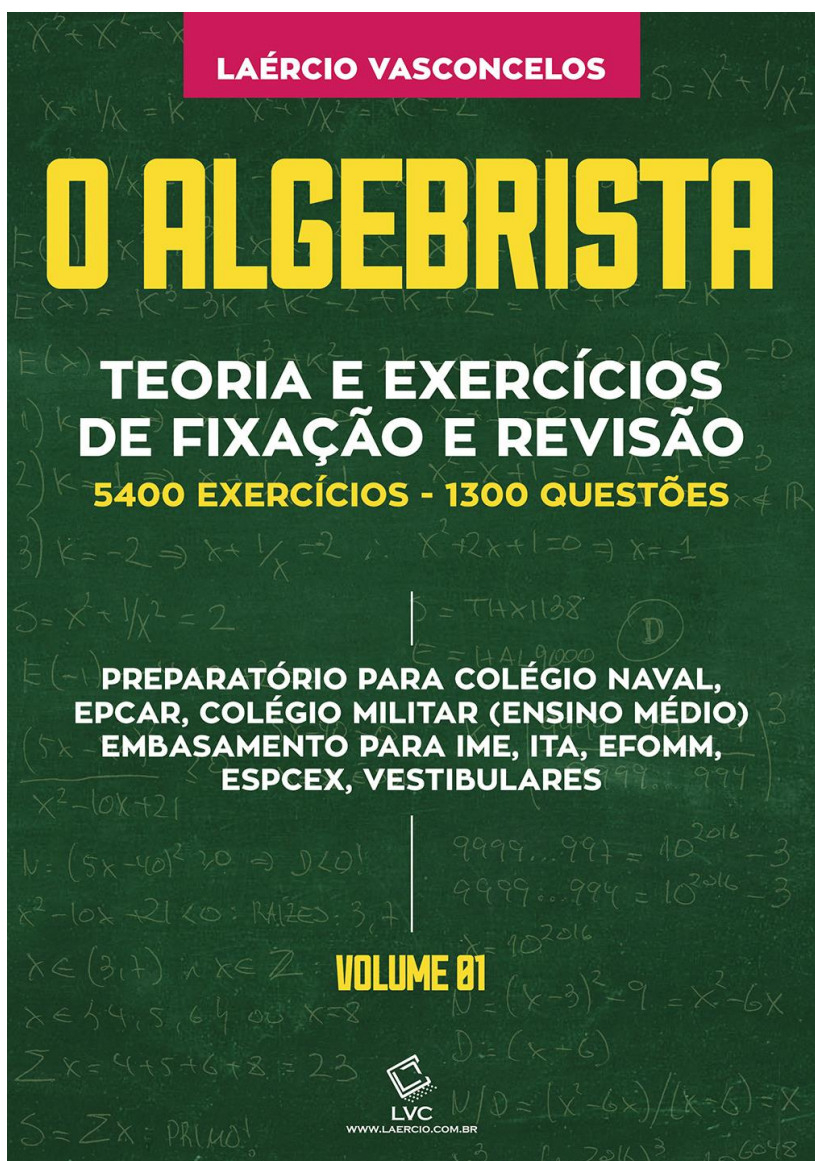


O ALGEBRISTA

Apostilas complementares

APOSTILA 03:

CAPÍTULO 3 – EXPRESSÕES ALGÉBRICAS



www.laercio.com.br

O ALGEBRISTA VOLUME 1

Autor: Laércio Vasconcelos – www.laercio.com.br

Livro de álgebra do ensino **fundamental 2** (6º ao 9º ano)

Preparatório para Colégio Naval, EPCAr, Colégio Militar (ensino médio) e parcial (ver conteúdo abaixo) para Pré-IME, Pré-ITA, EsPCEx, EEAer, ENEM.

VOLUME 1: TEORIA, 5400 EXERCÍCIOS e 1300 QUESTÕES – 674 páginas
Capítulos 1, 2 e 3 do vol 1 disponíveis gratuitamente para os estudantes em PDF.
VOLUME 2: 2000 QUESTÕES DE CONCURSOS

Capítulos do volume 1: (Volume 2 tem os mesmos capítulos em um total de 2000 questões)

- 1) Números inteiros – teoria e 1.100 exercícios
- 2) Números racionais – teoria e 1.100 exercícios + 50 questões
- 3) Expressões algébricas – teoria, 600 exercícios + 90 questões
- 4) Produtos notáveis
- 5) Fatoração
- 6) MMC e MDC de expressões algébricas
- 7) Frações algébricas
- 8) Equações do primeiro grau
- 9) Sistemas de equações do primeiro grau
- 10) Problemas do primeiro grau
- 11) Tópicos sobre ANÁLISE
- 12) Inequações do primeiro grau
- 13) Equações do segundo grau
- 14) Cálculo de radicais
- 15) Equações redutíveis ao segundo grau
- 16) Sistemas do segundo grau
- 17) Inequações do segundo grau
- 18) Problemas do segundo grau
- 19) Funções
- 20) Trinômio do segundo grau
- 21) Polinômios

Laércio Vasconcelos obteve o primeiro lugar no Colégio Naval em 1976, onde cursou 2 anos, como 1001 e 2001. Foi segundo colocado no IME, onde se formou em engenharia eletrônica. É autor de 60 livros e atualmente cursa o PROFMAT no IMPA.

Livro completo em versão impressa em www.laercio.com.br e em livrarias.

Copyright © 2016, Laércio Vasconcelos

Este livro está registrado na Biblioteca Nacional e está protegido pela lei de direitos autorais brasileira, 9.610/98. Nenhuma parte poderá ser reproduzida sem consentimento do autor. Versão em PDF para uso individual por estudantes, não é permitido seu uso para criação de novos materiais didáticos, nem para utilização para confecção de livros e apostilas por cursos ou editoras, seja na versão em papel ou eletrônica.

Autorização de uso deste material
O ALGEBRISTA, volume 1, capítulos 1, 2 e 3
Copyright © 2016 Laércio Vasconcelos

Sejam bem-vindos alunos e professores de matemática. O autor espera contribuir para o ensino e aprendizado da álgebra com este material.

Você poderá usar gratuitamente este material, observadas as condições abaixo.

Este material não é de domínio público, sua utilização é regida pela lei brasileira de direitos autorais (lei 9.610/98), entretanto o autor concede permissões especiais para uso pessoal por alunos e professores:

Alunos: É permitido obter uma cópia em arquivo PDF, para uso próprio, em www.laercio.com.br. É permitido copiar o arquivo original para colegas conhecidos, mas é altamente recomendável que os colegas sejam orientados a obter o arquivo no referido site, pois lá sempre estará a versão mais atualizada, além de outros conteúdos disponibilizados pelo autor. O aluno pode ainda gerar uma cópia impressa para uso próprio, usando uma impressora. Não é permitida a realização de múltiplas cópias (ex: xerox).

Professores: As mesmas condições citadas acima, inclusive sendo permitido o envio do arquivo para outros professores, mas sempre recomendando a obtenção do arquivo mais recente no site citado. Ao professor é permitida também a geração de uma cópia impressa para uso próprio. Adicionalmente, é permitido ao professor o uso deste material em suas aulas, desde que não sejam feitas múltiplas cópias, e que os alunos sejam orientados a obter seus próprios arquivos no site citado.

Em qualquer caso, não são permitidas:

Distribuição de cópias do material, seja em papel, Internet, CD ou qualquer outro tipo de mídia.

A inclusão desses arquivos em coletâneas de arquivos sobre matemática, seja para uso comercial ou não.

Modificação nos conteúdos dos arquivos originais.

Copyright © 2016 Laércio Vasconcelos

O livro O ALGEBRISTA tem 674 páginas, e é encontrado à venda em www.laercio.com.br e em livrarias. Os capítulos 1, 2 e 3, volume 1, possuem esta versão digital para uso pessoal, conforme as condições indicadas nesta página.



Laercio Vasconcelos, autor

Engenheiro Eletrônico formado pelo IME – Instituto Militar de Engenharia, com mestrado em Sistemas e Computação. Participa ainda do programa PROFMAT, do IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Autor de 60 livros nas áreas de Informática e Matemática.

CAPÍTULO 3: Expressões algébricas	143
Questões clássicas	143
Termos e expressões	143
Termo algébrico.....	143
Termos semelhantes	144
Redução de termos semelhantes.....	145
Expressões algébricas	145
Valor numérico	146
Exercícios	146
Classificação de expressões algébricas	146
Exercícios	147
Monômio e polinômio	148
Binômios e trinômios	148
Grau de um monômio ou polinômio	149
Polinômio homogêneo.....	149
Polinômio em x	149
Polinômio completo	149
Completar e ordenar $P(x)$	150
Exercícios	150
Operações com monômios	151
Adição e subtração de monômios	151
Exercícios	151
Multiplicação de monômios	151
Exercícios	152
Potências de monômios	152
Exercícios	153
Divisão de monômios	153
Exercícios	153
Monômios não divisíveis	153
Exercícios	154
Distributividade	154
Exercícios	155
Adição e subtração de polinômios	156
Exercícios	157
Multiplicação de polinômios.....	158
Outro método para armar a multiplicação	160
Exercícios	161
Divisão de polinômios	161
Divisão de polinômio por monômio	161
Exercícios	162
Divisão de dois polinômios	163
Teorema do resto	166
Exercícios	167
Potências de um polinômio.....	167
Exercícios	168
Expressões envolvendo polinômios	168
Exercícios	171
Exercícios de revisão.....	171
Soluções dos exercícios	182

Capítulo 3

Expressões algébricas

Este capítulo é uma introdução às expressões algébricas simples. Entretanto, toda a álgebra consiste em utilizar expressões algébricas, portanto o assunto será continuado em outros capítulos, apresentando tópicos cada vez mais avançados.

Questões clássicas

No volume 2 deste livro, a maioria das questões são de concursos posteriores a 2000, entretanto neste volume 1 apresentamos questões clássicas, ou seja, questões caídas em concursos antigos. Note que em um concurso atual, é pequena a chance de caírem questões idênticas às antigas (apesar de ainda aparecerem). Entretanto, as questões antigas são excelentes para exercitar o conteúdo da álgebra, e elas servem como base para as questões atuais. Por exemplo, é difícil atualmente uma questão pedir apenas o MDC entre expressões algébricas, entretanto as questões atuais pedem outros resultados mais elaborados, para os quais será preciso, durante a resolução, calcular o MDC, uma fatoração e outras técnicas básicas. Portanto, nos concursos atuais, é considerado que as operações básicas (que eram pedidas nos concursos antigos) são consideradas como “conteúdo dominado” para a resolução das questões modernas. Sem o conhecimento das questões clássicas, não é possível resolver as questões das provas atuais. Uma questão caída, por exemplo, no Colégio Naval em 1953, nunca deve ser encarada como “isso não cai mais”, mas como “preciso saber fazer isso para resolver as questões modernas”.

Termos e expressões

Você já conhece os termos e as expressões desde os primeiros anos do ensino fundamental. Por exemplo, ao realizar uma operação de adição como $5+3$, dizemos que o 5 e o 3 são os termos da adição. Também está acostumado a trabalhar com expressões, desde as mais simples, como a do exemplo acima, até expressões mais complexas e trabalhosas para calcular, porém envolvendo somente números. Agora você conhecerá os *termos algébricos* e as *expressões algébricas*.

Termo algébrico

O termo algébrico é uma multiplicação de números e letras. As letras representam números. Os números e as letras que os representam, são a princípio desconhecidos, ou seja, podem assumir qualquer valor real. Podemos calcular o valor de uma expressão algébrica, desde que sejam dados os valores dessas letras. Quando temos equações que envolvem essas expressões, podemos muitas vezes descobrir os valores dessas letras, que nesse caso são chamadas de *incógnitas*. Isto será abordado a partir do capítulo 9.

Exemplos:

$$2x$$

$$4x^2$$

$$-3ab$$

$$5x^2y^3$$

$$-4ab^2c^2$$

Todo termo algébrico pode ser dividido em duas partes:

- Parte numérica ou coeficiente
- Parte literal

Exemplos:

$$2x^5y^3:$$

Coeficiente: 2

Parte literal: x^5y^3

$$-3abc^2:$$

Coeficiente: -3

Parte literal: abc^2

$$12:$$

Coeficiente: 12

Parte literal: não tem (considera-se 1)

Este último não é um *termo algébrico*, mas sim, um *termo*, já que não possui parte literal.

As letras da parte literal são chamadas de *variáveis*.

Termos semelhantes

Dizemos que dois termos algébricos são *semelhantes* quando possuem a mesma parte literal, podendo ter coeficientes diferentes.

Exemplos:

$$4x^3 \text{ e } -12x^3$$

$$4abc \text{ e } 6abc$$

$$2x \text{ e } -5x$$

$$-4mp^2 \text{ e } 10mp^2$$

$$6xyz \text{ e } -2xyz$$

Uma característica importante dos termos semelhantes é que podem ser somados algebricamente. Por exemplo, $3x+7x$ é igual a $10x$. É como dizer “3 laranjas + 7 laranjas é igual a 10 laranjas”. Para somar termos semelhantes, basta somar algebricamente seus coeficientes e repetir a parte literal.

Exemplos:

$$4x^3 - 12x^3 = -8x^3$$

$$4abc + 6abc = 10abc$$

$$2x - 5x = -3x$$

$$-4mp^2 + 10mp^2 = 6mp^2$$

$$6xyz - 2xyz = 4xyz$$

Por outro lado, não podemos efetuar a adição de termos que não sejam semelhantes. Uma adição como $3x+2y$ não pode ser efetuada como fazemos em $3+2=5$. Devemos deixar o resultado indicado, simplesmente como $3x+2y$, nesse caso. É claro que se forem indicados os valores de x e y , podemos substituí-los e encontrar o número resultante.

Redução de termos semelhantes

Reduzir os termos semelhantes em uma expressão algébrica é realizar todas as adições algébricas possíveis de tal forma que não haja repetição. Nem sempre conseguimos juntar todos os termos semelhantes, em alguns casos podemos apenas reduzi-los.

Exemplo:

Reduzir os termos semelhantes da expressão $3x + 7y + 4x - 2y + x^2 + 5$

$3x$ e $4x$ são semelhantes $\rightarrow 3x+4x=7x$

$7y$ e $-2y$ são semelhantes $\rightarrow 7y-2y=5y$

Ficamos então com:

$$7x + 5y + x^2 + 5$$

Exemplo:

Reduzir os termos semelhantes da expressão $\sqrt{\frac{1+2x+4x+x^2}{1-x-2x^2+5x^2}}$

No numerador do radicando, podemos reduzir $2x+4x=6x$. No denominador podemos reduzir $-2x^2+5x^2=3x^2$. Ficamos então com a expressão:

$$\sqrt{\frac{1+6x+x^2}{1-x+3x^2}}$$

Essa expressão é equivalente à anterior, entretanto ainda possui termos semelhantes:

$6x$ e $-x$ são semelhantes

x^2 e $3x^2$ são semelhantes

Entretanto, esses termos semelhantes que restaram não podem ser juntados através de soma algébrica. Quando uma expressão tem apenas adições e subtrações de termos, é possível eliminar totalmente os termos semelhantes. Quando existem frações ou expressões mais complexas, pode não ser possível agrupar todos os semelhantes.

Expressões algébricas

Uma *expressão algébrica* é uma combinação de operações matemáticas nas quais estão envolvidos termos algébricos. Tipicamente são envolvidas as operações estudadas no capítulo anterior:

Exemplos:

$$1) \frac{\sqrt{4x^2+3xy}}{(x-1)} \times \left(1 - \frac{y}{x}\right)^{10} \text{ é uma expressão algébrica}$$

$$2) 2x \text{ é uma expressão algébrica (é também um termo algébrico)}$$

- 3) $(3a^2b^3 + 5ab + 7)$ é uma expressão algébrica
- 4) $x^3 + 4x^2 + 5x + 18$ é uma expressão algébrica

Valor numérico

As letras de uma expressão algébrica representam números quaisquer. O *valor numérico* de uma expressão algébrica é o resultado numérico obtido quando especificamos valores particulares para cada uma de suas letras.

