Sintaxis y Semántica de los lenguajes

Autómatas de pila

2021

Facultad Regional Delta,
Universidad Tecnológica Nacional

Prof. Juan Miguel Santos

Autómata de pila

Un autómata de pila es definido mediante

$$M = < K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z_0, F >$$

donde

K es el conjunto de estados,
Σ es un alfabeto finito de entrada,
Γ es un alfabeto finito de la pila,
q_0 es el estado inicial, $q_0 \in K$,
z_0 es la configuración inicial de la pila, $z_0 \in \Gamma$,
F es el conjunto de estados finales, $F \subseteq K$, y
δ es la función de transición definida por

$$\delta: K \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma \rightarrow P(K \times \Gamma^*)$$

La configuración instantánea del autómata de pila está definida en

$$K \times \Sigma^* \times \Gamma^*$$

y representada por (q, α, τ) donde q es el estado actual, α es la cadena que aún falta consumir y τ es el contenido de la pila.

Cambio de configuración

$$(q, a\alpha, tp) \models (r, \alpha, \zeta p) \quad \text{si } (r, \zeta) \in \delta(q, a, t)$$

$$(q, \alpha, tp) \models (r, \alpha, \zeta p) \quad \text{si } (r, \zeta) \in \delta(q, \lambda, t)$$

donde $\alpha \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$, $t \in \Gamma$, $p \in \Gamma^*$ y $r,q \in K$.

Nota: En cada transición sólo es posible consultar el tope de la pila (cada vez que se consulta se le extrae el elemento). En cada transición puede no agregarse ningún elemento a la pila o agregarse uno o más elementos.

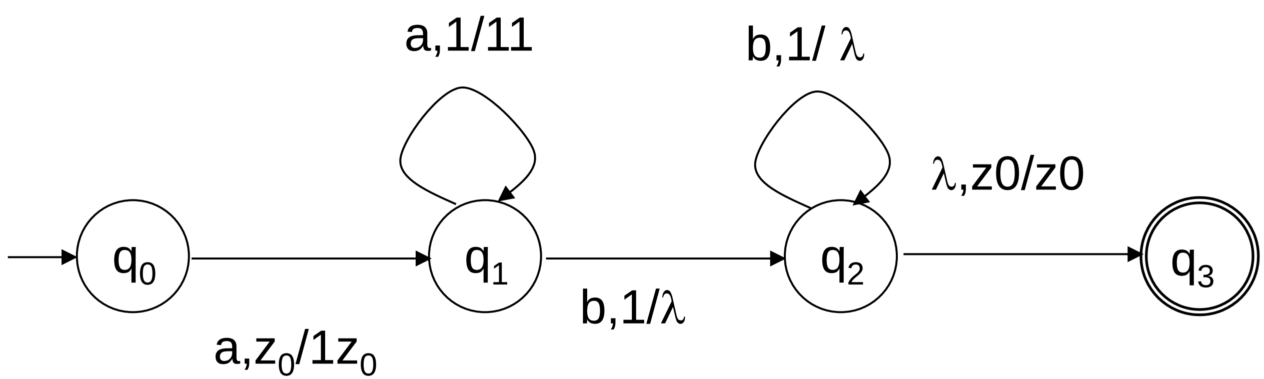
Lenguaje reconocido por un autómata de pila que termina por estado final.

Sea el AP M, se define L(M) como

$$L(M) = \{ \alpha \in \Sigma^* \ / \ (q_0, \alpha, z_0) \models^* (r, \lambda, p) \wedge r \in F \}, \ p \in \Gamma^*$$

