Sintaxis y Semántica de los lenguajes

Autómatas relacionados con lenguajes tipo 0 y 1

2020

Facultad Regional Delta,
Universidad Tecnológica Nacional

Prof. Juan Miguel Santos

Máquina de Turing

Una máquina de Turing está definida por la siguiente tupla

$MT = < Q, \Gamma, \Sigma, B, q_0, \delta, F >$

donde Q es el conjunto de estados,

Γ es el alfabeto de la cinta,

Σ es el alfabeto de la cadena de entrada, $\Sigma \subseteq \Gamma$,

B es un símbolo que representa una celda de la cinta en blanco,

$B \in \Gamma, \quad B \notin \Sigma$

δ es la función de transición y está definida en

$$\delta: Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{ I, D \}$$

q_0 es el estado inicial, y

F es el conjunto de estados finales.

Definición (configuración instantánea)

Una configuración instantánea nos permite conocer la situación actual de una máquina de Turing y está definada por

$$\alpha_1 \; q \; \alpha_2$$

donde q es el estado actual del automáta y $\alpha 1$, $\alpha 2 \in \Gamma^*$, siendo α_1 el contenido de la cinta a la izquierda del cursor (sin incluir la celda sobre el cursor) y α_2 el contenido de la cinta a la derecha del cursor (incluyendo la celda sobre el cursor).

Cambio de configuración instantánea en una MT

Sea la configuración instantánea $X_1 X_2 \ldots X_i \; \mathbf{q} \; X_{i+1} \ldots X_n$

Si δ está definida para q como $\delta(q, X_{i+1}) = (p, Y, \mathbf{I})$, la MT evolucionará a la siguiente configuración instantánea $X_1 X_2 \ldots X_{i-1} \; \mathbf{p} \; X_i \; Y \; X_{i+2} \ldots X_n$.

En cambio, si δ está definida para q como $\delta(q, X_{i+1}) = (p, Y, \mathbf{D})$, la MT evolucionará a la siguiente configuración instantánea

$$X_1 X_2 \ldots X_i \; Y \; \mathbf{p} \; X_{i+2} \ldots X_n.$$

Lenguaje aceptado por una máquina de Turing

Sea la MT = < Q, Γ, Σ, B, q_0, δ, F >, el lenguaje L(MT) aceptado será

$$L = \{\alpha \;/\; \alpha \in \Sigma^* \;\wedge\; q_0\,\alpha \;|\text{---}^*\; \gamma q \gamma' \;/\; q \in F\}$$

Ejemplo:

Sea L = { $0^n \, 1^n$ / n $\geq$1 } definir la MT que lo acepte.

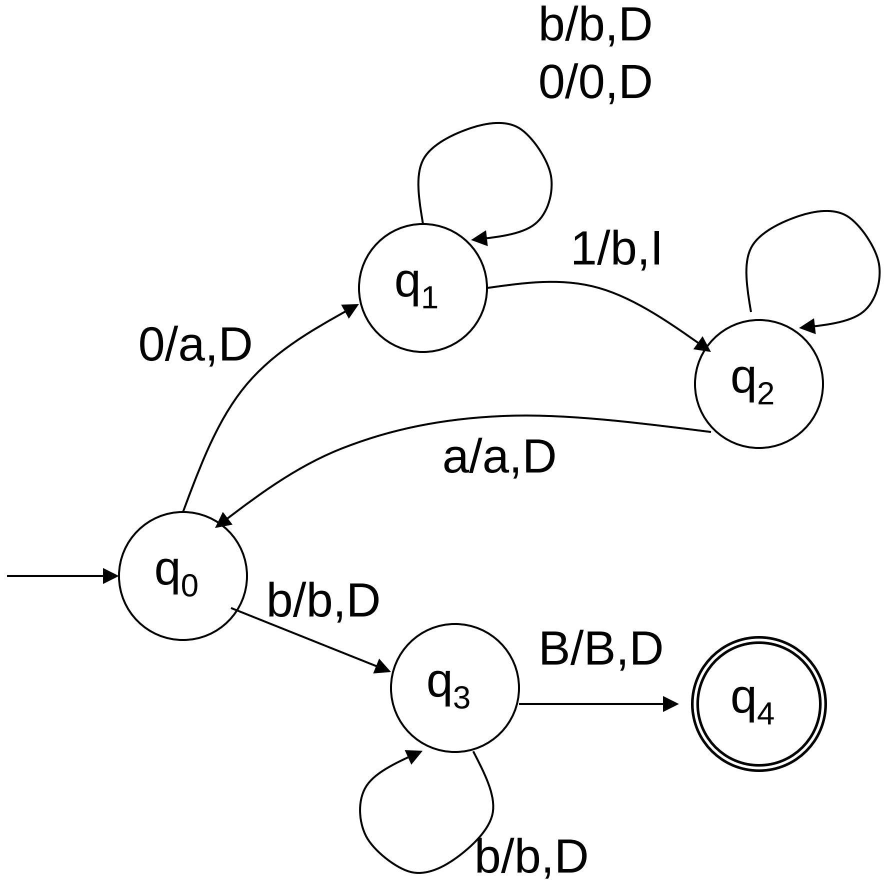
En la cinta está escrita la cadena de entrada de modo tal que al comenzar a operar la MT el cursor estará posicionado sobre la celda que contiene al primer símbolo de la cadena de entrada.

