

**UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas**  
**FCA - Faculdade de Ciências Aplicadas**  
**Curso de Engenharia de Manufatura e Engenharia de Produção**



**Disciplina:** Física Geral III (LE404)

**Docente:** Marcelo Zoéga Maialle

**Prática:** Trabalho Numérico 02

**Data de entrega:** 29/10/2021

**Trabalho Numérico 02:**

**Cálculo do Potencial Elétrico de um Condutor Carregado**

**Turma:** A

**Integrantes do Grupo:**

<b>Nome:</b> Augusto Chebel Machado	<b>R.A.:</b> 231762
<b>Nome:</b> Leonardo de Lima Paiva	<b>R.A.:</b> 220057
<b>Nome:</b> Lucas Tramonte	<b>R.A.:</b> 182697
<b>Nome:</b> Vinícius Consentino Muniz	<b>R.A.:</b> 245271

## RESUMO

O projeto numérico busca a compreensão das técnicas utilizadas para descobrir o valor do campo e do potencial elétrico gerados por condutores carregados, em que a distribuição de carga não é uniforme, sendo conhecido apenas o valor do potencial nas superfícies dos materiais e as condições de contorno do problema. Depreendendo-se disso, os valores do potencial são investigados no interior do volume delimitado pelas superfícies em questão, onde não há cargas elétricas, com isso, trata-se de um problema cuja solução se dá pela Equação de Laplace.

Ademais, utilizando-se conceitos físicos e ferramentas matemáticas, foi possível aproximar, no interior da superfície gaussiana, o valor do potencial de um ponto à média dos valores do potencial da vizinhança, e determinar o valor do campo elétrico através das derivadas parciais, em suas respectivas direções.

Todavia, diante das condições estabelecidas, não se permitiu usar de forma direta o método analisado, sendo necessário uma forma iterativa, via linguagem computacional *Python*, denominada de método de relaxação para que as condições sejam satisfeitas.

Diante disso, concluímos que este método foi eficiente para delimitar os valores de potencial e de campo elétrico para a condição de contorno atribuída. Neste sentido, foram elaborados gráficos tanto 2D como 3D os quais permitiram compreender o comportamento destas grandezas.

## INTRODUÇÃO

Uma das formas de calcular um campo elétrico é com o uso da Lei de Gauss, a qual permite relacionar o fluxo  $\Phi$  do campo elétrico  $\mathbf{E}$  através de uma superfície fechada com a carga total  $q$  contida no volume interno à essa superfície:

$$\phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} , \quad (1)$$

sendo  $\epsilon_0$  a permissividade elétrica do vácuo e  $d\mathbf{A}$  o diferencial da área de superfície.

Nesse esteio, considerando o corpo analisado em questão um meio condutor em equilíbrio eletrostático, não há cargas nem campo elétrico no centro do condutor, uma vez que as cargas podem se movimentar livremente, sendo todas direcionadas à superfície do corpo. Logo, o fluxo elétrico é nulo no interior do corpo.

No entanto, como o campo elétrico é uma grandeza vetorial, torna-se mais fácil calcular primeiramente o potencial elétrico  $V$ , uma grandeza escalar, e a partir do potencial determinar o campo elétrico:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V. \quad (2)$$

Ou seja, como o campo elétrico é conservativo e, conseqüentemente, irrotacional, ele será proporcional ao gradiente do potencial, possibilitando calcular suas componentes:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x}, \\ E_y &= -\frac{\partial V}{\partial y}, \\ E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3)$$

Dessa forma, o potencial elétrico pode ser compreendido como uma superfície cuja declividade é o módulo do campo elétrico associado. Nesse contexto, ao considerar uma superfície com um potencial constante, podemos afirmar que :

$$dV = \vec{\nabla}V \cdot d\vec{l} = 0, \quad (4)$$

sendo  $d\vec{l}$  o deslocamento sobre a superfície equipotencial. Com isso, como o vetor gradiente está na mesma direção do campo elétrico pela Equação (2), podemos afirmar que as linhas do campo elétrico são ortogonais às linhas equipotenciais da superfície.

Ademais, a fim de calcular o potencial elétrico em todos os pontos no interior de um corpo carregado, é válido o uso da equação de Poisson, a qual revela que o divergente do potencial é proporcional à densidade volumétrica de carga  $\rho$ , segundo Moysés Nussenzveig (1997, p.66)<sup>[1]</sup> :

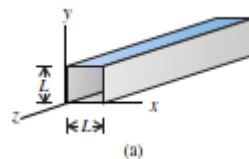
$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (5)$$

Porém, como não há cargas no interior de um condutor carregado, a densidade volumétrica de carga é nula, o que resulta em um problema cuja solução se dá pela equação de Laplace:

$$\nabla^2 V = 0. \quad (6)$$

Portanto, podemos concluir que não há máximos nem mínimos locais para o potencial, todos os valores extremos se encontram nas superfícies.

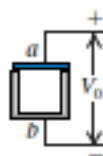
Enfim, com o objetivo de se aplicar os conceitos físicos trabalhados em um problema, considera-se uma caixa condutora oca com uma seção transversal reta quadrada, a qual possui uma dimensão  $L$  muito menor do que o comprimento da caixa, como pode ser visto na Figura 1, e deseja-se calcular o potencial elétrico em todo o espaço no seu interior.



**Figura 1 :** Caixa condutora oca de seção transversal quadrada.

A parte superior da caixa, denominada ‘a’, está isolada das demais faces, designadas pela letra ‘b’, como apresentado na Figura 2. Para que ocorra tal isolamento, há uma placa metálica sobre um isolante que ocupa um espaço que separa a parte superior das demais faces<sup>1</sup>.

Logo, de acordo com Hugh Young, et al (2005, p.87) [2], ocorre uma diferença de potencial fixa  $V_0$  entre os segmentos ‘a’ e ‘b’, e, como o referencial do potencial é arbitrário, escolhe-se que o potencial dos segmentos inferiores é nulo ( $V_b = 0$ ), de forma que exista uma carga negativa sobre ‘b’, e uma carga positiva sobre ‘a’, sendo  $V_a = V_0$  o potencial do segmento superior.

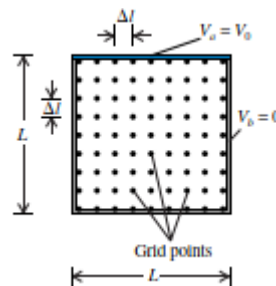


**Figura 2 :** Seção transversal quadrada da caixa condutora.

Como o comprimento da caixa é muito longo, o potencial em seu interior depende apenas de  $x$  e  $y$ . Com isso, é feita uma grade retangular em que os pontos são separados por

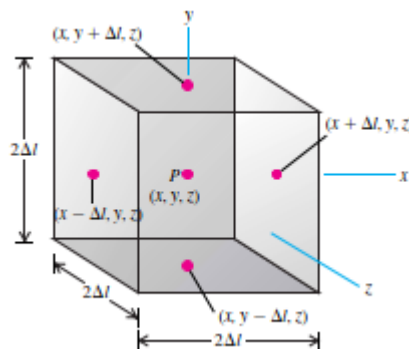
<sup>1</sup> A situação física apresentada é generalizada, ou seja, o problema apresentado pode ter condições de contorno que acrescentem potenciais na região central da caixa condutora, por exemplo.

uma distância  $\Delta l$ , como pode ser observado na Figura 3.