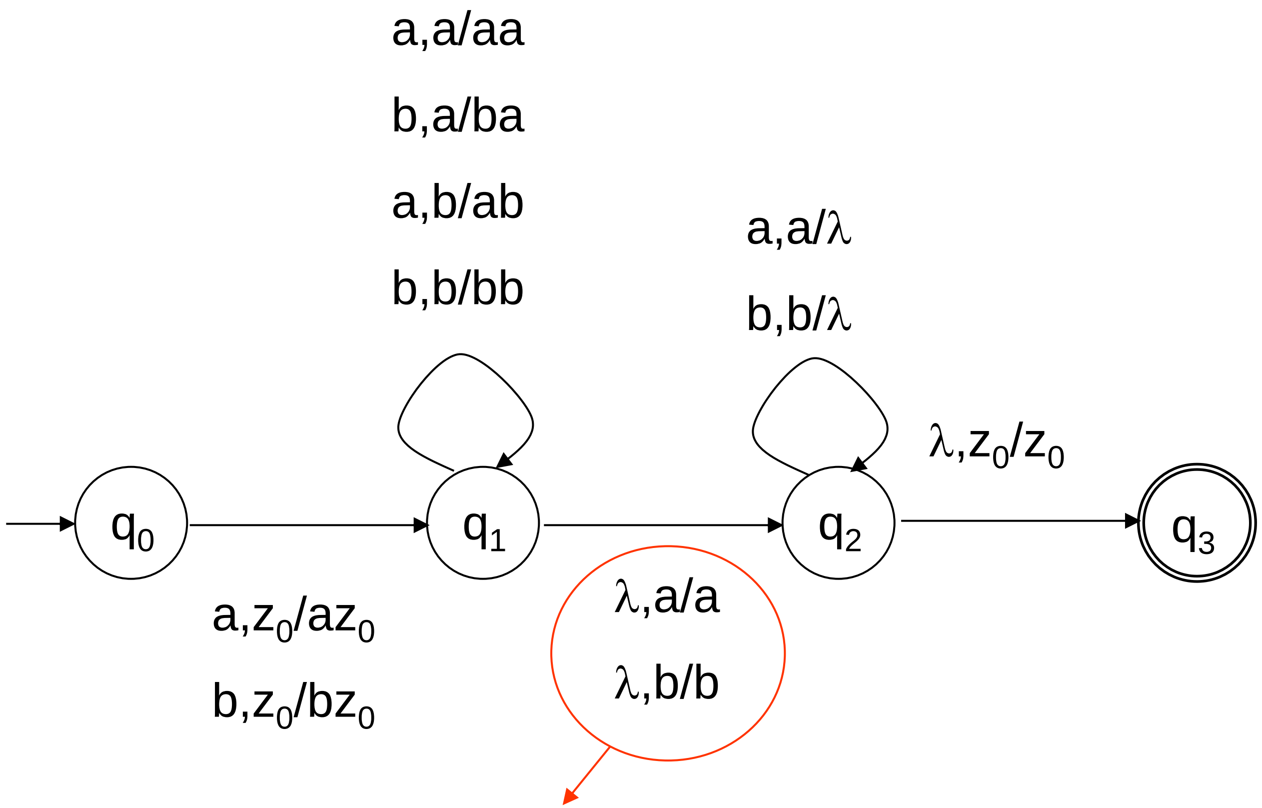
Ejemplo:

Sea L = { $a^n b^n$ / $n \geq 1$ }, definir el AP M / L(M) = L.



Ejemplo:

Sea L = $\{\alpha\alpha^r / \alpha \in \Sigma^*\}$, definir el AP M / L(M) = L.



Esta transición puede ser realizada en cualquier momento y por lo tanto puede ser necesario retroceso (*backtraking*). El autómata no es determinístico.

Lenguaje reconocido por un autómata de pila que termina por pila vacía.

