Exercice 53 p 28

Divisibilité

Comment peut-on savoir, sans effectuer de division, que 36 054 est divisible par 18 ?

36 054 est divisible par 2, car il est pair,
36 054 est divisible par par 9, car la somme de ses chiffres 3 + 6 + 0 + 5 + 4 = 18 est divisible par 9.
36 054 est donc divisible par 2 × 9 = 18.

Exercice 54 p 28

Nombres amicaux Pour aller plus loin

Deux nombres sont dits « amicaux » si la somme des diviseurs de l'un, hormis lui-même, est égale à l'autre.

1. Montrer que 220 et 284 sont amicaux.
2. Montrer que 1 184 et 1 210 sont amicaux.

1) Diviseurs de 220 : 1 2 4 5 10 11 20 22 44 55 110 220
Diviseurs de 284 : 1 2 4 71 142 284
1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284
1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220
Donc 220 et 284 sont amicaux.

2) Diviseurs de 1 184 : 1 2 4 8 16 32 37 74 148 296 592 1184
Diviseurs de 1210 : 1 2 5 10 11 22 55 110 121 242 605 1210
1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 37 + 74 + 148 + 296 + 592 = 1210
1 + 2 + 5 + 10 + 11 + 22 + 55 + 110 + 121 + 242 + 605 = 1184
Donc 1 184 et 1 210 sont amicaux.

Exercice 55 p 28

Nombres permutables

On dit que le nombre premier 13 est un nombre permutable, car le nombre 31 est aussi un nombre premier.

- Trouver tous les nombres premiers permutables de deux chiffres.

Les nombres premiers permutables à deux chiffres sont : 11 ; 13 et 31 ; 17 et 71 ; 37 et 73 ; 79 et 97.

Exercice 57 p 28

Le bus

Cédric attend le bus. Ce dernier peut contenir 53 personnes et il passe toutes les 17 minutes.

164 personnes attendent le bus devant Cédric.

- Dans combien de temps Cédric pourra-t-il monter dans le bus sachant qu'il vient juste d'en voir un partir ?

$164 = 53 \times 3 + 5$
Il devra donc prendre le 4e bus et attendre $17 \times 4 = 68$ min.

Exercice 58 p 28

Le collier

Louison veut réaliser un collier de perles. Elle empile les perles de la façon suivante : une perle rouge, puis quatre perles bleues, puis trois perles blanches, et ainsi de suite.

- Quelle sera la couleur de la 109^e^ perle ?

Louison alterne à chaque fois 1 rouge, 4 bleues et 3 blanches, soit 8 perles.
$109 = 8 \times 13 + 5$
La 109^e^ perle sera donc la 5^e^ perle de cette suite de 8 perles, soit une bleue.

Exercice 59 p 28

Nombres premiers entre eux Pour aller plus loin

On dit que deux nombres sont premiers entre eux s'ils n'ont que 1 comme diviseur commun.

1. Trouver tous les diviseurs de 45.
2. Trouver tous les diviseurs de 28.
3. Les nombres 45 et 28 sont-ils premiers entre eux ?
4. Peut-on trouver deux nombres pairs premiers entre eux ? Justifier.
5. Peut-on trouver deux nombres impairs premiers entre eux ? Justifier.

1) Diviseurs de 45 :
1 3 5 9 15 45.
2) Diviseurs de 28 :
1 2 4 7 14 28.
3) 45 et 28 sont premiers entre eux, car leur seul diviseur commun est 1.
4) On ne peut pas trouver deux nombres pairs premiers entre eux, car ils ont forcément 2 comme diviseur commun.
5) On peut trouver deux nombres impairs premiers entre eux :
Par exemple : 15 et 7 sont impairs.
Diviseurs de 15 : 1 3 5 15.
Diviseurs de 7 : 1 7.
Leur seul diviseur commun est 1 : ils sont premiers entre eux.

Exercice 60 p 28

Tournoi de softball

Le professeur d'EPS veut organiser un tournoi de softball avec toutes les classes de Troisième du collège. Il souhaite qu'il y ait, dans chaque équipe, le même nombre de filles, le même nombre de garçons, qu'il n'y ait aucun remplaçant et qu'une équipe soit composée de 8 à 15 joueurs.

- Sachant qu'il y a 72 filles et 108 garçons, donner toutes les compositions possibles des équipes.

Diviseurs de 72 : 1 2 3 4 6 8 9 12 18 24 36 72
Diviseurs de 108 : 1 2 3 4 6 9 12 18 27 36 54 108
Le nombre d'équipes doit être un diviseur commun à 72 et 108 :
1 2 3 4 9 12 18 et 36.
Il peut donc y avoir :
36 équipes de 2 filles et 3 garçons, soit 5 élèves par équipe.
18 équipes de 4 filles et 6 garçons, soit 10 élèves par équipe.
12 équipes de 6 filles et 9 garçons, soit 15 élèves par équipe.
9 équipes de 8 filles et 12 garçons, soit 20 élèves par équipe.
4 équipes de 18 filles et 27 garçons, soit 45 élèves par équipe.
3 équipes de 24 filles et 36 garçons, soit 60 élèves par équipe.
2 équipes de 36 filles et 54 garçons, soit 90 élèves par équipe.
1 équipe de 72 filles et 108 garçons, ce qui est impossible car il n'y a alors qu'une seule équipe.
Les équipes devant être composées de 8 à 15 élèves, il y a deux possibilités :
constituer 18 équipes de 4 filles et 6 garçons ou 12 équipes de 6 filles et 9 garçons.

