



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Pró-Reitoria de Pesquisa

Av. dos Estados, 5001 · Santa Teresinha · Santo André/SP · CEP 09210-580
Bloco L · 3.º andar · Fone: (11) 3356.7619
propes@ufabc.edu.br

RELATORIO FINAL DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA - EDITAL 01/2021
Modelagem e Estudo de Sistemas de Massa
Variável

Aluno: Kaique Falcão Lopes

Orientador: Dr. Karl Petter Burr

Santo André

2022

Resumo

Neste presente trabalho será desenvolvido um estudo na área de dinâmica de corpos com variação contínua de massa, para isso desenvolveremos o projeto com base em um sistema mecânico desta mesma categoria, onde este será um foguete de combustível sólido que tem sua perda de massa representada por sua queima de combustível durante o voo. Dito isso, o foco da pesquisa é compreender e complementar o modelo matemático que descreve as equações que regem seu lançamento, já inicialmente desenvolvido pelo orientador e, feito isto, calcular as variáveis e parâmetros necessários usados na modelagem para possibilitar a construção de um software desenvolvido em matlab. Seu objetivo será contemplar a implementação numérica destas equações que envolvem este tipo de fenômeno e, deste modo, ser capaz de simular um voo nestas condições. Desta forma, foram utilizados dados empíricos de voo do foguete Angra projetado e lançado pela UFABC rocket design na competição SAC (Spaceport America Cup) para que pudessemos ter como base as dimensões e modelo de um foguete real e também para que sejamos capazes de comparar e analisar os resultados encontrados na simulação com aqueles vistos num evento real de lançamento.

Sumário

1	Introdução	4
1.1	Primeiros Estudos de Sistemas de Massa Variável	5
2	Modelo Matemático	9
3	Metodologia	11
3.1	Centro de Gravidade (C_G)	12
3.2	Momentos de inércia	13
3.3	Centro de Pressão (C_P) e Força Normal (C_N)	16
3.3.1	Centro de Pressão para $\alpha = 0$:	17
3.3.2	Centro de Pressão para $\alpha \neq 0$:	19
3.4	Coeficiente de Arrasto (C_D)	20
3.4.1	Número de Mach	20
3.4.2	Coeficiente de arrasto da superfície do foguete	21
3.4.3	Coeficiente de arrasto de pressão no corpo	22
3.4.4	Coeficiente de arrasto de pressão nas aletas	23
3.4.5	Coeficiente de arrasto da base do foguete	24
3.4.6	Coeficiente de arrasto axial	24

3.5	Força de Arrasto (D)	26
3.6	Equações Finais de Movimento	26
4	Resultados e Discussões	29
5	Conclusão e Perspectivas	30
6	Referências Bibliográficas	31
A	Anexo I	33
A.1	Modelagem do foguete (Massa variável)	33
A.2	Conservação de massa	34
A.3	Conservação da quantidade de movimento linear	34
A.4	Conservação da quantidade de movimento angular	38
A.5	Forças e momentos externos	47
A.5.1	Momento gerado pelas forças externas	49
A.6	Ângulos de Euler	50
A.7	Sumário contendo as equações finais encontradas:	54
B	Anexo II	57
C	Anexo III	58

Introdução

Estudos de movimentos livres e forçados de corpos rígidos têm sido e continuam a ser documentados na literatura. Estes estudos levaram ao desenvolvimento de importantes instrumentos científicos assim como o giroscópio e também ‘a concepção da estabilização por rotação (“spin stabilization”) de naves espaciais. Por outro lado, sistemas de massa variáveis têm recebido relativamente pouca atenção na literatura, embora eles tenham um papel igualmente importante na tecnologia moderna, especialmente para o voo espacial. A expressão “sistema de massa variável”, como usado no contexto dessa proposta, refere-se a sistemas mecânicos que perdem ou ganham massa enquanto em movimento. Exemplos de tais dispositivos são abundantes na literatura de engenharia. Eles incluem sistemas complexos como aviões, foguetes e robôs móveis que pegam ou largam objetos, bem como de sistemas mais simples, tais como sistemas de aspersão de água ou um balão inflado com perda de ar através de um ou mais buracos.

Sistemas de massa variável podem ser divididos em duas classes: aqueles com variação contínua de massa e aqueles com variação discreta da massa. Foguetes, por exemplo, caem na categoria de sistemas com variação contínua de massa, e robôs móveis que pegam ou largam objetos, ou um

veículo em movimento que perde sua carga em pequenos pedaços, caem na categoria de sistemas com variação discreta de massa. Como sistemas com variação discreta de massa podem ser analisados usando princípios conhecidos da dinâmica de múltiplos corpos rígidos, o foco nesta proposta são sistemas com variação contínua de massa.

É evidente a partir da intuição de que para sistemas onde a mudança líquida de massa, assim como a taxa de variação de sua massa é pequena, não há a necessidade de se levar em conta a variação de massa no estudo do movimento do sistema. Por exemplo, automóveis são de fato sistemas com massa variável, mas ninguém leva em conta a variação de massa nos estudos de performance e manobrabilidade de automóveis comuns. A razão para isso é que a variação de massa é corretamente vista como desprezível. Por outro lado, um sistema que sofre variação considerável de massa, especialmente em um curto período de tempo, deverá ter a variação de massa levada em conta, senão qualquer previsão sobre a resposta do sistema será distante do seu verdadeiro comportamento. Consequentemente, o foco do trabalho proposto é o estudo e implementação das equações de movimento que regem corpos que apresentam variação substancial de sua massa e que, consequentemente, terá alteração em seu comportamento dinâmico em relação a aquele com massa contínua.

1.1 Primeiros Estudos de Sistemas de Massa Variável

Estudos científicos de sistemas de massa variável começaram a mais de 200 anos. As pesquisas desse campo tem uma longa história esporádica. O estudo mais antigo que se tem registro é datado do século XVIII por Bernoulli (1738) [1]. Na época, ele estudava as forças agindo em um barco com propulsão a jato líquido (o líquido seria elevado a uma altura superior ao nível do mar e escoaria por gravidade em orifícios na popa da embarcação) -uma antiga aplicação do princípio de propulsão a jato. Ele derivou o que podemos chamar de uma equação de movimento para esse caso específico.

O cientista e inventor tcheco, George von Buquoy (1781-1851), foi o primeiro a propor o problema

geral da dinâmica de sistemas de massa variável. Em 1812, ele obteve sua fórmula de movimento para tais sistemas, e conseguiu resolver vários exemplos baseando-se em sua fórmula. Pode-se dizer que o trabalho (veja [2] e [3]) de von Buquoy marca o nascimento da dinâmica de sistemas de massa variável. Enquanto isso Willian Moore [5], na Inglaterra, desenvolveu a sua teoria matemática do movimento de foguetes em 1813. Em 1819 Poisson [6] usou uma abordagem mais moderna e derivou equações de movimento de corpos com massa variável baseada na fórmula geral de Lagrange. No livro de Tait e Steele publicado em 1856 [4], foi incluída uma seção falando sobre sistemas de massa variável. Eles postularam que a variação de massa produzia pequenos impactos contínuos ou forças impulsivas nos sistemas, resultando em mudanças de velocidade. Em seguida, vários anos depois, temos Mescherskii, que trabalhou no assunto no período de 1897 a 1904 (veja [7] e [8]). Mescherskii essencialmente proporcionou as fundações para o desenvolvimento da dinâmica de corpos com massa variável como uma disciplina especial da mecânica. Ele devotou sua tese de mestrado [8] explorando um largo conjunto de problemas relevantes para dinâmica de massa variável - da derivação das equações de movimento até a solução de uma série de problemas. Porém todas essas primeiras investigações de sistemas de massa variável estavam limitados em um ponto: apenas se preocupavam com o estudo do movimento de translação desses sistemas. As questões que envolvem o movimento de rotação desses sistemas só foram abordadas no meio dos anos 40 do século XX.

A segunda guerra mundial fez ressurgir o interesse na dinâmica de sistemas de massa variável, principalmente em projetos sobre foguetes. Na época, o movimento de translação de tais sistemas foram relativamente bem compreendidos, e o foco principal das pesquisas na dinâmica de sistemas de massa variável começou a mudar para estudo do movimento de rotação de tais sistemas. Alguns dos grandes cientistas dessa nova era incluíram Rosser et. al (1947) [10], Gantmacher Levin (1949) [11], Ellis McArthur (1959) [9]. As equações para o movimento de rotação derivadas por esses investigadores são bem similares, e têm formas parecidas com as equações de Euler para corpos

rígidos, com termos extras que consideram a variação da massa. Thomson se destaca como um dos principais contribuintes para a área através do seu livro de 1961 [13], e os artigos complementares (1965, 1966) (veja [12] e [13]). Ele derivou várias versões de equações de movimento de massa variável e seu trabalho permite ampla visão da física envolvida no comportamento de foguetes. No estudo dele sobre atitude do movimento transversal de um foguete axissimétrico sem rotação em relação ao seu eixo de simetria, ele mostrou que a variação do movimento transversal depende da razão entre a distância do centro de massa do sistema em relação ao bocal de escape e o raio de giro transversal do foguete. Se essa razão é maior que um (o caso mais comum), a velocidade angular transversal diminui com o tempo; e quando essa razão é menor que um, a velocidade angular transversal aumenta com o tempo. Warner (1968) [15] trouxe alguns refinamentos ao trabalho de Thomson e apontou como várias hipóteses simplificadoras podem levar a previsões de movimentos drasticamente diferentes. Meirovitch (1970) [16] moveu o trabalho com sistemas de massa variável um passo adiante considerando o impacto da variação da massa em foguetes.

Falhas no entendimento da dinâmica de sistemas de massa variável foram descobertas no início dos anos 80, quando em diversas missões espaciais com estágios superiores propelidos pelo foguete Star 48 com combustível sólido foram observados comportamentos estranhos. De maneira rápida (inesperada e inexplicada) um crescimento no ângulo de caturro ocorreu próximo ao fim da combustão do motor. O foguete Star 48 foi o primeiro foguete sólido conhecido a produzir tal anomalia, que diferente de seus predecessores era maior e tinha a construção do bocal submergida.

O problema com o foguete Star 48 desencadeou outra enxurrada de investigações [Eke (1983) [17], Meyer (1983) [20], Mingori e Yam (1986) [21], Flandro (1987) [18], Cochran e Kang (1991) [19]] no comportamento da dinâmica dos sistemas de massa variável.

Assim sendo, o andamento desta sessão mostra que a dinâmica de sistemas de massa variável ainda não é um tópico da mecânica totalmente compreendido e que merece atenção, principalmente na área aeroespacial.

Contudo, o conteúdo deste artigo, assim como citado brevemente no resumo, pretende consolidar o modelo matemático desenvolvido pelo orientador e efetuar os cálculos dos coeficientes e parâmetros usados durante as equações, é válido ressaltar que a principal referência teórica utilizada para a evolução destes cálculos foi o manual técnico do software OpenRocket [22]. Desta forma, com os dados empíricos fornecidos pela UFABC Rocket Design no projeto Angra, teremos informações suficientes de dados de dinâmica de voo e estruturais do foguete para que possamos concluir os cálculos. Claramente, como a complexidade de um projeto deste tipo é relativamente alta por conta das inúmeras variáveis, algumas hipóteses foram adotadas e apontadas durante o artigo. Por fim, a etapa final do projeto consiste em, após as equações de movimento estejam descritas e revisadas junto de todos os parâmetros e variáveis devidamente calculados, a implementação disto em um software desenvolvido em linguagem matlab, que será responsável por calcular numericamente as variáveis elaboradas aqui neste artigo somente por equações e devolver os dados de saída do voo, como posição e velocidade por tempo.

Modelo Matemático

Durante a produção do modelo matemático, o orientador adotou algumas hipóteses para que o desenvolvimento matemático do projeto juntamente com o passo a passo das equações de movimento adotadas fosse possível. Deste modo, as equações que descrevem o fenômeno poderão ser integradas com os métodos de integração via matlab e irão resultar na simulação final de lançamento, devolvendo como saída do programa os resultados de voo do foguete em questão. Este método teve como base as formulações da dinâmica de foguetes mencionadas no artigo de Mahler e dos Santos [16] e, além disso, dentre algumas destas hipóteses que foram tomadas para que o modelo pudesse ser aplicado podemos citar:

- O centro geométrico do foguete condiz com o centro de massa da carcaça
- O centro de massa do corpo do foguete é fixo. O foguete foi dividido em duas partes: o corpo do mesmo e seu combustível.
- A propulsão do foguete é por meio da queima de um combustível sólido, e segue uma taxa de queima dada

A partir de fórmulas da dinâmica de corpos rígidos, de textos pesquisados sobre o assunto e de alguns conceitos de mecânica dos fluidos, a dinâmica do movimento do foguete foi modelada por meio das fórmulas da quantidade de movimento (linear e angular), das forças externas resultantes e do momento das forças externas. Além disso, Para facilitar a formulação foram utilizados os ângulos de Euler, visto que seria mais fácil descrever todas as fórmulas a partir de um referencial fixo no foguete. O modelo matemático e as hipóteses que foram adotadas podem ser visto com mais clareza e detalhes em anexo neste mesmo artigo. Contudo, como já foi dito, para que a integração e implementação das equações possam ser aplicadas, ainda é necessário desenvolver alguns parâmetros como os calculos de forças, coeficientes aerodinâmicos e momentos de inércia já que estes são medidas necessárias para o voo. Dito isto, iremos implementar estes calculos necessários na metodologia e, desta forma, poderemos avançar com a implementação das equações de movimento no software.

Metodologia

Como citado anteriormente, a metodologia irá se basear na complementação do modelo matemático já existente, isto é, neste tópico desenvolveremos os assuntos necessários utilizados durante as equações de movimento adotadas. Assim sendo, todos os parâmetros aqui calculados irão ser utilizados durante a implementação matemática no software, como por exemplo os calculos dos parâmetros aerodinâmicos do foguete. Desta forma, temos que os assuntos necessários a serem desenvolvidos são

- Cálculo do Centro de Gravidade (C_G)
- Momentos de inércia e Produtos de inércia
- Cálculo do Centro de Pressão (C_P)
- Cálculo da Força Normal (C_N)
- Cálculo da Força de Arrasto (C_D)

Deste modo, abordaremos cada um destes assuntos separadamente em tópicos para demonstrar como estes parâmetros foram calculados.

3.1 Centro de Gravidade (C_G)

Para o cálculo do centro de gravidade o foguete foi dividido em componentes principais que compunham o foguete como um todo, são:

- Propelente
- Motor
- Coifa
- Tubo do corpo
- Fuselagem rec1
- Fuselagem rec2
- Fuselagem eletrônica
- Fuselagem propelente
- Caixa de empenas
- Aletas

Para o devido cálculo de C_G a premissa adotada para os componentes, exceto para a coifa e aletas por conta de seu formato não cilíndrico, foi que o C_{GLocal} do componente correspondia a metade do seu comprimento. Para a coifa considerou-se o cálculo do centro de gravidade de um cone e, para a aleta, o de um trapézio composto por dois triângulos e um retângulo. Deste modo temos que

$$C_{Gcoifa} = h - \frac{h}{4} \quad (3.1)$$

$$C_{Galeta} = \frac{A_{ret} \cdot C_{Gret} + A_{tri1} \cdot C_{Gtri1} + A_{tri2} \cdot C_{Gtri2}}{A_{ret} + A_{tri1} + A_{tri2}} \quad (3.2)$$

onde h é a altura do cone e $A_{ret}, A_{tri1}, A_{tri2}, C_{Gret}, C_{Gtri1}, C_{Gtri2}$ são, respectivamente, a altura e centro de gravidade local do retângulo, e dos dois triângulos respectivos que compõem a aleta. Além disso, vale ressaltar que, para o centro de gravidade da coifa, o elemento "h" serve apenas para colocar a posição em relação ao nosso referencial.