Sea el AP M, se define L(M) como

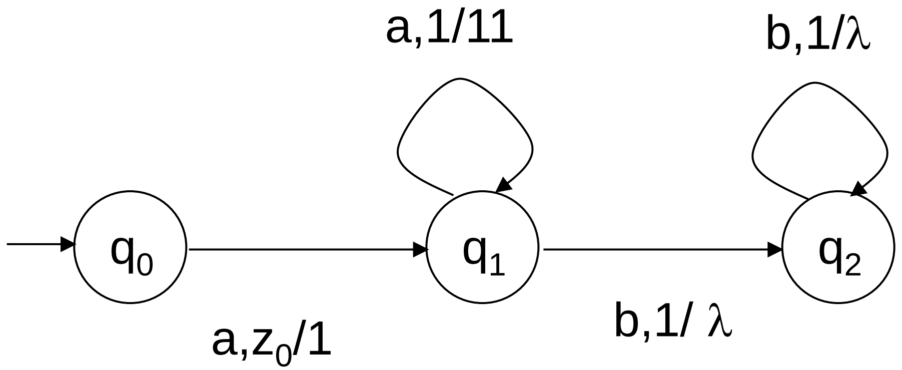
$$L(M_\lambda) = \{ \alpha \in \Sigma^* \,/\, (q_0, \alpha, z_0) \vdash\!\!=\!\!=^* (r, \lambda, \lambda) \}$$

Es decir, no importa el tipo de estado en que este el autómata cuando se haya agotado la cadena sino que la pila este vacía.

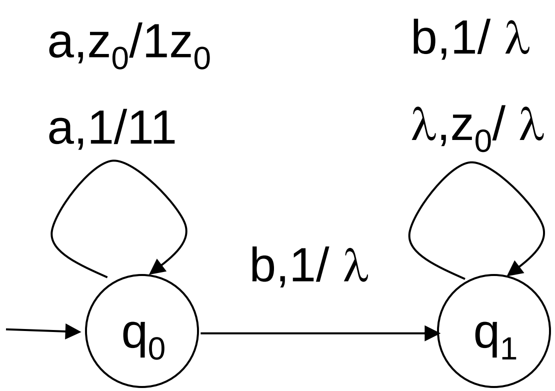
Nota: recordar que cuando la pila está vacía el AP no puede realizar ninguna transición más.

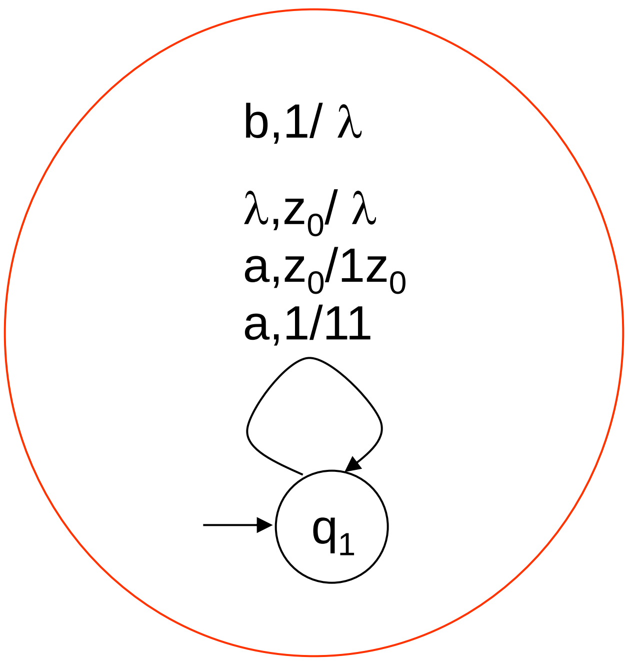
Ejemplo:

Sea L = { $a^n b^n$ / $n \geq 1$ }, definir el AP M / $L(M_\lambda) = L$.



¿Acepta sólo a L?





Pasaje de un AP M de aceptación por estado final a un AP M' de aceptación por pila vacía.

