



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Pró-Reitoria de Pesquisa

Av. dos Estados, 5001 • Santa Teresinha • Santo André/SP • CEP 09210-580
Bloco L • 3.º andar • Fone: (11) 3356.7619
propes@ufabc.edu.br

Carta de apresentação

Santo André, 31 de agosto de 2019.

À Pró-Reitora de Pesquisa,

Profª. Dra. Sônia Maria Malmonge

Encaminho o relatório final da aluna ***Laura Salomão Oliveira*** referente ao projeto de pesquisa junto ao programa de Iniciação Científica na modalidade ***PDPD***, no edital ***02/2018***.

A aluna teve desempenho adequado no período.

Reyolando Manoel Lopes Rebello da Fonseca Brasil



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Pró-Reitoria de Pesquisa

Av. dos Estados, 5001 • Santa Teresinha • Santo André/SP • CEP 09210-580
Bloco L • 3.º andar • Fone: (11) 3356.7619
propes@ufabc.edu.br

1. Bibliografia básica

No campo da engenharia aeroespacial, vários fenômenos de interesse não são lineares, como, por exemplo, aqueles estudados pela Aeroelasticidade. Esta área de estudo teve seu desenvolvimento iniciado entre 1910-1930 como apresentado por [1]. Fenômenos aeroelásticos são estudados em aeronaves, mísseis e veículos de lançamento. A perspectiva histórica de análise e controle das respostas aeroelásticas pode ser encontrada em [2]. Em particular, modelos de veículos lançadores, baseados em vigas articuladas, têm sido utilizados por diversos autores como introdução ao estudo desse fenômeno. Em [3] estudos lineares são desenvolvidos para considerar a carga crítica em veículos lançadores. Em [4] este problema é analisado do ponto de vista topológico da estabilidade estrutural. No entanto, para obter uma análise mais adequada da dinâmica estrutural de um veículo lançador, é necessário introduzir não-linearidades em seu modelo matemático. É por meio dessa modelagem não linear que a determinação das amplitudes dos estados estacionários pós-críticos se torna possível, como afirma [5] e como no trabalho de [6]. Outra teoria não-linear associada a veículos de lançamento pode ser encontrada em [7]. Muitas vezes, o estudo de veículos lançadores se relaciona à interação de forças aerodinâmicas, elásticas, propulsoras e inerciais que atuam em sua estrutura. Em particular, os eventos associados com a instabilidade dinâmica da natureza oscilatória harmônica e auto-excitada que ocorre devido à interação modificadora entre dois ou mais modos distintos de vibração de um sistema e a introdução de energia externa naquele sistema por meio de um agente ou fluxo dinâmico (força), de acordo com as definições encontradas em [8], [9] e [10]. No



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Pró-Reitoria de Pesquisa

Av. dos Estados, 5001 • Santa Teresinha • Santo André/SP • CEP 09210-580
Bloco L • 3.º andar • Fone: (11) 3356.7619
propes@ufabc.edu.br

presente estudo, esta introdução de energia está associada à carga circulatória axial na base do veículo lançador devido à sua propulsão. Em [11] também é apresentada uma solução analítica da equação diferencial parcial de quarta ordem da coluna de Beck.

O artigo base deste projeto é a publicação [13], *A 2-DOF model of an elastic rocket structure excited by a follower force*, por Brejão e Brasil, no JPCS, Journal of Physics Conference Series, 2017. Metodologia numérica é detalhada em [12].



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Pró-Reitoria de Pesquisa

Av. dos Estados, 5001 • Santa Teresinha • Santo André/SP • CEP 09210-580
Bloco L • 3.º andar • Fone: (11) 3356.7619
propes@ufabc.edu.br

2. Resumo das atividades realizadas no período

De acordo com o projeto original, foi completada neste período revisão bibliográfica do tema proposto, de acordo com a lista de referências bibliográfica no final deste relatório, e a implementação da solução numérica das equações diferenciais governantes do problema em ambiente MatLab.