**Figura 3** : Grade retangular de pontos imaginários em uma seção transversal da caixa condutora.

Portanto, para determinar a relação entre o potencial de um ponto e o potencial de suas vizinhanças, é necessário utilizar a Lei de Gauss, considerando um ponto P centralizado em uma superfície gaussiana no formato de uma caixa cúbica de aresta  $2\Delta l$ , como pode ser visualizado na Figura 4.



**Figura 4** : Superfície Gaussiana no formato de caixa cúbica de aresta  $2\Delta l$ .

Dessa forma, como não há carga no interior da superfície gaussiana, o fluxo elétrico total  $\Phi$  é nulo, logo, calculando o fluxo separadamente nas superfícies inferiores, superiores e laterais:

$$\phi = \int_{inf} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{sup} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{lat} \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0. \quad (7)$$

Pela Equação (3), a componente z do campo elétrico é nula pois o potencial não depende do comprimento ao longo desse eixo, dessa forma, o fluxo elétrico através das duas faces paralelas ao plano xy é nulo. Nas demais faces, não considerando uma caixa muito extensa, o fluxo elétrico é aproximadamente igual ao produto da componente normal do campo elétrico

pela área de cada face :

$$\begin{aligned}\Phi = E_x(x + \Delta l, y, z)(2\Delta l)^2 + [-E_x(x - \Delta l, y, z)](2\Delta l)^2 + E_y(x, y + \Delta l, z)(2\Delta l)^2 \\ + [-E_y(x, y - \Delta l, z)](2\Delta l)^2 = 0.\end{aligned}\quad (8)$$

Portanto, a partir da Equação (3), podemos aproximar as derivadas parciais da seguinte forma :

$$\begin{aligned}E_x(x + \Delta l, y, z) &= -\frac{\partial V(x + \Delta l, y)}{\partial x} = -\frac{V(x + \Delta l, y) - V(x, y)}{\Delta l}, \\ E_x(x - \Delta l, y, z) &= -\frac{\partial V(x - \Delta l, y)}{\partial x} = -\frac{V(x, y) - V(x - \Delta l, y)}{\Delta l}, \\ E_y(x, y + \Delta l, z) &= -\frac{\partial V(x, y + \Delta l)}{\partial y} = -\frac{V(x, y + \Delta l) - V(x, y)}{\Delta l}, \\ E_y(x, y - \Delta l, z) &= -\frac{\partial V(x, y - \Delta l)}{\partial y} = -\frac{V(x, y) - V(x, y - \Delta l)}{\Delta l}.\end{aligned}\quad (9)$$

Substituindo a Equação (9) na Equação (8) e simplificando , temos :

$$\begin{aligned}-[V(x + \Delta l, y) - V(x, y)] + [V(x, y) - V(x - \Delta l, y)] \\ -[V(x, y + \Delta l) - V(x, y)] + [V(x, y) - V(x, y - \Delta l)] = 0.\end{aligned}\quad (10)$$

Logo , conseguimos encontrar o potencial elétrico em função de x e y :

$$\begin{aligned}V(x, y) = \frac{1}{4}[V(x + \Delta l, y) + V(x - \Delta l, y) \\ + V(x, y + \Delta l) + V(x, y - \Delta l)].\end{aligned}\quad (11)$$

Com isso, percebe-se que em uma região onde não existe nenhuma carga, o valor do potencial em um dado ponto é igual à média dos valores dos potenciais dos pontos de suas vizinhanças.

No entanto, como a distribuição superficial de carga não é uniforme, o valor do potencial em cada ponto é desconhecido , logo, há a necessidade de utilizar um método iterativo de forma que a Equação (11) seja satisfeita para todos os pontos no interior da caixa, a partir de sucessivas aproximações dos valores do potencial. Para tanto , podemos considerar uma matriz

quadrada de ordem  $m$  para representar a grade de pontos e calcular  $V(j, k)$ , sendo  $j$  e  $k$  os índices que representam as colunas e as linhas, respectivamente. Nesse esteio,  $j$  e  $k$  são percorridos, e novos valores de  $V_{novo}(j, k)$  são calculados sucessivamente para os pontos internos da grade, sem considerar os pontos extremos, uma vez que as superfícies dos condutores possuem um potencial fixo :

$$V_{novo}(j, k) = \frac{1}{4}[V(j + 1, k) + V(j - 1, k) + V(j, k + 1) + V(j, k - 1)]. \quad (12)$$

Dentro desse contexto, o novo valor obtido do potencial em  $(j, k)$  é a média dos valores calculados anteriormente imediatamente situados abaixo, acima, à direita e à esquerda do ponto analisado, o que permite calcular o módulo da variação fracionária do potencial entre o valor antigo e o valor novo :

$$\frac{\Delta V}{V} = \left| \frac{V_{novo}(j, k) - V(j, k)}{V(j, k)} \right|. \quad (13)$$

Com os valores obtidos do potencial em todos os pontos da grade, pode-se calcular as componentes do campo elétrico a partir das aproximações :

$$E_x(x, y) = -\frac{\partial V(x, y)}{\partial x} = -\frac{V(x + \Delta l, y) - V(x - \Delta l, y)}{2\Delta l},$$

$$E_y(x, y) = -\frac{\partial V(x, y)}{\partial y} = -\frac{V(x, y + \Delta l) - V(x, y - \Delta l)}{2\Delta l}. \quad (14)$$

De forma análoga ao cálculo iterativo do potencial , utilizamos o método da relaxação novamente para o cálculo do campo elétrico em cada ponto :

$$E_x = -\frac{V(j + 1, k) - V(j - 1, k)}{2\Delta l},$$

$$E_y = -\frac{V(j, k + 1) - V(j, k - 1)}{2\Delta l}. \quad (15)$$

Uma vez calculado as componentes do campo, podemos obter o módulo do campo elétrico :

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} . \quad (16)$$

Para determinar a direção de  $E$  em cada ponto no interior da grade, é necessário plotar uma linha de comprimento ' $c$ ' entre os dois pontos de coordenadas, desconsiderando os pontos em que as componentes do campo elétrico são nulas :

$$(x, y) \rightarrow (x + c \cdot \frac{E_x}{E}, y + c \cdot \frac{E_y}{E}) . \quad (17)$$

Por fim, pode-se plotar os segmentos de linhas equipotenciais no plano  $xy$ . Para tanto, como as linhas equipotenciais são perpendiculares ao campo elétrico, basta escolher uma linha em que o coeficiente angular seja o inverso do oposto da inclinação da linha calculada na Equação (17), traçando o segmento de reta entre os dois pontos de coordenadas :

$$(x, y) \rightarrow (x + c \cdot \frac{E_x}{E}, y - c \cdot \frac{E_y}{E}) . \quad (18)$$

## OBJETIVOS

Propõem-se a elaboração de um estudo sobre a obtenção do potencial elétrico de um condutor qualquer através da aplicação de métodos numéricos (relaxação), construídos com a utilização de linguagens computacionais. Ademais, deseja-se verificar a resolução da equação de Laplace de forma numérica para a obtenção do campo elétrico associado.

