Sintaxis y Semántica de los lenguajes

Equivalencias entre Autómatas Finitos

(2021)

Facultad Regional Delta,
Universidad Tecnológica Nacional

Prof. Juan Miguel Santos

Equivalencias entre Autómatas Finitos

- Pasaje de un AFD a AFND
- Pasaje de un AFND a AFND-lambda
- Pasaje de AFND-lambda a AFD (T)
  - Clausura de un conjunto de estados. Algortimo.
  - Transición entre conjuntos de estados. Algoritmo.
- Minimización de un AFD.
  - Eliminación de estados inaccesibles.
  - Estados indistinguibles
    - Propiedades de la indistinguibilidad
  - Indistinguibilidad de orden k
    - Propiedades de la indistinguibilidad de orden k
  - Algoritmo de construcción del conjunto cociente.
  - Caracter minimal del AFD de estados mínimos (T)

Pasaje de AFD a AFND

Sea un AFD $M = < K, \Sigma, \delta, q_0, F >$, luego $\exists$ AFND $M' / L(M) = L(M')$
donde $M' = < K, \Sigma, \delta', q_0, F >$ y

$\delta': K \times \Sigma \rightarrow P(K)$, $\delta'(q, a) = \{\delta (q, a)\}$.

Pasaje de AFND a AFND-λ

Sea un AFND $M = < K, \Sigma, \delta, q_0, F >$, luego $\exists$ AFND-λ M' /

$L(M) = L(M')$

donde $M' = < K, \Sigma, \delta', q_0, F >$ y

$\delta': K \times \Sigma \cup \{\lambda\} \rightarrow P(K)$, $\delta'(q, a) = \delta(q, a) \wedge \delta'(q, \lambda) = \{q\}$.

Pasaje de AFND-λ a AFD

Clausura-λ:

Sea M un AFND-λ, con K conjunto de estados, se define Clausura-λ(q), q $\in$ K como

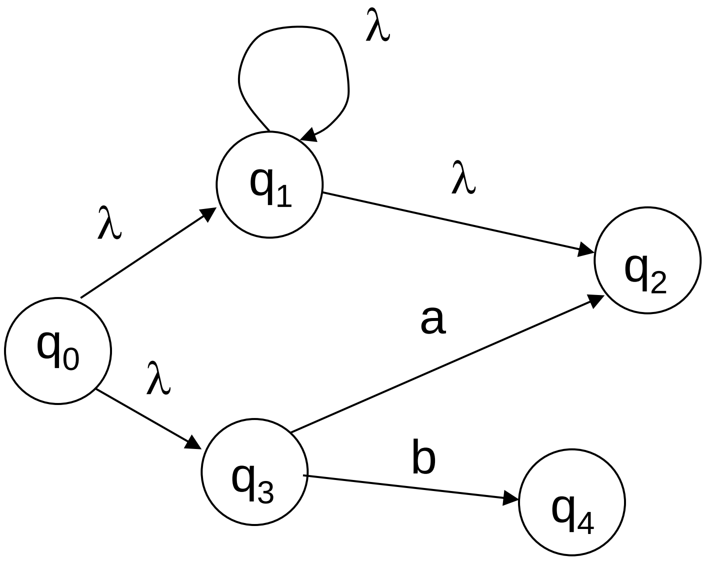
$$\text{Clausura-}\ \lambda(q) = \{\ q' \in K \ /\ (q, \lambda) \models^{*} (q', \lambda)\}$$

Esto es, en la clausura de un estado q están todos los estados a los cuales es posible llegar desde q usando transiciones λ.

La Clausura-λ de un estado está definida en

$$\text{Clausura-}\lambda\text{: } K \rightarrow P(K).$$

Ejemplo:



Clausura-$\lambda(q_0) = \{ q_0, q_1, q_2, q_3 \}$

Clausura-λ de un conjunto de estados:

Sea M un AFND-λ con K conjunto de estados, se define Clausura-λ de $Q \subseteq K$ como

$$\text{Clausura-}\lambda(Q) = \{ q' \in K \ / \ \exists\, q \in Q \wedge (q, \lambda) \vDash\!\!=^{*} (q', \lambda) \}.$$

La Clausura-λ de un conjunto de estados está definida en

$$\text{Clausura-}\lambda : P(K) \rightarrow P(K).$$

Clausura-λ: algoritmo para construir la Clausura-λ de un conjunto de estados Q.