Exemplo:

Calcule o valor numérico da expressão algébrica abaixo para $x = 1$ e $y = -2$

$$4x^2y^3 - 2x - 3y$$

Substituindo x por 1 e y por -2 , ficamos com:

$$\begin{aligned} 4.1^2.(-1)^3 - 2.1 - 3.(-1) &= \\ 4.(-1) - 2 + 3 &= \\ -4 - 2 + 3 &= -3 \end{aligned}$$

Exercícios

E1) Reduzir os termos semelhantes das seguintes expressões algébricas

- | | |
|--|---|
| a) $2x + 5 + 3a + 6 - 4ax$ | k) $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 + a^2b + ab^2 + b^2a$ |
| b) $2x + 3y + 4x - 6y + 8x - 4y + 10x - 8y$ | l) $2x^2 + 5xy - 3y^2 + 6 + 2x - 3y + 4 + 4xy + 6x - 4y + 12$ |
| c) $x + y + z + 3x + 5y + 4z + 6xyz$ | m) $-6xy + 2x^2 - 3x^3 + 8xy + 2x + 3x^2 + 6y + 4x$ |
| d) $4x + 5y + 3x^2 + 2xy + 5y^2 - 12x - 15y + 4x^2$ | n) $4a^2b + 3a^2 - 6b^2 + 4ba^2 - 2ab + 2b^2 + 3b^2a + 6ba$ |
| e) $3x^2 + 2y^2 - 3x + 5x^2 - 2xy + 3x - 2y + x - 4x^2 - 2y^2 - 3xy$ | o) $x^2y^3 - 3x^2y^2 + 4xy - 3x^3y^2 + 2x^2y^2 - 3x^2y^3$ |
| f) $2xy + 4y^3 - 5x^2 + 5xy^2 + 3xy - 9y^3 + 4x^2 - 3x$ | p) $3ab + 2a^2 - 5b^2 + 2a^2b - 4ab + 3b^2 + 2ab^2 + 5ab$ |
| g) $3m^2n + 4p^2q + 5nm^2 + 4qp^2 + 2mp + 4nq$ | q) $5x^2 + 2x^3 + 4x - 7 + 3x^2 - 5x^3 - 12x + 15$ |
| h) $2x^2 - 3y^2 + 12x - 10y + 3x^2 + 5y^2 - 2x + y - 12$ | r) $3x^2y + 2xy + 4xy^2 + 3yx - 7y^2x - 8yx^2 + 10$ |
| i) $2xyz + 4xz + 6zy + 3xy - 8zx + 3yz + 3yzx$ | s) $2ab + -4a^2b + 6ab^2 - 4a^2 - 3b^2 + 5ba + 2b^2a + 3ba^2$ |
| j) $2x^2 + 5y^2 - 6x + 4x^2 - 7xy + 6x - 3y - 9x^2 - 5y^2 - 6xy$ | t) $3x^2 - 4y^2 + 18x - 8y + 7x^2 + 9y^2 - 12x + 2y - 10$ |

E2) Calcule os valores numéricos das seguintes expressões algébricas, dados os valores de suas variáveis

- | | |
|---|---|
| a) $x^2 + 3x + 2$ para $x=3$ | k) $1/(x+y) + 2/xy + (xy)^{-1/2}$ para $x=1$ e $y=4$ |
| b) $a^2 + 3ab + b^2$ para $a=1$ e $b=-1$ | l) $abc + a+b+c$ para $a=1$, $b=2$ e $c=3$ |
| c) $3x+5 - y^2 + 3xy$ para $x=2$ e $y=3$ | m) $a^2 + b^2 + c^2 + 3abc$ para $a=2$, $b=-2$ e $c=3$ |
| d) $x^3 + 4x^2 - 3x + 7$ para $x=2$ | n) $3x+2y + 4xy(x-y)$ para $x=2$ e $y=1$ |
| e) $3/x + 4/y$ para $x=5$ e $y=6$ | o) $(x^2 - y^2)/3 + (2x + 3xy)/4$ para $x=2$ e $y=-2$ |
| f) $x^2 - 3x + 7$ para $x=-4$ | p) $(x-1).(x-2).(x-3).(x-4).(x-5).(x-6).(x-7)$ para $x=5$ |
| g) $9-x^2$ para $x=-5$ | q) $(a-4).(b^7 + 10b^6 + b^5)$ para $a=4$ e $b=5$ |
| h) $x^3 - x + 1$ para $x=2$ | r) $(x-3).(x+4).(x+5).(x+6)$ para $x=3$ |
| i) $(x+1).(y-2).(z+3)$; para $x=2$, $y=1$ e $z=-5$ | s) $-4x^8 + 10x^7 + 3x^6 + 60x^5$ para $x=-1$ |
| j) $x^9 - x^8y + x^7y^2 - x^6y^3$; para $x=1$ e $y=-1$ | t) $3^4x^6 - 3^2x^8 + 10x$ para $x=3$ |

Classificação de expressões algébricas

Podemos formar infinitos tipos de expressões algébricas, bastando partir de expressões numéricas e colocar letras no lugar de números. Podemos usar várias letras, e cada uma com potências diferentes, e combiná-las por adições, subtrações, multiplicações, divisões, potências e raízes. Sendo assim, podemos formar expressões algébricas, das mais simples às mais complicadas. Na maior parte da álgebra, é mais comum a ocorrência de expressões algébricas

simples. A primeira coisa que precisamos para estudar essas expressões é classificá-las, ou seja, identificar certas características importantes.

Toda expressão algébrica pode ser classificada em *racional* ou *irracional*

Expressão algébrica racional é aquela em que suas variáveis aparecem somente elevadas a potências inteiras.

Expressão algébrica irracional é aquela em que existem variáveis elevadas a potências que não sejam números inteiros, por exemplo, raízes.

Exemplos:

$5x^2 + 4xy^3 + 25y$: racional

$\sqrt{5} \cdot x^2 + 4x^3$: racional também, pois os coeficientes podem ter raízes

$\sqrt{1-x^2} + 2xy$: irracional, porque existe parte literal dentro de um radical.

$\frac{1-x^3}{1+xy}$: racional, as letras estão elevadas a expoentes inteiros e não em radicais

Se a expressão for *racional*, é possível ainda classificá-la em *inteira* ou *fracionária*.

Expressão algébrica racional inteira é aquela que é racional e não possui variáveis em denominadores.

Expressão algébrica racional fracionária é aquela que é racional e possui variáveis em denominadores.

Exemplos:

$5x^2 + 4xy^3$: racional inteira

$\frac{1-x^3}{1+xy}$: racional fracionária

$\frac{x}{2} + \frac{y}{3}$: racional inteira, pois não existe letra em denominador

Note que se uma expressão algébrica for irracional, não há interesse em classificá-la em inteira ou fracionária. A classificação em inteira ou fracionária se aplica apenas a expressões racionais.

Exercícios

E3) Classifique as expressões algébricas em

(I) irracional, (RI) racional inteira ou (RF) racional fracionária

a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25}$

k) $x \frac{y^2-5}{3} + y \frac{x^3-2x^7}{\sqrt{3}}$

b) $x\sqrt{8-3\sqrt{5}} + y\sqrt{1+\sqrt{5}}$

l) $3x + x^{-3} + 5$

c) $x^4 + 2y^4 + x^{\frac{1}{2}}$

m) $\frac{x^4}{3} + 2\sqrt[3]{7}x + \sqrt{2} \cdot 3^{-5}$

d) $2x^{-3} + 3y^2$

n) $x^2 + 3x + 5 + \sqrt{y}$

e) $x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 4x - 7$

o) $x^3 + x^2 + x^1 + x^0 + x^{-1} + x^{-2} + x^{-3}$

f) $\frac{x^4 - 2x^3}{6} + \frac{5x^2 + 4x - 7}{5}$

p) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2-1}$

g) $\frac{x^4 - 2x^3}{2x + 36} + \frac{5x^2 + 4x - 7}{5x}$

h) $\frac{x^4}{x}$

i) $x^2 + x^{1/2}$

j) $x^2 + x^{-2}$

q) $\frac{x + 3}{x^3 - 5x^2 + 2x + 4}$

r) $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$

s) $(x + 5)(x - 7)$

t) $(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{7})$

Monômio e polinômio

Uma expressão algébrica racional inteira é chamada de *polinômio*. Se a expressão tiver apenas um termo, é chamada de *monômio*.

Exemplos:

$4x^2$: monômio

$-3abc^2$: monômio

$x^3 + 3x^2 + 2x + 5$: polinômio

$xy^3 + 4x^2y + xy + 1$: polinômio

O termo que não possui parte literal é chamado de *termo independente*. Nos cinco exemplos acima, o termo independente vale respectivamente 0, 0, 0, 5 e 1.

Lembre-se que para ser polinômio, a expressão algébrica precisa ser racional inteira.

Não são polinômios:

$5/x + 4/y + 7$: Expressão algébrica racional, porém fracionária

$4x^{1/2} + 5y^{1/3}$: Expressão algébrica irracional

$\frac{1 + x^3}{1 - x^2}$: Expressão algébrica racional fracionária

$x^2 + 3x + 5 + \sqrt{y}$: Expressão algébrica irracional

OBS: Os polinômios mais usados na matemática são os que possuem apenas uma letra, mas a definição de polinômio também se aplica aos que têm duas ou mais letras.

Binômios e trinômios

Uma expressão algébrica racional inteira, com um só termo, é chamada de monômio, como já vimos. As expressões com 2 e com 3 termos são polinômios, mas recebem nomes adicionais:

2 termos: binômio

3 termos: trinômio

É correto dizer que o monômio, o binômio e o trinômio são polinômios com respectivamente 1, 2 e 3 termos.

Exemplos de binômios:

$4 + x^5$

$2x^3 - 2xy$

$x + 1$

$x^{10} + 5x^9$

$x^2/2 + x^3/5$

$3a + 2b$

$xyz + 4x^2$

Exemplos de trinômios:

$x^2 + 3x + 2$

$2xy + 4x^3 + 5$

$x^9 - 3x^5 + 2x^2$

$a^3b + 2ab^2 + 3ab$

$a^2/5 + b^3/8 + 3abc$

$4xyz + 3abc + x^2a^2$

$x^2 - y^2 + 4xy$

Grau de um monômio ou polinômio

O grau de um monômio é a soma dos expoentes das suas variáveis.

Exemplos:

$5x^2$	2º grau
$3x^5$	5º grau
$2x^2y^4$	6º grau
$4abc$	3º grau

O grau de um polinômio é o maior entre os graus dos seus monômios. Em outras palavras, determinamos o grau de cada um dos seus monômios. O grau máximo encontrado é o grau do polinômio.

Exemplos:

x^2+3x+5	2º grau
$x^2y+3x+y^2$	3º grau
$xy^3+4x^2y+xy+1$	4º grau
x^2+3x+5^4	2º grau (o 5^4 não conta, somente as letras)
3^7x^2+3x+5	2º grau (o 3^7 não conta, somente as letras)

Polinômio homogêneo

Dizemos que um polinômio é homogêneo quando todos os seus termos possuem o mesmo grau.

Exemplos:

$4x^3+2xy^2+x^2y$	Polinômio homogêneo de 3º grau
$2x^2+y^2+5$	Polinômio <i>não homogêneo</i> do 2º grau (devido ao 5, que é de grau 0)

Polinômio em x

Um polinômio em x, ou $P(x)$, é aquele que possui uma única variável x. É claro que podemos ter qualquer outra letra ao invés do x.

Exemplos:

x^2+3x+5	Polinômio em x do 2º grau
y^3+3y^2+4y+7	Polinômio em y do 3º grau
$x^4-2x+50$	Polinômio em x do 4º grau

Polinômio completo

Polinômio completo é aquele que tem todos os termos possíveis, desde o grau do polinômio, até o grau zero (termo independente).

Exemplos:

y^3+3y^2+4y+7	Polinômio em y completo, do 3º grau
x^2+3x+5	Polinômio em x completo, do 2º grau

Mais uma vez lembramos que apesar da noção de polinômio completo ser usado para uma só variável, o conceito se aplica também a mais de uma variável. Por exemplo, um polinômio em x e y, do 3º grau, pode ter as seguintes combinações de partes literais:

3º grau: x^3 , y^3 , x^2y ou xy^2
 2º grau: x^2 , y^2 ou xy

1º grau: x, y

Sendo assim, um polinômio em x e y completo do 3º grau deve ter termos com todas as opções de partes literais indicadas acima, e mais o termo independente. Exemplo:

$$5x^3 + 4y^3 - 2x^2y + 3xy^2 + 3x^2 + 6y^2 - 2xy + 3x + 4y + 7$$

Completar e ordenar P(x)

Mais adiante veremos como realizar operações com polinômios. Muitas dessas operações exigem que os polinômios estejam ordenados e completos. Isto significa que os graus dos seus monômios devem ser dispostos em ordem decrescente, do grau máximo até o grau 0 (termo independente). Além disso, muitas vezes é preciso que o polinômio esteja completo, ou seja, que apareçam termos de todos os graus. Para isso, quando não existir o termo de um certo grau, colocamos este termo com coeficiente zero.

Exemplo:

Ordenar o polinômio $3x + 12 + x^5 - 2x^2$

Colocando os termos em ordem decrescente de grau, ficamos com:

$$x^5 - 2x^2 + 3x + 12$$

Exemplo:

Completar o polinômio acima

Devemos adicionar os termos de grau 4 e 3, com coeficientes zero. Ficamos com:

$$x^5 + 0x^4 + 0x^3 - 2x^2 + 3x + 12$$

Exercícios

E4) Dados os polinômios abaixo, indique o grau, se são completos (C) ou homogêneos (H)

- | | |
|---|--------------------------------|
| a) $3x^2y + x^2 + 3y^2$ | k) $3a + b + b^2$ |
| b) $x^2y^3 - 3x^2y^2 + 4xy - 3x^3y^2 + 2x^2y^2 - 3x^2y^3$ | l) $3x^2 + 3x + x^4$ |
| c) $3x^6 + 9x^4 - 8x^2$ | m) $x^2 + y^2 + 3xy$ |
| d) $a^3 + 3ab^2 + b^3$ | n) $x^2y + xy^3 + 2x + 2y$ |
| e) $x^3 + y^3 + z^3 + 2^3$ | o) $2^6x^2 + 2^4x + 2^2$ |
| f) $1 - x^3 + x^5 - 3x^4$ | p) $z^2 + x^2 + y^2 + 3xyz$ |
| g) $x^5 + 3^{10}x^2 + 2^{20}x + 2^{30}$ | q) $x^2 + y^2 + 2x + y + 5$ |
| h) $x^6y^3 + 2^7x^3 + 3^9x^8$ | r) $x^3 - 2^6$ |
| i) $5x^5 + 2x^2 + 3x^4 + 5$ | s) $0x^4 + 2x^2 + 3x + 5$ |
| j) $1 - x^4$ | t) $x^2 + y^2 + 6xy + 0x + 0y$ |

E5) Complete e ordene os polinômios abaixo

- | | |
|---------------------------|--------------------------------|
| a) $18 + x^5$ | k) $3x^2 + 2y^2 + 4x + 3y + 6$ |
| b) $x^4 + 2x$ | l) $x^2 + 2y^2 + 6xy$ |
| c) $2x^6 + 3x^4 - 4x^2$ | m) $3x^2 - 4x + 2x^4$ |
| d) $3 + 2x + 3x^4 + 4x^6$ | n) $x - x^4$ |
| e) $3ab + 2a + 4b + 5$ | o) $6x^5 + 4x^2 + 2x^4 + 7$ |
| f) $3x + 2 + 5x^3$ | p) $9 - 2x^3 + 3x^5 - 3x^4$ |
| g) $x^5 + 3x^4 - 2x + 5$ | q) $6x - 8 + 4x^3$ |
| h) $x^7 + 7$ | r) $3ab + b^2 + 6$ |
| i) $4a^2 + 4b^2 + 4$ | s) $x^3 - x^5$ |
| j) $y^4 + 2y^2 + 1$ | t) $2x^2 - 2x^4 + 2$ |

Operações com monômios

Mostraremos agora as operações com monômios que tenham qualquer número de variáveis. A partir dessas operações poderemos partir para as operações com polinômios.

Adição e subtração de monômios

Só é possível adicionar ou subtrair monômios que sejam semelhantes, ou seja, que tenham a mesma parte literal. Para realizar a operação, fazemos a adição ou a subtração dos seus coeficientes e repetimos a parte literal.

Exemplos:

$$4x + 3x = 5x$$

$$3x^2 - 5x^2 = -2x^2$$

$$4ab + 5ab = 9ab$$

$$-3xy^2 + 7xy^2 = 4xy^2$$

$$-3abc - 5abc = -8abc$$

Quando os monômios não têm a mesma parte literal, devemos simplesmente deixar a operação indicada:

Exemplos:

$$2x + 3y = 2x + 3y$$

$$x^2 + 4x = x^2 + 4x$$

$$x^{10} - x^9 = x^{10} - x^9$$

$$-3abc + x^2 = -3abc + x^2$$

Isto não significa que a adição ou subtração não exista ou não possa ser realizada. Essas operações existem, apenas não temos como unir os monômios em um só, o resultado fica obrigatoriamente na forma de binômio, já que não existirão termos semelhantes para reduzir.

Exercícios

E6) Efetue as operações

a) $2x + 7x$

b) $4y - 3y + 10y$

c) $5x^2 + 3x^2 - 10x^2$

d) $3x^3 - 6x^3 + 8x^3$

e) $4x^2 + 3x^2 - 9x^2$

f) $3ab + 5ab - 7ab$

g) $10xy + 3xy - 4xy$

h) $2x + 5 + 3x + 8$

i) $x + y + z + x + y - z$

j) $4b + 5 + 3a - 3 + 2a + b$

k) $-6xy + 2xy - 4xy$

l) $2z^2 + 3z^2 - 8z^2$

m) $3abc + 2abc - 7abc$

n) $2x^2y + 3x^2y + 4yx^2$

o) $3a + 2b + 4a - 7b$

p) $2xyz + 3yxz + 4zyx$

q) $2b + 5 + 5b + 8$

r) $2x^2 - 7x^2 - 5x^2$

s) $2abc + 3cab - 8bca$

t) $5x + 2x + 3x - 8x$

Multipliação de monômios

A multiplicação de monômios funciona da mesma forma que a multiplicação de números fatorados. Em anos anteriores do ensino fundamental, surgiam problemas como o do exemplo abaixo:

$$2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3$$

Ao multiplicarmos os dois produtos, tudo vira um produto só, e podemos agrupar as potências de mesma base (repetir a base e adicionar os expoentes). No caso, ficamos com:

$$2^{3+4} \cdot 3^{4+2} \cdot 5^{2+3} = 2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^5$$

Note que juntamos apenas bases iguais (base 2, base 3, base 5).