Sea $M = < K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z_0, F >$ definimos

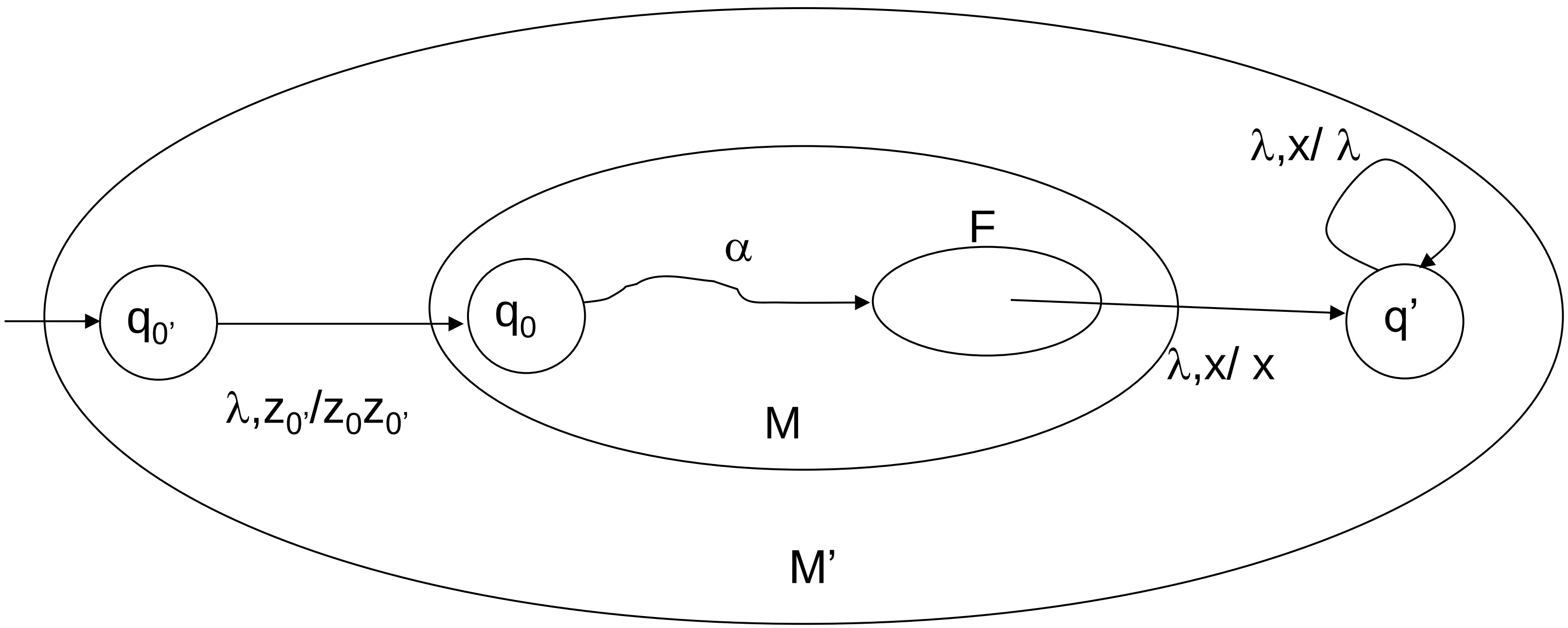
$$M' = < K', \Sigma, \Gamma', \delta', q_{0'}, z_{0'}, F' >$$

donde $K' = K \cup \{q_{0'}\} \cup \{q'\}$, $\quad q_{0'}, q' \notin K$,

$\Gamma' = \Gamma \cup \{z_{0'}\}$,

$$\delta'(q, a, t) = \begin{cases} \delta(q, a, t) & \text{si } q \in K \\ \{(q_0, z_0 z_{0'})\} & \text{si } q = q_{0'} \wedge a = \lambda \wedge t = z_{0'} \\ \{(q', t)\} & \text{si } q \in F \wedge a = \lambda \\ \{(q', \lambda)\} & \text{si } q = q' \wedge a = \lambda \end{cases}$$

Ejercicio: demostrar que $L(M) = L(M')$.


λ,x/ λ
α
F
$q_{0'}$
q_0
q'
λ,x/ x
$\lambda, z_{0'}/z_0 z_{0'}$
M
M'

Pasaje de un AP M' de aceptación por pila vacía a un AP M de aceptación por estado final.

