Sintaxis y Semántica de los lenguajes

Propiedades de los lenguajes regulares y algunos problemas decidibles

2021

Facultad Regional Delta,
Universidad Tecnológica Nacional

Prof. Juan Miguel Santos

Propiedades de los lenguajes regulares.

1) Dados L_1 y L_2 dos lenguajes regulares sobre Σ, $L_1 \cup L_2$ es un lenguaje regular.

Demostración:

Sean $M_1 = < K_1, \Sigma, \delta_1, q_{0_1}, F_1 >$ y $M_2 = < K_2, \Sigma, \delta_2, q_{0_2}, F_2 >$ dos AFDs / $L(M_1) = L_1$ y $L(M_2) = L_2$, se puede construir M',

$M' = < K', \Sigma, \delta', q_{0'}, F' >$ /

$K' = K_1 \cup K_2 \cup \{q_{0'}\} \cup \{q_{f'}\}$,

$\delta'(q, a) = \delta_1(q, a)$ si $q \in K_1$,

$\delta'(q, a) = \delta_2(q, a)$ si $q \in K_2$,

$\delta'(q_{0'}, \lambda) = \{q_{0_1}, q_{0_2}\}$,

$\delta'(q_{f_1}, \lambda) = q_{f'}$,

$\delta'(q_{f_2}, \lambda) = q_{f'}$,

$F' = \{q_{f'}\}$.

Luego si $(\alpha \in L_1 \vee \alpha \in L_2) \Rightarrow \alpha \in L(M')$ y $\alpha \in L(M') \Rightarrow (\alpha \in L_1 \vee \alpha \in L_2)$.

Ejercicio: demostrar

2) Sea L un lenguaje regular sobre Σ, luego el complemento de L, C(L) es un lenguaje regular sobre Σ.

Demostración:

Sean M el AFD / L(M) = L, se puede construir M' = $< K, \Sigma, \delta, q_0, F' >$,

F' = K - F.

Luego, $\forall \alpha \in \Sigma^*$, $(\alpha \in L \Rightarrow \alpha \notin L(M')) \wedge (\alpha \notin L \Rightarrow \alpha \in L(M'))$.

Ejercicio: demostrar que L(M') = C(L).

3) Dados L_1 y L_2 dos lenguajes regulares sobre Σ, $L_1 \cap L_2$ es un lenguaje regular.

Demostración:

$$L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{(L_1 \cap L_2)}} = \overline{\left(\overline{L_1} \cup \overline{L_2}\right)}$$

Pero $\overline{L_1}$ es lenguaje regular y $\overline{L_2}$ también (por propiedad 2), así por propiedad 1, $\overline{L_1} \cup \overline{L_2}$ es lenguaje regular y de vuelta por propiedad 2

$\overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$ es lenguaje regular.

4) Dados $\{L_i \,/\, i \in \aleph\}$ donde cada L_i es un lenguaje regular sobre Σ, luego

a) $\forall n \in \aleph, \bigcup_{i=1}^{n} L_i$ es un lenguaje regular,

b) $\forall n \in \aleph, \bigcap_{i=1}^{n} L_i$ es un lenguaje regular.

Demostración de a) (por inducción en n):

Caso base (n = 0)

Si n = 0 $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} L_i = \phi$ y ϕ es un lenguaje regular.

Paso inductivo:

$\bigcup_{i=1}^{n+1} L_i = L_{n+1} \cup \bigcup_{i=1}^{n} L_i$, luego por HI y propiedad 1, $\bigcup_{i=1}^{n+1} L_i$ es un lenguaje regular.

Demostración de b) :**¡Ejercicio!**

Nota:

¿Es la unión infinita de lenguaje regulares un lenguaje regular?, esto es

¿Es $\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i$ regular?

La respuesta es **no**.

Demostración (por contraejemplo):

Sea $L_i = \{ a^i b^i \}$ con i en los naturales . Así, $L_1 = \{ ab \}$, $L_2 = \{ aabbb \}$, etc

¿Cuál es la unión infinita de los L_i? Es exactamente $a^n b^n$ y nosotros sabemos que este lenguaje no es regular (por lema del bombeo).

5) Sea $L \subseteq \Sigma^*$ / $|L|$ es finito, luego L es regular.

<u>Demostración</u>:

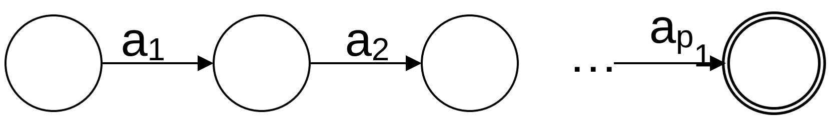
Numeremos las cadenas de L del 1 a n / $|L| = n$.