A multiplicação de monômios funciona exatamente da mesma forma.

- 1) Multiplicamos os coeficientes dos monômios
- 2) Agrupamos as letras iguais, adicionando seus expoentes

Exemplos:

$$(4xy) \cdot (-3x^2y^3z) = -12x^3y^4z$$

$$(8ab^2) \cdot (5a^3b^5) = 40a^4b^7$$

$$-5 \cdot (2x^2) = -10x^2$$

$$(-2x^2y) \cdot (-5x^4z^3) = -10x^6yz^3$$

$$(5x) \cdot (4x^2) = 20x^3$$

Exercícios

E7) Efetue as operações

$$a) (3x^2y^5) \cdot (5xz^2) =$$

$$f) a^3b \cdot (-2ac) =$$

$$k) 3xy \cdot 4xy^2 =$$

$$p) 2x \cdot 3y \cdot 5z =$$

$$b) (2a^3b^4) \cdot (3axb^2) =$$

$$g) -3xy \cdot (-6x) =$$

$$l) x^3y \cdot (\sqrt{2} \cdot x^2) =$$

$$q) 2xy^2 \cdot 3xy \cdot 7x^3y =$$

$$c) -x^5 \cdot (2x^3) =$$

$$h) 5ab(-3a^2b^3) =$$

$$m) -3a^2b^3 \cdot (-4a^4b^2) =$$

$$r) (-3a^2b^3) \cdot (-2a^5b^2) \cdot 4ab =$$

$$d) 2xy \cdot (-4x) =$$

$$i) abc \cdot (-6a^3b^2) =$$

$$n) (4xy) \cdot (4xy) =$$

$$s) 3x^2 \cdot 2y^2 \cdot 10z^3 =$$

$$e) 3abc \cdot (2a^2bc) =$$

$$j) 4x^2y \cdot 6x^3z =$$

$$o) 2x \cdot 2x \cdot 2x =$$

$$t) (-2xy) \cdot (-3yz) \cdot (-5xz) =$$

Potências de monômios

A potência nada mais é que uma multiplicação com fatores iguais. Tratamos os monômios de forma semelhante como tratamos os números, lembrando-se das propriedades das potências. Vejamos por exemplo como elevar ao cubo o monômio: $-5x^2y^3$. A regra de potência de produto diz que devemos elevar cada um dos fatores do produto:

$$(-5x^2y^3)^3 = (-5)^3 \cdot (x^2)^3 \cdot (y^3)^3$$

Elevamos o coeficiente à potência desejada, no caso elevando -5 ao cubo encontramos -125 . Agora temos que elevar cada letra, que por sua vez já tinha um expoente. Em cada uma delas temos que aplicar a regra de potência de potência: repetir a base e multiplicar os expoentes. Ficamos então com:

$$(-5)^3 \cdot (x^2)^3 \cdot (y^3)^3 = -125x^6y^9$$

Outros exemplos:

$$(4x)^2 = 16x^2$$

$$(-5x^2)^3 = -125x^6$$

$$(2x)^5 = 32x^5$$

$$(-x^2)^{100} = x^{200}$$

$$(-2x^9)^3 = -8x^{27}$$

$$(-2ab^2)^4 = 16a^4b^8$$

$$(3a^3b^2)^3 = 27a^9b^6$$

$$(-2xy^2z^3)^6 = 64x^6y^{12}z^{18}$$

$$(-2a^4b^{-2})^5 = -32a^{20}b^{-10}$$

$$(2a^2b^{-2})^{-3} = (1/8) \cdot a^{-6}b^6$$

Não é monômio, mas o cálculo com expoente negativo está certo

Não é monômio, mas o cálculo com expoente negativo está certo

Os dois exemplos acima não são monômios, pois por definição, monômios e polinômios devem ter expoentes positivos. Apesar disso, o método de cálculo é o mesmo usado pelos monômios.

Exercícios

E8) Efetue as operações

a) $(2x^2)^5 =$

f) $(-2ab^3)^2 =$

k) $(4y^2)^3 =$

p) $(-2x)^5 =$

b) $(-4x^3)^3 =$

g) $(4(ac)^2)^3 =$

l) $(-3ax^2)^3 =$

q) $(-3xy^2)^4 =$

c) $(7x^5)^2 =$

h) $(-3x^2)^2 =$

m) $(2x^3)^4 =$

r) $(2x^3)^{-2} =$

d) $[(3x^2)^2]^2 =$

i) $(-x^3)^7 =$

n) $(-4x^2)^3 =$

s) $(-2x^2)^{-3} =$

e) $(-5x)^3 =$

j) $(2x^2y^3)^4 =$

o) $5x^{2^3} =$

t) $(5x^2)^3 =$

Divisão de monômios

Quando dividimos um monômio por outro, o resultado também será um monômio, desde que o primeiro seja múltiplo do segundo, ou seja, as letras do segundo monômio têm que aparecer no primeiro, com expoentes iguais ou maiores. O coeficiente do primeiro não precisa ser múltiplo do coeficiente do segundo.

Exemplo:

Dividir $5x^3y^2$ por $-4xy^2$

Ao dividirmos os coeficientes, o resultado será $-5/4$, o mesmo que $-1,25$. Quanto às letras, vemos que o x que está elevado a 1 no divisor aparece elevado a 3 no dividendo, e que o y que aparece ao quadrado no divisor, também aparece ao quadrado no dividendo. O resultado da divisão continuará sendo um monômio:

$$\frac{-5x^3y^2}{4xy^2} = -1,25x^{3-1}y^{2-2} = -1,25x$$

Para obtermos os expoentes do resultado, basta subtrair os expoentes do dividendo e do divisor, nas letras correspondentes.

Outros exemplos:

$$-12x^3y^2 \div 4xy = -3x^2y$$

$$20x^2y^3z^2 \div 5x^2y^2 = 4yz^2$$

$$3a^2b^2c^3 \div 6a^2b^2 = 0,5c^3$$

$$15x^2y^2 \div -3x^2y^2 = -5$$

$$12a^7b^5c^2 \div 6a^3b^5 = 2a^4c^2$$

$$5x^7 \div 5 = x^7$$

$$2a^3 \div 6 = (1/3)a^3$$

Exercícios

E9) Efetue as operações

a) $4x^2y^3 \div 2xy =$

f) $4x^3y^2 \div (-3xy) =$

k) $24x^3y^4z \div (-60x^3yz) =$

p) $(6xy^2z)^2 \div (-2xy^3) =$

b) $6x^3y^4 \div (-3x^2y^3) =$

g) $-9ab^2c^3 \div (3abc) =$

l) $120x^2y^3z^2 \div (-6x^2y^2) =$

q) $(-2x^2yz^2)^3 \div (-3x^4) =$

c) $-12xyz \div 9z =$

h) $12x^2y^3 \div (-5xy) =$

m) $-64x^2yz \div (-4xyz) =$

r) $(-4xyz^2)^3 \div (2x^2y^2z^4) =$

d) $x^5 \div (-5x^4) =$

i) $6xyz \div (-5x) =$

n) $x^2y^2z^2 \div 6xyz =$

s) $(-x^2yz^2)^3 \div (-4x^2)^2 =$

e) $12x^2y^3 \div (-5xy^2) =$

j) $20x^3yz^2 \div (-5xyz) =$

o) $28x^2y^3 \div -2xy^2 =$

t) $(-2xyz)^4 \div (-2xyz)^2 =$

Monômios não divisíveis

Como vimos, a divisão de monômios só dá como resultado um novo monômio, quando o dividendo tem as mesmas letras, com expoentes iguais ou maiores que as do divisor. Se essa condição não for satisfeita, a divisão ainda assim poderá ser feita, mas o resultado não será um monômio, pois terá expoentes negativos, o que faz com que a expressão algébrica deixe de ser inteira.

Exemplo:

$$x^3 \div y = x^3/y = x^3y^{-1}$$

A divisão está algebricamente correta. O único detalhe a ser observado é que este resultado não é um monômio. É um termo algébrico racional fracionário, devido ao expoente negativo. Isso não impede que a divisão seja realizada e que o resultado esteja correto.

Exercícios

E10) Efetue as operações

- | | | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|
| a) $2x^3 \div 4y^2$ | f) $8x^3y^2 \div x^6y =$ | k) $24xy^3z \div (-6x^3yz) =$ | p) $(4xyz)^2 \div (-2xy^3) =$ |
| b) $-5xy^2 \div (-3x^2z) =$ | g) $18ac^2 \div (4a^2bc) =$ | l) $-60xy^3z^2 \div (-3x^2y^2) =$ | q) $(-3xyz^2)^3 \div (3x^4) =$ |
| c) $-9ab^2c^3 \div (3a^2b^3c^4) =$ | h) $20x^2y^3 \div (-5xy) =$ | m) $-44xyz \div (-4xy^2z^2) =$ | r) $(-10xy^2z)^3 \div 2x^2y^2z^4 =$ |
| d) $4x^3y^4z \div (-6x^3yz^4) =$ | i) $60xyz \div (-5x^2) =$ | n) $-36xyz^2 \div 6x^2y^2z^2 =$ | s) $(-2xyz^2)^3 \div (4x^2)^2 =$ |
| e) $2x^2y^2 \div (-xy^3) =$ | j) $40x^3yz^2 \div (-5x^2y^2z^2) =$ | o) $18x^2y \div -4xy^2 =$ | t) $(-2x^2yz)^4 \div (-2xyz^2)^3 =$ |

Distributividade

Veremos agora uma das mais importantes aplicações da propriedade de distributividade. Já estudamos nos capítulos 1 e 2, a distributividade da multiplicação em relação à adição algébrica:

$$x.(a+b) = x.a + x.b$$

$$x.(a-b) = x.a - x.b$$

Esta regra pode ser estendida para expressões com múltiplos termos entre parênteses:

$$x.(a + b - c + d + e - f) = x.a + x.b - x.c + x.d + x.e - x.f$$

A propriedade da distributividade também se aplica quando invertemos a ordem dos fatores:

$$(a+b).x = a.x + b.x$$

$$(a-b).x = a.x - b.x$$

$$(a + b - c + d + e - f).x = a.x + b.x - c.x + d.x + e.x - f.x$$

Podemos então usar esta propriedade para multiplicar um monômio por um polinômio.

Exemplo:

$$x^2.(3x+2) = x^2.3x + x^2.2 = 3x^3 + 2x^2$$

Para multiplicar um monômio por um polinômio, basta multiplicar o monômio por cada um dos monômios que fazem parte do polinômio. Em cada uma das multiplicações devemos levar em conta os sinais.

Exemplo:

$$a.(a+b) = a^2 + ab$$

$$2x^3.(x^2 - 3x - 5) = 2x^5 - 6x^4 - 10x^3$$

$$-5ab.(a^2 - 2ab + b^2) = -5a^3b + 10a^2b^2 - 5ab^3$$

$$(x^2 - y^2).zy = x^2zy - y^3z$$

$$-2x.(x^3 - 2x^2 - 3x + 5) = -2x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 10x$$

$$2xy.(x^2 - y^2 - 2xy) = 2x^3y - 2xy^3 - 4x^2y^2$$

Em muitos casos devemos realizar a operação inversa, ou seja, dado um polinômio, encontrar um monômio e um polinômio que, se multiplicados, resultam no polinômio original. Vamos fazer isso com os exemplos que acabamos de apresentar:

Exemplo:

$$a^2 + ab$$

Devemos encontrar um monômio que seja múltiplo de cada um dos termos deste polinômio. É fácil ver que este monômio é **a**, então podemos escrever como:

$$a^2 + ab = a \cdot (a+b)$$

O polinômio que aparece multiplicado é fácil de ser obtido, basta dividir cada termo do polinômio original pelo monômio **a** que foi encontrado. Esta operação se chama “fatorar o polinômio”. O assunto é extenso e tem um capítulo inteiro a ele dedicado neste livro. Mas aqui já estamos apresentando uma das formas mais simples de fatoração. Dizemos que o monômio **a** encontrado foi “colocado em evidência”. Vejamos um outro exemplo:

Exemplo:

Fatorar $2x^5 - 6x^4 - 10x^3$, colocando um monômio em evidência

Temos que encontrar um monômio que esteja contido nos fatores de $2x^5$, de $6x^4$ e de $10x^3$. Este monômio é fácil de ser encontrado: ele é o MDC (máximo divisor comum) entre os termos do polinômio dado. Este assunto será estudado no capítulo 5, mas podemos resolver o problema agora, pois é fácil encontrar este monômio, sem realizar cálculos. Entre os coeficientes 2, -6 e -10, vemos que todos podem ser divididos por 2, então coeficiente do monômio que vai ficar em evidência é 2. Entre as partes literais temos x^5 , x^4 e x^3 , vemos que todos podem ser divididos por x^3 . Então o monômio que vai ficar em evidência é $2x^3$. Dividimos agora cada um dos termos do polinômio original por $2x^3$ e encontramos, respectivamente:

$$(2x^5) \div 2x^3 = x^2$$

$$(-6x^4) \div 2x^3 = -3x$$

$$(-10x^3) \div 2x^3 = -5$$

Então concluímos que:

$$2x^5 - 6x^4 - 10x^3 = 2x^3 \cdot (x^2 - 3x - 5)$$

Outros exemplos:

$$-5a^3b + 10a^2b^2 - 5ab^3 = -5ab \cdot (a^2 - 2ab + b^2)$$

$$x^2zy - y^3z = zy \cdot (x^2 - y^2)$$

$$-2x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 10x = -2x \cdot (x^3 - 2x^2 - 3x + 5)$$

$$2x^3y - 2xy^3 - 4x^2y^2 = 2xy \cdot (x^2 - y^2 - 2xy)$$

Exercícios

E11) Efetue as operações

a) $2x \cdot (x^2 - 3y^2) =$

b) $3ab \cdot (x - 2y - z^2) =$

c) $-3 \cdot (x^2 - x - 5) =$

d) $2ab(3a + 2b + ab + 6) =$

e) $-5x(x^2 - y^2 + 4x - 5) =$

f) $5 \cdot (a^2 - b^2) =$

g) $-3 \cdot (a^2 - b^2) =$

h) $-1 \cdot (a^2 - b^2) =$

i) $-(a^2 - b^2) =$

j) $-(3x^3 - 2x^2 + 5x - 8) =$

k) $3xy(1 - 6x - 2x^2 - 3y^2) =$

l) $-2 \cdot (3x - 4y + 2xy - 3) =$

m) $2ab \cdot (3a + 2b^2 - 4ab) =$

n) $4x^2yz \cdot (2x + 3y - 4z) =$

o) $2xy(x^2 + y^2 - 2xy) =$

p) $xy \cdot (x^3 + 2x^2 + 5) =$

q) $4a^2bc \cdot (2ab^2 - 3abc^3) =$

r) $2xy^2 \cdot (x^2 + 2xy + 8) =$

s) $(2xy^2)^2 \cdot (x + 3y) =$

t) $x^3y \cdot (x^2 + 2y^2 + x + y) =$

E12) Fatore os polinômios, colocando um monômio em evidência

- | | |
|--|---|
| a) $2x^2 + 6xy$ | k) $8a^2b^2c^4 - 4a^3c^3 + 12b^4c^3 + 16a^3b^2$ |
| b) $ax^2 - 2axy + ay^2$ | l) $4mxy - 2mx + 6my + 10m^2$ |
| c) $4xy - 2x^2y^2 + 6x^3y^3$ | m) $-5a^3b^2c^2 + 10a^2b^3c^4 + 15a^5b^3c^2$ |
| d) $4a^2b^3c^4 - 8b^3c^6 - 10a^3c^5$ | n) $x^4y + 3x^3y^3 + x^5y + x^3y^2$ |
| e) $a^2x^2 - 3a^2x + 5a^2 =$ | o) $8a^3b^3c^2 - 2a^3b^2c^5$ |
| f) $4mx - 2mx^2 + 6m^2 =$ | p) $x^4y + 4x^3y + 6xy$ |
| g) $25a^2b^2 - 125ab^2 + 375a^2b =$ | q) $2x^3y + 2xy^4 - 8x^3y^2$ |
| h) $4x^7 + 20x^5 + 8x^3 =$ | r) $6xy - 24x^2y - 6x^3y - 12xy^4$ |
| i) $3a^2b^3x^3 - 9a^2b^2x^2 + 12a^2b^4x^5 =$ | s) $8a^2b - 4ab^2 + 4a^2b^2 - 12ab$ |
| j) $5a^2bc + 15b^2ac + 25a^2c^2b$ | t) $3x^6 + 2x^8 + 7x^5 - 3x^4$ |

Adição e subtração de polinômios

Para adicionar polinômios, procedemos da mesma forma como fazemos para adicionar números. A seguir, agrupamos os termos semelhantes, caso existam.

Exemplo:

Dados $P(x) = x^3 + 3x^2 - 12x + 15$ e $Q(x) = 2x^2 - 4x + 6$, calcule $P(x) + Q(x)$.