## METODOLOGIA

O procedimento numérico para calcular tanto o potencial elétrico quanto o campo elétrico de uma malha com condições de contorno definidas é implementado a partir da linguagem de programação *python*. Neste sentido, utiliza-se as bibliotecas nativas desta linguagem, importando-se a *numpy* <sup>[3]</sup>, a *matplotlib.pyplot* <sup>[4]</sup>, a *pandas* <sup>[5]</sup> e a *mplot3d* <sup>[6]</sup>.

Os fundamentos e instruções baseiam-se principalmente no livro de Hugh Young et al (2005, p.87-92) <sup>[2]</sup>.

Antes de tudo, cria-se uma grade com duas dimensões a qual possui 30 unidades de comprimento tanto na direção  $x$  como na direção  $y$ , o que proporciona 900 pontos a serem



estudados, visto que cada unidade corresponde a um ponto. Após isso, preenche-se estes pontos com as condições de contorno do potencial elétrico, mostradas na Figura 5, e com valores arbitrários para os demais pontos por meio de um laço que percorre cada linha e cada coluna da malha.

Diante disso, antes de se iniciar o procedimento numérico, define-se uma precisão numérica para os resultados desejados de 0,0001. Assim sendo, inicia-se uma iteração aplicando para cada ponto da malha a Equação (11) visando calcular o potencial elétrico, e a cada iteração afere-se a precisão do resultado. Neste sentido, quando a precisão for atingida, o valor do potencial elétrico é armazenado em uma matriz quadrada 30x30.

Ao obter-se o valor do potencial elétrico, é possível calcular o campo elétrico na direção  $x$  e  $y$  seguindo a Equação (9) a partir dos valores armazenados na matriz e da criação de um laço que percorre cada ponto. Neste sentido, é importante ressaltar tanto que o  $\Delta l$  é 1 unidade de comprimento, visto que é a diferença entre dois pontos, quanto que os pontos localizados na borda não possuem campo, uma vez que o cálculo depende da presença de pontos vizinhos em cada lado. Por fim, o valor de campo elétrico em cada ponto é armazenado em uma lista  $E_x$  (valores na direção  $x$ ) e  $E_y$  (valores na direção  $y$ ).

Em última análise, a representação em forma de tabela dos resultados é feita por meio da biblioteca *pandas* recorrendo ao comando *pd.DataFrame(matriz dos resultados)*. Já a representação gráfica é dividida em 2D e 3D.

Para a representação bidimensional, recorre-se aos comandos da *matplotlib.pyplot*: *plt.contour(coordenada x, coordenada y, matriz dos valores de potencial elétrico)* e *plt.quiver(coordenada y, coordenada x, E<sub>y</sub>, E<sub>x</sub>)* que plotam, respectivamente, as linhas de potencial e os vetores do campo elétrico.

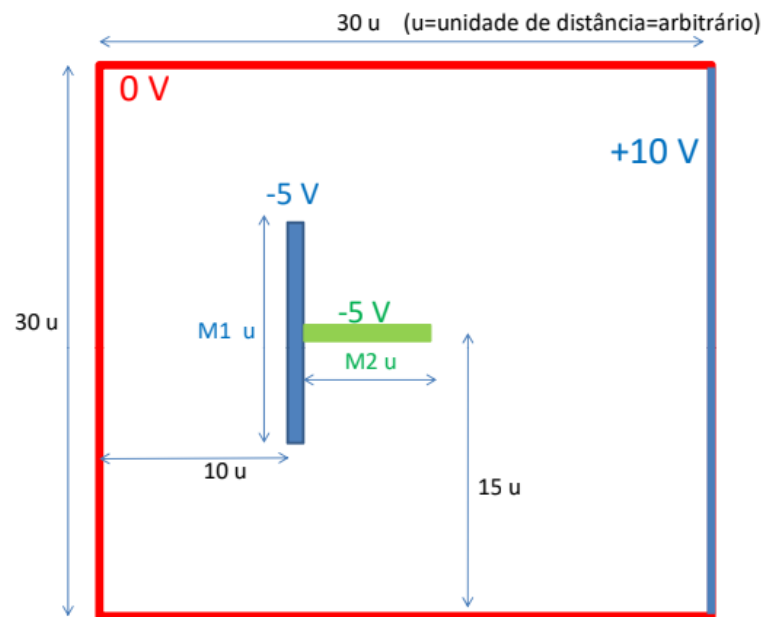
Para a representação tridimensional, recorre-se aos comandos da *mplot3d*. Neste sentido, define-se uma figura com um nome qualquer, por exemplo “ax”, por meio do comando *ax = fig.gca(projection='3d')* e preenche-se essa figura com a superfície do potencial elétrico a partir do comando *ax.plot\_surface(coordenada x, coordenada y, matriz do potencial elétrico)*.

A visualização do código e da lógica de programação empregada estão disponíveis em apêndices, através do link de direcionamento ao *Google Colaboratory* do trabalho numérico (Apêndice A), e prints das partes mais importantes do código, exibidos no Apêndice B.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Com o entendimento teórico acerca do significado e cálculo do potencial elétrico, bem

como a compreensão numérica e computacional para obtenção gráfica de tal conceito, a construção do projeto baseou-se em condições de contorno arbitrárias, dispostas de forma parametrizadas, segundo exposto pela Figura 5.

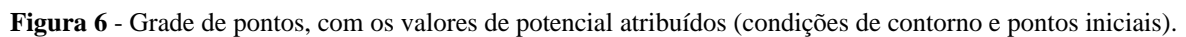


**Figura 5** - Condições de contorno referentes ao potencial elétrico, pré-estabelecidas de forma paramétrica.

**Legenda:** As variáveis M1 e M2 são determinadas através do cálculo da média simples entre os RAs dos integrantes do grupo, sendo M1 referente ao algarismo da unidade da média e M2 ao algarismo da dezena. Caso os algarismos obtidos sejam 0, utiliza-se o valor 1. Para o presente relatório, obteve-se M1 = 6 e M2 = 4.