Assim sendo, após calculado o C_{GLocal} , foi levado em conta a posição do componente em relação a origem adotada, ou seja, a ponta da coifa e, posteriormente, este foi transladado para este mesmo ponto de referência.

3.2 Momentos de inércia

No tópico do momento de inércia iremos adotar como hipótese, assim como foi feito para o calculo de C_G , que todos os componentes, exceto a coifa e a aleta, possuem formato cilindrico, este pode ser considerado oco ou sólido dependendo da parte do foguete que estamos nos referindo. Porém, diferentemente do calculo de C_G , no momento de inércia iremos considerar e calcular as contribuições de cada um dos componentes a fim de encontrar um resultado mais fiel a realidade. Além disso, também é valido ressaltar que os eixos de referência foram todos considerados passando pelo centro de gravidade da carcaça do foguete . Em anexo, pode ser observado uma breve listagem de quais são os componentes usados e suas respectivas massas para o foguete Angra em questão. Contudo, temos que o momento de inércia foi calculado do seguinte modo:

- Momento de inércia no eixo Z (eixo do foguete)

- Para cilindro oco

$$I_z = \frac{1}{2}M(R_I + R_E)^2 \quad (3.3)$$

onde R_I e R_E são o raio interno e externo do cilindro, respectivamente, em questão.

- Para cilindro sólido

$$I_z = \frac{1}{2}MR^2 \quad (3.4)$$

- Para a coifa

$$I_z = \frac{3}{10}MR^2 \quad (3.5)$$

- Para a aleta

Para a aleta, como sua geometria equivale a um trapézio, calcularemos o seu momento de inércia para o retângulo e os triângulos que a compõe separadamente e, feito isso, aplicaremos o teorema de steiner para encontrarmos o momento de inércia destes componentes em relação ao C_G do trapézio inteiro, assim sendo, temos

$$I_{z_{ret},local} = \frac{a_{ret}^3 \cdot l_{ret}}{12} \quad (3.6)$$

$$I_{z_{tri},local} = \frac{a_{tri}^3 \cdot l_{tri}}{36} \quad (3.7)$$

onde a e l se referem a altura e comprimento do componente em questão calculado, visto que, o subescrito ret e tri se referem ao retângulo e os triângulos, respectivamente. Assim sendo, calculado o momento de inércia local de cada componente do trapézio, basta transferirmos este valor para o C_G local do trapézio por inteiro. Desta forma, temos

$$I_{z_{ret}} = I_{z_{ret},local} + M_{ret} \cdot D_{ret} \quad (3.8)$$

$$I_{z_{tri}} = I_{z_{tri},local} + M_{tri} \cdot D_{tri} \quad (3.9)$$

onde M se refere a massa de cada componente enquanto D_{ret} e D_{tri} se referem a distância perpendicular do C_G local do componente, isto é, retângulo ou triângulo que compõem a aleta ao C_G local do trapézio.

- Momento de inércia no eixo X

- Para cilindro oco

$$I_x = \frac{1}{4}M(R_I + R_E)^2 + \frac{1}{12}ML^2 \quad (3.10)$$

onde R_I e R_E são o raio interno e externo do cilindro, respectivamente, em questão, enquanto L é o comprimento do corpo.

- Para cilindro sólido

$$I_x = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2 \quad (3.11)$$

- Para a coifa

$$I_x = \frac{3}{5}(MD_{coifa})^2 \cdot (\frac{1}{4}R^2 + L^2) \quad (3.12)$$

onde, D é a distância do C_G da coifa em relação ao ponto de referência adotado no foguete, isto é, a própria ponta da coifa.

- Para a aleta

Para a aleta, assim como feito para os outros eixos, calcularemos o momento de inércia para o retângulo e os triângulos que a compõe separadamente e, feito isso, faremos um teorema de steiner para colocar estes em relação ao seu C_G local, porém, para os eixos diferentes de "z", teremos que adotar os calculos para momento de inércia das aletas de modo que cada par seja analisado isoladamente, visto sua disposição espacial no foguete. Assim sendo, separaremos entre 2 pares de aletas, as aletas "horizontais" e as "verticais". Desta forma, analisando separadamente teremos

- * Para Aletas horizontais

$$I_{x_{hret,local}} = \frac{a_{ret} \cdot l_{ret}^3}{12} \quad (3.13)$$

$$I_{x_{htri,local}} = \frac{a_{tri} \cdot l_{tri}^3}{36} \quad (3.14)$$

contudo, utilizando as mesmas simbologias que no cálculo para o eixo "z", iremos novamente transferir o C_G local de cada componente que compõe o trapézio para o C_G local do trapézio por completo. Deste modo, semelhante ao que já foi feito,

temos

$$I_{x_{hret}} = I_{x_{hret,local}} + M_{ret} \cdot D_{ret} \quad (3.15)$$

$$I_{x_{htri}} = I_{x_{htri,local}} + M_{tri} \cdot D_{tri} \quad (3.16)$$

* Para Aletas verticais

Neste caso, um pouco diferente do que já foi visto, temos que o momento de inércia das componentes que compõem essa aleta podem ser calculados a partir de parâmetros passados, desta forma

$$I_{x_{vret,local}} = I_{x_{hret,local}} + I_{z_{ret,local}} \quad (3.17)$$

$$I_{x_{vtri,local}} = I_{x_{htri,local}} + I_{z_{tri,local}} \quad (3.18)$$

contudo, utilizando o mesmo conceito usado anteriormente, transferindo o C_G local de cada componente que compõe o trapézio para o C_G local do trapézio por completo, teremos que

$$I_{x_{vret}} = I_{x_{vret,local}} + M_{ret} \cdot D_{ret} \quad (3.19)$$

$$I_{x_{vtri}} = I_{x_{vtri,local}} + M_{tri} \cdot D_{tri} \quad (3.20)$$

- Momento de inércia no eixo Y Para este eixo, temos que os calculos são equivalentes em relação ao eixo X, assim sendo, podem ser aplicadas as mesmas equações apenas alterando os valores das respectivas variáveis de acordo com as dimensões do foguete.

3.3 Centro de Pressão (C_P) e Força Normal (C_N)

O cálculo do centro de pressão e força normal presente no foguete possuem uma relação direta, visto que, é necessários da força normal de cada componente do foguete para obter o centro de pressão do mesmo, deste modo, neste tópico do trabalho iremos abordar ambos os calculos de maneira conjunta.

Para o cálculo do centro de pressão do foguete, o separaremos em dois casos, onde o ângulo de ataque do foguete, em um dos casos, será igual a 0 e para o outro será diferente de zero, assim englobaremos todas as possibilidades possíveis durante o voo. Além disso, para o caso de $\alpha = 0$, nem todos os componentes do foguete contribuem com o cálculo do centro de pressão, isto porque o formato cilíndrico de grande parte dos componentes do foguete, por ser totalmente homogêneo, não corrobora na alteração do centro de pressão, desta forma os componentes analisados aqui serão apenas a coifa e a aleta. Entretanto, quando $\alpha \neq 0$ teremos uma contribuição causada pelo corpo cilíndrico do foguete. Com isto, separando os dois casos:

3.3.1 Centro de Pressão para $\alpha = 0$:

Para o caso das aletas em específico usaremos as derivadas parciais da força normal presente em cada componente do foguete em relação ao ângulo α . Feito isso, vamos ter que o cálculo de C_P será relacionado a contribuição de cada uma destas parcelas do seguinte modo:

$$C_P = \frac{\sum_{i=1}^n C_{Pi}(C_{N\alpha})_i}{\sum_{i=1}^n (C_{N\alpha})_i} \quad (3.21)$$

Analisando as contribuições dos componentes do foguete separadamente:

- Coifa

Considerando a coifa como um cone, temos

$$(C_{N\alpha})_c = 2 \quad (3.22)$$

$$(C_P)_c = \frac{2}{3}L_c \quad (3.23)$$

onde $(C_{N\alpha})_c$ é a derivada parcial da força normal presente na coifa em relação a α , $(C_P)_c$ é a posição do centro de pressão da coifa e L_c o comprimento da coifa.

- Aletas

Para este caso em específico, além da derivada parcial da força normal na aleta em relação a α $(C_{N\alpha})_h$ e o centro de pressão da aleta $(C_P)_h$ também irá ser levado em conta um fator de correção decorrente da interferência do corpo do foguete nas aletas que chamaremos de "K".

Assim teremos que

$$(C_{N\alpha})_h = \frac{4N\left(\frac{S}{D}\right)^2}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2L_F}{C_R + C_T}\right)^2}} \quad (3.24)$$

$$(C_P)_h = X_F + \frac{X_S(C_R + 2C_T)}{3(C_R + C_T)} + \frac{1}{6}\left(C_R + C_T - \frac{C_R C_T}{C_R + C_T}\right) \quad (3.25)$$

$$K = 1 + \left(\frac{R}{R + S}\right) \quad (3.26)$$

basicamente, as incógnitas são todas dependentes das dimensões do foguete e, em específico, das aletas. Desta forma, temos que

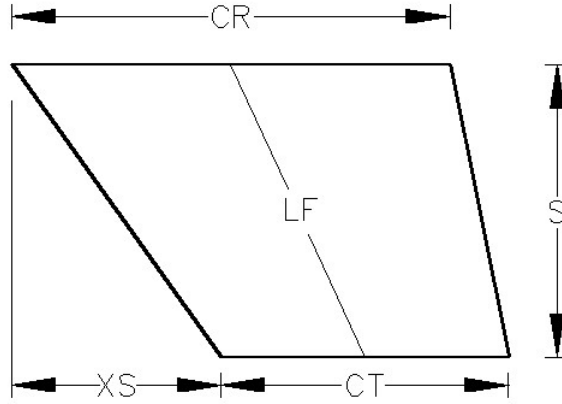


Figura 3.1: Dimensões Aleta

onde

$$L_F = \sqrt{S^2 + \left(X_S + \frac{C_T}{2} - \frac{C_R}{2}\right)^2} \quad (3.27)$$

$$R = \frac{D}{2} \quad (3.28)$$

além das dimensões exibidas na imagem, temos que D é o diametro maximo do corpo do foguete, N é o número total de aletas no foguete e X_F é a distância da ponta da coifa até o inicio das aletas

O corpo do foguete possui a componente da força normal igual a 0. Portanto, a aleta e a coifa irão compor sozinhas, conforme a equação exibida no inicio do artigo o cálculo final do C_P total deste foguete no caso onde $\alpha = 0$. Desta forma

$$C_P = \frac{(C_P)_c(C_{N\alpha})_c + (C_P)_h(C_{N\alpha})_h K}{(C_{N\alpha})_c + C_{N\alpha})_h K} \quad (3.29)$$

3.3.2 Centro de Pressão para $\alpha \neq 0$:

Para este caso em específico deixaremos de usar a derivada parcial de C_N em função de α $(C_N)_\alpha$ e iremos usar o próprio C_N para o cálculo de C_P

$$C_P = \frac{\sum_{i=1}^n C_{Pi}(C_N)_i}{\sum_{i=1}^n (C_N)_i} \quad (3.30)$$

Além das componentes adotadas no cálculo para $\alpha = 0$, também irá ser considerado um fator de correção proposto por Robert Galejs em relação ao corpo do foguete. Calculando separadamente as contribuições de cada elemento teremos

- Coifa

$$(C_N)_c = 2 \sin(\alpha) \quad (3.31)$$

$$(C_P)_c = \frac{2}{3} L_c \quad (3.32)$$

- Aletas

$$(C_N)_h = \frac{4N(\frac{S}{D})^2 \alpha}{1 + \sqrt{1 + (\frac{2L_F}{C_R + C_T})^2}} \quad (3.33)$$

$$(C_P)_h = X_F + \frac{X_S(C_R + 2C_T)}{3(C_R + C_T)} + \frac{1}{6}(C_R + C_T - \frac{C_R C_T}{C_R + C_T}) \quad (3.34)$$

$$K = 1 + (\frac{R}{R + S}) \quad (3.35)$$

- Corpo foguete

$$(C_N)_b = C \frac{A_{plan}}{A_{ref}} \sin^2(\alpha) \quad (3.36)$$

$$(C_P)_b = \frac{L_b}{2} + X_F \quad (3.37)$$

onde L_b é o comprimento do corpo do foguete, C é uma constante que vale 1,1, A_{plan} é a área planiforme do corpo do foguete que pode ser calculada como $A_{plan} = dl$ com d e l sendo, respectivamente, diâmetro do corpo e comprimento do corpo e A_{ref} sendo a área da base do corpo do foguete que é calculada por $A_{ref} = \pi r^2$

Contudo, para este caso, o C_P do foguete será dado por

$$C_P = \frac{(C_P)_c(C_N)_c + (C_P)_h(C_N)_h K + (C_P)_b(C_N)_b}{(C_N)_c + (C_N)_h K + (C_N)_b} \quad (3.38)$$

3.4 Coeficiente de Arrasto (C_D)

Para começarmos a abordar este assunto, primeiro devemos tratar de calcular o número de Mach que é uma medida muito utilizada em problemas envolvendo dinâmica em fluidos, este é a velocidade de um corpo relativamente à velocidade do som nas mesmas condições ambientais. Desta forma, este parâmetro será necessário para os cálculos dos coeficientes aerodinâmicos.

3.4.1 Número de Mach

Sabendo que o número de Mach é calculado a partir da relação entre a velocidade do foguete (V_F) e velocidade do som (V_S) em determinado instante de tempo, temos

$$M = \frac{V_F}{V_S} \quad (3.39)$$

A velocidade do foguete durante o lançamento será resultado das expressões utilizadas e exibidas no modelo matemático. Porém, é necessário calcular a velocidade do som durante os mesmos instantes de tempo por conta de sua variação recorrente devido a mudança temperatura e altitude durante o voo. Adotando o ar como um gás ideal, temos que a velocidade do som pode ser calculado como

$$V_S = \sqrt{\frac{\gamma RT}{m_m}} \quad (3.40)$$

onde $\gamma = 1,4$ que é o coeficiente de expansão adiabática do ar, $R = 8,31 \text{ J/MolK}$ é a constante ideal dos gases, T é a temperatura absoluta em Kelvin do ar onde o foguete se encontra em determinado momento e $m_m = 0,02897 \text{ Kg/Mol}$ que é a massa molar do ar. Com isso temos que

$$V_S = \sqrt{\frac{1,4 \cdot 8,31T}{0,02897} \left(\frac{273K}{273K}\right)} \quad (3.41)$$

$$V_S \approx 331 \sqrt{\frac{T}{273K}} \quad (3.42)$$

Para sabermos o valor da temperatura em determinada instante e, conseqüentemente, altitude, iremos adotar um perfil de altitude x temperatura que irá ser interpolado durante todo o intervalo de tempo de lançamento e, utilizando a relação exibida acima, nos proporcionará uma estimativa da velocidade do som no local conforme o trajeto do foguete.

Com isso, conseguiremos encontrar o número de Mach local para determinado instante do lançamento e, portanto, agora podemos encontrar as forças aerodinâmicas presentes no foguete em questão.

3.4.2 Coeficiente de arrasto da superfície do foguete

Causado pelo atrito do fluido viscoso de ar ao redor do foguete. Pode ser calculado por

$$(C_D)_{atrito} = (C_f)_c \frac{\left(1 + \frac{1}{2f_B}\right)A_{Mcorpo} + \left(1 + \frac{2t}{\bar{c}}\right)A_{Maletas}}{A_{ref}} \quad (3.43)$$

onde f_B é a razão de finura do foguete, isto é, a razão entre o comprimento do corpo do foguete em relação ao seu diâmetro, t é espessura do foguete, \bar{c} é "chord length", isto é, condiz com o

comprimento da diagonal que une as extremidades da aleta, A_{Mcorpo} é a área molhada do corpo do foguete, $A_{Maletas}$ é a área molhada das aletas e A_{ref} é a área da base da coifa do foguete e $(C_f)_c$ é dado pela expressão

$$(C_f)_c = \frac{C_f}{1 + 0,18M^2} \quad (3.44)$$

onde

$$C_f = 1,48 \cdot 10^{-2} \quad (3.45)$$

as demais variáveis citadas podem ser expressas matematicamente como

$$f_B = \frac{L_{corpo}}{d} \quad (3.46)$$

$$A_{Mcorpo} = \pi r g + 2\pi r L_{corpo} \quad (3.47)$$

$$A_{Maletas} = 2 \frac{(C_R + C_T)S}{2} \quad (3.48)$$

$$A_{ref} = \pi r^2 \quad (3.49)$$

$$g = r_{coifa}^2 + h_{coifa}^2 \quad (3.50)$$

onde g é geratriz da coifa, L_{corpo} , d e r são, respectivamente, o comprimento, o diâmetro e o raio do corpo do foguete.

