Exercice 72 p 30

Algorithme d'Euclide Pour aller plus loin

On appelle PGCD le plus grand diviseur commun de deux nombres.

1. Trouver le PGCD de 15 et 25, de 27 et 81.

2. a. Pour trouver ce PGCD, on peut utiliser l'algorithme d'Euclide. Ainsi, pour trouver le PGCD de 910 et 105 :

- On commence par poser la division euclidienne de 910 par 105, on peut écrire $910 = 105 \times 8 + 70$.
- On admet que le PGCD de 910 et 105 est égal au PGCD de 105 et de 70.
- On recommence ensuite en posant la division euclidienne de 105 par 70.
- On continue ainsi de suite. Le PGCD de 910 et 105 est le dernier reste non nul.

Quel est le PGCD de 910 et 105 ?

b. De la même manière, trouver le PGCD de 2 450 et 675.

1) Diviseurs de 15 : 1 3 5 15.
Diviseurs de 25 : 1 5 25.
Donc PGCD(15 ; 25) = 5.
Diviseurs de 27 : 1 3 9 27.
Diviseurs de 81 : 1 3 9 27 81.
Donc PGCD(27 ; 81) = 27.

2) a) $910 = 105 \times 8 + 70$
$105 = 70 \times 1 + 35$
$70 = 35 \times 2 + 0$
Le dernier reste non nul est 35.
Donc PGCD(910 ; 105) = 35.

b) $2\,450 = 675 \times 3 + 425$
$675 = 425 \times 1 + 250$
$425 = 250 \times 1 + 175$
$250 = 175 \times 1 + 75$
$175 = 75 \times 2 + 25$
$75 = 25 \times 3 + 0$
Le dernier reste non nul est 25. Donc PGCD(2 450 ; 675) = 25.

Exercice 74 p 30

PPCM et PGCD

1. Décomposer 84 et 270 en produits de nombres premiers.

2. À l'aide de ces décompositions, trouver :

a. le plus petit multiple commun non nul (PPCM) de 84 et 270 ;

b. le plus grand diviseur commun (PGCD) de 84 et 270.

3. Trouver le PPCM et le PGCD de 450 et 750.

1)
$84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 2^2 \times 3 \times 7$
$270 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 = 2 \times 3^3 \times 5$

2) a)
PPCM(84 ; 270) = $2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7$
= 3 780
On prend tous les facteurs premiers qui apparaissent et on les affecte du plus grand exposant.

b) PGCD(84 ; 270) = $2 \times 3 = 6$
On ne prend que les facteurs premiers qui apparaissent dans les deux décompositions et on les affecte du plus petit exposant.

2) $450 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 = 2 \times 3^2 \times 5^2$
$750 = 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 = 2 \times 3 \times 5^3$

PPCM(84 ; 270) = $2 \times 3^2 \times 5^3$
= 2 250

PGCD(84 ; 270) = $2 \times 3 \times 5 \times 5$
= 150

Exercice 76 p 30

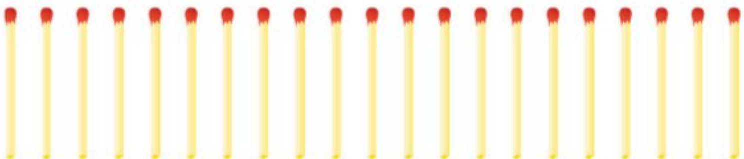
Le jeu de Nim Prise d'initiative

Nathan et Fabien jouent au jeu de Nim.
En voici la règle :

- Il y a 21 allumettes sur la table au début de la partie.
- À chaque tour, on peut prendre 1, 2 ou 3 allumettes.
- Celui qui prend la dernière allumette a gagné.

1. Nathan commence. Il prend 3 allumettes, puis Fabien prend 3 allumettes à son tour. Nathan en prend alors 2, puis Fabien en prend 3. Nathan en prend alors 3. Fabien en choisit 2.
Nathan peut-il encore gagner ?

2. Un des deux joueurs peut gagner à tous les coups. Lequel et comment ?



1. Il y a 21 allumettes en début de partie.
Nathan prend 3 allumettes : il en reste donc 18.
Fabien en prend 3 : il en reste alors 15.
Nathan en prend 2 : il en reste alors 13.
Fabien en prend 3 : il en reste alors 10.
Nathan en prend 3 : il en reste alors 7.
Fabien en prend 2 : il en reste alors 5.
C'est au tour de Nathan de jouer :
• s'il en prend 1 : il en reste alors 4.
Si Fabien en prend 1, il en reste 3. Nathan prend les 3 et il gagne.
Si Fabien en prend 2, il en reste 2. Nathan prend les 2 et il gagne.
Si Fabien en prend 3, il en reste 1. Nathan prend celle restante et il gagne.
• s'il en prend 2 : il en reste alors 3. Fabien prend les 3 et il gagne.
• s'il en prend 3 : il en reste alors 2. Fabien prend les 2 et il gagne.
Nathan peut donc gagner et il gagne même à coup sûr s'il prend 1 allumette au tour suivant.
2. Pour gagner à tous les coups, il faut, lorsque c'est son tour, laisser un nombre d'allumettes correspondant à un multiple de 4 : 4, 8, 12 ou 16 allumettes. Et il vaut donc mieux ne pas commencer !

Exercice 78 p 31

Vive la mariée !

Emma et Arthur ont acheté pour leur mariage 3 003 dragées au chocolat et 3 731 dragées aux amandes.

1. Arthur propose de répartir ces dragées de façon identique dans 20 corbeilles. Chaque corbeille doit avoir la même composition.
Combien leur reste-t-il de dragées non utilisées ?