Sea $M' = < K', \Sigma, \Gamma', \delta', q_{0'}, z_{0'}, F' >$ definimos

$$M = < K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z_0, F >$$

donde $K = K' \cup \{q_0\} \cup \{f\}$,

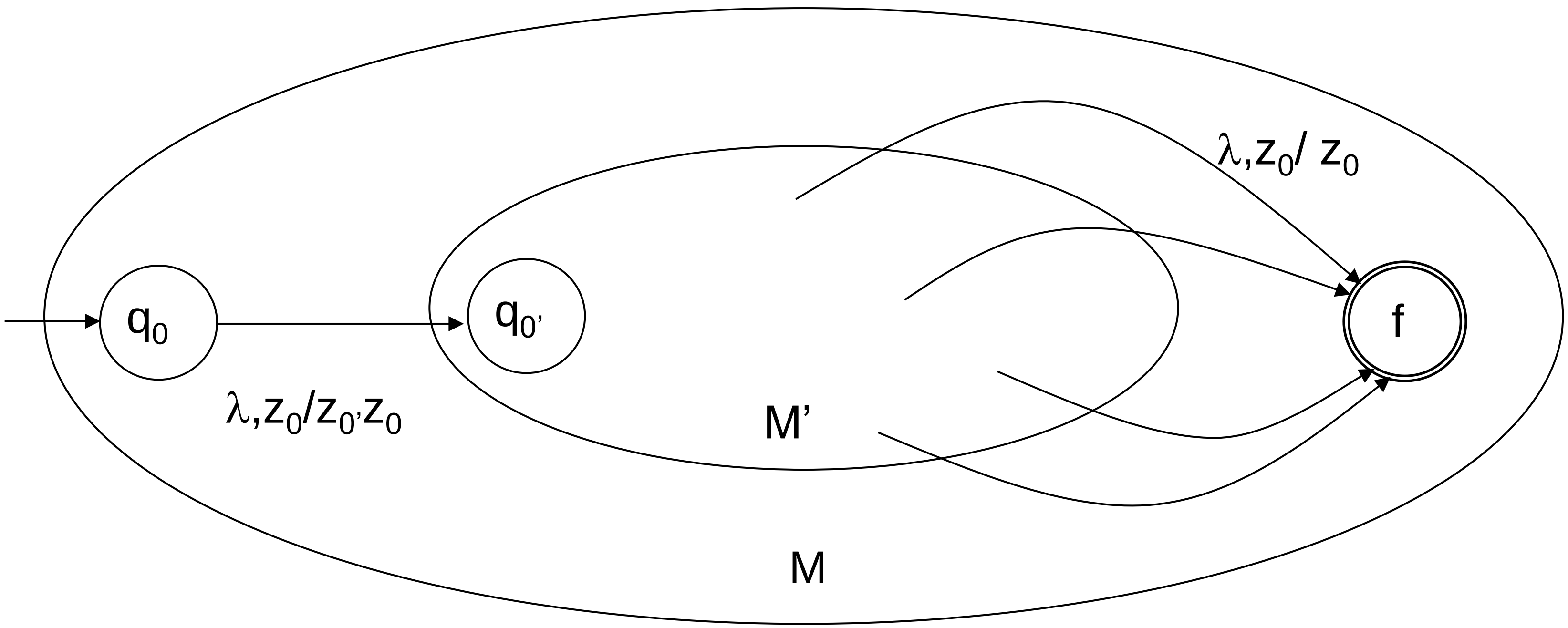
$\Gamma = \Gamma' \cup \{z_0\}$,

$\{q_0, f\} \cap K = \phi$,

$F = \{f\}$, y

$$\delta(q, a, t) = \begin{cases} \delta'(q, a, t) & \text{si } q \in K' \wedge t \neq z_0 \\ \{(q_{0'}, z_{0'} z_0)\} & \text{si } q = q_0 \wedge a = \lambda \wedge t = z_0 \\ \{(f, z_0)\} & \text{si } q \in K' \wedge a = \lambda \wedge t = z_0 \end{cases}$$

Ejercicio: demostrar que L(M') = L(M).



q0
q0'
f
λ,z0/z0'z0
λ,z0/ z0
M'
M

Pasaje de una GLC a un AP que acepta por pila vacía.