3.4.3 Coeficiente de arrasto de pressão no corpo

Antes de definirmos o coeficiente de arrasto em cada componente é necessário ressaltar que utilizaremos a simbologia \bullet para sinalizar que a força de arrasto está sendo calculado em relação a área local do componente descrito em cada sessão (área frontal). Também denifaremos em cada sessão a área de cada componente para, posteriormente, transferirmos essas contribuições em relação a área global do foguete (A_{ref}). Esta conversão é dada pela expressão

$$C_D = \frac{A_{comp}}{A_{ref}} (C_{D\bullet}) \quad (3.51)$$

- Coeficiente de arrasto de pressão na Coifa

Como a coifa pode ser considerada um cone, teremos que o coeficiente de arrasto para a mesma será

$$(C_{D\bullet})_{coifa} = 0,2 \quad (3.52)$$

enquanto a área frontal da coifa é dado por

$$A_{coifa} = \pi r g \quad (3.53)$$

- Coeficiente de arrasto de pressão na cauda do foguete

Neste caso, como a "cauda" (boattail) para o foguete adotado tem a mesma geometria da base do foguete, desta forma temos que

$$(C_{D\bullet})_{cauda} = (C_{D\bullet})_{base} \quad (3.54)$$

$$A_{cauda} = A_{base} \quad (3.55)$$

onde $(C_{D\bullet})_{base}$ e A_{base} serão definidos mais para frente nesta mesma sessão. Por conta de possuir as mesmas dimensões, consideraremos a cauda como parte do comprimento do corpo nos cálculos.

3.4.4 Coeficiente de arrasto de pressão nas aletas

Como estamos tratando de um foguete subsônico, iremos adotar que o coeficiente de arrasto será dado pela seguinte expressão

$$(C_{D\bullet})_{aletas} = [(1 - M^2)^{-0,417} - 1] \cos^2(\Gamma_L) + (C_{D\bullet})_{base} \quad (3.56)$$

onde Γ_L é o ângulo do bordo de ataque mostrado na figura abaixo

além disso, temos que a área frontal das aletas será

$$A_{aletas} = \frac{(C_R + C_T)S}{2} \quad (3.57)$$

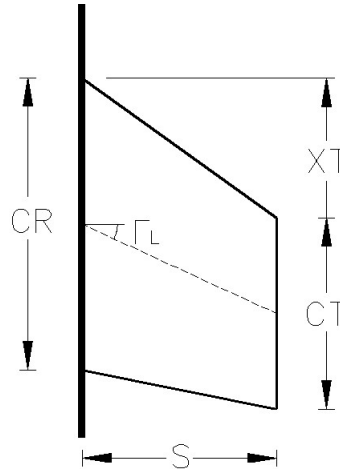


Figura 3.2: Ângulo aleta

3.4.5 Coeficiente de arrasto da base do foguete

Para casos de foguetes subsônicos, assim como o usado de referência, a expressão que calcula esta componente é dada por

$$(C_{D\bullet})_{base} = 0,12 + 0,13M^2 \quad (3.58)$$

enquanto a área da base é aproximada através da diferença entre a área do corpo com a área do motor, isto é, caso o motor esteja preenchendo todo o corpo do foguete ele não irá gerar arrasto. Para o foguete base estudado, temos que o raio do motor é de 5,7 cm enquanto o raio da referência é de 7,8 cm. Isto é, temos uma diferença considerável e, por conta disso, temos que

$$A_{base} = \pi r^2 - \pi r_{motor}^2 \quad (3.59)$$

3.4.6 Coeficiente de arrasto axial

O coeficiente de arrasto axial total pode ser calculado com as contribuições descritas acima da seguinte forma

$$(C_D) = \sum_T \frac{A_{comp}}{A_{ref}} (C_{D\bullet})_T + (C_D)_{atrito} \quad (3.60)$$

Contudo, utilizando as expressões deduzidas nas sessões acima, teremos que a equação para o calculo do coeficiente final será

$$C_D = \frac{1}{\pi r^2} (A_{coifa}(C_D \bullet)_{coifa} + A_{cauda}(C_D \bullet)_{cauda} + A_{aletas}(C_D \bullet)_{aletas} + A_{base}(C_D \bullet)_{base}) + (C_D)_{atrito} \quad (3.61)$$

a equação 3.61 acima demonstra o coeficiente de arrasto total para um ângulo de ataque (α) igual a 0. Para diferentes ângulos de ataques, formulas empiricas mostram que o ângulo varia em uma escala que é uma função polinomial de duas partes que começa em 1 em $\alpha = 0$, aumenta para 1,3 em $\alpha = 17^\circ$ e depois diminui para zero em $\alpha = 90^\circ$; a derivada também é zero nesses pontos. Como, durante o lançamento, não é considerada uma brusca variação deste ângulo de ataque então este método é uma boa aproximação para o coeficiente de arrasto durante todo o lançamento. Desta forma temos que

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= a_0\alpha^4 + a_1\alpha^3 + a_2\alpha^2 + a_3\alpha + a_4 \\ 1 &= a_00^4 + a_10^3 + a_20^2 + a_30 + a_4 \\ \therefore a_4 &= 1 \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} F'(\alpha) &= 4a_0\alpha^3 + 3a_1\alpha^2 + 2a_2\alpha + a_3 \\ 0 &= 4a_00^3 + 3a_10^2 + 2a_20 + a_3 \\ \therefore a_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} 1,3 &= a_017^{\circ 4} + a_117^{\circ 3} + a_217^{\circ 2} + 1 \\ 0 &= a_090^{\circ 4} + a_190^{\circ 3} + a_290^{\circ 2} + 1 \\ 0 &= 4a_017^{\circ 3} + 3a_117^{\circ 2} + 2a_217^{\circ} \end{aligned}$$

contudo, passando para radianos e, posteriormente, resolvendo o sistema linear teremos que $a_0 = 15,68008$, $a_1 = -32,27535$ e $a_2 = 11,60365$

3.5 Força de Arrasto (D)

Utilizando o coeficiente final calculado acima, teremos que a força de arrasto, para um angulo de ataque igual a 0, será

$$D = \frac{C_D \rho v_0^2 A_{ref}}{2} \quad (3.64)$$

e para um angulo de ataque diferente de 0, será

$$D = \frac{C_D F_{(\alpha)} \rho v_0^2 A_{ref}}{2} \quad (3.65)$$

onde ρ é a densidade do ar que será um dado encontrado por meio do perfil de altitude x temperatura e v_0 é a velocidade do ar em relação ao objeto.

3.6 Equações Finais de Movimento

Conforme dito durante o artigo, após termos os calculos dos parâmetros necessários discutidos nos tópicos acima, o proximo passo seria transcrever as equações finais de movimento do foguete, presente no modelo matemático em anexo, de forma que possamos colocá-lo no código em matlab. Assim sendo, abaixo irei exibir estas equações já transformando sua inicial forma vetorial e separando as variáveis dependentes e independentes para que possamos trabalha-las com os métodos de integração do matlab. É importante ressaltar que para encontrar as equações abaixo foram adotadas as hipóteses que $(CG - O) = -|CG - O|\vec{k}$ e também que $\vec{V}_{CG,r} = V_{CG,r}\vec{k}$. Contudo, temos que as equações finais de movimento do foguete que serão implementadas no software são dadas por

- Conservação de massa:

$$\frac{d}{dt}M_c(t) = -\dot{m}(t) \quad (3.66)$$

- Conservação da quantidade de movimento linear:

- Para o eixo X:

$$\begin{aligned}
 M_c(t)\{-\dot{\Omega}_{Ry}|C_G - O|\} + (M_f + M_c(t))\dot{V}_{Ox} &= (M_f + M_c(t))g\text{sen}(\xi_5) \\
 - L_x + \left[-\dot{m}_G|\vec{V}_r| + (P_e - P_a)A_{Tubeira}\right] \cos(\theta)\text{sen}(\gamma) & \\
 + M_c(t)\{2\Omega_{Ry}V_{CG,r} - \Omega_{Rz}\Omega_{Rx}|C_G - O|\} & \\
 - \frac{dM_c}{dt}[-\Omega_{Ry}|C_G - O|] &
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

- Para o eixo Y:

$$\begin{aligned}
 M_c(t)\{\dot{\Omega}_{Rx}|C_G - O|\} + (M_f + M_c(t))\dot{V}_{Oy} &= L_y + [-\dot{m}_G|\vec{v}_r| + (P_e - P_a)A_{Tubeira}]\sin(\theta) \\
 + M_c(t)\{-2\Omega_{Rx}V_{CG,r} - \Omega_{Rz}[\Omega_{Ry}|C_G - O|]\} & \\
 - \frac{dM_c}{dt}[\Omega_{Rx}|C_G - O|] &
 \end{aligned} \tag{3.68}$$

- Para o eixo Z:

$$\begin{aligned}
 (M_f + M_c(t))\dot{V}_{Oz} &= -\frac{dM_c}{dt}[V_{CG,r} + V_{Oz}] - (M_f + M_c(t))g\cos(\xi_5) - D \\
 + \left[\dot{m}_G|\vec{V}_r| - (P_e - P_a)A_{Tubeira}\right] \cos(\theta)\cos(\gamma) &+ M_c(t)\{|C_G - O|(\Omega_{Rx}^2 + \Omega_{Ry}^2)\}
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

- Conservação da quantidade de movimento angular:

- Para o eixo X:

$$\begin{aligned}
 [(\frac{d}{dt}I_{O,Czz})(\Omega_{Rz} + \omega) - (\frac{d}{dt}I_{O,Cyy})\Omega_{Ry}] + M_c(t)|C_G - O|^2\dot{\omega} &+ M_c(t)\{(\dot{V}_{Oy} + a_{CGy})|C_G - O|\} = \\
 |C_P - O|\frac{1}{2}\rho U^2 C_{Ly} A_y + |T - O|(P_e - P_a)A_{Tubeira}\text{sen}(\theta) &- [\Omega_{Ry}\{(I_{O,Fzz} + I_{O,Czz})(\Omega_{Rz} + \\
 \omega)\} - \Omega_{Rz}\{(I_{O,Fyy} + I_{O,Cyy})\Omega_{Ry}\}] - \dot{m}_G|\vec{V}_r|zT\text{sen}(\theta) &
 \end{aligned} \tag{3.70}$$

- Para o eixo Y:

$$\begin{aligned}
 & [(\frac{d}{dt}I_{O,Cxx})\Omega_{Rx} - (\frac{d}{dt}I_{O,Czz})(\Omega_{Rz} + \omega)] - M_c(t)|C_G - O|^2\dot{\omega} - M_c(t)\{\dot{V}_{Ox} + a_{C_Gx}) \\
 & |C_G - O|\} = |C_P - O|\frac{1}{2}\rho U^2 C_{Lx} A_x + M_c(t)g|C_G - O|(-sen(\xi_5)) - |T - O|(P_e - \\
 & P_a)A_{Tubeira}\cos(\theta)sen(\gamma) - [\Omega_{Rz}\{(I_{O,Fxx} + I_{O,Cxx})\Omega_{Rx}\} - \Omega_{Rx}\{(I_{O,Fzz} + I_{O,Czz})(\Omega_{Rz} + \\
 & \omega)\}] + \dot{m}_G|\vec{V}_r|zT\cos(\theta)\sin(\gamma)
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

- Para o eixo Z:

$$[(\frac{d}{dt}I_{O,Cyy})\Omega_{Ry} - (\frac{d}{dt}I_{O,Cxx})\Omega_{Rx}] = \Omega_{Rx}\{(I_{O,Fyy} + I_{O,Cyy})\Omega_{Ry}\} - \Omega_{Ry}\{(I_{O,Fxx} + I_{O,Cxx})\Omega_{Rx}\} \tag{3.72}$$

• Angulos de Euler:

$$\begin{aligned}
 \Omega_{Rx} &= -\dot{\xi}_6 sen(\xi_5) \\
 \Omega_{Ry} &= \dot{\xi}_5 \\
 \Omega_{Rz} &= \dot{\xi}_6 cos(\xi_5)
 \end{aligned} \tag{3.73}$$

Resultados e Discussões

Conforme exibido durante o relatório em questão, os parâmetros e coeficientes requeridos para implementação das equações desenvolvidas no modelo matemático foram descritos e desenvolvidos com êxito, resultando assim então em uma equação final para cada termo. Além do mais, os parâmetros também se dispuseram coesos quando calculados numericamente utilizando os valores empiricos do foguete Angra durante o desenvolvimento do programa em matlab. A manipulação exigida para integração em matlab das equações finais de movimento, isto é, a separação de variáveis dependentes e independentes e desenvolvimento dos produtos vetoriais, também foram concluídas com sucesso. Deste modo, estas equações finais devem ser transcritas para dentro do programa junto com os códigos auxiliares já produzidos que calculam os parâmetros mostrados no relatório. Assim, com o código completo devemos ser capazes de encontrarmos resultados de lançamento pela simulação proposta.

Conclusão e Perspectivas

Como a simulação final do lançamento não foi finalizada, pouco se pode concluir quanto o resultado referente a dinâmica do foguete. Porém, os parâmetros e coeficientes calculados condizem com os valores teóricos e também aos resultados devolvidos pelo software OpenRocket que foi utilizado como referência, isto é, o que sustenta a ideia da baixa possibilidade de erros neste quesito. Além disto, as equações finais de movimento foram integradas e devidamente separadas para implementação computacional. Assim sendo, a perspectiva futura seria de que os códigos em matlab, localizados em anexo, que são responsáveis pelos calculos dos parâmetros discutidos no artigo fossem complementados e utilizados juntamente com as equações de movimento finais encontradas. Deste modo o objetivo final de possuir curvas e dados de teste da dinâmica de um foguete em lançamento pode ser concluído e, feito isso, estudos referente a uma possível diferença entre resultados empiricos e resultados das simulações podem ser iniciados e aprofundados, além de possíveis melhoras a serem feitas na modelagem matemática ou até mesmo no código utilizado podem ser analisados e estudados a fim de uma melhor qualidade de dados de saída do programa em questão.

Referências Bibliográficas

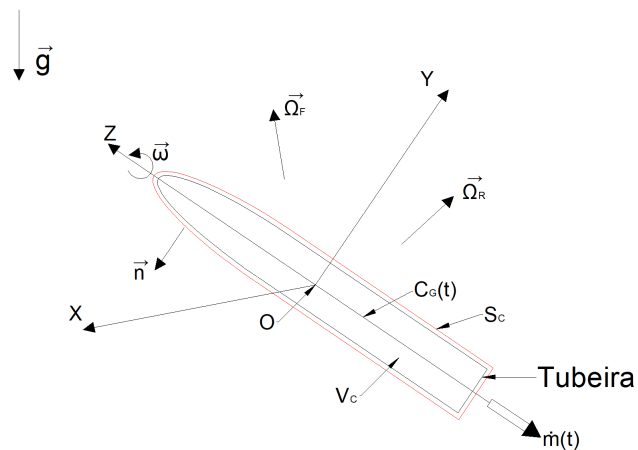
- [1] Bernoulli, D., (1738), *Hydrodynamica*, Argentorati.
- [2] Buquoy, G., (1816), "Exposition d'un Nouveau Principe General de Dynamique", Pa-ris.
- [3] von Buquoy, G., 1812, *Analytische Bestimmung des Gesetzes der Virtuellen Geschwin-digkeiten in Mechanischer und Statischer Hinsicht*, Leipzig: Breitkopf und Hartel.
- [4] Tait, P.G., Steele, W.L., 1856, *A Treatise on Dynamics of a Particle*, London, McMil-lan.
- [5] More, W., 1813, *A Treatise on the Motion of Rockets*. London.
- [6] Poisson, S.D., 1819, *Sur le Mouvement d un Système de Corps, en supposant le MassesVariables* , Bull. Sci. Soc. Philomat. Paris, avril, pp. 60-62.
- [7] Meshchersky, I.V., 1897, *Dinamika tochki Peremnoj Massy*, St Petesburg, AkademiaNauk, Pe-terburskij Universitet.
- [8] Meshchersky, I.V, 1904, *Equations of Motion of a Variable Mass Point in the GeneralCase* (in Russian), St. Petersburg Polytechnic University News, Vol.1, pp. 77-118.
- [9] Ellis, J. W. and C. W. McArthur, 1959, *Attitude Behavior of a Variable Mass Cylinder*.ASME Journal of Applied Mechanics, vol. 62, No. 4, pp. 935-940.

