elétrico indicado na Figura 24.27. Note que esse procedimento não fornece o gráfico das curvas equipotenciais verdadeiras, mas apenas segmentos das diversas curvas. Porém, esses segmentos dão uma idéia boa da forma das equipotenciais.

Finalmente, notamos que o método da relaxação é efetivamente outro exemplo de como é mais fácil inicialmente determinar o potencial elétrico e a seguir calcular o campo elétrico a partir do potencial.

Resumo

CONCEITOS BÁSICOS

energia potencial elétrica, 64
potencial elétrico, 70
volt, 71
voltagem, 71
elétron-volt, 73
superfície equipotencial, 80
gradiente, 83
tubo de raios catódicos, 84

- A força elétrica produzida por qualquer coleção de cargas é uma força conservativa. O trabalho W realizado pela força elétrica sobre uma partícula carregada que se desloca em um campo elétrico pode ser representado por uma função energia potencial U:

$$W_{a \to b} = U_a - U_b. \tag{24.2}$$

A energia potencial para duas cargas puntiformes, q e q_0, separadas por uma distância r é dada por

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r}, \tag{24.9}$$

e a energia potencial para uma carga q_0 no campo elétrico de uma coleção de cargas puntiformes q_i é dada por