A aluna se familiarizou também com os métodos utilizados para dedução das equações diferenciais do modelo matemático discreto do problema em questão. Principal entre eles, as Equações de Lagrange, baseadas nas energias cinética e potencial. Nesta última, está incluída a energia de deformação. Durante esta IC PDPD, a aluna sentiu algumas dificuldades, relacionadas com sua base matemática, por não ter ainda cursado *Funções de Várias Variáveis* e *Equações diferenciais*, sanadas pelo orientador,

Também foi realizado aprendizado do programa MATLAB e implementação no mesmo do algoritmo de RungeKutta de 4ª ordem para análise das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem do problema, conforme item 4 deste relatório que reapresenta o modelo matemático utilizado.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Pró-Reitoria de Pesquisa

Av. dos Estados, 5001 • Santa Teresinha • Santo André/SP • CEP 09210-580
Bloco L • 3.º andar • Fone: (11) 3356.7619
propes@ufabc.edu.br

3. Descrição dos objetivos e metas

Os veículos lançadores (popularmente conhecidos como foguetes) são dispositivos essenciais para transportar cargas da superfície da Terra para alguma órbita ao seu redor, seja qual for a missão espacial atual. O veículo, como qualquer outro corpo físico, não é absolutamente rígido, de modo que o comportamento estrutural, via excitação por cargas externas, tende a afetar a dinâmica de voo. Pretendeu-se, neste trabalho, desenvolver o estudo paramétrico, por via numérica, de um modelo matemático de uma estrutura de foguete espacial elástica considerado como uma coluna de Beck excitada por uma força seguidora (ou circulatória). Esta força representa o impulso do motor de foguete que deve estar sempre na direção da tangente à estrutura do eixo deformado na base do veículo.

Utilizou-se um modelo discreto simplificado de barras rígidas, de dois graus de liberdade. Seu sistema de duas equações diferenciais ordinárias não lineares de segunda ordem de movimento foi derivado pelo método de energia de Lagrange, permitindo uma compreensão geral das principais características do problema. Utilizando aproximações para funções harmônicas, as equações obtidas consideram termos de inércia, rigidez e forçamento até terceira ordem (cúbicos). Entre outros ricos comportamentos dinâmicos não lineares deste modelo, dependendo dos parâmetros e das condições iniciais, foram observadas possíveis soluções assintoticamente estáveis e de ciclos limite.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Pró-Reitoria de Pesquisa

Av. dos Estados, 5001 • Santa Teresinha • Santo André/SP • CEP 09210-580
Bloco L • 3.º andar • Fone: (11) 3356.7619
propes@ufabc.edu.br

4. Metodologia

Este projeto de Iniciação Científica em nível de PDPD, hora encerrado, fez a simulação numérica das equações do movimento já obtidas pelo orientador, de forma a realizar um estudo paramétrico para identificar diversos comportamentos dinâmicos desse sistema.

A simulação numérica foi feita pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem. Suponha-se um vetor de variáveis x no tempo t . O método implementa a integração numérica no tempo do sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem $\dot{x} = f(t, x)$ (o ponto superposto indica derivação no tempo), em que o valor das variáveis, ao final de cada passo de tempo de duração h é dado pela sequência:

$$k1 = h f(t, x)$$

$$k2 = h f(t + h/2, x + k1/2)$$

$$k3 = h f(t + h/2, x + k2/2)$$

$$k4 = h f(t + h, x + k3)$$

$$x(t+h) = x(t) + (k1 + 2k2 + 2k3 + k4)/6$$

Usa-se o algoritmo tal como implementado na função ode45 do Matlab, que utiliza o Runge-Kutta de 5ª ordem para verificar a convergência do algoritmo básico de 4ª ordem.

Essa função auxiliou nas simulações computacionais do foguete elástico para a análise de seu desempenho. Como foram desenvolvidas duas equações do movimento de segunda ordem, é necessário antes da utilização do método de integração, transformá-las em quatro equações de primeira ordem.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Pró-Reitoria de Pesquisa

Av. dos Estados, 5001 • Santa Teresinha • Santo André/SP • CEP 09210-580
 Bloco L • 3.º andar • Fone: (11) 3356.7619
 propes@ufabc.edu.br

5. Modelo matemático

Considere-se o modelo da Figura 1. Seja uma força não conservativa (circulatória) seguidora aplicada a C, na direção da barra inferior. Esta força modela a força de empuxo do foguete devido à expansão dos gases de combustão nos motores na base do veículo. Não consideramos, neste modelo, sua dependência do tempo.

