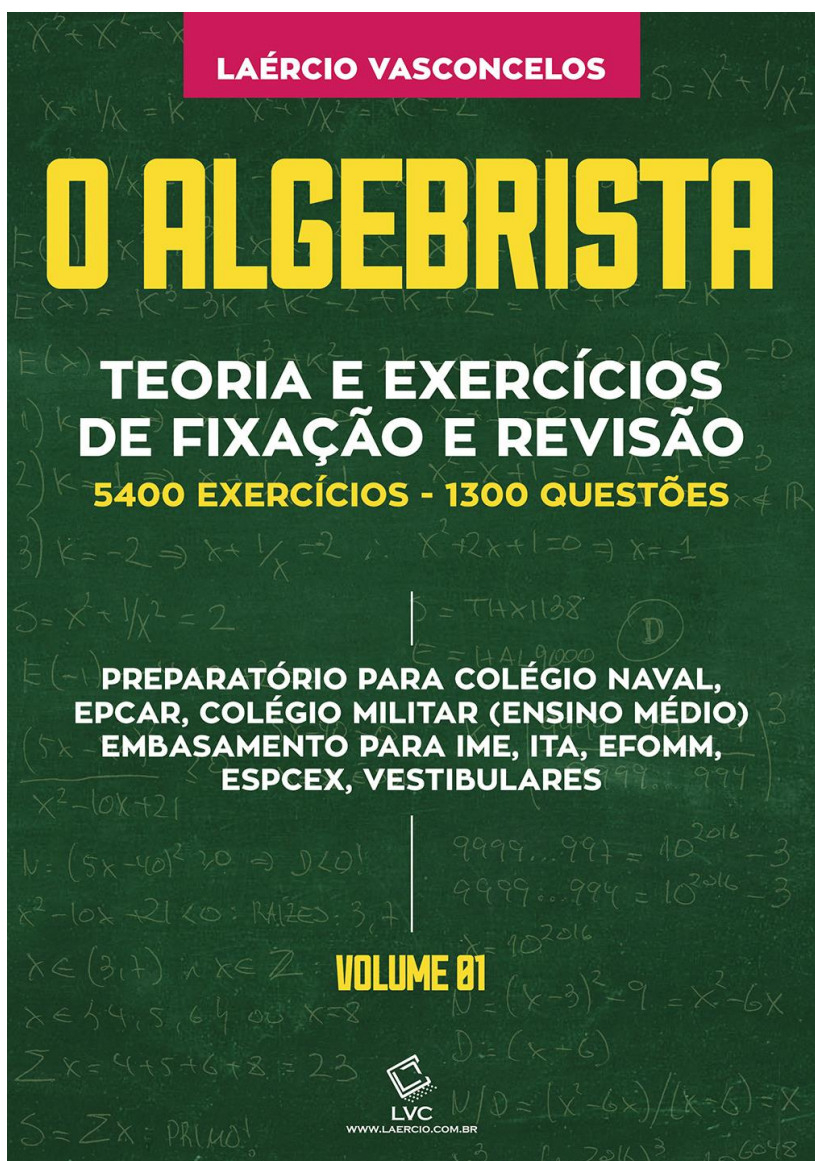


O ALGEBRISTA

Apostilas complementares

APOSTILA 02:

CAPÍTULO 2 – NÚMEROS RACIONAIS



www.laercio.com.br

O ALGEBRISTA VOLUME 1

Autor: Laércio Vasconcelos – www.laercio.com.br

Livro de álgebra do ensino **fundamental 2** (6º ao 9º ano)

Preparatório para Colégio Naval, EPCAr, Colégio Militar (ensino médio) e parcial (ver conteúdo abaixo) para Pré-IME, Pré-ITA, EsPCEx, EEAer, ENEM.

VOLUME 1: TEORIA, 5400 EXERCÍCIOS e 1300 QUESTÕES – 674 páginas
Capítulos 1, 2 e 3 do vol 1 disponíveis gratuitamente para os estudantes em PDF.
VOLUME 2: 2000 QUESTÕES DE CONCURSOS

Capítulos do volume 1: (Volume 2 tem os mesmos capítulos em um total de 2000 questões)

- 1) Números inteiros – teoria e 1.100 exercícios
- 2) Números racionais – teoria e 1.100 exercícios + 50 questões
- 3) Expressões algébricas – teoria, 600 exercícios + 90 questões
- 4) Produtos notáveis
- 5) Fatoração
- 6) MMC e MDC de expressões algébricas
- 7) Frações algébricas
- 8) Equações do primeiro grau
- 9) Sistemas de equações do primeiro grau
- 10) Problemas do primeiro grau
- 11) Tópicos sobre ANÁLISE
- 12) Inequações do primeiro grau
- 13) Equações do segundo grau
- 14) Cálculo de radicais
- 15) Equações redutíveis ao segundo grau
- 16) Sistemas do segundo grau
- 17) Inequações do segundo grau
- 18) Problemas do segundo grau
- 19) Funções
- 20) Trinômio do segundo grau
- 21) Polinômios

Laércio Vasconcelos obteve o primeiro lugar no Colégio Naval em 1976, onde cursou 2 anos, como 1001 e 2001. Foi segundo colocado no IME, onde se formou em engenharia eletrônica. É autor de 60 livros e atualmente cursa o PROFMAT no IMPA.

Livro completo em versão impressa em www.laercio.com.br e em livrarias.

Copyright © 2016, Laércio Vasconcelos

Este livro está registrado na Biblioteca Nacional e está protegido pela lei de direitos autorais brasileira, 9.610/98. Nenhuma parte poderá ser reproduzida sem consentimento do autor. Versão em PDF para uso individual por estudantes, não é permitido seu uso para criação de novos materiais didáticos, nem para utilização para confecção de livros e apostilas por cursos ou editoras, seja na versão em papel ou eletrônica.

Autorização de uso deste material
O ALGEBRISTA, volume 1, capítulos 1, 2 e 3
Copyright © 2016 Laércio Vasconcelos

Sejam bem-vindos alunos e professores de matemática. O autor espera contribuir para o ensino e aprendizado da álgebra com este material.

Você poderá usar gratuitamente este material, observadas as condições abaixo.
Este material não é de domínio público, sua utilização é regida pela lei brasileira de direitos autorais (lei 9.610/98), entretanto o autor concede permissões especiais para uso pessoal por alunos e professores:

Alunos: É permitido obter uma cópia em arquivo PDF, para uso próprio, em www.laercio.com.br. É permitido copiar o arquivo original para colegas conhecidos, mas é altamente recomendável que os colegas sejam orientados a obter o arquivo no referido site, pois lá sempre estará a versão mais atualizada, além de outros conteúdos disponibilizados pelo autor. O aluno pode ainda gerar uma cópia impressa para uso próprio, usando uma impressora. Não é permitida a realização de múltiplas cópias (ex: xerox).

Professores: As mesmas condições citadas acima, inclusive sendo permitido o envio do arquivo para outros professores, mas sempre recomendando a obtenção do arquivo mais recente no site citado. Ao professor é permitida também a geração de uma cópia impressa para uso próprio. Adicionalmente, é permitido ao professor o uso deste material em suas aulas, desde que não sejam feitas múltiplas cópias, e que os alunos sejam orientados a obter seus próprios arquivos no site citado.

Em qualquer caso, não são permitidas:

Distribuição de cópias do material, seja em papel, Internet, CD ou qualquer outro tipo de mídia.

A inclusão desses arquivos em coletâneas de arquivos sobre matemática, seja para uso comercial ou não.

Modificação nos conteúdos dos arquivos originais.

Copyright © 2016 Laércio Vasconcelos

O livro O ALGEBRISTA tem 674 páginas, e é encontrado à venda em www.laercio.com.br e em livrarias. Os capítulos 1, 2 e 3, volume 1, possuem esta versão digital para uso pessoal, conforme as condições indicadas nesta página.



Laercio Vasconcelos, autor

Engenheiro Eletrônico formado pelo IME – Instituto Militar de Engenharia, com mestrado em Sistemas e Computação. Participa ainda do programa PROFMAT, do IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Autor de 60 livros nas áreas de Informática e Matemática.

CAPÍTULO 2: Números racionais	61
Também Reais e Irracionais	61
Segurança, precisão, rapidez	61
Inteiros e racionais	61
Módulo e simétrico de um número racional	62
Revisão de frações	62
Fração é uma divisão	63
Simplificação e fração irredutível	63
Fração decimal, fração ordinária	64
Fração própria, fração imprópria, fração aparente, número misto	64
Porcentagem	65
Dízimas periódicas	65
Encontrando a fração geratriz	66
Fatoração de números naturais	66
MMC	67
Comparação de frações	68
Exercícios de revisão sobre frações	69
Lidando com sinais	72
Exercícios	74
Simplificação	74
Exercícios	75
Adição e subtração de números racionais	75
Comparação de números racionais	78
Exercícios	79
Multiplicação e divisão de números racionais	80
Inverso ou recíproco	82
Fração de fração	83
Expressões com adição, subtração, multiplicação e divisão de racionais	83
Organize o rascunho	84
Exercícios	86
Propriedades das operações com números racionais	88
Propriedade de fechamento da adição	89
Propriedade do elemento neutro da adição	89
Propriedade comutativa da adição	90
Propriedade associativa da adição	90
Propriedade de fechamento da multiplicação	90
Propriedade do elemento neutro da multiplicação	90
Propriedade comutativa da multiplicação	90
Propriedade associativa da multiplicação	91
Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e subtração	91
Potências de números racionais – expoentes positivos	91
A ordem correta	92
Exercícios	95
Exercícios	96
Propriedades das potências	96
Exercícios	97
Exercícios	98

Exercícios	100
Potências de números racionais – expoentes negativos	101
Exercícios	103
Raízes de números racionais	104
Exercícios	106
Cuidado com o sinal negativo	107
Exercícios	108
Expoentes $1/2$ e $1/3$	109
Exercícios	111
A raiz quadrada negativa?	111
Expressões com números racionais	113
Exercícios	115
Extração de raiz quadrada	118
Números irracionais	122
Números reais	124
Operando com números reais	126
Exercícios de revisão	127
Detonando uma prova – Questão 11	133
Respostas dos exercícios	134
Detonando uma prova – Questão 11	141

Capítulo 2

Números racionais

Também Reais e Irracionais

Já estudamos no capítulo 1, a relação entre os conjuntos Q , I e R . Este capítulo trata principalmente das operações no conjunto Q (Racionais), entretanto, praticamente todas elas aplicam-se também aos conjuntos I e R . No seu final serão apresentadas observações adicionais sobre I e R , além disso, praticamente todos os capítulos seguintes lidam com números reais e irracionais. Entretanto, do ponto de vista didático, é melhor apresentar as propriedades de I e R , usando inicialmente o conjunto Q , para depois estender as propriedades para os demais conjuntos.

Segurança, precisão, rapidez

Em praticamente todas as questões de matemática temos que realizar algum tipo de cálculo. Na maioria das questões, o cálculo é uma parte importante, mas não a principal. Em muitas questões, o cálculo é o objetivo principal, do tipo calcule isso, calcule aquilo. As questões dos concursos para a EPCAr apresentam cálculos bastante cansativos. Por exemplo, ao invés de apresentar uma expressão, apresentam quatro expressões e os respectivos valores e perguntam quais delas estão corretas. O aluno se vê obrigado a calcular as quatro expressões. Expressões nas provas do Colégio Naval são menos trabalhosas, mas requerem mais atenção, e o aluno tem que fazer uso das propriedades das operações. Questões do Colégio Militar têm estilo mais parecido com o do Colégio Naval. Questões das Olimpíadas de Matemática muitas vezes precisam de uma “sacada genial” para a resolução, e deve ser levado em conta que muitas vezes os outros concursos repetem questões da Olimpíada de Matemática.

Este capítulo tem um grande número de exercícios. Você deve resolver todos, com a máxima atenção. Você deve treinar para ter rapidez, pois nos concursos o tempo para a resolução de cada questão é muito pequeno. A precisão é necessária para que você não erre em contas. E você deve conhecer muito bem as propriedades das operações, para que não perca tempo pensando no caminho a ser tomado nos cálculos.

Inteiros e racionais

Você já estudou os números inteiros no capítulo 1, suas operações, expressões e resolveu diversos problemas. A boa notícia é que todas as operações aprendidas para os números inteiros são praticamente idênticas nos números racionais. Então você já sabe mais da metade do que precisa saber sobre os números racionais.

Os números racionais são todos os números inteiros, e ainda todos aqueles representados na forma de uma fração, na qual o numerador e o denominador são primos entre si. O sinal pode ser positivo ou negativo. O número zero, é claro, também é um número racional.

Exemplos de números racionais:

2, -5, 0, 1, 137, -20, 11, 34, -9, -85, 2000, -1.000.000,

$\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{5}$, $\frac{4}{7}$, $-\frac{41}{23}$, $\frac{16}{3}$, $\frac{49}{25}$, $-\frac{1}{200}$, $\frac{13}{35}$, $-\frac{10}{27}$, $\frac{26}{81}$, $\frac{32}{125}$, $-\frac{100}{3}$, etc.

Assim como ocorre com os conjuntos \mathbb{N} e \mathbb{Z} , o conjunto dos números racionais (indicado como \mathbb{Q}) é também infinito.

A má notícia é que para conhecer os números racionais, é preciso saber trabalhar com as frações positivas, assunto que é ensinado até o 5º ano do ensino fundamental, e faz parte da *aritmética*. Infelizmente muitos alunos chegam ao 6º ano sem um bom domínio do assunto, que engloba:

- Frações ordinárias, frações decimais
- Frações próprias, impróprias, irredutíveis, número misto
- Frações decimais
- Dízimas periódicas simples e compostas
- Porcentagem
- Operações com frações
- Redução ao mesmo denominador
- MMC, MDC, divisibilidade, números primos

É recomendável que você revise os assuntos acima no seu livro de aritmética. Seja como for, faremos uma breve revisão de cada tópico necessário conforme apresentarmos os números racionais nesse capítulo.

Módulo e simétrico de um número racional

Assim como ocorre para os números inteiros, os números racionais apresentam:

a) Simétrico ou oposto:

É o número com o sinal trocado. Por exemplo, o simétrico de $\frac{4}{3}$ é $-\frac{4}{3}$, o simétrico de $-\frac{3}{5}$ é $\frac{3}{5}$, o simétrico de 0 é 0.

b) Módulo ou valor absoluto

É o número sem sinal. O módulo de $-\frac{2}{3}$ é $\frac{2}{3}$, o módulo de $\frac{4}{7}$ é $\frac{4}{7}$, o módulo de 0 é 0. Para representar o módulo, colocamos o valor entre barras verticais ($| |$). Por exemplo:

$$|-\frac{2}{3}| = \frac{2}{3}$$

Revisão de frações

Um mesmo número racional pode ser representado por infinitas frações diferentes. Considere por exemplo as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{5}{10}$. Essas duas frações não são iguais, mas sim, são equivalentes.

Frações iguais: São aquelas que possuem o mesmo numerador e mesmo denominador. Por exemplo, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ são frações iguais.

Frações equivalentes: são frações que possuem o mesmo valor numérico. Essas frações, depois de simplificadas, ficam com numeradores e denominadores iguais. Por exemplo, $\frac{1}{2}$ e $\frac{5}{10}$.

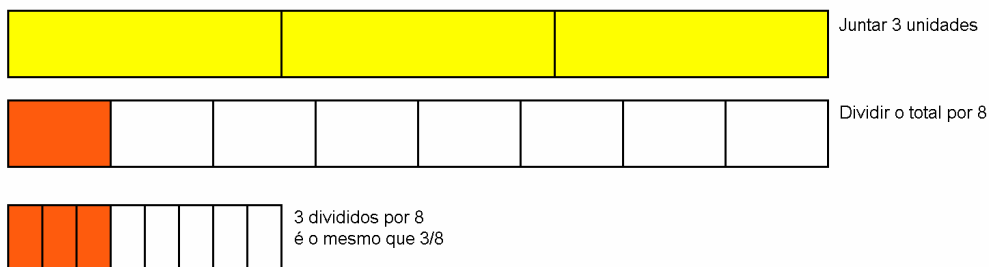
Ao considerarmos os valores numéricos dos números racionais, estamos levando em conta não as frações, mas os valores representados. Quando afirmamos que:

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$$

estamos dizendo que ambas as frações são representações diferentes do mesmo número racional. Não estamos afirmando que as frações são iguais, mas que ambas representam o mesmo número racional.

Fração é uma divisão

O que muitas vezes os alunos esquecem é que a fração é na verdade uma divisão. No exemplo da fração $3/8$, equivale a dividir um objeto em 8 partes e usar 3 delas. Mas também equivale a tomar três objetos juntos e dividir o total por 8, como mostra a figura abaixo.



Na primeira parte da figura acima temos 3 unidades. Depois de juntar as três partes, dividimos este total por 8. Isso é 3 dividido por 8 (2ª parte da figura). Na terceira parte da figura dividimos uma unidade por 8 e tomamos 3 dessas partes. Isso também é $3/8$.

O resultado da divisão (no exemplo, 3 dividido por 8) é o número racional que a fração representa.

Lembramos que os termos da fração são chamados de numerador (o de cima) e denominador (o de baixo). Correspondem ao dividendo e ao divisor da divisão representada por esta fração.

Simplificação e fração irredutível

O valor de uma fração não se altera quando dividimos o numerador e o denominador pelo mesmo valor inteiro. Isso é o que chamamos de *simplificar* a fração. Considere por exemplo a fração $72/96$.

$$\frac{72}{96} = \frac{36}{48} = \frac{18}{24} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

Se dividirmos o numerador e o denominador de $72/96$ por 2, encontraremos $36/48$, que é uma fração equivalente, ou seja, representa o mesmo número racional. A seguir podemos continuar dividindo o numerador e o denominador por 2, 2, e finalmente por 3, chegando a $3/4$. Esta última fração não pode ser mais simplificada, ou seja, não existe nenhum número natural pelo qual podemos dividir simultaneamente 3 e 4 (ou seja, 3 e 4 são primos entre si). Dizemos então que a fração $3/4$ é *irredutível*.

Fração decimal, fração ordinária

Frações decimais são aquelas cujo denominador é uma potência de 10. Alguns exemplos:

$$\frac{3}{10}, \frac{1}{100}, \frac{200}{1000}, \frac{5}{10}, \frac{7}{100}, \frac{5000}{10000}$$

Os números racionais que são representados por frações decimais, podem também ser representados por *números decimais*, com um número finito de casas decimais. Exemplos:

$$\frac{3}{10} = 0,3 \quad \frac{1}{100} = 0,01 \quad \frac{5}{10} = 0,5 \quad \frac{725}{100} = 7,25$$

As frações cujo denominador não é uma potência de 10, são chamadas de *frações ordinárias*. Exemplos:

$$\frac{3}{5}, \frac{2}{7}, \frac{20}{60}, \frac{1}{5}, \frac{100}{4}$$

Fração própria, fração imprópria, fração aparente, número misto

Fração própria é aquela na qual o numerador é menor que o denominador. Em consequência disso, essas frações são sempre menores que a unidade. Exemplos:

$$\frac{3}{5}, \frac{2}{7}, \frac{200}{1000}, \frac{1}{5}$$

Já as *frações impróprias* são aquelas nas quais o numerador é maior ou igual ao denominador.

$$\frac{6}{5}, \frac{10}{7}, \frac{200}{30}, \frac{18}{9}, \frac{7}{7}$$

Essas frações podem ser convertidas em números mistos, que possuem uma parte inteira e uma parte fracionária. Basta realizar a divisão inteira, do numerador pelo denominador. O quociente será a parte inteira do número misto, e o resto será o numerador da sua parte fracionária.

Exemplos:

$$\text{a) } \frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$$

$$\text{b) } \frac{23}{7} = 3\frac{2}{7}$$

$$\text{c) } \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$$

Quando uma fração tem o numerador que é múltiplo do denominador, o número racional resultante será inteiro, pois a divisão será exata. Essas são chamadas de *frações aparentes*. Exemplos:

$$\frac{15}{5}, \frac{28}{7}, \frac{200}{40}, \frac{20}{5}$$

Vemos que depois da casa decimal temos um dígito 6, para depois iniciar a repetição do 1, que é o período. Podemos indicar então este número como 13,611... ou 13,6111..., o que deixa claro que o “1” é a parte que se repete.

Nas expressões algébricas, é mais comum manter os números racionais representados como fração, ao invés de usar as dízimas periódicas. Isto porque a representação por fração é exata, já a forma de número decimal resulta em erro de arredondamento. Como não é possível escrever infinitas casas decimais, acabamos desprezando as casas que vão até o infinito. Por exemplo, ao representarmos $1/3$ como 0,333 estamos na verdade introduzindo um erro de 0,000333... para menos.

Muitas vezes ocorre o problema inverso, que é descobrir qual é a *fração geratriz* da dízima periódica, ou seja, encontrar a fração que, se for feita a divisão do numerador pelo denominador, resulta na dízima dada. Por exemplo, a fração geratriz de 0,333... é $1/3$.

Encontrando a fração geratriz

É fácil encontrar a fração geratriz de uma dízima periódica. A primeira coisa a fazer é determinar quantos algarismos tem o período. A seguir multiplicamos a dízima periódica por 10, 100, 1000, etc, conforme for o número de algarismos do período (1, 2, 3, etc.). Finalmente subtraímos este novo valor pela dízima original. Ficamos com duas equações simples, que subtraídas, permitirão chegar à fração geratriz.

Exemplo:

$$x = 3,7111...$$

O período tem um algarismo, então temos que multiplicar por 10. Ficamos então com:

$$10x = 37,111...$$

Agora calculamos esta equação menos a original:

$$10x = 37,111...$$

$$x = 3,7111...$$

Subtraindo $10x - x$ encontramos $9x$. Subtraindo $37,111... - 3,7111...$ encontramos:

$$\begin{array}{r} 37,111111... \\ - 3,711111... \\ \hline 33,400000 \end{array}$$

Não esqueça que para adicionar ou subtrair números decimais, é preciso alinhar suas vírgulas. Note que a parte que se repete até o infinito (1111) vai ser “cancelada”, resultando em 00000. O resultado da subtração é um decimal exato, 33,4. Agora podemos fazer:

$$9x = 33,4$$

$$x = \frac{33,4}{9} = \frac{334}{90}$$

Portanto a fração geratriz da dízima é $334/90$.

Fatoração de números naturais

Nas operações com frações é comum ter que escrever números na forma fatorada. Por exemplo:

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ (podemos representar a multiplicação pelo símbolo “x” ou por “.”).

$$49 = 7 \cdot 7 = 7^2$$

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$$

$$80 = 2^4 \cdot 5$$

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

Fatorar um número é representá-lo como um produto de fatores primos. Quando existirem fatores primos repetidos, usamos potências. Para fatorar um número, fazemos sua divisão sucessivamente pelos números primos, em ordem crescente. Lembramos que um número primo é aquele que só pode ser dividido, com divisão exata, por ele mesmo ou pela unidade. Os números primos são:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37,

Exemplo: Fatorar 120

$$120 \div 2 = 60$$

$$60 \div 2 = 30$$

$$30 \div 2 = 15 \text{ (agora não pode mais ser dividido por 2, passamos para o 3)}$$

$$15 \div 3 = 5 \text{ (agora não pode mais ser dividido por 3, passamos para o 5)}$$

$$5 \div 5 = 1$$

$$\text{Então } 120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

Para evitar erros, devemos armar as divisões no dispositivo abaixo. Vejamos o exemplo da fatoração do número 720.

720	2
360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	$= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$

MMC

Para fazer a adição ou a subtração de frações, é preciso que possuam o mesmo denominador. Por exemplo, não podemos adicionar diretamente $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, porque os denominadores são diferentes. Mas podemos representar ambas as frações com o denominador 6, ficando com:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} \text{ e } \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

Podemos então escrever:

$$\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$$

Vemos então que antes de adicionar frações, precisamos reduzi-las ao mesmo denominador, multiplicando os termos de cada uma delas por um número tal que os denominadores fiquem iguais. No exemplo acima, multiplicamos os dois termos (numerador e denominador) de $\frac{1}{2}$

por 3, ficando com $\frac{3}{6}$, e multiplicamos numerador e denominador de $\frac{1}{3}$ por 2, ficando com $\frac{2}{6}$.

Este denominador igual nada mais é que o MMC (mínimo múltiplo comum) entre os denominadores. Para encontrar o MMC entre dois ou mais números, usamos o dispositivo indicado abaixo. Mostraremos o exemplo do cálculo do MMC entre 24, 45 e 96. Fazemos sucessivamente a divisão desses três números pelos fatores primos (2, 3, 5, 7, 11, etc.). Enquanto pelo menos um dos números puder ser dividido, prosseguimos dividindo. Se um número não puder ser dividido, devemos repeti-lo.

24	–	45	–	96	2	Inicialmente dividimos por 2. O 45 é repetido
12	–	45	–	48	2	Mais uma vez podemos dividir por 2
6	–	45	–	24	2	Pela terceira vez dividimos por 2
3	–	45	–	12	2	O 3 e o 45 não podem, mas o 12 ainda pode ser dividido por 2
3	–	45	–	6	2	O 6 ainda pode ser dividido por 2.
3	–	45	–	3	3	Agora começaremos a dividir por 3
1	–	15	–	1	3	O 15 ainda pode ser dividido por 3
1	–	5	–	1	5	Agora dividimos todos por 5.
1	–	1	–	1		MMC = $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 = 1440$

Comparação de frações

Além da adição e da subtração, existe uma outra operação que requer a redução de frações ao mesmo denominador, que é a comparação de frações. Uma vez que todas tenham denominadores iguais, podemos então decidir qual é a maior e qual é a menor, comparando simplesmente seus numeradores. Vejamos um exemplo:

Exemplo:

Colocar em ordem crescente as seguintes frações:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{5} \text{ e } \frac{4}{7}$$

A primeira coisa a fazer é encontrar o MMC entre seus denominadores:

$$\text{MMC}(2, 5, 7) = 70$$

Para que as três frações fiquem com denominador 70, devemos multiplicar ambos os termos da primeira fração por 35, ambos os termos da segunda por 15, e ambos os termos da terceira por 10.

$$\frac{1 \times 35}{2 \times 35}, \frac{2 \times 15}{5 \times 15} \text{ e } \frac{4 \times 10}{7 \times 10}$$

Ficamos então com

$$\frac{35}{70}, \frac{28}{70} \text{ e } \frac{40}{70}$$

Vemos então que a terceira fração ($\frac{40}{70} = \frac{4}{7}$) é a maior das três. A segunda maior é a primeira ($\frac{35}{70} = \frac{1}{2}$), e a menor de todas é a segunda fração ($\frac{28}{70} = \frac{2}{5}$).

Exercícios de revisão sobre frações

E1) Fatore os seguintes números:

- | | | | |
|--------|---------|--------|--------|
| a) 720 | f) 320 | k) 84 | p) 384 |
| b) 150 | g) 512 | l) 120 | q) 625 |
| c) 96 | h) 630 | m) 160 | r) 900 |
| d) 105 | i) 1024 | n) 180 | s) 121 |
| e) 144 | j) 420 | o) 240 | t) 288 |

E2) Calcule o MMC entre:

- | | | | |
|--------------|----------------------|-----------------------|----------------|
| a) 18 e 30 | f) 200 e 320 | k) 105 e 120 | p) 10, 15 e 45 |
| b) 36 e 48 | g) 24, 36 e 60 | l) 45, 72 e 150 | q) 20, 24 e 30 |
| c) 45 e 72 | h) 35, 42 e 48 | m) 25, 35, 45 e 55 | r) 6 e 32 |
| d) 120 e 144 | i) 1, 2, 3, 4, 5 e 6 | n) 1, 27, 12, 45 e 36 | s) 30 e 10 |
| e) 150 e 180 | j) 10, 11, 12 e 15 | o) 36, 54 e 12 | t) 40 e 20 |

E3) Se A é um número natural, calcule o MMC entre A e 12.A

E4) Calcule o MMC entre $2^3 \cdot 6^2 \cdot 10^2$ e $2^2 \cdot 9^2$. Indique o resultado na forma fatorada.

E5) Encontre um múltiplo de 36 e 24, compreendido entre 100 e 200.

E6) Encontre uma fração equivalente a $\frac{2}{5}$ cujo numerador seja 32

E7) Encontre uma fração equivalente a $\frac{3}{7}$ cujo denominador seja 56

E8) Encontre uma fração equivalente a $\frac{3}{4}$ cuja soma dos termos seja 35

E9) Encontre uma fração equivalente a $\frac{5}{8}$ onde o denominador seja 21 unidades maior que o denominador.

E10) Em uma estrada de 180 km, um motorista viajou $\frac{1}{3}$ do total e parou para almoçar, depois percorreu $\frac{1}{2}$ total e parou em um posto de gasolina. Qual fração da estrada representa o trecho restante?

E11) Transforme as seguintes frações impróprias em número misto:

- | | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| a) $\frac{7}{3}$ | f) $\frac{18}{7}$ | k) $\frac{9}{4}$ | p) $\frac{20}{3}$ |
| b) $\frac{18}{5}$ | g) $\frac{39}{35}$ | l) $\frac{21}{10}$ | q) $\frac{48}{5}$ |
| c) $\frac{72}{25}$ | h) $\frac{17}{3}$ | m) $\frac{24}{5}$ | r) $\frac{100}{7}$ |
| d) $\frac{14}{3}$ | i) $\frac{25}{3}$ | n) $\frac{32}{14}$ | s) $\frac{9}{2}$ |
| e) $\frac{23}{5}$ | j) $\frac{11}{5}$ | o) $\frac{17}{13}$ | t) $\frac{25}{7}$ |

E12) Transforme os seguintes números mistos em frações impróprias:

- | | | | |
|---------------------|--------------------|---------------------|---------------------|
| a) $3 \frac{1}{2}$ | f) $1 \frac{3}{5}$ | k) $1 \frac{1}{3}$ | p) $4 \frac{1}{2}$ |
| b) $5 \frac{1}{4}$ | g) $2 \frac{1}{3}$ | l) $2 \frac{3}{7}$ | q) $2 \frac{2}{11}$ |
| c) $7 \frac{3}{5}$ | h) $1 \frac{4}{7}$ | m) $2 \frac{5}{9}$ | r) $1 \frac{1}{5}$ |
| d) $11 \frac{1}{3}$ | i) $2 \frac{3}{8}$ | n) $1 \frac{3}{10}$ | s) $5 \frac{1}{7}$ |
| e) $2 \frac{3}{7}$ | j) $2 \frac{1}{9}$ | o) $3 \frac{1}{3}$ | t) $10 \frac{3}{4}$ |

E13) Um ônibus enguiçou depois de percorrer $\frac{2}{5}$ do seu trajeto. Ficaram faltando 12 km para chegar ao ponto final. Qual é a distância total do trajeto?

E14) Encontre uma fração equivalente a $\frac{3}{8}$ cuja soma dos termos seja 55.

E15) Depois de percorrer $\frac{1}{3}$ do caminho, um carro parou para abastecer. A seguir parou depois de percorrer a metade do caminho restante, quando faltavam apenas 15 km para o final do trajeto. Qual é a distância total do trajeto?

E16) Gastei $\frac{1}{3}$ da minha mesada. Do valor que sobrou, guardei $\frac{2}{5}$ e gastei o restante para comprar um jogo de computador que custou R\$ 48,00. Qual é o valor da minha mesada?

E17) Qual é a maior fração própria irredutível na qual o denominador é 18?

E18) Coloque as seguintes frações em ordem crescente:

$\frac{1}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{17}{12}$

E19) Simplifique as frações:

a) $\frac{480}{72}$

f) $\frac{63}{777}$

k) $\frac{144}{480}$

p) $\frac{42}{105}$

b) $\frac{156}{240}$

g) $\frac{85}{68}$

l) $\frac{210}{360}$

q) $\frac{28}{70}$

c) $\frac{85}{221}$

h) $\frac{60}{450}$

m) $\frac{74}{111}$

r) $\frac{45}{150}$

d) $\frac{91}{130}$

i) $\frac{84}{63}$

n) $\frac{20}{75}$

s) $\frac{18}{48}$

e) $\frac{420}{960}$

j) $\frac{225}{50}$

o) $\frac{96}{240}$

t) $\frac{26}{65}$

E20) Encontre três frações equivalentes a $\frac{3}{8}$ nas quais os numeradores são os menores possíveis.

E21) Qual é a maior fração própria irredutível na qual o denominador é 15?

E22) Qual é a fração equivalente a $\frac{3}{16}$ de menor denominador possível e que seja múltiplo de 12?

E23) Reduza as seguintes frações ao mesmo denominador, e que este seja o menor possível: $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{72}{144}$

E24) José acertou $\frac{5}{8}$ de uma prova de 16 questões, João acertou $\frac{4}{5}$ de uma outra prova, com 10 questões. Sabendo que em cada prova, todas as questões tinham o mesmo valor, quem acertou mais questões? Quem tirou a maior nota?