Basta calcular:

$$(x^3 + 3x^2 - 12x + 15) + (2x^2 - 4x + 6)$$

Como estamos apenas adicionando, basta escrever o primeiro polinômio, e a seguir, os termos do segundo polinômio. Fazemos então a redução dos termos semelhantes:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2x^2 &= 5x^2 \\ -12x - 4x &= -16x \\ 15 + 6 &= 21 \end{aligned}$$

Ficamos então com: $x^3 + 5x^2 - 16x + 21$

Uma outra forma para adicionar polinômios ordená-los e completá-los, e armar um dispositivo de adição no qual os termos semelhantes de um ficam alinhados com os termos semelhantes do outro.

Exemplo:

Dados $P(x) = x^4 + 4x^2 - 10x + 15$ e $Q(x) = 3x^2 - 8x + 6$, calcule $P(x) + Q(x)$.

Completando e ordenando $P(x)$: $x^4 + 0x^3 + 4x^2 - 10x + 15$

Completando e ordenando $Q(x)$: já está ordenado e completo

Dispositivo para adição:

x^4	$+0x^3$	$+4x^2$	$-10x$	$+15$
		$+3x^2$	$-8x$	$+6$
<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>
x^4	$+0x^3$	$+7x^2$	$-18x$	$+21$

Resposta: $x^4 + 7x^2 - 18x + 21$

Lembre-se

- 1) Sempre use os polinômios ordenados e completos
- 2) Coloque os termos semelhantes de um polinômio alinhados com os do outro
- 3) Preste atenção nos sinais de cada termo

A subtração de polinômios é muito fácil. Basta lembrar que subtrair é a mesma coisa que adicionar com o simétrico. Basta então trocar os sinais do segundo polinômio e adicionar com o primeiro.

Exemplo:

Dados $P(x) = 2x^4 + 5x^2 - 6x + 15$ e $Q(x) = 3x^3 - 8x + 6$, calcule $P(x) - Q(x)$.

$$P(x) - Q(x) = 2x^4 + 5x^2 - 6x + 15 - (3x^3 - 8x + 6)$$

$$= 2x^4 + 5x^2 - 6x + 15 - 3x^3 + 8x - 6$$

Observe aqui que repetimos o primeiro polinômio e trocamos todos os sinais do segundo polinômio. O motivo disso é que, um sinal negativo antes de um polinômio entre parênteses tem o efeito de inverter os sinais de cada um dos termos do polinômio.

Para reduzir os termos semelhantes, devemos operar um de cada vez. É bom sublinhar ou destacar cada termo, para que não seja esquecido nenhum deles:

$$\text{Termos com } x^4 \rightarrow \underline{2x^4} + 5x^2 - 6x + 15 - 3x^3 + 8x - 6 = 2x^4 \dots$$

$$\text{Termos com } x^3 \rightarrow \underline{2x^4} + 5x^2 - 6x + 15 - \underline{3x^3} + 8x - 6 = 2x^4 - 3x^3 \dots$$

$$\text{Termos com } x^2 \rightarrow \underline{2x^4} + \underline{5x^2} - 6x + 15 - \underline{3x^3} + 8x - 6 = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 \dots$$

$$\text{Termos com } x \rightarrow \underline{2x^4} + \underline{5x^2} - \underline{6x} + 15 - \underline{3x^3} + \underline{8x} - 6 = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 2x \dots$$

$$\text{Termo numérico} \rightarrow \underline{2x^4} + \underline{5x^2} - \underline{6x} + \underline{15} - \underline{3x^3} + \underline{8x} - \underline{6} = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 2x + 9$$

O resultado é então $2x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 2x + 9$

Exercícios

E13) Calcule a soma dos polinômios

- $(-2x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 10x) + (x^4 + 2x^3 - 15x)$
- $(x^2 + 4x - 12) + (2x^3 - 4x^2 + 20x)$
- $(x^3 + 4x^2 - 6) + (2x^4 - x^5 + 3x^3)$
- $(-x^4 + 3x^2 - x^3 + 5) + (x^3 - 2x^2 + 3x)$
- $(-2x^6 + 3x^5 - 4x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 6) + (3x^5 - 2x^3 + 4x + 7)$
- $(x^5 - 2x^4 + 4x^2 - 3x - 6) + (5x^5 + 3x^4 - 4x^2 + 6)$
- $(-2x^5 - 5x^4 - 2x^2 + 4) + (-2x^5 + 6x^2 + 7x - 3)$
- $(6x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 5x) + (3x^4 + 2x^3 - 8x + 5)$
- $(2x^6 - 3x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 7x - 10) + (2x^5 - 6x^4 + 4x + 3)$
- $(2x^5 + 3x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 2x) + (5x^4 + 6x^3 - 2x + 5)$

- $(2x^7 - 4x^6 - 2x^4 + 5x^2 + 5) + (2x^5 - 2x^7 + 4x^3 - 2x^6 - 2x^4)$
- $(5x^5 - 4x^7 - 2x^6 - 3x^4 - 5) + (2x^5 + 3x^3 - 2x^6 + 2x - 3x^4)$
- $(6 - 3x + 4x^4 + 2x^5) + (2x^5 - 2x^7 - 3x^6 + 4x - 2x^4 - 3)$
- $(2x^2 + 7x^4 + 3x^5 + 4x^6) + (2x^5 - 4x^7 + 2x^3 - 6x^6 + 2x^2 - 4)$
- $(6x^5 - 2x^7 + 3x^3 - 5x + 2x^4) + (6x^5 - 3x^7 - 2x^6 + 4x^2 - 7)$
- $(9 - 2x^2 + 4x^4 - 5x^5 + 3x^7) + (-2x^7 + 6x^3 + 3x - 7x^4 + 4x^2)$
- $(2x^5 - 4x^3 + 6x - 2x^4 + 9) + (3x^5 - 6x^7 - 3x^6 + 2x + 5x^2 - 2)$
- $(-3 + 2x - 3x^3 + 5x^4 - 2x^6) + (-5x^7 + 2x^3 - 6x^6 - 3x^4 - 5)$
- $(4x^3 - 2x^6 + 3x - 2x^2 + 7) + (-3x^6 + 2x - 4x^4 + 3x^2 - 8)$
- $(8x - 2x^2 - 2x^4 + 3x^5 - 7x^7) + (-2x^6 + 4x - 3x^4 + 2x^2 - 6)$

E14) Subtraia os polinômios

- $(-2x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 10x) - (x^4 + 2x^3 - 15x)$
- $x^2 + 14x - 6) - (3x^3 - 3x^2 + 10x + 5)$
- $(2x^3 + 7x^2 - 6x) - (3x^4 - 2x^6 + 5x^2)$
- $(4x^3 - 2x^6 + 3x - 2x^2 + 7) - (-3x^6 + 2x - 4x^4 + 3x^2 - 8)$
- $(-3 + 4x - 3x^3 - 3x^6) - (-2x^7 + 2x^3 - 4x^4 - 6)$
- $(9 - 5x^2 - 5x^5 + 2x^7) - (-3x^7 + 6x^3 - 5x^4 + 6x^2)$
- $(2x^2 + 3x^4 + 2x^6) - (3x^5 - 5x^7 + 2x^3 - 2x^2 - 4)$
- $(-4x^7 - 3x^6 - 2x^4 - 15) - (4x^5 + 3x^3 - 6x^6 + 2x - 3x^4)$
- $(5x^7 - 2x^6 + 3x^2 + 4) - (3x^5 - 5x^7 + 6x^3 - 3x^6 - 4x^4)$
- $(3x^4 + 7x^3 + 3x^2 - 2x) - (5x^4 + 4x^3 - 6x + 2)$

- $(6x - 5x^4 + 4x^5 - 2x^7) - (-7x^6 + 5x - 2x^4 + 3x^2 - 5)$
- $(2x^5 - 4x^3 + 6x + 9) - (2x^5 - 3x^7 - 4x^6 + 5x + 5x^2 - 6)$
- $(6x^5 - 2x^7 + 3x^3 - 2x^4) - (4x^5 - 3x^7 - 2x^6 + 2x^2 - 7)$
- $(6 - 3x + 4x^4 + 2x^5) - (2x^5 - 3x^7 - 3x^6 + 5x - 6x^4 - 3)$
- $(-4x^7 - 2x^6 - 3x^4 - 5) - (3x^5 + 2x^3 - 5x^6 + 4x - 3x^4)$
- $(2x^5 - 5x^3 + 4x^2 + 2x) - (2x^4 + 5x^3 - 4x + 6)$
- $(2x^6 - 3x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 7x - 10) - (3x^5 - 4x^4 + 7x + 6)$
- $(-2x^5 - 5x^4 - 2x^2 + 4) - (-3x^5 + 5x^2 + 6x - 5)$
- $(3x^5 - 2x^4 + 4x^2 - 3x - 6) - (4x^5 + 6x^4 - 7x^2 + 5)$
- $(-2x^6 + 3x^5 - 2x^3 - x^2 + 2x + 6) - (2x^5 - 5x^3 + 6x + 8)$

Multiplicação de polinômios

Já aprendemos a multiplicar um monômio por um polinômio. Agora vamos ver como multiplicar dois polinômios. O princípio é simples, e é baseado na propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Exemplo:

Calcular o produto dos binômios $x+y$ e $a+b$.

$$(x+y) \cdot (a+b)$$

Chamemos a expressão $x+y$ de z , ficamos então com:

$$(x+y) \cdot (a+b) = z \cdot (a+b)$$

Agora lembremos da propriedade distributiva da multiplicação. A variável z está multiplicando o binômio $a+b$. Aplicando distribuição, ficamos com:

$$z \cdot a + z \cdot b$$

Agora, lembrando que $z=x+y$, ficamos com:

$$(x+y) \cdot a + (x+y) \cdot b$$

Podemos aplicar distributividade novamente em cada uma dessas duas multiplicações. Como $(x+y) \cdot a$ é o mesmo que $x \cdot a + y \cdot a$, e $(x+y) \cdot b$ é o mesmo que $x \cdot b + y \cdot b$, ficamos com:

$$x \cdot a + y \cdot a + x \cdot b + y \cdot b$$

Observe que cada termo do primeiro polinômio (no caso, x e y), aparece multiplicando cada termo do segundo polinômio (no caso, a e b). Em outras palavras, multiplicamos cada termo do primeiro polinômio por cada um dos termos do segundo polinômio, e somamos os resultados.

Exemplo:

$$(x+y+z) \cdot (a+b+c) = x \cdot a + x \cdot b + x \cdot c + y \cdot a + y \cdot b + y \cdot c + z \cdot a + z \cdot b + z \cdot c$$

Até agora estamos usando polinômios com termos simples, com uma letra só. Entretanto este princípio vale para polinômios com termos de qualquer tipo.

Exemplo:

$$(2x+3y^2+4z) \cdot (x^2+y^2+2xy) = 2x^3 + 2xy^2 + 4x^2y + 3x^2y^2 + 3y^4 + 6xy^3 + 4x^2z + 4xyz + 8xyz$$

Para não fazer confusão, você pode armar uma pequena tabela. Os polinômios tem 3 termos cada um, então formamos uma tabela com 3 linhas e 3 colunas. Colocamos ao lado de cada linha, os termos de um polinômio, e acima de cada coluna, os termos do outro polinômio.

	$2x$	$3y^2$	$4z$
x^2			
y^2			
$2xy$			

A seguir multiplicamos todos os termos do primeiro polinômio, por cada um dos termos do segundo polinômio, colocando os resultados nas posições corretas da tabela. No final, reduza os termos semelhantes, caso existam.

	$2x$	$3y^2$	$4z$
x^2	$2x^3$	$3x^2y^2$	$4x^2z$
y^2	$2xy^2$	$3y^4$	$4y^2z$
$2xy$	$4x^2y$	$6xy^3$	$8xyz$

Mais um detalhe muito importante: cada uma dessas multiplicações deve ter o sinal correto. O esquecimento dos sinais é um dos erros mais comuns dos alunos que lidam com este assunto pela primeira vez.

Exemplo:

Multiplique os polinômios $3x^2 - 2x + 5$ e $x^3 - 2x^2 - 3x + 5$

	x^3	$-2x^2$	$-3x$	5
$3x^2$				
$-2x$				
5				

Neste exemplo, temos que fazer 12 multiplicações de monômios, e cada uma delas deve ter o sinal apropriado. Observe na tabela acima que colocamos os termos com os respectivos sinais. Os positivos podem ficar sem sinal, mas os negativos devem permanecer com o sinal. Fazemos então as multiplicações de todos os monômios, observando os sinais:

	x^3	$-2x^2$	$-3x$	5
$3x^2$	$3x^5$	$-6x^4$	$-9x^3$	$15x^2$
$-2x$	$-2x^4$	$4x^3$	$6x^2$	$-10x$
5	$5x^3$	$-10x^2$	$-15x$	25

Agora temos que agrupar os termos semelhantes:

Termo em x^5 : $3x^5$
 Termo em x^4 : $-2x^4 - 6x^4 = -8x^4$
 Termo em x^3 : $5x^3 + 4x^3 - 9x^3 = 0x^3 = 0$
 Termo em x^2 : $-10x^2 + 6x^2 + 15x^2 = 11x^2$
 Termo em x : $-15x - 10x = -25x$
 Termo independente (aquele que não tem letra): 25

O produto pedido é então: $3x^5 - 8x^4 + 11x^2 - 25x + 25$

Desenhar uma tabela ajuda muito quem está começando a estudar o assunto, mas com a prática, o aluno conseguirá realizar esses cálculos sem armar a tabela. O importante é prestar atenção nos sinais, não esquecer de reduzir os termos semelhantes, e fazer os cálculos de forma bem organizada para não errar devido à bagunça ou letra feia.

Exemplo:

Calcule $(x^2 - 5) \cdot (x^3 - 7x^2 - 4x + 6)$

Começamos multiplicando o x^2 pelos termos do segundo polinômio

$$\begin{array}{ccccccc} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ (x^2-5) \cdot (x^3-7x^2-4x+6) & = & x^5-7x^4-4x^3+6x^2 & \dots \end{array}$$

A seguir, o -5 deve multiplicar os termos do segundo polinômio

$$\begin{array}{ccccccc} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ (x^2-5) \cdot (x^3-7x^2-4x+6) & = & x^5-7x^4-4x^3+6x^2-5x^3+35x^2+20x-30 \end{array}$$

Observe que levamos em conta os sinais em cada uma das multiplicações de monômios. Finalmente podemos reduzir os termos semelhantes. O resultado final será:

$$\begin{aligned} & x^5-7x^4-4x^3+6x^2-5x^3+35x^2+20x-30 \\ & = x^5-7x^4-9x^3+41x^2+20x-30 \end{aligned}$$

Outro método para armar a multiplicação

A multiplicação de polinômios requer a multiplicação de cada termo do primeiro polinômio, por cada um dos termos do segundo polinômio. Qualquer forma de “armar” a multiplicação é válida, desde que o aluno não esqueça algum termo do produto, e que preste atenção nos sinais. Vamos ver agora uma outra forma para armar a multiplicação, parecida com a multiplicação de números naturais.

- 1) Complete e ordene os polinômios
- 2) Escreva o polinômio que possui mais termos, como sendo o multiplicando
- 3) Escreva sobre ele o polinômio que possui menos termos, como multiplicador, alinhando os expoentes iguais.

A recomendação de escrever primeiro o polinômio com mais termos resultará em uma expressão de cálculo mais simples.

