



Fundação Universidade Federal do ABC

Pró reitoria de pesquisa

Av. dos Estados, 5001, Santa Terezinha, Santo André/SP, CEP 09210-580

Bloco L, 3ºAndar, Fone (11) 3356-7617

iniciacao@ufabc.edu.br

Relatório Final de Iniciação Científica referente ao Edital: EDITAL Nº 4/2021 -  
PROPES (11.01.07)

Nome do aluno: Victor Ayres Peres

Assinatura do aluno:

Nome do orientador: Antônio Gil Vicente de Brum

Assinatura do orientador:

Título do projeto: Superestradas Interplanetárias

Palavras-chave do projeto: Superestradas Interplanetárias, Pontos de Lagrange, Problema dos Três Corpos, NASA, Lunar IceCube, Hiten, órbita de Halo, Variedades Invariantes, sistema Terra-Lua.

Área do conhecimento do projeto: Dinâmica Orbital

Bolsista: Não.

São Bernardo do Campo

2022

## GLOSSÁRIO

**Pontos de Lagrange** - pontos de equilíbrio do Problema dos Três Corpos; as localizações no espaço em que a força centrípeta do corpo de massa desprezível é cancelada pelas forças gravitacionais, ocasionando um ponto de equilíbrio no espaço capaz de gerar órbita.

**Problema restrito dos três corpos** - Existência de três corpos com massa,  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$ , sendo esse último constituinte de uma massa ínfima comparada aos outros dois. É desejável saber o movimento deste corpo de massa desprezível, que orbita o sistema formado pelos corpos  $m_1$  e  $m_2$ .

**Problema dos dois corpos** – Existência de dois corpos com massa, sujeitos a atração gravitacional mútua. O problema clássico pode ser resolvido considerando um corpo de massa ínfima sobre ação de um campo gravitacional do corpo principal.

**Órbita de Halo** - órbita periódica, instável e com diferentes inclinações. É a mais útil em volta de um ponto lagrangiano por conta de sua periodicidade, que interessa a astronáutica.

**Órbita de Lissajous** – órbita quasi-periódica, instável e com diferentes inclinações, incluindo componentes perpendiculares ao plano de órbita.

**Órbita de Lyapunov** – órbita quasi-periódica, instável e com a mesma inclinação do plano das órbitas dos corpos massivos.

**Variedades invariantes** – Conjunto de todas as soluções dos problemas colineares de Lagrange (variedades), compreendendo as estáveis, instáveis e diversos outros tipos. Para nosso trabalho, variedades estáveis e instáveis são as mais importantes. O agrupamento entre essas variedades forma a superfície do tipo “tubo”.

**Variedade instável** - O conjunto de trajetórias que saem da órbita de Halo naturalmente, sem gasto de energia.

**Superestradas Interplanetárias** - O conjunto de trajetórias que adentram a órbita de Halo sem nenhuma manobra (variedade estável) e que saem da órbita (variedade instável) formam a superfície do tipo “tubo”. Os tubos, ou Superestradas, constituem uma rede de transporte interplanetária.

## RESUMO

A era espacial originou-se durante o século XX, e foi marcada por diversos acontecimentos revolucionários na história humana. Conhecimentos sobre o vasto oceano cósmico em que a Terra está mergulhada foi adquirido. Entre eles, está o fato de que o Sistema Solar é totalmente conectado entre seus corpos integrantes por meio de uma vasta rede de interações gravitacionais. O resultado dessas interações é um profundo sistema de transporte, nomeado de ‘Superestradas Interplanetárias’, que possibilita ao ser humano deslocamentos espaciais com baixíssimo custo energético. Este projeto foi realizado com o objetivo de compreender melhor o conceito das Superestradas Interplanetárias, estudar o que as origina para entender introdutoriamente as teorias que corroboram as suas existências e, por fim, suas aplicações para o transporte, guiagem e navegação de veículos espaciais - inclusive com uma simulação de missão.

Neste projeto, o foco foi principalmente sobre estudos efetuados pelos criadores do termo “Interplanetary Superhighways”, Martin W. Lo e Shane Ross, e em artigos e missões que abordam amplamente o conceito e a aplicação das variedades invariantes, que são trajetórias geradas pelos Pontos de Lagrange – cinco pontos de equilíbrio no espaço capazes de gerar órbitas, resultados das interações gravitacionais entre dois corpos massivos e um corpo de massa ínfima, sendo que seu conjunto forma as diversas Superestradas existentes pelo nosso sistema. A fim de compreender a origem desses caminhos espaciais, o primeiro tema estudado foi o Problema Gravitacional dos Três Corpos, principalmente o problema restrito.

O estudo desses temas induziu ao aprofundamento do conceito no Sistema Terra-Lua, que está inserido no que é denominado “vizinhança terrestre”. Por meio do estudo das variedades invariantes aplicadas nas trajetórias de missões espaciais como a Hiten e a Lunar IceCube, reuniu-se informações sobre como os Pontos de Lagrange existentes na proximidade da Terra podem facilitar o envio de missões tripuladas à Lua e estabelecer um maior controle dessa região pelo ser humano.

A partir da coleção de informações disponibilizadas pelo estudo dessas missões, foi feita uma simulação de uma missão envolvendo um CubeSat de mesmas proporções e tecnologias da Lunar IceCube. O projeto envolveria o envio do satélite ao ponto lagrangiano L2 do Sistema Terra-Lua partindo de uma órbita geoestacionária

e utilizando-se das Superestradas Interplanetárias presentes na vizinhança terrestre, a fim de verificar a aplicabilidade desse conceito em um CubeSat. A trajetória do satélite foi moldada a partir de manobras de Transferência de Hohmann por arcos propulsivos. Com auxílio de uma linguagem de programação para os cálculos e simulações, conclui-se que mediante às tecnologias atuais e o escopo pretendido, juntamente de um longo período de atividade, o projeto dificilmente teria sucesso, apesar de empregar conceitos modernos.

O relatório cumpriu todas as propostas elaboradas como os objetivos do projeto. Estudos e levantamentos foram feitos sobre: o conceito das Superestradas, formação dessas trajetórias, como elas influenciam no Sistema Solar e a aplicação delas para a navegação; o Problema Gravitacional dos Três Corpos Restrito e a sua relação com as Superestradas foi detalhado e explicado no projeto, explorando algumas missões que se utilizam desse conceito e os tipos de órbitas que podem ser geradas em volta dos pontos Lagrangianos; como os Pontos de Lagrange e as variedades invariantes de cada sistema estão correlacionados, o que gera as trajetórias que conectam cada órbita; foi detalhado como as variedades invariantes estão conectadas entre si e podem gerar um sistema de transporte dinâmico econômico, que conecta todas as partes do Sistema Solar; por fim; foram feitos estudos sobre as missões Hiten e Lunar IceCube, muito importantes na aplicação prática dos conceitos abordados e, baseada nestas, uma simulação de missão com um CubeSat foi realizada.

Portanto, as Superestradas Interplanetárias são conjuntos de trajetórias geradas naturalmente por todo sistema de três corpos existentes em nosso sistema, e servem de grande auxílio em diversas áreas da astronomia e astronáutica, desde a navegação espacial de baixo custo até a compreensão sobre a história do Sistema Solar. A versatilidade nas aplicações das variedades invariantes permitem às agências espaciais e às indústrias aeroespaciais de diversos países o usufruto em diversas missões, com projetos que envolvem CubeSats interplanetários até o envio de missões tripuladas entre a vizinhança terrestre e o Sistema Solar. A fim de contribuir para um maior conhecimento agregado sobre esse tema, o aluno e autor aprofundar-se-á no conceito focado nas aplicações das Superestradas Interplanetárias nas trajetórias de CubeSats restrito ao Sistema Terra-Lua, em uma próxima iniciação científica.

## SUMÁRIO

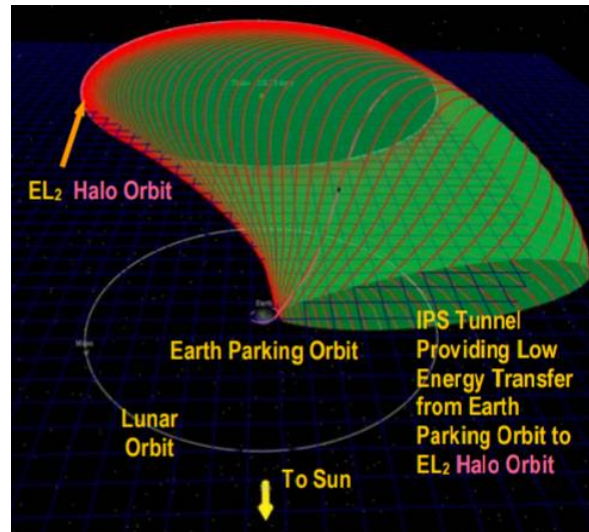
1. INTRODUÇÃO – AS SUPERESTRADAS INTERPLANETÁRIAS E SUAS UTILIDADES .....	6
2. O PROBLEMA GRAVITACIONAL DOS TRÊS CORPOS E OS PONTOS DE LAGRANGE .....	10
3. SUPERESTRADAS NO SISTEMA TERRA-LUA .....	15
4. SIMULAÇÃO DE UMA MISSÃO BASEADA NAS MISSÕES HITEN E LUNAR ICECUBE .....	23
5. RESULTADOS .....	37
6. CONCLUSÕES.....	40
7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	42
APÊNDICE A (CÓDIGO PARA A MANOBRA DE TRANSFERÊNCIA DE HOHMANN DO CUBESAT POR ARCOS PROPULSIVOS - REALIZADO EM LINGUAGEM PYTHON) .....	45

## **1. INTRODUÇÃO – AS SUPERESTRADAS INTERPLANETÁRIAS E SUAS UTILIDADES**

Diferentemente do entendimento que se tinha no passado, hoje o Sistema Solar é entendido como um sistema de muitos corpos celestes totalmente interconectado entre suas partes. As forças gravitacionais agem entre os corpos, o que forma uma rede de interações entre os objetos massivos, como o Sol e os planetas. Ao aplicar o problema dos três corpos, que consiste em determinar as trajetórias do movimento de três corpos com massa – conhecendo suas posições e velocidades iniciais e assumindo uma atração gravitacional – em todo o Sistema Solar, juntamente com as soluções de Leonhad Euler e Joseph Louis Lagrange ao utilizar as chamadas ‘variedades invariantes’ e os pontos de libração, é possível afirmar a existência de uma rede de transporte interplanetária, denominada de “Interplanetary Superhighways” pelos criadores deste termo – Martin Lo e Shane Ross [1] [2].

Essa rede de transporte é gerada pelos cinco pontos de Lagrange existentes em um sistema de três corpos, considerando dois corpos massivos e um corpo de massa ínfima. Os pontos de Lagrange são as localizações no espaço em que a força centrípeta do corpo de massa desprezível é cancelada pelas forças gravitacionais, ocasionando um ponto de equilíbrio no espaço capaz de gerar órbita. Um dos tipos de órbitas gerada pelos pontos de Lagrange é denominada “órbita de Halo”, e sua característica é de ser uma trajetória orbital periódica que um corpo pode seguir sem exigir qualquer propulsão.

O conjunto de trajetórias que um corpo de massa desprezível pode seguir é determinado pelas variedades invariantes, que são o conjunto de todas as soluções dos problemas colineares de Lagrange (variedades), compreendendo as estáveis, instáveis e diversos outros tipos. Para nosso trabalho, “variedades estáveis e instáveis” são as mais importantes. O conjunto de trajetórias que adentram a órbita de Halo sem nenhuma manobra formam uma superfície do tipo tubo, chamada de variedade estável. Da mesma maneira, o conjunto de trajetórias que saem da órbita de Halo formam o túnel denominado de variedade instável. A Figura 1 ilustra o trecho de uma Superestrada Interplanetária, formada pelo conjunto de variedades que ligam uma órbita de estacionamento terrestre à uma órbita de Halo, formada em volta do ponto L2 do sistema Sol-Terra.



*Figura 1 - Representação da Superestrada formada pelas variedades invariantes do Sistema Sol-Terra, que providenciam trajetórias de baixo custo energético entre uma órbita de estacionamento terrestre e uma órbita de Halo formada em volta do ponto EL<sub>2</sub>.*

*Fonte: LO, Martin W. JPL/NASA. 2002.*

Por meio destas variedades, as Superestradas Interplanetárias são formadas. Como elas estão presentes em todo sistema de três corpos do Sistema Solar, as Superestradas formam uma rede de transporte interplanetário de baixíssimo custo energético por todo nosso sistema. Como mostrado na Figura 2, os planetas Jovianos geram túneis que se inter cruzam, o que torna possível uma missão de um satélite, por exemplo, utilizar a Superestrada gerada pelo ponto L<sub>2</sub> do sistema Sol-Júpiter para transferência à Superestrada gerada pelo ponto L<sub>1</sub> do sistema Sol-Saturno.

Na Figura 2, também é possível notar como os objetos celestes adentram de forma natural à Superestrada gerada por Júpiter, por exemplo. Os cometas e asteroides do meio interestelar acumulam-se na região em que a Superestrada gerada pelo ponto L<sub>1</sub> do sistema Sol-Júpiter se localiza. Torna-se notável, então, a influência que Júpiter possui nas trajetórias destes objetos e, consequentemente, na vida terrestre, já que a influência gravitacional de Júpiter foi responsável por catapultar asteroides e cometas em direção a Terra, que contribuíram para a extinção massivas da flora e fauna terrestres ao longo da história do Sistema Solar [1].