E25) Em uma sala, $\frac{2}{3}$ dos estudantes são meninos. Certo dia, metade das meninas faltou, tendo comparecido apenas 8. Qual é o número total de estudantes?

E26) Qual é a maior fração menor que $\frac{2}{5}$ cujo denominador é 8?

E27) Em um pequeno sítio, a metade da área cultivável foi plantada com café, $\frac{1}{4}$ foi plantado com milho e os 100 hectares restantes da área cultivável foram usados para pasto. Sabendo que a área cultivável é $\frac{4}{5}$ da área total, qual é a extensão total do sítio?

E28) João andou $\frac{8}{11}$ de um percurso, Pedro andou $\frac{7}{10}$ do mesmo. Quem percorreu a distância maior?

E29) Em uma escola, $\frac{4}{11}$ dos alunos estão no primeiro ano, $\frac{5}{13}$ no segundo ano e o restante no terceiro ano. Em qual dos três anos há mais alunos?

E30) Das 25 questões de uma prova, Pedro acertou 18, ficando com nota 18 sobre 25. Qual é a sua nota em uma escala de 1 a 10?

E31) Dois carros partem em sentidos opostos, com a mesma velocidade, em uma estrada de 30 km, sendo um do km 0 em direção ao km 30, e o outro saindo do km 30 em direção ao km 0. Em qual quilômetro da estrada os dois se encontrarão?

E32) Como ficaria o problema anterior se o carro que parte do km 0 tiver o dobro da velocidade do carro que parte do km 30?

E33) E se o carro que parte do km 0 for 4 vezes mais rápido que o outro?

E34) Calcule as porcentagens:

- | | | | |
|--------------|----------------|--------------|----------------|
| a) 30% de 20 | f) 125% de 20 | k) 40% de 45 | p) 5% de 80 |
| b) 25% de 60 | g) 12,5% de 40 | l) 25% de 36 | q) 100% de 237 |
| c) 15% de 40 | h) 300% de 80 | m) 75% de 80 | r) 19% de 200 |
| d) 10% de 70 | i) 80% de 14 | n) 30% de 40 | s) 15% de 60 |
| e) 35% de 80 | j) 75% de 20 | o) 90% de 40 | t) 12% de 100 |

E35) Qual das afirmativas abaixo é falsa?

- (A) Frações equivalentes representam o mesmo número racional.
 (B) Todo número misto é igual a uma fração imprópria.
 (C) Uma fração que não é decimal é chamada *fração ordinária*.
 (D) O numerador de uma fração nunca pode ser 0.
 (E) Numa fração irredutível, o numerador e o denominador são primos entre si.

E36) Qual das afirmativas abaixo é falsa?

- (A) A fração cujo denominador é uma potência de 10 é chamada fração decimal.
 (B) Fração própria é aquela menor que a unidade
 (C) O denominador de uma fração nunca pode ser 0.
 (D) A divisão frações é uma operação distributiva em relação à adição
 (E) Nas frações impróprias, o numerador é menor ou igual ao denominador

E37) Escreva as seguintes frações decimais na forma de números decimais:

- | | | | |
|-------------|-----------|-------------|--------------|
| a) 27/1000 | f) 1/1000 | k) 115/10 | p) 13/1000 |
| b) 456/10 | g) 500/10 | l) 217/10 | q) 10/100 |
| c) 12/10000 | h) 27/10 | m) 1178/100 | r) 32/100 |
| d) 5/100 | i) 43/10 | n) 36/100 | s) 21/1000 |
| e) 156/100 | j) 77/100 | o) 27/1000 | t) 8192/1000 |

E38) Escreva as seguintes porcentagens na forma de fração decimal:

- | | | | |
|---------|----------|---------|--------|
| a) 20% | f) 1,25% | k) 10% | p) 40% |
| b) 5% | g) 162% | l) 1,5% | q) 60% |
| c) 1% | h) 200% | m) 4% | r) 90% |
| d) 1,3% | i) 18% | n) 25% | s) 75% |
| e) 0,5% | j) 12% | o) 32% | t) 35% |

E39) Escreva as frações decimais correspondentes aos seguintes números decimais:

- | | | | |
|---------|-------------|----------|---------|
| a) 0,3 | f) 100,1 | k) 1,3 | p) 1,8 |
| b) 1,2 | g) 0,0002 | l) 21,12 | q) 0,7 |
| c) 0,01 | h) 0,000001 | m) 0,001 | r) 0,99 |
| d) 1,75 | i) 0,25 | n) 0,005 | s) 10,5 |
| e) 3,24 | j) 2,25 | o) 12,5 | t) 8,3 |

E40) Converta as seguintes frações ordinárias em números decimais:

- | | | | |
|--------|---------|----------|--------|
| a) 1/4 | f) 15/4 | k) 6/5 | p) 7/2 |
| b) 5/4 | g) 3/25 | l) 12/20 | q) 3/2 |
| c) 7/5 | h) 3/20 | m) 17/2 | r) 1/8 |

d) $2\frac{1}{5}$
e) $\frac{7}{8}$

i) $\frac{3}{8}$
j) $\frac{3}{4}$

n) $\frac{5}{8}$
o) $\frac{9}{12}$

s) $\frac{9}{5}$
t) $\frac{4}{5}$

E41) Converta os seguintes números decimais em frações ordinárias irredutíveis

a) 1,25
b) 0,35
c) 0,75
d) 0,625
e) 0,125

f) 3,4
g) 7,2
h) 4,25
i) 5,2
j) 1,5

k) 1,6
l) 1,75
m) 2,2
n) 1,1
o) 2,5

p) 0,75
q) 0,6
r) 0,4
s) 0,2
t) 0,025

E42) Transforme as seguintes frações em dízimas periódicas

a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{2}{9}$
c) $\frac{4}{6}$
d) $\frac{3}{7}$
e) $\frac{4}{3}$

f) $\frac{8}{11}$
g) $1\frac{2}{9}$
h) $3\frac{1}{3}$
i) $5\frac{3}{7}$
j) $\frac{19}{15}$

k) $\frac{5}{6}$
l) $\frac{1}{7}$
m) $\frac{7}{3}$
n) $\frac{16}{3}$
o) $\frac{5}{9}$

p) $\frac{7}{18}$
q) $\frac{5}{3}$
r) $\frac{21}{11}$
s) $\frac{7}{9}$
t) $\frac{10}{13}$

E43) Encontre a fração geratriz das seguintes dízimas periódicas:

a) 0,323232...
b) 1,777...
c) 3,1818...
d) 0,555...
e) 0,999...

f) 2,1333...
g) 0,1333...
h) 2,4141...
i) 2,666...
j) 8,333...

k) 16,666...
l) 5,111...
m) 0,444...
n) 0,0666...
o) 0,13232...

p) 0,058333...
q) 0,131313...
r) 0,7432432432...
s) 0,00666...
t) 5,4747...

Lidando com sinais

Operações com números racionais envolvendo frações são praticamente idênticas às operações com frações feitas em séries anteriores do ensino fundamental. O único detalhe que causa um pouco de confusão para quem aprende números racionais pela primeira vez é o uso dos sinais. Se tomarmos um certo numerador e um certo denominador (tomemos como exemplo, $\frac{2}{15}$) e levarmos em conta todas as possibilidades de sinais, diversos números racionais podem ser formados (veremos que na verdade só existem dois valores, $\frac{2}{15}$ e $-\frac{2}{15}$):

$$+\frac{+2}{+15}, +\frac{+2}{-15}, +\frac{-2}{+15}, +\frac{-2}{-15}, -\frac{+2}{+15}, -\frac{+2}{-15}, -\frac{-2}{+15} \text{ e } -\frac{-2}{-15}$$

Sabemos que o sinal antes de um número positivo é opcional. Também é opcional colocar + antes de um número racional. Então podemos eliminar sinais positivos desnecessários das frações acima. Ficamos então com as possibilidades:

$$\frac{2}{15}, \frac{2}{-15}, \frac{-2}{15}, \frac{-2}{-15}, -\frac{2}{15}, -\frac{2}{-15}, -\frac{-2}{15} \text{ e } -\frac{-2}{-15}$$

Levando em conta apenas o sinal do numerador e do denominador, lembramos que a divisão entre dois números de mesmo sinal dá resultado positivo, e de sinais diferentes dá resultado negativo. Então recalculando as oito frações acima, ficamos com:

a) $\frac{2}{15} = \frac{2}{15}$ (nada a recalcular)

b) $\frac{2}{-15} = -\frac{2}{15}$

$$c) \frac{-2}{15} = -\frac{2}{15}$$

$$d) \frac{-2}{-15} = \frac{2}{15}$$

$$e) -\frac{2}{15} = -\frac{2}{15} \text{ (nada a recalcular)}$$

$$f) -\frac{2}{-15} = \frac{2}{15}$$

$$g) -\frac{-2}{15} = \frac{2}{15}$$

$$h) -\frac{-2}{-15} = -\frac{2}{15}$$

Dos exemplos (d) e (h) acima, vemos que dois sinais negativos, um no numerador e um no denominador, podem ser simplificados e eliminados. No caso geral, sendo a e b números inteiros quaisquer:

$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

Outro exemplo:

$$\frac{-4}{-7} = \frac{4}{7}$$

Dos exemplos (b) e (c) acima, vemos que um sinal negativo do numerador ou do denominador podem ser transferidos para a fração. No caso geral, sendo a e b números inteiros quaisquer:

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}, \text{ e } \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

Outros exemplos:

$$\frac{-4}{7} = -\frac{4}{7}$$

$$\frac{5}{-8} = -\frac{5}{8}$$

Essas não são na verdade novas regras de sinais. São consequências de regras já apresentadas no capítulo 1. Qualquer fração, com um sinal positivo ou negativo numerador, um sinal positivo ou negativo no denominador, e um sinal positivo ou negativo na própria fração, pode ser considerada como uma sequência com uma multiplicação e uma divisão. Por exemplo:

$$-\frac{4}{-7} = (-1) \times (+4) \div (-7)$$

A regra de sinal é simples: se for um número par de negativos, o resultado será positivo, e se for um número ímpar de negativos, o resultado será negativo. O número (-1) está representando o sinal negativo antes da fração. Se a fração não tivesse sinal, representaríamos isso por um fator $(+1)$. Levando em conta esses três sinais (o da fração, o do numerador e o do denominador), podemos considerar que dois sinais negativos sempre se cancelam, pois quando multiplicamos ou dividimos (-1) por (-1) , o resultado será $+1$. Por isso:

$$-\frac{4}{-7} = \frac{4}{7}$$

Ao formarmos qualquer fração usando números negativos, o resultado será sempre igual a uma fração com numerador e denominador positivos, e com um sinal na frente da fração que poderá ser positivo (opcional) ou negativo. Por isso não é usual escrever frações como

$$\frac{4}{-7}, \frac{-5}{-3}, \frac{-2}{3}, -\frac{3}{8}, \text{ etc.}$$

Apesar de não ser errado usar as formas acima, é de praxe representar esses números racionais usando numeradores e denominadores positivos, adicionando um sinal negativo na frente da fração, quando for o caso:

$$-\frac{4}{7}, \frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{8}, \text{ etc.}$$

Exercícios

E44) Reescreva as frações abaixo, usando numeradores e denominadores positivos, e quando for o caso, um sinal negativo antes da fração:

a) $-\frac{5}{-3} = \frac{5}{3}$

f) $\frac{4}{-5} =$

k) $-\frac{2}{9} =$

p) $-\frac{-2}{-5} =$

b) $\frac{-4}{9} = -\frac{4}{9}$

g) $-\frac{7}{-11} =$

l) $\frac{2}{-7} =$

q) $-\frac{4}{-13} =$

c) $\frac{-3}{-2} =$

h) $\frac{-5}{12} =$

m) $-\frac{2}{-3} =$

r) $\frac{-7}{10} =$

d) $-\frac{7}{-8} =$

i) $\frac{-9}{-4} =$

n) $\frac{-7}{13} =$

s) $\frac{-23}{-17} =$

e) $-\frac{-6}{5} =$

j) $-\frac{-1}{-6} =$

o) $\frac{-3}{-11} =$

t) $-\frac{-3}{100} =$

Simplificação

Um dos objetivos deste capítulo é que você aprenda a resolver expressões complexas, como as do capítulo anterior, porém usando números racionais. Por isso vamos aos poucos apresentar expressões cada vez mais complexas. Começaremos com um tipo de expressão bastante básico, formada apenas por uma fração, cujo numerador é uma expressão e cujo denominador é outra expressão. Por exemplo:

$$\frac{[2 \times 4 - 2^2] \div [2 \times (3 - 4)]}{(-2) \times (-3) - \{(-2)^3 + [2 \times (-1)^9 + 2 \cdot (1 \times 3 - 2^2 \times (-5))]\}}$$

Observe que tanto o numerador como o denominador são expressões com números inteiros, como as que estudamos no capítulo passado. Vamos resolver cada um deles separadamente

(nos cálculos abaixo usamos “.” para multiplicação, ao invés de “x”, para lembrar que esta notação é muito comum):

Numerador:

$$[2.4 - 2^2] \div [2.(3-4)] = [8-4] \div [2.(-1)] = 4 \div (-2) = -2$$

Denominador:

$$\begin{aligned} (-2).(-3) - \{ (-2)^3 + [2.(-1)^9 + 2.(1.3 - 2^2.(-5))] \} &= 6 - \{ -8 + [2.(-1) + 2.(3 - 4.(-5))] \} \\ &= 6 - \{ -8 + [-2 + 2.(3+20)] \} = 6 - \{ -8 + [-2 + 46] \} = 6 - \{ -8 + -2 + 46 \} = 6 - \{ 36 \} = -30 \end{aligned}$$

Sendo assim, a fração será igual a:

$$\frac{-2}{-30} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

Portanto resolvemos o numerador e o denominador, depois tratamos o sinal da fração, e finalmente simplificamos. Quando encontramos em uma expressão, frações cujo numerador ou denominador seja uma expressão complexa, devemos antes resolver essas expressões, e se possível simplificá-las, ficando com frações mais fáceis de operar.

Exercícios

E45) Resolva as expressões do numerador e do denominador, a seguir simplifique a fração resultante.

a) $\frac{-5+2}{-3+5} =$	f) $-\frac{\sqrt{(-4)^2} + \sqrt[3]{(-4)^3}}{-(-99)^0 - (-3) \times [(-1)^3 - (-4)^2]} =$	k) $\frac{-(-2)^{22}}{5^2 - 5 \times (-3)^2} =$	p) $-\frac{\sqrt{(-2)^2}}{\sqrt{(-3)^2}} =$
b) $\frac{7-4}{7-2} =$	g) $\frac{\sqrt{(-2)^2} + (-2)^3 \times (-3)^2}{10 \times (1+2+3+4)} =$	l) $\frac{(-4) \times (-5) - (-5)^2}{-(-7)^0 - (-7)^2} =$	q) $\frac{2}{1+(-2)^3} =$
c) $\frac{-3+(-2)^3}{(-2)^2 - (-2)^0} =$	h) $-\frac{-\sqrt[3]{(-2)^3}}{\sqrt{(-25)^0} - \sqrt{(-2)^4}} =$	m) $-\frac{2+(-2)^5}{(-5)^2 \times (-2)^2} =$	r) $\frac{1+(-2)^3}{(-5)^2 - 6^2} =$
d) $-\frac{1-2^3}{1-3^2} =$	i) $\frac{(-2)^0 + (-2)^3}{(-3)^3 + (-3)^2 + (-3)^1 + (-3)^0} =$	n) $\frac{10^0 - 10^1}{5.(-4) - 2.(-8)} =$	s) $\frac{(-2)^2}{(-2)^2 - (-3)^2} =$
e) $-\frac{2^1 - 2^3}{2^0 + 2^2} =$	j) $-\frac{-(-2)(-5) + (-18) \div (-2)}{(-6) \times (-7) - (-6) \times (-2)^3} =$	o) $\frac{2.(-15) + (-5)^2}{\sqrt{64} - \sqrt{(-4)^2}} =$	t) $\frac{(-3)^3 \div (-3)^2}{10^1 - 10^2} =$

Adição e subtração de números racionais

Números racionais podem aparecer na forma de fração, na forma de números decimais exatos, na forma de dízimas periódicas, como números inteiros, e como positivos ou negativos. Em relação aos sinais, lidamos da mesma forma como fazemos para números inteiros:

1) Para adicionar dois números racionais de mesmo sinal, somamos seus módulos e repetimos o sinal

Exemplo:

$$-2,4 - 3,2 = -5,6$$

2) Para adicionar dois números racionais de sinais contrários, subtraímos seus módulos e damos ao resultado, o sinal da parcela de maior módulo.

Exemplo:

$$-1,2 + 1,6 = +0,4$$

3) Em uma sequência de adições, podemos agrupar todos os positivos, e agrupar todos os negativos, e fazer a soma algébrica no final.

Exemplo:

$$-1,2 + 1,6 - 2,4 - 3,2 + 4,5 = (-1,2 - 2,4 - 3,2) + (1,6 + 4,5) = -6,8 + 6,1 = -0,7$$

A única dificuldade é que podem aparecer na mesma expressão números decimais com diversas representações diferentes: frações, números decimais, dízimas. Quando isso ocorre, devemos converter todos eles para a mesma forma, por exemplo, fração. Em alguns casos podemos usar todos na forma de números decimais, evitando as frações. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo:

$$0,333... - 0,7 + \frac{2}{5} - \frac{1}{6}$$

Nesse caso somos obrigados a trabalhar com frações, já que 0,333... é dízima periódica, que não pode ser representada como um número decimal exato. A fração $\frac{1}{6}$ também resulta em uma dízima. Devemos então converter todos para a forma de fração.

$$0,333... = \frac{1}{3}$$

$$0,7 = \frac{7}{10}$$

Ficamos então com uma adição de três números racionais na forma de fração. É recomendável que nessa etapa façamos a simplificação das frações, quando for possível. Neste exemplo nenhuma das quatro frações envolvidas pode ser simplificada. Ficamos com:

$$\frac{1}{3} - \frac{7}{10} + \frac{2}{5} - \frac{1}{6}$$

Para adicionar algebricamente as frações, devemos reduzir todas ao mesmo denominador. O MMC entre 3, 10, 5 e 6 é 30.

$$\text{MMC}(3, 10, 5, 6) = 30$$

Sendo assim, multiplicaremos os dois termos da primeira fração por 10, para que fique com o denominador 30. Na segunda multiplicaremos por 3, na terceira por 6 e na quarta por 6. Ficamos então com:

$$\frac{1 \times 10}{30} - \frac{7 \times 3}{30} + \frac{2 \times 6}{30} - \frac{1 \times 5}{30} =$$

$$\frac{10}{30} - \frac{21}{30} + \frac{12}{30} - \frac{5}{30}$$

Agora que as frações têm o mesmo denominador, podemos somar algebricamente seus numeradores. É preciso entretanto prestar atenção nos sinais. Os números 21 e 5 aparecerão com sinais negativos. Ficamos com:

$$\frac{10-21+12-5}{30}$$

Finalmente podemos calcular a soma algébrica dos números que ficaram no numerador da fração. $10 - 21 + 12 - 5 = -4$, então o resultado é:

$$\frac{-4}{30}, \text{ o mesmo que } -\frac{4}{30}$$

Podemos ainda simplificar o numerador e o denominador por 2, e o resultado será:

$$-\frac{2}{15}$$

Tudo o que aprendemos sobre expressões numéricas com números inteiros, pode ser aplicado a números racionais. A sequência de adições e subtrações é o tipo de expressão mais simples. Vejamos mais um exemplo:

Exemplo:

$$\frac{5}{12} + \frac{2}{9} - \frac{7}{4} + \frac{5}{6} - \frac{1}{2} - 2$$

Temos uma sequência de adições e subtrações de frações, e ainda uma subtração de um número inteiro (2). Todas as frações são irredutíveis, e teremos que converter todas elas para o mesmo denominador. Antes porém será preciso converter o número 2 para fração, ficará $2/1$.

$$\frac{5}{12} + \frac{2}{9} - \frac{7}{4} + \frac{5}{6} - \frac{1}{2} - \frac{2}{1}$$

Agora calculamos o MMC entre os denominadores:

$$\text{MMC}(12, 9, 4, 6, 2, 1) = 36$$

Devemos então reduzir todas as frações ao denominador 36. Para isso multiplicaremos os termos das frações, respectivamente, por 3, 4, 9, 6, 18 e 36.

$$\frac{5 \times 3}{36} + \frac{2 \times 4}{36} - \frac{7 \times 9}{36} + \frac{5 \times 6}{36} - \frac{1 \times 18}{36} - \frac{2 \times 36}{36} =$$

$$\frac{15 + 8 - 63 + 30 - 18 - 72}{36} =$$

Agora podemos adicionar algebricamente todos os positivos do numerador, e fazer o mesmo com todos os negativos:

$$15 + 8 + 30 = 53$$

$$-63 - 18 - 72 = -153$$

Ficamos então com:

$$\frac{53-153}{36} = \frac{-100}{36}$$

Podemos simplificar o numerador e o denominador por 4. O resultado será:

$$\frac{-100}{36} = \frac{-25}{9} = -\frac{25}{9}$$

Lembramos que é de praxe deixar positivos os termos da fração, e quando for o caso, manter o sinal negativo fora da fração.

A maior dificuldade que os alunos têm nesse ponto não é lidar com os sinais negativos, e sim, a matéria esquecida sobre operações com frações. Por isso vamos primeiro fazer alguns exercícios com operações que envolvam apenas adição e subtração de frações. Depois passaremos a outros exercícios que lidarão com números racionais negativos.

Comparação de números racionais

Já vimos que para comparar frações é preciso reduzi-las ao mesmo denominador. O mesmo ocorre quando lidamos com números racionais, quando podemos encontrar frações positivas ou negativas:

- a) Qualquer número positivo é maior que qualquer número negativo
- b) O número 0 é menor que qualquer número positivo, e maior que qualquer número negativo.
- c) Entre números positivos, o maior é aquele que possui maior módulo
- d) Entre números negativos, o maior é aquele que possui menor módulo.

Para comparar números inteiros e frações, devemos transformar os números inteiros em frações aparentes (denominador 1) e reduzir todas ao mesmo denominador. Se tivermos que comparar frações com números decimais, devemos converter os números decimais para frações decimais, e reduzir todas ao mesmo denominador.

Exemplo:

Colocar em ordem crescente os números $13/3$, $-4/5$, -3 , $-2,5$, 4 , $10/3$, $17/3$, $10,666...$

Como existem frações entre os números indicados, temos que converter todos para frações, e reduzir todas elas ao mesmo denominador.

$$-3 = -3/1$$

$$-2,5 = -25/10 = -5/2$$

$$4 = 4/1$$

$$10,666... = 10 + 0,666... = 10 + 2/3 = 32/3$$

Ficamos então com:

$$\frac{13}{3}, -\frac{4}{5}, -\frac{3}{1}, -\frac{5}{2}, \frac{4}{1}, \frac{10}{3}, \frac{17}{3}, \frac{32}{3}$$

A próxima etapa é reduzir todos ao mesmo denominador. O MMC entre 3, 5 e 2 é 30. Devemos então reduzir todas as frações ao denominador 30:

$$\frac{13 \times 10}{3 \times 10}, -\frac{4 \times 6}{5 \times 6}, -\frac{3 \times 30}{1 \times 30}, -\frac{5 \times 15}{2 \times 15}, \frac{4 \times 30}{1 \times 30}, \frac{10 \times 10}{3 \times 10}, \frac{17 \times 10}{3 \times 10}, \frac{32 \times 10}{3 \times 10}$$

Nesse caso é conveniente deixar os sinais negativos no numerador.

$$\frac{130}{30}, \frac{-24}{30}, \frac{-90}{30}, \frac{-75}{30}, \frac{120}{30}, \frac{100}{30}, \frac{170}{30}, \frac{320}{30}$$

Finalmente podemos colocar as frações em ordem crescente, primeiro as negativas, depois as positivas. Entre as negativas, as menores são as que têm menor módulo. Entre as positivas, as maiores são as que têm maior módulo.

$$\frac{-90}{30}, \frac{-75}{30}, \frac{-24}{30}, \frac{100}{30}, \frac{120}{30}, \frac{130}{30}, \frac{170}{30}, \frac{320}{30}$$

Normalmente é preciso dar a resposta usando os números originais do enunciado. Ficamos então com:

$$-3, -2,5, -4/5, 10/3, 4, 13/3, 17/3, 10,666...$$

É de praxe usar os sinais “<” (menor) e “>” (maior) para separar números dispostos em ordem crescente ou decrescente. Ficamos então com:

$$-3 < -2,5 < -4/5 < 10/3 < 4 < 13/3 < 17/3 < 10,666...$$

Exercícios

E46) Efetue as seguintes operações com frações e números decimais, dê a resposta em forma de fração

- | | | | |
|----------------------|-----------------------------|---|--|
| a) $3/2 + 4/5 - 1/7$ | f) $3/10 + 2/5 + 1/2 - 1/3$ | k) $3 \frac{2}{3} + 4 \frac{1}{5} - 1/10$ | p) $1 \frac{5}{6} + 3 \frac{5}{12} + 2 \frac{5}{18} + 1/3$ |
| b) $1/4 + 3/7 + 2$ | g) $3/11 + 8/7$ | l) $5 \frac{1}{2} + 1 \frac{1}{3} - 0,4$ | q) $1 - 1/2 + 0,25 - 1/8 + 1/16$ |
| c) $16/3 - 16/4$ | h) $1/2 + 0,25 + 1/8$ | m) $2 \frac{1}{7} + 3 \frac{1}{5}$ | r) $1 + 1/2 + 0,2 + 3/7 - 0,7$ |
| d) $1/9 - 0,1$ | i) $1/2 - 1/4 - 0,125$ | n) $2,666... - 0,6$ | s) $1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6$ |
| e) $1,6 - 0,333...$ | j) $4 - 3/10 + 0,2$ | o) $0,2 + 0,3 - 1/5 - 1/6$ | t) $1 + 1/2 + 3 + 1/5 + 5 + 0,2$ |

E47) Encontre o menor número inteiro que seja maior que os números racionais dados

- | | | | |
|--------------------|--------------|----------------|----------------------|
| a) 10,25 | f) -13,23 | k) $52/3$ | p) 2,718281828 |
| b) 4,38 | g) 15,777... | l) $-10/3$ | q) -4,3817454545... |
| c) $5 \frac{2}{3}$ | h) -1,333... | m) $37/21$ | r) $5 \frac{13}{73}$ |
| d) 0,333... | i) 0,93 | n) -2,666... | s) $3 \frac{47}{40}$ |
| e) -0,7 | j) $45/7$ | o) 3,141592653 | t) $-1/13$ |

E48) Efetue as seguintes operações

- | | | | |
|------------------|------------------|------------------------------------|---------------------------|
| a) $4/5 - 9/7$ | f) $-2/5 + 1/2$ | k) $3 \frac{2}{5} + 4 \frac{1}{7}$ | p) $1 \frac{5}{12} - 7/3$ |
| b) $-3/7 + 1$ | g) $3/8 - 8/7$ | l) $5 \frac{1}{3} + 1 \frac{1}{4}$ | q) $-1/2 + 1/16$ |
| c) $16/7 - 16/5$ | h) $1/3 - 5/8$ | m) $2 \frac{1}{8} - 2 \frac{1}{6}$ | r) $3/5 - 7/10$ |
| d) $2/7 - 3/10$ | i) $1/2 - 7/8$ | n) $5/7 - 7/5$ | s) $-7/5 + 5/6$ |
| e) $-2/3 + 1/2$ | j) $-3/10 - 1/5$ | o) $-1/5 - 1/6$ | t) $1/2 - 3$ |

E49) Efetue as seguintes operações

- | | | | |
|----------------------|-----------------------------|--|--|
| a) $3/2 + 4/5 - 1/6$ | f) $3/10 + 2/5 + 1/2 - 1/3$ | k) $3 \frac{2}{3} + 4 \frac{1}{5} - 0,3$ | p) $1 \frac{1}{6} - 3 \frac{5}{9} - 2 \frac{7}{18} + 0,333...$ |
| b) $1/4 + 3/8 + 3$ | g) $3/11 - 8/7 + 1$ | l) $2 \frac{1}{2} + 1,333... - 0,4$ | q) $1 - 1/2 + 3/4 - 5/8 + 7/16 $ |
| c) $5/3 - 12/5$ | h) $1/2 - 3/4 + 5/7$ | m) $2 \frac{3}{7} - 3 \frac{1}{5} + 0,3$ | r) $1 - 1/2 + 0,2 - 9/7 - 7/10$ |
| d) $2/9 - 3/10$ | i) $1/2 - 0,75 - 5/8$ | n) $1,666... - 3/5$ | s) $1/2 - 2/3 + -3/4 + 4/5 + 5/6$ |
| e) $1,8 - 1/5 - 1/2$ | j) $4 - 7/10 + 2/5$ | o) $0,2 + 0,3 - 1/5 - 1/6$ | t) $1 - 3/2 + 3 - 4/5 + 0,4$ |

E50) Efetue as seguintes operações:

- | | | | |
|-------------------------------------|---------------------------------|-----------------------|----------------------------|
| a) $0,6 + 0,666... - 1,333...$ | f) $1/2 - 2/3 + 3/5 - 5/6$ | k) $4/5 - 1/7 - 1/10$ | p) $3/5 - 1/2 + 5/6$ |
| b) $1 \frac{1}{7} - 0,333... - 1,5$ | g) $0,2 + 0,333... - 11/15$ | l) $2/3 - 1/6 + 1/2$ | q) $1/3 + 1/30 - 0,333...$ |
| c) $0,25 - 1,32 + 0,38 - 5$ | h) $4/5 + 0,6 - 0,666...$ | m) $0,333... - 0,333$ | r) $1 - 0,999...$ |
| d) $0,111... - 0,333... + 0,1$ | i) $2/3 - 1/4 - 1/5 - 5/6$ | n) $0,999... - 0,333$ | s) $2/3 - 4/5 + 3/4$ |
| e) $7/8 - 5/6 + 0,25$ | j) $1/2 - 1/3 + 1/5 + 1,333...$ | o) $1/2 + 2/3 - 3/4$ | t) $1/16 - 1/8 + 1/3$ |

E51) Use os sinais =, < ou > para comparar os números racionais

- | | | | |
|----------------------|--|-----------------------|----------------------------|
| a) $3/7$ ___ $4/7$ | f) $1 \frac{2}{5}$ ___ $4/3$ | k) -10% ___ $-1/8$ | p) $7/5$ ___ $4/3$ |
| b) $2/3$ ___ $2/5$ | g) $0,333$ ___ $0,3...$ | l) $1/3$ ___ $3/10$ | q) $-0,222...$ ___ $-3/10$ |
| c) $-1/5$ ___ 0 | h) $4 \frac{2}{35}$ ___ $5 \frac{1}{77}$ | m) $-1/3$ ___ $-0,3$ | r) -10 ___ $-9,9$ |
| d) $-10/3$ ___ -3 | i) $-2,38$ ___ $-2,37997$ | n) $7/10$ ___ $2/3$ | s) $-1/5$ ___ $-1/4$ |
| e) $-1/3$ ___ $-1/5$ | j) $1/5$ ___ 20% | o) $-8/3$ ___ $-2,5$ | t) $5/6$ ___ $0,9$ |

E52) Use os sinais =, < ou > para comparar os números racionais

- | | | | |
|------------------------|---------------------|---------------------------|-----------------------------|
| a) $4/5$ ___ $0,75$ | f) $4/5$ ___ $-2/3$ | k) $0,666$ ___ $0,666...$ | p) $-3/5$ ___ $-2/3$ |
| b) $0,666$ ___ $2/3$ | g) $7/10$ ___ 0 | l) $0,3$ ___ $3/10$ | q) $4/5$ ___ $5/6$ |
| c) $-4/7$ ___ $-5/8$ | h) $-2/3$ ___ $1/2$ | m) $0,999$ ___ 1 | r) $5/8$ ___ $5/9$ |
| d) $9/8$ ___ $8/7$ | i) -3 ___ 2 | n) $0,999...$ ___ 1 | s) $-0,222$ ___ $-0,222...$ |
| e) $-9/13$ ___ $-7/10$ | j) $-0,6$ ___ $0,1$ | o) $-0,4$ ___ $-30/7$ | t) 0 ___ $-47/147$ |

E53) Use os sinais =, < ou > para comparar os números racionais, mas sem realizar cálculos (faça de cabeça)

- | | | | |
|--------------------------------------|---|-----------------------------|-------------------------|
| a) $14,22...$ ___ $14 \frac{83}{97}$ | f) $4 \frac{7}{239}$ ___ $5 \frac{13}{777}$ | k) $-18/73$ ___ $-18/71$ | p) $1/256$ ___ $2/500$ |
| b) 0 ___ $-3,17921792...$ | g) $25,15$ ___ $100/4$ | l) 11% ___ $-12,375\%$ | q) $1,333...$ ___ $3/2$ |
| c) $-5,1212...$ ___ $-6,333...$ | h) $-2,1313...$ ___ $0,218$ | m) $0,9175$ ___ $73/72$ | r) $4/7$ ___ $4/9$ |
| d) $1,3181$ ___ $2,21289$ | i) $715/113$ ___ $700/113$ | n) $-0,999...$ ___ -1 | s) $-2/7$ ___ $-2/9$ |
| e) $0,333333$ ___ $0,333...$ | j) $23/59$ ___ $23/61$ | o) $0,377...$ ___ $0,37775$ | t) $1/5$ ___ $1/6$ |

Multiplicação e divisão de números racionais

A multiplicação e a divisão de números racionais são idênticas às multiplicações e divisões de frações. A única diferença é o tratamento de sinal. A regra é a mesma apresentada no capítulo 1: se o número de fatores negativos for par, o resultado será positivo; se o número de fatores negativos for ímpar, o resultado será negativo.