Exemplo:

$$\text{Calcule } (-4 + 3x - 2x^3 + x^5 - x^6) \cdot (2x^2 + 3x + 5)$$

Completando e ordenando o primeiro polinômio, e colocando sob ele o segundo polinômio (já está ordenado e completo), com potências alinhadas (número sob número, x sob x , x^2 sob x^2 , etc.), ficamos com o dispositivo abaixo.

$$\begin{array}{cccccccc} -x^6 & + & x^5 & + & 0x^4 & + & 0x^3 & + & 0x^2 & + & 3x & - & 4 \\ & & & & & & & & 2x^2 & + & 3x & + & 5 \\ \hline \end{array}$$

A seguir multiplicamos cada termo do segundo polinômio por cada termo do primeiro polinômio. Na primeira multiplicação, temos um resultado do grau 8. Na próxima teremos grau 7, grau 6, e assim por diante.

$$\begin{array}{cccccccc} -x^6 & + & x^5 & + & 0x^4 & + & 0x^3 & + & 0x^2 & + & 3x & - & 4 \\ & & & & & & & & 2x^2 & + & 3x & + & 5 \\ \hline -2x^8 & + & 2x^7 & + & 0x^6 & + & 0x^5 & + & 0x^4 & + & 6x^3 & - & 8x^2 \end{array}$$

A seguir multiplicamos o próximo termo do segundo polinômio ($3x$) pelos termos do primeiro polinômio. Escrevemos este novo polinômio sob o anterior, mantendo as potências alinhadas.

$$\begin{array}{r}
 -x^6 + \quad x^5 + \quad 0x^4 + \quad 0x^3 + \quad 0x^2 + \quad 3x - \quad 4 \\
 \hline
 2x^2 + \quad 3x + \quad 5 \\
 -2x^8 + 2x^7 + \quad 0x^6 + \quad 0x^5 + \quad 0x^4 + \quad 6x^3 - 8x^2 \\
 -3x^7 + \quad 3x^6 + \quad 0x^5 + \quad 0x^4 + \quad 0x^3 + 9x^2 - 12x
 \end{array}$$

Finalmente, multiplicamos 5, que é o próximo e último termo do multiplicador, pelos termos do primeiro polinômio. A seguir podemos somar os termos semelhantes.

$$\begin{array}{r}
 -x^6 + \quad x^5 + \quad 0x^4 + \quad 0x^3 + \quad 0x^2 + \quad 3x - \quad 4 \\
 \hline
 2x^2 + \quad 3x + \quad 5 \\
 -2x^8 + 2x^7 + \quad 0x^6 + \quad 0x^5 + \quad 0x^4 + \quad 6x^3 - 8x^2 \\
 -3x^7 + \quad 3x^6 + \quad 0x^5 + \quad 0x^4 + \quad 0x^3 + 9x^2 - 12x \\
 -5x^6 + \quad 5x^5 + \quad 0x^4 + \quad 0x^3 + \quad 0x^2 + 15x - 20 \\
 \hline
 -2x^8 - x^7 - \quad 2x^6 + \quad x^5 + \quad 0x^4 + \quad 6x^3 + x^2 - 3x - 20
 \end{array}$$

A resposta é : $-2x^8 - x^7 - 2x^6 + x^5 + 6x^3 + x^2 - 3x - 20$

Exercícios

E15) Multiplique os polinômios

- | | |
|-----------------------------------|--------------------------------------|
| a) $(x-1).(x^2+3x+7)$ | k) $(3x^3-6x^2+2x).(2x+1)$ |
| b) $(x+2).(x^2-2x+3)$ | l) $(-2x^4+4x^2-2x^3+3).(3x-3)$ |
| c) $(x^2-2x+3).(x^2-3x+4)$ | m) $(-3x^5+2x^2+5x-3).(3x^2+2)$ |
| d) $(3x^5-2x^7-2x^6-2x^4).(2x+8)$ | n) $(-4x^5-2x^4-3x^2+2).(x-1)$ |
| e) $(2x^5+4x-2x^4-3).(x-3)$ | o) $(2x^4+3x^3-5x+5).(x^2-1)$ |
| f) $(2x^5-3x^7-3x^6-7).(4-2x)$ | p) $(2x^4+4x^3-3x+2).(x^2-3x)$ |
| g) $(-5-4x^3+5x^4-2x^6).(6x-2)$ | q) $(3x^5-2x^7-3x^6-2x^4-3).(x+3)$ |
| h) $(6x-2x^4+5x^5-7x^7).(x+3)$ | r) $(x^2+2x^4+2x^5+x^6).(x^3-7)$ |
| i) $(-3x^5-5x^4-4x^2).(x-4)$ | s) $(-4+3x-2x^3+x^4-x^6).(x^2+2x+2)$ |
| j) $(-2x^4-2x^3+5).(2x-1)$ | t) $(x^3-2x^6+2x-x^2+1).(2x+3)$ |

Divisão de polinômios

Dentre as operações básicas com polinômios, a divisão é a mais trabalhosa. Vamos então dividir o assunto em duas etapas, a primeira usando um monômio como divisor (polinômio dividido por monômio), e a segunda, finalmente com o caso completo, dividindo um polinômio por outro polinômio.

Divisão de polinômio por monômio

Já vimos que ao dividirmos um monômio por outro monômio, duas coisas podem acontecer:

a) Divisão exata: Quando as letras do divisor estão presentes no dividendo, com expoentes maiores ou iguais. O resultado da divisão é um novo monômio.

Exemplo: $4x^3y^2 \div 6x^2y^2 = (2/3)x$

b) Divisão não exata: Quando a condição acima não é satisfeita, o resultado possui um ou mais expoentes negativos. Este resultado não é considerado um monômio, e sim, um termo algébrico racional fracionário.

Exemplo: $4x^3y^2 \div 6x^2y^3 = (2/3)x.y^{-1}$

Quando dividimos um polinômio por um monômio, os termos que resultariam em divisões não exatas ficam indicados como o resto da divisão.

Exemplo:

Dividir $2x^3 + 4x^2 - 6x + 12$ por $2x$

Esta é uma divisão de polinômio ($2x^3+4x^2-6x+12$) por um monômio ($2x$). Para fazer esse tipo de divisão, dividimos cada termo do polinômio pelo monômio dado:

$$2x^3 \div 2x = x^2$$

$$4x^2 \div 2x = 2x$$

$$-6x \div 2x = -3$$

$$12 \div 2x = \text{Divisão não exata}$$

Os resultados das divisões acima formam o quociente da divisão entre o polinômio e o monômio. O termo 12 que não pode ser dividido (o resultado deixaria de ser um polinômio) fica indicado como resto da divisão. Portanto o resultado pedido é:

Quociente: $x^2 + 2x - 3$

Resto: 12

Exemplo:

$$(4x^5 - 2x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 2x + 15) \div (2x^2) =$$

No dividendo, apenas os termos de grau 2 ou superior poderão ser divididos, e os termos de grau 1 ou inferior ($2x+15$) ficarão indicados como resto.

Quociente: $2x^3 - x^2 + 3x + 2$

Resto: $2x+15$

Exemplo:

$$(6a^2b^3 - 12a^3b^2 + 10ab + 4a^2 + 6b^2 + 4a + 2b + 8) \div (2ab)$$

A única diferença aqui é que o polinômio e o monômio têm duas variáveis, a e b. O princípio da divisão é o mesmo: o quociente será formado pela divisão dos termos que permitem divisão exata pelo divisor (no caso, $2ab$), e os termos que não permitem a divisão exata formarão o resto da divisão. No exemplo acima, apenas os três primeiros termos permitem divisão exata, os 5 últimos não permitem, e formarão o resto da divisão.

Quociente: $3ab^2 - 6a^2b + 5$

Resto: $4a^2 + 6b^2 + 4a + 2b + 8$

Exercícios

E16) Divida os polinômios pelos respectivos monômios, indique o quociente e o resto

a) $(18x + 10) \div 2x$

b) $(x^2 + 3x + 6) \div 3x^2$

c) $(4x^2 + 6x + 7) \div (-6x^2)$

d) $(-6x^4 + 24x^3 + 6x^2 - 9x) \div 3x^3$

e) $(32x^3 - 4x^2 + 20x + 52) \div 4x^2$

f) $(20x^3 + 25x^2 - 15x) \div (-5x^3)$

g) $(-3x^6 + 12x^5 - 24x^4 + 3x^2 - 18) \div 3x^2$

h) $(8 - 20x^2 - 52x^5 + 28x^7) \div (-4x^2)$

i) $(2x^2 + 6x^4 + 2x^6) \div 2x^2$

j) $(3x^5 - 15x^7 + 6x^3 - 3x^6 - 24x^4) \div 3x^4$

k) $(2x^4 + 4x^3 - 5x) \div x$

l) $(2x^4 - 6x^6 + 4x^2) \div (-2x^2)$

m) $(12x^3 - 3x^6 + 24x - 3x^2 + 15) \div 3x$

n) $(-2x^7 + 4x^3 - 2x^4 - 6) \div (-2x^2)$

o) $(12 - 15x^2 - 3x^5 + 12x^7) \div 3x$

p) $(10x^5 - 20x^7 + 20x^3 - 10x^2 - 15) \div 5x$

q) $(2x^5 + 3x^3 - x^6 + 2x - 3x^4) \div (-4x^2)$

r) $(3x^5 - x^7 + 6x^3 - 3x^6 - 4x^4) \div 4x$

s) $(3x^4 + x^3 + 3x^2 - 3x) \div (-3x^2)$

t) $(x^5 - 2x^7 - 3x^6 + 5x - x^4 - 3) \div 6x$

Divisão de dois polinômios

A divisão de polinômios apresenta uma analogia com a divisão de números inteiros. Considere por exemplo a divisão:

$$13 \div 4 = 3, \text{ resto } 1$$

Neste exemplo, o 13 é o dividendo (D), o 4 é o divisor (d), o 3 é o quociente (Q) e 1 é o resto (R). Entre o dividendo, o divisor, o quociente e o resto na divisão de números inteiros, vale a relação:

$$D = d.Q + R$$

Considere agora que queremos dividir:

$$[x.(x+3) + 2(x+3) + 5] \div (x+3)$$

Observe que o divisor é $x+3$, e escrevemos o dividendo de forma a aparecerem múltiplos de $x+3$. Na prática os polinômios a serem divididos não aparecem dessa forma simpática, e sim, com os termos semelhantes reduzidos. Seria apresentado como $(x^2 + 5x + 11)$, que é o resultado que encontraríamos se desenvolvêssemos a expressão $[x.(x+3) + 2(x+3) + 5]$. Mas apresentado dessa forma, o dividendo tem partes que permitem a divisão exata por $(x+3)$:

$$x.(x+3) \div (x+3) = x$$

$$2(x+3) \div (x+3) = 2$$

$$5 \div (x+3) = \text{não dá divisão exata}$$

Então o resultado dessa operação é:

$$\text{Quociente: } x+2$$

$$\text{Resto: } 5$$

Como o dividendo, uma vez desenvolvido, é $(x^2 + 5x + 11)$, podemos dizer que:

$$(x^2 + 5x + 11) \div (x+3) = x+2, \text{ resto } 5$$

O problema é que na prática os dividendos aparecem na forma mais compacta, já com os termos semelhantes reduzidos, e não na forma simpática que apresentamos, separada em múltiplos do divisor. Felizmente existe um processo para dividir os polinômios diretamente, apesar de ser um pouco trabalhoso. Vamos apresentar o método através deste exemplo:

Exemplo:

Calcule o quociente e o resto da divisão $(x^2 + 5x + 11) \div (x+3)$

1) A primeira coisa a fazer é completar e ordenar os polinômios, com os termos semelhantes já reduzidos. Os polinômios do nosso exemplo já estão nessa forma.

2) Armar um dispositivo de divisão, similar ao que usamos para a divisão de números naturais.

3) Divida o primeiro monômio do dividendo pelo primeiro monômio do divisor. No caso, temos $x^2 \div x = x$. Colocamos este resultado

$$\text{Dividendo: } x^2 + 5x + 11$$

$$\text{Divisor: } x + 3$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 5x + 11 & x + 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 5x + 11 & x + 3 \\ \hline x & \end{array}$$

no lugar do quociente.

4) Multiplicamos este valor pelo divisor (no caso, $x+3$) e subtraímos o resultado do dividendo. No nosso exemplo temos $x \cdot (x+3) = x^2 + 3x$. Colocaremos então, sob o divisor, o polinômio $-x^2 - 3x$. Subtraindo dos termos correspondentes no dividendo (x^2+5x), encontraremos como resultado $2x$.

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 5x + 11 & x + 3 \\ -x^2 - 3x & x \\ \hline 2x & \end{array}$$

5) "Abaixamos" os termos restantes do polinômio, no nosso caso, apenas o 11.

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 5x + 11 & x + 3 \\ -x^2 - 3x & x \\ \hline 2x + 11 & \end{array}$$

6) Repetimos o processo, dividindo o primeiro termo deste novo dividendo ($2x+11$) pelo primeiro termo do divisor (x). Neste exemplo o resultado será 2, que deve ser adicionado ao quociente.

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 5x + 11 & x + 3 \\ -x^2 - 3x & x + 2 \\ \hline 2x + 11 & \end{array}$$

7) Este novo valor (no caso, 2) deve ser multiplicado pelo divisor ($x+3$) e subtraído do dividendo. No caso, ficamos com $2x+6$, que com sinal trocado ficará $-2x - 6$. Depois de subtrair, o resultado é 5 (resto).

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 5x + 11 & x + 3 \\ -x^2 - 3x & x + 2 \\ \hline 2x + 11 & \\ -2x - 6 & \\ \hline 5 & \end{array}$$

Portanto o quociente é $x+2$ e o resto é 5.

Exemplo:

$$(2x^5 - 3x^3 + 10) \div (4x + 3 + x^2 - 6x)$$

A primeira coisa a fazer é ordenar e completar e ordenar os polinômios, além de reduzir os termos semelhantes. Ficamos com:

$$(2x^5 + 0x^4 - 3x^3 + 0x^2 + 0x + 10) \div (x^2 - 2x + 3)$$

Armamos então o dispositivo da divisão:

$$\begin{array}{r|l} 2x^5 + 0x^4 - 3x^3 + 0x^2 + 0x + 10 & x^2 - 2x + 3 \\ \hline & \end{array}$$

Dividimos os termos de maior grau: $2x^5 \div x^2 = 2x^3$

$$\begin{array}{r|l} 2x^5 + 0x^4 - 3x^3 + 0x^2 + 0x + 10 & x^2 - 2x + 3 \\ \hline 2x^3 & \end{array}$$

Este resultado deve ser multiplicado pelo divisor e subtraído do dividendo:

$$2x^3 \cdot (x^2 - 2x + 3) = 2x^5 - 4x^4 + 6x^3$$

Este resultado vai para baixo do dividendo, com os sinais trocados.

$$\begin{array}{r|l} 2x^5 + 0x^4 - 3x^3 + 0x^2 + 0x + 10 & x^2 - 2x + 3 \\ -2x^5 + 4x^4 - 6x^3 & \\ \hline & \end{array}$$

Subtraímos e a seguir abaixamos o restante do dividendo

$$\begin{array}{r|l} 2x^5 + 0x^4 - 3x^3 + 0x^2 + 0x + 10 & x^2 - 2x + 3 \\ -2x^5 + 4x^4 - 6x^3 & \\ \hline 4x^4 - 9x^3 + 0x^2 + 0x + 10 & 2x^3 \end{array}$$

Agora dividimos o termo de maior grau ($4x^4$) pelo termo de maior grau do divisor (x^2), o resultado é $4x^2$, que é adicionado ao quociente.

$$\begin{array}{r|l} 2x^5 + 0x^4 - 3x^3 + 0x^2 + 0x + 10 & x^2 - 2x + 3 \\ -2x^5 + 4x^4 - 6x^3 & \\ \hline 4x^4 - 9x^3 + 0x^2 + 0x + 10 & 2x^3 + 4x^2 \end{array}$$

Multiplicamos este valor ($4x^2$) pelo divisor, o que resulta em $4x^4 - 8x^3 + 12x^2$, e colocamos este resultado sob o divisor, com os sinais trocados.

$$\begin{array}{r|l} 2x^5 + 0x^4 - 3x^3 + 0x^2 + 0x + 10 & x^2 - 2x + 3 \\ -2x^5 + 4x^4 - 6x^3 & \\ \hline 4x^4 - 9x^3 + 0x^2 + 0x + 10 & 2x^3 + 4x^2 \\ 4x^4 - 8x^3 + 12x^2 & \\ \hline -17x^3 + 12x^2 + 0x + 10 & \end{array}$$

A próxima divisão é $-17x^3$ por x^2 , que resulta em $-17x$, valor que é adicionado ao quociente. Multiplicamos $-17x$ pelo divisor e colocamos o resultado com sinais trocados sob o dividendo.

$$\begin{array}{r|l} 2x^5 + 0x^4 - 3x^3 + 0x^2 + 0x + 10 & x^2 - 2x + 3 \\ -2x^5 + 4x^4 - 6x^3 & \\ \hline 4x^4 - 9x^3 + 0x^2 + 0x + 10 & 2x^3 + 4x^2 - 17x \\ 4x^4 - 8x^3 + 12x^2 & \\ \hline -17x^3 + 12x^2 + 0x + 10 & \\ 17x^3 - 34x^2 + 51x & \\ \hline -22x^2 + 51x + 10 & \end{array}$$

Finalmente fazemos a divisão de $-22x^2$ por x^2 , o que resulta em -22 . Adicionamos este valor ao quociente, multiplicamos pelo divisor e colocamos sob o dividendo com os sinais trocados.

$$\begin{array}{r|l} 2x^5 + 0x^4 - 3x^3 + 0x^2 + 0x + 10 & x^2 - 2x + 3 \\ -2x^5 + 4x^4 - 6x^3 & \\ \hline 4x^4 - 9x^3 + 0x^2 + 0x + 10 & 2x^3 + 4x^2 - 17x - 22 \\ 4x^4 - 8x^3 + 12x^2 & \\ \hline -17x^3 + 12x^2 + 0x + 10 & \\ 17x^3 - 34x^2 + 51x & \\ \hline -22x^2 + 51x + 10 & \\ + 22x^2 - 44x + 66 & \\ \hline 7x + 76 & \end{array}$$

Encontramos então como resultado da divisão:

$$\begin{array}{ll} \text{Quociente:} & 2x^3 + 4x^2 - 17x - 22 \\ \text{Resto:} & 7x + 76 \end{array}$$

OBS: Quando dividimos um polinômio em x de grau m , por um polinômio em x de grau n , temos:

- a) O grau do quociente será $m - n$
- b) O grau do resto será no máximo $n - 1$

Exemplo: (CN-1976)

O resto da divisão de $x^3 - x^2 + 1$ por $x - 2$ é:

(A) 4 (B) 5 (C) 3 (D) 2 (E) 5

Solução:

Armando a divisão, ficamos com

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - x^2 + 0x + 1 & x - 2 \\
 \underline{-x^3 + 2x^2} & \\
 x^2 + 0x + 1 & \\
 \underline{-x^2 + 2x} & \\
 + 2x + 1 & \\
 \underline{- 2x + 4} & \\
 5 &
 \end{array}$$

Resposta: O resto é 5, letra (E)

Imagine se esta questão que acabamos de apresentar envolvesse um polinômio de 6º grau. Seria muito mais trabalhoso, e a chance de erro seria grande. Bastaria errar um único sinal para errar a questão toda. A solução fica bem fácil se usarmos o *Teorema do Resto*:

Teorema do resto

Este é um teorema muito útil, usado para resolver inúmeras questões de provas de concursos, relacionadas com resto da divisão de polinômios:

O resto da divisão do polinômio $P(x)$ por $(x - a)$ é $P(a)$.