- [10] Rosser, J. B.; R. R. Newton et. all, 1947, Mathematical Theory of Rocket Flight. NewYork, McGraw Hill.
- [11] Gantmacher, F. R. and L. M. Levin, 1950, Equations of Motion of a Rocket. NACATM 1255.
- [12] Thomson, W. T., 1966, Equations of Motion for Variable Mass Systems. AIAA Journal,4(4): 766-768.
- [13] Thomson, W. T., 1986, Introduction to space Dynamics. New York, Dover.
- [14] Thomson, W. T. and G. S. Reiter, 1965, Jet Damping of a Solid Rocket: Theory andFlight Results. AIAA Journal, 3(3): 413-417.
- [15] Warner, G. G., 1968, A Re-Evaluation of Jet Damping. Journal Spacecraft and Rocket,5(3): 364-366.
- [16] Meirovitch, L., 1970, General Motion of a Variable-Mass Flexible rocket with InternalFlow. Journal Spacecraft and Rocket, 7(2): 186-195.
- [17] Eke, F. O. ,1983, Dynamics of Variable Mass Systems with Application to The Star48 Solid Rocket Motor., AAS 83-370, Advances in the Astronautical Sciences,V 54,p671-684.
- [18] Flandro, G. A, et. all, 1987, Fluid Mechanics of Spinning Rockets. AFRPL-TR-86-072,Air Force Rocket Propulsion Laboratory, Edwards AFB, California.
- [19] Cochran, J. E. and Kang, J. Y., 1991, Nonlinear stability Analysis of the AtitudeMotion of a Spin stabilized Upper Stage. AAS Paper 91-109, Advances in the Astro-nautical Science. V75, 345-364.
- [20] Meyer, R. X., 1983, Convective Instability in Solid Propellant Rocket Motors, AAS83-368, Advances in the Astronautical Science. V54, 657-669.
- [21] Mingori, D. L. and Yam, Y., 1986, Nutational Instability of a Spinning Spacecraftwith Internal Mass Motion and Axial Trust. AIAA paper 86-2271, AIAA/AAS As-trodynamics Conference, Williamsburg, VA, Aug. 18-20, p 367-375.
- [22] NISKANEN, Sampo. OpenRocket technical documentation. [S. l.], 10 maio 2013.

Anexo I

A.1 Modelagem do foguete (Massa variável)

- Combustível sólido
- Consumo de massa assumisse dado
- Posição do $C_G(t)$ assumisse dado
- O: centro geométrico do foguete (centro de massa da carcaça)



A.2 Conservação de massa

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\int_{vc} \rho(\vec{x}, t) dv}_{M_f + M_c(t)} + \underbrace{\int_{sc} \rho_G \vec{V}_r \cdot \vec{n} dS}_{\dot{m}(t)} = 0 \quad (\text{A.1})$$

sendo M_f a massa do corpo do foguete, $M_c(t)$ a massa do combustível sólido do foguete, $\dot{m}(t)$ a vazão de massa na combustão do combustível e as diferenciais de integração dv e dS a diferencial de volume e diferencial de área respectivamente. Proporcionando então:

$$\frac{d}{dt}(M_f + M_c(t)) + \dot{m}(t) = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{d}{dt}M_c(t) + \dot{m}(t) = 0 \quad (\text{A.3})$$

A.3 Conservação da quantidade de movimento linear

$$\frac{d}{dt} \int_{vc} \rho \vec{V} dv + \int_{sc} \rho \vec{V}_r (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) dS = \vec{R}^{Ext} \quad (\text{A.4})$$

Vamos verificar a equação acima em relação a um referencial não inercial. Onde \vec{V}_r é a velocidade relativa do fluxo de massa em relação ao foguete e \vec{V} na primeira integral acima é a velocidade absoluta.

seja P um ponto pertencente ao foguete:

$$\vec{R}_P = \vec{R}_{P,r} + \vec{R}_O \quad (\text{A.5})$$

$$\vec{V}_P = \vec{V}_{P,r} + \vec{\Omega}_R \times (P - O) + \vec{V}_O \quad (\text{A.6})$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{P,r} + \vec{\Omega}_R \times \vec{V}_{P,r} + \dot{\vec{\Omega}}_R \times (P - O) + \vec{\Omega}_R \times \vec{V}_{P,r} + \vec{\Omega}_R \times [\vec{\Omega}_R \times (P - O)] + \vec{a}_O \quad (\text{A.7})$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{P,r} + 2\vec{\Omega}_R \times \vec{V}_{P,r} + \dot{\vec{\Omega}}_R \times (P - O) + \vec{\Omega}_R \times [\vec{\Omega}_R \times (P - O)] + \vec{a}_O \quad (\text{A.8})$$

então

$$\int_{vc} \rho \vec{V} dv = \int_{vc} \rho \vec{V}_{P,r} dv + \vec{\Omega}_R \times \int_{vc} \rho (P - O) dv + \vec{V}_O \int_{vc} \rho dv \quad (\text{A.9})$$

Como a massa do foguete tem uma parcela fixa M_f e outra variável no tempo $M_c(t)$ (massa do combustível + oxidante), vamos escrever

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_f(x, y, z) + \rho_c(x, y, z, t) \quad (\text{A.10})$$

onde ρ_f é não nula somente na carcaça do foguete e ρ_c é não nula somente onde se localiza o foguete.

Assumimos (x,y,z) momentaneamente totalmente solidário ao foguete.

$$\int_{vc} \rho (P - O) dv = \int_{vc} \rho_f (P - O) dv + \int_{vc} \rho_c (P - O) dv \quad (\text{A.11})$$

temos que o resultado da primeira integral do lado direito da igualdade será igual a 0. Isto ocorre pois o centro de massa do foguete é o ponto O.

$$\int_{vc} \rho (P - O) dv = M_c(t)(C_G - O) \quad (\text{A.12})$$

sendo $C_G - O$ a posição do centro de massa do combustível em relação a O.

$$\int_{vc} \rho \vec{V}_{P,r} dv = \int_{vc} \rho_f \vec{V}_{P,r} dv + \int_{vc} \rho_c \vec{V}_{P,r} dv \quad (\text{A.13})$$

Como admitimos a possibilidade do foguete apresentar spin (rotação em relação ao seu eixo de simetria) podemos escrever

$$\vec{\Omega}_f = \omega \vec{k} + \vec{\Omega}_R \quad (\text{A.14})$$

então teremos

$$\vec{V}_{P,r} = \omega \vec{k} \times (P - O) + \vec{V}_{Pc,r} \quad (\text{A.15})$$

sendo $\vec{V}_{Pc,r}$ a velocidade relativa do combustível.

logo temos

$$\int_{vc} \rho_f \vec{V}_{P,r} dv = \omega \vec{k} \times \int_{vc} \rho_f (P - O) dv = 0 \quad (\text{A.16})$$

pois na integral a direita da equação, o O coincide com o centro de massa da carcaça do foguete.

Dando continuidade:

$$\begin{aligned}
 \int_{vc} \rho_c \vec{V}_{P,r} dv &= \vec{\omega} \times \int_{vc} \rho_c (P - O) dv + \int_{vc} \rho_c \vec{V}_{Pc,r} dv \\
 &= \vec{\omega} \times M_c(t)(C_G - O) + M_c(t) \vec{V}_{C_G,r} \\
 &= M_c(t) \{ \omega \vec{k} \times (C_G - O) \vec{k} + \vec{V}_{C_G,r} \}
 \end{aligned} \tag{A.17}$$

como o produto vetorial resultará em 0, teremos, em resumo, que

$$\int_{vc} \rho \vec{V}_{P,r} dv = M_c(t) \vec{V}_{C_G,r} \tag{A.18}$$

Para o proximo termo temos

$$\begin{aligned}
 \vec{\Omega}_R \times \int_{vc} \rho (P - O) dv &= \vec{\Omega}_R \times \left[\int_{vc} \rho_f (P - O) dv + \int_{vc} \rho_c (P - O) dv \right] \\
 &= \vec{\Omega}_R \times M_c(t)(C_G - O) \\
 &= M_c(t) [\vec{\Omega}_R \times (C_G - O)]
 \end{aligned} \tag{A.19}$$

Para o último termo temos:

$$\begin{aligned}
 \vec{V}_O \int_{vc} \rho dv &= \vec{V}_O \left\{ \int_{vc} \rho_f dv + \int_{vc} \rho_c dv \right\} \\
 &= \vec{V}_O \{ M_f + M_c(t) \}
 \end{aligned} \tag{A.20}$$

em resumo

$$\int_{vc} \rho \vec{V} dv = M_c(t) \{ \vec{\Omega}_R \times (C_G - O) + \vec{V}_{C_G,r} \} + (M_f + M_c) \vec{V}_O \tag{A.21}$$

logo

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_{vc} \rho \vec{V} dv &= \frac{dM_c}{dt} [\vec{V}_{C_G,r} + \vec{\Omega}_R \times (C_G - O)] + M_c(t) [\dot{\vec{\Omega}}_R \times (C_G - O)] \\
 &+ M_c(t) [2\vec{\Omega}_R \times \vec{V}_{C_G,r}] + M_c(t) \vec{\Omega}_R \times [\vec{\Omega}_R \times (C_G - O)] \\
 &+ \frac{dM_C}{dt} \vec{V}_O + [M_f + M_c(t)] \frac{d\vec{V}_O}{dt}
 \end{aligned} \tag{A.22}$$

portanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{vc} \rho \vec{V} dv = \frac{dM_c}{dt} [\vec{V}_O + \vec{\Omega}_R \times (C_G - O) + \vec{V}_{C_G,r}] + M_c(t) \{ \dot{\vec{\Omega}}_R \times (C_G - O) \\ + 2\vec{\Omega}_R \times \vec{V}_{C_G,r} + \vec{\Omega}_R \times [\vec{\Omega}_R \times (C_G - O)] \} + [M_f + M_c(t)] \vec{a}_O \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

onde $\vec{V}_{C_G,r}$ é a velocidade relativa do C_G do combustível em relação ao polo O.

A seguir vamos estudar o termo de fluxo. Basicamente temos fluxo de gás no bocal do foguete.

$$\int_{sc} \rho \vec{V}_r (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) dS = \int_{Tubeira} \rho_G \vec{V}_r (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) dS \quad (\text{A.24})$$

vamos aproximar o escoamento na tubeira como aproximadamente unidimensional, ou seja, a variação de \vec{V}_r na seção da tubera é desprezível. Então

$$\int_{sc} \rho \vec{V}_r (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) dS = \vec{V}_r \int_{Tubeira} \rho_G (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) dS = \vec{V}_r \dot{m}_G \quad (\text{A.25})$$

onde \dot{m}_G é a vazão da massa do gás na tubeira. \vec{V}_r é a velocidade do gás em relação à tubeira, que pode ser escrita como

$$\vec{V}_r = |\vec{V}_r| \{ -\cos \theta \cos \gamma \vec{k} + \cos \theta \sin \gamma \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \}.$$

Então podemos escrever que

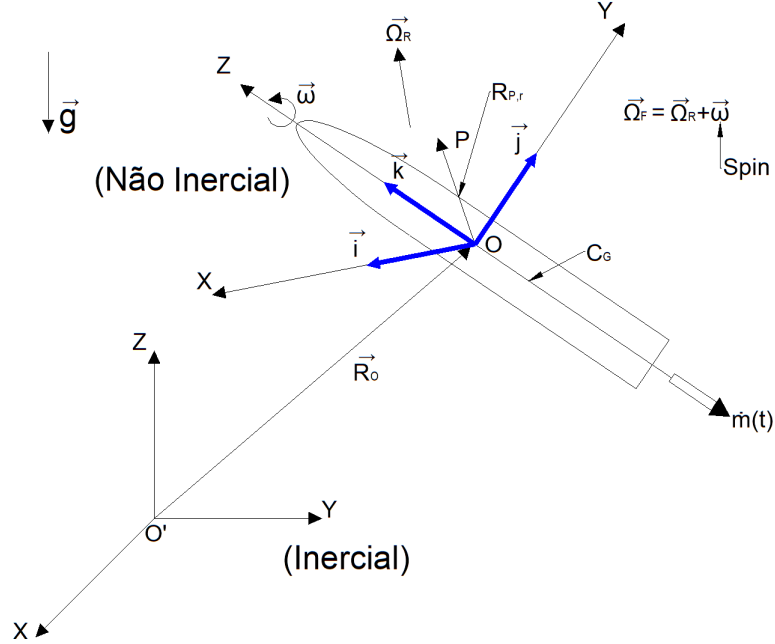
$$\int_{sc} \rho \vec{V}_r (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) dS = \dot{m}_G |\vec{V}_r| \{ -\cos \theta \cos \gamma \vec{k} + \cos \theta \sin \gamma \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \} \quad (\text{A.26})$$

Finalmente, equação para quantidade de movimento linear pode então ser escrita como

$$\begin{aligned} \frac{dM_c}{dt} [\vec{V}_{C_G,r} + \vec{\Omega}_R \times (C_G - O) + \vec{V}_O] + M_c(t) \{ \dot{\vec{\Omega}}_R \times (C_G - O) + 2\vec{\Omega}_R \\ \times \vec{V}_{C_G,r} + \vec{\Omega}_R \times [\vec{\Omega}_R \times (C_G - O)] \} + (M_f + M_c(t)) \vec{a}_O \\ - |\vec{V}_r| \{ -\cos \theta \cos \gamma \vec{k} + \cos \theta \sin \gamma \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \} = \vec{R}^{Ext} \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

onde assumimos conhecido como $M_c(t)$ varia com o tempo. Também assumimos como conhecido a variação de $(C_G - O)$ e de $\vec{V}_{C_G,r}$ ao longo do tempo. A \vec{R}^{Ext} será discutida posteriormente, mas inclui a força peso, as forças aerodinâmica e a força de pressão na saída do jato de gás na tubeira.