Inicialmente vamos recordar a multiplicação de frações, através de exemplos:

Exemplo:

$$\frac{4}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{4 \times 2}{5 \times 7} = \frac{8}{35}$$

Para multiplicar frações, o resultado será uma fração cujo numerador é o produto dos numeradores, e cujo denominador é o produto dos denominadores. Normalmente será desejável simplificar fatores comuns no numerador e no denominador ("corta-corta").

Exemplo:

$$\frac{8}{25} \times \frac{15}{28} = \frac{2}{5} \times \frac{3}{7}$$

Nesse exemplo podemos simplificar o 8 e o 28 por 4, ficarão 2 e 7. Podemos também simplificar o 15 e o 25 por 5, ficarão 3 e 5. Nesse tipo de cálculo, devemos procurar fatores que possam dividir simultaneamente um número que apareça no numerador e um número que apareça no denominador. Ficaremos então com:

$$\frac{2}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{6}{35}$$

A divisão de frações é tão simples quanto a multiplicação. Para dividir frações, fazemos uma multiplicação na qual a primeira fração é repetida, e segunda é invertida.

Exemplo:

$$\frac{2}{5} \div \frac{3}{7} = \frac{2}{5} \times \frac{7}{3} = \frac{14}{15}$$

Dividir por uma fração é o mesmo que multiplicar pela inversa dessa fração.

As regras de sinais são as mesmas para multiplicação e divisão de números inteiros.

Exemplos:

a) $\left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{7}{3}\right) = +\frac{14}{15}$ (o produto de dois negativos dá resultado positivo)

b) $\left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(\frac{7}{3}\right) = -\frac{14}{15}$ (o produto de um positivo por um negativo dá resultado negativo)

c) $\left(+\frac{2}{5}\right) \div \left(-\frac{4}{15}\right) = -\frac{2}{5} \times \frac{15}{4} = -\frac{1}{1} \times \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$

No exemplo acima, primeiro tratamos o sinal, que será negativo. Depois transformamos a divisão na multiplicação pelo inverso. A seguir simplificamos, e finalmente encontramos o resultado final.

d) $-4 \times \left(-\frac{5}{12}\right) = \left(-\frac{4}{1}\right) \times \left(-\frac{5}{12}\right) = +\frac{1}{1} \times \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$

No exemplo acima, multiplicamos um número inteiro (-4) por uma fração (-5/12). Para isso, transformamos o -4 na fração aparente -4/1. A seguir tratamos o sinal (produto de dois negativos será positivo) e fazemos a simplificação de 4 e 12 por 4, ficamos então com o resultado +5/3. Também é correto simplificar diretamente o 4 com o 12, sem transformar o 4 em fração. Ficariamos com:

$$-4 \times \left(-\frac{5}{12}\right) = +1 \times \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

e) $\left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(1\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{5} \times \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}$

No exemplo acima, o detalhe importante foi transformar o número misto $1 \frac{2}{3}$ em uma fração imprópria, resultando em $\frac{5}{3}$. Para essa transformação, o denominador da nova fração é igual ao denominador do número misto. Já o numerador é obtido com a soma do numerador do número misto com o produto da parte inteira pelo denominador. Genericamente falando, se \underline{a} , \underline{b} e \underline{c} são números naturais, temos:

$$a \frac{b}{c} = \frac{a.c + b}{c}$$

Quando o número misto começa com um sinal negativo, consideramos que este sinal se aplica a toda a fração:

$$-2 \frac{3}{5} = -\left(2 \frac{3}{5}\right) = -\frac{13}{5}$$

CUIDADO: Não confunda número misto com multiplicação de inteiro por fração. Veja bem a diferença entre os três números abaixo:

$$3 \times \frac{3}{5}, 3 \cdot \frac{3}{5} \text{ e } 3 \frac{3}{5}$$

Os dois primeiros são a multiplicação de 3 por $\frac{3}{5}$. O terceiro não é uma multiplicação, e sim, o número misto $3 \frac{3}{5}$, que é igual a $3 + \frac{3}{5}$. Muitas vezes a omissão de um sinal algébrico indica multiplicação, mas não no caso de números mistos.

Inverso ou recíproco

Dada uma fração $\frac{a}{b}$, chamamos a sua fração simétrica ou recíproca de $\frac{b}{a}$. No caso particular de números inteiros, o inverso ou recíproco de a é $\frac{1}{a}$. Vejamos alguns exemplos:

- O inverso de $\frac{4}{5}$ é $\frac{5}{4}$
- O inverso de $\frac{2}{3}$ é $\frac{3}{2}$
- O inverso de $\frac{3}{10}$ é $\frac{10}{3}$
- O inverso de 5 é $\frac{1}{5}$
- O inverso de 3 é $\frac{1}{3}$
- O inverso de $\frac{1}{4}$ é 4.
- O inverso de $\frac{1}{10}$ é 10.

O número 0 não tem inverso, mas números negativos possuem inversos negativos:

- O inverso de $-\frac{3}{7}$ é $-\frac{7}{3}$
- O inverso de $-\frac{4}{9}$ é $-\frac{9}{4}$
- O inverso de -4 é $-\frac{1}{4}$
- O inverso de $-\frac{1}{6}$ é -6

Não confunda *inverso* ou *recíproco* com *simétrico* ou *oposto*:

- O simétrico ou oposto de um número a é $-a$.
- O inverso ou recíproco de um número a é $\frac{1}{a}$.

Um detalhe importante é que quando multiplicamos um número racional pelo seu inverso, o resultado é sempre 1.

$$(4/5) \times (5/4) = 1$$

$$(2/3) \times (3/2) = 1$$

$$(3/10) \times (10/3) = 1$$

$$5 \times 1/5 = 1$$

$$3 \times 1/3 = 1$$

$$(1/4) \times 4 = 1$$

$$(1/10) \times 10 = 1$$

$$(-3/7) \times (-7/3) = 1$$

$$(-4/9) \times (-9/4) = 1$$

$$(-4) \times (-1/4) = 1$$

$$(-1/6) \times (-6) = 1$$

Fração de fração

Em matemática, a palavra “de” tem o sentido de multiplicação. Quando temos que calcular uma parte “de” um valor, basta escrever uma expressão com esta parte multiplicada por este valor.

Exemplos:

$$\text{A metade de } 3/5 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

$$20\% \text{ de } 1/6 = \frac{20}{100} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$$

$$\text{O triplo de } 4/5 = 3 \times \frac{4}{5} = \frac{12}{5}$$

Expressões com adição, subtração, multiplicação e divisão de racionais

Para resolver essas expressões devemos observar as regras já ensinadas até agora. Devemos resolver primeiro as multiplicações e divisões na ordem em que aparecem, e as adições e subtrações por último.

Exemplo:

$$\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{7}$$

Nessa expressão temos apenas números positivos, o que facilita um pouco. Temos uma divisão de frações somada com uma multiplicação. Multiplicações e divisões devem ser resolvidas primeiro. Só depois realizamos as adições e subtrações. Ficamos então com:

$$\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{7} = \frac{2}{21}$$

Agora podemos adicionar os dois resultados:

$$\frac{3}{2} + \frac{2}{21} = \frac{3 \times 21}{42} + \frac{2 \times 2}{42} = \frac{63 + 4}{42} = \frac{67}{42}$$

Exemplo:

$$\left(-\frac{1}{3}\right) \times \frac{4}{5} + \frac{2}{5} \div \left(-\frac{2}{7}\right)$$

Esta expressão tem uma multiplicação e uma divisão de racionais. Resolvemos cada uma separadamente, mas agora devemos prestar atenção nos sinais:

$$\left(-\frac{1}{3}\right) \times \frac{4}{5} = -\frac{4}{15}$$

$$\frac{2}{5} \div \left(-\frac{2}{7}\right) = -\frac{2}{5} \times \frac{7}{2} = -\frac{7}{5}$$

Agora devemos adicionar os dois resultados:

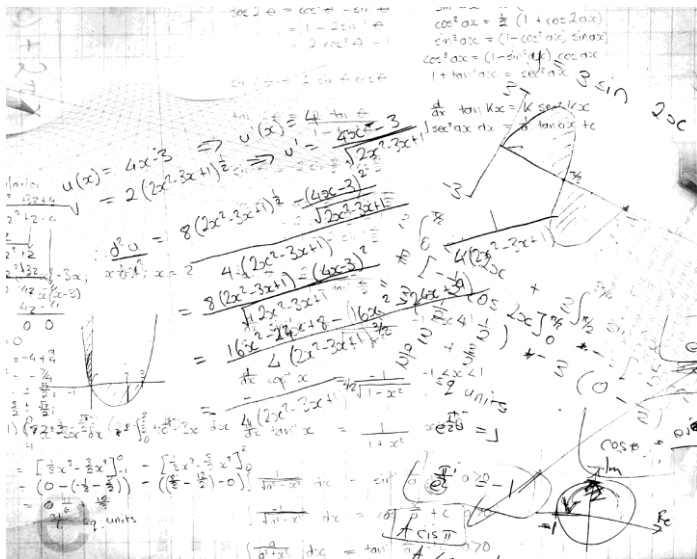
$$-\frac{4}{15} - \frac{7}{5} = -\left(\frac{4}{15} + \frac{7}{5}\right) = -\left(\frac{4}{15} + \frac{7 \times 3}{15}\right) = -\frac{4+21}{15} = -\frac{25}{15} = -\frac{5}{3}$$

Nesse tipo de expressão é preciso tomar muito cuidado para não errar os sinais.

A maior dificuldade dos alunos não é manipular os sinais, e sim, lembrar das operações com frações positivas, ensinadas nas primeiras séries do ensino fundamental. Vamos portanto fazer antes alguns exercícios com frações positivas, para depois operar com sinais.

Organize o rascunho

O desenvolvimento de cálculos, muitas vezes feito no rascunho, não pode ser uma bagunça. Muitos alunos fazem as contas, em uma sequência da esquerda para a direita, depois continuam no canto oposto do papel, depois abaixo, então passam para a parte de cima da folha, então passam a escrever de baixo para cima, e da direita para a esquerda, sempre aproveitando todos os espaços do papel. Fazendo dessa forma, corremos o risco de errar as contas. Faça as contas de forma organizada, em linhas correndo de cima para baixo, e preenchendo as linhas da esquerda para a direita, como são formadas as páginas de um livro.



A bagunça no rascunho dificulta os cálculos.

Resolver expressões complexas é uma habilidade exigida em todos os concursos que envolvem matemática. No caso do Colégio Naval, EPCAr e Colégio Militar, praticamente todas os anos essas questões são cobradas. Como já foi apresentado neste livro, o macete da palavra “PEMDAS” ajuda a lembrar a ordem das operações, nem sempre esclarece o que deve ser feito. Ao visualizar uma sequência de operações, considere a multiplicação e a divisão, juntamente com as potências, como uma forte ligação entre os números. Considere a adição e a subtração como ligações mais fracas. Por exemplo, ao visualizar a expressão

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{4}{3} \div \frac{5}{2} - \frac{5}{2} \div \frac{3}{5}$$

Procure identificar grupos com valores “unidos” pela multiplicação, divisão e potência, e considere como “separadores” a adição e a subtração. Desenhe no rascunho, antes de escrever a expressão, um diagrama simples desses grupos. Por exemplo, para a expressão acima, temos três grupos ligados pelos sinais “+” e “-”, que devem ser representados como:



O primeiro grupo é calculado como $\frac{1}{3} \times \frac{2}{5}$, o segundo como $\frac{4}{3} \div \frac{5}{2}$ e o terceiro como $\frac{5}{2} \div \frac{3}{5}$.

Aprenda a sempre olhar a expressão e identificar os grupos, antes de começar a calcular. Depois de calculados, preencha os valores nos “círculos” do diagrama. Você não é obrigado a resolver dessa forma, mas utilize algum tipo de marcação para que você não se perca no meio dos cálculos.

Nas expressões que envolvem parênteses, colchetes e chaves, o potencial para erro é grande, principalmente quando esses separadores estão aninhados (ou seja, uns dentro dos outros). Nossa sugestão para que você não se perca nos cálculos é manter esses símbolos no meio dos cálculos, mesmo depois de determinados seus valores. Por exemplo, se uma expressão está dentro de colchetes, e seu valor é calculado como $2/5$, não escreva simplesmente $2/5$, mas sim, $[2/5]$. Assim você vai lembrar de onde veio aquele valor e não irá se “perder” na expressão. Ficará também mais fácil revisar os cálculos.

Recomendamos ainda que você resolva as expressões duas vezes. Se os valores encontrados nas duas vezes forem iguais, provavelmente o cálculo está correto. Ao fazer isso, resolva a expressão pela segunda vez, usando uma ordem diferente da que você usou da primeira vez. Se resolver das duas vezes exatamente na mesma sequência, é grande a chance de cometer o mesmo erro duas vezes. Por exemplo, ao somar um grupo de frações, some todas elas, positivas e negativas. Na segunda vez, faça de forma diferente, somando todas as positivas e depois todas as negativas, depois some algebricamente os resultados.

Em certas provas, o espaço para rascunho é pequeno. Habitue-se então a fazer o rascunho a lápis e apagá-lo para reaproveitamento.

Exercícios

E54) Calcule

a) $\frac{2}{5} \times \frac{3}{8} =$

f) $\frac{13}{23} \times \frac{46}{65} =$

k) $1\frac{1}{2} \times 4\frac{1}{3} =$

p) $4 \times \frac{7}{2} =$

b) $\frac{12}{7} \times \frac{1}{2} =$

g) $\frac{3}{4} \times \frac{200}{33} =$

l) $2\frac{4}{5} \times 3\frac{4}{7} =$

q) $5 \times \frac{6}{7} =$

c) $\frac{7}{11} \times \frac{1}{2} =$

h) $\frac{18}{25} \times \frac{35}{33} \times \frac{22}{15} =$

m) $3\frac{2}{3} \times 1\frac{5}{22} =$

r) $3 \times \frac{5}{6} =$

d) $\frac{120}{72} \times \frac{91}{7} =$

i) $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} =$

n) $5\frac{3}{2} \times 1\frac{3}{7} =$

s) $0,2 \times \frac{4}{3} =$

e) $\frac{18}{15} \times \frac{105}{14} =$

j) $\frac{12}{21} \times \frac{8}{65} \times \frac{24}{16} \times \frac{91}{75} =$

o) $3\frac{3}{7} \times 2\frac{1}{3} =$

t) $0,333... \times \frac{12}{5} =$

E55) Calcule

a) A metade de $\frac{3}{4}$ f) $\frac{4}{7}$ de 280k) $\frac{1}{5}$ de 20% de $\frac{2}{5}$

p) Um quinto da metade de 33

b) A terça parte de $\frac{2}{5}$ g) $\frac{1}{3}$ de 22l) $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{5}$ de $\frac{5}{2}$

q) O triplo da metade de 7

c) $\frac{2}{3}$ de 360h) 20% de $\frac{4}{7}$ m) $\frac{4}{5}$ de 20% de 30r) A metade de $\frac{1}{3}$ de 720d) $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$

i) a metade de 10% de 8

n) $\frac{1}{3}$ da metade de 60s) a metade de $\frac{1}{3}$ de $\frac{7}{8}$ e) $\frac{1}{2}$ de $3\frac{7}{8}$ j) $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{4}$ o) A quarta parte de $\frac{2}{3}$ t) 10% da metade de $\frac{4}{5}$

E56) Calcule:

a) O inverso de 2

f) O inverso de $\frac{24}{7}$ k) O inverso de $-\frac{2}{5}$ p) O inverso do inverso de $\frac{4}{7}$

b) O inverso de 10

g) O inverso de $\frac{2}{9}$

l) O recíproco de -5

q) O recíproco do inverso de $-\frac{2}{9}$ c) O recíproco de $\frac{3}{5}$ h) O recíproco de $\frac{2}{9}$ m) O inverso de $-\frac{1}{18}$ r) O inverso do simétrico de $\frac{4}{11}$ d) O recíproco de $\frac{4}{7}$

i) O inverso de 20

n) O recíproco de $-\frac{2}{7}$

s) O oposto do recíproco de 15

e) O inverso de $\frac{1}{6}$ j) O recíproco de $\frac{1}{7}$

o) O inverso de 0,2

t) O inverso do recíproco de $-\frac{4}{13}$

E57) Efetue as seguintes divisões, dando a resposta na forma de frações irredutíveis:

a) $\frac{6}{7} \div \frac{12}{35} =$

f) $\frac{16}{27} \div 12 =$

k) $\frac{12}{26} \div \frac{72}{65} =$

p) $8 \div \frac{7}{3} =$

b) $\frac{12}{5} \div \frac{16}{65} =$

g) $\frac{15}{16} \div 8 =$

l) $\frac{48}{35} \div \frac{32}{84} =$

q) $\frac{33}{5} \div 6 =$

c) $\frac{1}{3} \div \frac{4}{15} =$

h) $2\frac{4}{5} \div 1\frac{3}{4} =$

m) $\frac{24}{15} \div \frac{28}{21} =$

r) $1,6 \div \frac{4}{5} =$

d) $3 \div \frac{4}{5} =$

i) $2\frac{1}{7} \div \frac{3}{7} =$

n) $\frac{12}{36} \div \frac{30}{15} =$

s) $\frac{12}{21} \div 0,3 =$

e) $15 \div \frac{3}{2} =$

j) $3\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} =$

o) $\frac{105}{91} \div \frac{84}{65} =$

t) $0,3 \div 0,666... =$

E58) Calcule

a) $-\frac{4}{5} \times \frac{3}{14} =$

f) $\left(-\frac{18}{25}\right) \times \frac{45}{32} =$

k) $1\frac{3}{11} \times \left(-2\frac{1}{5}\right) =$

p) $5 \times \left(-\frac{3}{10}\right) =$

b) $\left(-\frac{12}{35}\right) \times \left(-\frac{5}{2}\right) =$

g) $\left(-\frac{3}{4}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) =$

l) $-2\frac{5}{6} \times \left(-3\frac{3}{5}\right) =$

q) $(-4) \times \frac{5}{8} =$

c) $\left(-\frac{21}{84}\right) \times \frac{4}{7} =$

h) $\left(-\frac{27}{35}\right) \times \frac{-21}{33} \times \left(-\frac{22}{15}\right) =$

m) $-\frac{2}{3} \times \left(-1\frac{5}{7}\right) =$

r) $3 \times \left(-\frac{7}{6}\right) =$

d) $-\frac{2}{7} \times \frac{3}{16} =$

i) $\left(-\frac{7}{12}\right) \times \left(-\frac{33}{70}\right) \times \left(-\frac{25}{22}\right) =$

n) $5\frac{3}{5} \times \left(-1\frac{3}{7}\right) =$

s) $-0,2 \times \left(-\frac{8}{3}\right) =$

$$\text{e)} \frac{20}{32} \times \left(-\frac{15}{24}\right) = \quad \text{j)} \left(-\frac{52}{21}\right) \times \left(-\frac{8}{65}\right) \times \left(-\frac{28}{16}\right) = \quad \text{o)} -3\frac{3}{7} \times \left(-2\frac{1}{3}\right) = \quad \text{t)} 0,333... \times \left(-\frac{16}{3}\right) =$$

E59) Calcule:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} -\frac{6}{7} \div \frac{18}{105} = & \text{f)} \frac{24}{5} \div (-16) = & \text{k)} \frac{12}{13} \div \left(-\frac{24}{65}\right) = & \text{p)} -4 \div \frac{5}{3} = \\ \text{b)} \left(-\frac{26}{15}\right) \div \frac{52}{45} = & \text{g)} -\frac{25}{16} \div (-20) = & \text{l)} -\frac{12}{35} \div \frac{21}{49} = & \text{q)} \left(-\frac{21}{5}\right) \div 6 = \\ \text{c)} \left(-\frac{1}{7}\right) \div \left(-\frac{2}{21}\right) = & \text{h)} 2\frac{2}{9} \div \left(-2\frac{1}{4}\right) = & \text{m)} \frac{4}{5} \div \left(-\frac{2}{3}\right) = & \text{r)} -1,8 \div \left(-\frac{3}{5}\right) = \\ \text{d)} -4 \div \frac{12}{5} = & \text{i)} \left(-\frac{6}{7}\right) \div \left(-\frac{3}{14}\right) = & \text{n)} -\frac{12}{25} \div \left(-\frac{4}{15}\right) = & \text{s)} \frac{6}{7} \div (-0,3) = \\ \text{e)} 25 \div \left(-\frac{5}{3}\right) = & \text{j)} -3\frac{1}{5} \div \frac{4}{25} = & \text{o)} \frac{10}{9} \div \left(-\frac{4}{27}\right) = & \text{t)} -0,6 \div (-0,222...) = \end{array}$$

E60) Resolva as seguintes expressões:

OBS.: Lembre-se que para multiplicar ou dividir frações, não é preciso que tenham o mesmo denominador.

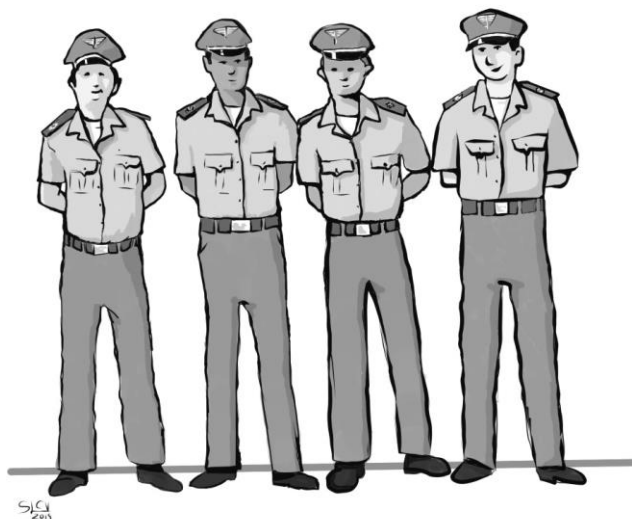
$$\begin{array}{ll} \text{a)} \left(\frac{8}{3} + \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) & \text{f)} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) \div \left(\frac{2}{5} + \frac{4}{3}\right) \\ \text{b)} \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right) \div \left(\frac{1}{5} + \frac{3}{8}\right) & \text{g)} \left(2\frac{8}{3} + 1\frac{1}{2}\right) \times \left(2\frac{1}{5} - 1\frac{1}{6}\right) \\ \text{c)} \left(\frac{4}{5} - \frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{2}{7} + \frac{1}{3}\right) & \text{h)} \left(2\frac{2}{3} - 1\frac{2}{5}\right) \div \left(\frac{1}{5} + 1\right) \\ \text{d)} \left(\frac{5}{7} - \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{7}\right) & \text{i)} \left(2 - \frac{3}{4}\right) \times \left(1 + \frac{1}{3}\right) \\ \text{e)} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{6}\right) & \text{j)} \left(5 - \frac{1}{3}\right) \times \left(4 + \frac{1}{7}\right) \end{array}$$

E61) Resolva as seguintes expressões:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \left[\left(\frac{3}{5} - \frac{2}{7}\right) \times \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{8}\right)\right] \div \left(\frac{5}{2} - \frac{2}{5}\right) & \text{f)} \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} + \frac{5}{9} \div \frac{25}{3} \\ \text{b)} \left[\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{5}{4} \div \frac{9}{2}\right)\right] \div \left(\frac{4}{7} - \frac{1}{2}\right) & \text{g)} \frac{12}{9} \times \frac{6}{5} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{4} \\ \text{c)} \left[\left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3} \div \frac{4}{3}\right)\right] \div \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) & \text{h)} \frac{15}{16} \div \frac{10}{8} - \frac{3}{4} \div \frac{9}{2} \\ \text{d)} \left[\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{7}\right) \div \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right)\right] \div \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{5}\right) & \text{i)} \frac{4}{5} \div \frac{8}{3} + \frac{14}{5} \times \frac{3}{7} \\ \text{e)} \left[\left(2 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}\right) \times \left(\frac{4}{5} \div \frac{2}{25}\right)\right] \div \left(\frac{5}{3} + \frac{1}{4}\right) & \text{j)} \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} - \frac{4}{3} \div \frac{5}{2} + \frac{5}{2} \div \frac{3}{5} - \frac{1}{2} \div \frac{3}{5} \end{array}$$

ALUNOS DA EPCAr

Lembre-se que as provas da Aeronáutica “pegam pesado” nos cálculos.



E62) Resolva as seguintes expressões:

$$a) -\frac{4}{5} \times \frac{3}{14} + 0,6(-0,222...) =$$

$$b) \left(-\frac{18}{25}\right) \times \frac{45}{32} \times 2\frac{2}{9} \div \left(-2\frac{1}{4}\right) =$$

$$c) 1\frac{3}{11} \times \left(-2\frac{1}{5}\right) - \frac{25}{16} \div (-20) =$$

$$d) 5 \times \left(-\frac{3}{10}\right) - \frac{25}{16} \div \left(\frac{5}{4}\right) =$$

$$e) \left(-\frac{12}{35}\right) \times \left(-\frac{5}{2}\right) - 1,8 \div \left(-\frac{3}{5}\right) =$$

$$f) \left(-\frac{3}{4}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{6}{7} \div \frac{18}{105} =$$

$$g) -2\frac{5}{6} \times \left(-3\frac{3}{5}\right) - \frac{25}{16} \div \frac{5}{8} =$$

$$h) (-4) \times \frac{5}{12} - \frac{9}{7} \div \frac{18}{35} =$$

$$i) \left(-\frac{21}{84}\right) \times \frac{4}{7} - \frac{12}{13} \div \left(-\frac{24}{65}\right) =$$

$$j) -3\frac{3}{7} \times \left(-2\frac{1}{3}\right) - 4 \div \frac{5}{3} =$$

$$k) \left(-\frac{52}{21}\right) \times \left(-\frac{8}{65}\right) \times \left(-\frac{28}{16}\right) + \left(-\frac{6}{7}\right) \div \left(-\frac{3}{14}\right) =$$

$$l) \left(-\frac{27}{35}\right) \times \frac{-21}{33} \times \left(-\frac{22}{15}\right) + \left(-\frac{1}{7}\right) \div \left(-\frac{2}{21}\right) =$$

$$m) 0,333... \times \left(-\frac{16}{3}\right) - \frac{12}{35} \div \frac{21}{49} =$$

$$n) \frac{20}{32} \times \left(-\frac{15}{24}\right) - \frac{4}{5} \div \left(-\frac{2}{3}\right) =$$

$$o) -0,2 \times \left(-\frac{8}{3}\right) - \frac{12}{25} \div \left(-\frac{4}{15}\right) =$$

$$p) \left(-\frac{7}{12}\right) \times \left(-\frac{33}{70}\right) \times \left(-\frac{25}{22}\right) - \frac{24}{5} \div (-16) =$$

$$q) -\frac{2}{7} \times \frac{3}{16} + \left(-\frac{26}{15}\right) \div \frac{52}{45} =$$

$$r) 5\frac{3}{5} \times \left(-1\frac{3}{7}\right) - 1,8 \div \left(-\frac{3}{5}\right) =$$

$$s) 3 \times \left(-\frac{7}{6}\right) + \left(-\frac{21}{5}\right) \div 6 =$$

$$t) -\frac{2}{3} \times \left(-1\frac{5}{7}\right) - \frac{6}{7} \div (-0,3) =$$

Propriedades das operações com números racionais

As propriedades das operações com números naturais e inteiros são válidas também para os números racionais. Assim como ocorre nesses outros conjuntos, a subtração e a divisão não possuem propriedades notáveis. Não são comutativas nem associativas, e não possuem elemento neutro. Já a adição e a multiplicação possuem várias propriedades.

Propriedade de fechamento da adição

Dizemos que o conjunto \mathbb{Q} é fechado em relação à adição, pois se adicionarmos dois elementos quaisquer de \mathbb{Q} , o resultado também será um elemento do conjunto \mathbb{Q} . Em palavras mais simples, a soma de dois números racionais sempre será um número racional. Isto significa que é impossível, por exemplo, adicionar dois números racionais e encontrar como resultado um número irracional.

Para todo $x \in \mathbb{Q}$ e todo $y \in \mathbb{Q}$, $(x+y) \in \mathbb{Q}$

Ou seja, “a soma de números racionais é também um número racional”.

(OBS.: Por outro lado, é possível o contrário, adicionar dois números irracionais e encontrar um resultado racional).

Exemplo:

$4/5 \in \mathbb{Q}$ e $-3/7 \in \mathbb{Q}$, a soma $(4/5) + (-3/7) = 13/35 \in \mathbb{Q}$

Isso parece óbvio, mas nem todas as operações possuem a propriedade do fechamento. Considere uma operação fictícia chamada \textcircled{R} , definida por:

$$x \textcircled{R} y = \sqrt[y]{x}$$

Por exemplo, $16 \textcircled{R} 2 = \sqrt[2]{16} = 4$

Esta operação não é fechada em \mathbb{Q} , basta verificar com um exemplo:

$5 \textcircled{R} 2 = \sqrt[2]{5}$, que é um número irracional, ou seja, não pertence a \mathbb{Q} . Esta operação é bastante comum na matemática, é encontrada em algumas calculadoras científicas, entretanto não possui a propriedade de fechamento em \mathbb{Q} .

Além da adição, uma outra propriedade que possui fechamento em \mathbb{Q} é a subtração, ou seja, se subtrairmos dois números racionais quaisquer, o resultado sempre será um número racional.

Para todo $x \in \mathbb{Q}$ e todo $y \in \mathbb{Q}$, $(x-y) \in \mathbb{Q}$

Propriedade do elemento neutro da adição

O número zero é elemento neutro da adição em \mathbb{Q} , assim como ocorre nas adições de números naturais e de números inteiros:

Para todo $x \in \mathbb{Q}$, $x+0 = x$ e $0+x = x$

Observe que para ser elemento neutro, o número tem que ser operando tanto à esquerda quanto na direita, e dar o mesmo resultado. O número 0 não é elemento neutro da subtração, pois apesar de $x - 0$ ser igual a x , $0 - x$ não é igual a x , então não satisfaz inteiramente as condições para ser elemento neutro.

Propriedade comutativa da adição

Esta propriedade permite que calculemos $y+x$ ou $x+y$, chegando ao mesmo resultado. Muitos a conhecem como “a ordem das parcelas não altera a soma”. Matematicamente falando, temos:

Para todo $x \in \mathbb{Q}$ e todo $y \in \mathbb{Q}$, $x+y = y+x$

Exemplo:

$$5/3 + 4/5 = 4/5 + 5/3$$

Propriedade associativa da adição

Ao encontrarmos uma expressão na forma $x+y+z$, podemos realizar primeiro $x+y$, para então adicionar o resultado com z , ou então realizar primeiro $y+z$, para depois adicionar este resultado a x . Muitas vezes é mais fácil combinar os números em uma outra ordem, facilitando cálculos. Por exemplo:

$$4 + 1/5 + 4/5$$

Observamos que se adicionarmos $1/5 + 4/5$, encontraremos 1. Para terminar o cálculo basta fazermos $4+1=5$. Se fizéssemos as contas na ordem em que aparecem, poderia ser mais demorado.

Para todo $x \in \mathbb{Q}$, todo $y \in \mathbb{Q}$ e todo $z \in \mathbb{Q}$, $(x+y)+z = x+(y+z)$

Propriedade de fechamento da multiplicação

O produto de dois números racionais sempre será um número racional, é o que diz a propriedade de fechamento da multiplicação:

Para todo $x \in \mathbb{Q}$ e todo $y \in \mathbb{Q}$, $x.y \in \mathbb{Q}$

Já vimos que nem todas as operações apresentam a propriedade do fechamento. No caso do conjunto dos racionais, a adição e a multiplicação são dois exemplos de operações fechadas.