A demonstração desse teorema é bastante simples. Ao realizarmos a divisão do polinômio $P(x)$ por $(x - a)$, encontrarmos como quociente um polinômio $Q(x)$ e um resto R , que é de grau zero, já que o grau do resto é sempre uma unidade menor que o grau do divisor. Se o divisor é de grau 1 ($x - a$), então o resto é um valor constante, sem x em sua expressão. Já que vale sempre a igualdade

Dividendo = Divisor x quociente + resto

podemos escrever:

$$P(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R$$

A igualdade é verdadeira para qualquer valor de x . Calculemos então o valor da expressão acima para $x=a$. Ficamos com:

$$P(a) = (a - a) \cdot Q(a) + R$$

Como $a - a$ vale zero, que multiplicado por $Q(a)$ também dá zero, ficamos com:

$$P(a) = 0 \cdot Q(a) + R$$

$$P(a) = R$$

Isso mostra que o R , que é o resto da divisão de $P(x)$ por $(x - a)$, é igual a $P(a)$.

Aplicando este teorema ao exercício proposto ficamos com:

O resto da divisão de $P(x) = x^3 - x^2 + 1$ por $x - 2$ é $P(2)$:

$$R = 2^3 - 2^2 + 1 = 8 - 4 + 1 = 5$$

Chegamos à solução por um processo muito mais fácil. Infelizmente o Teorema do resto calcula apenas o resto, e somente na divisão de polinômios de uma variável, por $(x - a)$, sendo a um valor real qualquer. O teorema não serve para calcular o quociente, e nem para calcular restos de divisões por outros tipos de polinômios que não sejam da forma $x - a$. Ou seja, o divisor pode ser $x + 10$, por exemplo ($a = -10$), mas não pode ser de segundo grau ou superior.

Com exceção desses casos particulares em que podemos aplicar o Teorema do resto, em todos os demais temos que armar a divisão e resolvê-la pelo processo trabalhoso que ensinamos aqui.

Exercícios

E17) Divida os polinômios, encontrando o quociente e o resto (não esqueça de ordenar e completar o dividendo)

a) $(x^2 + 3x + 2) \div (x + 3)$

b) $(1 + x - x^2) \div (x + 2)$

c) $(x^2 + 4x + 5) \div (x - 1)$

d) $(2x^2 + 5x + 8) \div (x + 4)$

e) $(10 - 2x + x^2) \div (x + 5)$

f) $(x^3 + x^2 + x - 3) \div (x + 2)$

g) $(x^3 + 2x^2 + 4x + 5) \div (x - 2)$

h) $(2x^3 - 1) \div (x + 5)$

i) $(3x^3 + 4x^2 + 5x + 4) \div (x^2 + 2x + 3)$

j) $(x^2 + 3x - 5) \div (x + 3)$

k) $(2x^3 + 5x + 2) \div (x - 2)$

l) $(x^4 - 1) \div (x - 1)$

m) $x^5 \div (x^2 + 3x - 4)$

n) $(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1) \div (x + 1)$

o) $(3x^3 + 4x + 5) \div (x + 4)$

p) $(2x^5 - 3x^4 - 4x^2 + -7) \div (x + 2)$

q) $(-2x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 10x) \div (x + 1)$

r) $(4x^3 - 2x^6 + 3x - 2x^2 + 7) \div (x - 2)$

s) $(-2x^7 + 2x^3 - 4x^4 - 6) \div (x + 2)$

t) $(-7x^6 + 5x - 2x^4 + 3x^2 - 5) \div (x - 2)$

Potências de um polinômio

Esta é sem dúvida a operação mais trabalhosa que podemos fazer com um polinômio. Elevar um polinômio a uma potência inteira n é multiplicar o polinômio por si próprio, n vezes.

$$[P(x)]^n = \underbrace{P(x) \cdot P(x) \cdot P(x) \dots P(x)}_{(n \text{ vezes})}$$

Se elevarmos, por exemplo, um polinômio do 5º grau ao cubo, teremos como resultado um polinômio do 15º grau. Temos que fazer ao todo 102 multiplicações de monômios e algumas dezenas de adições. É claro que um tipo de questão como esta não mede a capacidade do aluno, mas ainda assim é preciso saber como realizar a operação, pois questões com polinômios pequenos e potências menores podem surgir, por exemplo, elevando ao quadrado ou ao cubo.

Exemplo:

Calcular $(x+5)^2$

$$(x+5)^2 = (x+5) \cdot (x+5) = x^2 + 5x + 5x + 25 = x^2 + 10x + 25$$

Exemplo:

Calcular $(x+5)^3$

Já calculamos quanto vale $(x+5)^2$. Se multiplicarmos o resultado por $(x+5)$, teremos $(x+5)^3$:

$$(x+5)^3 = (x+5) \cdot (x+5)^2 = (x+5) \cdot (x^2 + 10x + 25) = x^3 + 10x^2 + 25x + 5x^2 + 50x + 125 \\ = x^3 + 15x^2 + 75x + 125$$

Para elevar à quarta potência, a forma mais rápida é elevá-la ao quadrado, depois elevar o resultado ao quadrado ($(x+5)^4 = [(x+5)^2]^2$). Também é correto elevar a expressão ao cubo, e depois multiplicar o resultado pela expressão novamente ($(x+5)^4 = (x+5)^3 \cdot (x+5)$).

Exemplo:

Calcule $(a+2b+3c)^2$

$$(a+2b+3c)^2 = (a+2b+3c) \cdot (a+2b+3c) = a^2 + 2ab + 3ac + 4ab + 4b^2 + 6bc + 3ac + 6bc + 9c^2 \\ = a^2 + 6ab + 6ac + 4b^2 + 12bc + 9c^2$$

Durante os cálculos, preste atenção aos sinais, e no final, sempre reduza os termos semelhantes. Preste atenção na ordem das letras: bc e cb são semelhantes, assim como também são semelhantes ac e ca, e também ab e ba. Para evitar confusão, convencionou-se dispor as letras de cada monômio em ordem alfabética.

Exemplo:

Calcule $(x^2 - 3x - 2)^2$

$$(x^2 - 3x - 2)^2 = (x^2 - 3x - 2) \cdot (x^2 - 3x - 2) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 3x^3 + 9x^2 + 6x - 2x^2 + 6x + 4 \\ = x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 12x + 4$$

Exercícios

E18) Calcule as seguintes potências de polinômios

- | | | | |
|--------------|------------------|------------------------|--------------------------|
| a) $(x-3)^2$ | f) $(a+2b)^2 =$ | k) $(x^2 + x - 1)^2 =$ | p) $(2x^2 + 3x - 5)^2 =$ |
| b) $(x-3)^3$ | g) $(3x-2y)^2 =$ | l) $(2x+3y^2)^2 =$ | q) $(a+b+c)^2 =$ |
| c) $(x-3)^4$ | h) $(2m+3)^2 =$ | m) $(1-3x^2)^2 =$ | r) $(2a+3b+4c)^2 =$ |
| d) $(x+y)^2$ | i) $(3m-k)^2 =$ | n) $(x^2+y^2)^2 =$ | s) $(x+1)^3 =$ |
| e) $(x-y)^2$ | j) $(x^2-9)^2 =$ | o) $(x+\sqrt{2})^2 =$ | t) $(x-1)^3 =$ |

Expressões envolvendo polinômios

Antes de estudarmos expressões algébricas, o mais complexo exercício de álgebra era a expressão com números racionais, dízimas, potências e raízes, adição, subtração, multiplicação e divisão, envolvendo números com sinais, além de chaves, colchetes e parênteses. Ocorre que cada um dos valores que aparecem nessas expressões, que até então eram números, podem ser polinômios, ou até mesmo expressões algébricas. Podem ainda aparecer as frações algébricas, aquelas que possuem expressões algébricas em denominadores. Isso resulta em expressões que podem ser extremamente complexas e que necessitam de toda a habilidade algébrica do aluno para resolvê-las.

Exemplo:

$$\frac{(x+1)^2}{3} - \frac{1-(x+1) \cdot (x-2)}{2}$$

Para resolver expressões algébricas complexas é preciso usar todas as regras já aprendidas para números: redução ao mesmo denominador, regras de sinais, propriedades das potências, precedência das operações, etc.

Nesse caso temos duas frações, e ambas possuem expressões algébricas nos seus numeradores.

Numerador da primeira fração:

$$(x+1)^2 = (x+1) \cdot (x+1) = x^2 + x + x + 1 = x^2 + 2x + 1$$

Numerador da segunda fração:

$$1 - (x+1) \cdot (x-2) = 1 - (x^2 - 2x + x - 2) = 1 - (x^2 - x - 2) = 1 - x^2 + x + 2 = -x^2 + x + 3$$

Ficamos então com:

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{3} - \frac{-x^2 + x + 3}{2}$$

Agora devemos reduzir as duas frações ao mesmo denominador para fazer sua subtração. É preciso tomar muito cuidado quando encontramos um sinal negativo antes de uma fração, como neste exemplo. O sinal negativo será aplicado a todos os termos do denominador, e não apenas ao primeiro. Muitos alunos cometem esse erro comum.

O MMC entre os denominadores (3 e 2) é 6. Portanto vemos multiplicar ambos os termos da primeira fração por 2, e ambos os termos da segunda fração por 3.

$$\frac{2(x^2 + 2x + 1) - 3(-x^2 + x + 3)}{6}$$

Observe na segunda fração que ficou -3 multiplicando o seu numerador. Isso é devido ao sinal negativo que havia antes da fração, fazendo com que o sinal negativo (na verdade -3) se aplique a todos os termos do numerador desta fração.

$$\frac{2x^2 + 4x + 2 + 3x^2 - 3x - 9}{6} = \frac{5x^2 + x - 7}{6}$$

Exemplo:

$$(2a + 3b + 4ab) \cdot \left\{ 2b - \left[(a+2)^2 - (a-3)^2 \right] \right\}$$

Temos aqui uma expressão algébrica com duas variáveis. Como todos os termos são polinomiais e só estamos realizando adições, subtrações e multiplicações, o resultado também será um polinômio. Devemos resolver primeiro as expressões que estão nos parênteses mais internos:

$$(a+2)^2 = (a+2) \cdot (a+2) = a^2 + 2a + 2a + 4 = a^2 + 4a + 4$$

$$(a-3)^2 = (a-3) \cdot (a-3) = a^2 - 3a - 3a + 9 = a^2 - 6a + 9$$

Subtraindo as duas expressões, ficamos com:

$$a^2 + 4a + 4 - (a^2 - 6a + 9) = a^2 + 4a + 4 - a^2 + 6a - 9 = 10a - 5 \text{ (resultado dos colchetes)}$$

Este resultado agora deverá ser elevado ao quadrado:

$$(10a - 5)^2 = (10a - 5) \cdot (10a - 5) = 100a^2 - 50a - 50a + 25 = 100a^2 - 100a + 25$$

O resultado entre chaves será 2b subtraído dessa expressão:

$$2b - (100a^2 - 100a + 25) = 2b - 100a^2 + 100a - 25$$

Finalmente este resultado deverá ser multiplicado por (2a + 3b + 4ab)

$$(2a + 3b + 4ab) \cdot (2b - 100a^2 + 100a - 25)$$

Serão 12 multiplicações de monômios, e no final devemos reduzir os termos semelhantes. Não esqueça de prestar atenção nos sinais:

$$4ab - 200a^3 + 200a^2 - 50a + 6b^2 - 300a^2b + 300ab - 75b + 8ab^2 - 400a^3b + 400a^2b - 100ab$$

$$= 204ab - 200a^3 + 200a^2 - 50a + 6b^2 + 100a^2b - 75b + 8ab^2 - 400a^3b$$

Exemplo:

$$\left(\frac{x-2}{2} \right)^2 - \frac{3(x^3-1) \cdot [(x+1)^3 - (x+1) \cdot (x^2-1)]}{3} + \frac{\{6 + 3x \cdot [4 + 2x(1-x^2)]\}}{6}$$

Na expressão acima temos que desenvolver primeiro as potências dos números e das expressões. Vimos que potências de polinômios nada mais são que sequências de multiplicações. Apesar do cálculo ser um pouco trabalhoso, a ideia é simples.

Numerador da primeira fração:

$$(x-2)^2 = (x-2) \cdot (x-2) = x^2 - 2x - 2x + 4 = x^2 - 4x + 4$$

Numerador da segunda fração:

$$(x+1)^3 = (x+1) \cdot (x+1) \cdot (x+1) = (x+1) \cdot (x^2 + x + x + 1) = (x+1) \cdot (x^2 + 2x + 1) = x^3 + 2x^2 + x + x^2 + 2x + 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$(x+1) \cdot (x^2-1) = x^3 - x + x^2 - 1 = x^3 + x^2 - x - 1$$

$$\begin{aligned} 3(x^3-1) \cdot [(x+1)^3 - (x+1) \cdot (x^2-1)] &= (3x^3-3) \cdot [x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - (x^3 + x^2 - x - 1)] \\ &= (3x^3-3) \cdot [x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 - x^2 + x + 1] && \text{(eliminando parênteses)} \\ &= (3x^3-3) \cdot [2x^2 + 4x + 2] && \text{(reduzindo termos semelhantes)} \\ &= 6x^5 + 12x^4 + 6x^2 - 6x^2 - 12x - 6 && \text{(efetuando o produto)} \\ &= 6x^5 + 12x^4 - 12x - 6 && \text{(reduzindo os termos semelhantes)} \end{aligned}$$

Numerador da terceira fração:

Temos que operar primeiro os parênteses, depois os colchetes, e por último as chaves.

$$\{ 6 + 3x \cdot [4 + 2x \cdot (1 - x^2)] \} = \{ 6 + 3x \cdot [4 + 2x - 2x^3] \} = \{ 6 + 12x + 6x^2 - 6x^4 \} = -6x^4 + 6x^2 + 12x + 6$$

Substituindo as três expressões encontradas nos numeradores das três frações, ficamos com:

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{4} - \frac{6x^5 + 12x^4 - 12x - 6}{3} + \frac{-6x^4 + 6x^2 + 12x + 6}{6}$$

Uma vez que todas as expressões algébricas dos numeradores foram desenvolvidas, a próxima etapa é somar as três frações, reduzindo-as antes ao mesmo denominador. O MMC entre 4, 3 e 6 é 12, então é preciso multiplicar os termos da primeira fração por 3, os da segunda por 4, e os da terceira por 2.