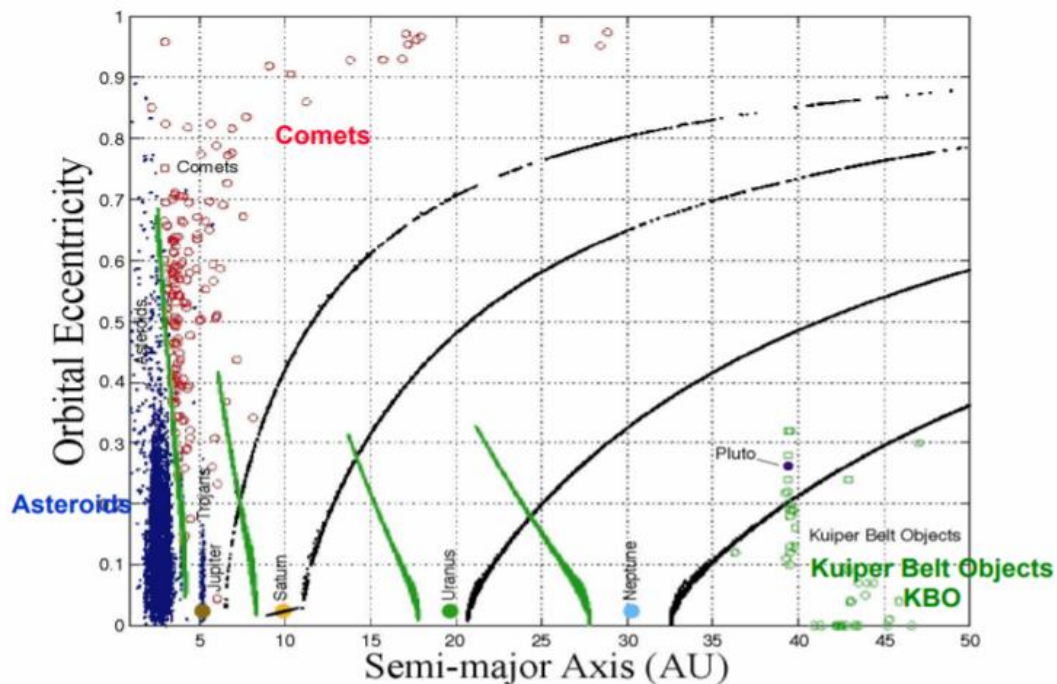


Figura 2 - A figura mostra as Superestradas geradas pelos pontos L1 e L2 dos planetas Jovianos, juntamente com os objetos celestes (cometas, asteroides, KBOs...). É notável a influência que elas possuem sobre as trajetórias destes corpos.

Fonte: LO, Martin W. NASA/JPL. 2002.

A importância das Superestradas nas trajetórias do Sistema Solar é evidente. Fica claro também que é possível aproveitar-se dessa rede de transporte de baixa energia. Diversos projetos foram elaborados para possibilitar serviços humanos além da órbita baixa da Terra, como o “Lunar L1 Gateway Habitat”. Atuando como uma estação espacial, ficaria em órbita em volta do ponto L1 do sistema Terra-Lua, e como o próprio nome sugere, viabilizaria o envio de missões a partir do mesmo, atuando como um portal para o Sistema Solar exterior. A Superestrada do ponto L1 se cruza com a do ponto L2 gerado pelo sistema Sol-Terra, e por isso a importância dessa localidade. Satélites, telescópios e CubeSats poderiam ser lançados e retornariam para uma eventual manutenção ou atualização [3]. Além disso, apesar de necessitar correções periódicas, seriam de baixíssimo custo energético, na ordem de 10m/s por ano.

O conceito das Superestradas viabiliza, de forma intrínseca, missões de baixo custo. A aplicação destas trajetórias nas missões viabilizaria outros países do globo a lançarem missões, que seriam mais baratas pela ausência de um combustível pesado



no V/E lançado, já que para seguir as variedades estáveis e instáveis, são necessárias poucas manobras de correção, viabilizando o uso de propulsores iônicos, por exemplo.

A indústria aeroespacial brasileira poderia aproveitar-se deste conceito, já que nos últimos anos, o Brasil tem aumentado sua produção de satélites e CubeSats. Atualmente, os CubeSats apresentam uma tecnologia compatível com viagens interplanetárias, pois seus sistemas eletrônicos e os demais subsistemas apresentam uma resistência à radiação cósmica e uma grande durabilidade [3]. Diversos tipos de propulsores econômicos podem ser utilizados nesses satélites, como a vela solar – que se utiliza dos ventos solares para acelerar o CubeSat – e os propulsores iônicos. Ambas as tecnologias apresentam uma aceleração compatível com as viagens interplanetárias, e podem ser utilizadas pela indústria brasileira [4].

Além disso, os CubeSats podem ser acoplados em foguetes como uma carga útil secundária, aproveitando um lançamento destinado a uma outra carga útil primária, o que não causaria nenhum incômodo, visto que um CubeSat de 6U (1U = 10 x 10 x 10 cm), pesando 10kg – e mais 5kg destinados ao hardware de acoplamento e ao local que o CubeSat ficaria no foguete – não interferiria na missão principal. Diversos lançamentos ao longo da história apresentavam uma margem de peso para dois CubeSats ou mais, como carga secundária. [3]

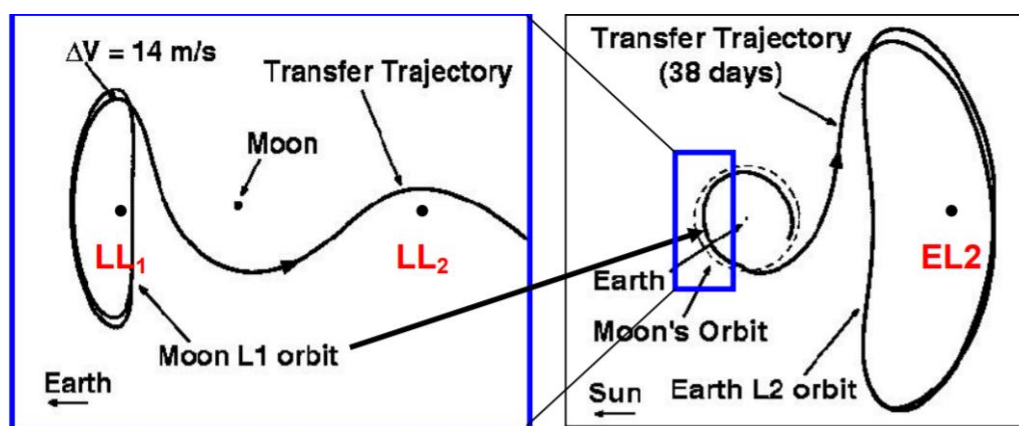


Figura 3 – A transferência de órbita em volta do ponto L1 do sistema Terra-Lua para o ponto L2 do sistema Sol-Terra requer apenas 14m/s de custo energético para ser efetuada. À esquerda, uma ampliação da órbita da Lua em volta da Terra que mostra a trajetória de transferência do ponto LL1 para o EL2. Evidencia-se como o ponto LL1 serve de “portal”, conectando a Terra ao meio interestelar.

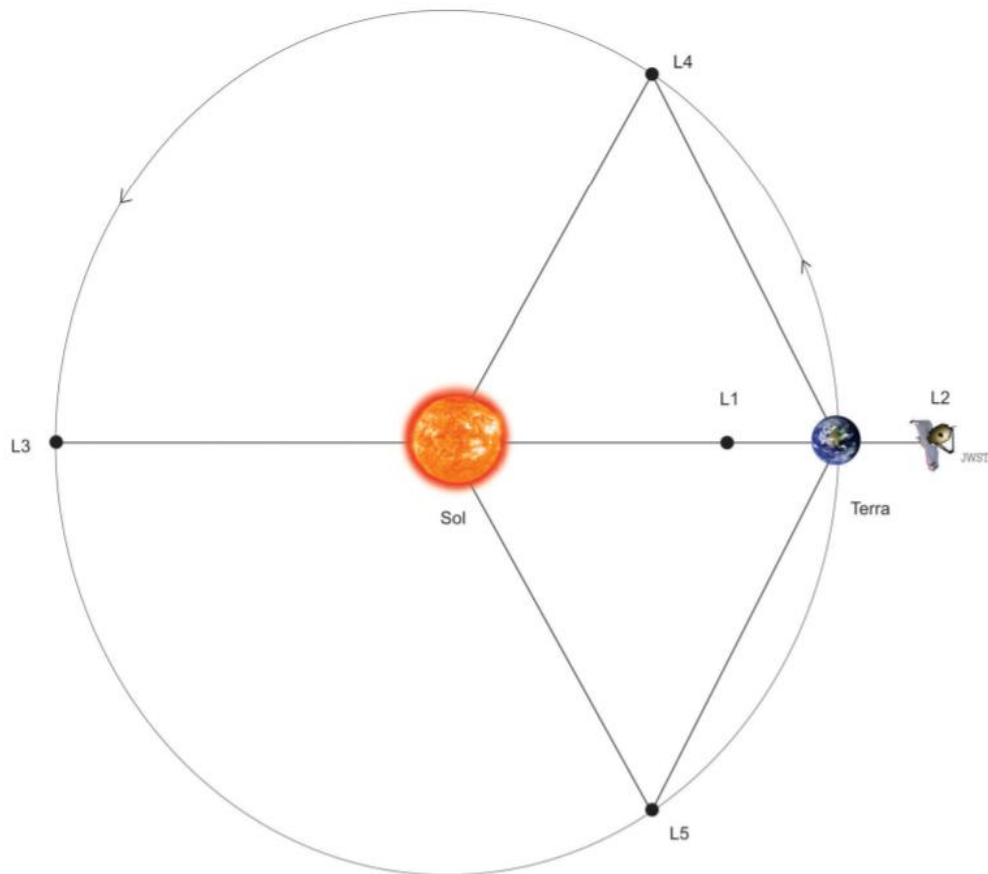
Fonte: LO, Martin W. NASA/JPL. 2002.

## 2. O PROBLEMA GRAVITACIONAL DOS TRÊS CORPOS E OS PONTOS DE LAGRANGE

A formação das Superestradas Interplanetárias está intrinsecamente relacionada com o problema gravitacional dos três corpos, principalmente o problema restrito dos três corpos. Neste caso, supõe-se a existência de três corpos com massa,  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$ , sendo esse último constituinte de uma massa ínfima comparada aos outros dois. É desejável saber o movimento deste corpo de massa desprezível, que orbita o sistema formado pelos corpos  $m_1$  e  $m_2$ . Para tornar o problema mais simples de se resolver, Joseph Lagrange considerou que as órbitas dos corpos massivos são círculos ao redor do centro de gravidade do sistema, além de que o terceiro corpo apresenta movimento no mesmo plano orbital dos outros. [5]

Ao assumir que  $m_3$  apresenta uma massa desprezível, conclui-se que não exerce influência gravitacional na órbita de  $m_1$  e  $m_2$  e, portanto, as órbitas dos corpos massivos podem ser determinadas como se apenas existissem dois objetos, o que permite o uso do Problema dos Dois Corpos, o único dos Problemas dos N Corpos que apresenta uma solução única, teorizada por Isaac Newton. Além disso, ao considerar as órbitas como circulares, o problema é simplificado, já que existem raio e velocidade angular constantes. Por último, ao ter apenas um plano orbital, o problema pode ser assumido como bidimensional, que também torna a solução mais simples.

Ao tentar resolver o problema no modelo Sol-Terra-corpo infinitesimal, Lagrange realizou essa simplificação, e encontrou dois pontos de equilíbrio estáveis na órbita terrestre, na intersecção das retas com ângulos de  $60^\circ$  e  $-60^\circ$  com a reta que passa pelos centros de massa dos dois corpos massivos. O sistema  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$ , nesse caso, formaria um triângulo equilátero. Além destes, Lagrange encontrou outros três pontos de equilíbrio, colineares e localizados no mesmo plano da órbita de  $m_1$  e  $m_2$ .



*Figura 4 - Ilustração do sistema Sol-Terra-Telescópio Espacial James Webb, evidenciando tanto os pontos colineares quanto os triângulos equiláteros formados por L4 e L5.*

*Fonte: FORTES, E. et al. Rev. Bras. Ensino Fís. 2018.*

Como já exposto, as trajetórias do corpo desprezível no sistema são afetadas também pelos pontos lagrangianos, que podem ser aproveitados pela astronáutica em geral, principalmente pela capacidade desses pontos de equilíbrio de gerar órbitas. A órbita de Halo não é o único tipo de órbita possível de ser gerada por um ponto de libração. Na realidade, a órbita Halo é a única solução periódica - em que as frequências orbitais são iguais – em um sistema não-linear, como o apresentado no problema. [6]

Uma frequência orbital estável contribui para um bom andamento das missões, visto que diminui o custo com correções de trajetória. Porém, órbitas como a de Lissajous e a de Lyapunov também podem ser criadas. Ambas as órbitas são quasi-periódicas, porém as órbitas de Lyapunov são trajetórias curvas que acompanham o plano dos dois corpos principais, enquanto a de Lissajous também incluem componentes perpendiculares a este plano da órbita. É importante ressaltar que a

órbita Halo também pode ser perpendicular. Ou seja, ao tratar das órbitas formadas ao redor dos Pontos de Lagrange, a tratativa retorna à tridimensionalidade.

Na prática, qualquer uma das órbitas em volta dos pontos L1, L2 e L3 são dinamicamente instáveis, ou seja, caso uma força externa aja sobre o corpo que orbita um desses pontos, ele saíra da posição e não retornará, o que significa que o equilíbrio do sistema diminui com o tempo – ressaltando a importância das correções periódicas. As órbitas ao redor de L4 e L5 são estáveis caso a razão das massas  $m_1$  e  $m_2$  seja superior a 25, como em nosso Sistema Solar.