A.4 Conservação da quantidade de movimento angular



$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_{vc} (\vec{R}_{P,r} \times \vec{V}_P) \rho \, dv \right\} + \int_{sc} (\vec{R}_{P,r} \times \vec{V}_{P,r}) \rho (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) \, dS = \vec{M}_O^{Ext} \quad (A.28)$$

onde \vec{V}_P é a velocidade absoluta do ponto P em relação ao eixo o'xyz e $\vec{V}_{P,r}$ é a velocidade relativa do ponto P em relação a oxyz. Temos então que

$$\vec{R}_p = \vec{R}_O + \vec{R}_{P,r} \quad (A.29)$$

$$\vec{V}_P = \vec{V}_O + \vec{\Omega}_R \times \vec{R}_{P,r} + \vec{\omega} \times \vec{R}_{P,r} + \vec{V}_{P_c,r} \quad (A.30)$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_O + \dot{\vec{\Omega}}_R \times \vec{R}_{P,r} + 2\vec{\Omega}_R \times \vec{V}_{P,r} + \vec{\Omega}_R \times [\vec{\Omega}_R \times \vec{R}_{P,r}] + \vec{a}_{P,r}^{(P-O)} \quad (A.31)$$

onde $\vec{V}_{P_c,r}$ é referente ao combustível. Contudo, teremos

$$\begin{aligned}
\int_{vc} [\vec{R}_{P,r} \times \vec{V}] \rho \, dv &= \int_{vc} [\vec{R}_{P,r} \times (\vec{V}_O + \vec{\Omega}_R \times \vec{R}_{P,r} + \vec{\omega} \times \vec{R}_{P,r} + \vec{V}_{P,r})] \rho \, dv \\
&= -\vec{V}_O \times \int_{vc} (P - O) \rho \, dv + \int_{vc} \rho [\vec{R}_{P,r} \times (\vec{\Omega}_R \times \vec{R}_{P,r})] \, dv \\
&\quad + \int_{vc} \rho [\vec{R}_{P,r} \times \vec{V}_{P,r}] \, dv
\end{aligned} \tag{A.32}$$

Pela identidade de Jacobi

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 \tag{A.33}$$

implica que

$$(P - O) \times (\vec{\Omega}_R \times (P - O)) + \vec{\Omega}_R \times [(P - O) \times (P - O)] + (P - O) \times [(P - O) \times \vec{\Omega}_R] = 0 \tag{A.34}$$

portanto

$$(P - O) \times (\vec{\Omega}_R \times (P - O)) = -(P - O) \times [(P - O) \times \vec{\Omega}_R] \tag{A.35}$$

podemos escrever

$$(P - O) = \vec{R}_{P,r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{A.36}$$

e

$$\vec{\Omega}_R = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} \tag{A.37}$$

então

$$\vec{\Omega}_R \times (P - O) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (z\omega_y - y\omega_z)\vec{i} + (x\omega_z - z\omega_x)\vec{j} + (y\omega_x - x\omega_y)\vec{k} \tag{A.38}$$

$$\begin{aligned}
(P - O) \times [\vec{\Omega}_R \times (P - O)] &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} \\
&= (yc - zb)\vec{i} + (za - xc)\vec{j} + (xb - ya)\vec{k} \quad (\text{A.39}) \\
&= (y^2\omega_x - yx\omega_y - zx\omega_z + z^2\omega_x)\vec{i} \\
&+ (z^2\omega_y - zy\omega_z - xy\omega_x + x^2\omega_y)\vec{j} \\
&+ (x^2\omega_z - xz\omega_x - yz\omega_y + y^2\omega_z)\vec{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{vc} \rho [\vec{R}_{P,r} \times (\vec{\Omega}_R \times \vec{R}_{P,r})] dv &= \left\{ \int_{vc} \rho(y^2 + z^2) dv \omega_x - \int_{vc} \rho yx dv \omega_y - \int_{vc} \rho zx dv \omega_z \right\} \vec{i} \\
&+ \left\{ \int_{vc} \rho(z^2 + x^2) dv \omega_y - \int_{vc} \rho zy dv \omega_z - \int_{vc} \rho xy dv \omega_x \right\} \vec{j} \quad (\text{A.40}) \\
&+ \left\{ \int_{vc} \rho(x^2 + y^2) dv \omega_z - \int_{vc} \rho xz dv \omega_x - \int_{vc} \rho yz dv \omega_y \right\} \vec{k}
\end{aligned}$$

como $\rho = \rho_f + \rho_c$ temos que

$$\begin{aligned}
\int_{vc} \rho [\vec{R}_{P,r} \times (\vec{\Omega}_R \times \vec{R}_{P,r})] dv &= \{ (I_{Fxx} + I_{Cxx})\omega_x - (I_{Fxy} + I_{Cxy})\omega_y - (I_{Fzx} + I_{Czx})\omega_z \} \vec{i} \\
&+ \{ (I_{Fyy} + I_{Cyy})\omega_y - (I_{Fzy} + I_{Czy})\omega_z - (I_{Fxy} + I_{Cxy})\omega_x \} \vec{j} \\
&+ \{ (I_{Fzz} + I_{Czz})\omega_z - (I_{Fzx} + I_{Czx})\omega_x - (I_{Fyz} + I_{Cyz})\omega_y \} \vec{k} \quad (\text{A.41})
\end{aligned}$$

onde $I_{FAA}(I_{CAA})$ é o momento de inercia em relação ao eixo A para a carcaça do foguete (combustível mais oxidante) e $I_{FAB}(I_{CAB})$ é o produto de inercia para os eixos A e B da carcaça (combustível mais oxidante) do foguete.

$$= \{\vec{i} \vec{j} \vec{k}\}([I_O]_F + [I_O]_C)\{\Omega_k\} \quad (\text{A.42})$$

onde $[I_O]_F([I_O]_C)$ são as matrizes de inercia da carcaça (combustível mais oxidante) do foguete.

Vamos avaliar o termo

$$\begin{aligned} -\vec{V}_O \times \int_{vc} \rho(P - O) dv &= -\vec{V}_O \times \int_{vc} \rho_f(P - O) dv - \vec{V}_O \times \int_{vc} \rho_c(P - O) dv \\ &= -M_c(t)[\vec{V}_O \times (C_G - O)] \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

por último temos

$$\int_{vc} \rho[\vec{R}_{P,r} \times \vec{V}_{P,r}] dv = \int_{vc} \rho_f\{(P - O) \times [\vec{\omega} \times (P - O)]\} dv + \int_{vc} \rho_c[(P - O) \times \vec{V}_{P,r}] dv \quad (\text{A.44})$$

primeiro vamos considerar a última integral. Para o combustível temos que

$$\vec{V}_{P_c,r} = \vec{V}_{C_G} + \vec{\omega} \times (P - C_G) \quad (\text{A.45})$$

então

$$\begin{aligned} \int_{vc} \rho_c(P - O) \times \vec{V}_{P_c,r} dv &= \int_{vc} \rho_c(P - O) \times \vec{V}_{C_G,r} dv + \int_{vc} \rho_c(P - O) \times [\vec{\omega} \times (P - C_G)] dv \\ &= -\vec{V}_{C_G,r} \times \int_{vc} \rho_c[(P - C_G) + (C_G - O)] dv + \int_{vc} \rho_c[P - C_G] \\ &\quad + (C_G - O) \times [\vec{\omega} \times (P - C_G)] dv \\ &= -\vec{V}_{C_G,r} \times \int_{vc} \rho_c(P - C_G) dv - \vec{V}_{C_G,r} \times (C_G - O) \int_{vc} \rho_c dv \\ &\quad + (C_G - O) \times \int_{vc} \rho_c[\vec{\omega} \times (P - C_G)] dv + \int_{vc} \rho(P - C_G) \\ &\quad \times [\vec{\omega} \times (P - C_G)] dv \\ &= M_c(t)[(C_G - O) \times \vec{V}_{C_G,r}] + (C_G - O) \times [\vec{\omega} \times \int_{vc} \rho_c(P - C_G) dv] \\ &\quad + \int_{vc} \rho_c(P - C_G) \times [\vec{\omega} \times (P - C_G)] dv \\ &= M_c(t)[(C_G - O) \times \vec{V}_{C_G,r}] + \{\vec{i} \vec{j} \vec{k}\} [I_{C_G}]_C \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

onde a matriz $[I_{C_G}]_C$ é a matriz de inércia do combustível mais oxidante em relação ao centro de massa do combustível mais oxidante. Caso $\vec{V}_{C_G} // (C_G - O)$, o primeiro termo acima é nulo. Temos que

$$\int_{vc} \rho_f \cdot (P - O) \times [\vec{\omega} \times (P - O)] dv = \{\vec{i} \vec{j} \vec{k}\} [I_O]_F \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} \quad (\text{A.47})$$

onde $[I_O]_F$ é a matriz de inércia em relação ao polo O do corpo do foguete. Como a matriz $[I_{C_G}]_C$ varia com o tempo, além da posição de C_G varia com o tempo, vamos escrever $[I_{C_G}]_C$ em relação ao ponto O que é fixo. Vamos utilizar o teorema de Steiner.

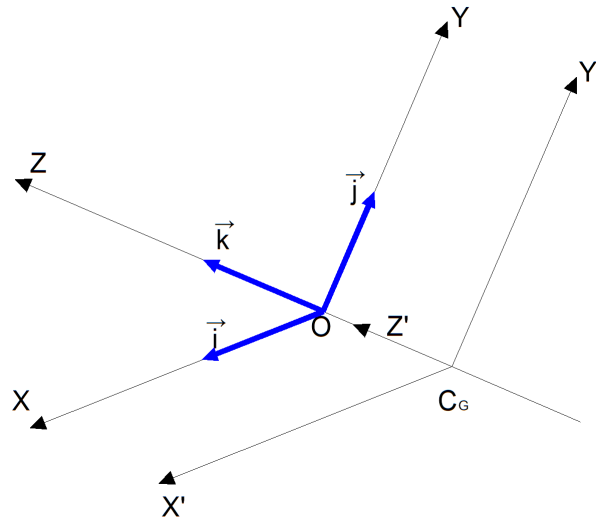
Então assumimos que conhecemos $[I_O]_C$ e também que conhecemos $(C_G - O)$ ao longo do tempo.

Vamos escrever

$$C_G - O = - |C_G - O| \vec{k} \quad (\text{A.48})$$

onde o sinal negativo se deve ao fato de C_G do combustível se encontrar entre O e a tubeira do foguete.

Vamos assumir o sistema (x', y', z') centrado em C_G com $Ox // C_G x'$, $Oy // C_G y'$ e $Oz // C_G z'$.



onde

$$z' = |C_G - O| + z \quad (\text{A.49})$$

$$x' = x \quad (\text{A.50})$$

$$y' = y \quad (\text{A.51})$$

logo

$$I_{x'x'} = \int_{vc} [(y')^2 + (z')^2] dm = \int_{vc} (y^2 + z^2) dm + |C_G - O|^2 \int_{vc} dm \quad (\text{A.52})$$

$$I_{x'x'} = I_{xx} + |C_G - O|^2 M_c(t)$$

$$I_{y'y'} = \int_{vc} [(x')^2 + (z')^2] dm = \int_{vc} (y^2 + z^2) dm + 2|C_G - O| \int_{vc}^0 z dm + |C_G - O|^2 \int_{vc} dm$$

$$I_{y'y'} = I_{yy} + |C_G - O|^2 M_c(t) \quad (\text{A.53})$$

$$I_{z'z'} = \int_{vc} [(x')^2 + (y')^2] dm = \int_{vc} (x^2 + y^2) dm = I_{zz} \quad (\text{A.54})$$

$$I_{x'y'} = \int_{vc} x'y' dm = \int_{vc} xy dm = I_{xy} \quad (\text{A.55})$$

$$I_{x'z'} = \int_{vc} x'z' dm = \int_{vc} x(z + |C_G - O|) dm = I_{xz} + |C_G - O| \int_{vc}^0 x dm \quad (\text{A.56})$$

$$I_{x'z'} = I_{xz} \quad (\text{A.57})$$

$$I_{y'z'} = I_{yz} \quad (\text{A.58})$$

finalmente temos que

$$[I_{C_G}] = [I_O]_c + |C_G - O|^2 M_c(t) \begin{vmatrix} E_{C_G, O} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{A.59})$$

$$[I_{C_G}]_c = [I_O]_c + M_c(t) |C_G - O|^2 [E_{C_G, O}]$$

logo

$$\int_{vc} \rho_c (P - O) \times \vec{V}_{P,r} dv = M_c(t) [(C_G - O) \times \vec{V}_{C_G,r}] + \{\vec{i} \vec{j} \vec{k}\} ([I_O]_C + M_c(t) |C_G - O|^2 [E_{C_G,O}]) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \quad (\text{A.60})$$

Colecionando todas as componentes podemos escrever que

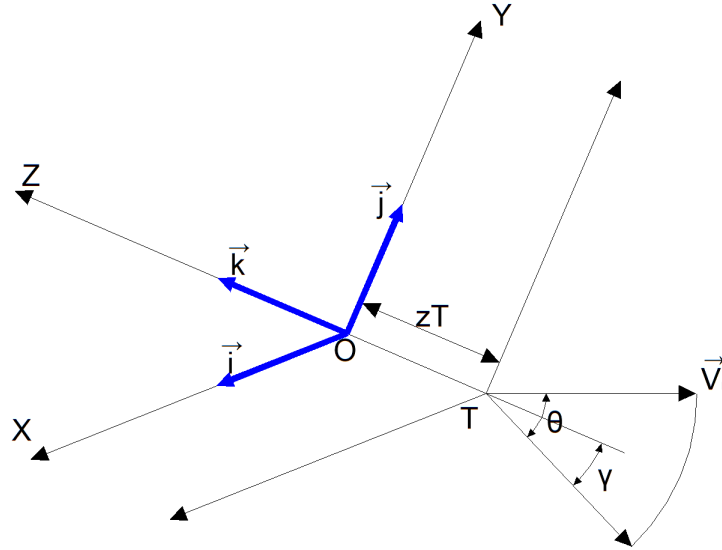
$$\int_{vc} [R_{P,r} \times \vec{V}_P] \rho dv = -M_c(t) [\vec{V}_O \times (C_G - O)] + \{\vec{i} \vec{j} \vec{k}\} ([I_O]_F + [I_O]_C) \{\Omega_R\} - M_c(t) [\vec{V}_{C_G,r} \times (C_G - O)] + \{\vec{i} \vec{j} \vec{k}\} ([I_O]_F + [I_O]_C + M_c(t) |C_G - O|^2 [E_{C_G,O}]) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \quad (\text{A.61})$$

então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \int_{vc} [R_{P,r} \times \vec{V}_P] \rho dv \right\} &= -\frac{dM_c}{dt} [(\vec{V}_O + \vec{V}_{C_G,r}) \times (C_G - O)] - M_c(t) \{(\vec{a}_O + \vec{a}_{C_G}) \times (C_G - O) \\ &+ \vec{V}_O \times \vec{V}_{C_G,r} + \vec{\Omega}_R \times [(\vec{V}_O + \vec{V}_{C_G,r}) \times (C_G - O)]\} + \{\vec{\Omega}_R \times \vec{i} \vec{\Omega}_R \times \vec{j} \vec{\Omega}_R \\ &\times \vec{k}\} ([I_O]_F + [I_O]_C) \begin{pmatrix} \Omega_{Rx} \\ \Omega_{Ry} \\ \Omega_{Rz} + \omega \end{pmatrix} + \{\vec{i} \vec{j} \vec{k}\} \left(\frac{d}{dt} [I_O]_F + \frac{d}{dt} [I_O]_C \right) \\ &\begin{pmatrix} \Omega_{Rx} \\ \Omega_{Ry} \\ \Omega_{Rz} + \omega \end{pmatrix} + \{\vec{i} \vec{j} \vec{k}\} ([I_O]_F + [I_O]_C) \begin{pmatrix} \dot{\Omega}_{Rx} \\ \dot{\Omega}_{Ry} \\ \dot{\Omega}_{Rz} + \dot{\omega} \end{pmatrix} \\ &+ M_c(t) |C_G - O|^2 \{\vec{\Omega}_R \times \vec{i} \vec{\Omega}_R \times \vec{j} \vec{\Omega}_R \times \vec{k}\} [E_{C_G,O}] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{d}{dt}(M_c(t)|C_G - O|^2)\{\vec{i} \vec{j} \vec{k}\}[E_{C_G,O}] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} \\
& + M_c(t)|C_G - O|^2\{\vec{i} \vec{j} \vec{k}\}[E_{C_G,O}] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\omega} \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{A.62}$$

Em seguida vamos avaliar o termo de fluxo da quantidade de movimento angular através da superfície de controle. Vamos assumir o escoamento uniforme na tubeira, mas com mudança da direção em relação ao eixo Oz.