A partir das condições de contorno definidas, elaborou-se a uma grade de pontos (x,y) atribuindo-se os valores de potenciais a cada par - potenciais fixos (não afetados pelo método da relaxação): borda direita  $V = 10 V$ , demais extremidades  $V = 0 V$ , pontos internos  $V = -5 V$ ; todos os pontos restantes foram preenchidos com o potencial inicial (afetados pelo método numérico)  $V = 1 V$ . As Figuras 6<sup>2</sup> e 7 facilitam a visualização da construção inicial do problema, tratando-se da grade numérica de pontos (com os valores de potencial associados) e de uma vista com escala de cores, respectivamente.

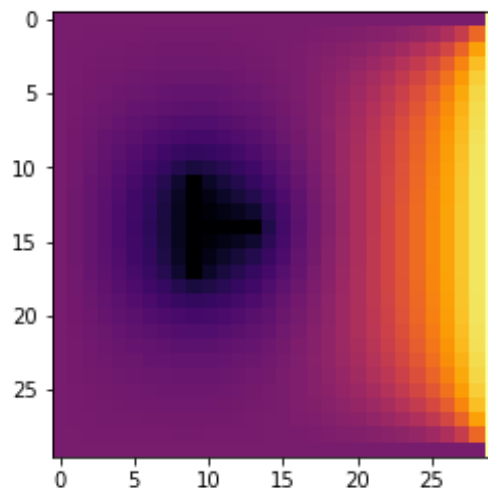
<sup>2</sup> As cores da grade estão dispostas apenas para facilitar a visualização das condições de contorno. Os valores em laranja não possuem significado físico especial, foram apenas atribuições feitas pelo código gerado e que não foram solucionadas.



Uma vez completa a atribuição de valores iniciais para o potencial, aplica-se o método da relaxação para todos os pontos, atualizando-se o valores com base na média dos quatro pontos vizinhos a cada iteração, de acordo com a Equação (12) , até que determinada precisão seja atingida (utilizou-se um uma precisão igual a 0,0001). Para o processo todo foram feitas 48608 iterações para se alcançar a convergência estabelecida. As Figuras 8 e 9 expõem a grade gerada após o método ser bem sucedido e demonstram as diferenças de intensidades finais

[illegible]

**Legenda:** Os valores expostos estão arredondados com uma casa decimal por motivos estéticos e espaciais, facilitando a elaboração da tabela. Durante o cálculo foi respeitada a precisão citada (0,0001).

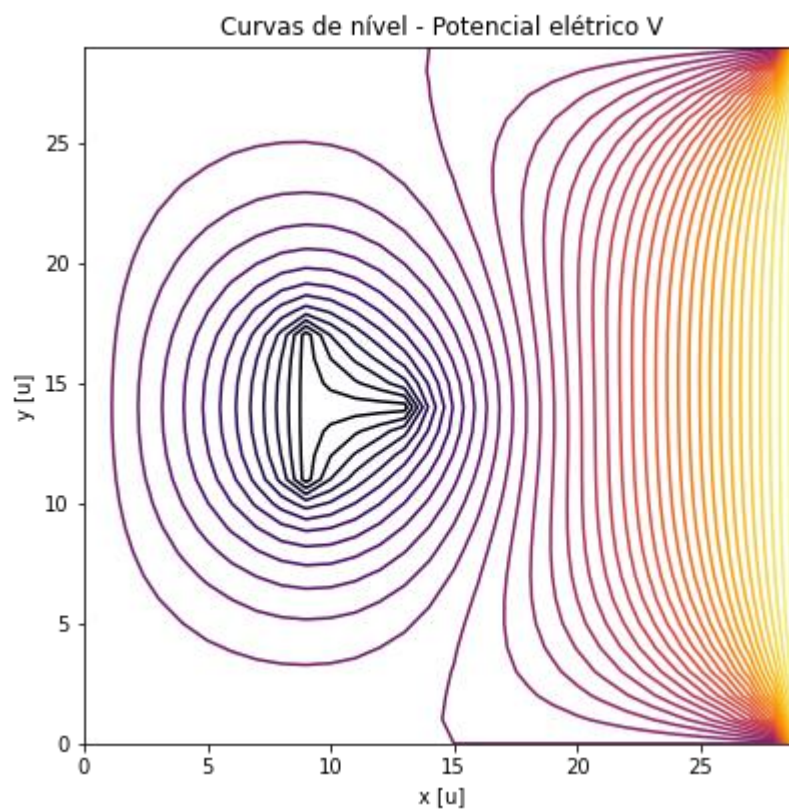


**Legenda:** A escala de cores mais alaranjada refere-se à potenciais maiores, enquanto as cores roxo/preto, menores.

11

ocorreu de forma satisfatória.

Como visto na teoria, o potencial elétrico é comumente representado através de superfícies, e por isso é interessante realizar tal construção para que seu entendimento seja ampliado. Assim, elaborou-se primeiramente uma representação bidimensional de curvas de nível do potencial obtido, visível na Figura 10. Sua forma tridimensional também foi construída, novamente através das curvas de nível, além da visão de uma superfície, através de métodos interpoladores realizados pelos comandos específicos da biblioteca em *Python* denominada *matplotlib.pyplot*. Os resultados tridimensionais estão expostos nas Figuras 11 e 12.

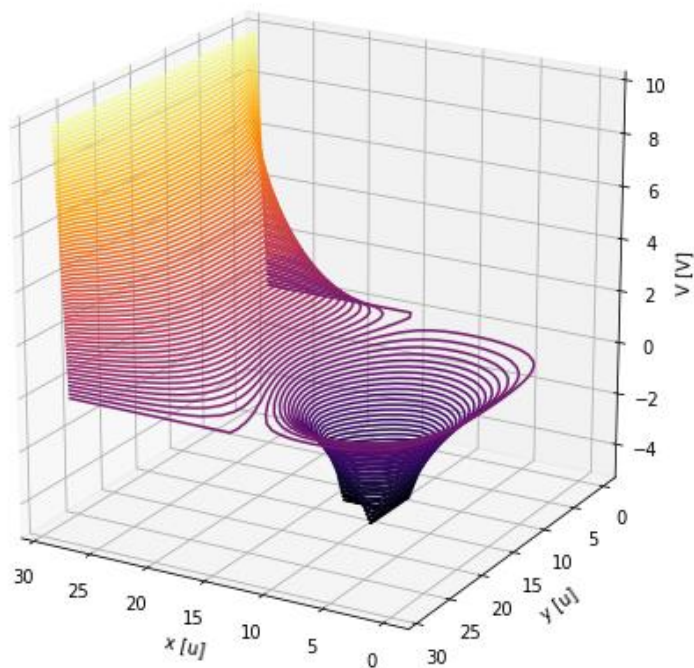


**Figura 10** - Curvas de nível do potencial elétrico  $V$  obtido (2D).

**Legenda:** As cores mais quentes, avermelhadas e alaranjadas, representam potenciais com valores positivos, enquanto as regiões em roxo e preto são potenciais negativos.