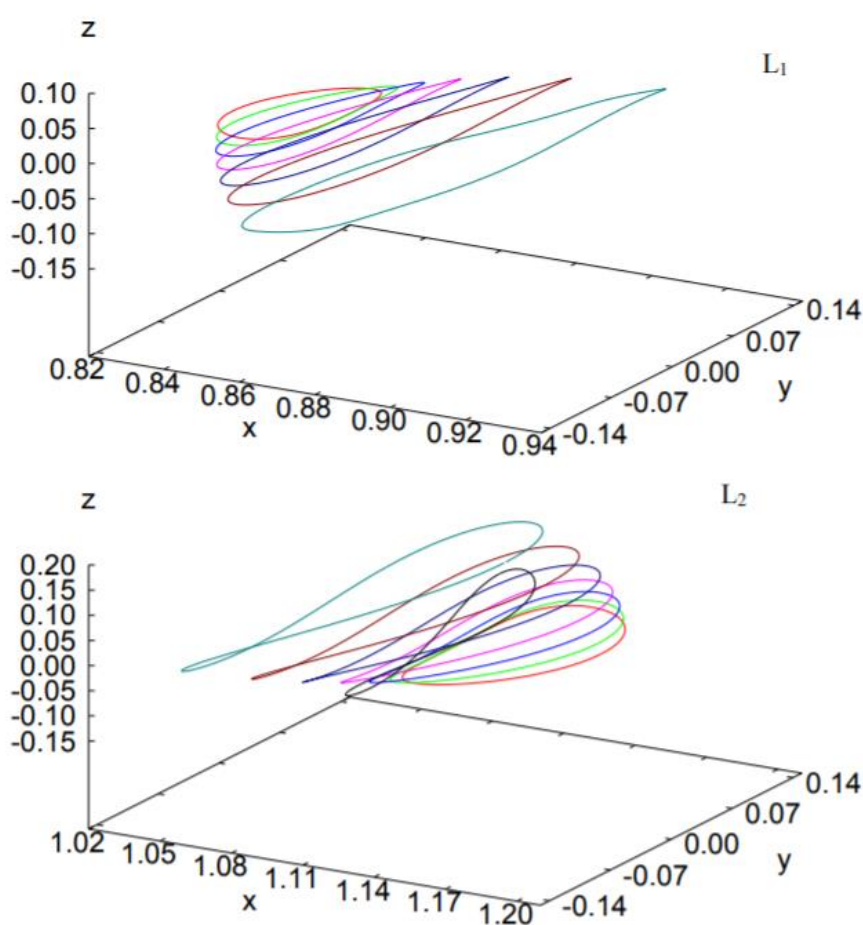
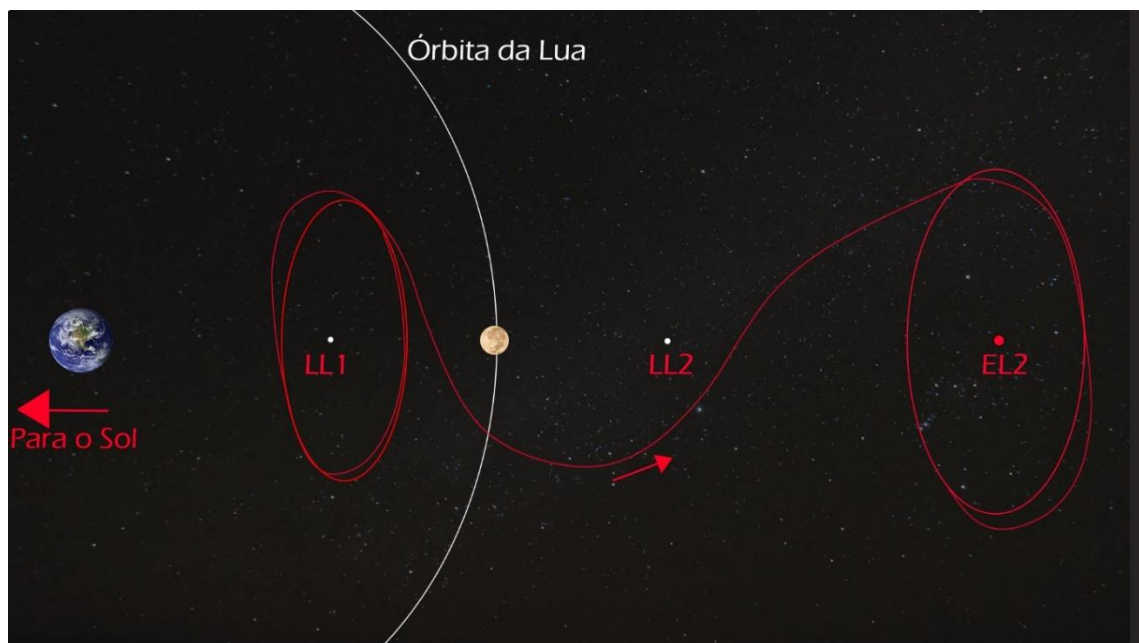


Figura 5 – Exemplo de órbitas de Halo em volta dos pontos L1 e L2 Terra-Lua, com diversos formatos e angulações.

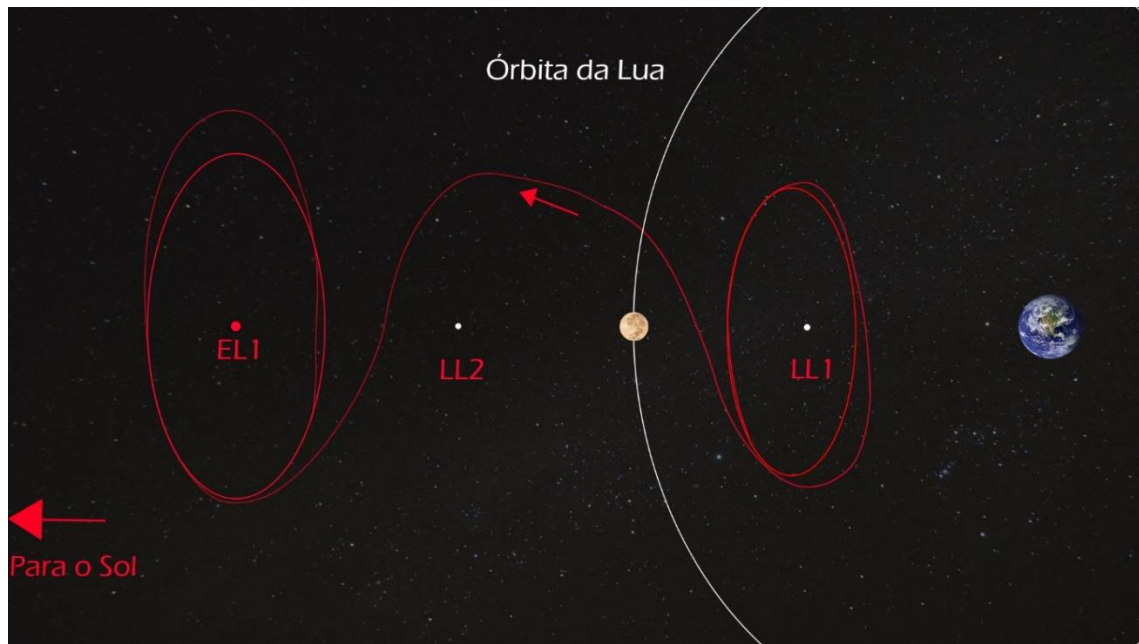
Fonte: FELIPE, G. INPE. 2004.

Portanto, ao compreender o conjunto de soluções do Problema dos Três Corpos, bem como a formação de diversos tipos de órbitas em volta dos pontos de libração, é possível aproveitar-se das instabilidades do sistema para trafegar de uma

forma mais eficiente pelo Sistema Solar. Nas Figuras 6 e 7, estão ilustradas trajetórias que podem ser utilizadas por uma espaçonave a fim de navegar entre o ponto LL1 e os pontos EL2 ou EL1. Os trajetos do tipo permitem que um veículo espacial possa seguir caminho para o Sistema Solar exterior, como apresentado na Figura 6, ou adentrar o Sistema Solar interior. As órbitas funcionam como portais ao interligar caminhos de todo o sistema e a Terra.



*Figura 6 - Exemplo simplificado (fora de escala) da transferência de um objeto em órbita em volta do ponto L1 do sistema Terra-Lua (LL1). O objeto aproveita de uma variedade do ponto L2 do sistema Terra-Lua (LL2) à fim de adentrar uma órbita de Halo em volta do ponto L2 do sistema Terra-Sol (EL2). Daí, o objeto pode seguir para o Sistema Solar exterior. Fonte: Elaboração Própria*



*Figura 7- Exemplo simplificado (fora de escala) da transferência de um objeto em órbita em volta do ponto L1 do sistema Terra-Lua. O objeto aproveita de uma variedade do ponto L2 do sistema Terra-Lua à fim de adentrar uma órbita de Halo em volta do ponto L1 do sistema Terra-Sol. Daí, o objeto pode seguir para o Sistema Solar interior. Fonte: Elaboração Própria*

As trajetórias instáveis geradas pelos Pontos de Lagrange geram inúmeras formas de transferência entre os diversos pontos existentes pelo sistema, e podem facilitar o envio de missões pela vizinhança terrestre, como será abordado adiante.

### **3. SUPERESTRADAS NO SISTEMA TERRA-LUA**

Os estudos das Superestradas Interplanetárias conduzidos na atualidade focam nas trajetórias formadas na chamada “vizinhança terrestre”, que compreende uma esfera de raio de dois milhões de quilômetros com a Terra no centro. O único corpo celeste de interesse nesse raio é a Lua, satélite natural da Terra que dista 384.400 quilômetros dela [7]. Diversas missões que utilizam as Superestradas em suas trajetórias estão sendo elaboradas, visando a ida de espaçonaves e CubeSats e o retorno de amostras lunares. [8]

#### **3.1- Missão Hiten e trajetórias de transferência para a Lua**

A missão Hiten, conduzida pela Agência Espacial Japonesa (AEJ), utilizou-se das trajetórias balísticas de captura lunares e, posteriormente, estudou os pontos lagrangianos L4 e L5. A espaçonave, lançada em 1990, carregava um satélite, que também foi lançado nas proximidades lunares. A missão foi uma das primeiras a aplicar os conceitos das trajetórias criadas pelos Pontos de Lagrange, como as variedades criadas por uma órbita Lyapunov do ponto L2 para deixar a Terra e partir para a Lua. Depois, uma manobra de apenas 36 m/s foi o necessário para colocar a espaçonave em trajetória de captura balística pela Lua, como mostrado na Figura 8. [9].

As órbitas de baixa energias geradas no sistema Terra-Lua apresentam algumas vantagens em relação às órbitas estáveis que podem ser geradas. Elas precisam de um  $\Delta V$  menor – e consequentemente, há uma economia de combustível – além de estarem conectadas com outras variedades invariantes, o que torna possível muitas trajetórias diversas. O custo de transferências entre essas órbitas é baixíssimo, e existem múltiplas possibilidades de chegar à Lua por meio dessas trajetórias e retornar com amostras, por exemplo. [8]

### Hiten-Like Low Energy Transfer & Ballistic Lunar Capture

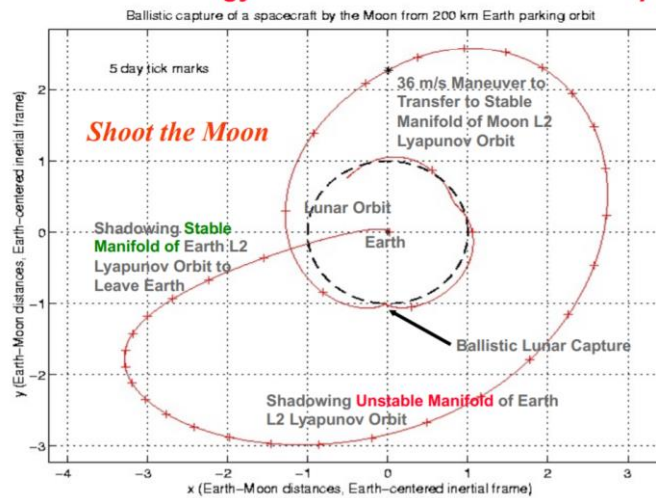


Figura 8 - A imagem ilustra uma trajetória de transferência de baixa energia e a captura balística lunar de uma espaçonave, distante 200 km de uma órbita de estacionamento terrestre, como foi feito na missão Hiten.

Fonte: LO, Martin W. NASA/JPL. 2019.

A primeira delas é utilizando o mesmo ponto L2 que uma missão do tipo Hiten utilizaria. A espaçonave aproveitar-se-ia de uma órbita do tipo Lissajous gerada por esse ponto. O módulo de pouso separa-se do orbitador, coleta as amostras e retorna pela variedade invariante gerada pelo ponto L2 do sistema Terra-Sol, o que reduziria o  $\Delta V$  necessário.



LL <sub>2</sub> Case Mission Sequence	Date (2009)	Flight Time (days)	Combo $\Delta V$ (m/s)	Lander $\Delta V$ (m/s)	Orbiter $\Delta V$ (m/s)
Translunar Injection	6/14	0	3122		
Manifold Insertion	6/18	4	570		
LL <sub>2</sub> Halo Arrival	6/25	11			
Lander LL <sub>2</sub> Departure	7/7	23		35	
Lander Landing	7/17	33		2335	
Lander Liftoff	7/28	44		2424	
Earth Return	11/7	146			
Determin. $\Delta V$ Total			3692	4794	0
Nav. $\Delta V$ Estimate			25	50	25
TOTAL			3717	4844	25

Figura 9 - A tabela mostra a possibilidade de missão de ida e retorno à Lua utilizando o ponto L<sub>2</sub> do sistema Terra-Lua. A missão tomaria cerca de 146 dias e utilizaria um  $\Delta V$  total de 3,717 km/s para a espaçonave, 4,844 km/s para o módulo de pouso e 25 m/s para o orbitador.

Fonte: LO, Martin W. NASA/JPL. 2002.

Outra possibilidade é utilizar uma variedade gerada pela órbita do tipo Lissajous gerada pelo ponto L<sub>1</sub>, para depois o orbitador ser transferido a uma órbita do mesmo tipo em volta do ponto L<sub>2</sub>, enquanto o módulo de pouso parte para a Lua diretamente da órbita Lissajous gerada pelo L<sub>1</sub>.