$$\vec{V}_r = |\vec{V}_r|\{-\cos(\theta)\cos(\gamma)\vec{k} + \cos(\theta)\sin(\gamma)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}\} \tag{A.63}$$

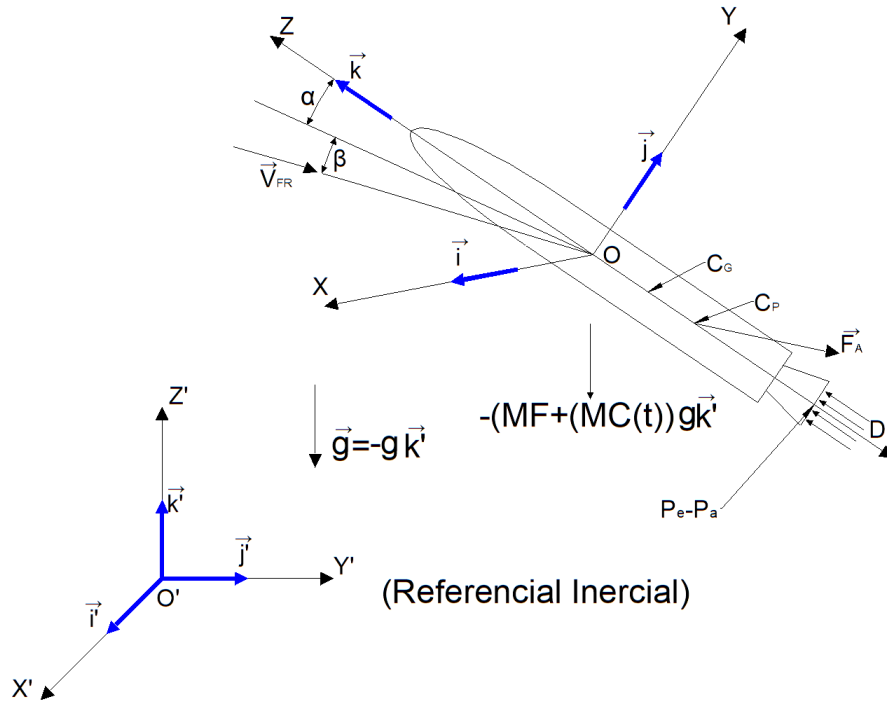
então

$$\begin{aligned}
\int_{sc} \rho[(P - O) \times \vec{V}_{P,r}](\vec{V}_r \cdot \vec{n}) dS &= \int_{tubeira} \rho[(P - O) \times \vec{V}_r](\vec{V}_r \cdot \vec{n}) dS \\
&\approx (T - O) \times \vec{V}_r \dot{m}_G \\
&\quad \begin{matrix} -zT\vec{k} \end{matrix} \\
&= |\vec{V}_r| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -zT \\ \cos(\theta)\sin(\gamma) & \sin(\theta) & -\cos(\theta)\cos(\gamma) \end{vmatrix} \dot{m}_G \quad (A.64) \\
&= \dot{m}_G |\vec{V}_r| \{-zT\cos(\theta)\sin(\gamma)\vec{j} + zT\sin(\theta)\vec{i}\} \\
&= \dot{m}_G |\vec{V}_r| zT \{\sin(\theta)\vec{i} - \cos(\theta)\sin(\gamma)\vec{j}\}
\end{aligned}$$

Agora podemos compor a parte de inércia mais o empuxo devido ao fluxo de massa através da tubeira. A equação para quantidade de movimento angular assume a forma

$$\begin{aligned}
& - \frac{dM_c}{dt} [(\vec{V}_O + \vec{V}_{C_G,r}) \times (C_G - O)] - M_c(t) \{(\vec{a}_O + \vec{a}_{C_G}) \times (C_G - O) + \vec{V}_O \\
& \times \vec{V}_{C_G,r} + \vec{\Omega}_R \times [(\vec{V}_O + \vec{V}_{C_G,r}) \times (C_G - O)]\} + \{\vec{\Omega}_R \times \vec{i} \vec{\Omega}_R \times \vec{j} \vec{\Omega}_R \times \vec{k}\} \\
& [(I_O)_F + (I_O)_c] \begin{Bmatrix} \Omega_{Rx} \\ \Omega_{Ry} \\ \Omega_{Rz} + \omega \end{Bmatrix} + M_c(t) |C_G - O|^2 [E_{C_G,O}] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} \\
& + \{\vec{i} \vec{j} \vec{k}\} [(\frac{d}{dt} [I_O]_F + \frac{d}{dt} [I_O]_C) \begin{Bmatrix} \Omega_{Rx} \\ \Omega_{Ry} \\ \Omega_{Rz} + \omega \end{Bmatrix} + ([I_O]_F + [I_O]_C) \begin{Bmatrix} \dot{\Omega}_{Rx} \\ \dot{\Omega}_{Ry} \\ \dot{\Omega}_{Rz} + \dot{\omega} \end{Bmatrix}] \quad (A.65) \\
& [E_{C_G,O}] (\frac{d}{dt} \{M_c(t) |C_G - O|^2\} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} + M_c(t) |C_G - O|^2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\omega} \end{Bmatrix}) \\
& + \dot{m}_G |\vec{V}_r| zT (\sin(\theta)\vec{i} - \cos(\theta)\sin(\gamma)\vec{j}) = \vec{M}_O^{Ext}
\end{aligned}$$

A.5 Forças e momentos externos



- \vec{V}_{FR} : Velocidade do ar relativa ao foguete
- C_P : Centro de pressão
- P_a : Pressão atmosférica
- P_e : Pressão na saída da tubeira
- \vec{F}_A : Força aerodinâmica
- D : Arrasto

$$\vec{F}_A = -D\vec{k} + L_y\vec{j} - L_x\vec{i} \text{ (Linha de ação passa por } C_P) \quad (\text{A.66})$$

onde

$$D = \frac{1}{2} \rho_{AR} U^2 C_D(Re) A_T \quad (\text{A.67})$$

com

$$U = |\vec{V}_{FR}|$$

C_D : coeficiente de arrasto, função do número de reynolds

A_T : Área seccional máxima ortogonal ao eixo z.

$$L_y = \frac{1}{2} \rho_{AR} U^2 C_{Ly}(Re, \alpha) A_y \quad (\text{A.68})$$

com

C_{Ly} : coeficiente de sustentação da força na direção do eixo y

A_y : Área projetada no plano xz (ortogonal ao eixo y)

$$L_x = \frac{1}{2} \rho_{AR} U^2 C_{Lx}(Re, \beta) A_x \quad (\text{A.69})$$

com

C_{Lx} : coeficiente de sustentação da força na direção do eixo x

A_x : Área seccional máxima no plano xz (ortogonal ao eixo y)

Como força externa temos a integral do campo de pressão atmosférica sobre toda fuselagem

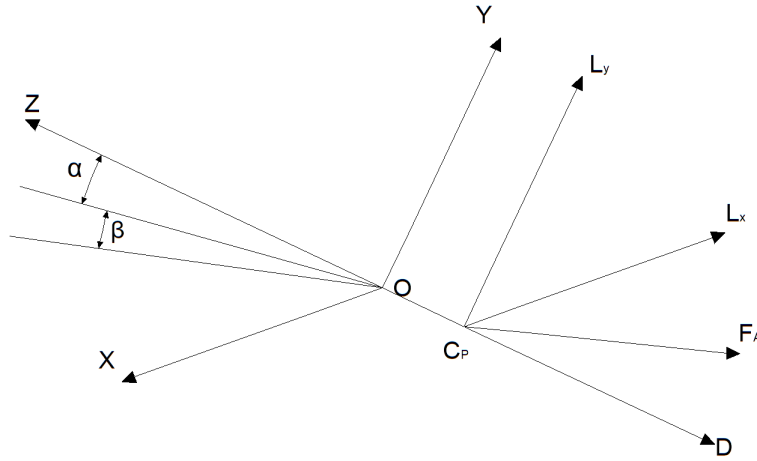
$$\vec{F}_P = \int_{Tubeira} (P_e - P_a) \vec{n} dS = (P_e - P_a) A_{Tubeira} \{ +\cos(\theta)\cos(\gamma)\vec{k} + \cos(\theta)\sin(\gamma)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j} \} \quad (\text{A.70})$$

portanto

$$\begin{aligned}
\vec{R}^{Ext} &= -(M_f + M_c(t))g\vec{k}' + \vec{F}_A + \vec{F}_P \\
&= -(M_f + M_c(t))g\vec{k}' - D\vec{k} + L_y\vec{j} - L_x\vec{i} + (P_e - P_a) \\
&\quad A_{Tubeira}\{-\cos(\theta)\cos(\gamma)\vec{k} + \cos(\theta)\sin(\gamma)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}\}
\end{aligned} \tag{A.71}$$

A.5.1 Momento gerado pelas forças externas

- Forças aerodinâmicas



$$\begin{aligned}
\vec{M}_{A,O} &= (\vec{C}_P - \vec{O}) \times \vec{F}_A \\
&= -|C_P - G|\vec{k} \times (-D\vec{k} + L_y\vec{j} - L_x\vec{i}) \\
&= |C_P - O|\{+L_y\vec{i} + L_x\vec{j}\}
\end{aligned} \tag{A.72}$$

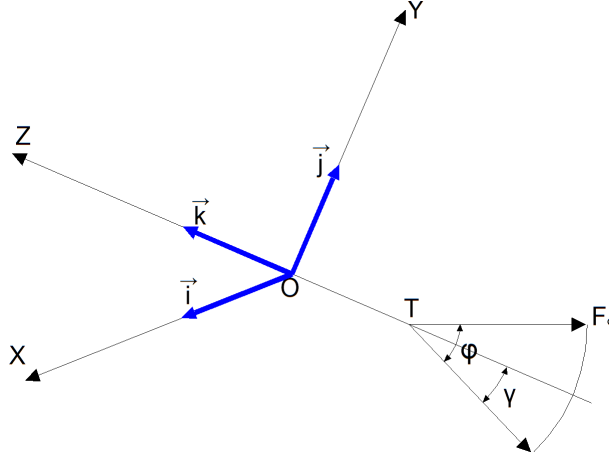
- Força peso

Em relação ao ponto O somente o peso do combustível + oxidante gera momento

$$\begin{aligned}
\vec{M}_{w,O} &= (\vec{C}_G - \vec{O}) \times [-M_c(t)g\vec{k}'] \\
&= +|C_G - O|\vec{k} \times M_c(t)g\vec{k}'
\end{aligned} \tag{A.73}$$

note que no momento gerado pela força peso temos de escrever o versor \vec{k}' (da base inercial $O'\vec{i}'\vec{j}'\vec{k}'$) em relação à base $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ (não inercial).

- Diferença de pressão entre o jato que sai na tubeira e a pressão atmosférica



$$\begin{aligned}
 \vec{M}_{P,O} &= (T - O) \times \vec{F}_P \\
 &= -|T - O|\vec{k} \times (P_e - P_a)A_{Tubeira}\{-\cos(\theta)\cos(\gamma)\vec{k} + \cos(\theta)\sin(\gamma)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}\} \\
 &= -|T - O|(P_e - P_a)A_{Tubeira}\{\cos(\theta)\sin(\gamma)\vec{j} - \sin(\theta)\vec{i}\}
 \end{aligned} \tag{A.74}$$

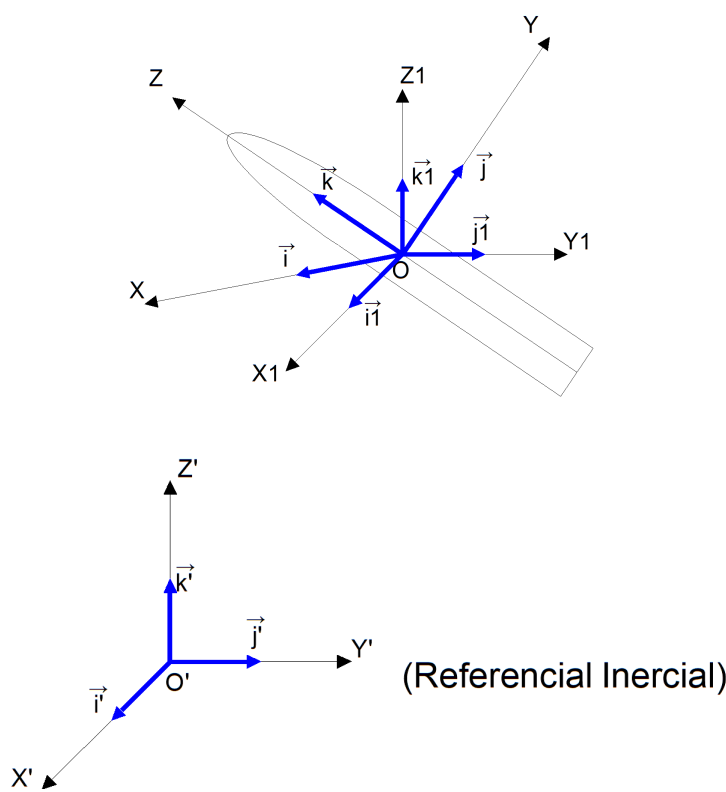
portanto

$$\begin{aligned}
 \vec{M}_O^{Ext} &= \vec{M}_{A,O} + \vec{M}_{P,O} + \vec{M}_{\omega,O} \\
 &= |C_P - O|\frac{1}{2}\rho U^2\{C_{Ly}A_y\vec{i} + C_{Lx}A_x\vec{j}\} + M_c(t)g|C_G - O|\vec{k} \times \vec{k}' \\
 &\quad - |T - O|(P_e - P_a)A_{Tubeira}\{\cos(\theta)\sin(\gamma)\vec{j} - \sin(\theta)\vec{i}\}
 \end{aligned} \tag{A.75}$$

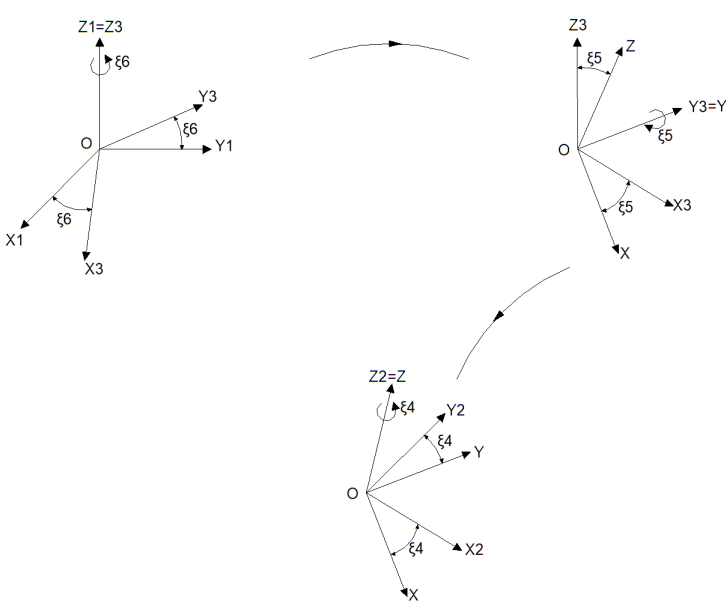
A.6 Ângulos de Euler

$oxyz$: Referencial fixo no foguete exceto no movimento de spin do foguete ($\vec{\Omega}_F \neq \vec{\Omega}_R$, onde $\vec{\Omega}_R$ é o vetor de rotação de $oxyz$).