Clausura-λ : $P(K) \rightarrow P(K)$

Entrada: $Q \subseteq K$

$M = < K, \Sigma, \delta, q_0, F >$ un AFND-λ

1. Hacer $L \leftarrow Q$ cuyos elementos son marcables pero ninguno está marcado

2. Mientras en L haya elementos t sin marcar

Marcar t

Para cada $q \in \delta(t, \lambda)$

si $q \notin L$ agregar q en L sin marcar

3. Retornar L

Mover: algoritmo para pasar de un conjunto de estados T a otro conjunto de estados L mediante un símbolo de Σ.

Mover: $P(K) \times \Sigma \to P(K)$

Entrada: $T \subseteq K$,

$a \in \Sigma$

Sea $M = < K, \Sigma, \delta, q_0, F >$ un AFND-λ

1. Hacer $L \leftarrow$ Clausura-$\lambda(\{ x \in \delta(t, a) / t \in T \})$
2. Retornar L

Teorema:

Dado M = < K, Σ, δ, q_0, F > un AFND-λ, $\exists$ M' = < K', Σ, δ', Q_0, F' > un AFD tal que L(M') = L(M).

Demostración:

La nueva función de transición δ' para M' estará definida en

$$\delta': K' \times \Sigma \rightarrow K'$$

de acuerdo a

$$\delta'(Q, a) = \{ p \mid (q, a) \vdash^* (p, \lambda), q \in Q \}$$

donde Q $\in$ K'.

Sea el siguiente algoritmo

Comenzar

1. Hacer Q_0 = Clausura-λ($\{q_0\}$)
2. Hacer K' = $\{Q_0\}$ donde K' es marcable y Q_0 está sin marcar
3. Mientras haya $T \in K'$ sin marcar

    Marcar T

    Para cada $a \in \Sigma$

        Hacer $U \leftarrow$ Mover(T, a)

        si $U \notin K'$

            agregar U a K' sin marcar

        $\delta'(T, a) \leftarrow U$

4. Hacer $F' \leftarrow \{ x \in K' / x \cap F \neq \phi \}$

Necesitamos ver que L(M) = L(M').

Una forma de ver esto es verificando que

i) L(M) $\subseteq$ L(M')

ii) L(M') $\subseteq$ L(M)

Antes de continuar con la demostración veremos los siguientes lemas.

Lema 1:

Sean M y M' los AFND-λ y AFD presentados en el teorema,

$$\text{si } (q_0, \alpha) \vdash^* (r, \lambda) \Rightarrow \exists Q \in K' \,/\, r \in Q \wedge (Q_0, \alpha) \vdash^* (Q, \lambda)$$

Demostración (del Lema 1):

Lo haremos por inducción en la longitud de α.

<u>Caso base</u> ($\alpha = \lambda$)

$(q_0, \lambda) \vdash\!\!\!—^* (r, \lambda) \Rightarrow r \in$ Clausura- $\lambda(q_0) \Rightarrow r \in Q_0$.

Como M' es AFD, podemos escribir que $(Q_0, \lambda) \vdash\!\!\!—^* (Q_0, \lambda)$

donde $Q_0 \in K' \wedge r \in Q_0$.

<u>Paso inductivo</u> ($\alpha = \alpha'a$)

En el AFND-λ sucede que $(q_0, \alpha'a) \vdash\!\!\!—^* (r, \lambda)$,

o equivalentemente $(q_0, \alpha'a) \vdash\!\!\!—^* (q, a) \vdash\!\!\!—^* (r, \lambda)$.

Pero por HI esto implica que

$$(Q_0, \alpha') \vdash\!\!\!—^* (Q', \lambda) \wedge q' \in Q',\ Q' \in K'.$$

Luego $(Q_0, \alpha' a) \vdash\!\!\!=\!=^* (Q', a) \vdash\!\!\!=\!= (Q, \lambda) \wedge \mathbf{r} \in Q$

pues r está en Mover(Q', a) ya que $q' \in Q'$.

<u>Lema 2</u>:

Sean M y M' los AFND-λ y AFD presentados en el teorema

Si $(Q_0, \alpha) \vdash\!\!\!=\!=^* (Q, \lambda) \Rightarrow \forall \mathbf{q} \in Q, ((q_0, \alpha) \vdash\!\!\!=\!=^* (\mathbf{q}, \lambda))$

.

¡Ejercicio!

Demostración del Teorema (continuación)

i) $L(M) \subseteq L(M')$

Si $\alpha \in L(M) \Rightarrow (q_0, \alpha) \vdash\!\!=\!\!=^* (q_f, \lambda)$, $q_f \in F$ y q_0 es estado inicial.