LL <sub>1</sub> Case Mission Sequence	Date (2009)	Flight Time (days)	Combo $\Delta V$ (m/s)	Lander $\Delta V$ (m/s)	Orbiter $\Delta V$ (m/s)
Translunar Injection	6/9	0	3100		
LL <sub>1</sub> Halo Insertion	6/14	5	600		
Orbiter Departs LL <sub>1</sub>	6/19	10			14
Orbiter LL <sub>2</sub> Arrival	7/7	28			0
Lander Departs LL <sub>1</sub>	7/10	31		95	
Lander Landing	7/16	37		2330	
Lander Liftoff	7/28	49		2424	
Earth Return	11/7	151			
Determin. $\Delta V$ Total			3700	4849	14
Nav $\Delta V$ Estimate			25	50	25
TOTAL			3725	4899	39

Figura 10 - A tabela mostra outra possibilidade de missão, desta vez utilizando o ponto L<sub>1</sub> do sistema Terra-Lua. A missão duraria 151 dias, e consumiria um  $\Delta V$  de 3,725 km/s para a espaçonave, 4,899 km/s para o módulo de pouso e 39 m/s para o orbitador.

Fonte: LO, Martin W. NASA/JPL. 2002.

Um último caso é utilizar uma órbita do tipo Lissajous gerada pelo ponto L1 do sistema Sol-Terra ao invés da gerada pelo L2 do sistema Terra-Lua, à fim de economizar mais combustível, mas em compensação demoraria muito mais. O tempo do lançamento da espaçonave até atingir a órbita gerada pelo L1 do Sol-Terra demoraria cerca de 90 dias. Após isso, 300 dias depois, a espaçonave atingiria a órbita gerada pelo ponto L2 do Terra-Lua. O resto da missão seria idêntica à primeira possibilidade.

EL <sub>1</sub> Case Mission Sequence	Date (2009)	Flight Time (days)	Combo $\Delta V$ (m/s)	Lander $\Delta V$ (m/s)	Orbiter $\Delta V$ (m/s)
Earth Launch	5/30/8	0	3193		
EL <sub>1</sub> Insertion	8/29/8	91	60		
LL <sub>2</sub> Halo Arrival	6/15	391	13		
Lander Departs LL <sub>2</sub>	7/7	403		35	
Lander Landing	7/17	413		2335	
Lander Liftoff	7/28	424		2424	
Earth Return	11/7	553			
Determin. $\Delta V$ Total			3266	4794	0
Nav $\Delta V$ Estimate			25	50	25
TOTAL			3291	4844	25

*Figura 11- A tabela mostra a última possibilidade de missão, desta vez utilizando o ponto L1 do sistema Sol-Terra, e realizando uma transferência até uma órbita gerada pelo ponto L2 do sistema Terra-Lua. A missão teria uma duração total de 553 dias, e um custo energético de 3,921 km/s para a espaçonave, 4,844 km/s para o módulo de pouso e 25m/s para o orbitador.*

*Fonte: LO, Martin W. JPL/NASA. 2002.*

Portanto, para as missões de ida à Lua e o retorno de amostras da superfície lunar, adotar as variedades invariantes – e as Superestradas – como trajetórias diminuem os custos operacionais e os combustíveis. Dentre as três possibilidades apresentadas, todas elas apresentam um custo energético similar, apesar da última possibilidade, que faz uso de um ponto de libração do sistema Sol-Terra, apresentar um tempo de duração muito maior em comparação com as demais. [8]

### 3.2 – Missão Lunar IceCube

A missão Lunar IceCube, projetada pela NASA para ser lançada no ano de 2022, faz o uso do conceito dos CubeSats interplanetários, e tem a finalidade de estudar amostras lunares. O satélite apresentará um tamanho de 6U e possuirá um

espectrômetro que facilitará a detecção de água, gelo e vapor d'água em uma órbita inclinada de baixo perigeu. O CubeSat será lançado a partir do foguete SLS, durante a missão Artemis, também da NASA. [10] [11]

Esta missão faz uso de diversos conceitos apresentados neste relatório, e suas utilidades e desafios servem como base ao modelo prático que será implementado. Os principais desafios em utilizar o conceito das Superestradas nos CubeSats englobam desde tecnologias mais avançadas restritas no mercado – como os geradores de potência de cerca de 100W, enquanto os geradores convencionais de energia (do tipo “Commercial off-the-shelf”) produzem 72W – até sistemas de controle ativo do CubeSats, que ainda não foram testados no espaço profundo. Os problemas relatados apresentam algumas soluções, mas que não seriam práticas, já que o objetivo do CubeSat é criar soluções inovadoras em um campo de estudo muito tradicional, ao usar recursos mais baratos, e essas soluções tornariam a missão muito mais cara.

O CubeSat também apresentará um propulsor iônico, tecnologia de impulsão muitas vezes mencionada no decorrer do relatório. Ele é muito mais barato e leve do que um propulsor à base de hidrogênio líquido, e apresenta uma vantagem de velocidade se comparado com a vela solar. Utilizando iodo sólido como propelente, o CubeSat seria propulsado com uma força máxima de 1,1 mN, gerando um  $\Delta V$  de 2,39 km/s em um período de até 2150 segundos, impulso específico bem vantajoso para um satélite. Além do propulsor, o conceito das Superestradas Interplanetárias é de extrema importância para atingir o  $\Delta V$  requerido, e o uso das variedades invariantes juntamente da gravidade da Lua tornam a missão possível para um simples CubeSat.

A trajetória que o CubeSat seguirá está dividida em três etapas: o pós-desdobramento do CubeSat do foguete SLS (EM-1); a transferência pelo sistema Sol-Terra-Lua e a aproximação lunar. O pós-desdobramento se dá pela liberação do CubeSat no meio interplanetário. O propulsor de íons é ativado para atingir o voo próximo lunar logo após esse desdobramento, sendo de extrema importância para o CubeSat não escapar do sistema Terra Lua. Quando ligado, o propulsor ficaria ativo por volta de quatro dias e meio, realizando uma trajetória de arco, que permaneceria na vizinhança terrestre e logo retornaria à Lua.

Na transferência pelo sistema Sol-Terra-Lua é que o conceito das Superestradas seria utilizado. Ao colocar o satélite em uma região permeada por variedades invariantes, o Lunar IceCube entraria em uma trajetória natural de pouco esforço propulsivo. As Figuras 12 e 13 exemplificam as trajetórias possíveis de serem atingidas pelo CubeSat, e o tipo de representação das variedades invariantes, respectivamente.

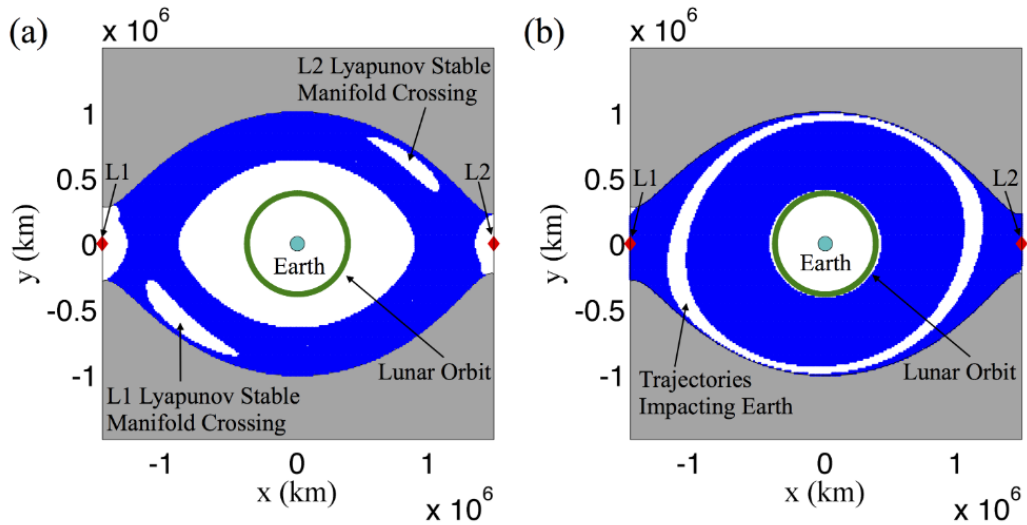


Figura 12 – Mapa do apogeu da trajetória com corte  $Z=0$ , com condições iniciais (a) de trajetórias prógradas e (b) retrógradas. As regiões em azul indicam os apoastros iniciais com trajetórias factíveis, que permanecem na vizinhança terrestre por pelo menos uma revolução. As regiões em cinza ejetariam o CubeSat para fora do sistema, enquanto as regiões em branco geram trajetórias de colisão com a Terra. Fonte: HOWELL, et al. 2016.

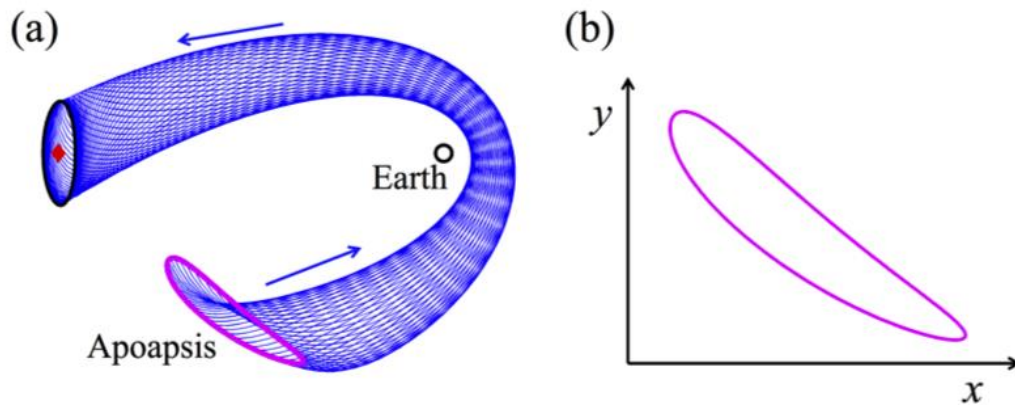


Figura 13 – Representação do (a) tubo formado pelas variedades invariantes do L1 do sistema Sol-Terra por meio de um (b) plano de corte transversal  $z=0$ . Fonte: HOWELL, et al. 2016.

Ao passar do primeiro voo próximo lunar, a espaçonave inicia um movimento de arco costeiro, que dura aproximadamente 170 dias e, após esse período, inicia-se última fase de captura lunar, com uma queima de baixo impulso de 70 dias para atingir a órbita de altitude de perigeu lunar de 105 km e apogeu de 5000 km, de inclinação na faixa de 65-75 graus (em relação ao plano de órbitas) desejada.

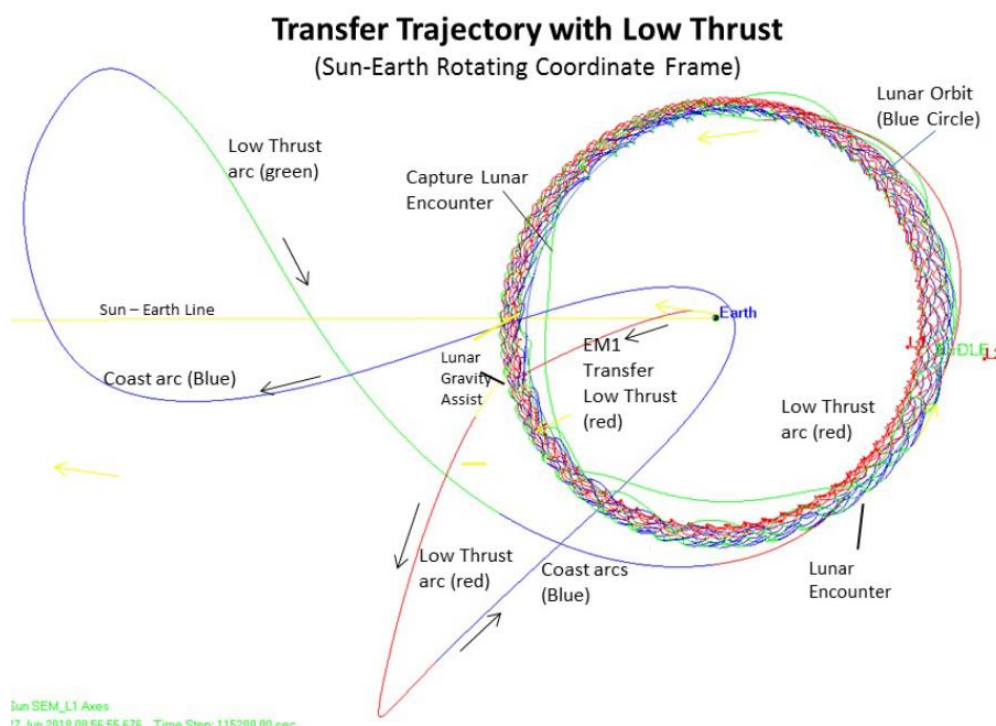
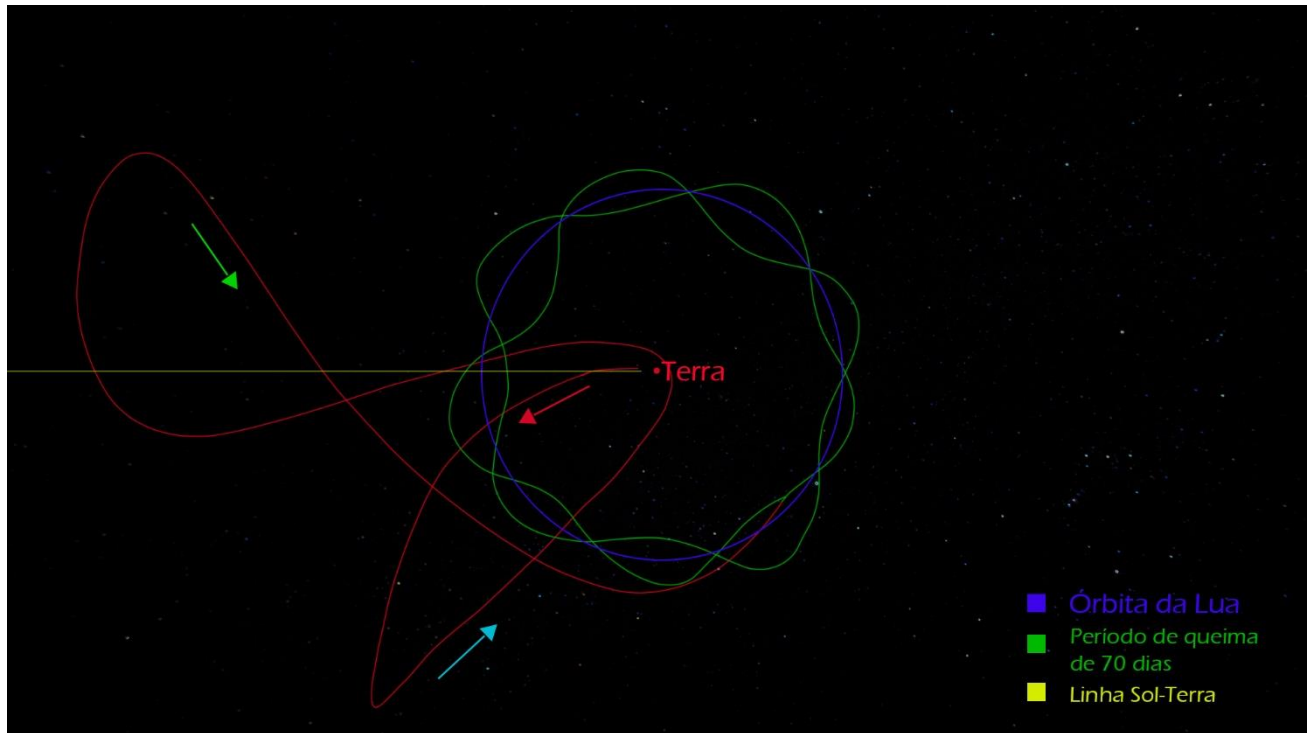


Figura 14 - A imagem exemplifica o quão complexas são as órbitas em volta da Lua, juntamente com as trajetórias geradas pelas variedades invariantes, combinando encontros com a gravidade lunar e transferências de baixo impulso. Fonte: JPL/NASA. 2020.