Propriedade do elemento neutro da multiplicação

O número 1 é o elemento neutro da multiplicação nos números racionais, ou seja, qualquer número multiplicado por 1, tanto na ordem normal quanto na ordem inversa, resulta no próprio número.

Para todo $x \in \mathbb{Q}$, $x.1 = x$ e $1.x = x$

Propriedade comutativa da multiplicação

A multiplicação é comutativa nos naturais, inteiros, racionais, irracionais, reais e até nos números complexos, ou seja, a ordem dos fatores não altera o produto. Especificando para os racionais, temos:

Para todo $x \in \mathbb{Q}$ e todo $y \in \mathbb{Q}$, $x.y = y.x$

Sendo assim, podemos inverter a ordem dos fatores durante o cálculo, o que podem em alguns casos reduzir o trabalho. Exemplo:

$$\frac{4}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{7}$$

Se trocarmos as posições dos dois primeiros fatores, ficaremos com as frações $\frac{4}{5}$ e $\frac{5}{4}$ juntas. Essas frações, multiplicadas, resultam em 1. Então o cálculo será reduzido a $\frac{3}{7}$ multiplicado por 1, que resulta em $\frac{3}{7}$.

Propriedade associativa da multiplicação

Dizemos que uma operação é associativa quando temos três valores operados, e podemos operar os dois primeiros e depois o terceiro, ou então operar os dois últimos, para depois operar com o primeiro:

$$(x.y).z = x.(y.z)$$

A multiplicação de números racionais possui essa propriedade:

Para todo $x \in \mathbb{Q}$, todo $y \in \mathbb{Q}$ e todo $z \in \mathbb{Q}$, $(x.y).z = x.(y.z)$

É graças às propriedades associativa e comutativa, combinadas, que podemos fazer simplificações em longas sequências de multiplicações, “cortando” fatores em qualquer numerador com qualquer denominador.

Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e subtração

A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição diz que:

$$x.(a+b) = x.a + x.b$$

e

$$(a+b).x = a.x + b.x$$

Quando estamos operando com números, normalmente é mais vantajoso resolver o conteúdo dos parênteses (no caso a adição de a e b), para depois fazer a multiplicação. Entretanto quando estivermos operando com letras, a opção de usar a distributividade será muito útil.

A multiplicação de racionais também é distributiva em relação à subtração:

$$x.(a-b) = x.a - x.b$$

e

$$(a-b).x = a.x - b.x$$

Potências de números racionais – expoentes positivos

Até agora estamos usando a mesma definição de potência que foi usada para números naturais:

$$A^B = \underbrace{A \times A \times A \times A \times \dots \times A}_{(B \text{ vezes})}$$

Estamos considerando que B, o expoente, é um número inteiro e positivo. Tudo ficará um pouco mais complicado quando o expoente não for mais um número inteiro. Na próxima seção estudaremos o caso do expoente inteiro negativo. No capítulo 14 estudaremos os casos em que o expoente é uma fração, ou um número qualquer.

Eleva um número racional a um expoente inteiro positivo é uma operação exatamente igual à que foi estudada em séries anteriores, durante o estudo das frações. A única diferença aqui é que a base poderá ser negativa. Considere então que queremos calcular A^B , onde A é um número racional (positivo ou negativo) na forma de fração, e que B é um inteiro positivo. Sendo assim:

$$A^B = \left(-\frac{n}{d}\right)^B = \underbrace{\left(-\frac{n}{d}\right) \times \left(-\frac{n}{d}\right) \times \left(-\frac{n}{d}\right) \times \left(-\frac{n}{d}\right) \times \dots \times \left(-\frac{n}{d}\right)}_{(B \text{ fatores})}$$

Este resultado terá um sinal, que poderá ser + ou -, e um módulo que será uma fração na forma: n^B / d^B , ou seja, elevamos o numerador e o denominador ao expoente dado. Se o número original for positivo, o resultado será sempre positivo. Se o número original for negativo, tudo dependerá do expoente B: Se B for par, o resultado será positivo, se B for ímpar, o resultado será negativo (o produto de um número ímpar de fatores negativos é negativo).

Exemplos:

$$a) \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81} \quad (\text{base positiva: resultado será positivo, não importando o expoente})$$

$$b) \left(-\frac{2}{3}\right)^4 = +\frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81} \quad (\text{base negativa, mas expoente par: resultado positivo})$$

$$c) \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{2^3}{3^3} = -\frac{8}{27} \quad (\text{base negativa e expoente ímpar: resultado será negativo})$$

É muito fácil entender essas regras de sinais, nem é preciso memorizar. Sabemos que o produto de números positivos é sempre positivo, por isso as potências de base positiva serão sempre positivas.

Quando multiplicamos números positivos e negativos, cada dois fatores negativos fornecem um resultado positivo. Então se o número de fatores negativos for par, teremos positivos multiplicados por positivos, e o resultado final será positivo.

Mas quando multiplicamos vários fatores negativos, em um número ímpar de vezes, cada dupla resultará em um número positivo. Sendo ímpar o número de fatores, sobrá um negativo, mantendo então o resultado final também negativo. Ou seja, as regras de sinais são as mesmas válidas para bases inteiras.

A ordem correta

Muitos alunos erram expressões com potências porque não identificam corretamente a qual valor a potência se aplica. Por exemplo, veja uma forma errada de escrever $3/5$ elevado ao quadrado:

$$\frac{3^2}{5}$$

Da forma como está escrito, ficamos em dúvida sobre qual é o valor que está sendo elevado ao quadrado, se é apenas o 3 ou se é a fração $3/5$. Alguém pode argumentar que está claro que é o $3/5$ que está elevado ao quadrado, pois se fosse apenas o 3, o traço de fração estaria maior, para englobar o 3 e o expoente 2. Não é uma boa ideia contar com sutilezas como esta para entender as operações matemáticas. Devemos deixar tudo bem claro, usando parênteses. Por exemplo:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 : \text{Isto é a fração } 3/5 \text{ elevada ao quadrado}$$

$$\frac{3^2}{5} : \text{Isto é o número 3, elevado ao quadrado, e o resultado (9) é dividido por 5}$$

O correto é considerar que um expoente se aplica ao valor que está à sua esquerda, muitas vezes um único número. Por exemplo:

$$4.3^2 : \text{Apenas o número 3 está elevado ao quadrado, e o resultado, é multiplicado por 4}$$

Se nossa intenção na expressão acima for elevar ao quadrado o produto 4.3 , temos que usar parênteses:

$$(4.3)^2 : \text{Agora sim, o produto } 4.3=12 \text{ está sendo elevado ao quadrado}$$

A mesma coisa ocorre quando temos sinais. Veja por exemplo a diferença entre as duas expressões abaixo:

$$-3^2 : \text{Temos o valor de } 3^2, \text{ com sinal negativo, que resulta em } -9$$

$$(-3)^2 : \text{O número } -3 \text{ está elevado ao quadrado (com sinal e tudo), e o resultado é } +9$$

Para não cometer esses erros é preciso ter disciplina na hora de escrever as expressões no papel.

Não esqueça, quando não são usados parênteses, as potências são calculadas primeiro, depois as multiplicações e divisões, e por último as adições e subtrações. O uso de parênteses permite alterar essa ordem padrão.

A ordem de cálculo nas expressões numéricas e algébricas é uma simples questão de convenção, apesar de seguir uma lógica. Por exemplo, a potência nada mais é que uma série de multiplicações, enquanto a multiplicação nada mais é que uma série de adições. Por isso, calculamos primeiro as potências, depois as multiplicações (e divisões também, na ordem em que aparecem, e depois adições e subtrações, também na ordem em que aparecem. Em caso de dúvida, a formulação da questão pode utilizar parênteses, que são resolvidos antes das demais operações. Seguindo esta lógica, muitos professores ensinam ao aluno para seguirem a ordem dada pela palavra PEMDAS, que significa parênteses – expoente – multiplicação –

divisão – adição – subtração. O problema é que este “macete” dá a entender que multiplicações sempre devem ser feitas antes das divisões, o que é errado. Por exemplo, qual seria a forma correta de calcular:

$$24 \div 2 \times 3?$$

Usando o “macete” PEMDAS, o aluno seria levado a realizar primeiro a multiplicação, depois a divisão, ficando então com:

$$24 \div 2 \times 3 = 24 \div 6 = 4 \text{ (ERRADO !!!)}$$

O correto é realizar multiplicações e divisões na ordem em que aparecem, ficando então com:

$$24 \div 2 \times 3 = 12 \times 3 = 36 \text{ (CERTO !!!)}$$

O correto seria então apresentar o “PEMDAS” da seguinte forma:

P
E
M ou D
A ou S

Outra questão importante é o uso de parênteses, chaves e colchetes. As crianças são orientadas a realizar primeiro as operações entre parênteses, depois aquelas entre colchetes e finalmente as que estão entre chaves. Para que isto funcione, cabe ao formulador da questão respeitar também esta ordem.

Por exemplo,

$$25 - \{ 3.17 - [-10 + 6.(8 - 4.(-2)) + 2 + 3] - 4.(-4) \} \div (-4)$$

Entretanto, matematicamente os parênteses, chaves e colchetes têm significados semelhantes. A mesma expressão acima poderia ser escrita usando somente parênteses:

$$25 - (3.17 - (-10 + 6.(8 - 4.(-2)) + 2 + 3) - 4.(-4)) \div (-4)$$

A mesma expressão poderia (apesar de não ser usual) ser escrita desrespeitando a posição tradicional:

$$25 - (3.17 - \{-10 + 6.[8 - 4.[-2]] + 2 + 3\} - 4.(-4)) \div [-4]$$

Claro que uma questão colocada dessa forma em uma prova seria uma “armadilha” para confundir os alunos.

A regra correta e geral para este caso seria: resolver primeiro, os separadores mais internos, e por último, os mais externos. Tanto é assim que nas linguagens de computador, somente parênteses são usados, não existem chaves nem colchetes nas expressões matemáticas.

Fica portanto mantida a regra ensinada nos primeiros anos do ensino fundamental, de resolver primeiro parênteses, colchetes e chaves, mas somente se o formulador da questão obedecer à mesma ordem convencionada. A regra mais rigorosa é de resolver as expressões, da mais interna para a mais externa, independente de serem usados parênteses, colchetes ou chaves.

Exercícios

E63) Calcule as seguintes potências:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 =$

f) $\left(\frac{4}{9}\right)^2 =$

k) $\left(\frac{7}{10}\right)^2 =$

p) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 =$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 =$

g) $\left(\frac{5}{8}\right)^2 =$

l) $\left(\frac{8}{9}\right)^2 =$

q) $\left(\frac{1}{10}\right)^4 =$

c) $\left(\frac{4}{5}\right)^2 =$

h) $\left(\frac{3}{7}\right)^2 =$

m) $\left(\frac{3}{8}\right)^2 =$

r) $\left(\frac{5}{2}\right)^3 =$

d) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 =$

i) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 =$

n) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 =$

s) $\left(\frac{5}{3}\right)^3 =$

e) $\left(\frac{3}{10}\right)^3 =$

j) $\left(\frac{10}{3}\right)^3 =$

o) $\left(\frac{7}{10}\right)^3 =$

t) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 =$

E64) Calcule as seguintes potências:

a) $\left(-\frac{1}{9}\right)^2 =$

f) $\left(\frac{7}{100}\right)^2 =$

k) $\left(-\frac{4}{11}\right)^0 =$

p) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4 =$

b) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 =$

g) $\left(-\frac{5}{9}\right)^2 =$

l) $\left(-\frac{2}{7}\right)^2 =$

q) $\left(-\frac{3}{2}\right)^5 =$

c) $\left(-\frac{3}{10}\right)^4 =$

h) $\left(-\frac{1}{4}\right)^3 =$

m) $\left(\frac{3}{11}\right)^2 =$

r) $\left(-\frac{10}{7}\right)^2 =$

d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5 =$

i) $\left(-\frac{2}{10}\right)^4 =$

n) $\left(-\frac{12}{13}\right)^2 =$

s) $\left(-\frac{9}{13}\right)^2 =$

e) $\left(\frac{9}{7}\right)^2 =$

j) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3 =$

o) $\left(\frac{3}{10}\right)^3 =$

t) $\left(-\frac{3}{5}\right)^4 =$

Os números racionais também podem aparecer nas formas de números decimais, dízimas periódicas, número misto ou porcentagem. Para calcular potências desses números, é conveniente convertê-los antes para a forma de fração. A única exceção fica por conta dos números decimais, que podem ser elevados com relativa facilidade ao quadrado ou ao cubo.

Exemplo:Calcule $(1,2)^2$

Para multiplicar números decimais (no caso, $1,2 \times 1,2$), multiplicamos normalmente os números sem vírgula. O número de casas decimais do resultado será igual à soma dos números de casas decimais dos fatores. Como $1,2$ tem uma casa decimal, o produto $1,2 \times 1,2$ terá 2 casas decimais. Já que $12 \cdot 12 = 144$, ficamos com:

$$1,2 \times 1,2 = 1,44$$

Outros exemplos:

a) $0,3^2 = (3/10)^2 = 9/100$

b) $(-0,333\ldots)^3 = (-1/3)^3 = -1/27$

$$c) (40\%)^2 = (2/5)^2 = 4/25$$

$$d) (1 \frac{3}{5})^2 = (8/5)^2 = 64/25 = 2 \frac{14}{25}$$

Exercícios

E65) Calcule as seguintes potências, dando o resultado na forma decimal ou fração. Caso o gabarito esteja em outra forma que sua resposta, confirme a igualdade:

$$a) (-1,4)^2 =$$

$$f) 1,5^2 =$$

$$k) (-2,5)^2 =$$

$$p) 0,6^3 =$$

$$b) (10\%)^3 =$$

$$g) 0,2^3 =$$

$$l) (0,1)^3 =$$

$$q) -0,4^2 =$$

$$c) 0,444...^2 =$$

$$h) (-0,5)^2 =$$

$$m) (-0,222...) ^2 =$$

$$r) 0,5^4 =$$

$$d) (1 \frac{1}{2})^3 =$$

$$i) 1,2^3 =$$

$$n) 0,5^3 =$$

$$s) (-0,32783287...) ^0 =$$

$$e) (-0,666...) ^2 =$$

$$j) (1 \frac{1}{10})^3 =$$

$$o) (1 \frac{3}{5})^2 =$$

$$t) (0,01)^2 =$$

Propriedades das potências

As propriedades das operações na maioria das vezes servem para facilitar os cálculos. Considere por exemplo a expressão:

$$2^{10} \times 5^{10} =$$

É fácil calcular 2^{10} , o resultado é 1024. Mas 5^{10} é bem mais trabalhoso, dá 9.765.625. Mas sabemos que $2^{10} \cdot 5^{10} = (2 \cdot 5)^{10} = 10^{10}$, a partir de uma propriedade básica das potências. Calcular 10^{10} é bem fácil, pois é uma potência de 10, basta escrever 1 seguido de 10 zeros. Então o resultado é 10.000.000.000. O mesmo resultado que encontraríamos se fizéssemos $1024 \times 9.765.625$, só que por um caminho bem mais simples. As expressões complicadas que aparecem em provas, quase sempre ficam mais simples com o uso de algumas propriedades das suas operações. O que fizemos aqui, ao resolver a expressão por um caminho mais rápido, foi um tipo de simplificação.

As propriedades das potências cuja base é um número racional são as mesmas das potências cujas bases são números naturais ou inteiros. Sendo x um número racional qualquer (exceto 0), e sendo **a** e **b** números naturais, temos:

$$a) x^1 = x$$

$$\text{Ex: } (5/3)^1 = 5/3$$

$$b) x^0 = 1$$

$$\text{Ex: } (-4/7)^0 = 1$$

$$c) x^a \cdot x^b = x^{a+b}$$

$$\text{Ex: } (2/5)^2 \cdot (2/5)^4 = (2/5)^6$$

$$d) x^a \cdot y^a = (x \cdot y)^a$$

$$\text{Ex: } (4/3)^3 \cdot (5/2)^3 = [(4/3) \cdot (5/2)]^3 = [10/3]^3$$

$$e) x^a / x^b = x^{(a-b)}$$

$$\text{Ex: } (3/5)^5 \div (3/5)^3 = (3/5)^2$$

$$f) x^a / y^a = (x/y)^a$$

$$\text{Ex: } (4/9)^2 \div (2/15)^2 = [(4/9) \div (2/15)]^2 = [10/3]^2$$

$$g) (x^a)^b = x^{a \cdot b}$$

$$\text{Ex: } [(2/3)^2]^3 = (2/3)^6$$

As propriedades acima também valem para $x=0$, exceto para 0^0 , que não é permitido.

Lembre-se que essas propriedades nada mais são que consequências da definição de potência. Por exemplo, a propriedade (d):

$$\begin{aligned}
 x^a &= x.x....x & (a \text{ vezes}) \\
 x^b &= x.x.x....x & (b \text{ vezes}) \\
 x^a.x^b &= (x.x....x).(x.x.x....x) & (a+b \text{ vezes})
 \end{aligned}$$

ExercíciosE66) Aplique a propriedade $x^1=x$

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \left(-\frac{1}{3}\right)^1 = & \text{c)} \left(-\frac{4}{5}\right)^1 = & \text{e)} (-0,333\dots)^1 = \\
 \text{b)} \left(\frac{1}{2}\right)^1 = & \text{d)} \left(5\frac{2}{7}\right)^1 = & \text{g)} (-2,18)^1 = \\
 \text{f)} (3,14)^1 = & \text{h)} \left(-\frac{2}{5}\right)^1 =
 \end{array}$$

E67) Aplique a propriedade $x^0=1$

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \left(-\frac{1}{7}\right)^0 = & \text{c)} \left(\frac{4}{3}\right)^0 = & \text{e)} (-5,333\dots)^0 = \\
 \text{b)} \left(-\frac{2}{5}\right)^0 = & \text{d)} \left(2\frac{4}{7}\right)^0 = & \text{g)} \left(-\frac{2}{3}\right)^0 = \\
 \text{f)} \left(\frac{4}{9}\right)^0 = & \text{h)} (-6,02)^0 =
 \end{array}$$

E68) Aplique a propriedade $x^a.x^b = x^{a+b}$

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \left(-\frac{1}{5}\right)^2 \times \left(-\frac{1}{5}\right)^3 = & \text{c)} \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = & \text{e)} \left(-\frac{3}{5}\right)^1 \times \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \\
 \text{b)} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = & \text{d)} \left(\frac{1}{10}\right)^4 \times \left(\frac{1}{10}\right)^3 = & \text{g)} \left(\frac{2}{5}\right)^1 \times \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \\
 \text{f)} \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = & \text{h)} \left(-\frac{3}{10}\right)^2 \times \left(-\frac{3}{10}\right)^3 =
 \end{array}$$

E69) Aplique a propriedade $x^a.y^a = (x.y)^a$

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = & \text{c)} \left(-\frac{3}{10}\right)^4 \times \left(-\frac{5}{3}\right)^4 = & \text{e)} \left(-\frac{5}{9}\right)^5 \times \left(-\frac{9}{10}\right)^5 = \\
 \text{b)} \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{5}{2}\right)^3 = & \text{d)} \left(\frac{5}{6}\right)^4 \times \left(-\frac{2}{5}\right)^4 = & \text{g)} \left(-\frac{5}{3}\right)^6 \times \left(-\frac{3}{50}\right)^6 = \\
 \text{f)} \left(-\frac{3}{20}\right)^3 \times \left(-\frac{5}{3}\right)^3 = & \text{h)} \left(-\frac{6}{40}\right)^2 \times \left(\frac{20}{27}\right)^2 =
 \end{array}$$

E70) Aplique a propriedade $x^a/x^b = x^{(a-b)}$

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \left(-\frac{1}{2}\right)^4 \div \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = & \text{c)} \left(\frac{1}{10}\right)^8 \div \left(\frac{1}{10}\right)^5 = & \text{e)} \left(\frac{1}{3}\right)^4 \div \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \\
 \text{b)} \left(\frac{2}{5}\right)^7 \div \left(\frac{2}{5}\right)^5 = & \text{d)} \left(\frac{2}{3}\right)^8 \div \left(\frac{2}{3}\right)^4 = & \text{g)} \left(-\frac{2}{5}\right)^9 \div \left(-\frac{2}{5}\right)^6 = \\
 \text{f)} \left(\frac{3}{10}\right)^5 \div \left(\frac{3}{10}\right)^3 = & \text{h)} \left(-\frac{1}{2}\right)^{11} \div \left(-\frac{1}{2}\right)^7 =
 \end{array}$$

E71) Aplique a propriedade $x^a/y^a = (x/y)^a$

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \left(-\frac{6}{15}\right)^2 \div \left(-\frac{14}{30}\right)^2 = & \text{c)} \left(\frac{5}{15}\right)^2 \div \left(-\frac{8}{3}\right)^2 = & \text{e)} \left(-\frac{2}{1}\right)^3 \div \left(\frac{3}{1}\right)^3 = \\
 \text{b)} \left(-\frac{3}{21}\right)^{10} \div \left(-\frac{10}{35}\right)^{10} = & \text{d)} \left(\frac{6}{33}\right)^4 \div \left(\frac{35}{77}\right)^4 = & \text{g)} \left(\frac{20}{36}\right)^5 \div \left(-\frac{10}{9}\right)^5 = \\
 \text{f)} \left(-\frac{26}{10}\right)^3 \div \left(\frac{39}{35}\right)^3 = & \text{h)} \left(\frac{35}{105}\right)^7 \div \left(\frac{20}{6}\right)^7 =
 \end{array}$$

E72) Aplique a propriedade $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$

$$a) \left[\left(-\frac{2}{3} \right)^3 \right]^2 =$$

$$c) \left[\left(-\frac{1}{10} \right)^2 \right]^4 =$$

$$e) \left[\left(\frac{4}{5} \right)^2 \right]^3 =$$

$$g) \left[\left(-\frac{1}{2} \right)^6 \right]^3 =$$

$$b) \left[\left(\frac{2}{5} \right)^5 \right]^3 =$$

$$d) \left[\left(-\frac{3}{10} \right)^{10} \right]^2 =$$

$$f) \left[\left(-\frac{1}{3} \right)^1 \right]^2 =$$

$$h) \left[\left(\frac{2}{7} \right)^2 \right]^3 =$$

Os exercícios acima foram fáceis porque já informam qual é a propriedade de potências a ser utilizada. Podem ficar mais difíceis se essas propriedades não forem informadas. Você precisará então memorizar essas propriedades, mas isso não é difícil:

a) Expoente 1: o resultado é o próprio número _____ $x^1 = x$

b) Expoente 0: o resultado é sempre 1 _____ $x^0 = 1$

OBS: Não é permitido 0^0 .

As propriedades (c), (d), (e) e (f) dizem respeito a multiplicações e divisões de potências, com bases ou expoentes iguais. Expoentes são adicionados ou subtraídos quando as bases são iguais. Bases são multiplicadas ou divididas quando os expoentes são iguais.

Multiplicação de potências:

c) Bases iguais, somar os expoentes _____ $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$

d) Expoentes iguais, multiplicar as bases _____ $x^a \cdot y^a = (x \cdot y)^a$

Divisão de potências:

e) Bases iguais, subtrair os expoentes _____ $x^a / x^b = x^{(a-b)}$

f) Expoentes iguais, dividir as bases _____ $x^a / y^a = (x/y)^a$

g) Potência de uma potência: multiplique os expoentes _____ $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$

Exercícios

E73) Aplique as propriedades de potências e calcule o resultado na forma de fração ou de uma única potência.

$$a) \left(-\frac{3}{5} \right)^1 \times \left(-\frac{3}{5} \right)^2 =$$

$$f) \left(-\frac{3}{11} \right)^0 =$$

$$k) \left(-\frac{2}{5} \right)^3 \times \left(\frac{3}{2} \right)^3 =$$

$$p) \left(-\frac{15}{32} \right)^2 \div \left(-\frac{10}{16} \right)^2 =$$

$$b) \left(\frac{2}{3} \right)^2 \times \left(\frac{2}{3} \right)^3 =$$

$$g) \left(\frac{4}{17} \right)^1 =$$

$$l) \left(\frac{10}{3} \right)^2 \times \left(\frac{6}{5} \right)^2 =$$

$$q) \left(-\frac{24}{42} \right)^3 \div \left(\frac{15}{28} \right)^3 =$$

$$c) -\left(\frac{2}{5} \right)^1 \times \left(\frac{2}{5} \right)^3 =$$

$$h) \left(-\frac{1}{999} \right)^0 =$$

$$m) \left(\frac{18}{5} \right)^3 \times \left(-\frac{10}{9} \right)^3 =$$

$$r) \left(\frac{24}{16} \right)^4 \div \left(-\frac{30}{20} \right)^4 =$$

$$d) \left(\frac{1}{2} \right)^2 \times \left(\frac{1}{2} \right)^4 =$$

$$i) \left(-\frac{23}{45} \right)^1 =$$

$$n) \left(-\frac{3}{10} \right)^4 \times \left(\frac{25}{3} \right)^4 =$$

$$s) \left(\frac{48}{72} \right)^2 \div \left(\frac{16}{36} \right)^2 =$$

$$e) \left(-\frac{3}{10}\right)^2 \times \left(-\frac{3}{10}\right)^3 = \quad j) \left(\frac{923}{777}\right)^0 = \quad o) \left(\frac{14}{35}\right)^2 \times \left(\frac{15}{10}\right)^2 = \quad t) \left(\frac{42}{105}\right)^5 \div \left(-\frac{30}{15}\right)^5 =$$

E74) Aplique as propriedades de potências e calcule o resultado na forma de fração ou de uma única potência.

$$\begin{array}{llll} a) \left(-\frac{1}{5}\right)^2 \times \left(-\frac{1}{5}\right)^3 = & f) \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(-\frac{9}{5}\right)^2 = & k) \left(-\frac{2}{3}\right)^5 \div \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = & p) \left(-\frac{18}{35}\right)^2 \div \left(-\frac{9}{7}\right)^2 = \\ b) \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = & g) \left(-\frac{15}{14}\right)^3 \times \left(\frac{7}{12}\right)^3 = & l) \left(-\frac{1}{2}\right)^7 \div \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = & q) \left(\frac{15}{22}\right)^5 \div \left(-\frac{105}{77}\right)^5 = \\ c) \left(-\frac{3}{10}\right) \times \left(-\frac{3}{10}\right)^3 = & h) \left(\frac{3}{14}\right)^4 \times \left(\frac{7}{15}\right)^4 = & m) \left(\frac{2}{5}\right)^6 \div \left(\frac{2}{5}\right)^3 = & r) \left(-\frac{2}{15}\right)^4 \div \left(\frac{14}{35}\right)^4 = \\ d) \frac{2}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 = & i) \left(\frac{21}{5}\right)^5 \times \left(\frac{5}{14}\right)^5 = & n) \left(-\frac{3}{5}\right)^7 \div \left(-\frac{3}{5}\right)^4 = & s) \left(\frac{10}{35}\right)^3 \div \left(\frac{6}{14}\right)^3 = \\ e) \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^6 = & j) \left(\frac{15}{2}\right)^6 \times \left(\frac{1}{5}\right)^6 = & o) \left(\frac{11}{37}\right)^6 \div \left(\frac{11}{37}\right)^5 = & t) \left(-\frac{1}{5}\right)^6 \div \left(-\frac{6}{15}\right)^6 = \end{array}$$

E75) Aplique as propriedades de potências e exprima o resultado em potências de x

$$\begin{array}{llll} a) x^2 \cdot x^3 = & f) x^7 \div x^2 = & k) (x^2)^3 = & p) (2x^2) \cdot (4x^3) = \\ b) x^5 \cdot x^2 = & g) x^6 \div x^4 = & l) (x^3)^4 = & q) (4x^3) \cdot (5x^4) = \\ c) x^7 \cdot x^2 = & h) x^{10} \div x^6 = & m) (x^4)^6 = & r) (3x^4) \cdot (x^2) = \\ d) x \cdot x \cdot x = & i) x^5 \div x^4 = & n) (x^3)^3 = & s) (2x^3)^3 = \\ e) x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot x^4 \cdot x^5 = & j) x^7 \div x^7 = & o) (x^2)^{30} = & t) (3x^2)^4 = \end{array}$$

Não existe propriedade específica para casos em que as bases são diferentes e os expoentes são diferentes. Nesses casos é preciso desenvolver todas as potências e fazer as simplificações possíveis.

Exemplo:

$$\left(\frac{15}{8}\right)^4 \times \left(\frac{12}{15}\right)^6$$

Note que as bases são diferentes e os expoentes também são diferentes. A primeira coisa a fazer é fatorar todos os números, e a seguir fazer as simplificações possíveis.

$$\left(\frac{3 \times 5}{2^3}\right)^4 \times \left(\frac{2^2 \times 3}{3 \times 5}\right)^6$$

Podemos simplificar a segunda fração por 3, ficando com:

$$\left(\frac{3 \times 5}{2^3}\right)^4 \times \left(\frac{2^2}{5}\right)^6$$

Agora elevamos cada numerador e denominador à potência apropriada. Na primeira fração, ambos serão elevados à quarta potência, e na segunda fração, ambos serão elevados à sexta potência. Nessa operação devemos lembrar das propriedades da potência de potência e da potência de produto.

$$\left(\frac{3 \times 5}{2^3}\right)^4 \times \left(\frac{2^2}{5}\right)^6 = \frac{3^4 \times 5^4}{2^{12}} \times \frac{2^{12}}{5^6}$$

Podemos agora simplificar o 2^{12} , e simplificar 5^4 e 5^6 , dividindo ambos por 5^4 , ficará 1 no numerador e 5^2 no denominador ($5^6 \div 5^4 = 5^2$). O resultado será:

$$\frac{3^4 \times 5^4}{2^{12}} \times \frac{2^{12}}{5^6} = \frac{3^4}{1} \times \frac{1}{5^2} = \frac{81}{25}$$

Como vemos, quando não encontramos bases iguais ou expoentes iguais para aplicar as propriedades de potências, ainda assim conseguimos realizar os cálculos, apesar de dar um pouco mais de trabalho.

Como vemos, em expressões que envolvam potências, podemos encontrar exemplos em que as propriedades de potências de mesma base ou expoente podem ser aplicadas ou não. Também encontramos exemplos em que os números são expressos em diversas formas: números inteiros, frações, dízimas periódicas, números decimais ou porcentagens. Em geral a expressão fica mais simples quando convertemos todos os números para frações, mas nem sempre.

Exercícios

E76) Calcule as seguintes expressões e dê o resultado na forma de fração:

- | | | | |
|--|---|---|--|
| a) $(0,666\dots)^3 \cdot (1,2)^2 =$ | f) $1,6^2 \cdot (1,666\dots)^3 =$ | k) $0,2^3 \cdot 1,5^2 =$ | p) $1,2^3 \cdot (1,333\dots)^2 =$ |
| b) $(2,333\dots)^2 \div \left(1\frac{5}{9}\right) =$ | g) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 \div \frac{2^3}{3^3} =$ | l) $\left(2\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(3\frac{1}{5}\right) =$ | q) $\left(-\frac{35}{6}\right)^2 \times \left(\frac{3}{10}\right)^3 =$ |
| c) $(0,999\dots)^{100} \cdot (1,0101)^0 =$ | h) $(1,666\dots)^2 \cdot 1,5^3 =$ | m) $(0,444\dots)^2 \cdot 1,5^3 =$ | r) $1,5^2 \div 5,25 =$ |
| d) $1,6^3 \div 1,2^2 =$ | i) $(50\% \text{ de } 3,666\dots)^2 =$ | n) $(0,666\dots)^2 \div (0,222\dots)^3 =$ | s) $[(0,333\dots)^2 \cdot 1,5^3]^2 =$ |
| e) $0,5^5 \div 0,75^3 =$ | j) $2,25 \cdot (0,666\dots)^3 =$ | o) $(0,8333\dots)^2 \cdot 1,6^3 =$ | t) $(0,444\dots)^2 \cdot 2,25^3 =$ |

Saber calcular expressões é importante, mas muitas vezes, uma questão de cálculo aparentemente complexa tem solução extremamente simples quando são utilizadas tais propriedades. Considere o exemplo:

CN 97

Resolvendo-se a expressão

$$\frac{\left\{\left[\left(\sqrt[3]{1,331}\right)^{12/5}\right]^0\right\}^{-7,2} - 1}{8^{33} + 8^{33} + 8^{33} + 8^{33} + 8^{33}} \times \frac{1}{2^{302}}$$

encontra-se:

- (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1 (E) 0



Alunos do Colégio Naval:
Precisam “detonar” as expressões numéricas e encontrar seus atalhos.