Por Lema 1,

$(q_0, \alpha) \vdash\!\!=\!\!=^* (q_f, \lambda) \Rightarrow \exists Q \in K' \,/\, q_f \in Q \wedge (Q_0, \alpha) \vdash\!\!=\!\!=^* (Q, \lambda)$

pero si $q_f \in Q \Rightarrow Q \in F'$, luego $(Q_0, \alpha) \vdash\!\!=\!\!=^* (Q, \lambda)$, $Q \in F'$ y entonces $\alpha \in L(M')$.

ii) L(M') $\subseteq$ L(M)

Si $\alpha \in L(M') \Rightarrow (Q_0, \alpha) \vdash\!\!=\!\!=^* (Q_f, \lambda)$, $Q_f \in F'$ y Q_0 es estado inicial.

Pero por Lema 2,

$(Q_0, \alpha) \vdash\!\!=\!\!=^* (Q_f, \lambda) \Rightarrow \forall q \in Q_f, ((q_0, \alpha) \vdash\!\!=\!\!=^* (q, \lambda))$

En particular, $\exists\ q_f\ /\ q_f \in F \wedge q_f \in Q_f \wedge (q_0, \alpha) \vdash\!\!=\!\!=^* (q_f, \lambda)$

y entonces $\alpha \in L(M)$.

Minimización de AFD

Sea un AFD $M = < K, \Sigma, \delta, q_0, F >$ y $q \in K$, q es accesible si y sólo si $\exists \alpha \in \Sigma^* / (q_0, \alpha) \vdash^* (q, \lambda)$.

Notas: - α no tiene porqué pertenecer a L(M).

- otra forma de escribirlo es $\exists \alpha / \delta(q_0, \alpha) = q$.

Definición:
Sean $q_1,q_2 \in K$, q_1 está relacionado con q_2, $q_1 R q_2$, si y sólo si $\exists\ a \in \Sigma / \delta(q_1,a) = q_2$.

Algoritmo para la eliminación de estados inaccesibles

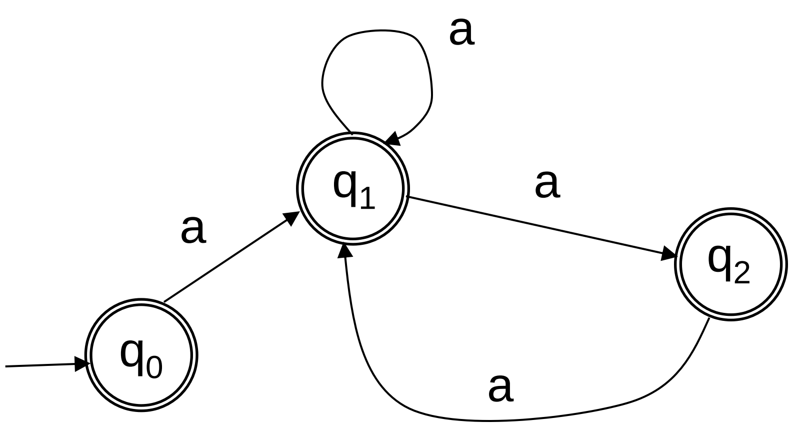
Entrada: M, AFD (posiblemente con estados inaccesibles)

Salida: M', AFD (sin estados inaccesibles)

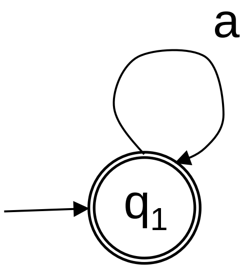
1. $M' \leftarrow M$
2. Calcular R^* (usar Warshall)
3. Eliminar de K' en M' todos aquellos estados que no estén en R^*.

Nota: recordar que para calcular la clausura de una relación podemos usar el algoritmo de Warshall. La relación está en K x K, luego hay que calcular hasta la potencia $|K|$.

Noción de estado redundante



M_1



M_2

$$\boxed{L(M_1) = L(M_2)}$$

Estados indistinguibles :

Sea el AFD M = < K, Σ, δ, q_0, F >, q,r $\in$K, q es indistinguible de r, q $\equiv$ r,

si $\forall \alpha \in \Sigma^*$, $\left(\hat{\delta}(q,\alpha) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(r,\alpha) \in F\right)$

Nota: notaremos $\hat{\delta}$ (delta "sombrero" o delta extendida) como δ .