Sea $G = < V_N, V_T, P, S >$ una GLC / $L = L(G)$, definimos AP M que acepta por pila vacía / $L(M) = L$ de la siguiente forma

$$M = < K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z_0, F >$$

donde

$F = \phi$,

$\Sigma = V_T$,

$\Gamma = V_N \cup V_T$,

$K = \{q_0\}$,

$$\delta(q_0, a, t) = \begin{cases} \{(q_0, \alpha)\} \;/\; (t \to \alpha) \in P, & \text{si } t \in V_N \wedge a = \lambda \\ \{(q_0, \lambda)\} & \text{si } t \in V_T \wedge a = t \end{cases}$$

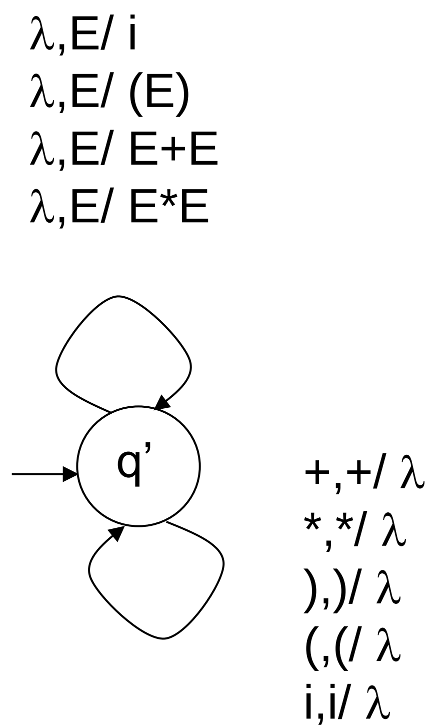
$z_0 = S$.

Ejemplo:

Dado $P = \{E \rightarrow E + E \,/\, E * E \,/\, (E) \,/\, i\}$ en

$$G = < \{E\}, \{*, +, (,), i\}, P, E >,$$

obtener el AP que reconozca a L(G).



Autómata de pila determinístico (APD).

Sea AP $M = \langle K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z_0, F \rangle$, M es determinístico si

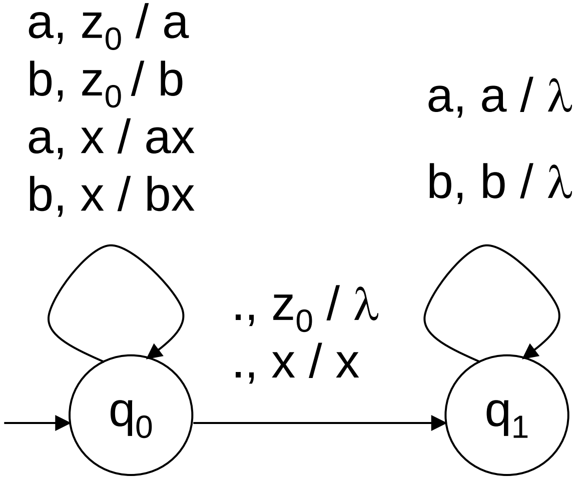
i) $|\delta(q, a, A)| \leq 1$,

ii) $|\delta(q, \lambda, A)| \leq 1$,

iii) Si $|\delta(q, \lambda, A)| = 1 \Rightarrow |\delta(q, a, A)| = 0$.

Ejemplo:

Construir un APD / $L(M) = \{ \alpha.\alpha^r / \alpha \in (\Sigma - \{.\})^* \}$ con $\Sigma = \{ a, b, . \}$



donde x = a / b.