Exercice 63 p 29

Les draps

M. Blanc aime l'organisation : il change les draps de sa chambre tous les 9 jours et ceux de sa fille étudiante tous les 12 jours. Aujourd'hui, il a changé ses draps et ceux de sa fille.

- Dans combien de jours au minimum changera-t-il de nouveau ses draps et ceux de sa fille le même jour ?

On cherche le plus petit multiple non nul commun à 9 et 12.
Multiples de 9 : 9 18 27 36 45 …
Multiples de 12 : 12 24 36 48 …
36 est le plus petit multiple commun de 9 et 12.
M. Blanc changera de nouveau ses draps et ceux de sa fille le même jour dans 36 jours.

Exercice 62 p 28

Tour de magie

Un magicien demande à un spectateur de choisir un nombre à trois chiffres, sans le dévoiler. Il demande ensuite de recopier ce nombre à sa suite de façon à obtenir un nombre à six chiffres.

Ce spectateur a choisi 126 puis a écrit 126 126.

Le magicien demande maintenant de diviser ce nombre à six chiffres par 7, puis de diviser le nombre obtenu par 11 et enfin de diviser le nombre obtenu par 13.
Le magicien tout fier de lui annonce :

• Comment expliquer ce tour de magie ?

À partir de l'exemple :

$$\begin{aligned} 126\,126 &= 126 \times 1\,000 + 126 \\ &= 126 \times (1\,000 + 1) \\ &= 126 \times 1\,001 \end{aligned}$$

Or $1\,001 = 7 \times 11 \times 13$.

Démonstration :

Soit N le nombre choisi à 3 chiffres qui s'écrit sous la forme abc (a étant le chiffre des centaines, b le chiffre des dizaines et c le chiffre des unités).
On a donc $N = 100a + 10b + c$.
Le nombre N', formé de 6 chiffres, s'écrit sous la forme abc abc,
soit $N' = 100\,000a + 10\,000b + 1\,000c + 100a + 10b + c$.
Le magicien demande de diviser ce nombre par 7, puis par 13, puis par 11.
Il demande donc de diviser par $7 \times 13 \times 11 = 1\,001$.
Or si on multiplie N par 1 001, on obtient :
$N \times 1\,001 = (100a + 10b + c) \times (1\,000 + 1)$
$N \times 1\,001 = 100\,000a + 10\,000b + 1\,000c + 100a + 10b + c$, c'est-à-dire le nombre N'.
Lorsque le magicien demande de diviser le nombre N' à 6 chiffres, il est sûr de retrouver le nombre N à 3 chiffres initialement choisi.

Exercice 66 p 29

Carte bancaire

Le numéro figurant sur une carte bancaire est composé de 4 groupes de 4 chiffres. Le dernier chiffre, appelé clé de Luhn, permet de vérifier la validité de la carte.
La clé de Luhn s'obtient de la façon suivante : on prend les 15 premiers chiffres de la carte et on double tous les chiffres de rang impair (le 1^{er}, le 3^{e}, le 5^{e}…). Si le double est supérieur ou égal à 10, on fait la somme des deux chiffres obtenus. On ne modifie pas les chiffres de rang pair. On ajoute les 15 nouveaux chiffres obtenus, puis on effectue la division euclidienne de ce nombre par 10. La clé de Luhn s'obtient en retranchant le reste de cette division à 10.

La carte ci-dessus est-elle valide ?

Le 1er chiffre est 4 : on calcule son double : 8.
Le 2e chiffre est conservé : 5.
Le 3e chiffre est 2 : on calcule son double : 4.
Le 4e chiffre est conservé : 0.
Le 5e chiffre est 3 : on calcule son double : 6.
Le 6e chiffre est conservé : 3.
Le 7e chiffre est 7 : on calcule son double : 14, puis on le remplace par 1 + 4 = 5.
Le 8e chiffre est conservé : 3.
Le 9e chiffre est 4 : on calcule son double : 8.
Le 10e chiffre est conservé : 3.
Le 11e chiffre est 1 : on calcule son double : 2.
Le 12e chiffre est conservé : 0.
Le 13e chiffre est 5 : on calcule son double : 10, puis on le remplace par 1 + 0 = 1.
Le 14e chiffre est conservé : 5.
Le 15e chiffre est 0 : on calcule son double : 0.
On ajoute ces 15 chiffres obtenus :
$8 + 5 + 4 + 0 + 6 + 3 + 5 + 3 + 8 + 3 + 2 + 0 + 1 + 5 + 0 = 53$
On effectue la division euclidienne de 53 par 10 : $53 = 10 \times 5 + 3$
Le reste est 3, on retranche ce reste à 10 : $10 - 3 = 7$.
La clé de Luhn est 7. Or, ici, sur cette carte, le 16^{e} chiffre est 4.
Cette carte n'est donc pas valide.