La configuración instantánea inicial será entonces

$$q_0 \, w$$

donde q_0 es el estado inicial y w el contenido de la cinta a la derecha del cursor conteniendo a la cadena de entrada (notar que a la izquierda del cursor la cinta contiene a todas sus celdas en blanco).

El diagrama de transición de la MT es:

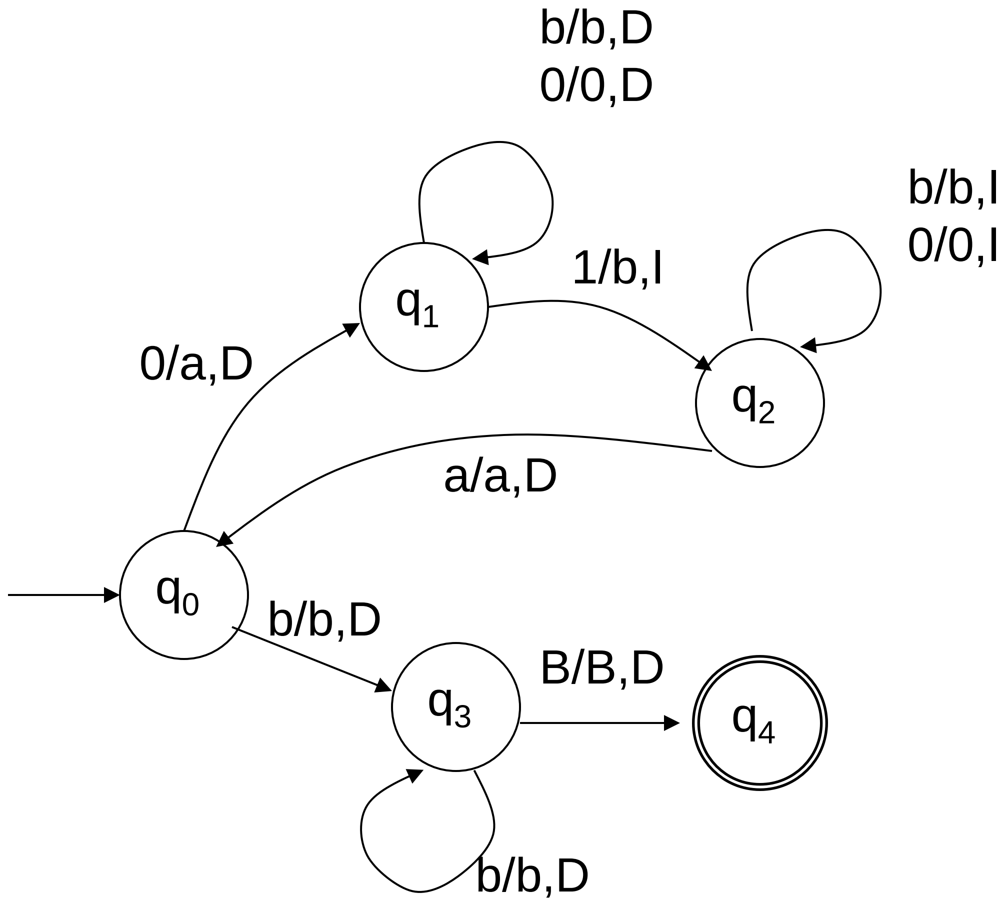


$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$

$\Gamma = \{0, 1, B, a, b\}$,

$\Sigma = \{0, 1\}$,

$F = \{q_4\}$.



Cambios de configuración instantánea para la cadena w = 0011

$\mathbf{q_0}$ 0011 |--- a $\mathbf{q_1}$ 011 |--- a0 $\mathbf{q_1}$ 11 |--- a $\mathbf{q_2}$ 0b1 |--- $\mathbf{q_2}$ a011 |--- a $\mathbf{q_0}$ 0b1

|--- aa $\mathbf{q_1}$ b1 |--- aab $\mathbf{q_1}$ 1 |--- aa $\mathbf{q_1}$ bb |--- a $\mathbf{q_1}$ abb |--- aa $\mathbf{q_1}$ bb |--- aab $\mathbf{q_3}$ b

|--- aabb $\mathbf{q_3}$ |--- aabbB $\mathbf{q_4}$

Definición (Autómata Acotado Linealmente):

Un Autómata Acotado Linealmente es una´máquina de Turing cuya longitud de la cinta es finita y función lineal de la longitud de la cadena de entrada.