Por fim, o Lunar IceCube contará com um espectrômetro compacto de alta resolução (BIRCHES). É o principal equipamento do CubeSat, que fará observações de amostras lunares na faixa do infravermelho, com uma resolução espectral de até 10 nanômetros. Sua alta resolução se deve ao fato de conseguir detectar voláteis lunares em uma região de 3 micrômetros, sendo esses água, amônia, sulfeto de hidrogênio, gás carbônico, metano, entre outros. Para abranger toda essa gama espectral, o Lunar IceCube contará com um resfriador, mantendo as temperaturas abaixo de 120 kelvin (-153,15 °C). Esta missão esclarece o quão avançados os CubeSats estão na atualidade, e estudar seus presentes desafios auxiliam a entender

as novas tecnologias relacionadas e missões, como projetos inovadores com propostas semelhantes à do Lunar IceCube, por exemplo.



*Figura 15 - Representação simplificada da trajetória da missão Lunar IceCube. A seta em vermelho representa a fase I de liberação do satélite a partir do foguete. A seta em azul representa o início da fase II de arco costeiro, durando 170 dias. Ao fim da fase II, a seta verde representa o início da última fase, com um período de queima de baixo impulso de 70 dias para o CubeSat atingir a órbita desejada. Imagem fora de escala. Fonte: Elaboração Própria*

## 4. SIMULAÇÃO DE UMA MISSÃO BASEADA NAS MISSÕES HITEN E LUNAR ICECUBE

### 4.1 – Introdução da missão simulada

Mediante todo conteúdo agregado nesta pesquisa, foi feita uma simulação da trajetória de um CubeSat de tamanho 6U pelo sistema Terra-Lua com base nas missões Hiten e Lunar IceCube, previamente abordadas. Softwares como o *Google Colaboratory* – que dispõe da linguagem de programação Python para modelagens computacionais – e ferramentas como o Microsoft Excel foram utilizados para o processamento e análise dos dados obtidos na simulação.

A simulação realizada, tomando como base as missões anteriores, propunha que um CubeSat, equipado com um propulsor iônico e originalmente em órbita do tipo geoestacionária (de raio de 42.165 quilômetros), chegasse até o ponto LL1 por meio de manobras de baixo impulso divididas em arcos propulsivos, com base em uma transferência de Hohmann. Para isso, seria necessário determinar o semieixo maior da órbita final, que coincidiria com a órbita Halo em volta do ponto LL1. Posteriormente, o CubeSat seguiria uma variedade invariante com destino ao LL2, com objetivo de permanecer em órbita em volta do ponto de Lagrange.

Portanto, foi necessário calcular a distância do ponto lagrangiano do centro da Terra, bem como o raio da órbita Halo gerada por esse ponto. Com base nos artigos sobre design das órbitas do tipo Halo [12], a fórmula para obtenção dos pontos colineares de Lagrange do sistema Terra-Lua é:

$$x^5 + (2 - \mu^*)x^4 + (1 + 2\mu^*)x^3 - (1 - \mu^*)x^2 - 2(1 - \mu^*)x - (1 - \mu^*) = 0$$

Onde  $\mu^*$  é a razão das massas do primeiro e do segundo corpos celestiais - no caso, a Lua e a Terra – com valor de 0,0122, como apresentado abaixo:

$$\frac{M_L}{M_T} = \frac{7,348 \cdot 10^{22}}{5,974 \cdot 10^{24}} \cong 0,0122$$

Onde  $M_L$  é a massa da Lua, com valor de  $7,348 \cdot 10^{22} kg$  [7], e  $M_T$  é a massa da Terra, com valor de  $5,974 \cdot 10^{24} kg$  [7].



Ao substituir os valores, obtemos:

$$x^5 + (2 - 0,0122)x^4 + (1 + 2 \times 0,0122)x^3 - (1 - 0,0122)x^2 - 2(1 - 0,0122)x - (1 - 0,0122) = 0$$

Ao resolver pelo Método de Newton-Raphson, tem-se três valores de raízes reais:  $x_1=0,8380$ ;  $x_2=1,1500$  e  $x_3= -1,0050$ . Esses valores são, em escala da distância Terra-Lua, a localização dos pontos L1, L2 e L3, respectivamente.

Tem-se, portanto, a distância do ponto LL1 como a distância da Lua (384.400 km) multiplicado por 0,8380:

$$384.400 \times 0,8380 = 322.127,2 \text{ km}$$

Para o formato da órbita Halo em volta do ponto LL1, foram tomadas como base as intersecções das variedades instáveis e estáveis sobre os pontos L1 e L2 do Sistema Terra-Lua descritos em [13]. A Figura 16 ilustra o formato das órbitas de Halo geradas em volta dos pontos LL1 e LL2:

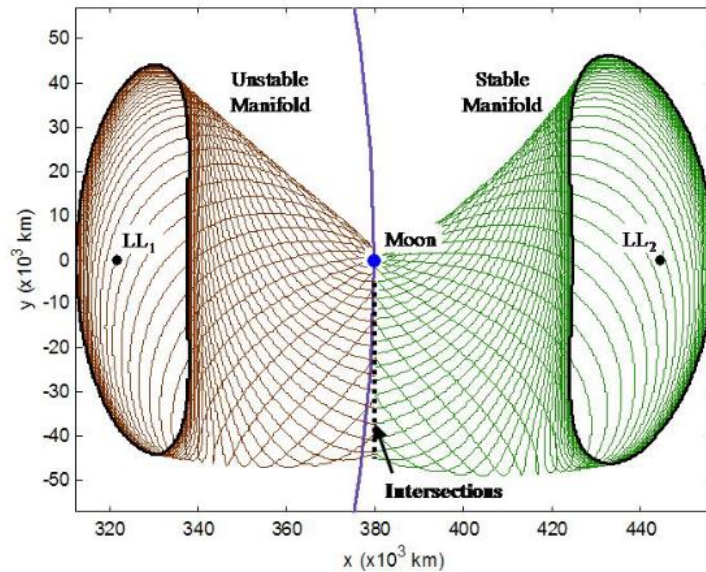


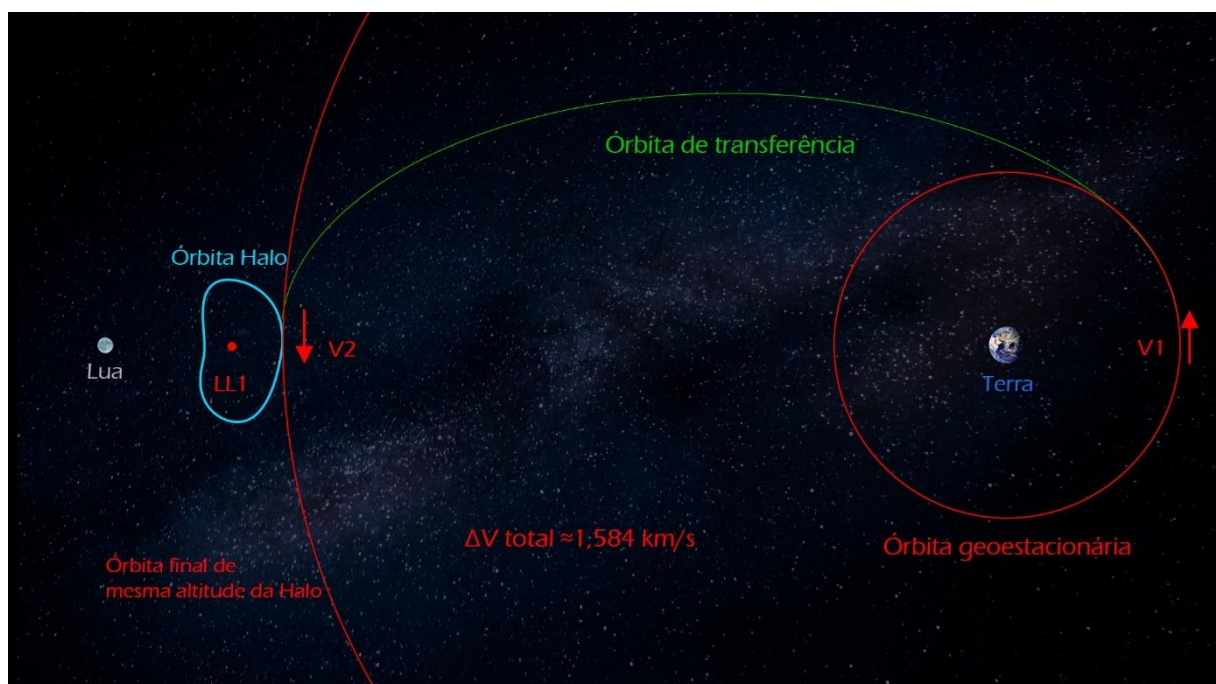
Figura 16 – Intersecção das variedades instáveis de uma órbita periódica (Halo) em sobre o ponto LL1 e as variedades estáveis de uma órbita periódica (Halo) em volta do LL2. Fonte: PARKER, 2006.

O que interessa, nesse caso, é a distância do LL1 até a “borda lateral” da órbita. Tomando como base a escala presente na Figura 16, com a órbita iniciando em



315.000km e o LL1 estando a um quarto da distância de 320.000km até 340.000km, essa distância da órbita Halo totalizaria, aproximadamente, 12.500km.

Com os dados obtidos, teremos então uma possível transferência de Hohmann de um satélite, iniciando de uma órbita geoestacionária, com semieixo maior de 42.165km e com destino a uma órbita final de semieixo 309.627,2 km. Como será visto adiante, a manobra não é possível, visto que o propulsor de íons não é capaz de gerar um  $\Delta V$  como o de Hohmann em um espaço curto de tempo. Nesse caso, será verificada a viabilidade da manobra por arcos propulsivos.



*Figura 17 - Exemplo de como seria uma transferência de Hohmann com os dados obtidos anteriormente. Esse tipo de transferência, no entanto, não seria possível com o tipo de satélite que será empregado, como será exposto posteriormente. Imagem fora de escala. Fonte: Elaboração Própria*

Para o cálculo da manobra descrita, é preciso calcular: os semieixos maiores das órbitas inicial e final; o eixo maior da órbita de transferência; as energias mecânicas específicas das três órbitas; as velocidades orbitais e os  $\Delta V$ s necessários.

A energia mecânica específica de uma órbita é dada por:

$$\varepsilon = \frac{-\mu}{2a}$$

Onde  $\mu$  é o parâmetro gravitacional – nesse caso, o da Terra, com valor  $3,986 \times 10^5 \frac{Km^3}{s^2}$  - e  $a$  é o semieixo maior da órbita.

A velocidade orbital é dada por:

$$V = \sqrt{2\left(\frac{\mu}{R} + \varepsilon\right)}$$

Onde  $\mu$  é o parâmetro gravitacional – nesse caso, o da Terra, com valor  $3,986 \times 10^5 \frac{Km^3}{s^2}$  - e  $R$  é o raio da órbita.