Propiedades de la indistinguibilidad ($\equiv$)

i) $q \equiv r \Rightarrow \forall \alpha \in \Sigma^*, \delta(q,\alpha) \equiv \delta(r,\alpha)$

Demostración:

Supongamos falso que $\delta(q, \alpha) \equiv \delta(r, \alpha)$

Luego $\exists\beta$ / $\delta(\delta(q, \alpha), \beta) \in F \wedge \delta(\delta(r, \alpha), \beta) \notin F$ (o viceversa).

Pero $\delta(\delta(q, \alpha), \beta) = \delta(q, \alpha\beta)$ y

$\delta(\delta(r, \alpha), \beta) = \delta(r, \alpha\beta)$.

Es decir, $\delta(q, \alpha\beta) \in F \wedge \delta(r, \alpha\beta) \notin F$ y por lo tanto es falso que q $\equiv$ r .
Absurdo.

ii) $\equiv$ es de equivalencia, esto es,

a) reflexiva, b) simétrica y c) transitiva.

Demostración:

a) Si $\delta(q, \alpha) \in F \Leftrightarrow \delta(q, \alpha) \in F$ luego $q \equiv q$.

b) Como $\delta(q, \alpha) \in F \Leftrightarrow \delta(r, \alpha) \in F$ luego $q \equiv r \wedge r \equiv q$.

c) Si $q \equiv r \Rightarrow \forall\alpha\in\Sigma^*, \delta(q, \alpha) \in F \Leftrightarrow \delta(r, \alpha) \in F$ y

si $r \equiv s \Rightarrow \forall\alpha\in\Sigma^*, \delta(r, \alpha) \in F \Leftrightarrow \delta(s, \alpha) \in F$

entonces $\forall\alpha\in\Sigma^*, \delta(q, \alpha) \in F \Leftrightarrow \delta(s, \alpha) \in F$ y

por lo tanto $q \equiv s$.

Lema:

Sea el AFD $M = < K, \Sigma, \delta, q_0, F >$, se cumple que

$\forall a \in \Sigma, q \equiv r \Rightarrow \delta(q, a) \equiv \delta(r, a)$

Demostración:

Considere el caso donde $\alpha = a$ para la propiedad i) de la indistinguibilidad.

Por lo tanto, el lema es verdadero.

Definición:

Sea un AFD $M = < K, \Sigma, \delta, q_0, F >$ sin estados inaccesibles, definimos al AFD $M' = < K', \Sigma, \delta', Q_0, F' >$ sin estados inaccesibles y donde no hay estados indistinguibles. Esto es,

$K' = K / \equiv$ las clases de equivalencia de K,

$\delta'([q], a) = [\delta(q, a)]$,

$Q_0 = [q_0]$,

$F' = \{ x \in K' / x \subseteq F \}$

donde [q] denota el estado en M' formado por la clase (inducida por $\equiv$) que contiene a $q \in K$.

Propiedad:

$$\delta(q, \alpha) = r \Rightarrow \delta'([q], \alpha) = [r]$$

Demostración (por inducción en $|\alpha|$)

<u>Caso base</u> ($|\alpha|$ = 0)

Si $\delta(q,\alpha) = r$ entonces podemos escribir

$$(q, \alpha) \vdash\!\!=^{*} (r, \lambda),$$

Pero como $(q, \lambda) \vdash\!\!= (r, \lambda) \Rightarrow q = r$ entonces [q] = [r].

Si [q] = [r], entonces podemos escribir que

$$([q], \lambda) \vdash\!\!= ([r], \lambda)$$

ya que M' también es AFD y sabemos que una transición λ desde [q] sólo llega a [q] (que es igual a [r]). Entonces, es cierto que $\delta'([q], \lambda) = [r]$ o lo que es lo mismo, $\delta'([q], \alpha) = [r]$ dado que $\alpha = \lambda$.

Paso inductivo (la propiedad es verdadera para $|\alpha| = n$)

Si $\delta(q, \alpha) = r$ entonces podemos escribir

$$(q, \alpha) \vdash\!\!=^{*} (r, \lambda).$$

Si tomamos $\alpha = a\,\alpha'$ ($|\alpha'| = n$), podemos afirmar que

$$\exists q' \,/\, (q, a\alpha') \vdash\!\!= (q', \alpha') \vdash\!\!=^{*} (r, \lambda)$$

donde $q' = \delta(q, a)$.

Por definición de M’, $[\delta(q, a)] = \delta'([q], a)$, esto es $[q'] = \delta'([q], a)$.