2. Emma et Arthur changent d'avis et décident de proposer des petits ballotins* dont la composition est identique. Ils souhaitent qu'il ne leur reste pas de dragées.
 a. Emma propose d'en faire 90. Ceci convient-il ? Justifier.
 b. Ils se mettent d'accord pour faire un maximum de ballotins.
 Combien en feront-ils et quelle sera leur composition ?

* Un ballotin est un emballage pour confiseries, une boite par exemple.

D'après DNB Pondichéry, 2014.

1) 3 003 = 20 × 150 + 3 et 3 731 = 20 × 186 + 11
On fait donc 20 corbeilles avec 150 dragées au chocolat et 186 dragées aux amandes dans chacune et il reste 3 + 11 = 14 dragées non utilisées.

2) a) 3 003 = 90 × 33 + 33
3 731 = 90 × 41 + 41
La proposition d'Emma de faire 90 ballotins ne convient pas car il restera des dragées.

b) Diviseurs de 3 003 :
1 3 7 11 13 21 33 39 77 91 143 231 273 429 1 001 3 003
Diviseurs de 3 731 :
1 7 13 41 91 287 533 3 731
91 est le plus grand diviseur commun à 3 003 et 3 731.
Ils pourront donc faire au maximum 91 ballotins.
3 003 ÷ 91 = 33 et 3 731 ÷ 91 = 41
Il y aura donc 33 dragées au chocolat et 41 dragées aux amandes dans chaque ballotin.

Exercice 79 p 31

Les ballons

1. À la fin d'une fête de village, tous les enfants présents se partagent équitablement les 428 ballons de baudruche qui ont servi à la décoration. Il reste alors 37 ballons.
Combien pouvait-il y avoir d'enfants ?

2. L'année suivante, les mêmes enfants se partagent équitablement la totalité des 828 ballons utilisés cette année-là.
Combien d'enfants étaient présents ?

D'après DNB Asie, 2015.

1) S'il reste 37 ballons, c'est que le reste de la division des 428 ballons par le nombre d'enfants est 37.
428 – 37 = 391 et on cherche les diviseurs de 391 : 1 17 23 391.
Si l'on considère qu'il n'y avait pas qu'un seul enfant à la fête, il y avait 17 ou 23 ou 391 enfants à cette fête.

2) Il ne reste pas de ballon, ce qui signifie que la division de 828 par le nombre d'enfants est un nombre entier.
$828 \div 17 \approx 48{,}7$
$828 \div 23 = 36$
$828 \div 391 \approx 2{,}1$
826 est divisible par 23.
Il y avait donc 23 enfants présents.

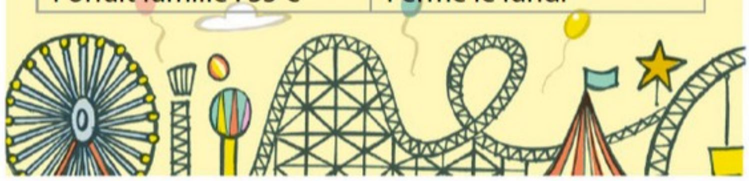
Exercice 80 p 31

Parc d'attractions

Prise d'initiative

Bienvenue au parc d'ani-math-ion !

Tarifs	Horaires
Entrée adulte : 12 €	Ouvert de 9 h à 18 h
Entrée enfant (moins de 12 ans) : 7 €	Dernières entrées à 17 h
Forfait famille : 35 €	Fermé le lundi



1. a. Est-il intéressant pour un couple et leur enfant de 8 ans de prendre le forfait famille ?

b. À partir de quel nombre d'enfants un couple a-t-il intérêt à choisir le forfait famille ?

2. Au cours d'une journée, 89 forfaits famille ont été vendus pour 510 personnes.

a. Déterminer la recette correspondante.

b. Quel est le prix moyen par personne ?

3. Au cours de cette même journée, 380 personnes n'ont pas utilisé le forfait famille pour une recette correspondante de 3 660 €.
Déterminer le nombre d'entrées adulte et le nombre d'entrées enfant vendues lors de cette journée.

D'après DNB Asie, 2012.

1) a) Le forfait famille coûte 35 €. Si ce couple et son enfant de 8 ans prend les places à l'unité, cela revient à :
$12 \times 2 + 7 = 24 + 7 = 31$ €.
Le forfait famille n'est donc pas intéressant.

b) Soit n le nombre d'enfants du couple. En prenant les places à l'unité, cela revient à :
$2 \times 12 + 7n = 24 + 7n$ €.
On peut résoudre le problème par tâtonnements :
On calcule le prix avec 2 enfants et on constate que le forfait famille est alors plus intéressant.
1 couple avec 2 enfants va payer $24 + 14 = 38$ €.

2) a) La recette est alors de :
$89 \times 35 = 3\,115$ €.
b) Le prix moyen par personne est de $3\,115 \div 510 \approx 6{,}11$ €.

3) On pourra raisonner par essais successifs (ou tâtonnements).
Pour 100 entrées adultes, il y a alors :
$380 - 100 = 280$ entrées enfants, soit une recette de :
$100 \times 12 + 280 \times 7 = 3\,160$ € ; c'est trop bas.
Pour 150 entrées adultes, il y a alors :
$380 - 150 = 230$ entrées enfants, soit une recette de :
$150 \times 12 + 230 \times 7 = 3\,410$ € ; c'est trop bas.
Pour 200 entrées adultes, il y a alors :
$380 - 200 = 180$ entrées enfants, soit une recette de :
$200 \times 12 + 180 \times 7 = 3\,660$ € ; c'est ce que l'on cherchait.
Donc 200 entrées adultes et 180 entrées enfants ont été vendues lors de cette journée.
(Dans peu de temps, on pourrait résoudre avec une équation ...)