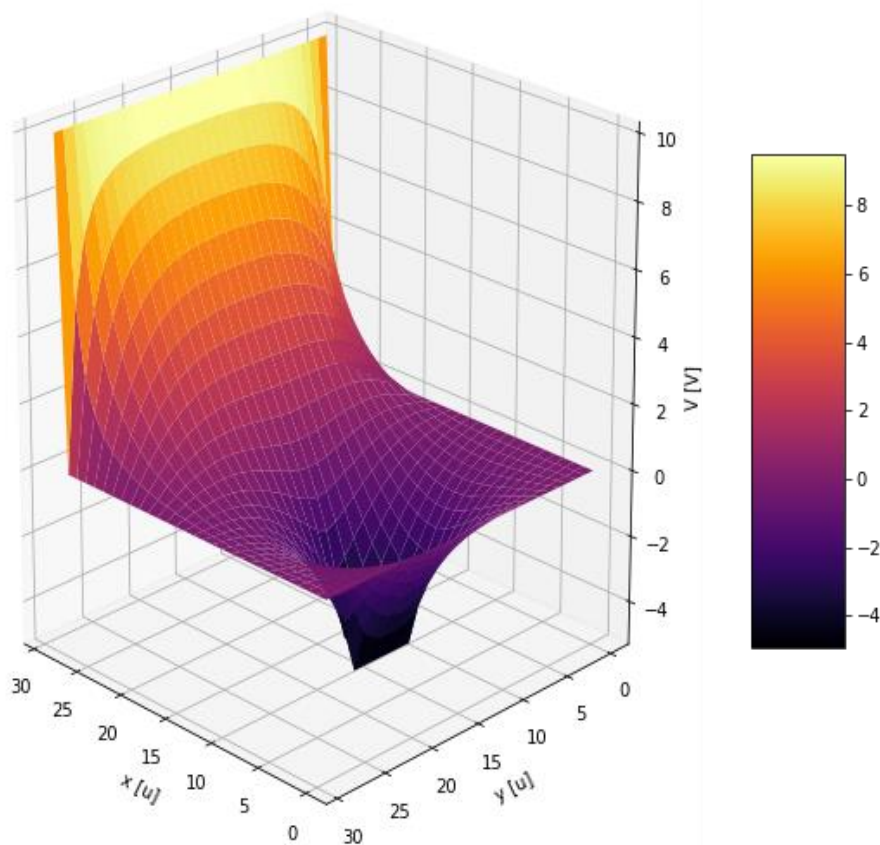


Curvas de nível do Potencial Elétrico V (Tridimensional)



**Figura 11** - Curvas de nível do potencial elétrico V obtido (3D).

**Legenda:** Curvas de nível mais alaranjadas representam equipotenciais maiores, positivos, enquanto as cores mais escuras, roxo e preto, são potenciais menores.



**Figura 12-** Superfície do potencial elétrico V obtido (3D).

De forma didática e visual, o comportamento do potencial elétrico é distribuído de forma a se assemelhar à uma “bexiga esticada”, cujas condições de contorno são pontos fixos pré-estabelecidos. Através da análise dos gráficos obtidos, nota-se que essa característica visual está presente no resultado final, proporcionando imagens bastante interessantes, em confluência com o modelo teórico.

A obtenção do potencial, portanto, é bastante útil por se tratar de um conceito escalar, não havendo qualquer análise vetorial que possa deixar o cálculo mais complexo. Desta forma, uma implicação importante de se encontrar o potencial elétrico é que, a partir dele, pode-se obter o campo elétrico  $E$  de um condutor carregado em todo o espaço, através da Equação (2). Tal expressão pode ser resolvida numericamente, a partir de aproximações sucessivas considerando os valores de  $V$  nos pontos vizinhos nas direções  $x$  e  $y$ , a fim de se alcançar as magnitudes de  $E_x$  e  $E_y$  para cada par ordenado. Tal cálculo considera, além das intensidades de  $V$ , as distâncias entre cada ponto do espaço, e, portanto, para uma maior precisão, é interessante haver uma quantidade satisfatória de pontos, para que suas distâncias  $\Delta l$  sejam minimizadas, atingindo resultados mais fidedignos e precisos. A expressão numérica que obtém o campo nas duas direções cartesianas é dada pela Equação (14).

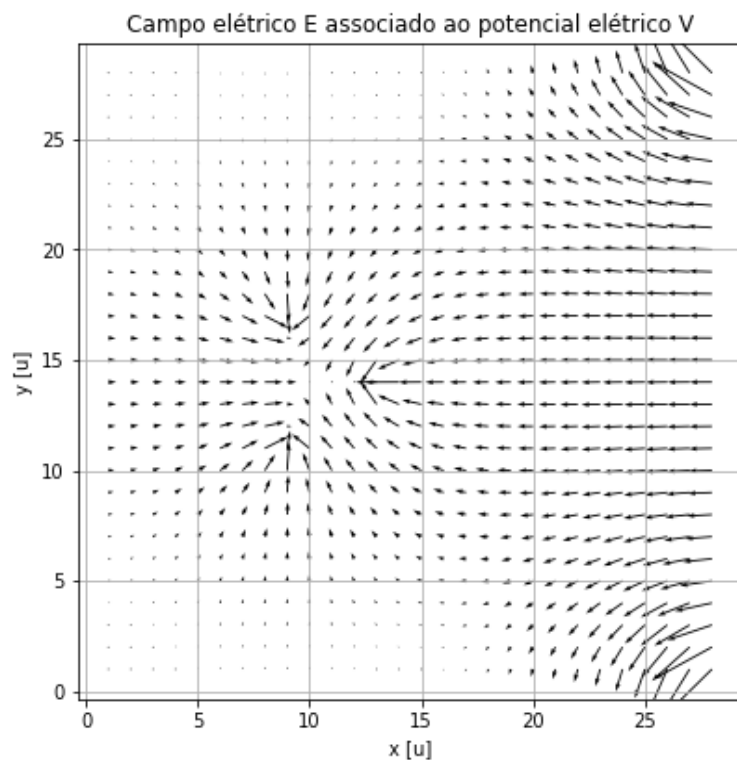
Com a aplicação do método descrito, obteve-se a grade exposta pela Figura 13, que denota a intensidade do campo elétrico  $E$  em todos os pontos da grade.