Si lo escribimos como un cambio de configuración resulta

$$([q], a\alpha') \vdash\!\!= ([q'], \alpha').$$

Por HI, $(q', \alpha') \vdash\!\!=^{*} (r, \lambda) \Rightarrow ([q'], \alpha') \vdash\!\!=^{*} ([r], \lambda)$,

así que $([q], \alpha) = ([q], a\alpha') \vdash\!\!=^{*} ([r], \lambda)$

o lo que es lo mismo

$$\delta'([q],\alpha) = [r].$$

Lema:

Sean M y M' AFDs como los recién definidos, entonces L(M') = L(M)

Demostración:

$\subseteq$) L(M') $\subseteq$ L(M)

Si $\alpha \in L(M') \Rightarrow (Q_0, \alpha) \vdash\!\!\!=\!= (f, \lambda)$, $f \in F'$,

o equivalentemente $\delta'(Q_0, \alpha) = f \in F'$.

Como $q_0 \in Q_0$, sea $r = \delta(q_0, \alpha)$, entonces

$r \in f$ por propiedad : $\delta(q, \alpha) = r \Rightarrow \delta'([q], \alpha) = [r]$, y $[r] = f$.

Pero como $f \in F'$, entonces $r \in F \Rightarrow \alpha \in L(M)$.

$\supseteq$) L(M) $\subseteq$ L(M')

Si $\alpha \in L(M) \Rightarrow \delta(q_0, \alpha) = f \in F$,

luego $\delta'([q_0], \alpha) = [f]$, esto es, $\delta'(Q_0, \alpha) = [f]$. Como todos los estados pertenecientes a [f] son indistinguibles entre sí y f es final, entonces todos los estados de [f] son finales también. Luego $[f] \subseteq F \Rightarrow [f] \in F'$ y

entonces $\alpha \in L(M')$.

Indistinguibilidad de orden k

Sea AFD M = < K, Σ, δ, q_0, F > y sean p, q $\in$ K,

$p \underset{k}{\equiv} q$ son indistinguibles para cadenas de longitud menor o igual que k si y sólo si $\forall \alpha, |\alpha| \leq k$, $\delta(p, \alpha) \in F \Leftrightarrow \delta(q, \alpha) \in F$.

Nota: esto es lo mismo que decir : no hay ninguna cadena de longitud menor o igual que k que pueda distinguir a q de p.

Definición:

$\exists\ \alpha$ que distingue a q de r si $\delta(q, \alpha) \in F \Leftrightarrow \delta(r, \alpha) \notin F$, es decir, el autómata pasa de q a un estado final consumiendo α pero pasa de r a un estado no final consumiendo α.

Propiedades de $\underset{k}{\equiv}$

i) $\underset{k}{\equiv}$ es de equivalencia.

ii) $\underset{k+1}{\equiv} \subseteq \underset{k}{\equiv}$

iii) $K/\underset{0}{\equiv} = \{K - F, F\}$ si (K-F) $\neq \phi \wedge F \neq \phi$

iv) $p \underset{k+1}{\equiv} r \Leftrightarrow p \underset{k}{\equiv} r \wedge \forall a \in \Sigma, \delta(p,a) \underset{k}{\equiv} \delta(r,a)$

v) $\left(\underset{k}{\equiv} = \underset{k+1}{\equiv}\right) \Rightarrow \forall j, j \geq 0, \left(\underset{k}{\equiv} = \underset{k+j}{\equiv}\right)$

Demostración

i) **¡Ejercicio!**

ii) $\underset{k+1}{\equiv} \subseteq \underset{k}{\equiv}$ quiere decir que si (p,q) $\in \underset{k+1}{\equiv}$ entonces (p,q) $\in \underset{k}{\equiv}$ lo que es lo mismo que $p \underset{k+1}{\equiv} q \Rightarrow p \underset{k}{\equiv} q$. Pero si $p \underset{k+1}{\equiv} q$ quiere decir que no $\exists \alpha, |\alpha| \leq$ k+1 tal que distinga a p y q, en particular, no $\exists \beta, |\beta| \leq k$ talque p y q sean distinguibles, luego $p \underset{k}{\equiv} q$ para todo p y q.