IMPORTANTE:

O sinal negativo antes da segunda fração se aplica a todos os seus termos, e não só ao $6x^5$.

$$\frac{3(x^2 - 4x + 4) - 4(6x^5 + 12x^4 - 12x - 6) + 2(-6x^4 + 6x^2 + 12x + 6)}{12}$$

Agora basta desenvolver a expressão do denominador e reduzir os termos semelhantes.

$$\frac{3x^2 - 12x + 12 - 24x^5 - 48x^4 + 48x + 24 - 12x^4 + 12x^2 + 24x + 12}{12}$$

$$= \frac{-24x^5 - 60x^4 + 15x^2 + 60x + 48}{12}$$

Exercícios

E19) Desenvolva as expressões e apresente o resultado final em forma de polinômio

OBS.: Mostre que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

- | | |
|--|---|
| a) $(x^2 + 2x + 1)^2 - 2(x^2 + 3)^2$ | k) $(x + 1)^2 + (x + 2)^2 + (x + 3)^2$ |
| b) $2(x+1).(x-2) + 3(x-3).(x+4)$ | l) $(x + 1)^3 + 2(x + 2)^2 + (x + 3)$ |
| c) $2(x-2)^2 + 3(x-2) + 5$ | m) $(x - 2) - 3(2 - x)^2 + 6$ |
| d) $(x - y)^2 - 3(x - y) + 5$ | n) $(x + 1)^2 - 3(x + 1)^2 + 2(x - 1)^2$ |
| e) $(x - 3)^2 + 4(x - 3) + 5$ | o) $(a + b)^2 + 2(a + b)^2 + 3(a + b)^2 + 4(a + b)^2$ |
| f) $2(a + 1) - 3(a - 1) + 4a$ | p) $(x + 1)^2 + 2(x - 1)^2 + 3(x + 1)^2 + 4(x - 1)^2$ |
| g) $(x + 1)^3 - 2(x + 1)^2 + 3$ | q) $(x + 3)^2 - (x - 3)^2$ |
| h) $(x + 1).(x + 2) + (x + 1)^2 - (x + 2)^2$ | r) $[-(x + 1)]^2$ |
| i) $6 + 4(x + 4) - (x + 4)^2$ | s) $1 + (x + 1) + (x + 1)^2$ |
| j) $(a + b)^2 - (a - b)^2$ | t) $(x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + (x + 4)$ |

E20) Efetue

- | | |
|---|--|
| a) $(3x^2 - 5x + 4) + (-2x^2 + 3x - 5)$ | f) $\frac{3}{7}a^3 - 2a^2b - 4\frac{1}{5}ab^2 + \frac{4}{21}a^2 + 7a^2b - 4\frac{7}{15}ab^2$ |
| b) $(8a^2b + 2ab^2 - 3b^3) + (-4a^2b - 7ab^2 + 8b^3)$ | g) $(4a^3 - 5a^2b) - (5a^3 + 2a^2b) - (a^3 - 8a^2b)$ |
| c) $(5ab^2 - 3a^2b) + (4ab^2 + 7a^2b)$ | h) $2a - \{3b + (2b - c) - 4c + [2a - (3b - c)]\}$ |
| d) $(5x^2 - 3xy + 4y) - (-2x^2 - 7xy + 5y)$ | i) $3x^{m-3n} \cdot 2x^{m+2n}$ |
| e) $8a^4x.2ax^2y$ | j) $(5a^2b^m c^p)^3$ |

Exercícios de revisão

E21) Calcule:

- | | | |
|------------------------------|----------------------------|--|
| a) $2x.(-5x)$ | f) $4ab.6a^3b^3$ | k) $3x^2y \cdot (-xy^2) \cdot (-7x^3y^4)$ |
| b) $(-4x).(-7x)$ | g) $7xy.9xy$ | l) $2b^2c^3x^3 \cdot 3a^2b^3c^2 \cdot (-5a^2b^2x^2)$ |
| c) $(-a^2b).(-ab^3)$ | h) $3a^3b.a^3b^2c^4$ | m) $2x^3y^2z \cdot (-3x^2y^2z^3) \cdot (-2x^3yz)$ |
| d) $(-4xy^3).(-7x^2yz)$ | i) $2a^3b^7c^3.5a^4b^3c^2$ | n) $6am^2x^2 \cdot (-2a^3mx^2) \cdot (-4amx^2)$ |
| e) $(-3x^5y^4z).(-4xy^3z^2)$ | j) $5abc.(-6ab^2c^3)$ | o) $-4x^2y^3z^4 \cdot 2x^2y^2z \cdot (-3x^3y^4z^2)$ |

E22) Dados $x = -1$, $y = 2$ e $z = -3$, calcule o valor numérico das expressões

- | | | |
|------------------------|-------------------------|--------------------------------|
| a) $2xy^2 - 3yz^2 + z$ | f) $-2x^3 + 4y^2 + 6z$ | k) $3xy^2 - 4yz^2 + x^2y^2z^2$ |
| b) $4x^2 - 2y^2 - z^2$ | g) $-3x + 4y - 5z^2$ | l) $3xyz - 5x^7y^2 - 3x^2y^2$ |
| c) $4x + 3y - 2z^3$ | h) $9x + 3y - z^3$ | m) $xzy^3 + 2xyz^2 + x^5y^2z$ |
| d) $-2x + 4y - 2z^2$ | i) $6x^2 - 9y^2 - 2z^2$ | n) $3x^2yz + 4xyz + x^2y^2zy$ |
| e) $-x^3 + 3y^2 + 10z$ | j) $2x^3 - 3y^2 + 4z^2$ | o) $5x^2 + 7x^2y^2 - 4zx^2$ |

E23) Efetue as divisões

- | | | |
|-----------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| a) $x^5 \div x$ | f) $-85x^3 \div (-5x^2)$ | k) $-51x^2y^3 \div (-17x^2y)$ |
| b) $32x^5 \div 4x^2$ | g) $-32x^2y^2 \div 8xy^2$ | l) $-28a^5b^4 \div 7a^2b^2$ |
| c) $42x^2 \div 6x$ | h) $-x^3y^3 \div (-4xy^2)$ | m) $-36x^3y^5 \div (-3x^2y^3)$ |
| d) $-36x^4 \div 6x^2$ | i) $-16x^4y^2 \div (-4xy)$ | n) $-3x^3y^4 \div (-5xy^3)$ |
| e) $64x^6 \div 16x^2$ | j) $-25x^4y^2 \div (-5xy^2y)$ | o) $-24x^2y^4 \div 8xy^3$ |

E24) Efetue as divisões

- | | | |
|--------------------------------------|---------------------------------|-----------------------------------|
| a) $-a^2b^3c^4d^5 \div abc$ | f) $39xy^2z^4 \div 13xyz$ | k) $-a^4b^2c^3 \div (-a^5b^3c^4)$ |
| b) $-2x^2y^2z^3 \div (-3xyz^2)$ | g) $68xc^2d^3 \div (-17xcd^3)$ | l) $-3x^2yz^2 \div (-2x^3y^4z^5)$ |
| c) $-5a^6b^7c^3 \div (-a^4b^2c^2)$ | h) $-8m^5n^3p \div (-4m^5np)$ | m) $-6mnp \div (-3m^2n^2p^2)$ |
| d) $x^2y^3z^4w^6 \div (-xy^2z^2w^2)$ | i) $-6pqr^3 \div (-2p^2qr)$ | n) $-17a^2b^3c^4 \div 51ab^5c^4$ |
| e) $52a^2m^4n^6 \div 13am^2n^2$ | j) $26a^2g^2t^5 \div (-2agt^4)$ | o) $-19mq^2t^3 \div 57m^2gt^4$ |

E25) Efetue

- | | |
|---|---|
| a) $a^2 - ab + b^2 + a^2 + ab + b^2$ | f) $-a + 3b + 4c + 3a - b + 2c + 2a + 2b - 2c$ |
| b) $3a^2 + 5a - 7 + 6a^2 - 7a + 13$ | g) $4a^2 + 3a + 5 - 2a^2 + 3a - 8 + a^2 - a + 1$ |
| c) $x + 2y - 3z + 3x + y + 2x - 3y + z$ | h) $5ab + 6bc - 7ac + 3ab - 9bc + 4ac + 3bc + 6ac$ |
| d) $3x + 2y - z - x + 3y + 2z + 2x - y + 3z$ | i) $x^3 + x^2 + x + 2x^3 + 3x^2 - 2x + 3x^3 - 2x + 3x^3 - 4x^2$ |
| e) $-3a + 2b + c + a - 3b + 2c + 2a + 3b - c$ | j) $3y^2 - x^2 - 3xy + 5x^2 + 6xy - 7y^2 + x^2 + 2y^2$ |

E26) Efetue

- | | |
|---|--|
| a) $2a^2 - 2ab + 3b^2 + 4b^2 + 5ab - 2a^2 - 3ab - 9b^2$ | f) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 - 3a^2b - 6ab^2 + 3a^2b + 4ab^2$ |
| b) $a^3 - a^2 + a - 1 + a^2 - 2a + 2 + 3a^2 + 7a + 1$ | g) $a^3 - 2a^2b - 2ab^2 + a^2b - 3ab^2 - b^3 + 3ab^2 + 2a^3$ |
| c) $2m^3 - m^2 - m + 4m^3 + 8m + 8m^2 - 7 - 3m^2 + 9$ | h) $7x^3 - 2x^2y + 9xy^2 + 5x^2y - 4xy^2 - 2x^3$ |
| d) $x^3 - 3x + 6y + x^2 + 2x - 5y + x^3 - 3x^2 + 5x$ | i) $y^3 - x^3 - 3x^2y - 5xy^2 + 2x^2y - 5y^3 - 2x^3 - xy^2$ |
| e) $6x^3 - 5x + 1 + x^3 + 3x + 4 + 7x^2 + 2x - 3$ | j) $2c^3 - 5c^2d + d^3 + 6cd^2 + c^3 + 6c^2d - 5cd^2 - 2d^3$ |

E27) Efetue as subtrações

- | | |
|---|---|
| a) $(2a^3 - 3a^2 + 2a - 1) - (a^3 + 2a^2 + 3a - 5)$ | f) $(6x - 7y + 2z) - (5x - 11y - 3z)$ |
| b) $(-5ax^4 - 2a^2x^3 + 4a^3x^2) - (4a^3x^2 - 2a^2x^3 - 4ax^4)$ | g) $(ab + ac + bc + bd) - (ab - ac - bc + bd)$ |
| c) $(2a - 3b + 4c) - (a - 2b + 3c)$ | h) $(5ab - ac + bc + bd) - (3ab + 2ac - 3bc + bd)$ |
| d) $(3a - 5b + c) - (a - 3b - 5c)$ | i) $(3x^3 + 2x^2 - 3x - 5) - (2x^3 - x^2 - 5x + 3)$ |
| e) $(2x - 4y + 6z) - (4x - y - 2z)$ | j) $(x^3 - x + 1 - a) - (7x^2 - 5x + 1 - a)$ |

E28) Efetue as subtrações

- | | |
|--|---|
| a) $(2b^3 + 8c^3 - 15abc) - (9b^3 + 3abc - 7c^2)$ | f) $(a^3 - b^3 + 3a^2b - 3ab^2) - (a^3 + b^3 - a^2b - ab^2)$ |
| b) $(x^4 + x - 5x^3 + 5) - (7 - 2x^3 - 3x^2 - 3x^3 + x^4)$ | g) $(a^2b - ab^2 - 3a^3b^3 - b^4) - (b^4 - 5a^3b^3 - 2ab^2 + a^2b)$ |
| c) $(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) - (3abc + a^3 - 2b^3 - 3c^3)$ | h) $(-x^3 - 7x^2y - 2y^3 + 3xy^2) - (3x^2 + 5y^2 - xy^2 + 4x^2y)$ |
| d) $(2x^4 - 5x^2 + 7x - 3) - (x^4 + 2 - 2x^3 - x^2)$ | i) $(a^3 - b^3) - (a - b)^3$ |
| e) $(1 - x^5 - x + x^4 - x^3) - (x^4 + 1 + x + x^2)$ | j) $(a - b)^2 - (b - c)^2 - (c - a)^2$ |

E29) Calcule e simplifique as expressões

- | | |
|--------------------------------|--|
| a) $5a - [7 - (2b + 5) - 2a]$ | f) $7x - \{5y - [3z - (5x - y + 2z) + x] + y\}$ |
| b) $x - [2x + (3a - 2x) - 5a]$ | g) $(a - b + c) - (b - a - c) + (a + b - 2c)$ |
| c) $x - [15y - (3z + 12x)]$ | h) $3x - [-2y - (2y - 3x) + z] + [x - (y - 2z - x)]$ |

d) $2a - \{b + [3c - (2b - c)]\}$

e) $5a - \{b + [3c - (3b - c)]\}$

i) $x - [2x + (x - 2y + 2y) - 3x - \{4x - [(x + 2y) - y]\}]$

j) $x - [y + z - x - (x + y) - z] + (3x - (2z + z))$

E30) Calcule simplifique

a) $a(b + c)$

b) $(ab + ac - bc).abc$

c) $(x + 7).4x$

d) $(2x - 3y).3x$

e) $(2x + y).6y$

f) $(2 - 2a).3a$

g) $(-x + 3b).(-b)$

h) $(2a^2 - 3ab).(-3a)$

i) $(2x^2 + 3xz).5z$

j) $(a^2 - 5ab).4ab$

k) $(x^2 - 3xy).(-y^2)$

l) $(2x^2 - 3x^2).2x^2$

m) $(x^2 - 3y^2).5y$

n) $(x^2 - 3y^2).(-x^2)$

o) $(b^3 - a^2b^2).(-a^3)$

E31) Calcule e simplifique

a) $(a^3 + 2a^2b + 2ab^2).a^2$

b) $(a^3 + 2a^2b + 2ab^2).b^2$

c) $(4x^2 - 6xy - 9y^2).2x$

d) $(-x^2 + 2xy - y^2).(-y^2)$

e) $(3a^2b^2 - 4ab^3 + a^3b).5a^2b^2$

f) $(-a^3 - a^2b^2 - b^3).a^2$

g) $(-ax^2 + 3axy^2 - ay^4).(-3ay^2)$

h) $(x^{12} - x^{10}y^2 - x^3y^{10}).x^3y^2$

i) $(-2x^3 + 3x^2y^2 - 2xy^3).(-2x^2y^3)$

j) $(a^3x^2y^5 - a^2xy^4 - ay^3).a^7x^3y^5$

k) $(-2a^2b^2 - 3a^3).(-4a^2)$

l) $(-4a^2b^3 - 5a^2).(-2a^3)$

m) $(2x^3 - 3x^2 + 3x - 5).2x^2$

n) $(3x^4 - 4x^2 + 5x - 2).3x^3$

o) $(2a^2 - 5ab - 3b^2).5ab$

E32) Calcule e simplifique

a) $(2m - p)(4m - 3p)$

b) $(x - b)(x - c)$

c) $(5x - 3y)(5x - 3y)$

d) $(a - 7b)(a - 5b)$

e) $(a - 2b)(a + 3b)$

f) $(a^2 + ab + b^2)(a - b)$

g) $(a^2 - ab + b^2)(a + b)$

h) $(a + b + c)(a - c)$

i) $(a^2 - ab + b^2)(a^2 + b^2)$

j) $(x^3 - 3x^2 + 7)(x^2 - 3)$

k) $(a^2 - 3ab - b^2)(-a^2 + ab + 2b^2)$

l) $(3a^2b^2 + 2ab^3 - 5a^3b)(5a^2b^2 - ab^3)$

m) $(x^2 + 5x - 10)(2x^2 + 3x - 4)$

n) $(3x^2 - 2x^2 + x)(3x^2 - 2x + 1)$

o) $(x^3 + 2x^2y + 2xy^2)(x^2 - 2xy + y^2)$

E33) Calcule e simplifique

a) $(a^2 - 2ab + b^2)(a^2 + 2ab + b^2)$

b) $(ab + ac + cd)(ab - ac + cd)$

c) $(3x^2y^2 - 2x^3y)(x^2y^2 + 3y^4)$

d) $(x^2 + 2xy - y^2)(x^2 - 2xy + y^2)$

e) $(3x^2 + xy - y^2)(x^2 - 2xy - 3y^2)$

f) $(a^2 - 2ab - b^2)(b^2 - 2ab - a^2)$

g) $(a^2 + b^2 + c^2 - ac)(a^2 - b^2 - c^2)$

h) $(a^2 + 4abx - 4a^2b^2x^2)(a^2 - 4abx + 4a^2b^2x^2)$

i) $(3a^2 - 2abx + b^2x^2)(2a^2 + 3abx - 2b^2x)$

j) $(2x^3y + 4x^2y^2 - 8xy^3)(2xy^3 - 3x^2y^2 + 5x^3y)$

E34) Calcule e simplifique

a) $(2a^3 - a^2) \div a$

b) $(42a^5 - 6a^2) \div 6a$

c) $(21x^4 + 3x^2) \div 3x^2$

d) $(35m^2 - 7p^2) \div 7$

e) $(27x^5 - 45x^4) \div 9x^2$

f) $(24x^6 - 8x^3) \div (-8x^3)$

g) $(34x^3 - 51x^2) \div (17x)$

h) $(5x^5 - 10x^3) \div (-5x^3)$

i) $(-3a^2 - 6ac) \div (-3a)$

j) $(-5x^3 + x^2y) \div (-x^2)$

k) $(2a^5x^3 - 2a^4x^2) \div (2a^4x^2)$

l) $(-x^2y - x^2y^2) \div (-xy)$

m) $(9a - 12b + 3c) \div (-3)$

n) $(a^3b^2 - a^2b^5 - a^4b^2) \div (a^2b)$

o) $(3x^2 - 6x^2y - 9xy^2) \div 3x$

E35) Calcule e simplifique

a) $(x^2y^2 - x^3y - xy^3) \div xy$

b) $(a^3 - a^2b - ab^2) \div a$

c) $(a^2b - ab + ab^2) \div (-ab)$

d) $(xy - x^2y^2 + x^3y^3) \div (-xy)$

e) $(-x^6 - 2x^5 - x^4) \div (-x^4)$

f) $(a^2x - abx - acx) \div ax$

g) $(3x^5y^2 - 3x^4y^3 - 3x^2y^4) \div 3x^2y^2$

h) $(a^2b^2 - 2ab - 3ab^3) \div ab$

i) $(3a^3c^3 + 3a^2c - 3ac^2) \div 3ac$

j) $(3a^4b^2c - 9a^3bc^2 - 6a^2c^2) \div 3a^2c$

E36) Efetue as divisões, dê o quociente e o resto

a) $(x^2 + 15x + 56) \div (x + 7)$

b) $(x^2 - 15x + 56) \div (x - 7)$

c) $(x^2 + x - 56) \div (x - 7)$

d) $(x^2 - x - 56) \div (x + 7)$

e) $(2a^2 + 11a + 5) \div (2a + 1)$

f) $(6a^2 - 7a - 3) \div (2a - 3)$

g) $(4a^2 + 23a + 15) \div (4a + 3)$

h) $(x^4 + x^2 + 1) \div (x^2 + x + 1)$

i) $(x^8 + x^4 + 1) \div (x^4 - x^2 + 1)$

j) $(3a^2 - 4a - 4) \div (2 - a)$

k) $(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) \div (a + b + c)$

l) $(9x^3 - 3x^4 - 4x^2 + 1 + x) \div (1 + 2x - 3x^3)$

m) $(x^3 - 8x - 3) \div (x - 3)$

n) $(a^2 - 2ab + b^2) \div (a - b)$

o) $(x^2 - y^2 + 2yz - z^2) \div (x - y + z)$

Sugestão para o item (k): Considere **a** como variável, **b** e **c** como constantes, forme um polinômio em "**a**" e faça a divisão normalmente. O mesmo princípio se aplica aos itens (n) e (o), porém o item (n) tem outro caminho mais fácil.