Solução:

A expressão levaria a cálculos bastante “indigestos”, entretanto a resposta não necessita de cálculos. Basta observar a expressão entre colchetes, que é complexa mas está elevada a zero. Sabemos que qualquer número elevado a zero é igual a 1, desde que não seja 0^0 . Certamente a expressão entre colchetes não vale zero, pois é a raiz cúbica de um número positivo, elevado a um expoente positivo. Ao elevamos 1 à potência 7,2, permanece o resultado 1, pois se elevarmos 1 a qualquer potência o resultado será 1. Subtraindo 1, ficamos com o denominador zero. Zero dividido por qualquer número vale zero (somente não é permitido $0/0$). Este numerador zero da primeira fração, dividido pelo denominador que certamente é um valor positivo, resulta em zero. Multiplicando pela segunda fração, não importa o seu valor, o resultado será zero.

Isto mostra que muitas vezes expressões extremamente complicadas são resolvidas sem contas, apenas aplicando as propriedades das operações.

Um outro exemplo está presente em uma tese de mestrado na qual o autor sustenta que é inútil ensinar os alunos a realizarem cálculos complexos, entretanto a questão é muito fácil, bastando usar as propriedades das operações. Provavelmente o responsável pela discussão considerou-a uma questão com cálculos complexos por não ter vislumbrado a solução mais simples, que usa apenas propriedades das potências de expoente zero e base 1.

Exemplo: Determine o valor de x em:

$$\left(\frac{\frac{4\frac{5}{6}}{11} - \sqrt[6]{64} - 2\frac{7}{9} + 0,8}{x + 9} \right) \cdot \left(\frac{\frac{8}{x}}{7 + \sqrt{81}} \right) = 0$$

O produto de dois números vale zero quando pelo menos um deles vale zero. Os números deste problema são frações, portando basta que um dos denominadores seja zero para que a expressão seja igual a zero. O segundo denominador, $8/x$, não pode ser zero, pois seu numerador é 8. O denominador da primeira fração dá um pouco de trabalho para calcular, mas é fácil observar que também não pode ser zero. A primeira fração é menor que 0,5, o quarto termo é 0,8, então não chegam a 1,3. Os termos do meio são negativos, e seu total em módulo é maior que 4. Sendo assim este numerador é negativo, e não zero. Apenas analisando esses dois denominadores concluímos que este produto nunca será zero, para valor algum de x. Sendo assim a equação não tem solução: nenhum valor de x a satisfaz. Trata-se de uma equação impossível.

Os dois exemplos acima mostram que conhecer as propriedades das operações matemáticas pode resolver certos problemas sem a necessidade de contas. Aliás, são problemas cuja solução deve ser feita sem contas. Servem para testar se o aluno conhece as propriedades das operações matemáticas. Não são problemas para o aluno realizar cálculos absurdos.

Potências de números racionais – expoentes negativos

No estudo dos números naturais, dos números inteiros e até esta parte do estudo dos números racionais, lidamos somente com potências com expoentes inteiros positivos (e o expoente zero, é claro).

Sabemos que elevar um número a a uma potência n significa formar um produto com n fatores a , ou seja:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{(n \text{ vezes})}$$

Mas o que seria elevar um número a a uma potência $-n$?

$$a^{-n} = ?$$

Podemos descobrir o que significa a^{-n} aplicando uma fórmula já vista nas propriedades das potências:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

Essa fórmula vale para qualquer número racional a , e para quaisquer expoentes inteiros naturais x e y (exceto caso seja formado 0^0). Se esta fórmula valesse também para expoentes negativos, poderíamos fazer $x=n$ e $y=-n$, ficando com:

$$a^n \cdot a^{-n} = a^{n-n} = a^0 = 1$$

Então, a^{-n} e a^n são números que, quando multiplicados, dão resultado 1. Já vimos que isso é uma característica do inverso de um número racional: ao multiplicarmos um número pelo seu inverso, o resultado é 1. Concluimos então que a^{-n} é o inverso de a^n . Escrevemos então:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Essa relação vale para qualquer número a que seja natural, inteiro ou racional. Vale também para números irracionais e para números reais. Só não vale para $a=0$, ou seja, o número 0 não pode ser elevado a expoentes negativos, caso contrário resultaria em um denominador nulo, e sabemos que a divisão por zero não existe.

Exemplos:

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2}; \quad (-4)^{-3} = \frac{1}{(-4)^3}; \quad 7^{-1} = \frac{1}{7}$$

Esse último resultado é importante: $a^{-1} = 1/a$, ou seja, elevar um número à potência -1 é a mesma coisa que encontrar o seu inverso.

Vejamos agora o que ocorre quando a é um número racional. A fórmula $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ pode ser escrita como:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1^n}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

Então, se a for um número racional, na forma x/y , o inverso de a será y/x . Ficamos então com:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\frac{y}{x}\right)^n$$

Em outras palavras, elevar um número racional a uma potência negativa, é o mesmo que inverter este número racional (trocar de lugar o numerador com o denominador) e tornar o expoente positivo.

Exemplos:

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{5}\right)^2; \quad \left(\frac{7}{10}\right)^{-5} = \left(\frac{10}{7}\right)^5; \quad 3^{-5} = \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{3^5}$$

Note que para inverter uma fração, trocamos de lugar o numerador com o denominador. Para inverter um número inteiro, formamos uma fração com numerador 1, e com denominador igual ao número. Note ainda que o inverso de uma fração que tem numerador 1, é um número inteiro.

Ex: O inverso de $1/5$ é 5.

Exercícios

E77) Calcule as seguintes expressões

a) O inverso de $(1/2)^2 =$

f) $(1/7)^{-2} =$

k) $(2/5)^{-3} =$

p) $1/(4^{-2}) =$

b) $(3/4)^{-2} =$

g) $(3/2)^{-3} =$

l) $(3/10)^{-3} =$

q) $(1/3)^{-3} =$

c) $10^{-2} =$

h) $(1/2)^{-5} =$

m) $(5/3)^{-2} =$

r) $3/(10^{-2}) =$

d) $(2/3)^{-3} =$

i) $8^{-2} =$

n) $1/(10^{-2}) =$

s) $(3/10)^{-2} =$

e) $1/(4^{-2}) =$

j) $10^{-3} =$

o) $(1/5)^{-3} =$

t) $(3/5)^{-3} =$

E78) Calcule as seguintes expressões

a) $\left(-\frac{1}{5}\right)^2 \times \left(-\frac{1}{5}\right)^{-3}$

f) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-8} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$

k) $\left(-\frac{5}{9}\right)^{-5} \times \left(-\frac{9}{10}\right)^{-5}$

p) $\left(-\frac{5}{3}\right)^{-6} \times \left(-\frac{3}{50}\right)^{-6}$

b) $\left(-\frac{2}{3}\right)^8 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^{-5}$

g) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{-7}$

l) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} \times \left(\frac{5}{2}\right)^{-3}$

q) $\left(\frac{5}{6}\right)^{-4} \times \left(-\frac{2}{5}\right)^{-4}$

c) $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-4} \times \left(-\frac{3}{5}\right)^2$

h) $\left(-\frac{3}{10}\right)^6 \times \left(-\frac{3}{10}\right)^{-3}$

m) $\left(-\frac{3}{20}\right)^{-3} \times \left(\frac{5}{3}\right)^{-3}$

r) $\left(-\frac{6}{40}\right)^{-2} \times \left(\frac{20}{27}\right)^{-2}$

d) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} \times \left(\frac{2}{5}\right)^3$

i) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$

n) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 \div \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$

s) $\left(\frac{1}{10}\right)^8 \div \left(\frac{1}{10}\right)^{-5}$

e) $\left(\frac{1}{10}\right)^{-4} \times \left(\frac{1}{10}\right)^3$

j) $\left(-\frac{3}{10}\right)^{-4} \times \left(-\frac{5}{3}\right)^{-4}$

o) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} \div \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$

t) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-9} \div \left(\frac{2}{5}\right)^{-6}$

E79) Calcule as seguintes expressões

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-7} \div \left(\frac{2}{5}\right)^{-5}$

f) $\left(\frac{5}{15}\right)^{-2} \div \left(-\frac{8}{3}\right)^{-2}$

k) $\left(-\frac{2}{1}\right)^{-3} \div \left(\frac{3}{1}\right)^{-3}$

p) $\left(\frac{20}{36}\right)^{-5} \div \left(-\frac{10}{9}\right)^{-5}$

b) $\left(-\frac{6}{15}\right)^{-2} \div \left(\frac{14}{30}\right)^{-2}$

g) $\left(\frac{3}{21}\right)^{-10} \div \left(\frac{10}{35}\right)^{-10}$

l) $\left(\frac{6}{33}\right)^{-4} \div \left(\frac{35}{77}\right)^{-4}$

q) $\left(-\frac{26}{10}\right)^{-3} \div \left(\frac{39}{35}\right)^{-3}$

$$\begin{array}{llll}
 \text{c)} \left(\frac{2}{3}\right)^8 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} & \text{h)} \left(\frac{35}{105}\right)^{-7} \div \left(\frac{20}{6}\right)^{-7} & \text{m)} \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^{-3} & \text{r)} \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{-6}\right]^3 \\
 \text{d)} \left(\frac{3}{10}\right)^{-3} \div \left(\frac{3}{10}\right)^{-5} & \text{i)} \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}\right]^2 & \text{n)} \left[\left(-\frac{2}{5}\right)^{-5}\right]^3 & \text{s)} \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}\right]^2 \\
 \text{e)} \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \div \left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} & \text{j)} \left[\left(-\frac{1}{10}\right)^2\right]^{-4} & \text{o)} \left[\left(-\frac{3}{10}\right)^{10}\right]^{-2} & \text{t)} \left[\left(\frac{2}{7}\right)^{-2}\right]^{-3}
 \end{array}$$

Raízes de números racionais

No capítulo 14, estudaremos os números irracionais, faremos exercícios envolvendo cálculos complexos com raízes quadradas, cúbicas e de ordem superior, como:

$$\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3 + 2\sqrt{5}}}}{1 - 2\sqrt[3]{5 + 2\sqrt{3}}}$$

Este tipo de cálculo é sempre cobrado nas questões de concursos como Colégio Naval, EPCAr e Colégio Militar, para admissão no ensino médio.

Neste capítulo veremos expressões mais simples, envolvendo apenas raízes quadradas e raízes cúbicas, de números que são quadrados perfeitos e cubos perfeitos. Você já aprendeu no capítulo 1, raízes como:

$$\sqrt{400} = 20$$

$$\sqrt{289} = 17$$

$$\sqrt{225} = 15$$

$$\sqrt{64} = 8$$

$$\sqrt[3]{27} = 3$$

$$\sqrt[3]{64} = 4$$

$$\sqrt[3]{512} = 8$$

$$\sqrt[3]{1000} = 10$$

$$\sqrt[3]{-216} = -6$$

$$\sqrt[3]{-64} = -4$$

Todos os números acima são quadrados perfeitos ou cubos perfeitos, por isso suas raízes quadradas ou cúbicas, respectivamente, são números inteiros.

Vamos fazer o mesmo agora, porém com números racionais. Se elevarmos um número racional ao quadrado, o resultado será uma fração onde o numerador e o denominador são quadrados perfeitos. Podemos então extrair a raiz quadrada desse resultado e encontrar um número racional.

Exemplo:

Considere o número racional $\frac{2}{5}$.

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$$

Apesar da noção de quadrado perfeito ser aplicada apenas a números naturais, podemos usar o mesmo princípio em frações cujo numerador e denominador sejam quadrados perfeitos. A raiz quadrada de uma fração é outra fração, obtida com a raiz quadrada do numerador e a raiz quadrada do denominador:

$$\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$$

Acabamos então de mostrar como calcular a raiz quadrada de uma fração: é uma outra fração, obtida pela divisão da raiz quadrada do numerador, pela raiz quadrada do denominador.

Outro exemplo:

$$\sqrt{\frac{9}{49}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{49}} = \frac{3}{7}$$

Algumas vezes é preciso simplificar a fração para que seu numerador e denominador se tornem quadrados perfeitos. Por exemplo:

$$\sqrt{\frac{18}{50}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$$

Nem sempre os números serão quadrados perfeitos, e nesses casos temos que deixar os radicais indicados. Isto é o que chamamos de *cálculo de radicais*, assunto que será abordado no capítulo 14. No presente capítulo lidaremos apenas com raízes exatas.

Lembre-se que só é possível extrair a raiz quadrada de números positivos. Já a raiz cúbica existe, para números positivos e para negativos. A raiz cúbica de um número positivo é positiva. A raiz cúbica de um número negativo é negativa.

Exemplos:

$$\sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{4}{5}$$

$$\sqrt[3]{-\frac{216}{1000}} = -\frac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt[3]{1000}} = -\frac{6}{10}$$

Podem aparecer também raízes de números decimais ou dízimas periódicas. O modo mais fácil de calcular essas raízes é converter os valores para frações, assim recaímos em calcular raízes de números naturais no numerador e no denominador.

Exemplo:

$$\sqrt{0,25} = \sqrt{\frac{25}{100}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{100}} = \frac{5}{10} = 0,5$$

Nesses casos podemos deixar o resultado na forma de fração ou na forma de número decimal.

Exemplo:

$$\sqrt{0,444...} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3} = 0,666...$$

Também podemos nesse caso, deixar o resultado na forma de fração ou de dízima ou número decimal.

Exercícios

E80) Calcule as seguintes raízes quadradas:

a) $\sqrt{\frac{1}{4}}$

f) $\sqrt{\frac{1}{100}}$

k) $\sqrt{\frac{25}{144}}$

p) $\sqrt{\frac{144}{25}}$

b) $\sqrt{\frac{4}{9}}$

g) $\sqrt{\frac{4}{25}}$

l) $\sqrt{\frac{81}{64}}$

q) $\sqrt{\frac{4}{169}}$

c) $\sqrt{\frac{25}{81}}$

h) $\sqrt{\frac{81}{4}}$

m) $\sqrt{\frac{16}{49}}$

r) $\sqrt{\frac{100}{256}}$

d) $\sqrt{\frac{49}{36}}$

i) $\sqrt{\frac{16}{121}}$

n) $\sqrt{\frac{81}{169}}$

s) $\sqrt{\frac{81}{196}}$

e) $\sqrt{\frac{64}{81}}$

j) $\sqrt{\frac{9}{100}}$

o) $\sqrt{\frac{25}{64}}$

t) $\sqrt{\frac{225}{144}}$

E81) Calcule as raízes cúbicas:

a) $\sqrt[3]{-\frac{27}{64}}$

f) $\sqrt[3]{\frac{125}{27}}$

k) $\sqrt[3]{-\frac{512}{27}}$

p) $\sqrt[3]{-\frac{729}{64}}$

b) $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$

g) $\sqrt[3]{-\frac{512}{27}}$

l) $\sqrt[3]{\frac{216}{343}}$

q) $\sqrt[3]{-\frac{125}{512}}$

c) $\sqrt[3]{-\frac{1}{1000}}$

h) $\sqrt[3]{\frac{64}{343}}$

m) $\sqrt[3]{-\frac{64}{1000}}$

r) $\sqrt[3]{\frac{1}{216}}$

d) $\sqrt[3]{\frac{343}{27}}$

i) $\sqrt[3]{-\frac{216}{27}}$

n) $\sqrt[3]{-\frac{729}{125}}$

s) $\sqrt[3]{-\frac{1000}{27}}$

e) $\sqrt[3]{-\frac{64}{216}}$

j) $\sqrt[3]{-\frac{1}{1000}}$

o) $\sqrt[3]{\frac{1}{512}}$

t) $\sqrt[3]{\frac{8}{729}}$

E82) Calcule e dê o resultado na forma de fração:

a) $\sqrt{0,111...}$

f) $\sqrt{0,81}$

k) $\sqrt{1,777...}$

p) $\sqrt{0,36}$

b) $\sqrt[3]{-0,125}$

g) $\sqrt[3]{0,027}$

l) $\sqrt{2,56}$

q) $\sqrt[3]{0,512}$

c) $\sqrt{1,44}$

h) $\sqrt{6,25}$

m) $\sqrt[3]{-0,216}$

r) $\sqrt{2,25}$

d) $\sqrt{0,0289}$

i) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$

n) $\sqrt[3]{0,001}$

s) $\sqrt{0,04}$

e) $\sqrt{1\frac{11}{25}}$

j) $\sqrt{7\frac{1}{9}}$

o) $\sqrt{1\frac{24}{25}}$

t) $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$

Cuidado com o sinal negativo

É preciso saber lidar corretamente com sinais negativos que aparecem em raízes quadradas e cúbicas. Vamos analisar os casos possíveis, através de exemplos.

a) Raiz cúbica de número negativo

Quando elevamos um número ao cubo, ele mantém o seu sinal. Se for positivo, o cubo será positivo. Se for negativo, o cubo será negativo.

Exemplos:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}; \quad \left(-\frac{2}{5}\right)^3 = -\frac{8}{125}$$

Por isso, quando extraímos a raiz cúbica, o sinal do resultado é o mesmo sinal do número que está dentro do radical:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}; \quad \sqrt[3]{-\frac{8}{125}} = -\frac{2}{5}$$

b) Sinal negativo fora do radical

Por outro lado, pode aparecer um sinal negativo fora do radical. Este sinal não tem relação alguma com a raiz. A raiz deve ser calculada normalmente, e o sinal é aplicado sobre a raiz depois de calculada. Considere que um sinal negativo antes de uma raiz é a mesma coisa que multiplicar (-1) pelo resultado da raiz.

Exemplos:

$$-\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = (-1) \times \left(\sqrt[3]{\frac{1}{8}}\right) = -\frac{1}{2}; \quad -\sqrt[3]{-\frac{27}{125}} = (-1) \times \left(-\sqrt[3]{\frac{27}{125}}\right) = \frac{3}{5}$$

Pode também aparecer um sinal negativo fora da raiz quadrada. Como a raiz quadrada é sempre positiva, o sinal negativo fora do radical tornará o resultado negativo.

Exemplos:

$$-\sqrt{\frac{4}{25}} = -\frac{2}{5}; \quad -\sqrt{\frac{9}{100}} = -\frac{3}{10}$$

c) Raiz de número negativo não existe

Não podemos extrair a raiz quadrada de números negativos, pois não existem números que fiquem negativos ao serem elevados ao quadrado.

Exemplos:

$$\sqrt{-\frac{4}{25}} \text{ não existe}; \quad \sqrt{-81} \text{ não existe}; \quad \sqrt{-100} \text{ não existe}$$

Por outro lado, o radical pode ter uma expressão, que depois da calculada, torne-se positiva, sendo assim a raiz quadrada existe:

Exemplos:

$$\sqrt{-81} = \sqrt{81} = 9 \quad ; \text{ Nesse caso, foi calculado o módulo de } -81, \text{ resultando em } +81.$$

$$\sqrt{\left|-\frac{4}{9}\right|} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \quad ; \text{ O módulo tornou o resultado do radical positivo}$$

$$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 \quad ; \text{ Ao elevarmos } -5 \text{ ao quadrado, o resultado é } +25$$

$$\sqrt{\left(-\frac{3}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{100}} = \frac{3}{10} \quad ; \text{ Elevando ao quadrado o número } -3/10, \text{ o resultado é positivo}$$

d) Raiz quadrada de um quadrado

Um dos erros mais comuns entre os estudantes é considerar que a raiz quadrada de um número ao quadrado é o próprio número, ou seja:

$$\sqrt{x^2} = x \rightarrow \text{ERRADO! ERRADO! ERRADO! ERRADO !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!}$$

por exemplo,

$$\sqrt{(-5)^2} = -5 \rightarrow \text{ERRADO! ERRADO! ERRADO! ERRADO !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!}$$

o correto é:

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

A raiz quadrada de um número ao quadrado, é o módulo deste número. O resultado da raiz quadrada sempre deve ser positivo. Por exemplo:

$$\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5 \rightarrow \text{CERTO! CERTO! CERTO !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!}$$

Exercícios

E83) Calcule as raízes, prestando a máxima atenção nos sinais

(o que é uma redundância, pois sempre temos que prestar máxima atenção no sinais)

- | | | | |
|--|-----------------------------|---|--|
| a) $-\sqrt[3]{-\frac{8}{125}}$ | f) $-\sqrt{\frac{1}{1000}}$ | k) $\sqrt[3]{-\frac{64}{729}}$ | p) $-\sqrt[3]{-\left(-\frac{1}{2}\right)^3}$ |
| b) $-\sqrt{\frac{9}{25}}$ | g) $-\sqrt[3]{-(-8)^2}$ | l) $\sqrt{-5^2}$ | q) $-\sqrt{-36}$ |
| c) $-\sqrt{\left(-\frac{1}{5}\right)^2}$ | h) $\sqrt{-\frac{64}{49}}$ | m) $\sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2}$ | r) $\sqrt[3]{x^3}$ |
| d) $\sqrt{(-8)^2}$ | i) $-\sqrt{\frac{64}{49}}$ | n) $-\sqrt{\left -\frac{9}{25}\right }$ | s) $\sqrt{(-x)^2}$ |
| e) $\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^0}$ | j) $\sqrt{\frac{-25}{-64}}$ | o) $-\sqrt{-\frac{64}{49} \times 0}$ | t) $\sqrt[3]{(-x)^3}$ |

Expoentes 1/2 e 1/3

Até agora só trabalhamos com expoentes inteiros. Na verdade um expoente pode ser qualquer número real, mas em certas condições, o resultado não existe. Vejamos agora os primeiros casos de expoentes que não são inteiros, mas sim frações. Começemos apresentando os expoentes $1/2$ e $1/3$:

a) Expoente 1/2:

Elevar um número ao expoente $1/2$ nada mais é que extrair a sua raiz quadrada.

Exemplos:

$$25^{1/2} = \sqrt{25} = 5$$

$$4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$$

$$7^{1/2} = \sqrt{7} \text{ (nesse caso, como 7 não tem raiz exata, devemos deixar indicado dessa forma)}$$

$$\left(\frac{4}{25}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$$

Assim como todas as propriedades, a definição da potência $1/2$ é uma regra que precisa ser conhecida e memorizada, porém nada mais é que uma consequência de propriedades anteriores. Vamos por exemplo demonstrar porque elevar um número a $1/2$ é o mesmo que extrair sua raiz quadrada. Considere que x é um número positivo e queremos determinar $x^{1/2}$.

Se multiplicarmos $x^{1/2}$ por $x^{1/2}$ podemos usar a propriedade de que, multiplicando potências de mesma base, os expoentes são somados. Então:

$$x^{1/2} \cdot x^{1/2} = x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = x$$

Sendo assim, $x^{1/2}$ é um número que, multiplicado por ele mesmo (ou seja, elevado ao quadrado) resulta em x . Esta é exatamente a definição de raiz quadrada, portanto:

$$x^{1/2} = \sqrt{x}.$$

b) Expoente 1/3:

Elevar um número ao expoente $1/3$ nada mais é que extrair a sua raiz cúbica.

Exemplos:

$$27^{1/3} = 3$$

$$64^{1/3} = 4$$

$$10^{1/3} = \sqrt[3]{10} \text{ (como 10 não tem raiz cúbica exata, devemos deixar indicado dessa forma)}$$

$$\left(\frac{27}{1000}\right)^{1/3} = \sqrt[3]{\frac{27}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{3}{10}$$

c) Expoente p/q

Elevar um número ao expoente p/q nada mais é que extrair sua raiz q -ésima e elevar o resultado à potência p .

Exemplo:

$$4^{5/2} = \left(4^{1/2}\right)^5 = \left(\sqrt{4}\right)^5 = 2^5 = 32$$

d) Expoente $2/3 = 0,666...$

Elevar um número ao expoente $2/3$ é o mesmo que extrair sua raiz cúbica e elevar o resultado ao quadrado. É uma consequência da regra de elevação à potência p/q , onde $p=2$ e $q=3$.

Exemplos:

$$27^{2/3} = \left(27^{1/3}\right)^2 = 3^2 = 9$$

$$64^{2/3} = \left(64^{1/3}\right)^2 = 4^2 = 16$$

$$125^{2/3} = \left(125^{1/3}\right)^2 = 5^2 = 25$$

$$1000^{2/3} = \left(1000^{1/3}\right)^2 = 10^2 = 100$$

$$\left(\frac{27}{125}\right)^{2/3} = \left(\sqrt[3]{\frac{27}{125}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{125}}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

e) Expoente $1,5 = 3/2$

Elevar um número ao expoente $3/2$ é a mesma coisa que extrair sua raiz quadrada e elevar o resultado ao cubo. É uma consequência da regra de elevação à potência p/q , onde $p=3$ e $q=2$. Somente números não negativos podem ser elevados a esse expoente.

Exemplos:

$$9^{3/2} = \left(9^{1/2}\right)^3 = 3^3 = 27$$

$$25^{3/2} = \left(25^{1/2}\right)^3 = 5^3 = 125$$

$$36^{3/2} = \left(36^{1/2}\right)^3 = 6^3 = 216$$

$$100^{3/2} = \left(100^{1/2}\right)^3 = 10^3 = 1000$$

$$\left(\frac{25}{36}\right)^{3/2} = \left(\sqrt{\frac{25}{36}}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}}\right)^3 = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$$

f) Expoentes $-1/2, -1/3, -2/3, -3/2$

Para lidar com expoentes negativos, basta inverter a base e tornar o expoente positivo.

Exemplo:

$$25^{-1/2} = \left(\frac{1}{25}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}$$

$$1000^{-1/3} = \left(\frac{1}{1000}\right)^{1/3} = \sqrt[3]{\frac{1}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{1}{10}$$

$$\left(\frac{27}{125}\right)^{-2/3} = \left(\frac{125}{27}\right)^{2/3} = \left(\sqrt[3]{\frac{125}{27}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{27}}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$$

Exercícios

E84) Calcule as seguintes potências:

- | | | | |
|---------------------------------------|--|---|---|
| a) $-36^{1/2}$ | f) $(-64)^{1/2}$ | k) $(-64)^{1/3}$ | p) $216^{1/3}$ |
| b) $\left(\frac{4}{9}\right)^{1/2}$ | g) $-\left(\frac{25}{81}\right)^{1/2}$ | l) $\left(-\frac{81}{100}\right)^{1/2}$ | q) $\left(-\frac{27}{125}\right)^{1/3}$ |
| c) $1000^{1/3}$ | h) $64^{2/3}$ | m) $(-64)^{2/3}$ | r) $64^{-2/3}$ |
| d) $\left(-\frac{1}{27}\right)^{2/3}$ | i) $-\left(-\frac{64}{125}\right)^{2/3}$ | n) $\left(\frac{25}{81}\right)^{3/2}$ | s) $\left(\frac{9}{49}\right)^{-3/2}$ |
| e) $25^{3/2}$ | j) $-81^{3/2}$ | o) $-(-144)^{3/2}$ | t) $64^{-3/2}$ |

A raiz quadrada negativa?

Existe um problema potencial que pode resultar em erros em problemas relacionados com a raiz quadrada. O problema já foi apresentado no capítulo 1, e convém repeti-lo aqui.

1) Existem duas formas de referencia à raiz quadrada. Essas duas formas têm significados ligeiramente diferentes:

- a) Com o símbolo $\sqrt{\quad}$
 b) por extenso: “a raiz quadrada de...”

O símbolo $\sqrt{\quad}$ significa “a raiz quadrada positiva de”, o que é diferente de dizer simplesmente “a raiz quadrada de”. Quando indicamos, por exemplo, $\sqrt{9}$, estamos nos referindo apenas ao valor positivo, que é +3. Isto é uma definição adotada pelos matemáticos e autores de livros. Já a expressão “raiz quadrada”, por extenso, indica o número que elevado ao quadrado, resulta no número dado. Quando escrevemos “raiz quadrada de 9”, estamos nos referindo ao número que elevado ao quadrado, resulta em 9. Sendo assim, temos duas possibilidades: +3 ou -3. Dizemos então que a raiz quadrada positiva de 9 é 3, e a raiz quadrada negativa de 9 é -3. Em resumo, $\sqrt{9}$ vale 3, porém “raiz quadrada de 9” existem duas, a positiva +3 e a negativa -3. Apesar dessa convenção ser usada pela maioria dos matemáticos, sua aceitação não é 100% universal. O que é universal é o fato da expressão \sqrt{x} , em um cálculo, equação ou fórmula matemática, indicar somente o valor positivo da raiz de x. Já a expressão por extenso quase sempre indica duas possibilidades, a positiva e a negativa. Uma questão de prova pode considerar o contrário, ou seja, que “a raiz quadrada” indica apenas o valor positivo, mas isto

deve ser deixado claro no enunciado, para evitar confusão. Se não for deixado claro, o uso da expressão “a raiz quadrada” indica que é considerada apenas a positiva, enquanto “uma raiz quadrada” ou “a raiz quadrada positiva” ou “a raiz quadrada negativa” indica que ambas são consideradas.

É errado escrever, por exemplo, $\sqrt{9} = \pm 3$, pois o uso do símbolo $\sqrt{}$ nos obriga a considerar apenas a raiz positiva. O correto é $\sqrt{9} = 3$.

É errado escrever $\sqrt{x^2} = x$. O correto é $\sqrt{x^2} = |x|$. Se x for negativo, por exemplo, $x = -3$, temos que $(-3)^2 = 9$, e $\sqrt{9} = 3$. Se considerássemos que $\sqrt{x^2} = x$, estaríamos dizendo que $\sqrt{(-3)^2} = -3$, o que estaria errado. Já $\sqrt{(-3)^2} = |-3|$ estaria correto, resultando em 3.

É diferente quando temos uma equação da forma $x^2 = 9$. Não está sendo especificada raiz quadrada alguma. Na resolução da equação, temos duas soluções. A equação $x^2 = 9$ significa que “ x é um número que elevado ao quadrado resulta em 9”. A equação tem duas soluções, que são as raízes quadradas de 9, ou seja, 3 e -3 . A partir de $x^2 = 9$ chegamos a $x=3$ ou $x=-3$, mas isto não é exatamente a mesma coisa que escrever “ $\sqrt{9} = \pm 3$ ”, que está errado, pois $\sqrt{9} = 3$.

Já foram exploradas em concursos, questões que visavam avaliar se o aluno possui este entendimento correto, ou se tem o conceito equivocado. Em alguns casos, a própria banca examinadora se engana, apresentando uma solução errada.

Vejamos alguns exemplos:

CMSM 2011

Com a descoberta dos números irracionais foi necessário verificar as propriedades dos números incluindo agora essa nova classe. Das alternativas abaixo marque a única que é VERDADEIRA:

- (A) a soma de dois números irracionais é um número irracional.
- (B) $\sqrt{x^2} = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
- (C) se x e y são números reais tais que $(x-y)x = 2(x-y)$, então $x=2$.
- (D) o produto de dois números irracionais pode ser um número racional.
- (E) $\frac{1}{x}$ é o inverso do número real x , qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.

Chamamos atenção ao item (B) da questão. É errado que para todo x real, $\sqrt{x^2} = x$. Isto é válido apenas para x positivo ou zero. O correto seria indicar $\sqrt{x^2} = |x|$. A resposta correta, de acordo com o gabarito, também correto, é (D).

Outro exemplo:

CMB 2006

A expressão $\sqrt{\left(\sqrt[3]{63} + 4\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt[3]{63} - 4\right)^2}$ é igual a:

- (A) 0 (B) $2\sqrt[3]{63}$ (C) 8 (D) $\sqrt[3]{63}$ (E) 4

Um aluno distraído irá considerar que $\sqrt{x^2} = x$, ficando então com:

$$\sqrt{(\sqrt[3]{63}+4)^2} + \sqrt{(\sqrt[3]{63}-4)^2} = \sqrt[3]{63}+4 + \sqrt[3]{63}-4 = 2\sqrt[3]{63}, \text{ resposta (B)}$$

Totalmente errado, pois não é correto que $\sqrt{x^2} = x$. Ao extrair a raiz quadrada da expressão que está elevada ao quadrado, o sinal tem que ser tornado positivo. O termo $(\sqrt[3]{63}+4)$ é obviamente positivo, mas o termo $(\sqrt[3]{63}-4)$ é negativo! Basta observar que a raiz cúbica de 63 é menor que a raiz cúbica de 64, ou seja, 4. Se subtrairmos a raiz cúbica de 63, de 4 unidades, resultará um valor negativo. Sendo assim, é preciso tornar a expressão positiva invertendo seu sinal, ficando então com $(4-\sqrt[3]{63})$. Portanto a expressão resulta em:

$$\sqrt{(\sqrt[3]{63}+4)^2} + \sqrt{(\sqrt[3]{63}-4)^2} = \sqrt[3]{63}+4 + 4-\sqrt[3]{63} = 8$$

A resposta certa é a letra (C). Obviamente esta questão necessita de conhecimentos de cálculo de radicais (capítulo 14), entretanto é possível que o sinal da raiz é usado como “pegadinha” em provas de concursos.

Por outro lado, existem casos em que a própria banca cometeu este erro.