[illegible]

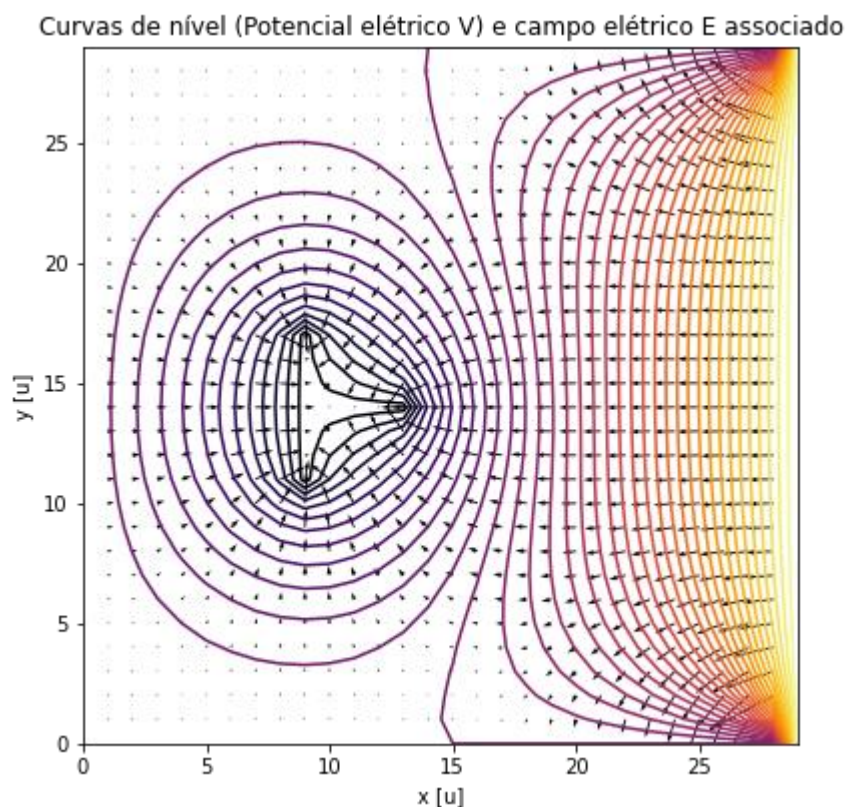
**Legenda:** Os valores expostos estão expostos com apenas uma casa decimal por motivos estéticos, mas o cálculo possui um precisão de 4 casas após a vírgula.

15





**Figura 14** - Campo elétrico do condutor carregado associado ao potencial elétrico obtido.



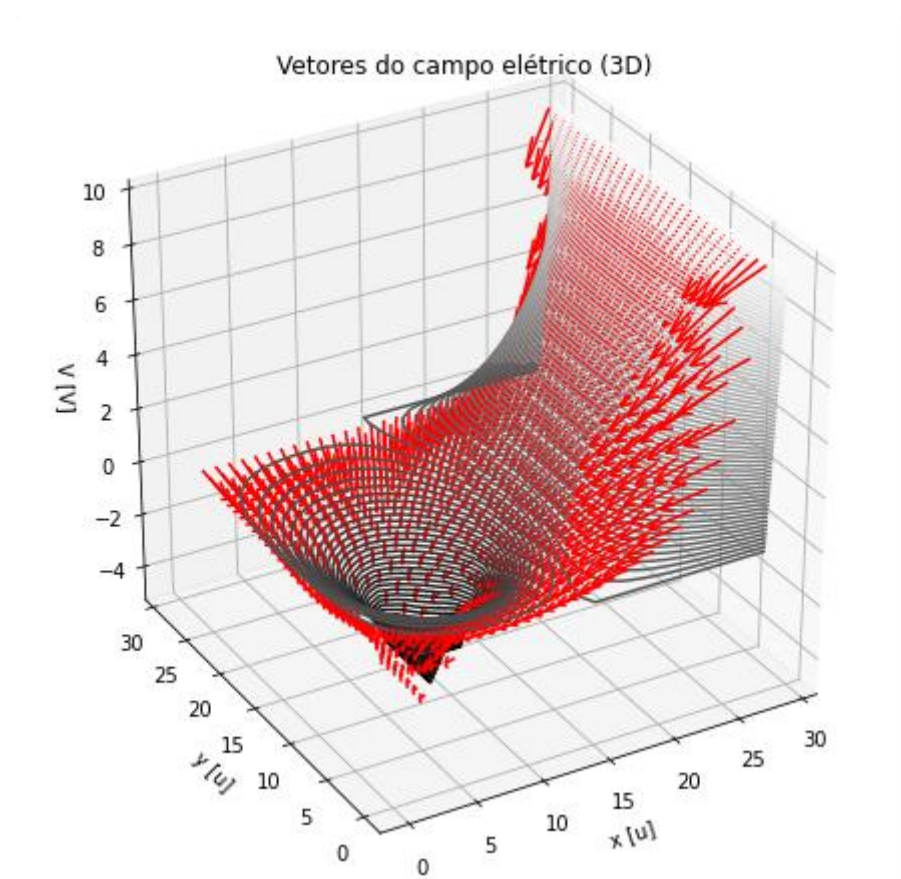
**Figura 15** - Campo vetorial elétrico  $E$  e curvas de nível do potencial  $V$  - gradiente do potencial.

**Legenda:** As cores mais quentes, avermelhadas e alaranjadas, representam potenciais com valores positivos, enquanto as regiões em roxo e preto são potenciais negativos.

Analisando a Figura 15, verifica-se que os vetores do campo elétrico estão todos perpendiculares às curvas de nível, um indicativo de que houve sucesso na sua obtenção, pois está de acordo com o previsto teoricamente pela Equação (2). Percebe-se, também, mais evidentemente na Figura 14, que a intensidade (representada pelo comprimento de cada vetor) do campo é maior justamente nas regiões de maior variação do potencial, estando novamente em acordo com o esperado teoricamente.

Através da equação de Laplace (6), é importante ressaltar que não é possível a existência de pontos de máximo e mínimos no potencial, em decorrência da inconclusividade gerada pelas derivadas nulas. Assim, os valores extremos do potencial se encontram nas superfícies dos condutores do problema associado.

Para fins ilustrativos, plotou-se ademais uma representação tridimensional dos vetores do campo elétrico sob a superfície potencial. Tal imagem está exposta na Figura 16.



**Figura 16** - Representação simplificada do campo elétrico em três dimensões.

**Legenda:** Em vermelho estão representados os vetores do campo elétrico associados ao potencial (curvas de nível cinzas).

Além de toda a dissertação exposta, outras figuras adicionais foram construídas, bem

como uma animação 3D para a superfície do potencial, as quais foram anexadas e podem ser visualizadas em Apêndice C para complementar o trabalho.

## CONCLUSÃO

Conclui-se, a priori, que os valores estipulados para o estudo do potencial e do campo elétrico, baseados em condições de contorno, foram obtidos satisfatoriamente a partir de sucessivas iterações numéricas, apresentando uma boa relação com o previsto pela teoria.

