Sintaxis y Semántica de los lenguajes

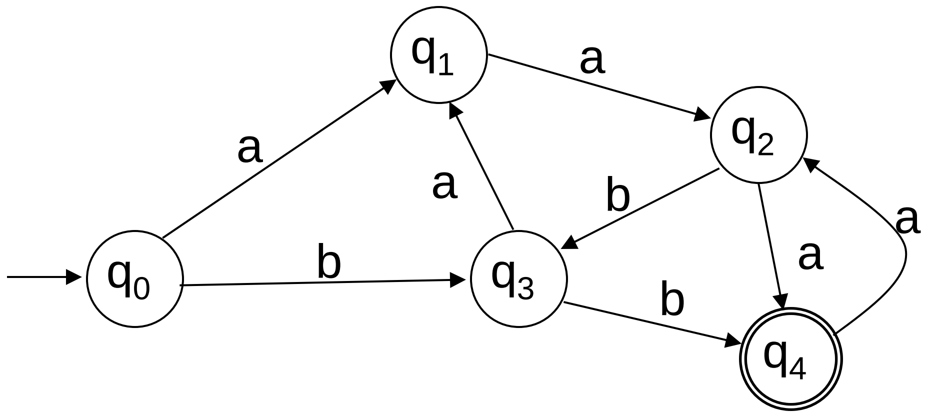
Lema del bombeo

2021

Facultad Regional Delta,
Universidad Tecnológica Nacional

Prof. Juan Miguel Santos

Lema del bombeo.



Sea α= baabbabb.

El cardinal de K es 5 y la longitud de α es 8.

La secuencia de estados para que α sea aceptada es

q_0 q_3 q_1 q_2 q_3 q_4 q_2 q_3 q_4

¿Y τ = bbabb es aceptada?
¿Y τ = baabaabbabb? b **aab aab** babb
¿Y τ = baabaabaabbabb? b **aab aab aab** babb

Lema:

Dado un AFD $M = < K, \Sigma, \delta, q_0, F >$ entonces

$(q, \alpha) \vdash^* (q, \lambda) \Rightarrow \forall\, i \geq 0, (q, \alpha^i) \vdash^* (q, \lambda)$

Demostración (por inducción en i):

Caso base: (i = 0)

$$(q, \alpha^0) = (q, \lambda) \vdash^0 (q, \lambda)$$

Paso inductivo: (asumimos la HI verdadera para i = k)

$$(q, \alpha^{k+1}) = (q, \alpha\alpha^k) \vdash^* (q, \alpha^k) \vdash^* (q, \lambda)$$

$(q, \alpha\alpha^k) \vdash^* (q, \alpha^k)$ es verdadero por hipótesis y

$(q, \alpha^k) \vdash^* (q, \lambda)$ es verdadero por HI. Luego $(q, \alpha^{k+1}) \vdash^* (q, \lambda)$

.

Lema de bombeo:

Dado Σ un alfabeto, se cumple que

$\forall L$, lenguaje regular sobre Σ, y M = < K, Σ, δ, q_0, F > tal que L(M) = L,

$\exists\, p > n,\ n = |K|\ /\ \forall \alpha \in L,\ |\alpha| \geq p\ (\exists\, x,y,z \in \Sigma^*\ /\ \alpha = xyz \wedge |xy| \leq p \wedge |y| \geq 1$

$(\forall i \geq 0,\ xy^iz \in L))$

ó

$(\forall L)(\exists\, p)(\forall \alpha)(\alpha \in L \wedge |\alpha| \geq p \Rightarrow (\exists\, x,y,z \in \Sigma^*)(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq p \wedge |y| \geq 1 \wedge (\forall i \geq 0)(xy^iz \in L))).$

Demostración:

Consideremos una cadena $\alpha \in L\ /\ |\alpha| \geq n$,

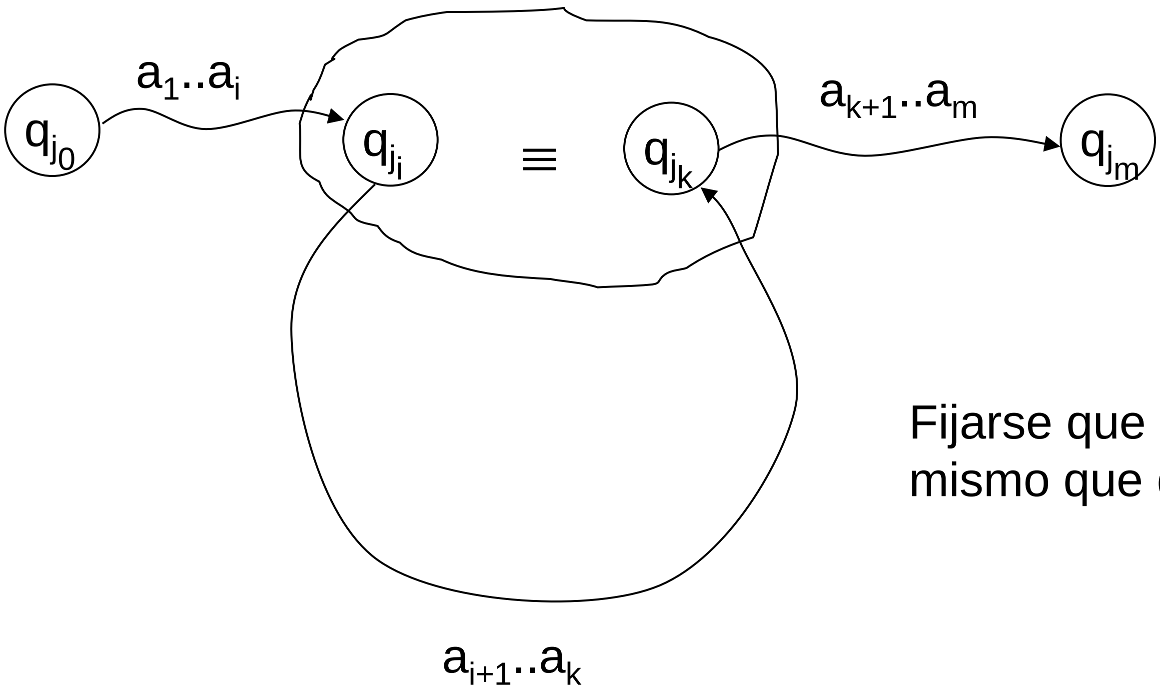
$\alpha = a_1a_2a_3\ldots a_m,\ m \geq n.$