A ação da força aplicada a C estimula o sistema a se afastar de sua posição de equilíbrio fundamental. O problema agora é semelhante a um pêndulo duplo invertido.

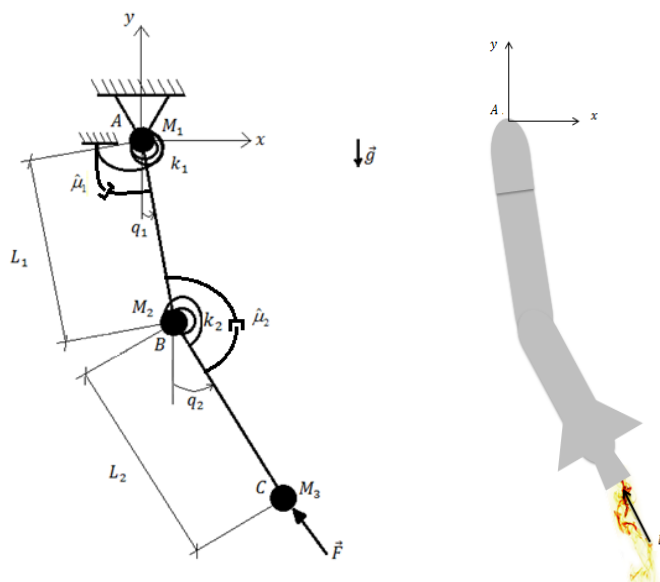


Fig.1: (esquerda) movimento do sistema; (direita) aparência do foguete

As equações de movimento podem ser derivadas por meio da abordagem do vetor de segunda lei de Newton, mas esse método é bastante complicado nesse caso. Assim, um esquema de energia escalar de Lagrange é preferível. Nossas coordenadas generalizadas são os deslocamentos angulares das barras, q_1 e q_2 , computadas a partir de suas posições originais de equilíbrio vertical. Eles são, obviamente, implicitamente dependentes do tempo.

As equações obtidas, com termos até ordem cúbica são apresentadas a seguir.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Pró-Reitoria de Pesquisa

Av. dos Estados, 5001 • Santa Teresinha • Santo André/SP • CEP 09210-580
 Bloco L • 3.º andar • Fone: (11) 3356.7619
 propes@ufabc.edu.br

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}(q_1 - q_2)^2 \\ -\frac{1}{2}(q_1 - q_2)^2 & 0 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \end{Bmatrix} + \\
 & \left[\begin{bmatrix} 0 & \dot{q}_2(q_1 - q_2) \\ -\dot{q}_1(q_1 - q_2) & 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{Bmatrix} + c \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix} = \\
 & -\lambda c \left\{ -q_1 + q_2 + \frac{q_1^3}{6} - \frac{q_2^3}{6} + \frac{q_1 q_2^2}{2} - \frac{q_2 q_1^2}{2} \right\}
 \end{aligned} \tag{1}$$

onde

$$c = \frac{k}{mL^2}, \quad \lambda = \frac{FL}{k}, \quad \mu = \frac{\hat{\mu}}{mL^2} \tag{2}$$

Pontos sobrepostos às variáveis denotam derivações sucessivas em relação ao tempo.

Note-se que as funções seno e cosseno foram aproximadas por expansões em série, resultando até termos cúbicos nas equações finais.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Pró-Reitoria de Pesquisa

Av. dos Estados, 5001 • Santa Teresinha • Santo André/SP • CEP 09210-580
Bloco L • 3.º andar • Fone: (11) 3356.7619
propes@ufabc.edu.br

6. Resultados

O estudo do comportamento dinâmico de um pêndulo elástico submetido a excitações de suporte teve resultados coerentes com os objetivos propostos da simulação computacional. As simulações se dividem em duas vertentes: estabilidade assintótica e ciclo limite. O diferencial dessas duas simulações são os parâmetros adimensionais c , λ e μ , definidos em (2). Esses parâmetros contêm as constantes de amortecimento, rigidez, massa, comprimento das barras e força aplicada. As simulações foram implementadas nos programas listados a seguir.