Usualmente los símbolos de inicio y final de la cinta son ¢ y $.

Lenguaje aceptado por un Autómata Acotado Linealmente

Sea el AAL = < Q, Γ, Σ, B, q_0, δ, F >, el lenguaje L(AAL) aceptado será

$$L = \{ \alpha \ / \ \alpha \in (\Sigma - \{ ¢, \$ \})^* \wedge q_0 \, ¢\alpha\$ \ |\!\!-\!\!-\!\!-^* \ \gamma q \gamma' \ / \ q \in F \}$$

<u>Nota</u>: el cursor nunca se puede mover a la izquierda de ¢ ni a la derecha de $.

Teorema:

Sea G del **tipo 1**, G = < V_N, V_T, P, S > entonces existe un **AAL** que acepta L (G).

Idea de demostración:

Sean p_1, p_2,…, p_n las producciones de G y en donde para cualquier producción p_i representada como $\alpha \rightarrow \gamma$ se verifica que $|\alpha| \leq |\gamma|$.

Sea el AAL cuya cinta tiene una longitud acotada por la longitud de k*|w| + la longitud máxima de las partes derechas de las producciones de G, donde |w| es la longitud de la cadena de entrada y k una constante entera.

El AAL procede según el siguiente seudocódigo:

1. Escribe a continuación del último símbolo de la cadena de entrada, el símbolo distinguido de la gramática.

2. Busca una producción para re-escribir el símbolo distinguido, remueve el símbolo distinguido de la cinta y en su lugar escribe la parte derecha de la producción seleccionada.

3. Identifica una subcadena de la forma sentencial actual y busca una producción tal que le permita re-escribir dicha subcadena.

4. Remueve la subcadena identificada en 3 y la reemplaza por la parte derecha de la producción seleccionada en 3.

5. Si la nueva forma sentencial obtenida es la cadena w, listo. Terminar aceptando w.

6. Si la forma sentencial obtenida es de longitud menor o igual a la longitud de w y existen más posibilidades de derivación entonces

volver a 3

sino

Si ya se han formado todas las formas sentenciales posible con longitud menor o igual a la longitud de la cadena w entonces

la cadena w es rechazada

sino

volver a 1

Como las posibilidades de derivar formas sentenciales de longitud menor o igual a la longitud de w es finita, el procedimiento termina en tiempo finito. Luego existe un AAL que acepta a L(G).

Ejemplo:

Sea G = < V_N, V_T, P, S > con

P = { $S \rightarrow 0BS2$,

$S \rightarrow 012$,

$B0 \rightarrow 0B$,

$B1 \rightarrow 11$},

V_N = { S, B }, y

V_T = { 0, 1, 2 }.

Fijarse que la gramática cumple que

$$\forall (\alpha \rightarrow \beta) \text{ en } P \; |\alpha| \leq |\beta|,$$

luego es del tipo 1.

Fijarse que S $\rightarrow$ 0BS2 aplicada i-1 veces genera la forma sentencial

$$\underbrace{0B \ldots 0B}_{\text{(i-1) OBs}}\ S\ \underbrace{2 \ldots 2}_{\text{(i-1) 2s}}$$

Si aplicamos S $\rightarrow$ 012 obtenemos

$$\underbrace{0B \ldots 0B}_{\text{(i-1) OBs}}\ 012\ \ \underbrace{2 \ldots 2}_{\text{(i-1) 2s}}$$

Ahora usamos B0 $\rightarrow$ 0B varias veces para permutar los 0s a la izquierda de las Bs de modo de obtener

00 … BB12 2 … 2,

y usando B1 $\rightarrow$ 11 reemplazamos las Bs con 1s para obtener

00 … 011 … 12 … 22.

Ejercicio: dado el lenguaje del ejemplo anterior definir un AAL que lo acepte.

