

**UFABC Rocket Design**

**Núcleo de Pesquisas**

**Estudo do Método de Otimização Topológica em  
Estruturas Bidimensionais Via Método Dos Elementos  
Finitos Generalizados e Método Dos Elementos Finitos  
Generalizados Estável**

**Matheus Baarini Martim**

São Bernardo do Campo - SP

2021



Matheus Baarini Martim

**Estudo do Método de Otimização Topológica em  
Estruturas Bidimensionais Via Método Dos Elementos  
Finitos Generalizados e Método Dos Elementos Finitos  
Generalizados Estável**

Projeto de (Iniciação Científica/PDPD)  
realizado no Núcleo de Pesquisas da  
UFABC Rocket Design

UFABC Rocket Design

Núcleo de Pesquisas

Orientador(a): Wesley Góis

Coorientador(a):

São Bernardo do Campo - SP

2021







## Resumo

Atualmente, o processo de otimização estrutural tem crescido em importância nos meios industriais e acadêmicos, assistindo no desenvolvimento de designs únicos e criativos durante os períodos iniciais de um projeto. Originalmente, a metodologia de otimização estrutural pode ser definida por três técnicas principais; sendo uma delas o Método de Otimização Topológica (MOT), uma combinação eficiente entre o Método dos Elementos Finitos (MEF) e um algoritmo de otimização, visando encontrar a distribuição de material ótima dentro de um domínio de projeto sujeito a algumas restrições. Por se tratar de um procedimento numérico, a aplicação do FEM ao MOT sofre de uma série de instabilidades, sendo uma delas - o foco desta pesquisa - o Tabuleiro de Xadrez. Assim, essa pesquisa investiga os impactos da aplicação do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) e Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável (MEFGE) implementados ao algoritmo de TOM. Vale notar que as formulações não convencionais do MEF foram exitosas em resolver o problema de tabuleiro de xadrez quando combinadas com uma malha de nós enriquecidos criada especificamente para cada exemplo testado. Mesmo na ausência de filtros de sensibilidade, os resultados demonstram grande melhora em suas topologias quando comparados com resultados obtidos usando o MOT original. Os algoritmos criados com o uso de MEFG e MEFGE foram desenvolvidos em linguagem MATLAB<sup>®</sup> e foram vagamente baseados em um algoritmo de MOT-FEM.

**Palavras-chave:** Elementos Finitos Generalizados, Elementos Finitos Generalizados Estável, Otimização Topológica, Problema do Tabuleiro de Xadrez.





# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Objetivos</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Fundamentação Teórica</b>	<b>6</b>
3.1	Otimização Topológica . . . . .	6
3.2	Análise 2D com Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) e Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável (MEFGE) . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Metodologia</b>	<b>11</b>
4.1	Implementação Numérica . . . . .	11
4.2	Problemas Numéricos . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Resultados</b>	<b>13</b>
5.1	Viga MBB . . . . .	13
5.2	Viga BE . . . . .	17
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>22</b>



# 1 Introdução

De uma maneira simplificada, o MOT é uma metodologia matemática que busca a distribuição ótima de material em um dado domínio através da otimização de um parâmetro (variável do projeto), nesse caso a densidade do material, usando o MEF convencional. Esse processo é realizado de maneira sistematizada pela identificação e remoção de elementos e/ou conexões presentes no design original do domínio, assim é alcançada uma solução criativa e comumente não intuitiva nos estágios iniciais do projeto.

Apesar dos ótimos resultados e amplo espectro de aplicações é possível que, devido a problemas numéricos vinculados à formulação do FEM, a qualidade dos resultados pode ser comprometida, gerando respostas indesejadas ou mesmo incorretas. Esses problemas numéricos clássicos estão relacionados à dependência de malha - um problema na discretização do domínio - e tabuleiros de xadrez, que geralmente podem ser evitados com a aplicação de filtros de densidade ou sensibilidade ou mesmo refinamento polinomial de alta ordem (método-p) (BENSØE e SIGMUND, 2003).

Devido aos problemas mencionados anteriormente, o MEFG, MEFGE e outras formulações não convencionais do MEF foram desenvolvidas com o objetivo de superar limitações apresentadas na forma clássica do MEF. Mais especificamente, o MEFG é uma alternativa numérica que conta com a composição entre o MEF original com o auxílio de características dos métodos sem malha, assim como o MEFGE. Basicamente, no MEFG, uma malha é usada para definir e conter nuvens de apoio  $\omega$ , caso em que as funções de forma do MEF servem como Partição Unidade (PU). Essas funções de forma podem ser enriquecidas, dentro de cada nuvem, pela multiplicação das PU por funções de interesse (polinomiais ou não) (DUARTE et al., 2000). Para o MEFGE o enriquecimento ocorre de maneira similar, porém com a adição de funções interpolantes para cada PU. É importante enfatizar que a natureza de cada enriquecimento é nodal (DUARTE et al., 2000).

Resumidamente, enriquecimento nodal pode ser definido como o ampliamiento das bases envolvidas, sem que haja necessidade de introduzir novos pontos nodais no domínio. Essa estratégia, portanto, difere da abordagem do método p-adaptativo do MEF, onde, para uma certa categoria de elementos finitos, é requerida a inserção de novos pontos nodais para aumentar o grau de interpolação das funções de forma (DUARTE E ODEN, 1995).

Nos últimos anos, uma grande quantidade de trabalhos e pesquisas relacionados à Otimização Topológica e formulações não convencionais do MEF vêm sendo realizados. Foi mostrado que o uso de diferentes versões do MEF suavizado (baseado em elementos ou nós) traz resultados interessantes em termos de eficiência, embora não se propõe a resolver o problema de tabuleiro de xadrez ou o uso de filtros de sensibilidade (HE et al., 2015; SHOBEIRI, 2016). De maneira similar, o uso do MOT combinado com o MEFG de Interfaces Enriquecidas (MEFGI) pode resultar em topologias suaves com bordas bem definidas e estruturas finas. Apesar desse método demonstrar resultados promissores comparados com o MOT original, ainda conta com o uso de filtros de sensibilidade durante o processamento de imagem (VAN DEN BOOM et al., 2021).

Essa pesquisa visa contribuir para o estudo dos impactos do MEFG e MEFGE na resolução de problemas associados especificamente ao tabuleiro de xadrez, baseado em enriquecimento nodal aplicados ao MOT. Em outras palavras, esse trabalho analisa o MOT-MEFG e MOT-MEFGE de modo a entender melhor as melhores condições possíveis de enriquecimento para abordar o problema do tabuleiro de xadrez. É buscado atingir tais objetivos sem contar com o uso de filtros de qualquer tipo, como ocorre nos trabalhos

mencionados anteriormente (HE et al., 2015; SHOBEIRI, 2016; VAN DEN BOOM et al., 2021).

## 2 Objetivos

O principal objetivo deste trabalho se resume a encontrar um meio de eliminar o problema do tabuleiro de xadrez sem o uso de filtros de sensibilidade, que podem alterar significativamente os resultados finais das topologias encontradas. Além disso, a pesquisa visa aplicar formulações não convencionais do MEF, como por exemplo o MEFGE e o MEFGE, ao MOT e comparar os resultados obtidos com os resultados do MOT original. Essa pesquisa é uma continuação dos trabalhos mestrado de ARRUDA (2015) sob a orientação de Wesley Gois.

## 3 Fundamentação Teórica

### 3.1 Otimização Topológica

O objetivo principal da Otimização Estrutural é a busca de uma disposição ótima de materiais (variáveis de projeto) para suportar uma dada carga, ao mesmo tempo que satisfaz algumas limitações impostas (CHRISTENSEN e KLARBRING, 2009). A determinação de tais valores ótimos é feita levando em conta diversos critérios, resultando em estruturas complexas e originais, como exemplificado na Figura 1, onde duas malhas diferentes resultam em estruturas drasticamente diferentes. Além disso, os problemas de otimização estrutural são classificados em três categorias principais baseado na variável de projeto escolhida: 1. Otimização de tamanho; 2. Otimização de Forma; 3. Otimização de Topologia; cada uma dessas categorias diferindo em complexidade e abordagem de solução (BENDSØE e SIGMUND, 2003). A primeira categoria busca encontrar parâmetros dimensionais ótimos (grossura, área da seção transversal, etc.), já a segunda é usada para definir formato ou contorna do domínio da estrutura. Entre essas, a Otimização Topológica aparenta ser a ferramenta mais poderosa, já que pode criar novas fronteiras e buracos no domínio do projeto.

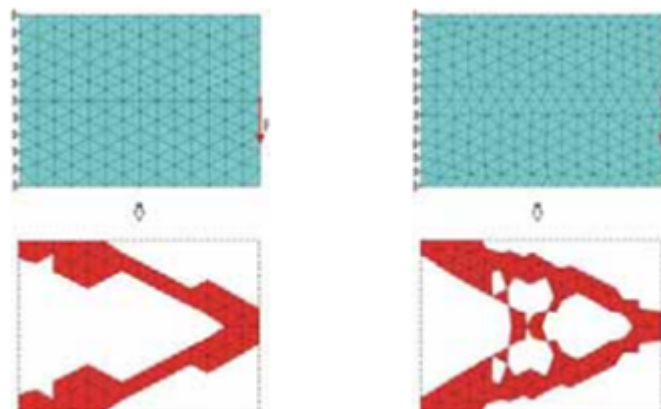


Figura 1: Design obtido por duas malhas diferentes em cada domínio (BENDSØE e SIGMUND, 2003)

O problema estudado nessa pesquisa é baseado no desenvolvimento original apresentado por BENDSØE e KIKUSHI (1988), no qual o MOT é utilizado com o objetivo de minimizar

a função de Compliance (representa o conceito oposto do que é a matriz rigidez do material). A discretização do problema de otimização pode ser dada por:

$$\text{Minimizar } \boldsymbol{\rho} \quad C(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U}$$

$$\text{Sujeito a } \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}$$

$$\sum_{i=1}^{ne} \rho_i V_i \leq V \quad (1)$$

$$0 \leq \rho_{min} \leq \rho \leq 1$$

onde o sobrescrito  $^T$  denota um vetor transposto,  $C(\boldsymbol{\rho})$  é a função de compliance,  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez global,  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{F}$  são os vetores de deslocamento e carga respectivamente.  $ne$  representa o número de elementos total do domínio do projeto,  $V_i$  é o volume dos elementos individuais, e  $V$  é uma limitação sobre a quantidade de material que pode ser distribuída em todo o domínio (restrição de volume). Finalmente, as variáveis de projeto  $\rho_i$  são limitadas entre 0 e 1, porém, afim de evitar futuros problemas numéricos, um valor ínfimo  $\rho_{min}$  é adotado como limite inferior para as variáveis de projeto.