Na Figura 4 é apresentada simulação de comportamento assintoticamente estável do sistema, para certas condições iniciais, mostrando tanto a evolução no tempo como planos de fase, para as duas coordenadas do sistema.

Na Figura 5 é apresentada simulação de comportamento tipo CICLO LIMITE estável do sistema, para certas condições iniciais, mostrando tanto a evolução no tempo como planos de fase, para as duas coordenadas do sistema.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Pró-Reitoria de Pesquisa

Av. dos Estados, 5001 • Santa Teresinha • Santo André/SP • CEP 09210-580
Bloco L • 3.º andar • Fone: (11) 3356.7619
propes@ufabc.edu.br

```
function f = dlaura5(t,x)
% equações diferenciais de primeira ordem
% dlaura5.m 08/2019
% Estabilidade assintótica

% constantes
c = 1;
lambda = 1;
mi = 0.1;
%

% determinação das acelerações
M=[3 1-(x(1)-x(3))^2/2 ;1-(x(1)-x(3))^2/2 1];
D=[2*mi x(4)*(x(1)-x(3))-mi;-x(2)*(x(1)-x(3))-mi mi];
K=c*[2 -1;-1 1];
q=[x(1);x(3)];
qp=[x(2);x(4)];
p=[-lambda*c*(-x(1)+x(3)+x(1)^3/6-x(3)^3/6+x(1)*x(3)^2/2)-
x(3)*x(1)^2/2;0];

b=p-D*qp-K*q;
%
qpp= M\b;

%
f(1,1)=x(2);
f(2,1)=qpp(1);
f(3,1)=x(4);
f(4,1)=qpp(2);
```

```
function f = dlaura6(t,x)
% equações diferenciais de primeira ordem
% dlaura5.m 08/2019
% Regime ciclo limite

% constantes
c = 1;
lambda = 4;
mi = 2;
%

% determinação das acelerações
M=[3 1-(x(1)-x(3))^2/2 ;1-(x(1)-x(3))^2/2 1];
D=[2*mi x(4)*(x(1)-x(3))-mi;-x(2)*(x(1)-x(3))-mi mi];
K=c*[2 -1;-1 1];
q=[x(1);x(3)];
qp=[x(2);x(4)];
p=[-lambda*c*(-x(1)+x(3)+x(1)^3/6-x(3)^3/6+x(1)*x(3)^2/2)-
x(3)*x(1)^2/2;0];

b=p-D*qp-K*q;
%
qpp= M\b;

%
f(1,1)=x(2);
f(2,1)=qpp(1);
f(3,1)=x(4);
f(4,1)=qpp(2);
```



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Pró-Reitoria de Pesquisa

Av. dos Estados, 5001 • Santa Teresinha • Santo André/SP • CEP 09210-580
Bloco L • 3.º andar • Fone: (11) 3356.7619
propes@ufabc.edu.br