Demostración (continuación)

iii) Si K-F $\neq \phi \wedge$ F $\neq \phi \Rightarrow$ $\quad K/\underset{0}{\equiv} = \{K-F, F\}$

Si F = $\phi \Rightarrow$ $\quad K/\underset{0}{\equiv} = \{K\}$

Si K = $\phi \Rightarrow$ $\quad K/\underset{0}{\equiv} = \{F\}$

Nota: la mínima distinción que puede realizarse para k = 0 es entre estados finales y no finales.

iv) $p \underset{k+1}{\equiv} r \Leftrightarrow p \underset{k}{\equiv} r \wedge \forall a \in \Sigma, \delta(p,a) \underset{k}{\equiv} \delta(r,a)$

$\Rightarrow$) Supongamos sea falso el consecuente. Luego ó $p \underset{k}{\equiv} r$ es falso ó

$\forall a \in \Sigma, \delta(p,a) \underset{k}{\equiv} \delta(r,a)$ es falso.

Pero $p \underset{k}{\equiv} r$ siempre se cumple por propiedad ii), luego si la segunda parte es falsa es porque $\exists a$ / $\exists \alpha$ con $|\alpha| \leq k$ que distingue a $\delta(p,a)$ de $\delta(r,a)$.

En ese caso $a\alpha$ es de longitud k+1 y entonces sería falso que $p \underset{k+1}{\equiv} r$.

Absurdo.

iv)

$\Leftarrow$) Supongamos no se cumple $p \underset{k+1}{\equiv} r$ luego $\exists\beta$ con $|\beta| \leq$ k+1 /

β distingue a p de r.

Sea β = aα con $|\alpha| \leq$ k entonces δ(p, a) no es indistinguible de orden k de δ(q, a). Absurdo pues $\delta(p,a) \underset{k}{\equiv} \delta(r,a)$.

v) $\left(\underset{k}{\equiv} = \underset{k+1}{\equiv}\right) \Rightarrow \forall j \geq 0 \left(\underset{k}{\equiv} = \underset{k+j}{\equiv}\right)$

Para demostrarlo haremos inducción en j.

<u>Caso base</u> (j = 0)

$$p \underset{k}{\equiv} r = p \underset{k+0}{\equiv} r$$

<u>Paso inductivo</u> (asumimos que es cierto para j = n)

$\underset{k}{\equiv} = \underset{k+n+1}{\equiv}$ es lo mismo que $\forall p,r \in K, p \underset{k}{\equiv} r \Leftrightarrow p \underset{k+n+1}{\equiv} r$.

Sabemos que $p \underset{k+n+1}{\equiv} r \Leftrightarrow p \underset{k+n}{\equiv} r \wedge \forall a \in \Sigma, \delta(p,a) \underset{k+n}{\equiv} \delta(r,a)$. (1)

Por HI, $\underset{k}{\equiv} = \underset{k+n}{\equiv}$, luego podemos reescribir (1) como

$$\forall a \in \Sigma, \delta(p,a) \underset{k}{\equiv} \delta(r,a) \wedge p \underset{k}{\equiv} r \Leftrightarrow p \underset{k+1}{\equiv} r \Leftrightarrow p \underset{k}{\equiv} r$$

Y como sucede para todo p y r, entonces $\underset{k}{\equiv} = \underset{k+n+1}{\equiv}$.

Corolario: $\underset{k+1}{\equiv} = \underset{k}{\equiv} \Rightarrow \underset{k}{\equiv} = \equiv$

Demostración:

Supongamos que el corolario es falso. Luego $\exists \alpha$, $|\alpha| > k$ tal que α distingue a p y a q, donde p, q $\in$ K y $p \underset{k}{\equiv} q$.

Pero $\underset{k}{\equiv} = \underset{k+1}{\equiv}$ y por propiedad v), $\underset{k}{\equiv} = \underset{k+j}{\equiv}, j \geq 0$. Entonces no existe tal α,

$|\alpha| > k$. Absurdo.

Algoritmo de construcción del conjunto cociente (reducción de estados)

1. P = { K - F, F }, P, K, F con sus elementos sin marcar.
2. *Fin* $\leftarrow$ falso
3. Repetir mientras *Fin* sea falso

    P' $\leftarrow \phi$

    Para cada X $\in$ P

        Mientras haya e $\in$ X sin marcar

            Hacer X_1 = {e} sin marcar

            Marcar e en X

            Para cada e' $\in$ X sin marcar

                Si $\forall$a $\in \Sigma$, $\Psi(\delta(e, a)) = \Psi(\delta(e', a))$

                    agregar e' sin marcar en X_1

                    marcar e' en X

            X1 = [e]

            Agregar X_1 en P'

    Si P $\neq$ P'

        P $\leftarrow$ P'