Ao considerar o semieixo maior da órbita 1 como 42.165km, o semieixo maior da órbita 2 como 309.627,2 km e o eixo maior da órbita de transferência como 351.792,2 km, temos as energias mecânicas específicas:

$$\varepsilon_1 = -\frac{\mu}{2a_1} = -\frac{398600}{2 \cdot 42165} = -4,72667 J$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{\mu}{2a_2} = -\frac{398600}{2 \cdot 309627,2} = -0,64368 J$$

$$\varepsilon_{transf} = -\frac{\mu}{2a_{transf}} = -\frac{398600}{351792,2} = -1,13306 J$$

Dadas as energias mecânicas específicas, é possível calcular as velocidades das suas respectivas órbitas:

$$V_1 = \sqrt{2\left(\frac{\mu}{R_1} + \varepsilon_1\right)} = \sqrt{2\left(\frac{398600}{42165} + (-4,72667)\right)} = 3,074628 km/s$$

$$V_2 = \sqrt{2\left(\frac{\mu}{R_2} + \varepsilon_2\right)} = \sqrt{2\left(\frac{398600}{309627,2} + (-0,64368)\right)} = 1,134616 km/s$$

$$V_{transf1} = \sqrt{2 \left( \frac{\mu}{R_1} + \varepsilon_{transf} \right)} = \sqrt{2 \left( \frac{398600}{42165} + (-1,13306) \right)}$$

$$= 4,079285 \text{ km/s}$$

$$V_{transf2} = \sqrt{2 \left( \frac{\mu}{R_2} + \varepsilon_{transf} \right)} = \sqrt{2 \left( \frac{398600}{309627,2} + (-1,13306) \right)}$$

$$= 0,555517 \text{ km/s}$$

Em posse das velocidades, é possível calcular os  $\Delta V$ s necessários:

$$\Delta V_1 = |V_{transf1} - V_1| = |4,079285 - 3,074628| = 1,004657 \text{ km/s}$$

$$\Delta V_2 = |V_{transf2} - V_2| = |0,555517 - 1,134616| = 0,579100 \text{ km/s}$$

$$\Delta V_{tot} = \Delta V_1 + \Delta V_2 = 1,004657 + 0,579100 = 1,583757 \text{ km/s}$$

Ou seja, um  $\Delta V$  total de aproximadamente 1,584 km/s é necessário para retirar o CubeSat de uma órbita geoestacionária para uma órbita que tangencia a órbita do ponto LL1.

Porém, uma transferência de Hohmann requer uma propulsão instantânea, que gere um  $\Delta V$  grande em um curto período. O propulsor empregado no CubeSat é iônico, ou seja, um gás inerte – no caso o iodo – é ionizado pela exposição a elétrons fornecidos por um cátodo. Os íons produzidos são acelerados, passando por uma grade altamente eletrostática. Por fim, os elétrons são injetados no fluxo de íons, enquanto íons positivos são ejetados pelo motor, gerando um  $\Delta V$  impulsivo. Esse  $\Delta V$  é muito baixo comparado ao de um foguete, mas gasta muito menos propelente e pode queimar por um longo período.

Dessa forma, não é possível realizar a Transferência de Hohmann de modo convencional. Foi feito um estudo para verificar a viabilidade da manobra por arcos propulsivos, ou seja, o propulsor iônico seria ligado no perigeu da órbita por um período correspondente a  $10^\circ$  de órbita – valor extraído com base nos experimentos

realizados em [14] - a fim de gerar um impulso baixo, mas que, dado múltiplas vezes, igualar-se-ia ao  $\Delta V$  inicial e final da manobra de Hohmann.

#### 4.2 – Viabilidade da missão simulada

Em posse do  $\Delta V$  total necessário para realizar a manobra de transferência de uma órbita geoestacionária terrestre à órbita que tangencia a órbita Halo em volta do ponto LL1, pode-se aplicar os dados para verificar a viabilidade da manobra com um CubeSat 6U.

O CubeSat simulado empregaria um propulsor iônico, do mesmo tipo do propulsor empregado na missão Lunar IceCube, da NASA. O propulsor é capaz de gerar jatos de partículas de 1,1 milinewton e possui um impulso específico de 2150 segundos [15], possuindo uma quantidade de 1,5kg de propelente, no caso, o iodo sólido. O impulso específico é a medida da eficiência de um propulsor de gerar impulso por unidade de propelente, e é proporcional à velocidade de exaustão. Quanto maior o impulso específico, mais demorado é para o propulsor atingir uma velocidade determinada. Mas, em compensação, o gasto energético é muito inferior à de um propulsor que gera um  $\Delta V$  muito grande em pouco tempo.

Para o cálculo dos arcos propulsivos, é necessário determinar o fluxo de massa do propulsor, a fim de determinar o gasto energético durante um arco e, portanto, o quanto de  $\Delta V$  o CubeSat gera nesse período. Para isso, tem-se a equação [16]:

$$F_{jato} = I_{esp} \cdot \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot g_0$$

Rearranjando, temos:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{F_{jato}}{I_{esp} \cdot g_0}$$

Onde  $\frac{\Delta m}{\Delta t}$  é o fluxo de massa em kg/s;  $F_{jato}$  é força obtida pelo jato de partículas em N;  $I_{esp}$  é o impulso específico do propulsor em segundos; e  $g_0$  é a aceleração gravitacional da Terra, em  $m/s^2$ , com valor considerado constante aproximado de  $9,80665 m/s^2$ .

Ao substituir os valores, temos o valor do fluxo de massa do propulsor iônico:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{0,0011}{2150 \cdot 9,80665} = 5,217152718 \times 10^{-8} \text{ kg/s}$$

Em posse dos valores do fluxo de massa, é necessário determinar o período de queima do propulsor, que determinará a variação de massa de propelente após cada arco propulsivo. Para isso, com base no trabalho intitulado “Manobras Orbitais de Satélites Artificiais Lunares com Aplicação de Propulsão Contínua” [14] o propulsor iônico seria acionado 5° antes do perigeu da órbita e finalizando 5° após, totalizando uma queima durante 10° de arco. O período de queima total para o primeiro arco propulsivo, ao considerar a órbita inicial como geoestacionária, é:

$$\text{Período orbital} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

Onde  $a$  é semieixo da órbita;  $\mu$  é o parâmetro gravitacional terrestre

Considerando o semieixo como 42.165km e o parâmetro gravitacional como  $3,986 \times 10^5 \frac{\text{Km}^3}{\text{s}^2}$ , temos:

$$\text{Período orbital} = 2\pi \sqrt{\frac{42165^3}{398600}} = 86166,684 \text{ segundos}$$

Para 10° de órbita, o tempo de queima será de:

$$\frac{10}{360} \times 86166,684 = 2393,519 \text{ segundos}$$

Portanto, temos o período em que o propulsor ficará acionado durante o primeiro arco e o fluxo de massa do propulsor. Através desses dados, pode-se calcular a quantidade de combustível gasta durante o primeiro arco propulsivo:

$$5,217152718 \times 10^{-8} \cdot 2393,519 = 1,24874 \times 10^{-4} \text{ kg}$$

Posto isso, temos os valores de massas inicial e final, respectivamente, de:

$$M_0 = 1,5 \text{ kg}$$

$$M_f = 1,499875126 \text{ kg}$$

Com a obtenção desses dados, é possível calcular o  $\Delta V$  gerado a partir de uma fórmula [14] que relaciona o valor da gravidade terrestre, o impulso específico e o logaritmo natural da razão entre as massas inicial e final de propelente após a manobra, dada por:

$$\Delta V = I_{esp} \cdot g_c \cdot \ln \frac{M_o}{M_f}$$

Desse modo, temos o valor de  $\Delta V$  gerado pelo CubeSat após um arco propulsivo:

$$\begin{aligned} \Delta V &= 2150 \cdot 9,80665 \cdot \ln \frac{1,5}{1,499875126} \cong 1,75532 \text{ m/s} \\ &\cong 1,75532 \times 10^{-3} \text{ km/s} \end{aligned}$$

Porém, ao realizar esse arco de propulsão, existe uma variação no semieixo da órbita, incrementando também o período orbital. Ou seja, não se pode manter constantes os períodos de queima e, conseqüentemente, os  $\Delta V$ s gerados após cada arco propulsivo.

A fim de contornar esse problema e determinar o número de arcos propulsivos para chegar à órbita final, foi feita uma modelagem computacional, baseando-se no uso de laços de repetição de código (vide Apêndice A), que permitiram o cálculo das sucessivas variações no semieixo, dos novos períodos orbitais e, por fim, no  $\Delta V$  gerado arco após arco.

### 4.3 – Cálculos da manobra em arcos propulsivos

Os cálculos realizados para a manobra de transferência de Hohmann por meio de arcos propulsivos foram divididos em duas etapas: a primeira parte consiste nas consecutivas queimas para atingir a configuração da órbita de transferência – elíptica, com velocidade no perigeu de 4,079285 km/s e no apogeu de 0,555517 km/s, como ilustrado na Figura 18.

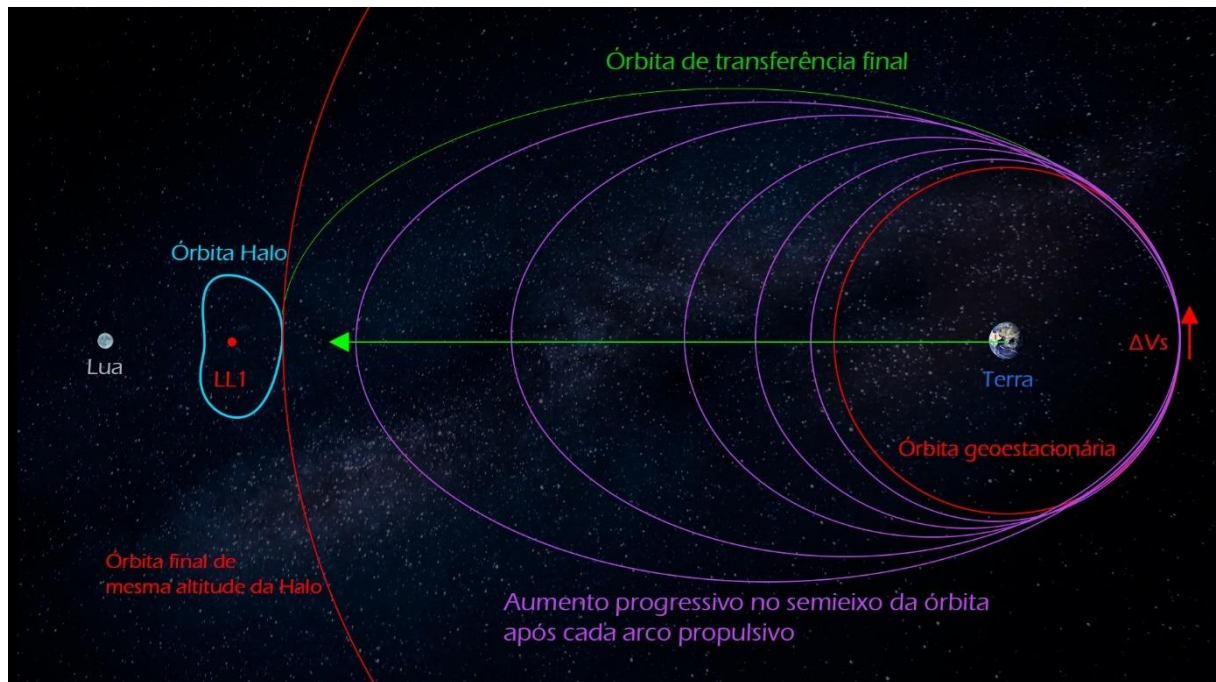


Figura 18 - Primeira parte da manobra de transferência por arcos propulsivos, em que o semieixo da órbita aumenta a cada arco até atingir o tamanho da órbita elíptica, calculada pelo Hohmann. Imagem fora de escala. Fonte: Elaboração Própria

Os cálculos realizados, com base nos procedimentos descritos na seção anterior, indicam um número de 300 arcos propulsivos para o CubeSat atingir a velocidade de 4,070659 km/s, o que dista 0,008626 km/s da velocidade orbital desejada, de 4,079285 km/s. A massa de combustível final tem valor de 1,430787056 kg, o que indica um gasto de 0,069212944 kg. Para que o CubeSat possua a velocidade desejada, o arco de número 301 seria realizado com uma queima de apenas 11,21 segundos:

Da equação

$$\Delta V = I_{esp} \cdot g_c \cdot \ln \frac{M_o}{M_f}$$

Temos:

$$0,008626 = 2150 \cdot 9,80665 \cdot \ln \frac{1,430787056}{M_f}$$

$$M_f = 1,430786471 \text{ kg}$$

Por meio da equação do fluxo de massa, é possível determinar o tempo empregado na queima:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \text{Fluxo de massa}$$

Ao utilizar o valor já estipulado, temos:

$$\frac{1,430787056 - 1,430786471}{\Delta t} = 5,217152718 \times 10^{-8}$$

Realizando os cálculos, obtemos:

$$\frac{5,85 \times 10^{-7}}{5,217152718 \times 10^{-8}} = \Delta t \cong 11,21 \text{ segundos}$$

Portanto, para a primeira parte da manobra, teremos os valores apresentados na Tabela 1.

*Tabela 1 - Valores necessários para a realização da manobra de incremento do semieixo orbital, a fim do CubeSat assumir uma órbita de transferência elíptica, como previsto pela manobra de Transferência de Hohmann*

<b>Manobra de incremento progressivo do semieixo orbital</b>	
Número de arcos propulsivos	301
Massa de propelente inicial (em kg)	1,5
Massa de propelente final (em kg)	1,430786471
Semieixo da órbita inicial (em km)	42165
Semieixo da órbita final (em km)	175896,1
Tempo aproximado de duração da manobra	561 dias
Velocidade inicial do CubeSat (em km/s)	3,074628
Velocidade final do CubeSat no perigeu (em km/s)	4,079285
Velocidade final do CubeSat no apogeu (em km/s)	0,555517



A segunda parte da manobra, com valores calculados apresentados na Tabela 2, consiste na circularização da órbita, o que representa o segundo  $\Delta V$  que o CubeSat realizaria em uma Transferência de Hohmann convencional. Nesse estágio, os impulsos realizados pelo propulsor ocorreriam no apogeu da órbita elíptica, o que aumentaria o semieixo orbital até a órbita apresentar formato circular, com raio totalizando a distância “centro da Terra- órbita halo LL1”.