O modelo de material adotado foi o SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization ou Material Sólido Isotrópico com Penalização) (BENDSØ, 1989; ROZVANY et al., 1992; MLEJNEK, 1992), em que o tensor de elasticidade  $E$  é definido em cada ponto do domínio como:

$$E = \rho^p E_0 \quad (2)$$

onde  $E_0$  é uma propriedade básica do material a ser distribuído no domínio,  $\rho$  é um parâmetro de pseudo-densidade (variável de projeto) que descreve a quantidade de material em cada elemento do domínio, e  $p$  é um fator de penalidade (BENDSØE, 1998) que deve ser ajustado para que o processo de otimização alcance resultados numéricos binários (interpretados como preto e branco durante o processamento de imagem).

A solução do problema de minimização do Compliance, dado na Eq. (1), pode resultar em certas instabilidades numéricas que podem ser divididas em três categorias: Dependência de malha, mínimos locais, e problema do tabuleiro de xadrez (SIGMUND e PETERSON, 1998). A dependência de malha e os mínimos locais são ocasionados pela obtenção de mais de uma solução quando se usa diferentes discretizações de domínio ou parâmetros de algoritmo, respectivamente. O problema de tabuleiro de xadrez é uma instabilidade associada à implementação do MEF ao MOT, em que a densidade de material se alterna entre sólida e nula em um padrão similar ao tabuleiro que dá nome ao problema, como mostrado na Figura 2.



Figura 2: Surgimento do problema Tabuleiro de Xadrez.

Para mais detalhes sobre Otimização Topológica, assim como os problemas numéricos associados ao método, leitor pode encontrar o trabalho de BENDSØE e SIGMUND (2003)

nas referências. Aqui foi dada uma breve explicação sobre o problema de tabuleiro de xadrez, já que o foco desta pesquisa é a redução da presença do mesmo nos resultados obtidos na aplicação do MOT.

De acordo com DIAZ e SIGMUND (1995) e com JOG e HABER (1996), a aparição do tabuleiro de xadrez nas soluções de problemas de otimização topológica está associada com a aproximação usada na formulação dos elementos finitos, ou seja, o método produz uma modelagem numérica de qualidade inferior que artificialmente atribui uma rigidez muito elevada a certas regiões do domínio, alternando elementos sólidos e vazios (tabuleiro de xadrez). A maioria dos métodos de mitigar esse problema envolve a aplicação de técnicas de filtragem durante o processamento de imagem, que são baseadas em esquemas heurísticos que modificam a sensibilidade ou a densidade do design usadas em cada iteração do algoritmo de otimização topológica (OT) (BENDSØE e SIGMUND, 2003). Apesar de serem eficientes, técnicas de filtragem introduzem modificações nos valores obtidos a cada iteração, o que acaba modificando a solução exata e otimizada de acordo com as necessidades de engenharia e fabricação de cada peça. Elementos finitos de maior ordem (8 ou 9 nós) são alternativas para resolver o problema de tabuleiro de xadrez, porém, essa abordagem não é indicada ao usar o método SIMP com penalizações muito altas (DIAZ e SIGMUND, 1995). Portanto, duas formulações não convencionais do MEF são propostas na a seguir.

### 3.2 Análise 2D com Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) e Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável (MEFGE)

Para ambos os métodos, considere um sólido isotrópico de volume  $V$  (o mesmo volume de material apresentado durante a análise do MOT) e fronteiras regulares  $\Gamma$  definidas pelas regiões complementares  $-\Gamma_t$  e  $\Gamma_u$ , onde cargas e deslocamentos são aplicados respectivamente. O equilíbrio desse sólido é expresso pelo bem conhecido Princípio do Trabalho Virtual a seguir:

$$\int_V \delta \epsilon^T \sigma dV = \int_V \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{b}} dV + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} d\Gamma_t, \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (3)$$

onde  $\mathbf{u}$  é o vetor de deslocamento,  $\sigma$  e  $\epsilon$  são vetores coluna que contém componentes dos tensores de tração e tensão, respectivamente.  $\delta \mathbf{u}$  é o campo de deslocamentos virtuais admissíveis,  $\delta \epsilon$  é o campo de deformações virtuais compatível com  $\delta \mathbf{u}$ ,  $\bar{\mathbf{b}}$  representa o vetor de forças volumétricas e  $\bar{\mathbf{p}}$  é o vetor de força superficial prescrito em  $\Gamma_t$ .

Para a caracterização completa do problema elástico proposto, as grandezas envolvidas ( $\mathbf{u}$ ,  $\sigma$ ,  $\epsilon$ ,  $\delta \mathbf{u}$  e  $\delta \epsilon$ ) devem, em cada ponto de  $V$ , obedecer às equações de compatibilidade, leis de constituição e fronteiras essenciais condicionadas em  $\Gamma_u$ . Dessa forma, desconsiderando as forças volumétricas, a Eq. (3) toma a seguinte forma:

$$\int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L} \mathbf{u} dV = \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} d\Gamma_t, \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (4)$$

onde  $\mathbf{L}$  é o operador de derivada parcial e  $\mathbf{D}$  é a matriz constitutiva de rigidez. Outra representação da Eq. (4) pode ser dada como:

$$\text{Determine } \mathbf{u} \in E(V) \text{ de modo que } B(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = F(\delta \mathbf{u}), \quad \forall \delta \mathbf{u} \in E(V) \quad (5)$$

onde  $B(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})$  é a forma bilinear (produto interno da energia),  $E(V)$  é o espaço de energia com norma de energia definida por  $\|\mathbf{u}\|_{E(V)} = \sqrt{B(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})}$  e  $F(\delta\mathbf{u})$  é uma forma linear limitada em  $E(V)$ . A energia de tensão também pode ser definida como o valor obtido por  $\frac{1}{2}B(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})$ . Na Eq. (1) o Compliance  $C(\boldsymbol{\rho})$  é o dobro da energia de tensão  $\frac{1}{2}B(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})$ .

Agora, considerando que a abordagem adotada para gerar uma aproximação (via MEFG ou MEFGE, por exemplo) para a forma bilinear apresentada na Eq. (5) é do tipo de Galerkin, então o espaço  $\mathbf{u}$  é igual ao espaço  $\delta\mathbf{u}$ . Ademais, o uso do MEFG (ou MEFGE) para a estrutura de aproximação atribui uma dimensão finita para o espaço  $E(V)$ . Sendo assim, a seguinte aproximação é definida para  $\mathbf{u}$  (e pode ser analogamente estendida para abranger  $\delta\mathbf{u}$ ):

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{U} \quad (6)$$

Na Eq. (6),  $\mathbf{N}$  é a matriz que contem todas as funções de aproximação para os deslocamentos e  $\mathbf{U}$  é o vetor que contem os pesos dessas aproximações. Vale lembrar que as aproximações contidas em  $\mathbf{N}$  devem ser cinematicamente admissíveis ao espaço de dimensão finita que pertence ao espaço  $E(V)$ .

O sistema de equações lineares abaixo é gerado substituindo as aproximações definidas na Eq. (6) na Eq. (5), já especificadas para a dimensão finita:

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (7)$$

onde as seguintes equações foram introduzidas:

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^N \int_{V_e} (\mathbf{L}\mathbf{N})^T \mathbf{D}(\mathbf{L}\mathbf{N}) dV \text{ and } \mathbf{F} = \sum_{e=1}^N \int_{\Gamma_{t_e}} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{p}} d\Gamma_{t_e} \quad (8)$$

de forma que  $V_e$  é o volume e  $t_e$  é a força na fronteira de cada elemento finito. é importante notar que se o problema apresenta uma força concentrada, o vetor  $\mathbf{F}$  da Eq. (8) deve ser completo.

Para a aplicação do MEFG e do MEFGE na análise de planos (2D), é necessário definir suportes ou nuvens formadas por elementos finitos quadrilaterais isoparamétricos de quatro nós. Em ambos os métodos estudados serão usados elementos finitos como definidos acima. Cada nuvem  $\omega_j$ , como mostrado da Figura 3 abaixo, é formada por elementos finitos que compartilham um vértice no nó  $j$ .

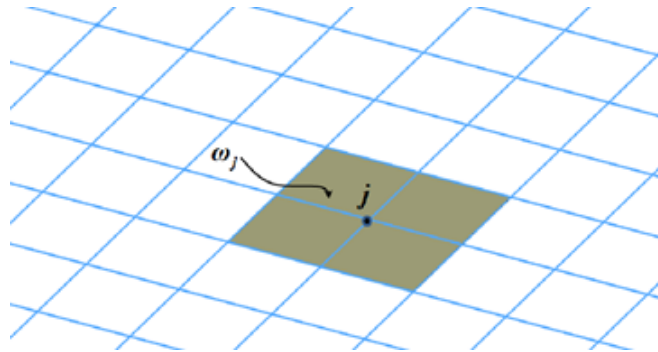


Figura 3: Exemplo de nuvem para discretização bidimensional (elementos quadrilaterais).

Para as nuvens de elementos finitos que consistem de quadriláteros de quatro nós, as funções Lagrangianas bilineares clássicas são usadas como Partição Unidade (PU) para interpolação dos deslocamentos (domínio parametrizado). As funções de enriquecimentos a

serem atreladas aos nós  $j$  da malha de enriquecimento adotadas nesse trabalho são denominadas  $h_{jk}$ , de modo que  $k = 1, \dots, I(j)$  sendo  $I(j)$  o número de funções de enriquecimento atreladas aos nós de índice  $j$ .