CMB 2005

Simplificando a expressão $\sqrt{a^6 - \frac{4}{5}a^3 + 0,16}$, obtém-se:

(A) $a + \frac{2}{5}$ (B) $a^3 - \frac{2}{5}$ (C) $a^2 + \frac{2}{5}$ (D) $a^3 + \frac{2}{5}$ (E) $a^3 + 0,4$

A expressão que está dentro do radical é um quadrado perfeito:

$$a^6 - \frac{4}{5}a^3 + 0,16 = \left(a^3 - \frac{2}{5}\right)^2$$

Seríamos tentados a usar

$$\sqrt{a^6 - \frac{4}{5}a^3 + 0,16} = \sqrt{\left(a^3 - \frac{2}{5}\right)^2} = a^3 - \frac{2}{5} \text{ (resultante da fórmula do quadrado da soma, cap. 4)}$$

Porém, o correto é $\left|a^3 - \frac{2}{5}\right|$, pois não podemos garantir que $a^3 - 2/5$ seja positivo.

A banca não atentou para este detalhe e não considerou o módulo. É uma questão digna de anulação.

Expressões com números racionais

Uma das maiores dificuldades enfrentadas pelos alunos na álgebra é o cálculo de expressões. Esses cálculos são muito cobrados no 6º, 7º, 8º e 9º ano do ensino fundamental, e sobretudo em provas de concursos. Com os conhecimentos que temos até o momento já podemos resolver grande parte dos cálculos que envolvem números inteiros ou racionais, positivos ou negativos, com adição, subtração, multiplicação, divisão, potências e raízes. Esses cálculos ficarão mais difíceis nos próximos capítulos, com o cálculo de radicais e o cálculo algébrico

(expressões algébricas com letras e números). Ainda assim, os conhecimentos que você tem até agora são suficientes para resolver expressões bastante complexas, até mesmo já propostas em provas de concursos.

Exemplo (CN-2000):

O valor da expressão:

$$\left(\sqrt[3]{-\frac{16}{27} + \frac{16}{9} \cdot (0,333\dots + 1) - \left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}} \right)^{\frac{\sqrt{25}}{2} + 3} \quad \text{é}$$

(A) $\sqrt[3]{-\frac{1}{3}}$ (B) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ (C) 0 (D) 1 (E) -1

Solução:

A expressão nada mais é que uma raiz cúbica elevada a um expoente estranho: $\frac{\sqrt{25}}{2} + 3$, que é igual a $5/2 + 3 = 11/2$. Vamos então calcular a expressão que está dentro do radical:

$$-\frac{16}{27} + \frac{16}{9} \cdot (0,333\dots + 1) - \left(-\frac{3}{4}\right)^{-2} = -\frac{16}{27} + \frac{16}{9} \cdot \left(\frac{1}{3} + 1\right) - \left(\frac{4}{3}\right)^2 =$$

Até agora apenas transformamos a dízima 0,333... na fração 1/3, e tratamos a fração $-3/4$ que está elevada a -2 ; ficará positiva porque o expoente é par, e invertemos esta fração para que o expoente -2 se torne 2.

$$-\frac{16}{27} + \frac{16}{9} \cdot \left(\frac{1}{3} + 1\right) - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = -\frac{16}{27} + \frac{16}{9} \cdot \frac{4}{3} - \frac{16}{9} = -\frac{16}{27} + \frac{64}{27} - \frac{16}{9}$$

Reduzindo as três frações ao mesmo denominador, ficamos com:

$$-\frac{16}{27} + \frac{64}{27} - \frac{16}{9} = -\frac{16}{27} + \frac{64}{27} - \frac{48}{27} = \frac{-16 + 64 - 48}{27} = \frac{0}{27} = 0$$

Agora podemos extrair a raiz cúbica deste resultado, e elevá-lo a 11/2:

$$\left(\sqrt[3]{0}\right)^{\frac{11}{2}} = (0)^{\frac{11}{2}} = 0$$

Resposta: (C) 0

Exemplo (CN-1997):

Resolvendo-se a expressão

$$\frac{\left\{ \left[\left(\sqrt[3]{1,331}^{-12/5} \right) \right]^0 \right\}^{-7/2} - 1}{8^{33} + 8^{33} + 8^{33} + 8^{33} + 8^{33}} \times \frac{1}{2^{302}}$$

encontra-se:

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1 (E) 0

Solução:

É muito importante saber calcular expressões, e também conhecer as propriedades das operações numéricas. Questões aparentemente complexas podem ser na verdade bastante simples, visando não necessariamente verificar a habilidade do aluno com contas, mas também conhecer certas propriedades simplificadoras. Por exemplo, desconfie sempre do expoente zero. Sabemos que elevando qualquer número (exceto 0) ao expoente zero, o resultado é 1.

Note que aquela raiz cúbica, que ainda está elevada a $12/5$, está também elevada a 0, e qualquer número elevado a 0 (desde que não seja 0^0) vale 1. O número 1 está então elevado a $-7/2$, e sabemos que elevando 1 a qualquer potência (inclusive potências não inteiras e negativas) resulta em 1. Temos então uma fração com numerador 1 – 1, que dá zero. A primeira fração resulta em zero, não importa o valor do seu denominador. Multiplicando zero pela segunda fração, o resultado será zero.

Resposta:

(E) 0

Algumas vezes podem aparecer em provas, expressões complicadas que se transformam em expressões simples, quando recaímos em potências com 0 ou 1 na base ou no expoente. Na maioria das vezes entretanto, é preciso realizar todos os cálculos. Vamos encontrar portanto expressões que envolvem:

- Adição, subtração, multiplicação e divisão de números racionais
- Conversões de formatos (dígitos para frações, etc.)
- Uso de parênteses, chaves e colchetes
- Potências e raízes

Basta então saber realizar essas operações, conhecer as suas propriedades (o que muitas vezes simplifica os cálculos) e saber a ordem em que devem ser realizadas.

Uma coisa é certa: as bancas de concursos adoram propor questões envolvendo expressões numéricas e expressões algébricas (com letra). Praticamente todas as provas, em todos os anos, apresentam este tipo de questão.

Exercícios

E85) Resolva as seguintes expressões

a) $\frac{12}{7} \times \frac{1}{2} + 0,333... \times \left(-\frac{16}{3}\right)$

k) $\left(-\frac{5}{9}\right)^{-2} \times \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^3\right]^2$

b) $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} + 2\frac{2}{9} \times \left(-2\frac{1}{4}\right)$

l) $-\left(\frac{10}{7}\right)^2 \times \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^1\right]^{-2}$

c) $0,333... \times \frac{12}{5} + \frac{20}{32} \div \left(-\frac{15}{24}\right)$

m) $-\left(-\frac{3}{10}\right)^2 \times \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^3$

$$d) \frac{18}{15} \times \frac{105}{14} - \frac{2}{7} \times \frac{3}{16}$$

$$n) \left(2\frac{1}{2}\right)^5 \times \left[-\left(\frac{2}{5}\right)^2\right]^3$$

$$e) 1\frac{1}{2} \times 4\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \times \left(-1\frac{5}{7}\right)$$

$$f) 5 \times \frac{6}{7} + \frac{4}{5} \times \frac{3}{14}$$

$$g) \frac{7}{11} \times \frac{1}{2} + 5 \times \left(-\frac{3}{10}\right)$$

$$h) \frac{12}{26} \div \frac{72}{65} + -3\frac{1}{5} \div \frac{4}{25}$$

$$i) \frac{12}{23} \div 0,3 + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right) \div \left(\frac{1}{5} + \frac{3}{8}\right)$$

$$j) 2\frac{1}{7} \div \frac{3}{7} + \left(5 - \frac{1}{3}\right) \times \left(4 + \frac{1}{7}\right)$$

E86) Resolva as seguintes expressões

$$a) \frac{4}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \times \frac{7}{2}$$

$$b) \frac{5}{3} \times \frac{2}{5} - \frac{2}{9} \times \frac{3}{5}$$

$$c) \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \times \frac{7}{3}$$

$$d) \frac{2}{21} \times \frac{7}{5} + \frac{4}{9} \times \frac{1}{8}$$

$$e) \frac{5}{2} \times \frac{4}{3} + \frac{1}{9} \times \frac{15}{2}$$

$$f) -\frac{2}{3} \times \left(-\frac{9}{5}\right) - \left(-\frac{4}{3}\right) \times \frac{5}{2}$$

$$g) \left(-\frac{2}{3}\right) \times \frac{5}{4} + \left(-\frac{3}{5}\right) \times \frac{1}{2}$$

$$h) \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{4}\right) \times \left(-\frac{1}{5}\right)$$

$$i) -\frac{2}{3} \times \left(-\frac{4}{3}\right) + \frac{2}{5} \times \left(-\frac{4}{9}\right)$$

$$j) \frac{1}{12} \times \left(-\frac{4}{5}\right) - \left(-\frac{3}{4}\right) \times \left(-\frac{1}{5}\right)$$

$$k) \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(2 - \frac{1}{3}\right) \div \left(3 - \frac{1}{4}\right) + \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{5} \times \left(-\frac{7}{3}\right)\right]$$

$$l) \left[\frac{4}{9} - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right] \div \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right]$$

$$m) \left[\frac{9}{10} - \frac{2}{5} + \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{2}{3} + \frac{5}{6} + \frac{1}{2}\right]$$

$$n) \left[-\frac{1}{2} + 1\frac{1}{3} + 1\frac{1}{5}\right] \div \left[-\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right]$$

$$o) \left[2\frac{1}{3} - \frac{4}{5} - \frac{1}{2}\right] \div \left[\frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{2}\right]$$

$$p) \left[\frac{5}{2} \times \frac{4}{3} - \frac{1}{9} \times \frac{15}{2}\right] \times \left[\frac{1}{2} - \frac{15}{36} \times \frac{4}{5} + \frac{2}{15} \times \frac{25}{8} \times \frac{4}{5}\right]$$

$$q) \left[-\frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right] \div \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{5}{6}\right] - \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{5}\right] \times \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right]$$

$$r) -\frac{1}{2} - \left\{\frac{2}{3} \times \left[\left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{3}{5} \times \frac{5}{3}\right) - \frac{1}{2}\right] + \frac{1}{5} \times \frac{7}{3}\right\} - \frac{2}{3}$$

E87) Resolva as seguintes expressões

$$a) 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}} + \frac{1}{1 + \frac{2}{1 + \frac{3}{1 + \frac{1}{4}}}}$$

$$k) \left[\left(\frac{0,19^0}{\sqrt[3]{-8}}\right) \times \left(-\frac{2}{(-2)^2 - 1}\right) + \frac{(-2)^2}{27^{2/3} + 1} \div \left(\frac{64^{2/3} - 64^{1/3}}{1 + 81^{0,5}}\right)\right]$$

$$b) \left[-0,666... \times \left(\frac{5}{3}\right)^{-1} - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{2^2}{5} \right]$$

$$c) \frac{(5+3)^2 - (5-3)^2}{(-1)(-2)(-3)(-4)(-5)}$$

$$d) 1 + \left\{ 1 + \left[1 + (1+2^{-1})^{-1} \right]^{-1} \right\}$$

$$e) \frac{\left(\frac{1}{3} - 1\frac{1}{2}\right)^2}{2 - \frac{3}{4} - \frac{5}{8}} - \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{5} - 1\right)}$$

$$f) \frac{3 + \frac{2}{5} - \frac{1}{3}}{\left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{15}\right)} \times \left(1 + \frac{1}{4}\right)^2 \times \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2$$

$$g) \frac{1^1 + 1^{-1} + 11^0 + 111^0}{[(-1)^1 + (-1)^{-1}] \times [(-1)^0 + 0^1]}$$

$$h) \sqrt[3]{\sqrt{1,777...} \times \sqrt{0,444...} \times \sqrt{0,111...}}$$

$$i) \left[\left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}\right) \times \left(\frac{4}{5} \div \frac{4^{\frac{3}{2}}}{125^{\frac{2}{3}}}\right) \right] \div \sqrt{12\left(\frac{4}{3} + \frac{3}{4}\right)}$$

$$j) \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{4}{3} + \frac{1}{4}} - \frac{\frac{1}{2} + \frac{4}{5}}{\frac{13}{5} \div \frac{2}{3}} \div \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{5}{6} \times \frac{3}{7}}$$

$$l) \left[\sqrt{\frac{4}{25}} \div \left(-\frac{(2^{-2})^{-\frac{1}{2}}}{(2^{-5})^{1-0,999...}}\right) - \frac{2^{-2}}{9^{\frac{1}{2}}} \div \left(\frac{\sqrt{(-3)^2}}{(-2)^3}\right)^{-1} \right]$$

$$m) \left[0,555... \div \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{3}{5}\right)^{-1} \times \sqrt{\frac{25}{36}} \right]$$

$$n) \left[0,333... \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) \div \left(-\sqrt{2^{-2}}\right) \right]$$

$$o) \left(-\frac{25(-3)^{-3}}{2}\right) \div \left(-\sqrt{\frac{3^2+4^2}{(-2)^2}}\right) - 2\left(-\frac{9}{5}\right)^{-2} \div \left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$$

$$p) \left[7^{-1} \times [(-7)^2 + (-7)^0] \div \left(-\frac{1/14}{(-5)^{-2}}\right) - 3^4 \cdot 5^{-3} \div \frac{-9^{\frac{3}{2}}}{(-125)^{\frac{2}{3}}} \right]$$

$$q) \left[\frac{2^{-1}}{5^{-1}} \times \left(0^5 - \left(\frac{2}{5}\right)^2\right) \times 3^{-1} + 0,6^2 \div (-0,666...) \right]$$

$$r) \left[\left(2\frac{1}{2}\right) \div \left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{6}{5^2-5} \times \left(\frac{5 \cdot 2^{-2}}{3} - \frac{1}{2}\right) \times \left(1\frac{1}{3}\right) \right]$$

E88) Resolva as seguintes expressões

$$a) \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \right] \div \sqrt{4 - \left(\frac{6}{5}\right)^2}$$

$$b) \left(\frac{8}{3} \right)^{-1} \div \left(\frac{3}{4} \right) + \frac{\frac{2}{3} + \frac{4}{5}}{\frac{2}{3} - \frac{4}{5}} - \left[\frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right)}{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)} \right]$$

$$c) \left(\frac{2/3}{5/3} \right) \times \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \sqrt{0,33...^0}}$$

$$d) \frac{2^0}{2^2} \times \frac{2^2 - 2^1}{2^2 - 2^0} + \frac{2^0}{3^2 - 2^2} \times \frac{2^3 - 2^0}{2^2 - 2^0}$$

$$k) -\frac{2^1}{2^0 + 2^2} \times \frac{\sqrt{(-4)^2}}{\sqrt{|-1 + (-2)^3|}} - \frac{0,31^0}{2^2 - 2^0} \div \frac{\sqrt{(-5)^2}}{0,999...^{15}}$$

$$l) \frac{1}{(-2)^3} \left[\frac{2}{5} \times \frac{(0,222... - 0,333...)^0}{((-2)^2 - (-2)^0)} - \frac{\sqrt{(-2)^2}}{\sqrt[3]{(-3)^3}} \right]$$

$$m) \left(-\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} \times \sqrt[3]{-\frac{125}{27}} + \left(\frac{1}{9}\right)^{3/2} \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$n) -0,666... \times (-1,333...) + 0,4 \times (-0,444...)$$

$$e) \frac{2^2 + 2^0}{2^1} \times \frac{2^2}{2^2 - 2^0} + \frac{2^0}{2^3 + 2^0} \times \frac{2^4 - 2^0}{2^3 - 2^2}$$

$$f) \left(\frac{0,666...}{1,666...} \right) \times \frac{0,5 - 0,333...}{0,222... - 0,333...}$$

$$g) (1,5)^{-1} - \left(\frac{\sqrt[3]{-64} + \sqrt[3]{125}}{\sqrt{64} - \sqrt[3]{125}} \right)$$

$$h) (-1,5)^{-1} \times \left(\frac{4}{5} \right)^{-1} + \left(-\frac{5}{3} \right)^{-1} \times 2^{-1}$$

$$i) \frac{(-2)^0 + (-2)^3}{(-3)^3 + (-3)^2 + (-3)^1 + (-3)^0} =$$

$$j) \left[\sqrt{\frac{25}{9}} + \sqrt{\frac{64}{25}} - \sqrt{\frac{121}{225}} \right] \times \left[\sqrt{\frac{49}{36}} - \sqrt{\frac{25}{36}} \right]$$

$$o) -3 \times (1,25)^{-2} \times (3,333...) - 0,666... \times (-1,666...)^{-1}$$

$$p) \left(\frac{\sqrt{11^2 - 10^2 + 2^2}}{\sqrt{13^2 - 12^2}} \right)^5 \times \frac{\sqrt{10^3 + (-8)^3 + (-6)^3 - (-2)^4}}{(-2)^0 + (-2)^1 + (-2)^2}$$

$$q) \sqrt{10^{-1} \times 0,333...} \times \left[\left(\frac{2}{3} \right) \times \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4} \right)^2} + \left(-\frac{3}{5} \right) \times \frac{1}{2} \right]$$

$$r) \left[\frac{3^2}{3^2 + 3^0} - \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \right] \times [-0,666... + 0,8333... + 0,5]$$

$$s) \sqrt{\frac{1}{30} \times \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right]} \times \sqrt[3]{30 \times \left[-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{5} \right] + 5}$$

$$t) \sqrt{\frac{3}{5} \times \left[0,4 \times 0,1666... + 0,666... \times \left(\frac{3}{2} \right) \right]}$$

E89) Efetue as seguintes operações, usando as propriedades das potências

$$a) x^2 \cdot x^3$$

$$b) 4 \cdot (x^2 \cdot x^3)$$

$$c) 4 \cdot x^2 \cdot x^3$$

$$d) x \cdot x$$

$$e) x \cdot 5$$

$$f) x \cdot (x+5)$$

$$g) x^2 \cdot (x^3+5)$$

$$h) (5x^3+3x^2)/x$$

$$i) (x^2)^3$$

$$j) (3x)^2$$

$$k) (5x^2)^3$$

$$l) (x^3)^{1/3}$$

$$m) x \cdot (1+x)$$

$$n) x \cdot (1+x^3)$$

$$o) x \cdot (x^2+x^3)$$

$$p) 2x \cdot (x^2+x^3)$$

$$q) 2x \cdot (x^2-x^3)$$

$$r) 2x \cdot (3x^2-4x^3)$$

$$s) 2x \cdot 3x^2 \cdot 4x^3$$

$$t) (3x^2)^3$$

Extração de raiz quadrada

Normalmente nos exercícios e questões de provas, quando é necessário extrair a raiz quadrada, aparecem apenas quadrados perfeitos, para que os cálculos sejam facilitados. Por isso o aluno deve conhecer os quadrados perfeitos, pelo menos os mais comuns. Na vida prática entretanto pode surgir a necessidade de extrair a raiz quadrada de números grandes, e que não sejam quadrados perfeitos. Felizmente as mais simples calculadoras manuais possuem uma tecla de raiz quadrada. Uma questão maldosa em uma prova pode envolver o cálculo de uma raiz quadrada de um número grande, ou um número do qual o aluno tenha esquecido. Uma solução para o problema é saber calcular a raiz quadrada manualmente. Por exemplo, pode aparecer algo como:

$$\sqrt{6889}$$

A primeira coisa a fazer é separar o número em grupos de 2 algarismos, da direita para a esquerda. Na raiz, cada grupo dará origem a um algarismo. No exemplo:

68.89

(d) (u)

Note que usamos um ponto para separar os grupos (sempre da direita para a esquerda), mas não se trata de um ponto decimal, e sim, um separador. Como ficamos com dois grupos, a raiz quadrada deste número terá dois dígitos. Indicamos como (d) e (u), os algarismos das dezenas e das unidades da raiz quadrada que estamos tentando calcular. Cada um dos grupos é um número entre 00 e 99, e cada um deles dá origem a um algarismo.

A seguir olhamos para primeiro grupo (o mais à esquerda), no caso, 68. Este número foi obtido a partir do quadrado do algarismo das dezenas. Fica claro então que o algarismo das dezenas é 8, pois 8^2 é 64 (menor que 68), e $9^2=81$ (maior que 68). Este primeiro algarismo é encontrado de tal forma que seu quadrado seja menor que o grupo (no caso, 68), e de tal forma que o próximo algarismo (no caso, 9) tenha um quadrado maior que o grupo. É fácil então descobrir o algarismo, de acordo com o valor do grupo:

Grupo de 01 a 03 → algarismo =1

Grupo de 04 a 08 → algarismo =2

Grupo de 09 a 15 → algarismo =3

Grupo de 16 a 24 → algarismo =4

Grupo de 25 a 35 → algarismo =5

Grupo de 36 a 48 → algarismo =6

Grupo de 49 a 63 → algarismo =7

Grupo de 64 a 80 → algarismo =8

Grupo de 81 a 99 → algarismo =9

Suponha agora que tenhamos a certeza absoluta de que o número dado é um quadrado perfeito. Já sabemos que a raiz quadrada tem dois dígitos e começa com 8, então tem a forma $8x$ (80, 81, 82, 83, ... ou 89). O número do qual estamos querendo extrair a raiz é 6889. Olhamos agora para o seu algarismo das unidades, no caso, 9. Este algarismo está relacionado com o quadrado do algarismo das unidades da raiz (nossa raiz, ainda desconhecida, tem a forma $8x$). Então o algarismo x é tal que, se elevado ao quadrado, dá um resultado que termina com 9. Portanto este algarismo x só pode ser 3 ou 7. Podemos agora decidir qual deles é, por eliminação, testando 83 e 87.

$$83^2 = 83 \times 83 = 6889$$

Encontramos então o número que, se elevado ao quadrado, dá resultado 6889, que é 83. Este método permite que você encontre raízes quadradas de números que sejam quadrados perfeitos, até 9999. Se o número não for quadrado perfeito, o resultado será uma raiz inexata, como mostraremos a seguir.

Vejamos agora como extrair a raiz quadrada de números maiores. Por exemplo:

$$\sqrt{328329}$$

O método manual para extração de raiz quadrada, há décadas não é pedido em provas de concursos. Ainda assim, vamos apresentá-lo aqui, seu uso não é tão difícil.

O processo de extração é o seguinte:

1) Arme um dispositivo similar ao da conta de divisão, colocando o número a ser extraída a raiz no lugar do dividendo. A raiz que será encontrada ficará no lugar do divisor.

328329

2) Separe o número de dois em dois dígitos, da direita para a esquerda. Neste exemplo a raiz quadrada terá 3 algarismos, pois o número original ficou dividido em 3 grupos.

32.83.29

3) O primeiro grupo tem valor 32, e dará origem ao primeiro algarismo (centenas) da raiz. Como 32 está entre acima de 25 e abaixo de 36, o algarismo procurado é 5. Se fosse 25, ainda seria 5, mas se fosse 36, seria 6.

32.83.29

5

4) Coloca-se no lugar do quociente, o dobro do algarismo encontrado (dobro de 5, que é 10), e abaixo do grupo trabalhado, o quadrado do número encontrado (quadrado de 5, que é 25).

32.83.29
25

5

10

5) Subtraímos o valor do grupo processado (no caso, 32) do quadrado do dígito encontrado (no caso, 25), e colocamos o resultado abaixo (no caso, 7). Abaixamos o próximo grupo (83), ficando então com 783.

32.83.29
25
7 83

5

10

$$78 \div 10 = 7$$

6) Note que até o momento a raiz quadrada encontrada é 5 (não está completa), e o seu dobro é 10. O próximo número a ser processado é 783. Tiramos o último algarismo deste número, ficando com 78. Agora dividimos este valor pelo dobro da raiz até o momento. Ficamos com $78/10 = 7$. Este número é o candidato a ser o próximo dígito da raiz.

32.83.29
25
7 83

57

10

7) Temos agora que confirmar se este dígito encontrado (7) está correto. Se não estiver, temos que reduzir seu valor (no caso para 6, e testar novamente). Para testar, escrevemos este dígito em dois lugares: à direita da raiz (5, ficará 57) e à direita do dobro da raiz (10, ficará 107).

32.83.29
25
7 83

57

107

8) Agora multiplicamos o dobro da raiz, já acrescido do novo algarismo a ser testado (no caso, 7) pelo próprio algarismo a ser testado (7). O resultado encontrado deve ser subtraído do valor “abaixado” pela última vez (no caso, 783). Se for possível fazer a subtração, este valor (no caso 7) fica confirmado. A nova raiz calculada até o momento se torna 57, e o seu dobro se torna 114. Se não for possível (encontrado valor maior), repetimos o teste com o próximo algarismo menor (seria 6).

32.83.29
25
783
-749
34

57

107x7=749

114

9) Abaixamos o próximo grupo: 29, formando 3429. Eliminamos o algarismo das unidades, ficamos com 342. Dividimos este valor pela raiz encontrada até o momento: $342 \div 114 = 3$. Este valor deve ser escrito à direita da raiz e à direita do dobro da raiz.

$$342 \div 114 = 3$$

32.83.29
25
783
-749
3429

573

107x7=763

1143x3=3429

10) Como a divisão foi exata, a raiz foi encontrada. Se não fosse exata, teríamos que testar o dígito. Por exemplo, se encontrássemos 4 teríamos que testar se 1144×4 é menor que o número em processamento (no

32.83.29
25
783
-749

573

107x7=763

1143x3=3429

caso, 3429). Se não fosse, diminuiríamos 1 unidade no novo dígito da raiz e repetiríamos o teste.

$$\begin{array}{r} 3429 \\ -3429 \\ \hline 0 \end{array}$$

11) A raiz quadrada foi encontrada com exatidão: 573, ou seja, o número original dado é um quadrado perfeito.

Este processo também funciona para raízes inexatas, ou seja, encontrar a raiz quadrada de números que não são quadrados perfeitos. A diferença é que teremos casas decimais. Vamos exemplificar com o cálculo da raiz quadrada de 3, com 3 casas decimais.

Calcule $\sqrt{3}$ com aproximação de 0,001

1) Como queremos 3 casas decimais, vamos colocar 3 grupos de 00 depois da vírgula.

$$3,00.00.00$$

2) O primeiro grupo a ser processado é 3. A raiz é 1, e o dobro da raiz encontrada até agora é 2.

$$3,00.00.00$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \hline 2 \end{array}$$

3) Subtraímos do primeiro grupo (3), o quadrado da raiz até agora (1), ficamos com 2. Abaixamos o próximo grupo (00), ficamos com 200. Note que acabamos de passar pela vírgula, então a vírgula na raiz ficará à direita do 1.

$$\begin{array}{r} 3,00.00.00 \\ \underline{1} \\ 200 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \hline 2 \end{array}$$

4) Eliminando o algarismo das unidades de 200, ficamos com 20. Dividimos agora 20 pelo dobro da raiz até o momento (no caso, 2). Não podemos ter um dígito 10, então usaremos 9. A seguir testamos se este dígito 9 pode ser usado: acrescentamos o 9 à direita da raiz atual (ficará 29) e multiplicamos pelo dígito 9.

$$20:2 = 10 \rightarrow 9$$

$$\begin{array}{r} 3,00.00.00 \\ \underline{1} \\ 200 \\ 189 \\ \hline 1100 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 29 \times 9 = 261 \\ 28 \times 8 = 224 \\ 27 \times 7 = 189 \text{ (OK)} \end{array}$$

5) Este valor (261) é maior que 200, então não pode ser usado. Fazemos o mesmo teste com 8, e finalmente com o 7, que é aprovado. $27 \times 7 = 189$, e subtraindo de 200, restam 11.

$$\begin{array}{r} 3,00.00.00 \\ \underline{1} \\ 200 \\ 189 \\ \hline 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 29 \times 9 = 261 \\ 28 \times 8 = 224 \\ 27 \times 7 = 189 \text{ (OK)} \end{array}$$

6) Abaixamos 00, ficando com 1100. O número 7 aprovado vai para a raiz, fica 17. O dobro da raiz passa a ser 34.

$$110:34=3$$

$$\begin{array}{r} 3,00.00.00 \\ \underline{1} \\ 200 \\ 189 \\ \hline 1100 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1,7 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 29 \times 9 = 261 \\ 28 \times 8 = 224 \\ 27 \times 7 = 189 \text{ (OK)} \\ 34 \end{array}$$

Fazemos então $110:34 = 3$

7) O número 3 é testado, fazendo $343 \times 3 = 1029$, que é menor que 1100, portanto o 3 é aprovado.

$$\begin{array}{r} 3,00.00.00 \\ \underline{1} \\ 200 \\ 189 \\ \hline 1100 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1,7 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 27 \times 7 = 189 \text{ (OK)} \\ 343 \times 3 = 1029 \text{ (OK)} \end{array}$$

8) O próximo dígito da raiz é então 3. O dobro da raiz é agora 346. Fazendo $1100-1029$ encontramos 71. O próximo valor é 7100.

3,00.00.00	1,73
$\frac{1}{200}$	$27 \times 7 = 189$ (OK)
189	$343 \times 3 = 1029$ (OK)
1100	346
$\frac{1029}{7100}$	
710:346=2	

9) Fazendo $710:346$ encontramos 2, que deve ser testado. $3462 \times 2 = 6924$, que é menor que 7100, então o 2 é aprovado.

3,00.00.00	1,732
$\frac{1}{200}$	$27 \times 7 = 189$ OK
189	$343 \times 3 = 1029$ OK
1100	$3462 \times 2 = 6924$ OK
$\frac{1029}{7100}$	
6924	

Chegamos então à raiz de 3, com precisão de 3 casas decimais: 1,732. O processo poderia continuar indefinidamente.

Hoje existem calculadoras e computadores, mas no passado, raízes quadradas eram calculadas manualmente dessa forma. Para facilitar o trabalho, eram publicadas tabelas com esses valores prontos para serem usados, com várias casas decimais de precisão. Veja alguns exemplos, com precisão de 31 casas decimais:

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1,4142135623730950488016887242097 \\ \sqrt{3} &= 1,7320508075688772935274463415059 \\ \sqrt{5} &= 2,2360679774997896964091736687313 \\ \sqrt{6} &= 2,4494897427831780981972840747059 \\ \sqrt{7} &= 2,6457513110645905905016157536393 \\ \sqrt{10} &= 3,1622776601683793319988935444327 \\ \sqrt{11} &= 3,3166247903553998491149327366707 \\ \sqrt{13} &= 3,6055512754639892931192212674705\end{aligned}$$

O número de casas decimais desses números é infinito. São números irracionais, seus dígitos decimais não apresentam padrões repetitivos, como ocorre com as dízimas periódicas.

A partir desses números irracionais, podemos calcular outras raízes. Por exemplo, sabendo a raiz quadrada de 3 podemos calcular a raiz quadrada de 12. Tomemos a raiz de 3 com 3 casas decimais (1,732). Escrevemos 12 como 4×3 e aplicamos propriedades de potências:

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2 \times \sqrt{3} = 2 \times 1,732 = 3,464, \text{ aproximadamente}$$

O cálculo manual de raízes quadradas costumava ser ensinado na 6ª série (atual 7º ano), mas o cálculo de radicais, como no exemplo acima, é ensinado tipicamente no último ano do ensino fundamental.

Números irracionais

Os números racionais são aqueles que podem ser expressos como uma fração p/q , onde p e q são inteiros primos entre si, sendo que q é diferente de zero. Permitindo que p e q sejam inteiros, o resultado poderá ter um sinal positivo ou negativo, por exemplo, $3/5$ e $-3/5$.

Os números irracionais são aqueles que não podem ser expressos na forma p/q , com p e q inteiros. Os números irracionais são infinitos, assim como ocorre com os racionais. Por exemplo, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ são irracionais. Um problema clássico da álgebra é demonstrar que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Exemplo: Provar que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Esta demonstração já foi explorada em uma questão de concurso para o CMSM. Para provar que $\sqrt{2}$ é um número irracional, devemos demonstrar que este número não pode ser expresso na forma p/q , com p e q inteiros. Vamos demonstrar isso usando o *método do absurdo*. Partimos da suposição de que $\sqrt{2}$ pode ser expresso na forma p/q , com p e q inteiros primos entre si, e com q diferente de zero, e mostramos que esta suposição resulta em uma afirmação absurda. Suponha portanto que:

$$\sqrt{2} = p/q$$

Elevando ao quadrado, ficamos com:

$$2 = p^2 / q^2$$

que é o mesmo que

$$2q^2 = p^2$$

Isto indica que o número p deve ser par, já que seu quadrado é par. Podemos então chamar p de $2k$, onde k é a metade de p . Sendo assim, p^2 é o mesmo que $(2k)^2 = 4k^2$.

$$2q^2 = 4k^2$$

Simplificando por 2, ficamos com

$$q^2 = 2k^2$$

Como q^2 é um número par, então q tem que ser par. Ficamos então com:

p é par

q é par

Isto é uma contradição, pois partimos do princípio de que p e q são inteiros primos entre si. Chegamos então a um absurdo, resultante da suposição inicial de que $\sqrt{2}$ é um número da forma p/q . Logo:

$\sqrt{2}$ não pode ser expresso na forma p/q , com p e q primos entre si, logo $\sqrt{2}$ é irracional.