$ox_1y_1z_1$: Referencial com eixos paralelos ao referencial inercial $o'x'y'z'$



Temos que



$$\left. \begin{array}{l} ox_1y_1z_1 : (\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1) \\ ox_3y_3z_3 : (\vec{i}_3, \vec{j}_3, \vec{k}_3) \\ ox_2y_2z_2 : (\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2) \\ xyz : (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \end{array} \right\} \vec{k}_1 // \vec{k}_3, \vec{j}_3 // \vec{j} \text{ e } \vec{k} // \vec{k}_2$$

- Relações entre os versores das bases $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$, $(\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$ e $(\vec{i}_3, \vec{j}_3, \vec{k}_3)$

$$\begin{aligned} \vec{i}_1 &= \cos(\xi_6)\vec{i}_3 - \sin(\xi_6)\vec{j}_3 & \vec{i}_3 &= \cos(\xi_6)\vec{i}_1 + \sin(\xi_6)\vec{j}_1 \\ \vec{j}_1 &= \sin(\xi_6)\vec{i}_3 + \cos(\xi_6)\vec{j}_3 & \vec{j}_3 &= -\sin(\xi_6)\vec{i}_1 + \cos(\xi_6)\vec{j}_1 \\ \vec{k}_1 &= \vec{k}_3 & \vec{k}_3 &= \vec{k}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{i}_3 &= \cos(\xi_5)\vec{i} + \sin(\xi_5)\vec{k} & \vec{i} &= \cos(\xi_5)\vec{i}_3 - \sin(\xi_5)\vec{k}_3 \\ \vec{j}_3 &= \vec{j} & \vec{j} &= \vec{j}_3 \\ \vec{k}_3 &= -\sin(\xi_5)\vec{i} + \cos(\xi_5)\vec{k} & \vec{k} &= \sin(\xi_5)\vec{i}_3 + \cos(\xi_5)\vec{k}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{i} &= \cos(\xi_4)\vec{i}_2 - \sin(\xi_4)\vec{j}_2 & \vec{i}_2 &= \cos(\xi_4)\vec{i} + \sin(\xi_4)\vec{j} \\ \vec{j} &= \sin(\xi_4)\vec{i}_2 + \cos(\xi_4)\vec{j}_2 & \vec{j}_2 &= -\sin(\xi_4)\vec{i} + \cos(\xi_4)\vec{j} \\ \vec{k} &= \vec{k}_2 & \vec{k}_2 &= \vec{k} \end{aligned}$$

Então podemos escrever a transformação dos versores $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \rightarrow (\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ como

$$\begin{pmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{j}_1 \\ \vec{k}_1 \end{pmatrix} = [R_{3\ 1}][R_{2\ 3}] \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} \quad (\text{A.76})$$

e a transformação inversa $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1) \rightarrow (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ como

$$\begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} = [R_{3\ 2}][R_{1\ 3}] \begin{pmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{j}_1 \\ \vec{k}_1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.77})$$

onde

$$\begin{aligned} [R_{3\ 1}] &= \begin{bmatrix} \cos(\xi_6) & -\sin(\xi_6) & 0 \\ \sin(\xi_6) & \cos(\xi_6) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & [R_{1\ 3}] &= \begin{bmatrix} \cos(\xi_6) & \sin(\xi_6) & 0 \\ -\sin(\xi_6) & \cos(\xi_6) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ [R_{2\ 3}] &= \begin{bmatrix} \cos(\xi_5) & 0 & \sin(\xi_5) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\xi_5) & 0 & \cos(\xi_5) \end{bmatrix} & [R_{3\ 2}] &= \begin{bmatrix} \cos(\xi_5) & 0 & -\sin(\xi_5) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\xi_5) & 0 & \cos(\xi_5) \end{bmatrix} \\ [R_{2\ 0}] &= \begin{bmatrix} \cos(\xi_4) & -\sin(\xi_4) & 0 \\ \sin(\xi_4) & \cos(\xi_4) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & [R_{0\ 2}] &= \begin{bmatrix} \cos(\xi_4) & \sin(\xi_4) & 0 \\ -\sin(\xi_4) & \cos(\xi_4) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

note que a base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ não apresenta movimento de spin do foguete. Consequentemente o vetor de rotação do referencial fixo no corpo é

$$\vec{\Omega}_R = \dot{\xi}_6 \vec{k}_1 + \dot{\xi}_5 \vec{j} \quad (\text{A.78})$$

e o vetor de rotação do movimento de rotação de spin

$$\vec{\omega} = \dot{\xi}_4 \vec{k} \quad (\text{A.79})$$

Então o vetor de rotação de foguete é dado por

$$\vec{\Omega}_F = \vec{\Omega}_R + \vec{\omega} = \dot{\xi}_6 \vec{k}_1 + \dot{\xi}_5 \vec{j} + \dot{\xi}_4 \vec{k} \quad (\text{A.80})$$

onde

$$\vec{k}_1 = -\text{sen}(\xi_5) \vec{i} + \text{cos}(\xi_5) \vec{k} \quad (\text{A.81})$$

de modo que

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}_R &= \dot{\xi}_6 (-\text{sen}(\xi_5) \vec{i} + \text{cos}(\xi_5) \vec{k}) + \dot{\xi}_5 \vec{j} \\ &= -\dot{\xi}_6 \text{sen}(\xi_5) \vec{i} + \dot{\xi}_5 \vec{j} + \dot{\xi}_6 \text{cos}(\xi_5) \vec{k} \end{aligned} \quad (\text{A.82})$$

Necessitamos do produto $\vec{k} \times \vec{k}'$ escrito na base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Então

$$\begin{aligned} \vec{k} \times \vec{k}' &= \vec{k} \times \vec{k}_1 = \vec{k} \times \{-\text{sen}(\xi_5) \vec{i} + \text{cos}(\xi_5) \vec{k}\} \\ &= -\text{sen}(\xi_5) \vec{j} \end{aligned} \quad (\text{A.83})$$

Podemos escrever também as componentes do vetor $\vec{\Omega}_R$ na base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Temos que

$$\Omega_{Rx} = -\dot{\xi}_6 \text{sen}(\xi_5) \quad (\text{A.84})$$

$$\Omega_{Ry} = \dot{\xi}_5 \quad (\text{A.85})$$

$$\Omega_{Rz} = \dot{\xi}_6 \text{cos}(\xi_5) \quad (\text{A.86})$$

A.7 Sumário contendo as equações finais encontradas:

- Conservação de massa:

$$\frac{d}{dt} M_c(t) + \dot{m}(t) = 0 \quad (\text{A.87})$$

- Conservação da quantidade de movimento linear:

$$\begin{aligned} & \frac{dM_c}{dt} [\vec{V}_{C_G,r} + \vec{\Omega}_R \times (C_G - O) + \vec{V}_O] + M_c(t) \{ \dot{\vec{\Omega}}_R \times (C_G - O) + 2\vec{\Omega}_R \\ & \times \vec{V}_{C_G,r} + \vec{\Omega}_R \times [\vec{\Omega}_R \times (C_G - O)] \} + (M_f + M_c(t)) \vec{a}_O \\ & - \dot{m}_G |\vec{V}_r| \{ -\cos\theta \cos\gamma \vec{k} + \cos\theta \sin\gamma \vec{i} + \sin\theta \vec{j} \} = \vec{R}^{Ext} \end{aligned} \quad (A.88)$$

- Conservação da quantidade de movimento angular:

$$\begin{aligned} & - \frac{dM_c}{dt} [(\vec{V}_O + \vec{V}_{C_G,r}) \times (C_G - O)] - M_c(t) \{ (\vec{a}_O + \vec{a}_{C_G}) \times (C_G - O) + \vec{V}_O \\ & \times \vec{V}_{C_G,r} + \vec{\Omega}_R \times [(\vec{V}_O + \vec{V}_{C_G,r}) \times (C_G - O)] \} + \{ \vec{\Omega}_R \times \vec{i} \vec{\Omega}_R \times \vec{j} \vec{\Omega}_R \times \vec{k} \} \\ & [(I_O)_F + (I_O)_c] \left\{ \begin{array}{c} \Omega_{Rx} \\ \Omega_{Ry} \\ \Omega_{Rz} + \omega \end{array} \right\} + M_c(t) |C_G - O|^2 [E_{C_G,O}] \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \omega \end{array} \right\} \\ & + \{ \vec{i} \vec{j} \vec{k} \} \left[\left(\frac{d}{dt} (I_O)_F + \frac{d}{dt} (I_O)_c \right) \left\{ \begin{array}{c} \Omega_{Rx} \\ \Omega_{Ry} \\ \Omega_{Rz} + \omega \end{array} \right\} + ((I_O)_F + (I_O)_c) \left\{ \begin{array}{c} \dot{\Omega}_{Rx} \\ \dot{\Omega}_{Ry} \\ \dot{\Omega}_{Rz} + \dot{\omega} \end{array} \right\} \right. \\ & \left. [E_{C_G,O}] \left(\frac{d}{dt} \{ M_c(t) |C_G - O|^2 \} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \omega \end{array} \right\} + M_c(t) |C_G - O|^2 \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \dot{\omega} \end{array} \right\} \right) \right] \\ & + \dot{m}_G |\vec{V}_r| z T (\sin(\theta) \vec{i} - \cos(\theta) \sin(\gamma) \vec{j}) = \vec{M}_O^{Ext} \end{aligned} \quad (A.89)$$

- Forças e momentos externos:

$$\vec{R}^{Ext} = -(M_f + M_c(t)) g \vec{k}' - D \vec{k} + L_y \vec{j} - L_x \vec{i} + (P_e - P_a) \quad (A.90)$$

$$A_{Tubeira} \{ -\cos(\theta) \cos(\gamma) \vec{k} + \cos(\theta) \sin(\gamma) \vec{i} + \sin(\theta) \vec{j} \}$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_O^{Ext} &= |C_P - O| \frac{1}{2} \rho U^2 \{ C_{Ly} A_y \vec{i} + C_{Lx} A_x \vec{j} \} + M_c(t) g |C_G - O| \vec{k} \times \vec{k}' \\ &- |T - O| (P_e - P_a) A_{Tubeira} \{ \cos(\theta) \sin(\gamma) \vec{j} - \sin(\theta) \vec{i} \} \end{aligned} \quad (A.91)$$

substituindo \vec{k}' pela expressão encontrada na seção de Ângulos de Euler, temos que

$$\begin{aligned} \vec{R}^{Ext} = & -(M_f + M_c(t))g(-\text{sen}(\xi_5)\vec{i} + \cos(\xi_5)\vec{k}) - D\vec{k} + L_y\vec{j} - L_x\vec{i} \\ & + (P_e - P_a)A_{Tubeira}\{-\cos(\theta)\cos(\gamma)\vec{k} + \cos(\theta)\text{sen}(\gamma)\vec{i} + \text{sen}(\theta)\vec{j}\} \end{aligned} \quad (\text{A.92})$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_O^{Ext} = & |C_P - O|\frac{1}{2}\rho U^2\{C_{Ly}A_y\vec{i} + C_{Lx}A_x\vec{j}\} + M_c(t)g|C_G - O|(-\text{sen}(\xi_5)\vec{j}) \\ & - |T - O|(P_e - P_a)A_{Tubeira}\{\cos(\theta)\text{sen}(\gamma)\vec{j} - \text{sen}(\theta)\vec{i}\} \end{aligned} \quad (\text{A.93})$$
































- Ângulos de Euler:










$$\Omega_{Rx} = -\dot{\xi}_6 \text{sen}(\xi_5) \quad (\text{A.94})$$

$$\Omega_{Ry} = \dot{\xi}_5 \quad (\text{A.95})$$

$$\Omega_{Rz} = \dot{\xi}_6 \cos(\xi_5) \quad (\text{A.96})$$

Anexo II

	coifa_EST	Fibra de vidro (1,85 g/cm³)	Série de Haack	Len: 34,5 cm	Mass: 326 g	
	Tubo do corpo	Fibra de vidro (1,85 g/cm³)	Dia _{in} 15,3 cm Dia _{out} 15,6 cm	Len: 5 cm	Mass: 71,8 g	
	Acoplador de tubo	Alumínio (2,7 g/cm³)	Dia _{in} 14,9 cm Dia _{out} 15,3 cm	Len: 45,6 cm	Mass: 1110 g	
	fus_PAYLOAD	Fibra de vidro (1,85 g/cm³)	Dia _{in} 15,3 cm Dia _{out} 15,6 cm	Len: 29,5 cm	Mass: 397 g	
	BH_REC2	Alumínio (2,7 g/cm³)	Dia _{out} 14,9 cm	Len: 1,5 cm	Mass: 706 g	
	BH_REC1	Alumínio (2,7 g/cm³)	Dia _{out} 14,9 cm	Len: 1,5 cm	Mass: 706 g	
	Componente de massa		Dia _{out} 10 cm		Mass: 1814 g	
	Componente de massa		Dia _{out} 10 cm		Mass: 1814 g	
	fus_REC1 (Principal)	Fibra de vidro (1,85 g/cm³)	Dia _{in} 15,3 cm Dia _{out} 15,6 cm	Len: 58,5 cm	Mass: 840 g	
	Pára-quadras	Nylon "Ripstop" (87 g/m²)	Dia _{out} 441 cm	Len: 47,5 cm	Mass: 1209 g	
	Shroud Lines	Nylon trançado (3 mm, 1/8 pol) (3,5 g/m)	Lines: 12	Len: 441 cm		
	Componente de massa		Dia _{out} 3,5 cm		Mass: 1000 g	
	Cabo amortecedor	Nylon trançado (3 mm, 1/8 pol) (3,5 g/m)		Len: 100 cm	Mass: 3,5 g	
	Anteparo	Alumínio (2,7 g/cm³)	Dia _{out} 14,9 cm	Len: 2 cm	Mass: 942 g	
	fus_ELE	Fibra de vidro (1,85 g/cm³)	Dia _{in} 15,3 cm Dia _{out} 15,6 cm	Len: 30 cm	Mass: 431 g	
	Coupler_REC1-ELE-REC2	Alumínio (2,7 g/cm³)	Dia _{in} 14,9 cm Dia _{out} 15,3 cm	Len: 60,6 cm	Mass: 1625 g	
	Componente de massa		Dia _{out} 15,5 cm		Mass: 800 g	
	Anteparo	Alumínio (2,7 g/cm³)	Dia _{out} 14,9 cm	Len: 2 cm	Mass: 942 g	
	fus_REC2 (Piloto)	Fibra de vidro (1,85 g/cm³)	Dia _{in} 15,3 cm Dia _{out} 15,6 cm	Len: 44,5 cm	Mass: 639 g	
	Coupler_REC2-PROP	Alumínio (2,7 g/cm³)	Dia _{in} 14,9 cm Dia _{out} 15,3 cm	Len: 30,6 cm	Mass: 745 g	
	Pára-quadras	Nylon "Ripstop" (87 g/m²)	Dia _{out} 240 cm	Len: 29,5 cm	Mass: 387 g	
	Shroud Lines	Nylon trançado (3 mm, 1/8 pol) (3,5 g/m)	Lines: 10	Len: 240 cm		
	Componente de massa		Dia _{out} 3,5 cm		Mass: 1000 g	

	Cabo amortecedor	Nylon trançado (3 mm, 1/8 pol) (3,5 g/cm)	Len: 100 cm	Mass: 3,5 g	
	Anteparo	Alumínio (2,7 g/cm³)	Dia _{out} 14,9 cm	Len: 2 cm	Mass: 942 g
	fus_PROP	Fibra de carbono (1,78 g/cm³)	Dia _{in} 15,3 cm Dia _{out} 15,6 cm	Len: 68,5 cm	Mass: 946 g
	Anel centralizador	Alumínio (2,7 g/cm³)	Dia _{in} 12,7 cm Dia _{out} 14,9 cm	Len: 2 cm	Mass: 258 g
	Caixa de empenas	Fibra de vidro (1,85 g/cm³)	Dia _{in} 15,3 cm Dia _{out} 15,6 cm	Len: 32 cm	Mass: 459 g
	Anel centralizador	Alumínio (2,7 g/cm³)	Dia _{in} 12,7 cm Dia _{out} 15,3 cm	Len: 2 cm	Mass: 309 g
	Bloco de motor	Alumínio (2,7 g/cm³)	Dia _{in} 12,7 cm Dia _{out} 13 cm	Len: 96,4 cm	Mass: 0 g
	Coupler_PROP-EMP	Alumínio (2,7 g/cm³)	Dia _{in} 14,9 cm Dia _{out} 15,3 cm	Len: 30,6 cm	Mass: 745 g
	Conjunto de aletas de formato livre (4)	Fibra de vidro (1,85 g/cm³)	Thick: 0,16 cm		Mass: 308 g