Portanto, pode-se definir novas famílias de funções de forma para os campos de deslocamentos dada por:

$$\Theta_n^p = \{\{N_j\}_{j=1}^n \cup \{N_j h_{jk}\}_{j=1}^n; j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, I(j)\} \quad (9)$$

que então pode ser usada para construir a seguinte aproximação:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n N_j \{U_j + \sum_{i=1}^k h_{ji} \mathbf{e}_{ji}\} \quad (10)$$

onde  $p$  é o grau máximo da aproximação resultante,  $n$  é o número total de nós no domínio discretizado,  $N_j$  são as funções de forma originais (PU) para o campo de deslocamento,  $U_j$  são os graus de liberdade dos deslocamentos associados com as funções de forma originais e  $\mathbf{e}_{ij}$  são os novos parâmetros nodais que correspondem a cada condição de enriquecimento.

Então, por exemplo, para malhas de elementos finitos quadrilaterais de quatro nós, as bases de abordagem originais podem ser descritas como:

$$N_{V_e} = [\phi_1 \Delta_1 \quad \phi_2 \Delta_2 \quad \phi_3 \Delta_3 \quad \phi_4 \Delta_4] \quad (11)$$

sendo  $\phi_j, j = 1, 2, 3, 4$  a representação das funções Lagrangianas bilineares clássicas que estão vinculadas ao nó.  $V_e$  representa o domínio de elementos finitos da discretização. Já o  $\Delta_j$  é a matriz de enriquecimento nodal para o nó  $j$ , e pode-se definir essa matriz em termos de  $\mathbf{I}_2$  que é a matriz identidade de segunda ordem.

$$\Delta_j = [\mathbf{I}_2 \quad h_{j1} \mathbf{I}_2 \quad \dots \quad h_{jk} \mathbf{I}_2 \quad \dots \quad h_{jI(j)} \mathbf{I}_2] \quad (12)$$

É importante notar que o método de enriquecimento para ambos os tipos de aproximação MEF<sub>G</sub> e MEF<sub>GE</sub> são realizados no domínio global (não no domínio parametrizado) e as funções de enriquecimento são definidas de modo se serem nulas nos nós em que elas estão atreladas. Nesse caso, fica evidente que, sendo as funções enriquecidas nulas em seus respectivos nós, tanto a matriz identidade  $\mathbf{I}_2$  quanto a formulação original do MEF estão preservadas. A Figura 4 ilustra a técnica de enriquecimento nodal aplicada às funções de forma do MEF.

Até este ponto, tanto o MEF<sub>G</sub> e o MEF<sub>GE</sub> utilizam as mesmas técnicas de enriquecimento, porém o MEF<sub>GE</sub> conta com o recurso adicional de funções interpolantes que são adicionadas às funções enriquecedoras antes do tratamento das PU. Essa diferença pode causar grande impacto no resultado final, reforçando a necessidade de se comparar os dois métodos. Devido à essas pequenas modificações, as novas funções enriquecedoras podem ser definidas como (SIGMUND e PETERSON, 1998; BABUŠKA e BANERJEE, 2012):

$$\tilde{h}_{jk} = h_{jk} - \mathbf{I}_{\omega_j}(h_{jk}); \mathbf{I}_{\omega_j} = \sum_{j=1}^p N_j h_{jk} \quad (13)$$

nesse caso  $N_j$  e  $h_{jk}$  são definidos exatamente do mesmo modo do que as Eq. (9) e (10).  $\mathbf{I}_{\omega_j}$  é a função de interpolação definida por  $N_j$  e  $h_{jk}$ . Então, uma nova função de enriquecimento  $\tilde{h}_{jk}$  pode ser definida e substituída na Eq. (9), criando também uma nova função de forma  $\tilde{\Theta}_n^p$  (BABUŠKA e BANERJEE, 2012).

$$\tilde{\Theta}_n^p = \{\{N_j\}_{j=1}^n \cup \{N_j \tilde{h}_{jk}\}_{j=1}^n; j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, I(j)\} \quad (14)$$



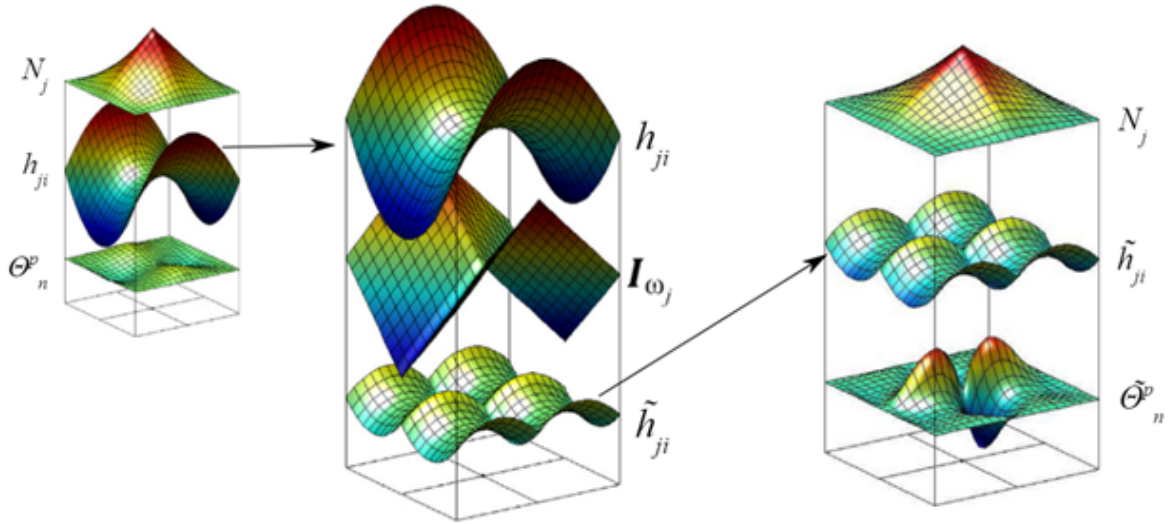


Figura 4: Construção das funções de forma do MEFG (esquerda), e do MEFGE (centro e direita).  $N_j$  são as funções de forma do MEF;  $h_{ji}$  (MEFG) e  $\tilde{h}_{ji}$  (MEFGE) são as funções de enriquecimento;  $\Theta_n^p$  (MEFG) e  $\tilde{\Theta}_n^p$  (MEFGE) são as PU modificadas - funções de forma adaptadas de GUPTA et al. (2013).

## 4 Metodologia

### 4.1 Implementação Numérica

A implementação computacional da formulação do Método de Otimização Topológica usando o MEFG (MOT-MEFG) e MEFGE (MOT-MEFGE) foram desenvolvidas da mesma maneira, já que ambos os métodos diferem em apenas uma das etapas. Inicialmente a malha do modelo é gerada, seguida pela definição das funções de enriquecimento, matriz rigidez global, e vetores de força de um dado domínio. Logo em seguida, o procedimento de Otimização Topológica é realizado em uma análise bidimensional. O programa foi desenvolvido em linguagem MATLAB® baseado em SIGMUND (2001), contando com a remoção completa do filtro de sensibilidade para evitar erros e confusões. Embora não tenha sido tratado nessa pesquisa, o programa pode ser alterado para resolver problemas em 3 dimensões.

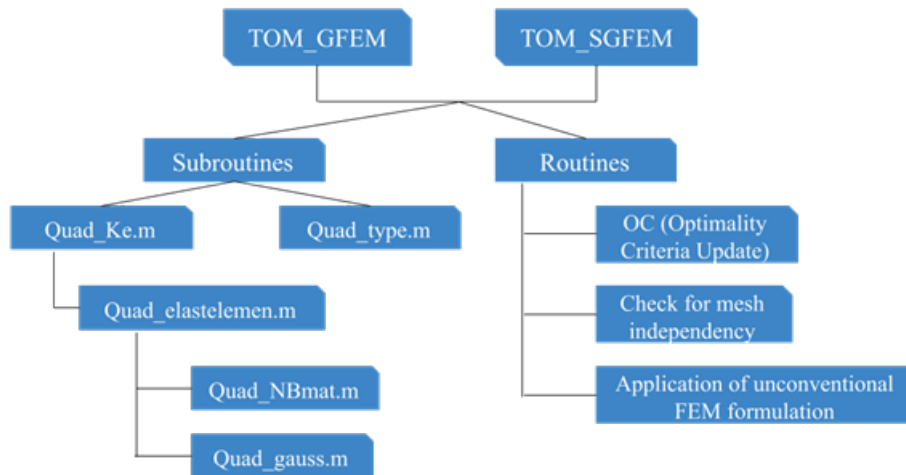


Figura 5: Esquema mostrando a hierarquia de ambos códigos de MATLAB®.

Considerando que ambas formulações não convencionais do MEF tratadas aqui compar-



tilham a maior parte do processo de enriquecimento nodal, ambos programas se utilizam de várias das mesmas sub-rotinas. Inicialmente um algoritmo para MOT-MEFG foi escrito baseado em um programa de MATLAB® pré-existente para MOT clássico (SIGMUND, 2001). Para adaptar o código obtido para combinar MEFGE e MOT apenas poucas mudanças foram necessárias, sendo a primeira na rotina principal (TOP\_GFEM.m que se tornou TOP\_SGFEM.m) e a segunda na sub-rotina Quad\_NBmat.m, onde o enriquecimento nodal é aplicado às PUs. Nessa sub-rotina também são definidas as PUs e é criada a matriz B, onde são armazenadas as funções enriquecidas para realização de cálculos.

A Figura 6 mostra um esquema genérico representando a lógica de ambos algoritmos, onde as linhas pontilhadas representam os possíveis diferentes caminhos do código, dependendo de que programa está efetivamente sendo usado. O primeiro passo consiste na leitura dos inputs e alocação de espaço na memória e variáveis globais, como o número de elementos finitos (malha) e parâmetros de otimização, incluindo o fator de penalização e volume desejado, por exemplo. O programa foi criado e utilizado para domínios retangulares, mas pode ser facilmente adaptado para outras geometrias. O próximo passo é a determinação do campo de deslocamento, cada programa usando um método diferente, e checar os critérios de convergência. A partir daqui o programa entra no ciclo de iterações até que pelo menos um dos critérios definidos seja atingido. Neste trabalho foi definido que o processo de iteração continue até que a quantidade de mudança na topologia entre cada iteração seja maior do que um determinado valor escolhido arbitrariamente.