Propiedades de los LLC.

Sean los LLC L_1 y L_2, entonces:

1. L_1 U L_2 es LLC

Demostración:
Como L_1 y L_2 son LLC existen G_1 y G_2 / $L(G_1) = L_1$ y $L(G_2) = L_2$.

Supongamos además que, sean V_{N_1}, V_{N_2} los conjuntos de símbolos no terminales de G_1 y G_2 respectivamente, $V_{N_1} \cap V_{N_2} = \phi$.

Luego, la gramática que genera L_1 U L_2 es

$$G = < V_{N_1} \cup V_{N_2} \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{ S \rightarrow S_1, S \rightarrow S_2 \}, S >,$$

esto es $(L_1 \cup L_2) \subseteq L(G)$, $L(G) \subseteq (L_1 \cup L_2)$.

Ejercicio: demostrar.

2. $L_1 \cap L_2$ no siempre es LLC.

Demostración:

Sea $L_1 = \{ a^n b^m c^l \ / \ m,n,l \geq 1 \wedge n = m \}$ y

$L_2 = \{ a^n b^m c^l \ / \ m,n,l \geq 1 \wedge n = l \}$.

La intersección de L1 con L2 es $a^n b^n c^n$ que no es un LLC (se puede ver usando el lema de bombeo).

3. El complemento de L_1 o el complemento de L_2 no siempre es LLC.

Demostración:

Si lo fueran, entonces $(\neg L_1 \cup \neg L_2)$ también sería LLC y entonces $\neg(L_1 \cap L_2)$ también sería LLC y finalmente, $L_1 \cap L_2$ también lo cual es falso (pues no siempre ocurre).

Teorema:

Dado un APD M que acepta por pila vacía, $\exists$ GLC G / L(G) = L(M).

Demostración:

Sea M = < K, Σ, Γ, δ, q_0, z_0, F > construiremos G = < V_N, V_T, P, S > de la siguiente forma:

V_N = { [t] / t $\in$ (K x Γ x K) } U {S}

V_T = Σ,

y P se puede obtener de acuerdo a (continua en la siguiente hoja…)

y P se puede obtener de acuerdo a (viene de la hoja anterior)

$P \leftarrow \phi$

Para cada $q \in K$

Agregar en P $S \rightarrow [q_0\ z_0\ q]$

Para cada $q, q_1, q_2, .., q_{m+1}$ en K,

Para cada $a \in \Sigma \cup \{\lambda\}$

Para cada $A, B_1, B_2, ..., B_m$ en Γ

$$[q\ A\ p] \rightarrow a\ [q_1\ B_1\ q_2]\ [q_2\ B_2\ q_3]\ .\ .\ .\ [q_m\ B_m\ q_{m+1}]$$

donde $p = q_{m+1}$, y $(q_1, B_1B_2...B_m) \in \delta(q, a, A)$.

Además, $[q\ A\ p] \rightarrow a$ si $(p, \lambda) \in \delta(q, a, A)$.

Si tengo $(q_1, B_1B_2...B_m) \in \delta(q, a, A)$ entonces armo

$$[q\ A\ p] \to a\ [q_1\ B_1\ q_2]\ [q_2\ B_2\ q_3]\ .\ .\ .\ [q_m\ B_m\ q_{m+1}]$$

Lema.

$[p\ A\ q] \xrightarrow{+} x$ si y sólo si $(p, x, A) \models^{*} (q, \lambda, \lambda)$

Demostración (por inducción en i para

$[p\ A\ q] \xrightarrow{+} x$ si y sólo si $(p, x, A) \models^{i} (q, \lambda, \lambda)$)

a) $(p,x,A) \models^{i} (q, \lambda, \lambda) \Rightarrow [pAq] \xrightarrow{+} x$

<u>Caso base</u> (i = 1)

Si i = 1 entonces x = a, $a \in \Sigma$ y tenemosa

$(p, a, A) \models (q, \lambda, \lambda) \Rightarrow (q, \lambda) \in \delta(p, a, A)$

Y por construcción, si $(q, \lambda) \in \delta(p, a, A)$ entonces $\exists$ $[p\ A\ q] \rightarrow a$.