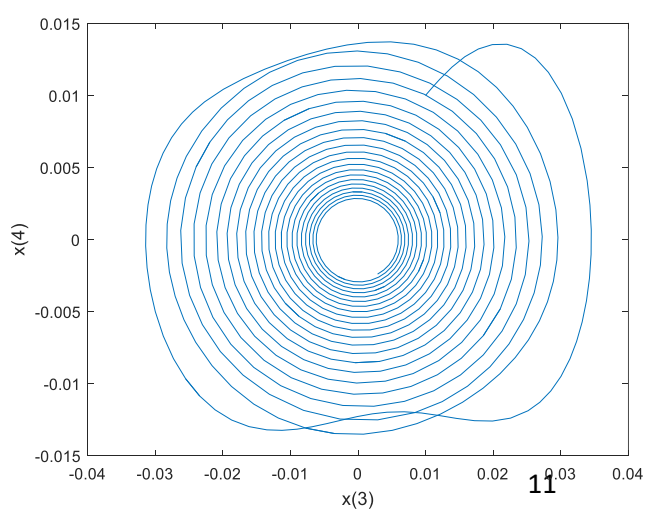
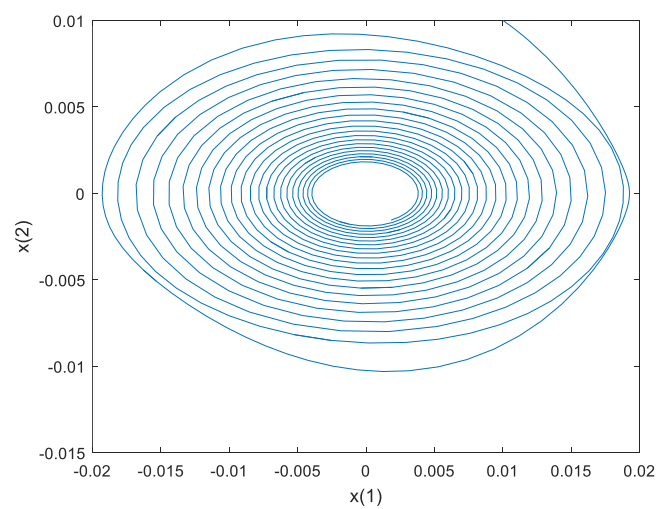
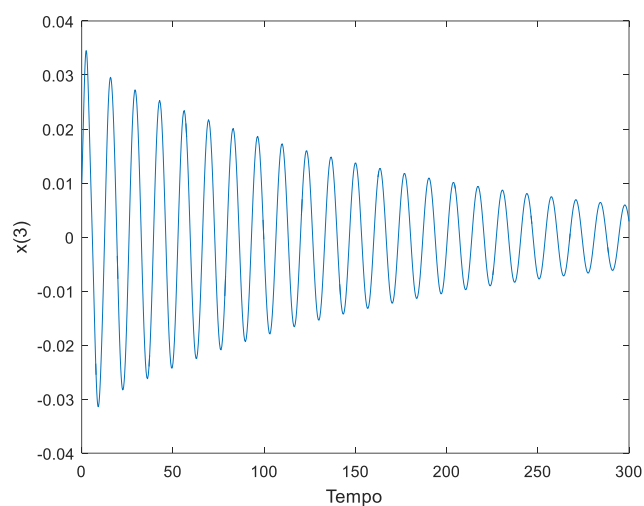
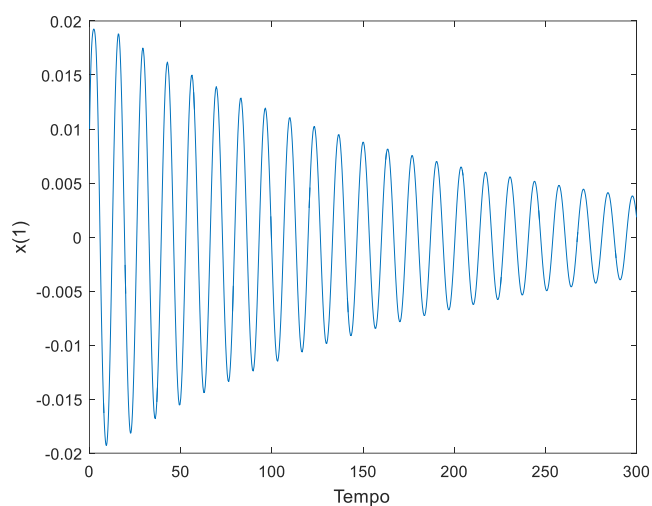


Fig. 4: estabilidade assintótica



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Pró-Reitoria de Pesquisa

Av. dos Estados, 5001 • Santa Teresinha • Santo André/SP • CEP 09210-580
Bloco L • 3.º andar • Fone: (11) 3356.7619
propes@ufabc.edu.br