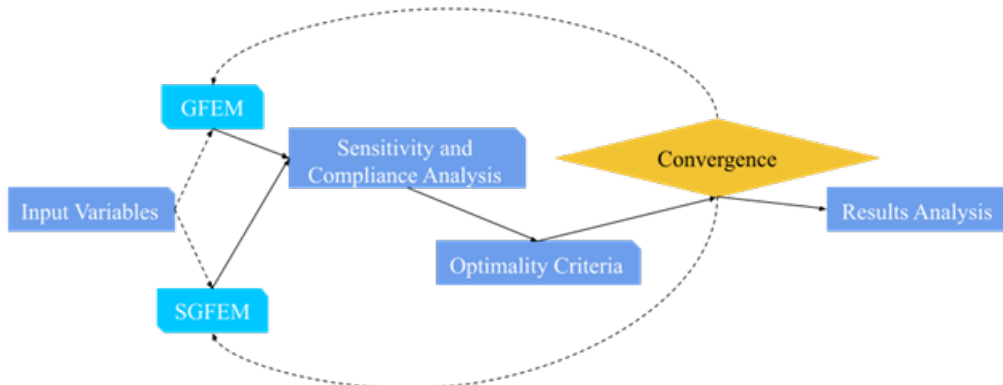


Figura 6: Esquema genérico exemplificando a lógica seguida pelos algoritmos.

## 4.2 Problemas Numéricos

Dois problemas foram estudados ao longo da pesquisa. O primeiro é conhecido como Viga Messerschmitt-Bölkow-Blohm (Viga MBB) e o segundo é a viga bi-engastada (Viga BE) que são representadas na Figura 7 abaixo:

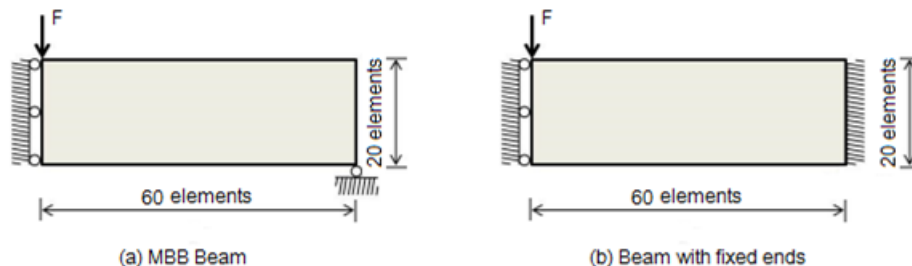


Figura 7: Modelo de Viga MBB (a) e Viga BE (b) (ARRUDA, 2015).

Todas as simulações são feitas considerando uma malha retangular de  $60 \times 20$  elementos, um material isotrópico com módulo elástico de  $1.0Pa$ , coeficiente de Poisson de 0.3 e uma unidade de força aplicada no topo à esquerda da estrutura, como mostrado na Figura 7. Enquanto isso, a fração de volume é tomada como  $f = 0.5$  (levando à estruturas que tenham aproximadamente 50% do volume inicial da estrutura) e penalização variando entre 1 e 3, para verificar a relação entre o método de enriquecimento e a presença de tabuleiro de xadrez na solução final encontrada. O polinômio de segunda ordem completo foi usado para o enriquecimento nodal e é dado pelo seguinte polinômio:  $x + y + x^2 + y^2 + xy$ ,  $I(j) = 5$  (Eq. (9)); já que de acordo com ARRUDA (2015) este produz os melhores resultados.

Além dos contornos dos domínios dos dois problemas diferirem em restrições, ficou decidido pelo uso de duas malhas enriquecidas em cada um dos problemas. Primeiramente, os problemas são resolvidos pelo MOT original sem filtros e então, por questões de simplicidade, foi criada uma malha enriquecida uniforme como as que foram utilizadas por ARRUDA (2015). Porém, como os resultados do autor ainda não foram satisfatórios foi decidido a utilização de uma malha não uniforme com densidade de nós maior nas regiões onde o tabuleiro de xadrez se encontra mais severo nos resultados no MOT clássico.

## 5 Resultados

### 5.1 Viga MBB

A figura 8 mostra a malha básica usada para simular todos os problemas envolvendo a viga MBB, assim como as forças e condições de contorno (seta vermelha e triângulos azuis, respectivamente), onde o elemento visual permite o melhor entendimento e controle dos elementos finitos e nós enriquecidos. A simulação realizada com o programa alterado de SIGMUND (2001) é usada como padrão de comparação para os resultados das novas formulações e as topologias e dados podem ser vistos na Figura 9 e Tabela 1. É importante notar que o presente trabalho não visa comparar tempo de rodagem dos códigos, já que as formulações de MOT-MEFG e MOT-MEFG-E demandam maior capacidade de processamento.

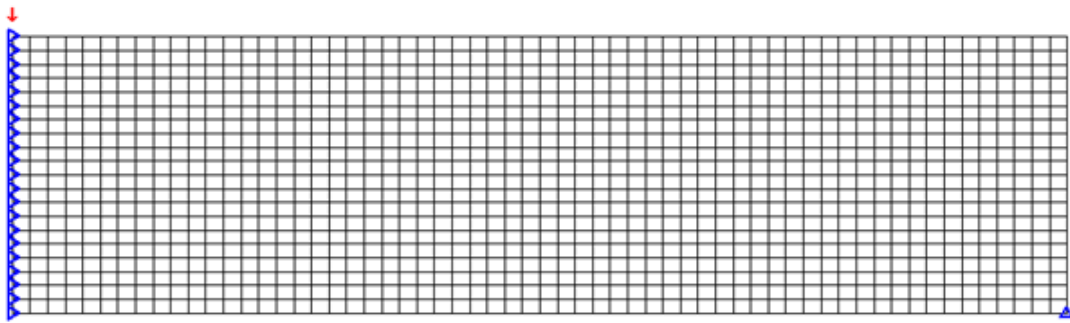


Figura 8: Malha retangular de  $60 \times 20$  aplicada à viga MBB (ARRUDA,2015).

Fica evidente, através da Figura 9, que quando os filtros de sensibilidade são removidos, o tabuleiro de xadrez pode ser percebido em diversos graus, variando com a penalização ( $p$ ) de cada simulação. Com isso, uma relação direta entre a penalização e a quantidade de tabuleiro de xadrez pode ser notada, já que quanto maior o valor de  $p$ , menor é a quantidade do problema encontrado na topologia. Com isso, a Figura 9, em conjunto com a Tabela 1 a seguir definem o Benchmark para esse problema.

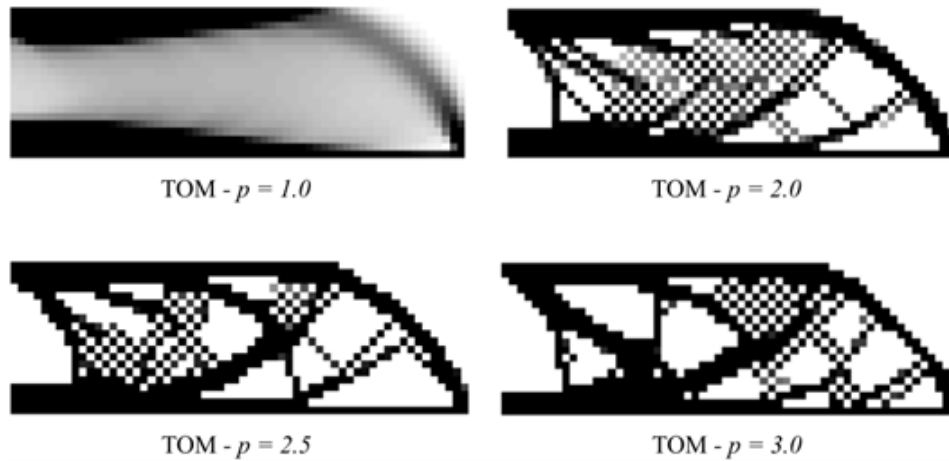


Figura 9: Padrão de topologia obtidas com o programa de SIGMUND (2001).

Tabela 1: Dados de programação obtidos para a topologia da Viga MBB

Penalização	Frac. de Vol.	Iteração	Função Objetiva
1,0	0,5	20	164,4165
2,0	0,5	97	185,4375
2,5	0,5	47	191,0886
3,0	0,5	65	203,2379

Por uma questão de simplicidade, a primeira malha criada apresentava uma distribuição uniforme e dispersa dos nós enriquecidos, com o intuito de cobrir a maior área possível do malha mostrada na Figura 8. A nova malha, chamada Malha 1 (ver Figura 10), serve como forma de exemplificar a importância da localização dos nós enriquecidos para esse tipo de simulação. A localização esparsa das funções modificadas na malha pode levar à resultados abaixo do esperado, porém alcançando melhores resultados em termos de iterações e tempo, além de ser simples de ser escrita em código, justificando o uso da mesma.

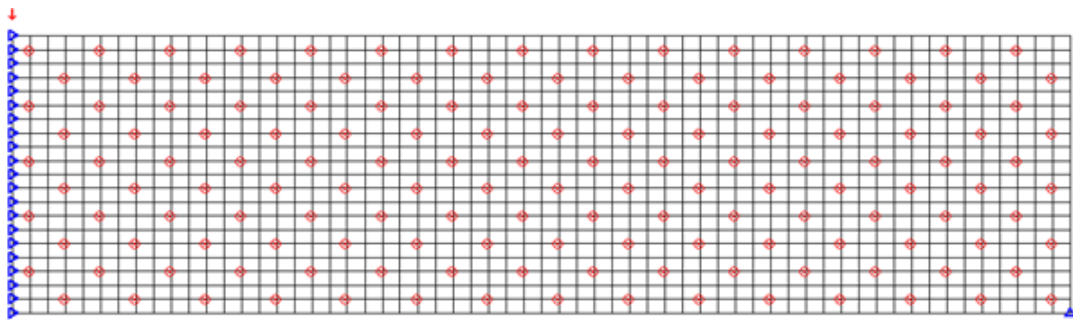


Figura 10: Distribuição uniforme de enriquecimento nodal na Viga MBB - Malha 1.