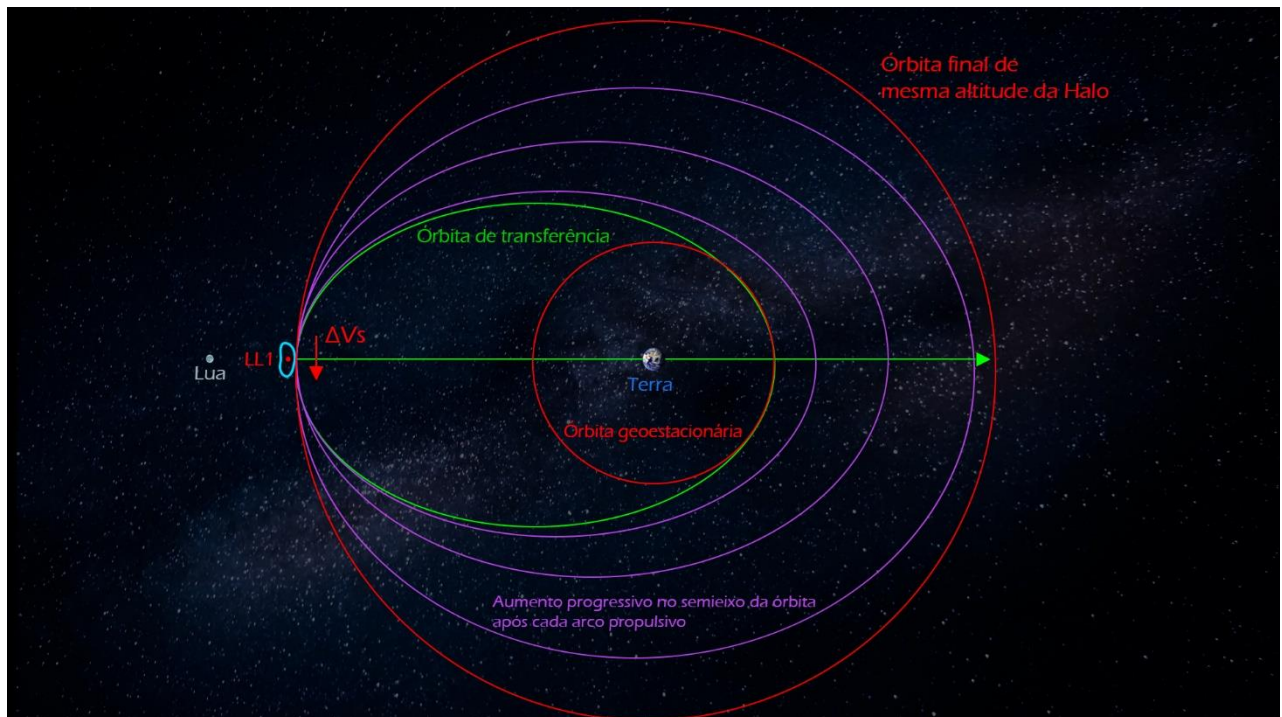


Figura 19 - Segunda parte da manobra de Hohmann, em que ocorre a circularização da órbita elíptica a partir de impulsos realizados no apogeu da órbita inicial. A órbita final apresenta raio de comprimento da distância "centro da Terra- órbita halo LL1". Imagem fora de escala. Fonte: Elaboração Própria.

Os cálculos realizados englobaram os procedimentos da primeira parte da manobra. As diferenças estão, porém, nos valores de semieixo inicial, velocidade inicial e massa de propelente inicial considerados. Um número de 27 arcos é necessário para que o CubeSat atinja a velocidade de 1,127547 km/s, restando apenas 0,007069 km/s para que o satélite tenha a velocidade alvo de 1,134616 km/s. A massa de combustível final tem valor de 1,392490171 kg, o que indica um gasto de 0,038296299 kg. A fim de atingir a velocidade desejada, o arco 28 seria realizado com uma queima de apenas 8,95 segundos, resultado obtido pelos mesmos procedimentos da primeira manobra:

$$0,007069 = 2150 \cdot 9,80665 \cdot \ln \frac{1,392490171}{M_f}$$

$$M_f = 1,392489704 \text{ kg}$$

Temos então:

$$\frac{1,392490171 - 1,392489704}{\Delta t} = 5,217152718 \times 10^{-8}$$

$$\frac{4,67 \times 10^{-7}}{5,217152718 \times 10^{-8}} = \Delta t \cong 8,95 \text{ segundos}$$

Portanto, para a segunda parte da manobra, temos os valores apresentados na Tabela 2:

*Tabela 2 – Valores necessários para a realização da manobra de circularização de órbita, à fim de que o CubeSat esteja em uma órbita com semieixo de mesmo valor que a distância do centro da Terra à órbita do LL1.*

<b>Manobra de circularização de órbita</b>	
<i>Número de arcos propulsivos</i>	28
<i>Massa de propelente inicial (em kg)</i>	1,4307865
<i>Massa de propelente final (em kg)</i>	1,3924897
<i>Semieixo da órbita inicial (em km)</i>	175896,1
<i>Semieixo da órbita final (em km)</i>	309627,2
<i>Tempo aproximado de duração da manobra</i>	326 dias
<i>Velocidade inicial do CubeSat (em km/s)</i>	0,555516
<i>Velocidade final do CubeSat (em km/s)</i>	1,134616

Neste experimento, considera-se que o fluxo de combustível é constante no propulsor, bem como o CubeSat estaria alinhado com o plano Lua-Terra no final da manobra de circularização.

Nas Figuras 20 e 21, estão representadas as relações entre tamanho do semieixo maior orbital e o número de arcos propulsivos. Pode-se inferir que, nos arcos de maior número, o incremento no semieixo maior é realizado a uma taxa superior se

comparada com os arcos iniciais. Essa variação é correlacionada ao maior período que o propulsor ficará ativo e ao maior tamanho da órbita dos respectivos arcos.

Gráfico do número de arcos por valor de semieixo orbital - primeira parte da manobra

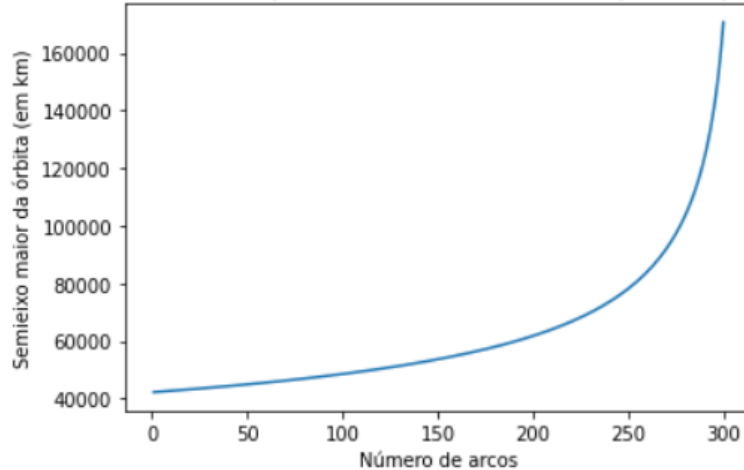


Figura 20 - O gráfico apresenta a relação entre a variação no semieixo maior da órbita com o número de arcos propulsivos realizados na primeira parte da manobra - que engloba o incremento do semieixo orbital até o tamanho da órbita de transferência, calculada pelo método da Transferência de Hohmann.

Gráfico do número de arcos por valor de semieixo orbital - segunda parte da manobra

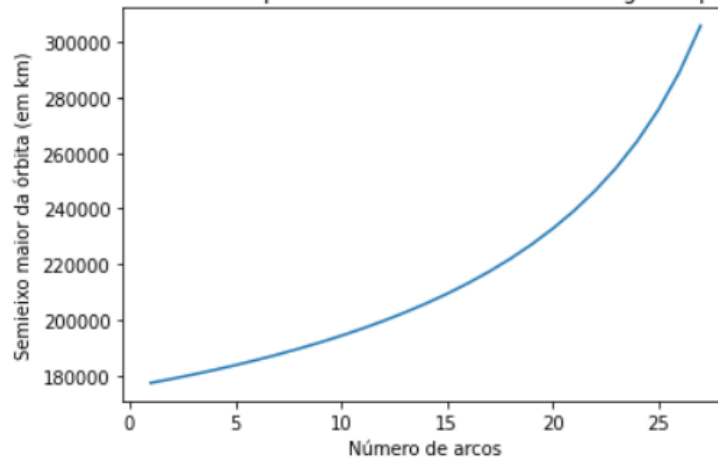


Figura 21 - O gráfico apresenta a relação entre a variação no semieixo maior da órbita com o número de arcos propulsivos realizados na segunda parte da manobra - que consiste na circularização da órbita, com semieixo de valor da distância Terra – órbita Halo LL1.

Dada a realização da manobra de circularização, supondo que no fim do processo a Lua e o ponto LL1 estejam com a proximidade adequada para a manobra de inserção em órbita no LL1 – uma distância por volta de 322.127,2 km do centro da Terra – o CubeSat adentraria à órbita Halo em volta do ponto LL1. Para navegar pela variedade invariante que conecta a órbita Halo do ponto LL1 com a órbita Halo do

ponto LL2, um  $\Delta V$  de apenas 14 m/s é requerido [8]. Com base em [8], o CubeSat levaria 18 dias para percorrer a variedade invariante e, finalmente, orbitar o ponto LL2.

Com todas essas etapas concluídas, a missão simulada estaria finalizada, com um período total de 905 dias, ou 30 meses, aproximadamente.

## 5. RESULTADOS

Os levantamentos e estudos realizados nesse relatório condizem com o proposto no escopo do projeto, juntamente da modelagem computacional realizada.

- Levantamento e estudo dos conceitos envolvidos, formação das Superestradas, trajetórias e uso para navegação.
  - Os conceitos envolvidos na formação das Superestradas Interplanetárias, bem como a aplicação delas nas trajetórias e no uso para a navegação foram os temas centrais no estudo elaborado nesse relatório. As Superestradas Interplanetárias são conjuntos de trajetórias formadas naturalmente por cada sistema de três corpos existentes no Sistema Solar. Elas conectam as órbitas Halo de cada Ponto de Lagrange, formando uma vasta rede de transporte interplanetário de baixo custo energético. Além de sua aplicação na navegação espacial, o estudo das Superestradas podem auxiliar na compreensão da história do Sistema Solar, dos astros e do próprio planeta Terra. Os capítulos 1 a 4 contém informações que englobam os fenômenos envolvidos nas formações das Superestradas, bem como aplicá-las no desenvolvimento científico e aeroespacial.
- Estudo do problema gravitacional dos três corpos e relação deste com as Superestradas.
  - O surgimento das Superestradas Interplanetárias está historicamente correlacionado com a elaboração do Problema Gravitacional dos Três Corpos – principalmente o restrito – e na busca por soluções dele. Os pontos de equilíbrio descobertos por Joseph-Louis Lagrange corroboraram para a descoberta de que eles podem abrigar órbitas, com suas estabilidades decretadas pelo tipo de interações gravitacionais que o ponto é resultado. O cumprimento do segundo objetivo leva ao terceiro, que é o estudo de como esses Pontos de Lagrange estão relacionados com as Superestradas Interplanetárias.
- Estudo dos Pontos de Lagrange e sua importância no entendimento das Superestradas Interplanetárias.
  - Foi exposto durante o relatório que os Pontos de Lagrange são capazes de gerar órbitas de diversas estabilidades – instáveis caso os pontos

geradores sejam colineares, e estáveis caso os pontos sejam os equiláteros L4 e L5 (depende também da razão das massas entre os corpos). As interações gravitacionais entre os corpos massivos e o corpo de massa ínfima geram os pontos de equilíbrio capazes de abrigar órbitas, nomeadas de órbitas halo, uma órbita de diversas inclinações, instável e de frequência orbital estável. Além disso, elas geram trajetórias de baixíssimo custo energético que conectam as diversas órbitas de Halo pelo Sistema Solar, sendo que o corpo de massa ínfima é capaz de navegar por essas “variedades invariantes”. O conceito das variedades leva ao cumprimento do quarto objetivo.

- Estudo dos movimentos das Superestradas Interplanetárias conforme a dinâmica do Sistema Solar
  - As variedades invariantes são trajetórias que conectam as órbitas Halo por todos os sistemas de três corpos existentes em nosso sistema. Elas geram uma rede de transporte interplanetária que acompanha a dinâmica de movimento do Sistema Solar. As variedades estáveis levam os corpos até as órbitas Halo, enquanto as instáveis são as trajetórias responsáveis por conduzir o corpo afora. O estudo das variedades leva ao levantamento de diversas aplicações práticas destes conceitos em missões espaciais, principalmente focadas na vizinhança terrestre, como as missões Hiten e Lunar IceCube. O aproveitamento dessas trajetórias nessas missões está ligado também ao uso de trajetórias balísticas realizadas por sondas e satélites, respectivamente, e por impulsos iniciais proporcionados por grandes foguetes. Isso levou a questão de que se era possível que um CubeSat, a partir de uma órbita em volta da Terra muito comum, também pudesse se aproveitar das variedades invariantes para navegar pela vizinhança terrestre, o que nos leva ao cumprimento do quinto e último objetivo.
- Aplicação prática atual: missão Lunar IceCube e modelagem inicial p/ o Sistema Terra-Lua
  - Com base nos escopos das missões estudadas e expostas nesse relatório, principalmente a missão Lunar IceCube, foi feita uma simulação de missão envolvendo o envio de um CubeSat até o ponto

LL2, aproveitando-se das Superestradas existentes no sistema Terra-Lua e partindo de uma órbita geoestacionária. Com o auxílio de linguagens de programação, a realização da simulação foi um sucesso. Porém, conclui-se que a missão seria de difícil execução, dado o alto tempo de realização do projeto (aproximadamente 30 meses), o que não é provável de ser alcançado por um CubeSats, que apesar de avançados tecnologicamente, ainda apresentam uma baixa confiabilidade de componentes e pouca vida útil [4]. Além disso, por realizar muitos arcos propulsivos em volta da Terra, o CubeSat seria exposto a imensas quantidades de radiação cósmica, o que provavelmente danificaria seus componentes internos. Outras maneiras mais convencionais são adotadas em missões desse tipo, liberando dezenas de CubeSats de uma só vez no espaço, aproveitando-se de impulsos fornecidos por foguetes e trajetórias balísticas. A realização de uma simulação que se utilizava dos conceitos das Superestradas cumpre o último objetivo proposto no projeto.