Tomando-se a dificuldade relacionada à associação mútua de todas as condições estabelecidas através de métodos analíticos, reiterou-se o uso do método iterativo da relaxação através da linguagem de programação *Python*. Tal programa favoreceu a análise síncrona de todas as condições propostas, além da verificação visual de tais fenômenos, através de gráficos bidimensionais e tridimensionais plotados e tabelas construídas.

Desta forma, percebeu-se determinada correspondência com o previsto teoricamente, visto que, segundo os gráficos estabelecidos, os vetores do campo elétrico direcionam-se perpendicularmente às linhas de potencial e agregam-se em regiões de maior intensidade, nas quais também encontra-se maior variação do potencial elétrico, correspondendo às superfícies dos materiais condutores em questão.

Por fim, verificou-se que o projeto pode ser realizado de forma satisfatória, contribuindo para o entendimento físico e teórico dos conceitos trabalhados, além do importante desenvolvimento de técnicas práticas e numéricas, a partir do aprendizado paralelo às linguagens de programação.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] NUSSENZVEIG, H. Moysés, Curso de Física Básica 3 Eletromagnetismo, Ed. Edgard Blücher LTDA São Paulo, 1997.
- [2] YOUNG, Hugh D., FREEDMAN, Roger A. SEARS e ZEMANSKY, Física III - Eletromagnetismo. 10º Ed, Pearson Education do Brasil, São Paulo, 2005.
- [3] NUMPY. NumPy: The fundamental package for scientific computing with Python, 2019-2021. Página inicial. Disponível em: <<https://numpy.org>>. Acesso em: 27 de outubro de 2021.

[4] MATPLOTLIB. matplotlib: Pyplot tutorial, an introduction to the pyplot interface, 2012-2021. Página inicial. Disponível em: <<https://matplotlib.org/stable/tutorials/introductory/pyplot.html>>. Acesso em: 27 de outubro de 2021.

[5] NumFOCUS. pandas: pydata, 2015. Página inicial. Disponível em: <<https://pandas.pydata.org>>. Acesso em: 26 de outubro de 2021.

[6] MATPLOTLIB. The mplot3d Toolkit, 2012-2021. Página inicial. Disponível em: <<https://matplotlib.org/stable/tutorials/toolkits/mplot3d.html>>. Acesso em: 27 de outubro de 2021.

## APÊNDICE A

O projeto, realizado através da plataforma *Google Colaboratory*, está disponível em: <https://colab.research.google.com/drive/1b8PEC8wYQoiPzgcrfxfHQ1XP1QtTpZpT?usp=sharing>.

## APÊNDICE B

A documentação acerca das principais etapas da construção do código associado ao projeto numérico está feita através da exposição de imagens retiradas do ambiente de execução *Google Colaboratory* completo (disponível no Apêndice A). As figuras 17, 18, 19, 20, 21, 22 e 23 referem-se ao que foi elaborado.

```
1 # importando as bibliotecas que serão utilizadas:
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 import pandas as pd
5 from mpl_toolkits import mplot3d
6 from matplotlib import cm
7
8 # Dados parametrizados:
9 Vesq = 10 # Potencial inicial a esquerda (V esquerda)
10 Vres = 0 # Potencial nas demais arestas (V resto)
11 medRA = str((231762 + 220057 + 182697 + 245271) / 4)
12
13 M1 = int(medRA[5])
14 M2 = int(medRA[4])
15 print(f'Média = {medRA}\nM1 = {M1}\nM2 = {M2}')
```

Média = 219946.75  
M1 = 6  
M2 = 4

**Figura 17** - Bibliotecas principais utilizadas, determinação das condições de contorno na borda e variáveis parametrizadas pela média dos RAs do grupo.

```
1 # criando a grade de pontos:
2 m = 30
3 x = np.arange(0, m, 1) # coordenadas x e y, de 0 a 30 u
4 y = np.arange(0, m, 1)
5 X,Y = np.meshgrid(x, y)
6
7 # atribuindo valores de potencial V arbitrários:
8 Vval = np.zeros((m, m)) # criação de uma matriz para acomodar cada valor de campo no ponto (x,y) qualquer
9
10 # laços percorrendo cada par ordenado, atribuindo condições de contorno para as arestas exteriores:
11 for i in range(0, m):
12     for j in range(0, m):
13         Vval[i][j] = 1 # abastecimento de todos os pontos internos com 1 V
14         if j == (m-1):
15             Vval[i][j] = Vesq # última coluna ser 10
16         elif i == 0:
17             Vval[i][j] = 0 # linha 1 ser 0
18         elif j == 0:
19             Vval[i][j] = 0 # primeira coluna ser 0
20         elif i == (m-1):
21             Vval[i][j] = 0 # última linha ser 0
22
23 # condições de contorno interiores:
24 for i in range(10,14): # condições de contorno internas na vertical
25     Vval[14][i] = -5
26
27 for i in range(11,18): # condições de contorno internas na horizontal
28     Vval[i][9] = -5
```

**Figura 18** - Criação da grade de pontos e distribuição localizada das condições de contorno iniciais para aplicação do método da relaxação.

```

1 # definindo a precisão do processo
2 preci = 0.0001      # definição da precisão
3 delta = 1           # definição da validação
4
5 # método iterativo - relaxação:
6 Vnovo = 0 # variável para acomodar os valores novos de campo a cada iteração
7 validacao = 0
8 iter = 0
9
10 while delta > preci:      # enquanto não se atinge-se a precisão definida
11     for i in range(1, m-1): # iteração feita para os pontos internos - bordas permanecem inalteradas
12         for j in range(1, m-1):
13
14             if Vval[i][j] != -5: # condição para não mudar os potenciais fixos no meio
15                 Vnovo = (Vval[i+1][j] + Vval[i-1][j] + Vval[i][j+1] + Vval[i][j-1])/4 # novos valores de potencial pela média dos 4 pontos vizinhos
16                 validacao=abs((Vnovo - Vval[i][j]) / Vnovo) # módulo da validação fracionária
17
18                 if validacao > 0:
19                     delta = validacao
20                 if delta > preci:
21                     Vval[i][j] = round(Vnovo, 3) # atualização do valor de potencial no ponto até a precisão ser atingida
22             iter = iter + 1
    
```