Analisando os resultados obtidos em cada programa e comparando-os lado a lado, é possível observar pouca melhora no quesito eliminação do tabuleiro de xadrez. Para penalizações menores do que dois ( $p \leq 2,0$ ) não há mudanças significativas em topologia, porém, com o aumento de  $p$ , mudanças mais significativas começam a surgir, com o melhor resultado sendo do MOT-MEFG com  $p = 3,0$ , como visto na Figura 11. Por outro lado, o problema ainda não se encontra resolvido ou evitado, indicando que distribuições melhores de nós enriquecidos podem trazer melhores resultados.

Ademais, o valor da função objetiva também mostra pouca mudança quando comparado com os resultados obtidos pelo MOT original sem filtros, especialmente quando  $p = 3,0$ ,

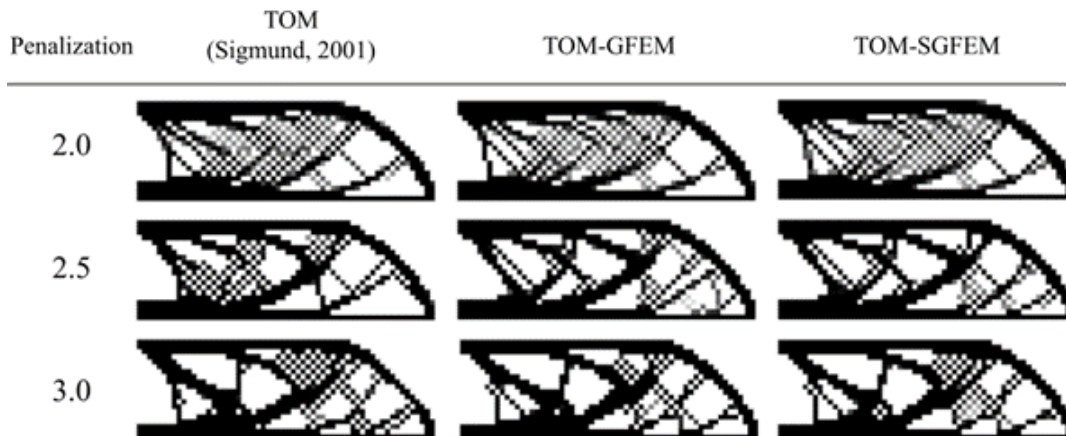


Figura 11: Comparação entre os resultados obtidos para a Viga MBB usando a Malha 1.

corroborando o que pode ser observado em relação à topologia. Mesmo considerando o número de iterações, as variações são pequenas e erráticas demais para contribuir com qualquer análise que se queira fazer relacionada a eficiência em relação à distribuição uniforme de nós enriquecidos. A Tabela 2 mostra os dados para os três códigos analisados lado a lado para comparação.

Tabela 2: Dados de programação obtidos para a topologia da Viga MBB

Penalização	MOT		MOT-MEFG		MOT-MEFG	
	It.	Função Obj.	It.	Função Obj.	It.	Função Obj.
2,0	97	185,4375	115	188,1589	78	188,0354
2,5	47	191,0886	55	195,4185	54	194,8524
3,0	65	203,2379	47	203,7820	35	203,7459

Após uma observação cuidadosa dos resultados obtidos através do MOT original, e também levando em conta os resultados vindos do padrão de enriquecimento nodal obtidos com a Malha 1, foi possível escolher arbitrariamente uma distribuição não uniforme de nós enriquecidos no domínio do projeto (aqui chamada de Malha 2), como mostrada na Figura 12. Essa disposição foi escolhida baseada na severidade com que o problema de tabuleiro de xadrez aparece em diferentes regiões do domínio durante a simulação no MOT clássico. Simultaneamente, essa nova malha tenta cobrir áreas onde o tabuleiro de xadrez persistiu mesmo após o enriquecimento proveniente da Malha 1 (maior densidade de nós enriquecidos na área centro-direita do domínio, como observado nas Figuras 9 e 11).

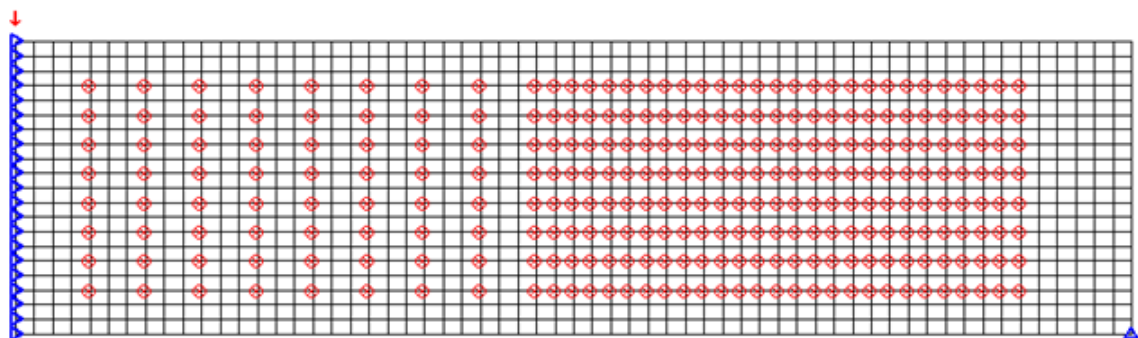


Figura 12: Distribuição não uniforme de enriquecimento nodal na Viga MBB - Malha 2.

É importante notar que as simulações realizadas são restringidas a um número máximo de nós enriquecidos, já que, malhas muito enriquecidas levam a problemas relacionados

com estabilidade numérica, como demonstrado por GÓIS e PROENÇA (2012). Esse problema pode ser exemplificado por um único elemento, onde a adição de polinômio completo de segundo grau ( $x + y + x^2 + y^2 + xy$ ) a um elemento de 4 nós adiciona 10 graus de liberdade à matriz rigidez associada ao elemento; assim aumentando a matriz que é tipicamente  $8 \times 8$  para uma matriz  $48 \times 48$ .

Com isso em mente, a malha adotada conta com 280 nós ( $< 0,25n_{elementos}$ ), escolhida especificamente para resolver esse problema. O número de nós enriquecidos foi escolhido baseado em diversos testes, envolvendo diferentes malhas, variações nas regiões de enriquecimento nodal, assim como o próprio número de nós enriquecidos aplicados no domínio (ARRUDA,2015).

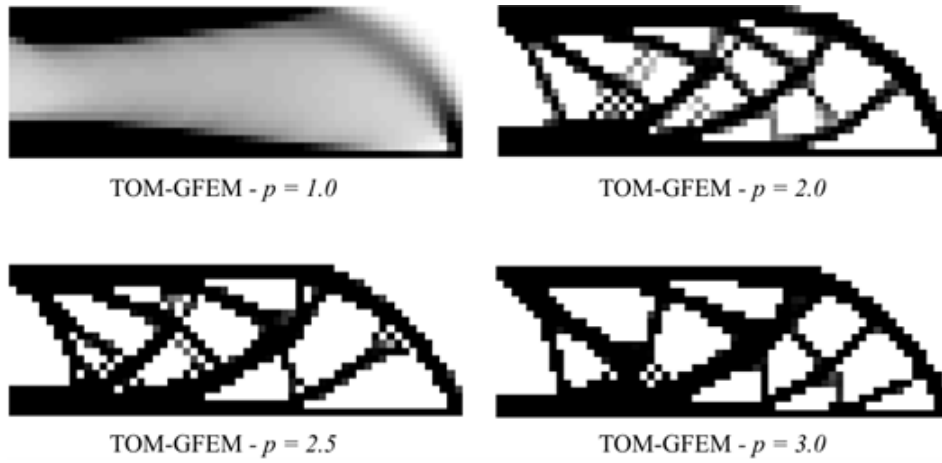


Figura 13: Topologia obtida para Viga MBB com MOT-MEFG - Malha 2.

Após realiza as simulações para ambos MEFG e MEFGE, tornou-se possível ver grandes diferenças na intensidade do que restou do problema de tabuleiro de xadrez. De maneira similar ao código de MOT, nos dois novos casos a quantidade de instabilidade decresce conforme a penalização aumenta. Começando pelos resultados do MOT-MEFG, é possível observar que os contornos da topologia permanecem como no MOT, porém a instabilidade se apresenta com muito menos intensidade em todas as penalizações, como visto na Figura 13. Apesar da similaridade superficial, uma observação mais cuidadosa permite ver que o MOT-MEFGE removeu mais do tabuleiro de xadrez e foi capaz de impedir o aparecimento da instabilidade (áreas acinzentadas em  $p = 2,0$ , Figura 14).

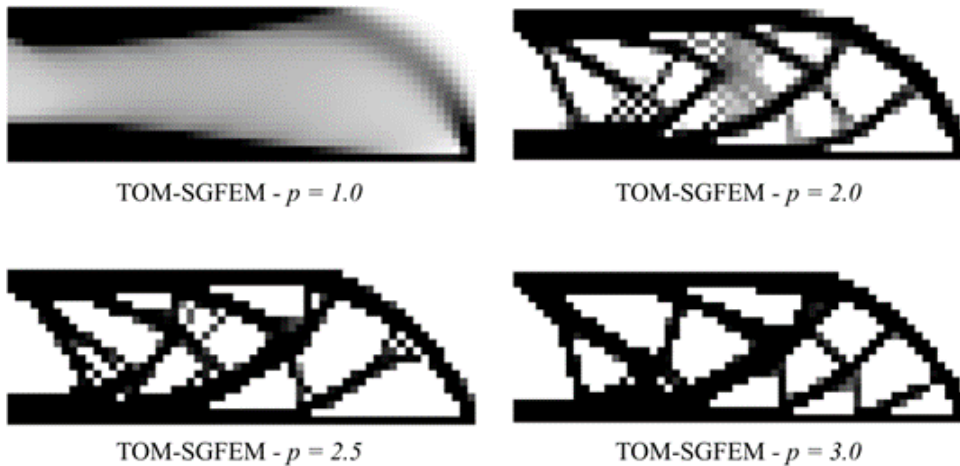


Figura 14: Topologia obtida para Viga MBB com MOT-MEFGE - Malha 2.