        Fin $\leftarrow$ falso

    sino

        Fin $\leftarrow$ verdadero

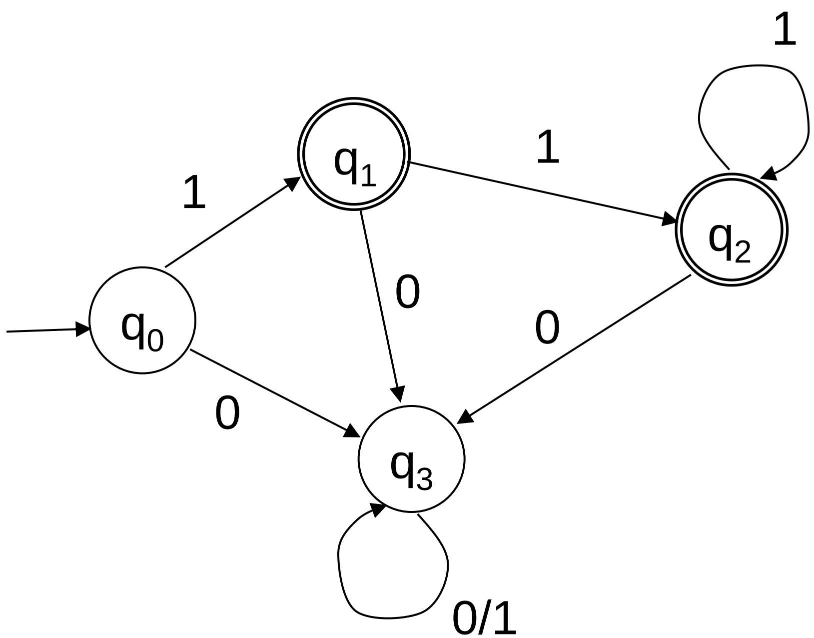
3. Fin

donde Ψ: K $\rightarrow$ K /$\equiv$ y que dado un estado en K dice cuál es el estado (clase) en K' = K/$\equiv$.

Nota: el procedimiento termina, es decir, es un algoritmo ya que en algún momento P = P' dado que se cumple la propiedad v) de la indistinguibilidad de orden k.

Nota 2: para correr el algoritmo el autómata debe estar completo, es decir hay que agregar los estados trampa.

Ejemplo:



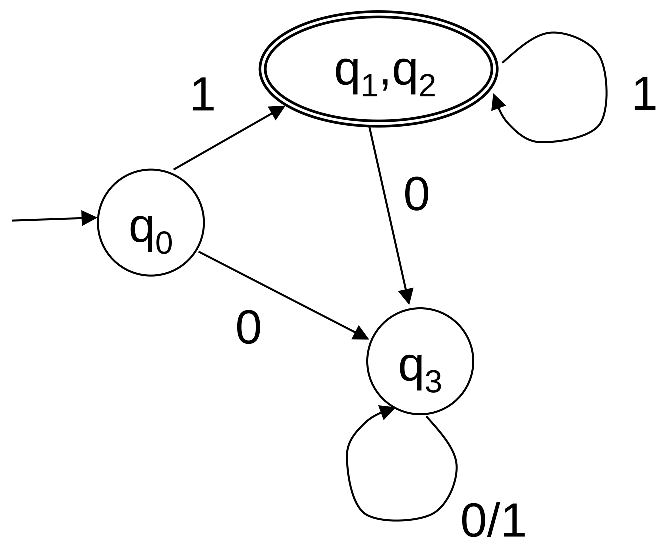
$\Sigma = \{0, 1\}$

$P = \{\{q_0, q_3\}, \{q_1, q_2\}\}$

$X1 = \{q_0\}$

$X2 = \{q_3\}$

$X3 = \{q_1, q_2\}$



Lema:

$\forall$ M, M' donde M = $<$ K, Σ, δ, q_0, F $>$ y M' = $<$ K', Σ, δ', q_0', F $>$ con M AFD sin estados inaccesibles

$((\forall\ \alpha,\beta\in\Sigma^*\ /\ (\delta(q_0, \alpha) \neq \delta(q_0, \beta)) \Rightarrow (\delta'(q_0', \alpha) \neq \delta'(q_0', \beta)) \Rightarrow |K| \leq |K'|$.

Demostración:

Sabemos que si una función es inyectiva el cardinal del dominio es menor o igual al cardinal de la imagen.

Consideremos la función g: K $\rightarrow\Sigma^*$ dada por $g(q) = \min \{\alpha\ /\ \delta(q_0, \alpha) = q\}$

y la función f: K $\rightarrow$ K' definida como $f(q) = \delta'(q_0', g(q))$.