Paso inductivo:

Supongamos que $\forall$ i $\leq$ n la HI es cierta, esto es,

$$(p, x, A) \vdash^{i} (q, \lambda, \lambda) \Rightarrow [p\,A\,q] \xrightarrow{+} x.$$

Queremos ver que se cumpla para i = n+1, es decir,

$$(p, x, A) \vdash^{n+1} (q, \lambda, \lambda) \text{ que es lo mismo que}$$

$$(p, ay, A) \overset{1}{\vdash} (q1, y, B_1..B_m) \overset{2}{\vdash^{n}} (q, \lambda, \lambda)$$

donde $(q1, B_1..B_m) \in \delta(p, a, A)$.

Pero, a partir de 1 podemos escribir:

$$(p, a, A) \vdash (q1, \lambda, B_1..B_m).$$

En 2 la secuencia de cambios de configuraciones lleva a que se consuma la pila.

Si el autómata usa **y** para vaciar la pila, se puede ver que para sacar el primer símbolo B_1, consumirá algún prefijo de **y**.

Sea **y** = $y_1\ y_2 \ldots y_m$, entonces

$$(q_1, y_1\ y_2 \ldots y_m, B_1..B_m) \vdash^{+} (q_2, y_2 \ldots y_m, B_2..B_m) \vdash^{+} .. \ldots \vdash^{+} (q_m, y_m, B_m) \vdash^{+} (q, \lambda, \lambda).$$

Esto es, habrá subcadenas de **y** que notaremos $y_1, y_2, \ldots, y_m$ que serán las responsables de eliminar de la pila a $B_1, B_2, ..., B_m$ respectivamente.

Fijarse que de $(q_1, y_1\ y_2 \ldots y_m, B_1..B_m) \vdash^{+} (q_2, y_2 \ldots y_m, B_2..B_m) \ldots$

Luego, podemos escribir $(q_1, y_1, B_1) \vdash^{+} (q_2, \lambda, \lambda)$, en general,

$$(q_j, y_j, B_j) \vdash^{+} (q_{j+1}, \lambda, \lambda), \text{ para } j = 1 .. m -1$$

y $\quad (q_m, y_m, B_m) \vdash^{+} (q, \lambda, \lambda)$, para j = m.

Luego, por HI,

$$[q_j\ B_j\ q_{j+1}] \xrightarrow{+} y_j \text{ para } j = 1 .. m - 1 \text{ y}$$

$$[q_m\ B_m\ q] \xrightarrow{+} y_m \text{ para } j = m.$$

Por construcción,

$$[p\ A\ q] \vdash^{+} a\ [q1\ B_1\ q_2]\ [q_2\ B_2\ q_3] \ldots [q_n\ B_m\ q] \text{ luego}$$

$$[p\ A\ q] \xrightarrow{+} a\ y_1\ y_2 .. y_m = ay = x.$$

b) $[pAq] \xrightarrow{+} x \Rightarrow (p, x, A) \models^{+} (q, \lambda, \lambda)$

No la incluyo en este curso pero se llega en forma similar que para a).

Demostración (del Teorema).

Si $x \in L(M) \Rightarrow (q_0, x, z_0) \models^{+} (q, \lambda, \lambda)$ y por el lema previo

$$[q_0\ z_0\ q] \xrightarrow{+} x.$$

Por construcción de G, sabemos que

$$S \rightarrow [q_0\ z_0\ q] \text{ es una producción en G, luego}$$

$$S \rightarrow [q_0\ z_0\ q] \xrightarrow{+} x,$$

y por lo tanto, $x \in L(G)$.

La demostración de "Si $x \in L(G) \Rightarrow x \in L(M)$" no será incluído en este curso.