Anexo III

```
1 %Para a base do foguete
function CDbase=ArrastoBase(M,rcorpo ,rmotor)
3 CDbase=((0.12+0.13*M^2)*(pi-rcorpo^2-pi*rmotor^2))/(pi*rcorpo^2);
end
```

```
%Para a coifa
2 function CDcoifa=ArrastoCoifa(rcoifa ,g,rcorpo)
CDcoifa=(pi*rcoifa*g*0.2)/(pi*rcorpo^2);
4 end
```

```
%Para as haletas
2 function CDhaletas=ArrastoHaletas(M,AnguloBordo ,Cr,Ct,S,rcorpo)
CDhaletasref=((1-M^2)^(-0.417)-1)*cosd(AnguloBordo)^2+0.12*0.13*M^2;
4 CDhaletas=(CDhaletasref*(Cr+Ct)*S)/(2*(pi*rcorpo^2));
end
```

```
1 %Para a superficie do foguete
3 function CDsuperficie=ArrastoSuperficie(M,Dcorpo,Xcorpo,rcoifa,g,t,c,Cr,Ct,S,rcorpo)
5 CDsuperficie=((1.48*10^-2)/(1+0.18*M^2))*(1+(Dcorpo/2*Xcorpo)*pi*rcoifa*g+(1+2*t/c)
    *(Cr+Ct)*S)/(pi*rcorpo^2);
7 end
```

```
1 %Dados de entrada teste
    Cr=0.26; %Comprimento da base maior do trapezio
3    Ct=0.14; %Comprimento da base menor do trapezio
    S=0.13; %altura do trapezio
5    Dcorpo=0.156; %Diametro do corpo do foguete
    rcorpo=Dcorpo/2; %Raio do corpo do foguete
7    Xcorpo=2.675; %Comprimento do corpo cilindrico do foguete
    rcoifa=0.078;%raio da coifa
9    hcoifa=0.5;%altura da coifa
    g=rcoifa^2+hcoifa^2;%Geratriz do cone
11    M=2;%numero de mach
    t=0.03;%espessura do corpo
13    c=0.05;%chord length
15 %Para a base do foguete
    rmotor=0.3;%Raio do motor
17
```

```

%Para as haletas
19     AnguloBordo=0;%Angulo do bordo de ataque da haleta

21 %Arrasto na superficie do foguete
    CDsuperficie=ArrastoSuperficie(M,Dcorpo,Xcorpo,rcoifa,g,t,c,Cr,Ct,S,rcorpo);

23
    %Arrasto na coifa
25     CDcoifa=ArrastoCoifa(rcoifa,g,rcorpo);

27 %Arrasto na base
    CDbase=ArrastoBase(M,rcorpo,rmotor);

29
    %Arrasto nas haletas
31     CDhaletas=ArrastoHaletas(M,AnguloBordo,Cr,Ct,S,rcorpo);

33     ArrastoAxial=CDsuperficie+CDcoifa+CDbase+CDhaletas;
    anguloataque=0;
35     Arrastototal=ArrastoAxial*(15.68008*anguloataque^4-32.27535*anguloataque^3+11.60365*
        anguloataque^2+1);
    fprintf('O arrasto para um angulo de ataque igual a %d      de: \n',anguloataque);
37     disp(Arrastototal)

39 %end

```

```

1 %Funcao que calcula a forza normal para todos os componentes do foguete

3 %Calcula a forza normal das haletas, pois esta sera subdivida em
    %2 planos com diferentes angulos de ataque

5 function CNtotal=CalculoCNfoguete(AnguloAtaque,Xs,Cr,Ct,Nhaleta,S,D,Xcorpo)

```

```

7 Lf=sqrt(S^2+(Xs+Ct/2-Cr/2)^2);
Kf=1+((D/2)/(S+D/2)); %Interferencia corpo nas haletas
9
CNhaleta=((4*(Nhaleta/2)*(S/D)^2)/(1+sqrt(1+((2*Lf)/(Cr+Ct))^2)))*Kf*deg2rad(
    AnguloAtaque);%Forca normal nas haletas
11 %VALE RESSALTAR QUE O NUMERO DE HALETAS ESTA DIVIDIDO POR 2 POR PEGAR 1
    %PLANO DE CADA VEZ
13 CNCoifa=2*sind(AnguloAtaque); %Forca Normal na coifa
CNcorpo=(1.1*(D*Xcorpo)/(pi*(D/2)^2))*(sind(AnguloAtaque))^2;%Forca normal no corpo
15
CNtotal=CNhaleta+CNCoifa+CNcorpo;

```

```

2 function CPgeral=CalculoCP(AnguloAtaque,Xcoifa,Xf,Xs,Cr,Ct,Nhaleta,S,D,Xcorpo)
4
    %Quando alfa (angulo de ataque) vai para 0 usamos uma aproximacao para forca
    normal para calcular CP, onde esta passa a ser a
    %sua derivada parcial em relacao a alfa. Em outros casos usamos a propria forca
6    %normal em cada componente
8
    %Para coifa
    CPcoifa=0.666*Xcoifa; %Localizacao em M do Cp da coifa
10    if AnguloAtaque==0
        CNalfaCoifa=2;
12        CNCoifa=CNalfaCoifa; %Forca Normal na coifa aproximada para a derivada
            parcial em relacao a alfa (angulo de ataque) para o calculo de CP
    else
14        CNCoifa=2*sind(AnguloAtaque);

```

```

end

16
%Para haletas
18 CPhaleta=Xf+(Xs*(Cr+2*Ct))/(3*(Cr+Ct))+(1/6)*(Cr+Ct-((Cr*Ct)/(Cr+Ct))); %CP da
    haleta
%Para calcular CN
20 Lf=sqrt(S^2+(Xs+Ct/2-Cr/2)^2);
Kf=1+((D/2)/(S+D/2)); %Interferencia corpo nas haletas
22 if AnguloAtaque==0
    CNalfahaleta=((4*(Nhaleta/2)*(S/D)^2)/(1+sqrt(1+((2*Lf)/(Cr+Ct))^2)))*Kf; %
        Derivada parcial da Forca normal na haleta em relacao a alfa (quando
        alfa vai a 0)
24 CNhaleta=CNalfahaleta;
else
26 CNhaleta=((4*(Nhaleta/2)*(S/D)^2)/(1+sqrt(1+((2*Lf)/(Cr+Ct))^2)))*Kf*deg2rad
    (AnguloAtaque); %Forca normal na haleta
end
28 %VALE RESSALTAR QUE O NUMERO DE HALETAS ESTA DIVIDIDO POR 2 POR PEGAR 1
    %PLANO DE CADA VEZ
30
%Para o corpo do foguete
32 %Dimensao para calculo da contribuicao do corpo proposta por Robert Galej, onde
    angulo de
    %ataque diferente de 0
34 CPcorpo=Xcorpo/2+Xcoifa;
if AnguloAtaque==0
36 CNalfacorpo=0;
    CNcorpo=CNalfacorpo;
38 else
    CNcorpo=(1.1*(D*Xcorpo)/(pi*(D/2)^2))*(sind(AnguloAtaque))^2;

```

```

40     end

42     CPgeral=((CPcoifa*CNCoifa)+(CPhaleta*CNhaleta)+(CPcorpo*CNcorpo))/(CNCoifa+
        CNhaleta+CNcorpo);

```

```

%Funcao que faz o teorema de steiner para o momento de inercia do
2 %combustivel em dado instante de tempo (Em relacao ao CG do foguete sem propelente)

4 function MISTeiner=CalculoSteiner(Momentoinercia,CG_F,CG_P, massa)
    MISTeiner=Momentoinercia+[0 0 0;0 ((CG_F-CG_P)^2)*massa 0;0 0 ((CG_F-CG_P)^2)*massa
        ];
6 end

```

```

%Funcao para importar arquivos

2 function import_txt = ImpArq(entrada_txt)

    import_txt = load(entrada_txt);

4 end

```

```

%Arquivo que devolve a estrutura do polinomio interpolador

2 function pp = InterpEstrutura(tempo, valinterp)

    pp=interp1(tempo, valinterp, 'spline', 'pp');

4 end

```

```

%Funcao que devolve o valor de f(x) para determinado x

2 function yq = InterpFinal(pp,xq)

```



```
yq=ppval(pp,xq);  
4 end
```

```
%Script principal  
2 clc;  
clear all;  
4  
%Entrada de dados iniciais  
6 %Entra com nome do arquivo de variacao de empuxo e importa os dados do txt  
nomearqemp=input('Digite o nome do arquivo.txt que contem os dados de variacao  
de empuxo: ','s');  
8 dadosempuxo=ImpArq(nomearqemp);  
tamanhoemp=size(dadosempuxo,1);  
10  
%Entra com nome do arquivo de variacao de massa e importa os dados do txt  
12 nomearqm=input('Digite o nome do arquivo.txt que contem os dados de variacao de  
massa do combustivel: ','s');  
dadosmassa=ImpArq(nomearqm);  
14 tamanhom=size(dadosmassa,1);  
16  
%Recebe os dados do foguete  
Rm=input('Digite o raio do motor em metros: ');  
18 Lm=input('Digite o comprimento do motor em metros: ');  
Dm=input('Digite a distancia do motor at a coifa em metros: ');  
20 Mf=input('Digite a massa do foguete sem combust vel: ');  
22  
%Recebe dados da localizacao do CG para Teorema de Steiner  
CG_F=input('Digite a posicao em metros do centro de gravidade do foguete sem  
propelente em relacao a coifa: ');
```

```
24 %Encontrando a estrutura do polinomio interpolador referente aos valores de
    empuxo
26 estemp=InterpEstrutura(dadosempuxo(:,1),dadosempuxo(:,2));

28 %Encontrando a estrutura do polinomio interpolador referente aos valores
    %de massa
30 estm=InterpEstrutura(dadosmassa(:,1),dadosmassa(:,2));

32 %Encontrando o valor de empuxo para determinado tempo inserido
    tdesejado=input('Digite o instante de tempo, em segundos, que procura saber os
        dados do foguete: ');
34 if tdesejado>dadosempuxo(tamanhoemp,1)
        empuxo=0;
36     disp('Neste intervalo de tempo o foguete j    nao possui mais empuxo')
    else
38         empuxo=InterpFinal(estemp,tdesejado);
        fprintf('O valor de empuxo ap s %d segundos    de: %d Newtons\n',tdesejado,
            empuxo);
40     end

42 %Encontrando o valor de massa para determinado tempo inserido
    if tdesejado>dadosmassa(tamANHOM,1)
44         massa=0;
        disp('Neste intervalo de tempo todo o combust vel ja foi queimado');
46     else
        massa=InterpFinal(estm,tdesejado);
48         fprintf('O valor de massa do combust vel apos %d segundos    de: %d Kg \n',
            tdesejado,massa);
    end
```

```

50 %Calculando o momento de inercia do combustivel para o tempo desejado
52 Vinicial=pi*Rm^2*Lm;
    Minicial=InterpFinal(estm,0);
54 Densi=Minicial/Vinicial;
    [MI,CGprop]=matrizinercia(Densi, massa, Rm, Minicial);
56 fprintf('O valor da matriz de inercia para o combust vel ap s %d segundos
    de: \n',tdesejado);
    disp(MI)
58
    %Calculando CG propelente no tempo desejado e, apos feito isso, do foguete
    inteiro.
60 CGpropCoifa=CGprop+Dm; %Botando o CG do propelente em relacao a coifa, e nao ao
    CG local.
    fprintf('A posicao do centro de gravidade do combust vel, em relacao a coifa,
    para %d segundos de: %d metros \n ',tdesejado,CGpropCoifa);
62 CGfoguete=(CGpropCoifa*massa+CG.F*Mf)/(massa+Mf);
    fprintf('Contudo, a posicao do centro de gravidade do foguete inteiro, em
    relacao a coifa, para %d segundos de: %d metros \n ',tdesejado,CGfoguete)
    ;
64
    %Calculando o momento de inercia do combustivel para o tempo desejado
66 %com teorema de steiner
    MIsteiner=CalculoSteiner(MI,CG.F,CGpropCoifa, massa);
68 fprintf('O valor da matriz de inercia para o combustivel em relacao ao polo
    adotado ap s %d segundos de: \n',tdesejado);
    disp(MIsteiner)
70
    %Calculando o CP no instante t com o devido angulo de ataque em graus
72

```

```
%Dimensoes teste da haleta para calculo de CP, CN e arrasto
74 Xcoifa=0.345; %Comprimento da Coifa
Xf=2.74; %Distancia do bico da coifa at o inicio das haletas
76 Xs=0.06; %Distancia do "triangulo" at o "quadrado" do trapezio
Cr=0.26; %Comprimento da base maior do trapezio
78 Ct=0.14; %Comprimento da base menor do trapezio
Nhaleta=4; %Numero de haletas
80 S=0.13; %altura do trapezio
D=0.156; %Diametro do corpo do foguete
82 Xcorpo=2.675; %Comprimento do corpo cilindrico do foguete

AnguloAtaque1=0.011461;
AnguloAtaque2=0;

86

%CP em relacao ao primeiro plano de haletas
88 CPfoguete1=CalculoCP( AnguloAtaque1 , Xcoifa , Xf , Xs , Cr , Ct , Nhaleta , S , D , Xcorpo ); %Para
    um unico plano das haletas

%CP em relacao ao segundo plano de haletas
90 CPfoguete2=CalculoCP( AnguloAtaque2 , Xcoifa , Xf , Xs , Cr , Ct , Nhaleta , S , D , Xcorpo ); %Para
    um unico plano das haletas

92

fprintf('O valor do CP do foguete em relacao a coifa quando o angulo de ataque
    %d de: \n', AnguloAtaque1);
94 disp(CPfoguete1)
fprintf('O valor do CP do foguete em relacao a coifa quando o angulo de ataque
    %d de: \n', AnguloAtaque2);
96 disp(CPfoguete2)

98
```

```

100 %Calculando a forca normal em todo o foguete conforme o angulo de
    %ataque

102 %Forca normal em relacao ao primeiro plano de haletas
    Fn1=CalculoCNfoguete(AnguloAtaque1,Xs,Cr,Ct,Nhaleta,S,D,Xcorpo);

104
    %Forca normal em relacao ao segundo plano de haletas
106 Fn2=CalculoCNfoguete(AnguloAtaque2,Xs,Cr,Ct,Nhaleta,S,D,Xcorpo);

108 fprintf('O valor da forca normal do foguete em relacao a coifa quando o angulo
    de ataque %d de: \n',AnguloAtaque1);
    disp(Fn1)
110 fprintf('O valor da forca normal do foguete em relacao a coifa quando o angulo
    de ataque %d de: \n',AnguloAtaque2);
    disp(Fn2)

112
    %Calculando os coeficientes de arrasto do foguete

```

```

1 %Funcao que faz o calculo do momento de inercia do combustivel em dado
    %instante

3
    function [Momentoinercia,CGpropelente]=matrizinercia(densidade, massa, raio,
        massainicial)

5
    format long %Altera o formato dos valores na matriz

7
    volume = massa/densidade;
9 volumeinicial=massainicial/densidade;
    area = pi*raio^2;

```

```
11 comprimentoinicial=volumeinicial/area;
    comprimento = volume/area;
13 CGpropelente=comprimentoinicial-comprimento/2; %Fiz isso pois quando o CG do
    propelente diminuia este estava mais perto da COIFA, sendo que ao contr rio
    momentoinerciaz = (massa*raio^2)/2; %Eixo longitudinal
15 momentoinerciay = (massa*comprimento^2)/12+(massa*raio^2)/4;
    momentoinerciay = (massa*comprimento^2)/12+(massa*raio^2)/4;
17 Momentoinercia = [momentoinerciaz 0 0; 0 momentoinerciay 0; 0 0 momentoinerciay];

19 end
```