Para melhor comparar os resultados, a Figura 15 mostra as topologias obtidas em



cada um dos três algoritmos usados organizadas de acordo com a penalidade. Já que os resultados para penalização 1,0 contam com poucas diferenças visuais, a imagem conta somente com as topologias obtidas para  $p \geq 2,0$ , porém os dados para  $p = 1,0$  se encontram na Tabela 2, já que as diferenças nos dados numéricos podem ser de maior importância nesse caso. Tais mudanças podem ser explicadas pela aplicação do MEFGE e MEFGE, que levam a um grande aumento na matriz rigidez e vetor de deslocamentos do problema.

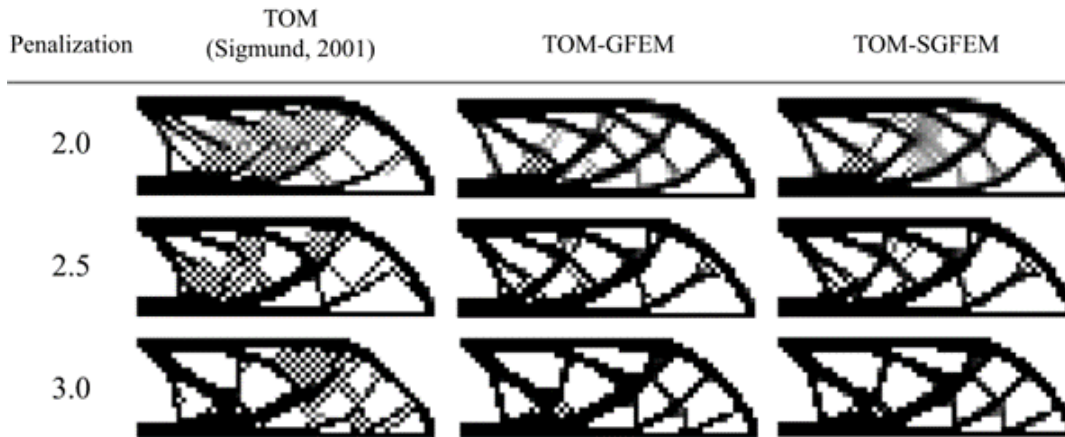


Figura 15: Comparação entre os resultados obtidos para a Viga MBB usando a Malha 2.

Em complemento às imagens na Figura 15, os dados apresentados na Tabela 2 mostram os valores de interesse já mencionados anteriormente. A parte da topologia, é notável que ambos novos algoritmos apresentaram menor número de iterações, com algumas exceções. Os valores da função objetiva sempre foram maiores para a formulação do MEFGE, mas seguidos de perto pelo código de MEFGE. Mesmo sem grandes diferenças visuais em  $p = 1,0$ , as duas novas formulações tiveram melhores resultados tanto em iterações quanto na função objetiva.

Tabela 3: Dados de programação obtidos para a topologia da Viga MBB

Penalização	MOT		MOT-MEFG		MOT-MEFGE	
	It.	Função Obj.	It.	Função Obj.	It.	Função Obj.
1,0	20	164,4165	19	164,4956	19	164,4968
2,0	97	185,4375	114	190,5152	87	190,9066
2,5	47	191,0886	46	195,7316	51	196,1413
3,0	65	203,2379	35	206,0362	48	206,3735

Além dos dados numéricos, uma comparação entre os diferentes resultados obtidos com cada um dos três códigos torna evidente o impacto causado pelas formulações não convencionais do MEF quando aplicadas ao já consolidado MOT. Olhando atentamente para as imagens da última fileira da Figura 15, é possível ver grande melhora no problema de tabuleiro de xadrez entre as simulações de MOT e MOT-MEFG, também virtualmente não há tabuleiro de xadrez no MOT-MEFGE, mesmo ainda havendo alguns elementos vazios em áreas predominantemente sólidas.

## 5.2 Viga BE

Nesta seção serão observados e discutidos os resultados do segundo problema estudado no decorrer deste trabalho, a Viga Bi-Engastada (BE), ou seja, que possui ambas as

extremidades fixas. Para essa simulação foi feita uma adaptação da malha original apresentada na Figura 8 porém com a diferença dos "x" azuis na extremidade direita do diagrama, que representam que essa extremidade também conta com todos os pontos fixos (Figura 16).

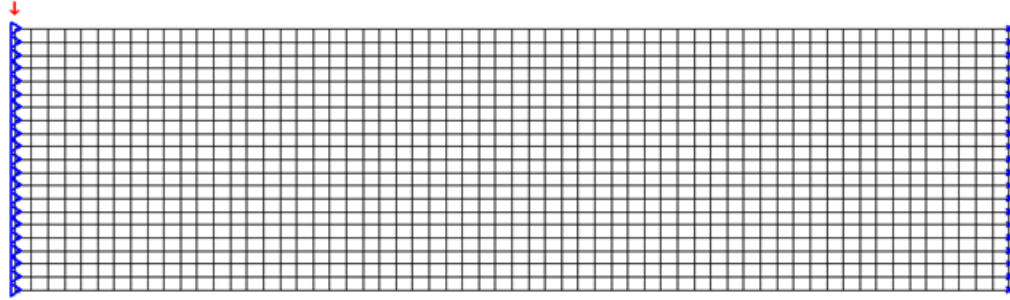


Figura 16: Malha retangular de  $60 \times 20$  aplicada à Viga BE.

O Benchmark para a Viga BE obtidos pelo algoritmo original de MOT (SIGMUND, 2001) são mostrados na Figura 17. Seguindo o padrão estabelecido pela Viga MBB, os resultados são mostrados sem a aplicação de filtros de sensibilidade. Analisando as topologias obtidas, é possível observar que para valores mais baixos de penalização resultam em uma distribuição vasta do tabuleiro de xadrez (vide  $p = 2,0$  na Figura 17), enquanto o aumento da penalização resulta em regiões mais uniformes e menos áreas de tabuleiro de xadrez. Portanto, é possível afirmar que há uma relação direta entre o valor da penalização e a quantidade de instabilidade observada nos resultados (assim como no caso da Viga MBB).

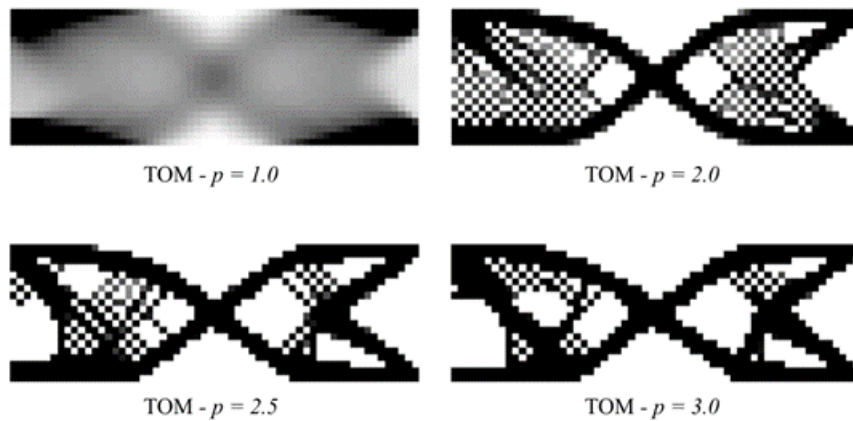


Figura 17: Padrão de topologia obtidas com o programa de SIGMUND (2001).

Tabela 4: Dados de programação obtidos para a topologia da Viga BE

Penalização	Frac. de Vol.	Iteração	Função Objetiva
1,0	0,5	13	58,9521
2,0	0,5	101	67,8013
2,5	0,5	65	71,7995
3,0	0,5	41	74,5923

Já os dados relacionados com as topologias da Figura 17 podem ser encontrados na Tabela 4. Em concordância com o que foi visto no problema anterior, o maior número de iterações ocorre quando  $p = 2,0$ , e o valor mais alto para a função objetiva é resultado

direto de maiores valores de penalização, já que a quantidade de tabuleiro de xadrez decresce conforme se aumenta a penalização.

Para realizar a primeira simulação com enriquecimento nodal para a Viga BE, a Malha 1 utilizada no problema anterior foi adaptada para esse problema, com a única diferença sendo os nós fixos na extremidade direita, como mostrado na figura anterior. Todas as outras características como a densidade e posição dos nós continuam inalteradas, podendo assim continuar se chamando Malha 1.

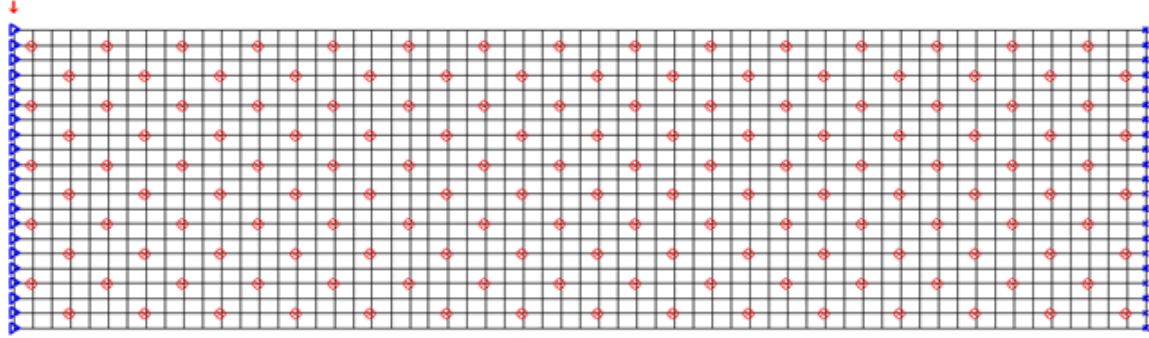


Figura 18: Distribuição uniforme de enriquecimento nodal na Viga BE - Malha 1.