**Figura 19** - Método da relaxação, com determinação da precisão e laços que percorrem todos os pontos alterando os potenciais não-fixos.

```

1 # Calculando o campo
2 Ex = np.zeros((m,m)) # matrizes que vão comportar os valores de campo
3 Ey = np.zeros((m,m))
4 Emod = np.zeros((m,m))
5
6 dirEx = []
7 dirEy = []
8 coord_x = []
9 coord_y = []
10 for i in range(1,m-1): # iteração para os pontos internos, conforme orientação do livro
11     for j in range(1,m-1):
12         Ex[i][j]= round(-(Vval[i+1][j]-Vval[i-1][j])/2,3) # cálculo do campo conforme o livro orienta
13         dirEx.append(Ex[i][j])
14         coord_x.append(i)
15
16         Ey[i][j]= round(-(Vval[i][j+1]-Vval[i][j-1])/2,3)
17         dirEy.append(Ey[i][j])
18         coord_y.append(j)
19
20         Emod[i][j]=round((((Ex[i][j])**2 + (Ey[i][j])**2 )**(1/2),3) # cálculo do módulo (intensidade)
21
    
```

**Figura 20** - Cálculo do campo elétrico associado ao potencial a partir da solução da equação de Laplace obtida numericamente.

```

16 # plotando as curvas de nível e campo elétrico gradiente
17 plt.figure(3, figsize=[6.4,6.4])
18 plt.contour(x, y, Vval, 40, cmap="inferno")
19 plt.quiver(coord_y, coord_x, dirEy, dirEx, scale=30)
20 plt.title('Curvas de nível (Potencial elétrico V) e campo elétrico E associado')
21 plt.xlabel('x [u]')
22 plt.ylabel('y [u]')
23
24 plt.show()
    
```

**Figura 21** - Código para plotagem das curvas de nível do potencial e o do campo vetorial elétrico.



```
1 # plotando as curvas de nível (3D):
2
3 plt.figure(figsize=[8,8])
4 ax = plt.axes(projection='3d')
5 ax.contour3D(x, y, Vval, 100, cmap='inferno')
6 ax.set_xlabel('x [u]')
7 ax.set_ylabel('y [u]')
8 ax.set_zlabel('V [V]')
9 plt.title("Curvas de nível do Potencial Elétrico V (Tridimensional)")
10 ax.view_init(20, 120) # ângulo de visão
11
12 plt.show()
```

**Figura 22** - Código para plotagem das curvas de nível no espaço tridimensional.

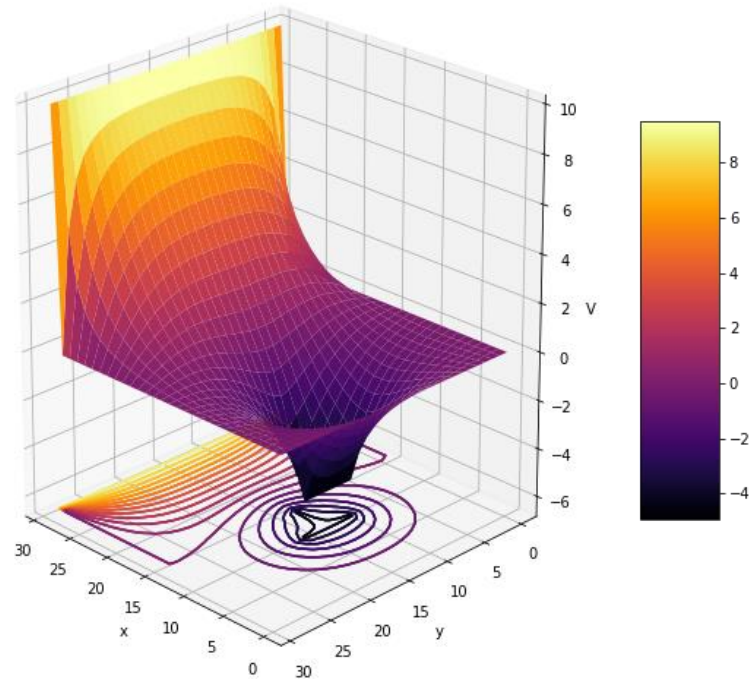
```
1 # Plotando a superfície do Potencial Elétrico V
2
3 fig = plt.figure(figsize=[10,10])
4 ax = fig.gca(projection='3d')
5 ax.set_xlabel('x [u]')
6 ax.set_ylabel('y [u]')
7 ax.set_zlabel('V [V]')
8
9 super = ax.plot_surface(X, Y, Vval, cmap= 'inferno')
10 fig.colorbar(super,shrink=0.5,aspect=5)
11 ax.view_init(20, 135)
12
13 plt.show()
```

**Figura 23** - Código para plotagem da superfície do potencial elétrico no espaço tridimensional.

## APÊNDICE C

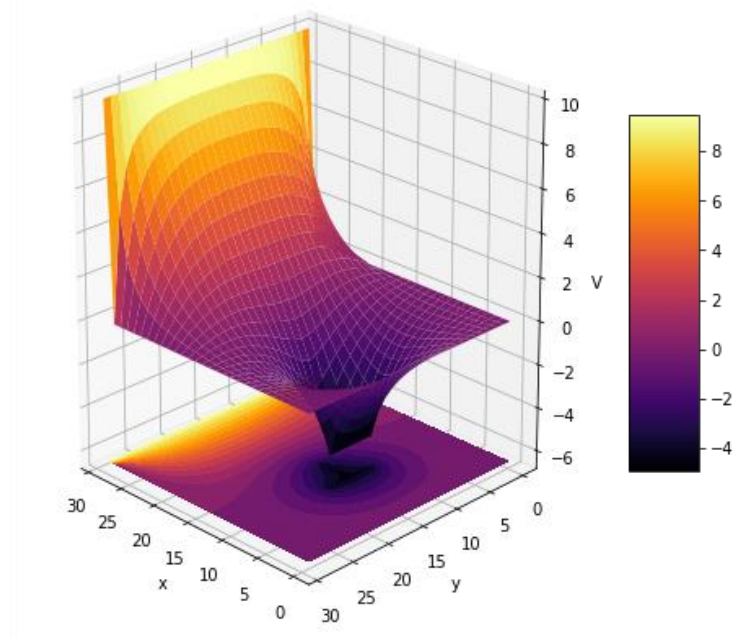
O conteúdo deste apêndice trata de um conteúdo complementar construído para o projeto numérico. As figuras 24 e 25 são representativas das superfícies do potencial com projeções de curvas de nível e em escala de densidade no plano xy imediatamente abaixo, respectivamente.

Superfície 3D com projeção das curvas de nível (Potencial V)



**Figura 24** - Superfície do potencial elétrico com projeção em curvas de nível no plano  $xy$  abaixo da plotagem.

Superfície 3D com projeção das curvas de nível densas (Potencial V)



**Figura 25** - Superfície do potencial elétrico com projeção densa no plano  $xy$  abaixo da plotagem.

Uma animação também foi elaborada, a fim de visualizar a superfície sob diferentes perspectivas. O vídeo está disponível através do link:

<https://drive.google.com/file/d/1ERZW8tUZ0x10xiZ7fasPKqfHiYJtICeJ/view?usp=sharing>.