Podemos escribir

$(q_{j_0}, a_1a_2a_3..a_m) \vdash\!\!= (q_{j_1}, a_2a_3..a_m) \vdash\!\!= (q_{j_2}, a_3..a_m) \vdash\!\!= \cdots (q_{j_{m-1}}, a_m) \vdash\!\!= (q_{j_m}, \lambda)$

donde los j_i están entre 0 y n.

Pero como hay sólo n estados y m > n quiere decir que mientras se consume la cadena se pasa por uno o más estados más de una vez, es decir, hay un ciclo.



Fijarse que q_{j_i} es el mismo que q_{j_k}.

Veamos que si p es m, podemos definir

$x = a_1..a_i$

$y = a_{i+1}..a_k$, $i \neq k$, $|y| \geq 1$

$z = a_{k+1} .. a_m$

donde α = xyz.

Podemos notar

$$(q_{j_0}, xyz) \vdash^* (q, yz) \vdash^* (q, z) \vdash^* (q_{j_m}, \lambda)$$

con $q_{j_i}=q_{j_k}=q$ y $q_{j_m} \in F$.

Pero $(q, yz) \vdash^* (q, z)$ es equivalente a decir que $(q, y) \vdash^* (q, \lambda)$.

Luego, por el lema anterior si el autómata puede consumir y desde q a q, entonces podrá consumir y^i, $i \geq 0$ desde q a q

$$(q_{j_0}, xy^iz) \vdash^* (q, y^iz) \vdash^* (q, z) \vdash^* (q_{j_m}, \lambda)$$

O lo que es lo mismo

$$(q_{j_0}, xy^i z) \vdash\!\!\!-\!\!\!-^{*} (q_{j_m}, \lambda),\ q_{j_m} \in F$$

y por lo tanto $xy^i z \in L(M)$.

¿Cómo usar el lema del bombeo?

El lema del bombeo se usa, en general, para demostrar que un lenguaje no es regular.

Esto es, si fuera regular tiene que ser cierto el lema del bombeo, luego

si vemos que no se cumple entonces resulta que el lenguaje no era regular.

Para ver que no se cumple tenemos que verificar que la negación del lema es verdadera.

Esto es,
<u>existe</u> una <u>cadena</u> de longitud mayor que p talque <u>para toda</u> posible <u>descomposición</u> xyz, <u>no hay manera de bombear a y</u> de modo que la cadena resultante este en el lenguaje.

Ejemplo:

Consideremos el lenguaje $L = \{ a^n b^n / n \geq 1 \}$.

Queremos ver que no es regular y lo haremos por el absurdo.

Supongamos que L es regular, luego debe cumplirse el lema del bombeo.

Primero escribamos la cadena $\alpha = a^p b^p$ (donde se satisface que $2p > p$ ya que p es mayor que 0) en términos de xyz, donde p es el número del lema del bombeo, esto es:

$x = a^r$,

$y = a^s$,

$z = a^t b^p$,

con r,s,t pertenecientes a los naturales, $r+s+t = p$, $s > 0$,

y consideremos $I = 0$, así $xy^iz = xz = a^r a^t b^p$.

Nosotros sabemos que $xyz \in L$, pero ¿qué pasa con xy^iz?

¿Cuántas a_s y b_s tiene xy^iz?

Si $i = 0$, xy^iz tiene $r+t$ a_s y p b_s. Pero como $s > 0$, $r+t < p$ y habrá más b_s que a_s. Luego $xy^iz \notin L$. Absurdo que surge de suponer que L era regular.

Ejemplo:

Sea $L = \{a^m \,/\, m$ es primo $\}$

Supongamos L es regular, luego cumple el lema del bombeo.

Sea $\alpha = a^m$, m primo / $m > p+1$ y p es el número del lema del bombeo.

Podemos expresar $\alpha = a^{lx}a^{ly}a^{lz}$ así que $a^{lx}(a^{ly})^i a^{lz}$ debe pertenecer a L.

Consideremos que $i = lx + lz$, y entonces la longitud de $a^{lx}(a^{ly})^i a^{lz}$ será

$lx + (lx+lz)ly + lz = (lx+lz)(1+ly)$.

Por como definimos m sabemos que

$$lx+ly+lz > p+1 \Rightarrow lx+ly > p+1 - lz,$$

y como además $lx + ly \leq p$ queda

$$p+1 - lz < lx+ly \leq p$$

$$lz > 1$$

Por lo tanto $(lx+lz)(1+ly)$ no puede ser primo ya $(1+ly) > 1$ pues $ly \geq 1$ y $(lx+lz) > 1$.