Consideremos el AAL = < Q, Γ, Σ, B, q_0, δ, F > con

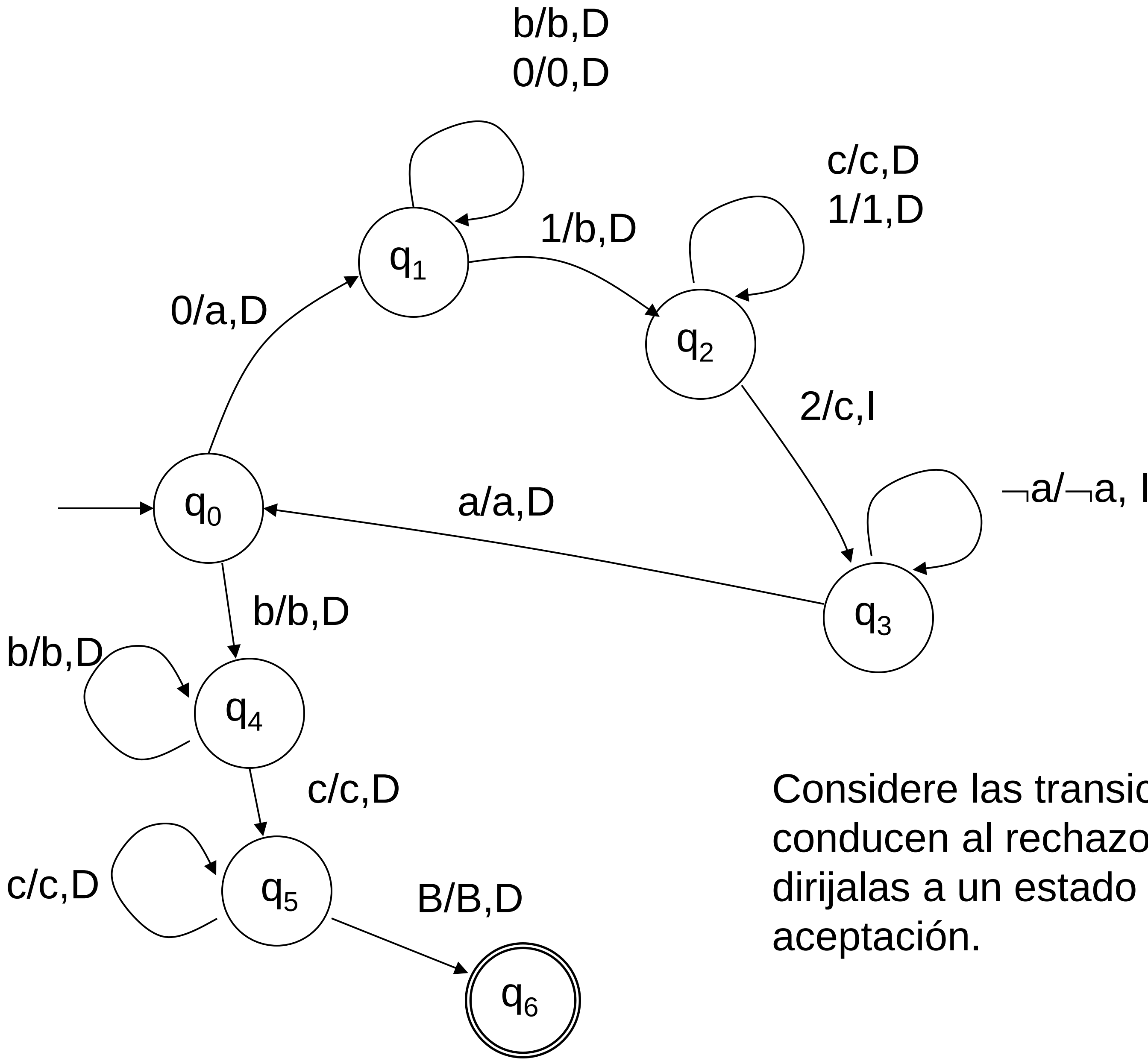
Q = { q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6 },

Σ= { 0, 1, 2 },

Γ = { 0, 1, 2, a, b, c, B, ¢, \$ } y

F = { q_6 }.

La función de transición se corresponde con el siguiente diagrama de transición:



Considere las transiciones que conducen al rechazo de la cadena y dirijalas a un estado final de no aceptación.

Sea M un Máquina de Turing, cuales son las posibles respuestas para decidir si una cadena pertenece o no a un lenguaje:

M se detenga en un estado final de aceptación $\Rightarrow$ $w \in L(M)$

M se detenga en un estado final de rechazo $\Rightarrow$ $w \notin L(M)$

M no se detenga $\Rightarrow$ $w \notin L(M)$

Si L es un lenguaje del tipo 0 (pero **recursivo**) entonces existe un Máquina de Turing M tal que:

si $w \in L \Rightarrow$ M se detiene en un estado final de aceptación

si $w \notin L \Rightarrow$ M se detiene en un estado final de rechazo

Si L es un lenguaje del tipo 0 (pero **recursivamente enumerable**) entonces existe un Máquina de Turing M tal que:

si $w \in L \Rightarrow$ M se para en un estado final de aceptación

si $w \notin L \Rightarrow$ M no se para.