Podemos usar o mesmo método para mostrar que $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ são irracionais, entre outros infinitos valores.

Números irracionais possuem infinitas casas decimais que não se repetem na mesma sequência de dígitos. Em certas situações, é conveniente representar os números irracionais de forma

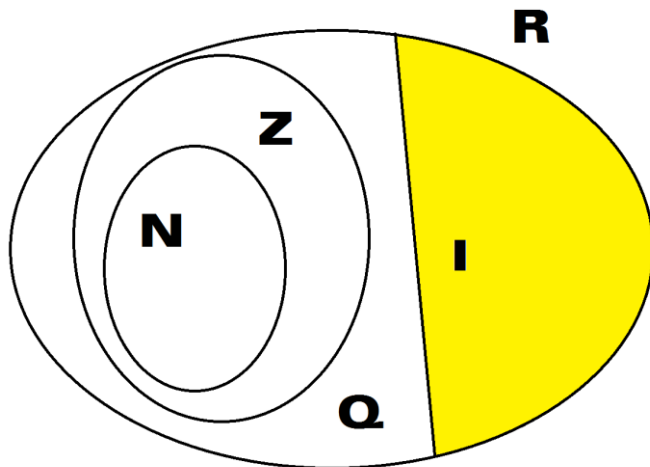
aproximada, com um número reduzido de casas decimais. Na álgebra, tipicamente deixamos a indicação de raiz, sem aproximação.

A maioria das propriedades apresentadas para os números racionais, como associatividade, distributividade, comutatividade, aplicam-se igualmente aos números irracionais. Entretanto, algumas não se aplicam, por exemplo, o fechamento. A soma, a diferença, o produto ou a divisão de números irracionais nem sempre resultam em um número irracional. Por exemplo, $(1 + \sqrt{2})$ e $(1 - \sqrt{2})$ são irracionais, mas sua soma vale 2, que não é irracional. Os números irracionais também não possuem elemento neutro aditivo nem neutro multiplicativo, pois os números 0 e 1 não pertencem aos irracionais.

No capítulo 14 estudaremos o cálculo de radicais, e aprenderemos a manipular algebricamente os números irracionais.

Números reais

Juntando todos os números racionais e todos os números irracionais temos o conjunto dos números reais. A relação entre esses conjuntos já foi apresentada no capítulo 1:



Podemos escrever:

$$R = Q \cup I$$

Ou seja, o conjunto R (Reais) é a união dos conjuntos Q e I (Racionais e Irracionais).

Todas as propriedades e operações válidas para os Racionais, são também válidas para os números reais. Uma diferença importante é que nem sempre podemos fazer manualmente cálculos com números reais, já que suas formas podem ser extremamente complexas. Por exemplo, se é fácil calcular $1/2 + 3/5$, é extremamente complexo calcular, por exemplo,

$$\frac{\sqrt{5 - \sqrt[3]{7}}}{2\sqrt{2}} - \frac{2 - 5\sqrt{3}}{\sqrt{17} - \pi}$$

Na Geometria, por exemplo, é comum ocorrerem cálculos que envolvem raízes quadradas ou cúbicas e o número π .

A partir do próximo capítulo e até o final do livro, consideramos que o conjunto de trabalho é o conjunto dos números reais. Todas as técnicas que aprenderemos valem para quaisquer números reais. Obviamente os problemas que envolvem cálculo numérico só podem ser resolvidos manualmente com números, digamos, fáceis de manipular.

Exemplo: Calcule $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

Podemos usar a propriedade distributiva da multiplicação, que vale para os números reais:

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$

Usaremos a seguinte propriedade (resulta da comutatividade da multiplicação):

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

Sendo assim,

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3 \cdot 3} = \sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$$

Ficamos então com:

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 3 - \sqrt{6} + \sqrt{6} - 2 = 1$$

Muitas vezes ocorre isso nos problemas que envolvem operações com números irracionais. Uma operação com valores relativamente complexos pode resultar em um valor simples. Isto ocorre somente porque o formulador da questão escolheu os valores cuidadosamente para que o resultado seja simples. Sem este cuidado, as operações podem resultar em valores bastante complicados.

Muitas questões de concursos envolvem a propriedade de fechamento em relação aos conjuntos numéricos. Em relação aos irracionais, a propriedade de fechamento não existe.

O conjunto dos irracionais não possui elemento neutro (nem 0, o neutro aditivo, nem 1, o neutro multiplicativo).

A soma de números irracionais nem sempre é um número irracional.

Exemplo:

$$(5 + \sqrt{3}) + (8 - \sqrt{3}) = 13$$

O produto de números irracionais nem sempre é um número irracional.

Exemplo:

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 1$$

Da mesma forma, a subtração e a divisão de números irracionais nem sempre resulta em um número irracional.

Tais conceitos costumam ser pedidos em provas, em questões do tipo (V) ou (F).

Operando com números reais

Este capítulo apresentou as principais operações algébricas envolvendo números racionais:

- Adição e subtração
- Multiplicação e divisão
- Potências e raízes
- Expressões com números racionais

A boa notícia é que praticamente todas essas operações aplicam-se também aos números irracionais. Como o conjunto dos reais (\mathbb{R}) é a união dos conjuntos \mathbb{Q} (racionais) e \mathbb{I} (irracionais), concluímos que praticamente tudo o que foi ensinado sobre operações com números racionais, vale também para números reais. Isto vale inclusive para as propriedades comutativa, associativa e distributiva. Quando consideramos os números reais, valem ainda as propriedades de fechamento e elemento neutro. Apenas os irracionais são um conjunto incomum, pois não possui o elemento neutro e nem a propriedade de fechamento.

São válidas as propriedades das potências e raízes para os números reais. Por exemplo:

$$\sqrt{a^4} = a^2$$

Ou mais genericamente:

$$\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$$

Exemplo: (CN 64)

Dê a expressão mais simples de
$$\frac{\sqrt[4]{a} \div \sqrt[8]{a}}{\frac{\sqrt[6]{a}}{\frac{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[9]{a}}{\sqrt{a}}}}$$

Solução:

$$\frac{\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[6]{a}} \div \sqrt[8]{a}}{\frac{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[9]{a}}{\sqrt{a}}} = \frac{a^{1/4} \times a^{-1/6} \times a^{-1/8}}{a^{1/3} \times a^{1/9} \times a^{-1/2}} = a^{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{2}\right)}$$

O expoente de **a** será então:

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{2} = \frac{1}{72}$$

Resposta: $\sqrt[72]{a}$

Apenas deve ser tomado cuidado com as bases negativas. Por exemplo, se **a** for negativo, **p** for ímpar e **n** for par, a expressão é inválida. Da mesma forma como não podemos extrair a raiz quadrada de um número negativo, surge restrição com uma raiz genérica como a desse exemplo. Se **a** for negativo e **p** for ímpar, então **a^p** será negativo. Dessa forma uma raiz **n**-

ésima, com n par, deste número negativo, será uma expressão inválida ou não definida (que muitos chamam informalmente de impossível).

Outra operação não permitida é a elevação de números negativos a expoentes irracionais. Por exemplo, $(-2)^{3/5}$ é uma expressão perfeitamente válida, definida como:

$$\sqrt[5]{(-2)^3} = \sqrt[5]{-8} = -\sqrt[5]{8}$$

Entretanto a definição de um número elevado a um expoente irracional não é desta forma. A definição acima não serve para expressões como:

$$5^{\sqrt{2}}$$

A definição desse tipo de potência é matéria do ensino médio. A fórmula para esse tipo de potência é:

$$a^x = 10^{x \cdot \log(a)}$$

Ou seja, este tipo de potência é baseada em *logaritmo*. Como não existem logaritmos de números negativos, não é definida a potência de expoente irracional para bases negativas. Para definir esse tipo de potência, é preciso utilizar números complexos, assunto que também faz parte da matemática do ensino médio.

Portanto não é permitida uma expressão como

$$(-5)^{\sqrt{2}}$$

Ainda assim é permitido que apareçam questões envolvendo expressões com expoentes irracionais que torna-se possível sem a necessidade do uso de logaritmos. Por exemplo:

$$\left(5^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 5^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = 5^2 = 25$$

Este cálculo está correto porque permanece válida a propriedade $(a^x)^y = a^{xy}$, mesmo quando x e y são números irracionais.

Exercícios de revisão

E90) Calcule

a) $\left(-\frac{12}{35}\right) \times \left(-\frac{5}{2}\right)$

f) $\frac{12}{21} \times \frac{8}{65} \times \frac{24}{16} \times \frac{91}{75}$

k) $\left(-\frac{7}{12}\right) \times \left(-\frac{33}{70}\right) \times \left(-\frac{25}{22}\right)$

b) $\left(\frac{5}{15}\right)^2 \div \left(-\frac{8}{3}\right)^2$

g) $\frac{\sqrt{(-2)^2} + (-2)^3 \times (-3)^2}{10 \times (1 + 2 + 3 + 4)} =$

l) $1\frac{3}{11} \times \left(-2\frac{1}{5}\right) - \frac{25}{16} \div \left(-\frac{125}{32}\right) =$

c) $\frac{2 \cdot (-15) + (-5)^2}{\sqrt{64} - \sqrt{(-4)^2}} =$

h) $\left(2\frac{8}{3} + 1\frac{1}{2}\right) \times \left(2\frac{1}{5} - 1\frac{1}{6}\right)$

m) $-2\frac{5}{6} \times \left(-3\frac{3}{5}\right) - \frac{25}{16} \div \frac{5}{8} =$

$$d) \left(\frac{18}{5}\right)^3 \times \left(-\frac{10}{9}\right)^3 \quad i) \left(-\frac{26}{10}\right)^{-3} \div \left(\frac{39}{35}\right)^{-3}$$

$$e) \frac{105}{91} \div \frac{84}{65} =$$

$$j) \left(\frac{42}{105}\right)^5 \div \left(-\frac{30}{15}\right)^5$$

$$n) \frac{\left\{ \left[\left(\sqrt[3]{1,331} \right)^{1/5} \right]^0 \right\}^{-7,2} - 1}{8^{33} + 8^{33} + 8^{33} + 8^{33} + 8^{33}} \times \frac{1}{2^{302}}$$

$$o) \frac{\left(\frac{2}{3} + 1\frac{1}{2}\right)^2}{3 - \frac{3}{4} - \frac{5}{8}} - \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{2}}{\left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{5} + 1\right)^2}$$

E91) Calcule

$$a) \left(-\frac{3}{5}\right)^1 \times \left(-\frac{3}{5}\right)^2 \times \left(\frac{-3}{10}\right)^2 \times \left(\frac{-3}{10}\right)^3$$

$$b) \left[-\frac{1}{2} + 1\frac{1}{3} + 1\frac{1}{5}\right] \div \left[-\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right]$$

$$c) \left[-0,666... \times \left(\frac{5}{3}\right)^{-1} - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{2^2}{5}\right]$$

$$d) \left[\sqrt{\frac{4}{25}} \div \left(-\frac{(2^{-2})^{-1/2}}{(2^{-5})^{1-0,999...}} \right) - \frac{2^{-2}}{9^{1/2}} \div \left(\frac{\sqrt{(-3)^2}}{(-2)^3} \right)^{-1} \right]$$

$$e) \left[\left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \right) \times \left(\frac{4}{5} \div \frac{4^{3/2}}{125^{2/3}} \right) \right] \div \sqrt{12 \cdot \left(\frac{4}{3} + \frac{3}{4} \right)}$$

$$f) \sqrt{\frac{3}{5}} \times \left[0,4 \times 0,1666... + 0,666... \times \left(3\frac{1}{2} \right) \right]$$

$$g) \left(\frac{\sqrt{11^2 - 10^2 + 2^2}}{\sqrt{13^2 - 12^2}} \right)^5 \times \frac{\sqrt{10^3 + (-8)^3 + (-6)^3 - (-2)^4}}{(-2)^0 + (-2)^1 + (-2)^2}$$

$$h) -\frac{2^1}{2^0 + 2^2} \times \frac{\sqrt{(-4)^2}}{\sqrt{-1 - (-2)^3}} - \frac{0,31^0}{2^2 - 2^0} \div \frac{\sqrt{(-5)^2}}{0,999...^{15}}$$

E92) Calcule

$$a) \frac{\sqrt{(-2)^2} + (-2)^3 \times (-3)^2}{10 \times (1 + 2 + 3 + 4)} =$$

$$f) \left(2\frac{2}{3} - 1\frac{2}{5} \right) \div \left(\frac{1}{5} + 1 \right)$$

$$k) -3\frac{3}{7} \times \left(-2\frac{1}{3} \right) - 4 \div \frac{5}{3} =$$

$$b) \frac{18}{25} \times \frac{35}{33} \times \frac{22}{15} =$$

$$g) \frac{12}{9} \times \frac{6}{5} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{4}$$

$$l) \left(-\frac{2}{5} \right)^9 \div \left(-\frac{2}{5} \right)^6$$

$$c) 0,3 \div 0,666... =$$

$$h) \left(\frac{10}{3} \right)^3 =$$

$$m) \left(\frac{5}{15} \right)^2 \div \left(-\frac{8}{3} \right)^2$$

$$d) \left(-\frac{3}{4} \right) \times \left(-\frac{2}{3} \right)$$

$$i) \left(-\frac{12}{13} \right)^2 =$$

$$n) \left[\left(-\frac{1}{3} \right)^{17} \right]^2$$

e) $-\frac{25}{16} \div (-20) =$

j) $\left(-\frac{3}{20}\right)^3 \times \left(-\frac{5}{3}\right)^3$

o) $\left(\frac{-3}{10}\right)^2 \times \left(\frac{-3}{10}\right)^3$

E93) Simplifique

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\left[\frac{98 + (2^5 - 19)}{3(13) - 2}\right]^{\left(\frac{1768}{221}\right)}}}}}$$

- (A) 9 (B) 3 (C) $\sqrt{3}$ (D) $3^{\sqrt{2}}$ (E) $\frac{95}{37}$

E94) (CN) Calcule

Calcule o valor de $\left[8^{1/3} + \left(\frac{1}{25}\right)^{-1/2} + 0,017^0\right] \times \frac{1}{0,888...}$

E95) (CN) Achar o valor de $6 \cdot (\sqrt[3]{3,375} + \sqrt{1,777...} + \sqrt[5]{32^{-1}})$

- (A) $\sqrt[3]{3} + \sqrt{2}$ (B) 20 (C) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ (D) $17 + \sqrt{5}$ (E) $\frac{48}{7}$ (F) N.R.A.

E96) Se a e b são números positivos tais que $a^{3/2} = 8$ e $b^{2/3} = 4$, calcule **b - a**.

- (A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

E97) Simplifique $\frac{x^3 y^{-2}}{(x^{-2} y^3)^{-2}}$

- (A) $\frac{1}{xy^4}$ (B) $\frac{x}{y^4}$ (C) $\frac{y^4}{x}$ (D) $\frac{x^7}{y^3}$ (E) $\frac{x^7}{y^4}$

E98) Sabe-se que **p** é um número natural maior que 1. Então, calcule o valor da expressão

$$\sqrt[p]{\frac{2^{1+p} + 2^{1+p} + 2^p}{5}}$$

- (A) 1/5 (B) 2 (C) 4 (D) p/2 (E) p/5

E99) O numeral $(5^{0,1999...})^{180}$ possui quantos divisores?

- (A) 10 (B) 18 (C) 19 (D) 36 (E) 37

E100) A expressão mais simples de $4^{13} + 4^{13} + 4^{13} + 4^{13}$ é:

- (A) 4^{14} (B) 16^{13} (C) 4^{52} (D) 4^{17} (E) 17^4

E101) Das sentenças abaixo, assinale a que não é verdadeira:

- (A) $(2/3)^2 = (3/2)^{-2}$ (B) $(0,1)^{-2} = 1/100$ (C) $x^{-1} = x$, se $x=1$ (D) $(-2)^0 = 1$ (E) $(2/3) < (3/2)$

E102) Quantos divisores tem o número $216^{1,333...}$?

- (A) 25 (B) 20 (C) 15 (D) 16 (E) NRA

E103) Efetue e simplifique $\frac{4^0 + 1,333...}{\left[-\frac{1}{3}\right]^3} - \frac{1^5 - 2^3}{0,1}$

E104) CEFETQ 2001

Calcule o valor da expressão $\sqrt[3]{\frac{(0,005)^2 \cdot 0,000075}{10}} \div (10^{-4} \cdot 2^{-1/3} \cdot 3^{1/3})$

E105) CN 75 - Calcular a soma dos termos da maior fração própria irredutível, para que o produto dos seus termos seja 60.

- (A) 17 (B) 23 (C) 32 (D) 61 (E) 19 (F) NRA

E106) CN 76 - A raiz cúbica de um número N, é 6,25. Calcular a raiz sexta desse número N.

- (A) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (B) 2,05 (C) $2\sqrt{5}$ (D) 2,5 (E) 1,5

E107) CN 82 - Na expressão $\frac{(0,125)^{b-a}}{8^{a-b}} + 21\left(\frac{b}{a}\right)^0 + a^b = 191$, **a** e **b** são números inteiros

positivos, **a + b** vale:

- (A) 15 (B) 14 (C) 13 (D) 12 (E) 11

E108) Se $2^x = 1/4$, então x^x é igual a:

- (A) 2 (B) 4 (C) -4 (D) $1/4$ (E) $-1/4$

E109) Qual das seguintes afirmativas é sempre verdadeira para quaisquer números reais a, b e c?

- (A) Se $a < b$, então $ac < bc$ (B) Se $a < b$, então $a^2 < b^2$ (C) Se $a < b$, então $a^3 < b^3$
 (D) Se $ac < bc$, então $a < b$ (E) Se $a > b$, então $1/a > 1/b$

E110) Para qualquer número real x, $\sqrt{x^2}$ é sempre igual a:

- (A) x (B) -x (C) 1 (D) |x| (E) $2\sqrt{x}$

E111) Quanto vale $x + y$, sabendo que $4^y = 1$ e que $5^x = 1/5$?

- (A) 1 (B) 0 (C) -1 (D) $-3/4$ (E) x e y não podem ser determinados

E112) Sendo a, b e c reais positivos, e n um inteiro positivo, qual das seguintes afirmativas não é necessariamente verdadeira?

- (A) $a(b + c) = ab + ac$ (B) $(ab)^n = a^n b^n$ (C) $(a/b)^n = a^n/b^n$
 (D) $(a + b)^n = a^n + b^n$ (E) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

E113) Simplifique $\frac{9x^2y^3z^{-1}}{12x^3y^{-3}z^2}$

E114) Se $a = 256$, calcule $\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{a}$

(A) 2 (B) 4 (C) 32 (D) 64 (E) 128

E115) Resolver a equação $9^{(1-2x)} = 81^{(x-1)}$

E116) Qual das seguintes afirmativas não é verdadeira para todos os valores de x ?

(A) $|x| \geq 0$ (B) $x \leq |x|$ (C) $|-x| = x$ (D) $|x| = |-x|$ (E) $-|-x| \leq 0$

E117) Simplifique $\sqrt{4x^5y^{10}z^8} \sqrt{81x^2y^4z^4} \sqrt{256x^8}$

E118) Simplifique $\left(\frac{x^{3/4}y^{-5/6}}{x^{-4/5}y^{2/3}} \right)^{-2}$

E119) Coloque em ordem crescente, sabendo que a é um número real maior que 1.
 $-(-a)^3$, $-a^3$, $(-a)^4$, $-a^4$.

E120) Simplifique $\frac{4^{2x+1} \cdot 8^3}{16^x \cdot 32^2 - 2^{4x+7} \cdot 64}$

E121) Calcule $(0,0049)^{3/2} + (0,2)^4 + (0,04)^{-1/2}$

E122) Encontre x em $2^x \cdot 4^x \cdot 8^x = 1/16$

E123) Qual dos números abaixo é o maior?

(A) 2^{3^4} (B) 2^{4^3} (C) 4^{3^2} (D) 4^{2^3} (E) 3^{2^4}

E124) Simplifique $\frac{(-a)^7 + \left(\frac{1}{a}\right)^{-4}}{-a^2 - \left(\frac{-1}{a}\right)^{-5}}$

E125) Encontre P em $\sqrt{\frac{x}{y}} \sqrt[3]{\frac{y}{x}} \sqrt[4]{\frac{x}{y}} = \left(\frac{y}{x}\right)^P$

E126) Calcule a expressão $\frac{4 \left[(17-10)^3 + \left(\frac{17+200}{31} \right) \sqrt{36} \right]}{3^2(7+4) + \frac{22 \times 9^{\frac{3}{2}}}{18}}$

E127) Simplifique $\frac{3^{5007} - 3^{5003}}{3^{5008} + 3^{5002}}$

- (A) $7/8$ (B) $1/3$ (C) $4/5$ (D) $31/59$ (E) $24/73$

E128) Se $x + 2y = 0$ e $x \neq 0$, calcule $\left(\frac{x}{y}\right)^{2014} + \left(\frac{y}{x}\right)^{-2014}$.

- (A) $1/2^{2028}$ (B) 2^{2015} (C) 2^{2028} (D) $1/2^{2015}$ (E) 1

E129) Dados $m = 1,4666\bar{6}$ e $n = 0,407407407\bar{4}$, calcule m/n .

- (A) $66/185$ (B) $18/5$ (C) $36/11$ (D) 3 (E) $120/37$

E130) A expressão abaixo é igual ao número racional a/b , e **a** e **b** não têm fatores comuns. Encontre **a + b**.

$$\frac{\frac{2}{3} - \frac{5}{18}}{\frac{10}{24} + \frac{20}{36}}$$

- (A) 7 (B) 37 (C) 72 (D) 84 (E) 98

E131) Uma das expressões abaixo tem um valor diferente das demais. Qual é este valor?

I) $(-1)^{-12}$ II) $-(10/23)^0$ III) $-2^{-1} - 2^{-1}$ IV) $-1^{-1} \cdot 1^{-1}$ V) $-(1)^{1/4}$

- (A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) 2

E132) Qual dos seguintes valores abaixo é o maior?

$1^{48}, 2^{42}, 3^{36}, 4^{30}, 5^{24}, 6^{18}, 7^{12}, 8^6, 9^0$.

E133) CN 52 - Calcular a expressão $\left[2^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - 1207^0 + 4^{3/2}\right]$

E134) CN 54 - Efetue $\sqrt{200} \times \sqrt[3]{108}$ e simplifique o resultado

E135) CMR 97 - O valor de $\frac{15^{30}}{45^{15}}$ é:

(A) 1 (B) $\left(\frac{1}{3}\right)^{15}$ (C) 5^{15} (D) $\left(\frac{1}{5}\right)^{15}$ (E) 3^{15}

E136) CMR 95 - Calcule o valor simplificado da expressão abaixo:

$$4. \frac{3 - 1,2 \times 2^{-2}}{1 - \frac{0,006}{0,15}}$$

E137) OBM 2008 - Quantos dos números abaixo são maiores que 10? (Sugestão: eleve os números ao quadrado)

$3\sqrt{11}, 4\sqrt{7}, 5\sqrt{5}, 6\sqrt{3}, 7\sqrt{2}$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

E138) CMF 2008 - Simplificando a expressão $\sqrt{\frac{8^6 + 4^{15}}{8^8 + 4^6}}$, obtemos o valor: (Sugestão: passar as potências para a base 2 e simplificar)

(A) 8 (B) 10 (C) 4 (D) 2 (E) 16

E139) CMTA 2009 - O valor da expressão $\sqrt{43 + \sqrt{31 + \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{3 + \sqrt{1}}}}}}}$ é:

(A) 1 (B) 3 (C) 7 (D) 9 (E) 13

E140) CN 2013 - Qual é o valor da expressão (Sugestão: não se assuste com os números, enfrente-os e lembre-se das propriedades das potências)

$$\left[\left(3^{0,333\ldots} \right)^{27} + 2^{2^{17}} - 5\sqrt{239 + 3\sqrt{\frac{448}{7}}} - \left(\sqrt[3]{3} \right)^{3^3} \right]^{\sqrt[3]{92}} ?$$

(A) 0,3 (B) $\sqrt[3]{3}$ (C) 1 (D) 0 (E) -1

E141) EPCAr 2005 - O valor da expressão $\left[\left(\frac{1}{2} \right)^3 - (169)^{0,5} \times (128)^{\frac{1}{7}} \right] \times 0,002$ é:

(A) $-12,750 \times 10^{-3}$ (B) $-12,750 \times 10^{-6}$ (C) $12,750 \times 10^{-6}$ (D) $12,750 \times 10^{-3}$

Detonando uma prova – Questão 11

Um aluno que se prepara para concursos deve testar seus conhecimentos, resolvendo uma prova completa, somente depois que completa seu curso e está totalmente preparado. Claro que questões de prova, específicas sobre cada assunto ensinado nos capítulos, são bem vindas. No caso dos concursos para Colégio Naval, EPCAr e Colégio Militar, é altamente recomendável que o aluno continue os estudos do presente livro resolvendo as questões de prova do VOLUME 2.

Abrimos uma exceção apresentando as soluções da prova do CN 2015/2016, relativas aos assuntos ensinados no livro (apenas não abordamos as questões de geometria). São ao todo 14 questões de álgebra e aritmética que podem ser tranquilamente resolvidas com o que está ensinado no livro. O aluno deve estudar essas questões somente ao final de cada capítulo. Neste livro as questões estão localizadas nos seguintes capítulos:

Questão 1	Capítulo 17		Questão 9	Capítulo 21
Questão 2	Capítulo 9		Questão 10	Capítulo
Questão 3	Capítulo 5		Questão 11	Capítulo 2
Questão 4	Capítulo 13		Questão 12	Capítulo 10
Questão 5	Capítulo 11		Questão 16, 18	Capítulo 11
Questão 6	Capítulo 10		Questão 19	Capítulo 11
Questão 7			Questão 20	Capítulo 20

CN 2015 – Questão 11

Seja n um número natural e $\#$ um operador matemático que aplicado a qualquer número natural, separa os algarismos pares, os soma, e a esse resultado, acrescenta tantos zeros quanto for o número obtido. Por exemplo, $\#(3256) = 2 + 6 = 8$, logo fica: 800000000. Sendo assim, o produto $\#[20] \cdot \#[21] \cdot \#[22] \cdot \#[23] \cdot \#[24] \dots \#[29]$ possuirá uma quantidade de zeros igual a:

- (A) 46 (B) 45 (C) 43 (D) 41 (E) 40

A solução está no final do capítulo

CONTINUA NO VOLUME 2: 120 QUESTÕES DE CONCURSOS**Respostas dos exercícios**

E1)

- | | | | |
|----------------------------------|--|----------------------------------|------------------------------------|
| a) $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$ | f) $320 = 2^6 \cdot 5$ | k) $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ | p) $384 = 2^7 \cdot 3$ |
| b) $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$ | g) $512 = 2^9$ | l) $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ | q) $625 = 5^4$ |
| c) $96 = 3^5 \cdot 3$ | h) $630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ | m) $160 = 2^5 \cdot 5$ | r) $900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ |
| d) $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ | i) $1024 = 2^{10}$ | n) $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ | s) $121 = 11^2$ |
| e) $144 = 2^4 \cdot 3^2$ | j) $420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ | o) $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$ | t) $288 = 2^5 \cdot 3^2$ |

E2)

- | | | | | | | | | | |
|--------|--------|---------|---------|--------|---------|----------|--------|--------|-------|
| a) 90 | c) 360 | e) 900 | g) 360 | i) 60 | k) 840 | m) 17325 | o) 108 | q) 120 | s) 30 |
| b) 144 | d) 720 | f) 1600 | h) 1680 | j) 660 | l) 1800 | n) 540 | p) 90 | r) 96 | t) 40 |

E3) 12.A

E4) $2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^2$

E5) 144

E6) $32/80$

E7) $24/56$

E8) $15/20$

E9) $35/56$

E10) $1/6$

E11)

- | | | | | | | | | | |
|--------------------|----------------------|--------------------|---------------------|--------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|--------------------|
| a) $2 \frac{1}{3}$ | c) $2 \frac{22}{25}$ | e) $4 \frac{3}{5}$ | g) $1 \frac{4}{35}$ | i) $8 \frac{1}{3}$ | k) $2 \frac{1}{4}$ | m) $4 \frac{4}{5}$ | o) $1 \frac{4}{13}$ | q) $9 \frac{3}{5}$ | s) $4 \frac{1}{2}$ |
| b) $3 \frac{3}{5}$ | d) $4 \frac{2}{3}$ | f) $2 \frac{4}{7}$ | h) $5 \frac{2}{3}$ | j) $2 \frac{1}{5}$ | l) $2 \frac{1}{10}$ | n) $2 \frac{4}{14}$ | p) $6 \frac{2}{3}$ | r) $13 \frac{9}{7}$ | t) $3 \frac{4}{7}$ |

E12)

- | | | | | | | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|-----------|------------|-----------|
| a) $7/2$ | c) $38/5$ | e) $17/3$ | g) $7/3$ | i) $19/8$ | k) $4/3$ | m) $23/9$ | o) $10/3$ | q) $24/11$ | s) $36/7$ |
| b) $21/4$ | d) $34/3$ | f) $8/5$ | h) $11/7$ | j) $19/9$ | l) $17/7$ | n) $13/10$ | p) $9/2$ | r) $6/5$ | t) $43/4$ |

E13) 20 km

E14) $15/40$

E15) 45 km

E16) R\$ 120,00

E17) $17/18$

E18) $17/12$, $4/3$, $11/12$, $4/5$, $2/3$, $7/12$, $1/3$

E19)

- | | | | | | | | | | |
|------------|-----------|-----------|-----------|----------|-----------|-----------|----------|-----------|----------|
| a) $20/3$ | c) $5/13$ | e) $7/16$ | g) $5/4$ | i) $4/3$ | k) $3/10$ | m) $2/3$ | o) $2/5$ | q) $2/5$ | s) $3/8$ |
| b) $13/20$ | d) $7/10$ | f) $3/37$ | h) $2/15$ | j) $9/2$ | l) $7/12$ | n) $4/15$ | p) $2/5$ | r) $3/10$ | t) $2/5$ |

E20) $6/16$, $9/24$, $12/32$

E21) $14/15$

E22) $9/48$

E23) $45/30-20/30-8/30-1/30-20/30$

E24) José acertou mais questões (10, contra 8) mas José tirou maior nota (8,00 contra 6,25)

E25) 48

E26) $3/8$

E27) 500 há

E28) João

E29) Segundo

E30) 7,2

E31) km 15

E32) km 20

E33) km 24

E34)

- | | | | | | | | | | |
|-------|------|-------|--------|---------|-------|-------|-------|--------|-------|
| a) 6 | c) 6 | e) 28 | g) 5 | i) 11,2 | k) 36 | m) 60 | o) 36 | q) 237 | s) 9 |
| b) 15 | d) 7 | f) 25 | h) 240 | j) 15 | l) 9 | n) 12 | p) 4 | r) 38 | t) 12 |

E35) (D)

E36) (D)

E37)

- | | | | | | | | | | |
|----------|-----------|----------|--------|---------|---------|----------|----------|---------|----------|
| a) 0,027 | c) 0,0012 | e) 1,56 | g) 50 | i) 4,3 | k) 11,5 | m) 11,78 | o) 0,027 | q) 0,10 | s) 0,021 |
| b) 45,6 | d) 0,05 | f) 0,001 | h) 2,7 | j) 0,77 | l) 21,7 | n) 0,36 | p) 0,013 | r) 0,32 | t) 8,192 |

E38)

- | | | | | | | | | | |
|---------|----------|-----------|---------|---------|----------|---------|---------|--------|---------|
| a) 0,2 | c) 0,01 | e) 0,005 | g) 1,62 | i) 0,18 | k) 0,1 | m) 0,04 | o) 0,32 | q) 0,6 | s) 0,75 |
| b) 0,05 | d) 0,013 | f) 0,0125 | h) 2,00 | j) 0,12 | l) 0,015 | n) 0,25 | p) 0,4 | r) 0,9 | t) 0,35 |

E39)

- | | | | | | | | | | |
|----------|------------|------------|--------------|------------|-------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| a) 3/10 | c) 1/100 | e) 324/100 | g) 2/10000 | i) 25/100 | k) 13/10 | m) 1/1000 | o) 125/10 | q) 7/10 | s) 105/10 |
| b) 12/10 | d) 175/100 | f) 1001/10 | h) 1/1000000 | j) 225/100 | l) 2112/100 | n) 5/1000 | p) 18/10 | r) 99/100 | t) 83/10 |

E40)