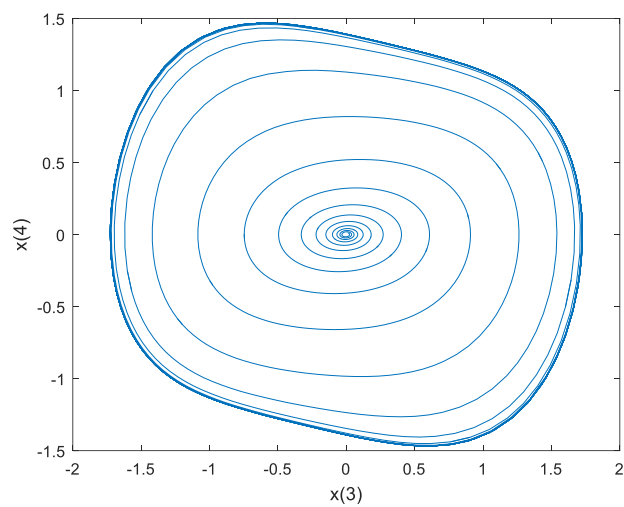
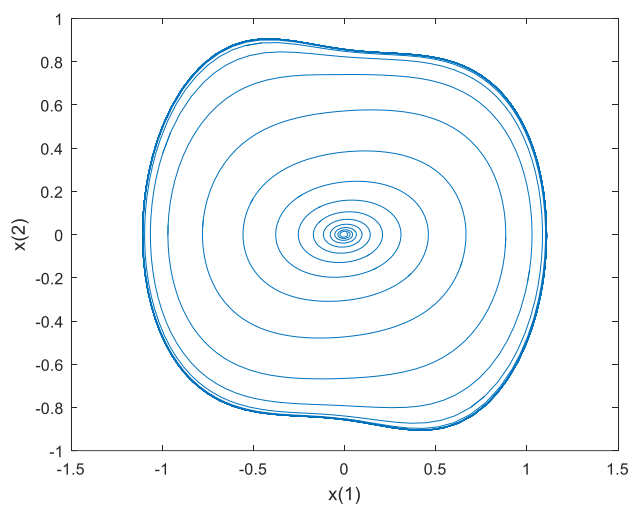
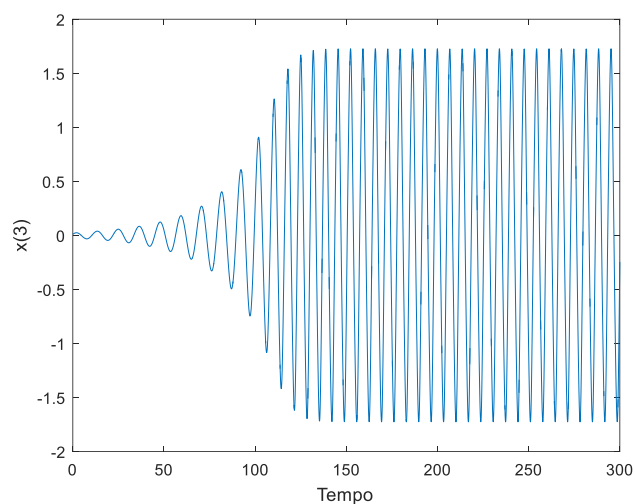
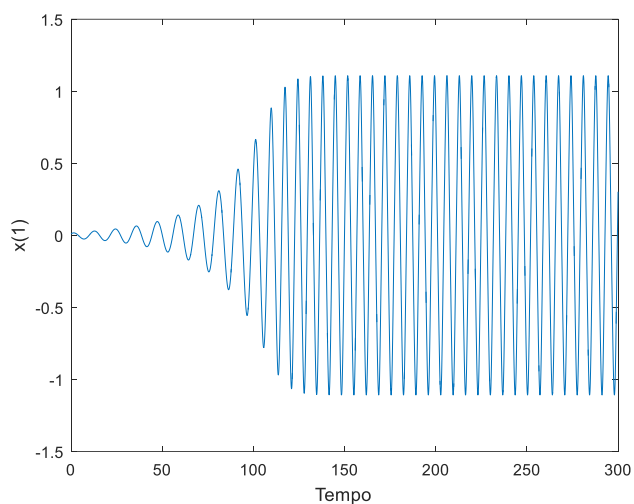