Nessa aplicação da Malha 1, os resultados demonstram pouca ou nenhuma melhora em relação ao problema estudado (Figura 19). Ainda comparando os resultados com o problema anterior, é possível perceber que praticamente não há mudanças entre os programas para valores baixos de penalização, ocorrendo até uma piora no problema de tabuleiro de xadrez para o MOT-MEFG quando  $p = 2, 0$ . Ademais, os resultados para as penalizações 2, 5 e 3, 0, para ambas novas formulações, se parecem no quesito aparência porém não são o suficiente para corrigir ou mitigar o problema.

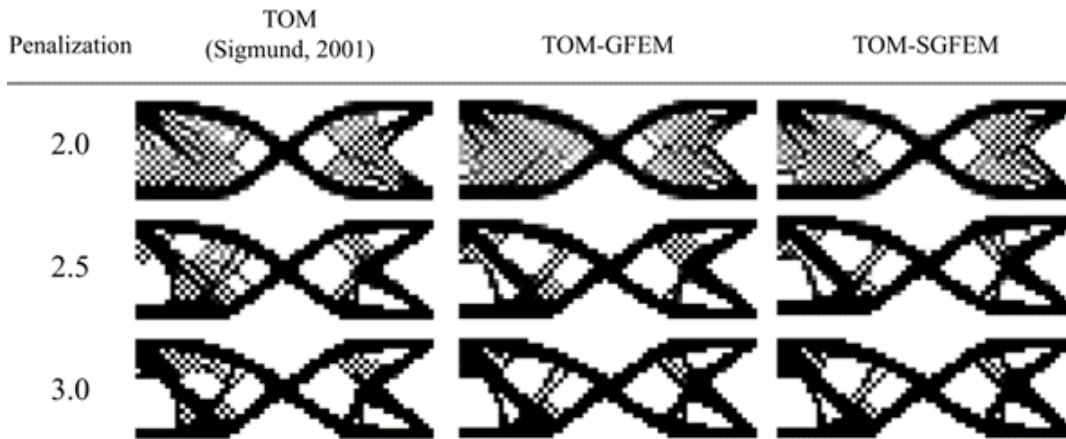


Figura 19: Comparação entre os resultados obtidos para a Viga BE usando a Malha 1.

Quanto aos dados de interesse, não há mudança significativa nos valores além do número de iterações para  $p = 2, 5$  no caso do MOT-MEFG. Todos os valores podem ser observados na Tabela 5. Embora o valor da função objetiva tenha aumentado tanto para o MOT-MEFG quanto para o MOT-MEFG, isso não foi um indicativo de que houve melhora na remoção do tabuleiro de xadrez, especialmente se for levado em consideração que o pior resultado para topologia foi o MOT-MEFG para penalização 2, 0 ao mesmo tempo que obteve o maior valor para função objetiva. Nota-se que esse valor de penalização é atrelado a um padrão de aumento no número de iterações, tornando as simulações muito mais demoradas do que as outras.



Tabela 5: Dados de programação obtidos para a topologia da Viga BE - Malha 1

Penalização	MOT		MOT-MEFG		MOT-MEFGE	
	It.	Função Obj.	It.	Função Obj.	It.	Função Obj.
2,0	101	67,8013	116	69,8454	96	69,3969
2,5	65	71,7995	46	72,5065	38	72,3141
3,0	41	74,5923	35	75,7611	42	75,6333

Usando os mesmos métodos de observação usados para o problema da Viga MBB, uma nova e melhorada malha pode ser criada especificamente para esse problema, onde há uma maior densidade de nós enriquecidos mais próxima ao centro do domínio e mais esparsamente distribuídos próximo as extremidades, e será chamada de Malha 3 no decorrer deste trabalho e pode ser vista na Figura 20. Para uma melhor avaliação, o número de nós enriquecidos é o mesmo da Malha 2 e com a mesma distribuição vertical, com o objetivo de cobrir o meio do domínio, onde o tabuleiro de xadrez é mais intenso.

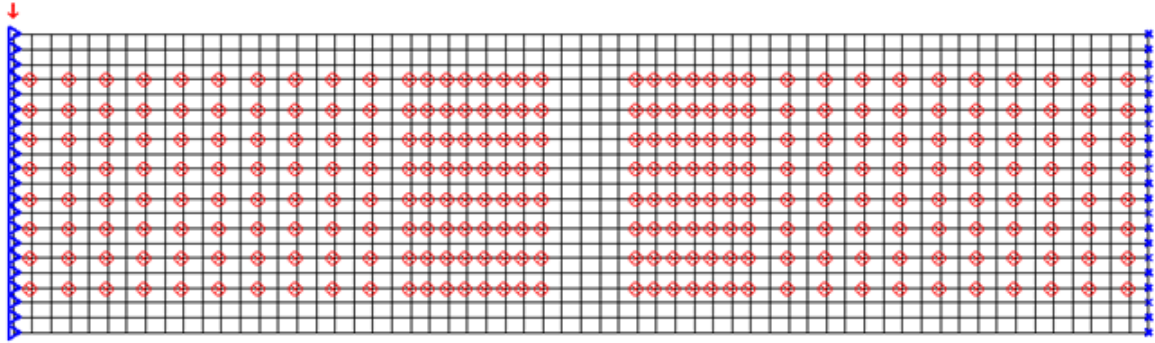


Figura 20: Distribuição não uniforme de enriquecimento nodal na Viga BE - Malha 3.

Os resultados para MOT-MEFG e MOT-MEFGE, quando combinados com a Malha 3, mostraram alguma melhora quando comparados aos resultados da Malha 1 e uma grande mudança se comparados com o MOT original. MOT-MEFG teve resultados interessantes quanto ao posicionamento do foco restante de tabuleiro de xadrez. Cada valor de penalização alterou a posição do problema remanescente para um novo foco, como visto na Figura 21. Quando combinado com o MEFGE, o código teve êxito em melhorar os resultados finais, mais especificamente quando  $p = 3,0$ , onde uma pequena área continuou com o problema no canto superior esquerdo (Figura 22).

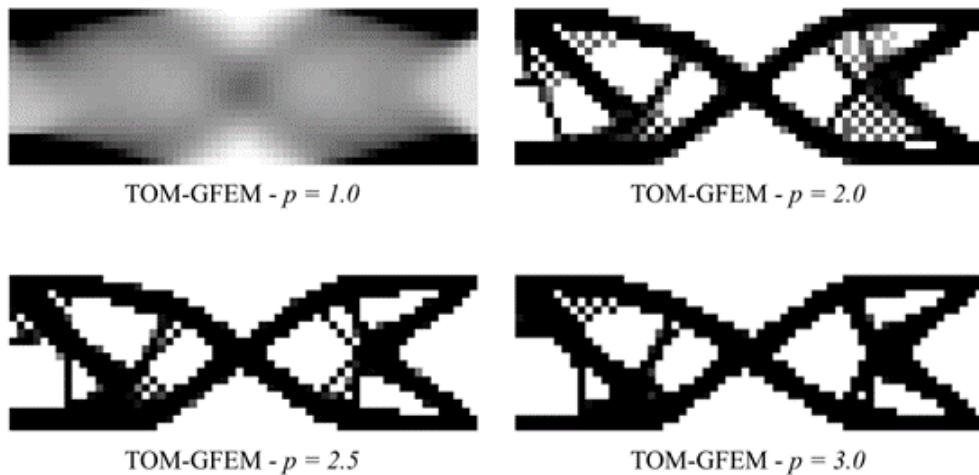


Figura 21: Topologia obtida para Viga BE com MOT-MEFG - Malha 3.

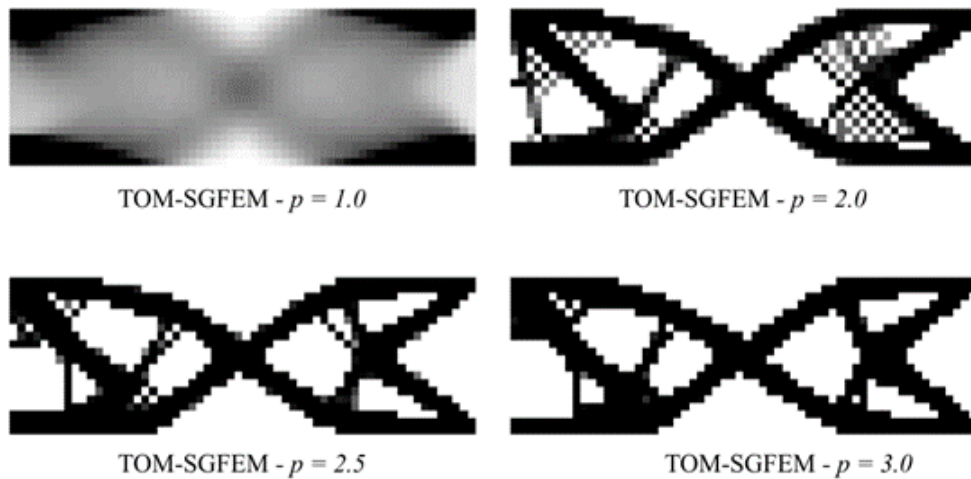


Figura 22: Topologia obtida para Viga BE com MOT-MEFGE - Malha 3.

Quando comparadas lado a lado, as diferenças em topologia podem ser vistas mais claramente. A Figura 23 traz a compilação dos resultados de topologia, com cada linha representando um valor de penalização e cada coluna, um dos algoritmos usados. Ambos MOT-MEFG e MOT-MEFGE obtiveram resultados semelhantes se comparados um ao outro, porém demonstraram grande avanço comparado com o código de SIGMUND (2001). Para penalização 2, 5 os dois novos programas tiveram resultados significativamente melhores com o MEFGE sendo capaz de resolver o problema com mais eficácia no canto inferior direito e extremidade esquerda da viga. Já em relação à penalização 3, 0, o MEFGE obteve resultados ligeiramente melhores, conseguindo corrigir mais do problema no canto superior esquerdo da viga.