Sea α_1 la primera cadena perteneciente a L.

Podemos construir un AFD M_1 / $L(M_1) = \alpha_1$, esto es,

$\alpha_1 = a_1a_2....a_{p_1}$ donde p_1 es la longitud de la cadena α_1,

El siguiente es un autómata que acepta α_1



Es decir, tenemos una cantidad finita de lenguajes L_i, cada uno es aquel formado exclusivamente por α_i. De modo que, por propiedad 4, la unión de esos lenguajes es regular. Pero la unión de esos lenguajes es L, y por lo tanto L es regular.

Ejercicio:

Dado M_1, M_2 AFDs construir M / $L(M) = L(M_1) \cap L(M_2)$.

Sean $M_1 = < K_1, \Sigma, \delta_1, q_{0_1}, F_1 >$, $M_2 = < K_2, \Sigma, \delta_2, q_{0_2}, F_2 >$, definimos

$M' = < K', \Sigma, \delta', q_{0'}, F' >$ /

$K' = K_1 \times K_2$,

$\delta'((q, r), a) = (\delta_1(q, a), \delta_2(r, a))$, $q \in K_1$, $r \in K_2$,

$q_{0'} = (q_{0_1}, q_{0_2})$,

$F' = F_1 \times F_2$

<u>Demostración</u>:

Si $\alpha \in L(M') \Leftrightarrow \delta((q_{0_1}, q_{0_2}), \alpha) \in F_1 \times F_2 \Leftrightarrow \delta_1(q_{0_1}, \alpha) \in F_1 \wedge \delta_2(q_{0_2}, \alpha) \in F_2 \Leftrightarrow$
$\alpha \in L(M_1) \wedge \alpha \in L(M_2)$.

Algunos problemas decidibles en lenguajes regulares.

1) **Pertenencia**. Dado L sobre Σ y $\alpha \in \Sigma^*$, ¿$\alpha \in L$?

2) **Finitud**: dado L, ¿es L infinito?

3) **Vacuidad**: dado L, ¿es L vacío?

4) **Equivalencia**: dados L_1 y L_2, ¿son equivalentes?

1) Pertenencia.

a) obtener el AFD M / L(M) = L. (Recordar que L estará dado por una gramática regular, expresión regular u otro tipo de AF, y que se dispone de métodos para pasar de esas formas de expresarlo a AFD).

b) Ver si α está en L(M).

2) Finitud.

Sea $M = < K, \Sigma, \delta, q, F >$ AFD / $L(M) = L$,

L es **finito** si y sólo si $\forall q \in K \,/\, q \vdash^{*} f,\ f \in F$, es falso que $(q \vdash^{+} q)$

L es **infinito** si y sólo si $\exists\, q \in K \,/\, q \vdash^{*} f,\ f \in F \wedge (q \vdash^{+} q)$

3) Vacuidad.

a) Obtener el AFD M / $L(M) = L$

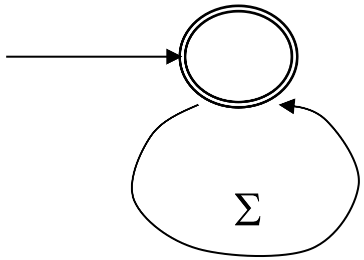
b) Obtener A, el conjunto de estados alcanzables

c) Si $F \cap A \neq \phi \Rightarrow L \neq \phi$

sino $L = \phi$.

4) Equivalencia con Σ^*

Dado L, obtener AFD M y reducirlo a estados mínimos. Si se obtiene



entonces $L = \Sigma^*$.

Equivalencia entre L_1 y L_2 cualesquiera.

Dado L_1 y L_2, obtener los AFDs M_1 y M_2 y reducir, ambos, a estados mínimos. Si los autómatas obtenidos son isomorfos, es decir, mas allá de cómo cada uno estén numerados, $\exists$ una función biyectiva entre M_1 y M_2, entonces L_1 y L_2 son iguales.

Alternativa: dados M_1 y M_2 / $L(M_1) = L_1$ y $L(M_2) = L_2$ construir un AFD para la unión de L_1 y L_2 y ver si q_{0_1} y q_{0_2} son indistinguibles. De serlos, entonces L_1 y L_2 son el mismo lenguaje. (q_{0_1} y q_{0_2} son los estados iniciales de M_1 y M_2)