- | | | | | | | | | | |
|---------|---------|----------|---------|----------|--------|----------|---------|----------|--------|
| a) 0,25 | c) 1,4 | e) 0,875 | g) 0,12 | i) 0,375 | k) 1,2 | m) 8,5 | o) 0,75 | q) 1,5 | s) 1,8 |
| b) 1,25 | d) 2,25 | f) 3,75 | h) 0,15 | j) 0,75 | l) 0,6 | n) 0,625 | p) 3,5 | r) 0,125 | t) 0,8 |

E41)

- | | | | | | | | | | |
|---------|--------|---------|---------|---------|--------|----------|--------|--------|---------|
| a) 5/4 | c) 3/4 | e) 1/8 | g) 36/5 | i) 26/5 | k) 8/5 | m) 11/5 | o) 5/2 | q) 3/5 | s) 1/5 |
| b) 7/20 | d) 5/8 | f) 17/5 | h) 17/4 | j) 3/2 | l) 7/4 | n) 11/10 | p) 3/4 | r) 2/5 | t) 1/40 |

E42)

- | | | | |
|----------------|----------------|--------------|----------------|
| a) 0,333... | f) 0,7272... | k) 0,8333... | p) 0,38... |
| b) 0,222... | g) 1,222... | l) 0,142857 | q) 1,666... |
| c) 0,666... | h) 3,333... | m) 2,333... | r) 1,9090... |
| d) 0,428571... | i) 5,428571... | n) 5,333... | s) 0,777... |
| e) 1,333... | j) 19/15 | o) 0,555... | t) 0,769230... |

E43)

- | | | | |
|-----------|------------|------------|------------|
| a) 32/99 | f) 2 2/15 | k) 16 2/3 | p) 7/120 |
| b) 1 7/9 | g) 2/15 | l) 5 1/9 | q) 13/99 |
| c) 3 2/11 | h) 2 41/99 | m) 4/9 | r) 55/74 |
| d) 5/9 | i) 2 2/3 | n) 1/15 | s) 1/150 |
| e) 1 | j) 8 1/3 | o) 131/990 | t) 5 47/99 |

E44)

- | | | | | | | | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|--------------------|-------------------|-------------------|--------------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| a) $\frac{5}{3}$ | c) $\frac{3}{2}$ | e) $\frac{6}{5}$ | g) $\frac{7}{11}$ | i) $\frac{9}{4}$ | k) $\frac{2}{9}$ | m) $\frac{2}{3}$ | o) $\frac{3}{11}$ | q) $\frac{4}{3}$ | s) $\frac{23}{17}$ |
| b) $-\frac{4}{9}$ | d) $-\frac{7}{8}$ | f) $-\frac{4}{5}$ | h) $-\frac{5}{12}$ | j) $-\frac{1}{6}$ | l) $-\frac{2}{7}$ | n) $-\frac{7}{13}$ | p) $-\frac{2}{5}$ | r) $-\frac{7}{10}$ | t) $\frac{3}{100}$ |

E45)

- | | | | | | | | | | |
|-------------------|--------------------|------------------|--------------------|-------------------|--------------------|-------------------|-------------------|--------------------|-------------------|
| a) $-\frac{7}{2}$ | c) $-\frac{11}{3}$ | e) $\frac{6}{5}$ | g) $-\frac{7}{10}$ | i) $\frac{7}{20}$ | k) $\frac{4}{5}$ | m) $\frac{3}{10}$ | o) $-\frac{5}{4}$ | q) $-\frac{2}{7}$ | s) $-\frac{4}{5}$ |
| b) $\frac{3}{5}$ | d) $-\frac{7}{8}$ | f) 0 | h) $-\frac{2}{3}$ | j) $\frac{1}{6}$ | l) $-\frac{1}{10}$ | n) $\frac{9}{4}$ | p) $\frac{2}{9}$ | r) $-\frac{7}{11}$ | t) $\frac{1}{33}$ |

E46)

- a) $\frac{151}{70}$ c) $\frac{4}{3}$ e) $\frac{19}{15}$ g) $\frac{109}{77}$ i) $\frac{1}{8}$ k) $\frac{233}{30}$ m) $\frac{187}{30}$ o) $\frac{2}{5}$ q) $\frac{11}{16}$ s) $\frac{29}{20}$
 b) $\frac{75}{28}$ d) $\frac{1}{90}$ f) $\frac{13}{15}$ h) $\frac{7}{8}$ j) $\frac{39}{10}$ l) $\frac{193}{30}$ n) $\frac{31}{15}$ p) $\frac{283}{36}$ r) $\frac{71}{35}$ t) $\frac{99}{10}$

E47)

- a) 11 c) 6 e) 0 g) 16 i) 1 k) 18 m) 2 o) 4 q) -4 s) 5
 b) 5 d) 1 f) -13 h) -1 j) 7 l) -10 n) -2 p) 3 r) 6 t) 0

E48)

- a) $-\frac{17}{35}$ c) $-\frac{32}{35}$ e) $-\frac{1}{6}$ g) $-\frac{43}{56}$ i) $-\frac{3}{8}$ k) $\frac{264}{35}$ m) $-\frac{1}{24}$ o) $-\frac{11}{30}$ q) $-\frac{7}{16}$ s) $-\frac{17}{30}$
 b) $\frac{4}{7}$ d) $-\frac{1}{70}$ f) $\frac{1}{10}$ h) $-\frac{7}{24}$ j) $-\frac{1}{2}$ l) $\frac{79}{12}$ n) $-\frac{24}{35}$ p) $-\frac{11}{12}$ r) $-\frac{1}{10}$ t) $-\frac{5}{2}$

E49)

- a) $\frac{32}{15}$ c) $-\frac{11}{15}$ e) $\frac{11}{10}$ g) $\frac{10}{77}$ i) $-\frac{7}{8}$ k) $\frac{227}{30}$ m) $-\frac{33}{70}$ o) $\frac{2}{15}$ q) $\frac{3}{16}$ s) $\frac{43}{60}$
 b) $\frac{29}{8}$ d) $-\frac{7}{90}$ f) $\frac{13}{15}$ h) $\frac{13}{28}$ j) $\frac{37}{10}$ l) $\frac{103}{30}$ n) $\frac{16}{15}$ p) $-\frac{40}{9}$ r) $-\frac{9}{7}$ t) $\frac{21}{10}$

E50)

- a) $-\frac{1}{15}$ c) -5,69 e) $\frac{7}{24}$ g) $-\frac{1}{5}$ i) $-\frac{37}{60}$ k) $\frac{39}{70}$ m) $\frac{1}{3000}$ o) $\frac{5}{12}$ q) $\frac{1}{30}$ s) $\frac{37}{60}$
 b) $-\frac{29}{42}$ d) $-\frac{11}{90}$ f) $-\frac{2}{5}$ h) $-\frac{11}{5}$ j) $\frac{17}{10}$ l) 1 n) $\frac{2}{3}$ p) $\frac{14}{15}$ r) 0 t) $\frac{13}{48}$

E51)

- a) $\frac{3}{7} < \frac{4}{7}$ f) $1\frac{2}{5} > \frac{4}{3}$ k) $-10\% > -\frac{1}{8}$ p) $\frac{7}{5} > \frac{4}{3}$
 b) $\frac{2}{3} > \frac{2}{5}$ g) $0,333 < 0,3...$ l) $\frac{1}{3} < \frac{3}{10}$ q) $-0,222... > -\frac{3}{10}$
 c) $-\frac{1}{5} < 0$ h) $4\frac{2}{35} < 5\frac{1}{77}$ m) $-\frac{1}{3} < -0,3$ r) $-10 < -9,9$
 d) $-\frac{10}{3} < -3$ i) $-2,38 < -2,37997$ n) $\frac{7}{10} > \frac{2}{3}$ s) $-\frac{1}{5} > -\frac{1}{4}$
 e) $-\frac{1}{3} < -\frac{1}{5}$ j) $\frac{1}{5} = 20\%$ o) $-\frac{8}{3} < -2,5$ t) $\frac{5}{6} < 0,9$

E52)

- a) $\frac{4}{5} > 0,75$ f) $\frac{4}{5} > -\frac{2}{3}$ k) $0,666 < 0,666...$ p) $-\frac{3}{5} > -\frac{2}{3}$
 b) $0,666 < \frac{2}{3}$ g) $\frac{7}{10} > 0$ l) $0,3 = \frac{3}{10}$ q) $\frac{4}{5} < \frac{5}{6}$
 c) $-\frac{4}{7} > -\frac{5}{8}$ h) $-\frac{2}{3} < \frac{1}{2}$ m) $0,999 < 1$ r) $\frac{5}{8} > \frac{5}{9}$
 d) $\frac{9}{8} < \frac{8}{7}$ i) $-3 < 2$ n) $0,999... = 1$ s) $-0,222 > -0,222...$
 e) $-\frac{9}{13} > -\frac{7}{10}$ j) $-0,6 < 0,1$ o) $-0,4 > -\frac{30}{7}$ t) $0 > -\frac{47}{147}$

E53)

- a) $14,22... < 14\frac{83}{97}$ f) $4\frac{7}{239} < 5\frac{13}{777}$ k) $-\frac{18}{73} > -\frac{18}{71}$ p) $\frac{1}{256} < \frac{2}{500}$
 b) $0 > -3,17921792...$ g) $25,15 > 100/4$ l) $11\% > -12,375\%$ q) $1,333... < \frac{3}{2}$
 c) $-5,1212... > -6,333...$ h) $-2,1313... < 0,218$ m) $0,9175 < \frac{73}{72}$ r) $\frac{4}{7} > \frac{4}{9}$
 d) $1,3181 < 2,21289$ i) $\frac{715}{113} > \frac{700}{113}$ n) $-0,999... = -1$ s) $-\frac{2}{7} < -\frac{2}{9}$
 e) $0,333333 < 0,333...$ j) $\frac{23}{59} > \frac{23}{61}$ o) $0,377... > 0,37775$ t) $\frac{1}{5} > \frac{1}{6}$

E54)

- a) $\frac{3}{20}$ c) $\frac{7}{22}$ e) 9 g) $\frac{50}{11}$ i) $\frac{5}{16}$ k) $\frac{13}{2}$ m) $\frac{9}{2}$ o) 8 q) $\frac{30}{7}$ s) $\frac{4}{15}$
 b) $\frac{6}{7}$ d) $\frac{65}{3}$ f) $\frac{2}{5}$ h) $\frac{28}{25}$ j) $\frac{48}{375}$ l) 10 n) $\frac{65}{7}$ p) 14 r) $\frac{5}{2}$ t) $\frac{4}{5}$

E55)

- a) $\frac{3}{8}$ c) 240 e) $\frac{31}{16}$ g) $\frac{22}{3}$ i) $\frac{2}{5}$ k) $\frac{2}{125}$ m) $\frac{24}{5}$ o) $\frac{1}{6}$ q) $\frac{21}{2}$ s) $\frac{7}{48}$
 b) $\frac{2}{15}$ d) $\frac{8}{15}$ f) 160 h) $\frac{4}{35}$ j) $\frac{1}{24}$ l) 1 n) 10 p) $\frac{33}{10}$ r) 120 t) $\frac{1}{25}$

E56)

- a) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{5}{3}$ e) 6 g) $\frac{9}{2}$ i) $\frac{1}{20}$ k) $-\frac{5}{2}$ m) -18 o) 5 q) $-\frac{2}{9}$ s) $-\frac{1}{15}$
 b) $\frac{1}{10}$ d) $\frac{7}{4}$ f) $\frac{7}{24}$ h) $\frac{9}{2}$ j) 7 l) $-\frac{1}{5}$ n) $-\frac{7}{2}$ p) $\frac{4}{7}$ r) $-\frac{11}{4}$ t) $-\frac{4}{13}$

E57)

- a) $\frac{5}{2}$ c) $\frac{5}{4}$ e) 10 g) $\frac{15}{128}$ i) 5 k) $\frac{5}{12}$ m) $\frac{6}{5}$ o) $\frac{75}{84}$ q) $\frac{11}{10}$ s) $\frac{40}{21}$
 b) $\frac{39}{4}$ d) $\frac{15}{4}$ f) $\frac{4}{81}$ h) $\frac{8}{5}$ j) $\frac{7}{8}$ l) $\frac{18}{5}$ n) $\frac{1}{6}$ p) $\frac{24}{7}$ r) 2 t) $\frac{9}{20}$

E58)

- a) $-\frac{6}{35}$ c) $-\frac{1}{7}$ e) $-\frac{25}{64}$ g) $\frac{1}{2}$ i) $-\frac{1}{16}$ k) $-\frac{14}{5}$ m) $\frac{8}{7}$ o) 8 q) $-\frac{5}{2}$ s) $\frac{8}{15}$
 b) $\frac{6}{7}$ d) $-\frac{3}{56}$ f) $-\frac{81}{80}$ h) $-\frac{18}{25}$ j) $-\frac{8}{15}$ l) $\frac{51}{5}$ n) -8 p) $-\frac{3}{2}$ r) $-\frac{7}{2}$ t) $-\frac{16}{9}$

E59)

- a) -5 c) $\frac{3}{2}$ e) -15 g) $\frac{5}{64}$ i) 4 k) $-\frac{5}{2}$ m) $-\frac{6}{5}$ o) $-\frac{15}{2}$ q) $-\frac{7}{10}$ s) $-\frac{20}{7}$
 b) $-\frac{1}{6}$ d) $-\frac{5}{3}$ f) $-\frac{3}{10}$ h) $-\frac{80}{81}$ j) -20 l) $-\frac{4}{5}$ n) $\frac{9}{5}$ p) $-\frac{12}{5}$ r) 3 t) $\frac{27}{10}$

E60)

- a) $\frac{19}{180}$ c) $\frac{13}{300}$ e) $\frac{29}{180}$ g) $\frac{1147}{180}$ i) 2
 b) $\frac{32}{69}$ d) $\frac{104}{441}$ f) $\frac{25}{104}$ h) $\frac{19}{18}$ j) $\frac{58}{3}$

E61)

- a) $\frac{11}{84}$ c) $\frac{5}{11}$ e) $\frac{228}{23}$ g) $\frac{217}{120}$ i) $\frac{3}{2}$
 b) $\frac{49}{6}$ d) $\frac{4}{21}$ f) $\frac{3}{5}$ h) $\frac{7}{12}$ j) $\frac{44}{15}$

E62)

- a) $-\frac{32}{105}$ c) $-\frac{871}{320}$ e) $\frac{27}{7}$ g) $\frac{77}{10}$ i) $\frac{33}{14}$ k) $\frac{52}{15}$ m) $-\frac{116}{45}$ o) $\frac{7}{3}$ q) $-\frac{87}{56}$ s) $-\frac{42}{10}$
 b) 1 d) $-\frac{11}{4}$ f) $-\frac{9}{2}$ h) $-\frac{25}{6}$ j) $\frac{28}{5}$ l) $\frac{39}{50}$ n) $\frac{259}{320}$ p) $-\frac{1}{80}$ r) -5 t) 4

E63)

- a) $\frac{1}{9}$ c) $\frac{16}{25}$ e) $\frac{27}{1000}$ g) $\frac{25}{64}$ i) $\frac{8}{27}$ k) $\frac{49}{100}$ m) $\frac{9}{64}$ o) $\frac{243}{1000}$ q) $\frac{1}{10000}$ s) $\frac{125}{27}$
 b) $\frac{4}{9}$ d) $\frac{8}{125}$ f) $\frac{16}{81}$ h) $\frac{9}{49}$ j) $\frac{1000}{27}$ l) $\frac{64}{81}$ n) $\frac{8}{27}$ p) $\frac{1}{32}$ r) $\frac{125}{8}$ t) $\frac{32}{243}$

E64)

- a) $\frac{1}{81}$ c) $-\frac{81}{10000}$ e) $\frac{81}{49}$ g) $\frac{25}{81}$ i) $\frac{16}{10000}$ k) 1 m) $\frac{9}{121}$ o) $\frac{27}{1000}$ q) $-\frac{243}{32}$ s) $\frac{81}{169}$
 b) $-\frac{8}{27}$ d) $-\frac{1}{32}$ f) $\frac{49}{10000}$ h) $-\frac{1}{64}$ j) $-\frac{8}{125}$ l) $\frac{4}{49}$ n) $\frac{144}{169}$ p) $-\frac{1}{81}$ r) $-\frac{100}{49}$ t) $\frac{81}{625}$

E65)

- a) 1,96 c) 16/81 e) 4/9 g) 0,008 i) 1,728 k) 6,25 m) 4/81 o) 64/25 q) -0,16 s) 1
 b) 0,001 d) 27/8 f) 2,25 h) 0,25 j) 1,331 l) 0,001 n) 0,125 p) 0,216 r) 0,0625 t) 0,0001

E66)

- a) $-\frac{1}{3}$ c) $-\frac{4}{5}$ e) -0,333... g) -2,18
 b) $\frac{1}{2}$ d) $5\frac{2}{7}$ f) 3,14 h) $-\frac{2}{5}$

E67)

- a) 1 c) 1 e) 1 g) 1
 b) 1 d) 1 f) 1 h) 1

E68)

- a) $-\frac{1}{3125}$ c) $-\frac{32}{243}$ e) $-\frac{27}{125}$ g) $\frac{8}{125}$
 b) $\frac{1}{128}$ d) $\frac{1}{10000000}$ f) $-\frac{1}{32}$ h) $-\frac{243}{100000}$

E69)

- a) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{16}$ e) $\frac{1}{32}$ g) $\frac{1}{10000000000}$
 b) $-\frac{125}{27}$ d) $\frac{1}{81}$ f) $\frac{1}{64}$ h) $\frac{1}{81}$

E70)

- a) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{1000}$ e) $\frac{1}{3}$ g) $-\frac{8}{125}$
 b) $\frac{4}{25}$ d) $\frac{16}{81}$ f) $\frac{9}{100}$ h) $\frac{1}{16}$

E71)

- a) $\frac{36}{49}$ c) $\frac{1}{64}$ e) $-\frac{8}{27}$ g) $-\frac{1}{32}$
 b) $\frac{1}{1024}$ d) $\frac{16}{625}$ f) $-\frac{343}{27}$ h) $\frac{1}{10000000}$

E72)

- a) $\frac{64}{729}$ c) $\frac{1}{1000000000}$ e) $\frac{4^6}{5^6}$ g) $\frac{1}{2^{18}}$
 b) $\frac{2^{15}}{5^{15}}$ d) $\frac{3^{20}}{10^{20}}$ f) $\frac{1}{9}$ h) $\frac{64}{7^6}$

E73)

- a) $-\frac{27}{125}$ c) $-\frac{16}{625}$ e) $-\frac{243}{100000}$ g) $\frac{4}{17}$ i) $-\frac{23}{45}$ k) $-\frac{27}{125}$ m) -8 o) $\frac{9}{25}$ q) $-\frac{16^3}{15^3}$ s) $\frac{81}{16}$
 b) $\frac{32}{729}$ d) $\frac{1}{64}$ f) 1 h) 1 j) 1 l) 16 n) $\frac{625}{16}$ p) $\frac{9}{16}$ r) 1 t) $-\frac{1}{3125}$

E74)

- a) $-\frac{1}{3125}$ c) $\frac{81}{10000}$ e) $\frac{1}{256}$ g) $-\frac{125}{512}$ i) $\frac{243}{32}$ k) $-\frac{8}{27}$ m) $\frac{8}{125}$ o) $\frac{11}{37}$ q) $-\frac{1}{3125}$ s) $\frac{8}{27}$

b) $\frac{1}{128}$ d) $\frac{32}{3125}$ f) $\frac{36}{25}$ h) $\frac{1}{10000}$ j) $\frac{729}{64}$ l) $\frac{1}{4}$ n) $-\frac{27}{125}$ p) $\frac{4}{25}$ r) $\frac{1}{81}$ t) $\frac{1}{64}$

E75)

a) x^5 c) x^9 e) x^{15} g) x^2 i) x k) x^6 m) x^{24} o) x^{60} q) $40x^7$ s) $8x^{15}$
b) x^7 d) x^3 f) x^5 h) x^4 j) 1 l) x^{12} n) x^{15} p) $8x^5$ r) $3x^6$ t) $81x^8$

E76)

a) $\frac{32}{75}$ c) 1 e) $\frac{2}{27}$ g) $\frac{3}{2}$ i) $\frac{121}{36}$ k) $\frac{9}{500}$ m) $\frac{2}{3}$ o) $\frac{128}{45}$ q) $\frac{147}{160}$ s) $\frac{9}{64}$
b) $\frac{35}{18}$ d) $\frac{128}{45}$ f) $\frac{320}{27}$ h) $\frac{200}{243}$ j) $\frac{2}{3}$ l) 50 n) $\frac{81}{2}$ p) $\frac{384}{125}$ r) $\frac{3}{7}$ t) $\frac{9}{4}$

E77)

a) 4 c) $0,01$ e) 16 g) $\frac{8}{27}$ i) $0,001$ k) $\frac{125}{8}$ m) $\frac{9}{25}$ o) 125 q) 27 s) $\frac{100}{9}$
b) $\frac{16}{9}$ d) $\frac{27}{8}$ f) 49 h) $\frac{1}{64}$ j) $\frac{125}{8}$ l) $\frac{1000}{27}$ n) 100 p) 16 r) 300 t) $\frac{125}{27}$

E78)

a) -5 c) $\frac{25}{9}$ e) 10 g) 32 i) 4 k) 32 m) -64 o) $\frac{1}{3}$ q) 81 s) $\frac{1}{10^{13}}$
b) $-\frac{8}{27}$ d) $\frac{4}{25}$ f) 32 h) $-\frac{27}{1000}$ j) 16 l) $-\frac{27}{125}$ n) $\frac{1}{64}$ p) 10000000 r) 81 t) $\frac{125}{8}$

E79)

a) $\frac{25}{4}$ c) $\frac{16}{81}$ e) $-\frac{1}{128}$ g) 1024 i) $\frac{729}{64}$ k) $-\frac{1}{216}$ m) $\frac{64}{729}$ o) $\frac{10^{20}}{3^{20}}$ q) $-\frac{27}{147}$ s) 9
b) $\frac{49}{36}$ d) $\frac{9}{100}$ f) $\frac{1}{64}$ h) 10^7 j) 10^8 l) $\frac{625}{16}$ n) $-\frac{5^{15}}{2^{15}}$ p) -32 r) 2^{18} t) $\frac{2^6}{7^6}$

E80)

a) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{5}{9}$ e) $\frac{8}{9}$ g) $\frac{2}{5}$ i) $\frac{4}{11}$ k) $\frac{5}{12}$ m) $\frac{4}{7}$ o) $\frac{5}{8}$ q) $\frac{2}{13}$ s) $\frac{9}{14}$
b) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{7}{6}$ f) $\frac{1}{10}$ h) $\frac{9}{2}$ j) $\frac{3}{10}$ l) $\frac{9}{8}$ n) $\frac{9}{13}$ p) $\frac{12}{5}$ r) $\frac{5}{8}$ t) $\frac{5}{4}$

E81)

a) $-\frac{3}{4}$ c) $-\frac{1}{10}$ e) $-\frac{2}{3}$ g) $-\frac{8}{3}$ i) -2 k) $-\frac{8}{3}$ m) $-\frac{2}{5}$ o) $\frac{1}{8}$ q) $-\frac{5}{8}$ s) $-\frac{10}{3}$
b) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{7}{3}$ f) $\frac{5}{3}$ h) $\frac{4}{7}$ j) $-\frac{1}{10}$ l) $\frac{6}{7}$ n) $-\frac{9}{5}$ p) $-\frac{9}{4}$ r) $\frac{1}{6}$ t) $\frac{2}{9}$

E82)

a) $\frac{1}{3}$ c) $1,2$ e) $\frac{6}{5}$ g) $\frac{3}{10}$ i) $\frac{3}{2}$ k) $\frac{4}{3}$ m) $-\frac{3}{5}$ o) $\frac{7}{5}$ q) $\frac{4}{5}$ s) $\frac{1}{5}$
b) $-\frac{1}{2}$ d) $\frac{17}{100}$ f) $\frac{3}{10}$ h) $\frac{5}{2}$ j) $\frac{8}{3}$ l) $\frac{8}{5}$ n) $\frac{1}{10}$ p) $\frac{3}{5}$ r) $\frac{3}{2}$ t) $\frac{4}{3}$

E83)

a) $\frac{2}{5}$ c) $-\frac{1}{5}$ e) 1 g) 4 i) $-\frac{8}{7}$ k) $-\frac{4}{9}$ m) $\frac{3}{5}$ o) 0 q) Impossível s) $|x|$
b) $-\frac{3}{5}$ d) 8 f) $-\frac{1}{10}$ h) Impossível j) $\frac{5}{8}$ l) 5 n) $-\frac{3}{5}$ p) $-\frac{1}{2}$ r) x t) $-x$

E84)

- a) -6 c) 10 e) 125 g) $-\frac{5}{9}$ i) $-\frac{16}{25}$ k) -4 m) 16 o) Impossível q) $-\frac{3}{5}$ s) $\frac{343}{27}$
 b) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{1}{9}$ f) Impossível h) 16 j) -729 l) Impossível n) $\frac{125}{729}$ p) 6 r) $\frac{1}{16}$ t) $\frac{1}{512}$

E85)

- a) $-\frac{58}{63}$ c) $-\frac{1}{5}$ e) $\frac{107}{14}$ g) $-\frac{13}{11}$ i) $\frac{152}{69}$ k) $\frac{64}{225}$ m) $-\frac{16}{2025}$
 b) $-\frac{75}{16}$ d) $\frac{501}{56}$ f) $\frac{156}{35}$ h) $-\frac{235}{12}$ j) $\frac{73}{3}$ l) $-\frac{900}{49}$ n) $-\frac{2}{5}$

E86)

- a) $\frac{37}{15}$ c) $\frac{38}{30}$ e) $\frac{25}{6}$ g) $-\frac{17}{15}$ i) $\frac{32}{45}$ k) $-\frac{73}{75}$ m) $\frac{1}{3}$ o) $\frac{13}{7}$ q) $-\frac{14}{25}$
 b) $\frac{8}{15}$ d) $\frac{17}{90}$ f) $\frac{68}{15}$ h) $-\frac{13}{60}$ j) $-\frac{13}{60}$ l) $-\frac{1}{15}$ n) -61 p) $\frac{11}{12}$ r) $-\frac{137}{90}$

E87)

- a) $\frac{149}{108}$ c) $-\frac{1}{2}$ e) $-\frac{209}{90}$ g) -2 i) $\frac{9}{20}$ k) $\frac{2}{3}$ m) $-\frac{5}{36}$ o) $-\frac{11}{27}$ q) $-\frac{101}{150}$
 b) $-\frac{34}{45}$ d) $\frac{13}{5}$ f) $\frac{50}{9}$ h) $\frac{2}{3}$ j) $-\frac{157}{45}$ l) $-\frac{27}{160}$ n) $\frac{7}{6}$ p) $-\frac{17}{5}$ r) $-\frac{223}{60}$

E88)

- a) $-\frac{5}{4}$ c) $\frac{7}{10}$ e) $\frac{11}{3}$ g) $\frac{1}{3}$ i) $\frac{7}{20}$ k) $-\frac{3}{5}$ m) $-\frac{175}{27}$ o) -6 q) $\frac{2}{15}$ s) $-\frac{1}{3}$
 b) -15 d) $\frac{7}{10}$ f) $-\frac{3}{5}$ h) $-\frac{17}{15}$ j) $-\frac{2}{9}$ l) $\frac{1}{15}$ n) $\frac{32}{45}$ p) $\frac{16}{3}$ r) $\frac{2}{3}$ t) $\frac{6}{5}$

E89)

- a) x^5 c) $4x^5$ e) $5x$ g) x^5+5x^2 i) x^6 k) $125x^6$ m) $x+x^2$ o) x^3+x^4 q) $2x^3-2x^4$ s) $24x^6$
 b) $4x^5$ d) x^2 f) x^2+5x h) $5x^2+3x$ j) $9x^2$ l) x n) $x+x^4$ p) $2x^3+2x^4$ r) $6x^3-8x^4$ t) $27x^6$

E90)

- a) $\frac{6}{7}$ c) $-\frac{5}{4}$ e) $\frac{5}{28}$ g) $-\frac{7}{10}$ i) $-\frac{27}{343}$ k) $\frac{5}{16}$ m) $\frac{77}{10}$ o) $\frac{1267}{18}$
 b) $\frac{1}{64}$ d) -64 f) $\frac{16}{125}$ h) $\frac{1147}{180}$ j) $-\frac{1}{3125}$ l) $-\frac{34}{5}$ n) 0

E91)

- a) $\frac{3^8}{5^8 \times 2^5}$ c) $-\frac{34}{45}$ e) $\frac{9}{20}$ g) $\frac{16}{3}$
 b) -61 d) $-\frac{27}{160}$ f) $\frac{6}{5}$ h) $-\frac{3}{5}$

E92)

$$\begin{array}{llllllll} \text{a)} -\frac{79}{100} & \text{c)} \frac{9}{20} & \text{e)} \frac{5}{64} & \text{g)} \frac{217}{120} & \text{i)} \frac{144}{169} & \text{k)} \frac{28}{5} & \text{m)} \frac{1}{64} & \text{o)} -\frac{243}{100000} \\ \text{b)} \frac{28}{25} & \text{d)} \frac{1}{2} & \text{f)} \frac{19}{18} & \text{h)} \frac{1000}{27} & \text{j)} \frac{1}{64} & \text{l)} -\frac{8}{125} & \text{n)} \frac{1}{9} & \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} \text{E93)} 3 & \text{E94)} 9 & \text{E95)} (B) & \text{E96)} (C) & \text{E97)} (C) \\ \text{E98)} (B) & \text{E99)} (37) & \text{E100)} (A) & \text{E101)} (B) & \text{E102)} (A) \\ \text{E103)} 7 & \text{E104)} 5 & \text{E105)} (A) & \text{E106)} (D) & \text{E107)} (A) \\ \text{E108)} (D) & \text{E109)} (C) & \text{E110)} (D) & \text{E111)} (C) & \text{E112)} (D) \\ \text{E113)} \frac{3y^6}{4xz^3} & \text{E114)} (E) & \text{E115)} x = 3/4 & \text{E116)} (C) & \\ \text{E117)} 12 \cdot x^5 \cdot y^6 \cdot |z^5|, \text{ se } x > 0. & \text{E118)} \frac{y^3}{x^{\frac{31}{10}}} & \text{E119)} (-a)^4, -(-a)^3, -a^3, -a^4 & & \\ \text{E120)} -2/7 & \text{E121)} 5,001943 & \text{E122)} 2/3 & \text{E123)} (A) & \\ \text{E124)} -a^2 & \text{E125)} -9/24 & \text{E126)} 35/3 & \text{E127)} (E) & \text{E128)} (B) \\ \text{E129)} (B) & \text{E130)} (A) & \text{E131)} (D) & \text{E132)} 4^{30} & \text{E133)} 11,5 \\ \text{E134)} 60\sqrt{2} & \text{E135)} (C) & \text{E136)} 45/4 & \text{E137)} (C) & \text{E138)} (A) \\ \text{E139)} (C) & \text{E140)} (1) & \text{E141)} (A) & & \end{array}$$

Detonando uma prova – Questão 11

CN 2015 – Questão 11

Seja n um número natural e $\#$ um operador matemático que aplicado a qualquer número natural, separa os algarismos pares, os soma, e a esse resultado, acrescenta tantos zeros quanto for o número obtido. Por exemplo, $\#(3256) = 2 + 6 = 8$, logo fica: 800000000. Sendo assim, o produto $\#[20] \cdot \#[21] \cdot \#[22] \cdot \#[23] \cdot \#[24] \dots \#[29]$ possuirá uma quantidade de zeros igual a:

(A) 46 (B) 45 (C) 43 (D) 41 (E) 40

Solução:

Tomar somente os algarismos pares, somá-los e acrescentar tantos zeros quanto for esta soma.

$$\#20 = 200$$

$$\#21 = 200$$

$$\#22 = 40000$$

$$\#23 = 200$$

$$\#24 = 6000000$$

$$\#25 = 200$$

$$\#26 = 800000000$$

$$\#27 = 200$$

$$\#28 = 100000000000$$

$$\#29 = 200$$

Contanto os zeros: $2 + 2 + 4 + 2 + 6 + 2 + 8 + 2 + 10 + 2 = 40$

Como os números serão multiplicados, surgirão zeros adicionais, devido ao produto dos valores além dos zeros do final de cada número. Multiplicando esses valores ficamos com:

$$2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 2$$

Este produto contribuirá com um zero adicional, devido ao fator 10. Apesar de existirem vários fatores 2, não existem fatores 5 que possam compor um 10 adicional.

Sendo assim, o produto terminará com $1 + 40 = 41$ zeros.

Resposta: (D)