Si la función f es inyectiva entonces $|K| \leq |K'|$, luego tenemos que ver que

si $q \neq q' \Rightarrow f(q) \neq f(q')$.

Si $q \neq q' \Rightarrow g(q) \neq g(q')$ por ser AFD (si g(q) = g(q') implica que con una misma cadena puedo llegar a dos estados diferentes).

Por hipótesis, si $\delta(q_0, g(q)) \neq \delta(q_0, g(q'))$ entonces, $\delta'(q_0', g(q)) \neq \delta'(q_0', g(q'))$.

Pero si $\delta'(q_0', g(q)) \neq \delta'(q_0', g(q'))$ entonces $f(q) \neq f(q') \Rightarrow$ f es inyectiva y $|K| \leq |K'|$.

Teorema:

Sea un AFD $M = < K, \Sigma, \delta, q_0, F >$ y el AFD reducido

$M_R = < K_R, \Sigma, \delta_R, q_{0R},F_R > / L(M_R) = L(M)$ entonces

$(\forall M' / L(M') = L(M) \Rightarrow |K'| \geq |K_R|$ donde K_R es el conjunto de estados de M_R.

Demostración:

Sea M' AFD sin estados inaccesibles construido a partir de $M / L(M') = L(M)$ con $|K'| \leq |K|$.

Supongamos ahora que $|K_R| > |K'|$, luego no se debe cumplir que

$((\forall\ \alpha,\beta \in \Sigma^*\ ,\ (\delta_R(q_0, \alpha) \neq \delta_R(q_0, \beta)) \Rightarrow (\delta'(q_0', \alpha) \neq \delta'(q_0', \beta))$.

Por lo tanto, $\exists\ \alpha,\beta \in \Sigma^* / (\delta_R(q_0, \alpha) \neq \delta_R(q_0, \beta)) \wedge (\delta'(q_0', \alpha) = \delta'(q_0', \beta))$.

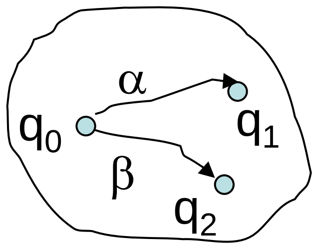
Luego $\exists \gamma / \alpha\gamma \in L(M_R) \wedge \beta\gamma \notin L(M_R)$ (o al revés) pues sino

$\delta_R(q_0, \alpha)$ y $\delta_R(q_0, \beta)$ serían indistinguibles.

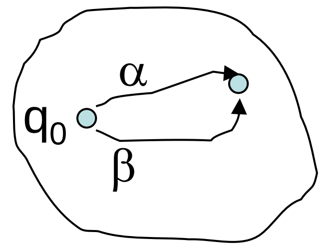
Fijarse que, por otro lado, $\alpha\gamma, \beta\gamma \in L(M')$ (o ninguno de las dos $\in L(M')$).

Así, $\in L(M_R) \neq L(M')$. Absurdo.

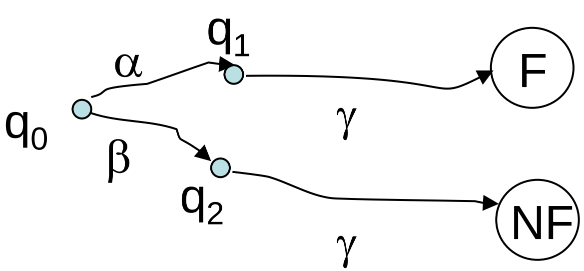
Por lo tanto, $|K_R| \leq |K'| \leq |K|$.



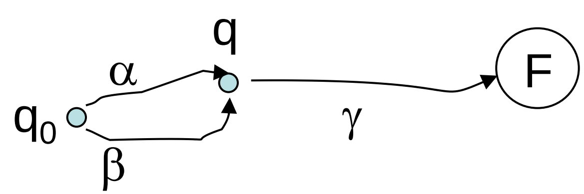
α
q0
q1
β
q2



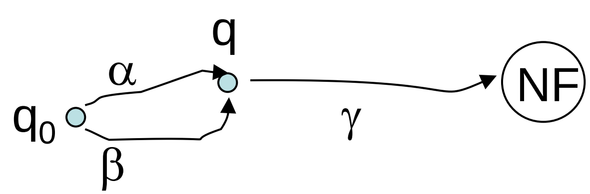
α
q0
β



q1
α
F
q0
γ
β
q2
NF
γ



q
α
F
q0
γ
β



q
α
NF
q0
γ
β