## 6. CONCLUSÃO

As Superestradas Interplanetárias, conjuntos de variedades invariantes estáveis e instáveis, são geradas naturalmente por todo sistema de três corpos existente em nosso Sistema Solar. A formulação do Problema dos Três Corpos Restrito e as soluções apresentadas por matemáticos como Joseph-Louis Lagrange fundamentaram todos os conceitos teóricos apresentados até então, o que gerou novas áreas de estudo e possibilidades variadas no setor aeroespacial. As variedades invariantes, que conectam as órbitas de Halo formadas em torno de cada Ponto de Lagrange, viabilizam um transporte de baixo custo que integra todo o Sistema Solar, o que permite a diversos países o usufruto delas em missões diversas, desde projetos que envolvam CubeSats Interplanetários até missões tripuladas entre a vizinhança terrestre e o Sistema Solar.

Os conceitos estudados nesse projeto tendem a serem utilizados em uma maior frequência em missões futuras, as quais conciliarão as redes de transporte de baixo custo energético a uma efetividade de tempo empregado, que hoje ainda permanece muito superior em relação a uma missão convencional. A possibilidade do uso de CubeSats em missões interplanetárias interessa à indústria aeroespacial, o que se torna um alvo até para o Brasil, que nos últimos anos tem ampliado a produção destes satélites miniaturizados. Ao aproveitar-se desse conceito, o país expandiria o conhecimento nessas áreas e aumentaria sua participação nas contribuições mundiais para com os campos da indústria aeroespacial, astronomia e astronáutica no geral.

O relatório engloba, de forma satisfatória, todos os tópicos propostos durante a elaboração do projeto. O estudo do conceito das Superestradas, de como elas são formadas e da aplicação delas para a navegação, controle e guiagem está detalhado por todo o relatório, intrínseco ao desenvolvimento do Problema dos Três Corpos Restrito e à existência dos Pontos de Lagrange. Ao abordar essas questões, compreendeu-se como cada sistema de três corpos está dinamicamente conectado e relacionado com a história do Sistema Solar, dado o exemplo dos asteroides desviados pela influência gravitacional de Júpiter em direção à Terra, bem como o acúmulo de cometas e rochas em Superestradas e pontos de libração jovianos.



Além disso, a pesquisa desses temas permite revelar uma quantidade incrível de missões passadas, presentes e futuras que se aproveitam dos conceitos abordados nesse relatório. Como a maioria dos projetos focam na dinâmica da vizinhança terrestre, as missões que tiveram mais destaque – Hiten e Lunar IceCube – detalharam questões sobre o usufruto dos Pontos de Lagrange e das variedades invariantes para tornar mais simples o envio de satélites, sondas e até humanos à Lua com um baixíssimo custo energético.

Por fim, a simulação gerada com base nas informações coletadas das missões Hiten e Lunar IceCube contribuiu para colocar em prática os conceitos teóricos estudados, e explorou as dificuldades atuais na aplicação das Superestradas. Apesar de um sucesso, a simulação ser colocada em prática é altamente improvável, já que a missão não contaria com um impulso inicial fornecido pelo foguete, estendendo o tempo de missão. Para viabilizar a missão, uma manobra de Transferência de Hohmann foi simulada, realizada por arcos propulsivos – já que o CubeSat apresentaria um propulsor de baixo impulso, que não gera um  $\Delta V$  grande em um curto período. No entanto, a tecnologia atual empregada nos CubeSats não resistiria ser exposta por longos períodos às radiações cósmicas presentes no espaço. Além disso, a missão apresentaria um prazo extremamente longo para realizar a manobra de transferência para Lua que, no cenário atual da área espacial, poderia ser realizado de outras maneiras muito mais eficientes.

Por conseguinte, garantido o crescente interesse dos diversos setores científicos em explorar maneiras mais econômicas de transporte espacial, estende-se a possibilidade de estudo das Superestradas Interplanetárias a muitos âmbitos. As perspectivas estendem-se desde a aplicabilidade do conceito a missões de curto prazo, como CubeSats, até missões tripuladas; missões para o Sistema Solar interno, externo ou missões que envolvem a vizinhança terrestre. A fim de continuar contribuindo para um maior conhecimento agregado sobre esse tema, o aluno e autor aprofundar-se-á no conceito focado nas aplicações das Superestradas Interplanetárias nas trajetórias de CubeSats restrito ao Sistema Terra-Lua, em uma próxima iniciação científica. Espera-se que o estudo dos conceitos e aplicações investigados neste relatório instiguem o interesse dos demais pesquisadores, contribuindo assim para o progresso científico no país.

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] LO, Martin W. **The InterPlanetary Superhighway and the Origins Program**. In: IEEE AEROSPACE CONFERENCE, 2002, Big Sky. Anais. Pasadena: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2002. p. 1-20. doi: 10.1109/AERO.2002.1035332.
- [2] LO, Martin W. **Invariant manifolds and the interplanetary superhighway**. In: SIXTH INTERNATIONAL CONGRESS ON INDUSTRIAL APPLIED MATHEMATICS, 7, 2007, Zurique. Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics. Pasadena: Wiley, 2008. p. 1030907-1030908. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/pamm.200700573>. Acesso em: 17 jun. 2021.
- [3] STAEHLE, Robert L.; ANDERSON, Brian; BETTS, Bruce; et al. **Interplanetary CubeSats: opening the solar system to a broad community at lower cost**. 1. ed. Vol. 2. Journal of Small Satellites, 2012. Disponível em: <https://jossonline.com/Papers1441.html>. Acesso em: 17 jun. 2021.
- [4] VILLELA, Thyrsó; BRANDÃO, Alessandra; LEONARDI, Rodrigo. Cubesats e oportunidades para o setor espacial brasileiro. **Contribuições do CGEE ao SNCTI**, Brasília - DF, v. 21, ed. 42, p. 91-114, Jan/Jun 2016.
- [5] MACEDO, Gabriel da Silva; JUNIOR, Artur Justiniano Roberto. **Aplicação do Problema Restrito de Três Corpos no estudo do movimento de astros do sistema solar**. Revista Brasileira de Ensino de Física, Alfenas - Minas Gerais, Brasil, v. 40, ed. 4, 25 maio 2018. DOI <http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2018-008>. Disponível em: <http://www.scielo.br/rbef>. Acesso em: 26 maio 2022.
- [6] FELIPE, Gislaine de. **TRANSFERÊNCIAS ORBITAIS ENVOLVENDO ÓRBITAS DO TIPO HALO**. Orientador: Dr. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado. 2005. Tese de Doutorado (Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, [S. l.], 2005. p. 222.
- [7] SPOHN, Tilman *et al.* **Encyclopedia of the Solar System**. 3. ed. aum. Oxford: Elsevier, 2014. 1272 p.

- [8] LO, Martin W; CHUNG, Min-Kun J. **Lunar Sample Return via the Interplanetary Superhighway**. In: AIAA/AAS ASTRODYNAMICS SPECIALIST CONFERENCE AND EXHIBIT, 2002, Monterrey. Anais. Pasadena: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2002. p. 1-7.
- [9] LO, Martin W. **The Interplanetary Superhighway for the Development of the Moon & the Earth's Neighborhood**. In: THE AMERICAN ASTRONAUTICAL SOCIETY SPACE FLIGHT MECHANICS CONFERENCE, 2019, Portland. Anais. Portland: National Aeronautics and Space Administration, 2019. p. 1-52.
- [10] HOWELL, Kathleen Connor; et al. 26TH AAS/AIAA SPACE FLIGHT MECHANICS MEETING, 26., 2016, Califórnia. **THE LUNAR ICECUBE MISSION DESIGN: CONSTRUCTION OF FEASIBLE TRANSFER TRAJECTORIES WITH A CONSTRAINED DEPARTURE [...]**. [S. l.: s. n.], 2016.
- [11] CLARK, Pamela; et al. **Challenges and Solutions for Lunar Ice Cube BIRCHES and Other First Generation CubeSat Lunar Orbital Science Payloads**. In: SMALL SATELLITE CONFERENCE, 32, 2018, Logan. Proceedings. Pasadena: 2018.
- [12] MCCAINE, Gina. **Halo orbit design and optimization**. Orientador: Michael Ross. 2004. 57 p. Tese (Mestrado em Engenharia Astronáutica) - Naval Postgraduate School, Monterrey, California, 2004.
- [13] PARKER, Jeffrey. **Families of low-energy lunar Halo transfers**. Advances in the Astronautical Sciences. 124. 2006
- [14] GONÇALVES, Liana Dias. **Manobras Orbitais de Satélites Artificiais Lunares com Aplicação de Propulsão Contínua**. Orientador: Evandro Marconi Rocco. 2013. Dissertação (Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, [S. l.], 2013.
- [15] BIT-3 RF ION THRUSTER. Busek, 2022. Disponível em: <https://www.busek.com/bit3>. Acesso em: 10 de agosto de 2022.
- [16] P. SUTTON, George; BIBLARZ, Oscar. **Rocket Propulsion Elements**. 9. ed. atual. [S. l.]: Wiley, 2017. 768 p.
- [17] LO, Martin W; et al. **Dynamical Systems, the Three-Body Problem and Space Mission Design**. Pasadena, California, EUA: World Scientific, 2000. 331p.

- [18] FIGUERÊDO, Elysandra; CASTRO, Antônio S. de. **Um Problema de Três Corpos Analiticamente Solúvel**. Revista Brasileira de Ensino de Física, São Paulo, Brasil, v. 23, ed. 3, p. 289-293, setembro 2001.
- [19] FORTES, Elaine Cristina Ferreira Silva; AZEVEDO, Franciane; KOLLAND, Marcos. **Desvendando o Endereço Físico do Telescópio James Webb**. Revista Brasileira de Ensino de Física, [s. l.], v. 40, ed. 3, 28 nov. 2017.
- [20] MARTINS, Flavio Avila Correia; ZANOTELLO, Marcelo. **Mecânica celeste e a teoria dos sistemas dinâmicos: uma revisão do problema circular restrito de três corpos**. Revista Brasileira de Ensino de Física, Santo André, São Paulo, Brasil, v. 40, ed. 2, 2 out. 2017.
- [21] CURTIS, Howard D. **Orbital Mechanics for Engineering Students**. 2. ed. Oxônia: Butterworth-Heinemann, 2010.
- [22] HOWELL, Kathleen Connor. **THREE DIMENSIONAL, PERIODIC, "HALO" ORBITS**. 8 jul. 1983.
- [23] FITZPATRICK, Richard. **An Introduction to Celestial Mechanics**. Cambridge: Cambridge University Press, 2012.

## APÊNDICE A – CÓDIGO PARA A MANOBRA DE TRANSFERÊNCIA DE HOHMANN DO CUBESAT POR ARCOS PROPULSIVOS - REALIZADO EM LINGUAGEM PYTHON

### Código referente à primeira parte da manobra

```
import math
import matplotlib.pyplot as plt
semi_maxis=42165
mi=398600
r=42165
propellant_flow=0.00000005217152718
initial_mass=1.5
arcs=0
V1=3.0746281201
time=0
x=[]
y=[]
for i in range(300):
    orbital_period=2*math.pi*(((semi_maxis**3)/mi)**(1/2))
    degree_10_orbital_period=(10/360)*orbital_period
    propellant_spent=degree_10_orbital_period*propellant_flow
    final_mass=initial_mass-propellant_spent
    deltam=initial_mass/final_mass
    delta_V=(9.80665*2150*math.log(deltam))/1000
    especific_energy=(0.5*((V1+delta_V)**2))-(mi/r)
    semi_maxis=(-mi/(2*especific_energy))
    arcs+=1
    initial_mass-=propellant_spent
    V1+=delta_V
    time+=orbital_period
    x.append(arcs)
    y.append(semi_maxis)
print(f"O número de arcos é: {arcs}")
print(f"A massa de propelente final após o número de arcos é: {initial_mass} kg")
print(f"O semi-eixo da órbita final possui tamanho: {semi_maxis:.3f} km")
```

```

print(f"O tempo de duração total da manobra é: {(time//86400):.0f} dias e {(time%86400)/3600:.2f} horas")
print(f"A velocidade do CubeSat é: {V1:.6f}km/s")
print(f"Faltam {(4.079285-V1):.6f}km/s para a velocidade orbital desejada")
plt.plot(x,y)
plt.xlabel("Número de arcos")
plt.ylabel("Semieixo maior da órbita (em km)")
plt.title("Gráfico do número de arcos por valor de semieixo orbital - primeira parte da manobra")
plt.show()

```

### **Código referente à segunda parte da manobra**

```

import math
semi_maxis=175896.1
mi=398600
r=309627.2
propellant_flow=0.00000005217152718
initial_mass=1.4307864705858815
arcs=0
V1=0.555516601
time=0
x=[]
y=[]
for i in range(27):
    orbital_period=2*math.pi*(((semi_maxis**3)/mi)**(1/2))
    degree_10_orbital_period=(10/360)*orbital_period
    propellant_spent=degree_10_orbital_period*propellant_flow
    final_mass=initial_mass-propellant_spent
    deltam=initial_mass/final_mass
    delta_V=(9.80665*2150*math.log(deltam))/1000
    especific_energy=(0.5*((V1+delta_V)**2))-(mi/r)
    semi_maxis=(-mi/(2*especific_energy))
    arcs+=1
    initial_mass-=propellant_spent
    V1+=delta_V
    time+=orbital_period

```

```

x.append(arcs)
y.append(semi_maxis)
print(f"O número de arcos é: {arcs}")
print(f"A massa de propelente final após o número de arcos é: {initial_mass} kg")
print(f"O semi-eixo da órbita final possui tamanho: {semi_maxis:.3f} km")
print(f"O tempo de duração total da manobra é: {(time//86400):.0f} dias e {((time%86400)/3600):.2f} horas")
print(f"A velocidade do CubeSat é: {V1:.6f}km/s")
print(f"Faltam {(1.134616499-V1):.6f}km/s para a velocidade orbital desejada")
plt.plot(x,y)
plt.xlabel("Número de arcos")
plt.ylabel("Semieixo maior da órbita (em km)")
plt.title("Gráfico do número de arcos por valor de semieixo orbital - segunda parte da manobra")
plt.show()

```