Fig. 5: Ciclo limite estável



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Pró-Reitoria de Pesquisa

Av. dos Estados, 5001 • Santa Teresinha • Santo André/SP • CEP 09210-580
Bloco L • 3.º andar • Fone: (11) 3356.7619
propes@ufabc.edu.br

7. Cronograma cumprido

1º ao 2º mês – revisão bibliográfica

3º ao 4º mês – implementação de rotinas em Matlab

5º ao 8º mês – estudo paramétrico

9º ao 12º mês – relatório final

8. Conclusões e trabalhos futuros

Nesta Iniciação Científica, a nível PDPD, foi estudado um modelo discreto de 2 graus de liberdade de um foguete sob ação da carga seguidora devida ao empuxo de seus motores na base, na direção da tangente à deformada.

As equações diferenciais ordinárias de segunda ordem não lineares que refém o problema foram derivadas pela equação de Lagrange pelo orientador. A aluna implementou as mesmas como um sistema de quatro EDO's de primeira ordem no ambiente MatLab.

As simulações obtiveram comportamento tanto assintoticamente estável como de ciclo limite estável.

Pretende-se, no futuro, investigar a possibilidade de ocorrência de ciclo limite instável, o “flutter”.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Pró-Reitoria de Pesquisa

Av. dos Estados, 5001 • Santa Teresinha • Santo André/SP • CEP 09210-580
Bloco L • 3.º andar • Fone: (11) 3356.7619
propes@ufabc.edu.br

Referências Bibliográficas

- [1] D. H. Hodges, G. A. Pierce, Introduction to structural dynamics and aeroelasticity, New York Cambridge University Press (2002).
- [2] V. Mukhopadhyay, Historical perspective on analysis and control of aeroelastic responses, Journal of Guidance, Control and Dynamics (2003) 673–684.
- [3] G. Herrman, I. Jong, On the destabilizing effect of damping in nonconservative elastic systems, J. Appl. Mech (1965) .
- [4] J. M. T. Thompson, Instabilities and catastrophes in science and engineering, John Wiley, Chichester (1982).
- [5] C. E. N. Mazzilli, Dinâmica não linear e estabilidade: uma formulação para sistemas submetidos a excitação de suporte ou carregamentos não conservativos. Tese de Livre Docência, Escola Politécnica da USP, São Paulo (1988).
- [6] J. Roorda, S. Nemat-Nasser, An energy method for analysis of nonlinear, nonconservative systems, AIAA J. (1967) 1262-1268.
- [7] J. Dugundji, Nonlinear problems of aeroelasticity computational nonlinear mechanics in aerospace engineering, In Atluri SN, editor. Progress in astronautics and aeronautics. Washington, DC: AIAA (1992) 127.
- [8] R. L. Bisplinghoff, H. Ashley, and R. Halfman, Aeroelasticity, Addison Wesley (1955).
- [9] E. H. Dowell, et al. A Modern Course in Aeroelasticity., 4. ed., Kluwer Academic (2005).
- [10] Y. C. Fung, An Introduction to the Theory of Aeroelasticity, Wiley (1955).
- [11] S. P. Timoshenko, Theory of elastic Stability 2nd Ed., Dover, Mineola (2009).



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Pró-Reitoria de Pesquisa

Av. dos Estados, 5001 • Santa Teresinha • Santo André/SP • CEP 09210-580
Bloco L • 3.º andar • Fone: (11) 3356.7619
propes@ufabc.edu.br

[12] R. M. L. R. F. Brasil, O Fenômeno de Localização de Modos em Dinâmica e Estabilidade de Estruturas Modulares de Comportamento Linear ou Não-Linear, Tese de Livre Docência, Escola Politécnica da USP, São Paulo (1996).

[13] L.F. Brejão, R.M.L.R.F. Brasil, A 2-DOF model of an elastic rocket structure excited by a follower force. Journal o Physics Conference Series (2017).