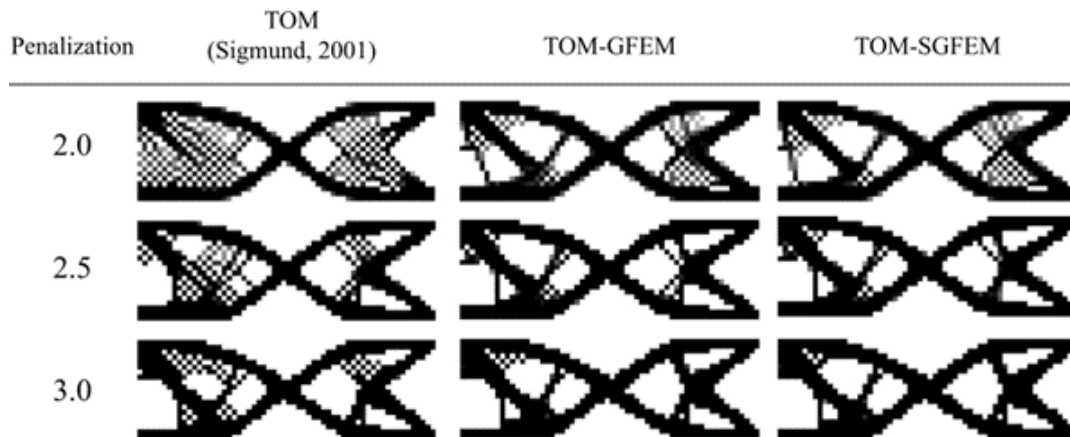


Figura 23: Comparação entre os resultados obtidos para a Viga BE usando a Malha 3.

Os dados pertinentes ao número de iterações e valor da função objetiva pode ser encontrado na Tabela 6. Para valores de penalização maiores ou iguais a dois ( $p \geq 2,0$ ) há um aumento significativo no valor da função objetiva, com os dois novos métodos propostos se comportando de maneira muito similar. Levando em consideração o número de iterações, o MEFGE obteve os melhores resultados, enquanto, em contrapartida, o MEFGE obteve o maior número de iterações quando  $p = 2,0$ . Mesmo o MOT-MEFGE atingindo os melhores resultados para topologia, os seus valores de função objetiva foram ligeiramente menores do que o MOT-MEFG.

De maneira geral, as duas novas formulações do MOT podem reduzir drasticamente o problema de tabuleiro de xadrez, quando combinadas com uma malha enriquecida

Tabela 6: Dados de programação obtidos para a topologia da Viga BE - Malha 3

Penalização	MOT		MOT-MEFG		MOT-MEFGE	
	It.	Função Obj.	It.	Função Obj.	It.	Função Obj.
1,0	13	58,9521	12	59,0276	12	59,0272
2,0	101	67,8013	87	71,6633	142	71,5407
2,5	65	71,7995	72	73,4259	53	73,3993
3,0	41	74,5923	42	76,2234	39	76,1382

cuidadosamente elaborada ao invés de uma distribuição uniforme de nós enriquecidos, indicando que o posicionamento do enriquecimento nodal pode levar a resultados melhores.

## 6 Conclusão

Essa pesquisa estuda a possibilidade de remoção do problema de tabuleiro de xadrez do método SIMP para Otimização Topológica utilizando duas formulações não convencionais do Método dos Elementos Finitos, o MEFG e o MEFGE. Pela análise dos resultados, obtidos através do MOT convencional utilizando o código de SIGMUND (2001), foi possível elaborar uma distribuição de nós enriquecidos diferente para cada problema contemplado. As malhas têm uma densidade de nós enriquecidos um pouco maior em áreas mais afetadas pelo tabuleiro de xadrez e alguns enriquecimentos mais esparsos distribuídos através do resto do domínio.

Primeiramente uma distribuição uniforme de nós foi testada, como uma base para comparação. Esses resultados para MOT-MEFG e MOT-MEFGE, em ambos problemas, foram inferiores aos resultados para as malhas concebidas especificamente. Mesmo a distribuição uniforme de nós tendo conseguido remover algumas regiões do problema, não causou um impacto significativo o suficiente, com uma área considerável ainda coberta pelo tabuleiro de xadrez nos dois exemplos dados. Mesmo considerando os dados de número de iterações e valor da função objetiva, as mudanças foram mínimas quando comparadas à formulação convencional do MOT.

Considerando as malhas não uniformes, os resultados são promissores, com a topologia obtida com o uso do MOT-MEFGE e penalização igual a três sendo a melhor em termos de remoção do tabuleiro de xadrez nos dois problemas propostos. Nas simulações de Viga MBB, ambos os códigos foram consideravelmente mais eficazes que o MOT convencional e as malhas uniformes, mais especificamente quando a penalização é igual a três. O MOT-MEFGE virtualmente não apresentou tabuleiro de xadrez algum. Já na Viga BE, os resultados foram similares ao primeiro exemplo, exceto que nenhum dos dois algoritmos eliminou o problema por completo. As duas novas formulações mantiveram um pouco de tabuleiro de xadrez no canto superior esquerdo da estrutura.

Esses resultados indicam que ambas as novas metodologias são altamente sensíveis à densidade e localização de nós enriquecidos. Com isso em mente é possível supor que melhores resultados poderiam ser obtidos com malhas ainda mais especializadas projetadas para cada exemplo. Vale ressaltar também que, como esperado, os novos algoritmos demoraram significativamente mais para completar os loops de otimização, devido ao aumento do número de variáveis e criação de novas matrizes para funções enriquecidas e posicionamento dos nós modificados. Mesmo assim, os resultados para número de iterações e valor da função objetivo mostraram melhorias, na maioria das vezes, quando o MOT foi combinado com ambas as novas formulações. A principal desvantagem, no entanto, esses



códigos tiveram que ser escritos de acordo com parâmetros visuais observados em topologias obtidas usando o MOT convencional em cada exemplo, tornando muito mais difícil criar um produto final compatível com vários problemas sem intervenção do desenvolvedor do código.

Em resumo, os novos algoritmos propostos foram capazes de resolver ou melhorar muito significativamente as topologias em ambos os exemplos quando comparados com o MOT sem filtros de sensibilidade.

## Referências

- Arruda, L. S. (2015). Application of the Generalized Finite Element Method (Mefg) in Topological Optimization. 158f. Dissertation (MSc in Mechanical Engineering) in Portuguese, Federal University of ABC, Santo André.
- Bendsøe, M. P. (1989). Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural optimization*, 1(4), 193-202. <https://doi.org/10.1007/BF01650949>.
- Babuška, I., Banerjee, U. (2012). Stable generalized finite element method (SGFEM). *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 201, 91-111. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2011.09.012>.
- Bendsøe, M. P., & Kikuchi, N. (1988). Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 71(2), 197-224. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(88\)90086-2](https://doi.org/10.1016/0045-7825(88)90086-2).
- Bendsøe, M. P., & Sigmund, O. (2003). *Topology optimization: theory, methods, and applications*. Springer Science & Business Media.
- Christensen, P. W., & Klarbring, A. (2008). *An introduction to structural optimization* (Vol. 153). Springer Science & Business Media.
- Diaz, A., & Sigmund, O. (1995). Checkerboard patterns in layout optimization. *Structural optimization*, 10(1), 40-45. <https://doi.org/10.1007/BF01743693>.
- Duarte, C. A., Babuška, I., & Oden, J. T. (2000). Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems. *Computers & Structures*, 77(2), 215-232. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(99\)00211-4](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(99)00211-4).
- Duarte, C. A., & Oden, J. T. (1995). A new meshless method to solve Boundary-Value Problems. In *Proceedings of the XVI CILAMCE-Iberian Latin American Conference on Computational methods for engineering*, Curitiba, Brazil (pp. 90-99).
- Gois, W., & Proenca, S. P. B. (2012). Generalized Finite Element Method on Nonconventional Hybrid-Mixed Formulation. *International Journal of Computational Methods*, 9(03), 1250038. <http://dx.doi.org/10.1142/S0219876212500387>.
- Gupta, V., Duarte, C. A., Babuška, I., & Banerjee, U. (2013). A stable and optimally convergent generalized FEM (SGFEM) for linear elastic fracture mechanics. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 266, 23-39. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2013.07.010>.
- He, Z. C., Zhang, G. Y., Deng, L., Li, E., & Liu, G. R. (2015). Topology optimization using node-based smoothed finite element method. *International Journal of Applied Mechanics*,

7(06), 1550085. <https://doi.org/10.1142/S1758825115500854>.

Jog, C. S., & Haber, R. B. (1996). Stability of finite element models for distributed-parameter optimization and topology design. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 130(3-4), 203-226. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(95\)00928-0](https://doi.org/10.1016/0045-7825(95)00928-0).

Mlejnek, H. P. (1992). Some aspects of the genesis of structures. *Structural optimization*, 5(1), 64-69. <https://doi.org/10.1007/BF01744697>.

Rozvany, G. I., Zhou, M., & Birker, T. (1992). Generalized shape optimization without homogenization. *Structural optimization*, 4(3-4), 250-252. <https://doi.org/10.1007/BF01742754>.

Shobeiri, V. (2016). Structural topology optimization based on the smoothed finite element method. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 13, 378-390. <https://doi.org/10.1590/1679-78252243>.

Sigmund, O. (2001). A 99 line topology optimization code written in Matlab. *Structural and multidisciplinary optimization*, 21(2), 120-127. <https://doi.org/10.1007/s001580050176>.

Sigmund, O., & Petersson, J. (1998). Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. *Structural optimization*, 16(1), 68-75. <https://doi.org/10.1007/BF01214002>.

van den Boom, S. J., Zhang, J., van Keulen, F., & Aragón, A. M. (2021). An interface-enriched generalized finite element method for level set-based topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 63(1), 1-20. <https://doi.org/10.1007/s00158-020-02682-5>.