E37) Calcule:

- a) $(3x - 2a + 6) - (2x - 7a - 3)$
- b) $(12a - b + 9c - 3d) - (7a - 5b + 9c - 10d + 12)$
- c) $(-7f + 3m - 8x) - (-6f - 5m - 2x + 3d + 8)$
- d) $(-14b + 3c - 27d + 3e - 5f) - (7a + 3b - 5c - 8d - 12c + 7f)$
- e) $(32a + 3b) - (5a + 17b)$
- f) $(-8a + 5b - 3c) - (7a - 3b - 2c)$
- g) $(a + b) - (2a - 3b) - (5a + 7b) - (-13a + 2b)$
- h) $(5a^3 - 4a^2b - 4ab^2 + 8b^3) - (2a^3 - 5a^2b - 6ab^2 + b^3)$
- i) $(15a^4 - 18a^3b + 17a^2b^2 + 11ab^3 - 9b^4) - (7a^4 - 13a^3b - 19a^2b^2 + 20ab^3 - 10b^4)$

E38) Qual é o grau da expressão $5xy^2 + 3x^2y^2 - 8x^2y - 3x^2 + 8x - 15$?

E39) Simplifique $\frac{a^{-7}b^{-2}}{a^{-11}b^{-3}}$

E40) Ordene, classifique e dê o grau da expressão algébrica: $2 - 11x^2 - 8x + 6x^2$

- (A) $-5x^2 - 8x + 2$; trinômio do segundo grau
- (B) $5x^2 - 8x - 2$; trinômio do segundo grau
- (C) $-6x^2 - 8x - 2$; polinômio do terceiro grau
- (D) $6x^2 - 8x + 2$; trinômio do terceiro grau

E41) Classifique a expressão $x^3 - 9x + 3$

- (A) Trinômio do terceiro grau
- (B) Binômio do segundo grau
- (C) Monômio do quarto grau
- (D) não é um polinômio

E42) Calcule e simplifique $(-7x - 5x^4 + 5) - (-7x^4 - 5 - 9x)$

- (A) $2x^4 + 2x + 8$
- (B) $-14x^4 + 10x + 10$
- (C) $-14x^4 - 10x + 10$
- (D) $2x^4 + 2x + 10$

E43) Calcule e simplifique

$$(4x^3 + 4x^2 + 2) + (6x^3 - 2x + 8)$$

- (A) $10 - 2x + 4x^2 + 10x^3$
- (B) $-2x^3 - 2x^2 + 4x - 10$
- (C) $-2x^3 + 4x^2 - 2x + 10$
- (D) $10x^3 + 4x^2 - 2x + 10$

E44) Calcule:

- a) $(3x - 7)(3x - 5)$
- b) $(4x + 3)(2x + 5)$
- c) $(2x + 3)(2x + 3)$

E45) Sendo x e y positivos, simplifique $\frac{\sqrt{90x^4y}}{\sqrt{2x^5y^5}}$

- (A) $\frac{3\sqrt{5}}{y^2}$ (B) $\frac{3\sqrt{5x}}{2xy^2}$ (C) $\frac{15}{xy^2}$ (D) $\frac{3\sqrt{x^5y^6}}{x^3y^5}$ (E) $\frac{3\sqrt{5x}}{xy^2}$

E46) Simplifique $\sqrt{\frac{-48r^{-3}s^{24}z}{-3r^{-9}s^{10}}}$

E47) Simplifique a expressão $\left(\frac{x^5}{y^2}\right)^2\left(\frac{y}{x^{-1}}\right)^5$ e dê a resposta sem usar expoente negativo.

- (A) $\frac{x^{15}}{y}$ (B) $\frac{x^5}{y}$ (C) x^5y^2 (D) $x^{15}y$ (E) $\frac{1}{y}$

E48) Sabendo que $x + 2y = 0$, e que $x \neq 0$, calcule $\left(\frac{x}{y}\right)^{2014} + \left(\frac{y}{x}\right)^{-2014}$

- (A) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2028}$ (B) 2^{2015} (C) 2^{2028} (D) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2015}$ (E) 1

E49) Encontre o quociente da divisão de $\mathbf{x^3 + 2x^2 - 3x + 4}$ por $\mathbf{x^2 + x - 2}$.

- (A) $x + 1$ (B) $-2x + 8$ (C) $x - 1$ (D) $-5x + 1$ (E) Nenhuma das respostas

E50) Calcule $x - \{y - [z - (x - t)]\}$ sendo

$$x = 2a^3 - 3a^2b + 4ab^2 + 5b^3; y = 7a^3 - 8a^2b - 9ab^2 + 3b^3 \\ z = 3a^3 + 2a^2b - 4ab^2 - 5b^3 \text{ e } t = -2a^3 + 3a^2b + 6ab^2 - 4b^3$$

E51) Calcule $(1 + x).(1 + x^2).(1 + x^4).(1 + x^8)$

E52) CN 52 - Efetuar a multiplicação $(x^2 - 5x + 9).(x + 3)$

E53) CN 53 - Efetuar o produto $(x^2 + 2 - x).(x^2 - 1)$ dando a resposta ordenada segundo as potências decrescentes de x.

E54) Calcular o valor numérico da expressão

$$\frac{a^2 - b}{2} + \frac{b^3 - a^4}{3} + 3a^2b \text{ para } a = -1 \text{ e } b = 2.$$

E55) CN 58 - Calcule o resto da divisão de $x^3 - 3x^2 + 4$ por $(x - 2)$

E56) CN 59 - Classificar a expressão $\frac{x + 3}{x^3 - 5x^2 + 2x + 4}$

E57) CN 61 - Dividir $x^6 - x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 1$ por $x^2 - 1$.

E58) CN 64 - Dê o quociente e o resto da divisão

$$(3x^4 - 4x^2 + 3x - 7) \div (x^2 - 2x + 3)$$

E59) Seja $P(x) = 2x^4 - 5x^2 + 3x - 2$ e $Q(x) = x^2 - 3x + 1$. Se $P(x) / Q(x)$ determina um quociente $Q'(x)$ e um resto $R(x)$, o valor de $Q'(0) + R(1)$ é:

(A) 0 (B) 28 (C) 25 (D) 17 (E) 18

E60) Se $P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 7x - 5$, determine $P(-3)$

(A) -26 (B) 106 (C) -2 (D) -56

E61) Dê o grau do polinômio $2x^4y^6 - 6xy^8 + 3x^4y^7 - 2x^7y^5$

(A) 41 (B) 42 (C) 8 (D) 12

E62) Calcule o valor numérico de $5x^3 - 3y^2 - 8z$ para $x = -2$, $y = 5$ e $z = -6$

(A) -108 (B) -12 (C) -67 (D) -163

E63) Simplifique, assumindo que x e y são números reais positivos e que m e n são racionais.

$$\left(\frac{x^{-3/m} y^{6/n}}{x^{-6/m} y^{9/n}} \right)^{-1/3}$$

(A) $x^{1/m} y^{1/n}$ (B) $\frac{y^{1/n}}{x^{1/m}}$ (C) $-\frac{1}{y^{1/n} x^{1/m}}$ (D) $\frac{1}{y^{1/n} x^{1/m}}$ (E) $\frac{1}{xy}$

E64) Encontre o quociente $Q(x)$ e o resto $R(x)$ da divisão de $x^3 - 4x^2 + x + 6$ por $x + 1$.

(A) $Q(x) = x^2 + 5x + 6$; $R(x) = -1$

(B) $Q(x) = x^2 - 3x + 2$; $R(x) = 0$

(C) $Q(x) = x^2 - 5x + 6$; $R(x) = 0$

(D) $Q(x) = x^2 + 4x + 5$; $R(x) = -11$

(E) $Q(x) = x^3 + 5x - 6$; $R(x) = 2$

E65) Simplifique a expressão $\left(\frac{x^{-3/7}}{y} \right)^3 \left(\frac{y}{x^{-1}} \right)^4$

(A) $x^{-\frac{1}{7}}$

(B) $\frac{y^{-\frac{1}{7}}}{x}$

(C) $\frac{x^{-\frac{22}{7}}}{y}$

(D) $x^{\frac{19}{7}} y$

(E) $x^{\frac{1}{7}} y$

E66) Dê o resto da divisão de $x^3 + 2x - 1$ por $x - 1$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

E67) Encontre o quociente e o resto da divisão de $2x^4 - 9x^2 - 5x + 3$ por $x + 1$.

- (A) Quociente = $2x^2 - 11x + 6$ Resto = -3
 (B) Quociente = $2x^2 - 7x - 12$ Resto = -9
 (C) Quociente = $2x^3 - 11x^2 + 6x - 3$ Resto = 0
 (D) Quociente = $2x^3 - 2x^2 - 7x + 2$ Resto = 1
 (E) Quociente = $2x^3 + 2x^2 - 7x - 12$ Resto = -9

E68) Encontre o resto da divisão de $2x^{2010} - 3x^{67} + 7x - 5$ por $x + 1$.

- (A) -7 (B) 5 (C) 3 (D) -2 (E) 0

E69) Qual é o resto da divisão de $x^{89} - 2x^{50} + 1$ por $x + 1$?

- (A) 2 (B) 4 (C) -2 (D) 3 (E) 5

E70) Multiplique $(2x + 3)(x^2 - 2)$

- (A) $2x^3 + 3x^2 - 4x - 6$ (B) $2x^3 - 6$
 (C) $x^2 + 2x + 1$ (D) $2x^3 + x^2 - 4x - 6$
 (E) Nenhuma das acima

E71) Simplifique a expressão $\left(\frac{a^{-2}}{2bc^{-3}}\right)^{-2}$

- (A) $-\frac{2ba^4}{c^6}$ (B) $\frac{4a^4b^2}{c^6}$ (C) $-\frac{c^3}{a^2b}$ (D) $\frac{c^6}{4a^4b^2}$ (E) Nenhuma das acima

E72) Use o teorema do resto para determinar o resto da divisão do polinômio $3x^{99} - 2x^{25} + 5x + 1$ por $x - 1$.

- (A) -5 (B) -3 (C) 1 (D) 5 (E) 7

E73) Dê o quociente da divisão $\frac{3x^3 + x^2 - 5x + 1}{x - 1}$

- (A) $3x^2 + 4x - 1$ (B) $3x^3 + 4x^2 - x$ (C) $3x^2 - 2x - 3$
 (D) $3x^2 - 2x + 3$ (E) Nenhuma dessas

E74) Calcule o resto da divisão de $2x^5 - 4x^3 + x^2 - 3x + 2$ por $x + 1$.

- (A) -2 (B) 8 (C) 12 (D) -8 (E) Nenhuma dessas

E75) Dê o resto da divisão de $x^{25} + 10x^{12} - 7x^5 + 3$ por $x + 1$.

- (A) 7 (B) 3 (C) 1 (D) -1 (E) 19

E76) Calcule: $(x^3 - 9x^2 + 15x + 3) / (x - 7)$

- (A) $x^2 - 2x + 2 + 12/(x - 7)$ (B) $x^2 - 2x + 3 + 9/(x - 7)$
 (C) $x^2 - 2x + 1 + 10/(x - 7)$ (D) $x^2 - 2x - 1 + 9/(x - 7)$

E77) Encontre o quociente $Q(x)$ e o resto $R(x)$ da divisão de $x^3 - 4x^2 + x + 6$ por $x + 1$.

- (A) $Q(x) = x^2 + 5x + 6$; $R(x) = -1$ (B) $Q(x) = x^2 - 3x + 2$; $R(x) = 0$
(C) $Q(x) = x^2 - 5x + 6$; $R(x) = 0$ (D) $Q(x) = x^2 + 4x + 5$; $R(x) = -11$
(E) $Q(x) = x^3 + 5x - 6$; $R(x) = 2$

E78) Calcule $\frac{5a-1}{2a-2} - \frac{a-2}{2a-2}$

- (A) $\frac{4a-3}{a^2+3a-18}$ (B) $\frac{4a+1}{2a-2}$ (C) $\frac{10a}{a^2+3a-18}$ (D) $\frac{4a-2}{a^2+3a-18}$

E79) Dê o resto da divisão de $x^{100} - 2x^{40} - 1$ por $(x + 1)$.

- (A) -1 (B) -2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

E80) Ao dividir o polinômio $2x^{20} + 3x + 1$ por $x - 1$, o resto será:

- (A) 3 (B) 6 (C) 1 (D) 5 (E) 4

E81) Qual o resto da divisão de $x^{100} + x - 2^{100}$ por $(x - 2)$?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 2^{100}

E82) Qual das expressões abaixo é o mesmo que $\frac{x^5 + x^3 + 5}{x - 2}$

- (A) $x^4 + 3x^2 + \frac{11}{x-2}$ (B) $x^4 + 3 + \frac{11}{x-2}$
(C) $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 10x + 20 + \frac{45}{x-2}$ (D) $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 9x + 18 + \frac{41}{x-2}$
(E) $x^4 + 3$

E83) Dê o quociente da divisão de $x^3 + x^2 - 17x + 15$ por $x - 3$

- (A) $x^2 + 4x - 5$ (B) $x + 4$ (C) $x^2 - 2x - 12$ (D) $x - 2$ (E) NDA

E84) O polinômio $3x^{90} - 2x^{25} + 5x + 1$ é dividido por $x + 1$. Determine o resto da divisão.

- (A) -5 (B) -3 (C) 1 (D) 5 (E) 7

E85) Encontre o quociente da divisão de $3x^3 + x^2 - 5x + 1$ por $x - 1$.

- (A) $3x^2 + 4x - 1$ (B) $3x^3 + 4x^2 - x$ (C) $3x^2 - 2x - 3$ (D) $3x^2 - 2x + 3$ (E) NDA

E86) Dê o resto da divisão de $4x^3 - 6x^2 - 5x + 6$ por $x + 3$

- (A) 3 (B) 21 (C) -141 (D) -138 (E) 241

E87) Dê o resto da divisão de $x^8 + 1$ por $x - 1$.

- (A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) -2 (E) 0 (F) NDA

E88) Sejam a , b e c números reais e seja $P(x) = ax^9 + bx^5 + cx + 3$. Se $P(-5) = 17$, encontre $P(5)$.

- (A) -17 (B) -11 (C) 14 (D) 17

(E) não pode ser determinado com as informações dadas

E89) Qual das seguintes funções não é uma função polinomial?

- (A) $f(x) = \frac{2x^3}{5} - 2x^7$ (B) $f(x) = \sqrt{\frac{2}{5}}x^3 - 2x^7$
 (C) $f(x) = \sqrt{\frac{2x^3}{5}} - 2x^7$ (D) $f(x) = 2x^3$ (E) $f(x) = 2x^3 - 2x^7$

E90) Se $-2x + 1$ é um fator de $-6x^3 + 11x^2 - 2x + k$, encontre o valor de $2k$.

- (A) -9 (B) 9 (C) -6 (D) -3 (E) -2

E91) Encontre o quociente $Q(x)$ e o resto $R(x)$ quando o polinômio $2x^3 - 3x^2 + 4x + 3$ é dividido por $x + 1/2$.

- (A) $Q(x) = 2x^2 - 4x + 6$, $R(x) = 6$ (B) $Q(x) = 2x^2 - 2x + 5$, $R(x) = -1/2$
 (C) $Q(x) = 2x^2 + 4x + 2$, $R(x) = 2$ (D) $Q(x) = 2x^2 - 3x + 4$, $R(x) = 6$
 (E) $Q(x) = 2x^2 - 4x + 6$, $R(x) = 0$

E92) Dado que $h(x) = -2^{x+1} + 1$, calcule $h(0) + h(-2)$

- (A) 1 (B) -1/2 (C) 1/2 (D) 2 (E) 1/4

E93) Calcule o valor numérico da seguinte expressão para $m = 2$:

$$\frac{m^2(4 - 2m) - (4m - m^2)2m}{m^4}$$

- (A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) -2 (E) 2

E94) Se $a = 1$, $b = 2$ e $c = 3$, o possível valor da expressão $(a^{bc} - c^{ba})^{1/3}$ é:

- (A) -4 (B) -3 (C) -2 (D) 1 (E) 0

E95) Qual expressão deve ser adicionada a $x^2 - 6x + 5$ para que resulte no quadrado de $(x - 3)$?

- (A) $3x$ (B) $4x$ (C) 3 (D) 4 (E) $3x + 4x$

E96) Dividindo-se $x^2 + 1$ por $x - 1$, encontramos:

- (A) $\frac{x^2}{x-1} - 1$ (B) $x - 1 + \frac{2}{x-1}$ (C) $\frac{x^2 + 1}{x} - 1$ (D) $x + 1 + \frac{2}{x-1}$ (E) $x + 1 - \frac{2}{x-1}$

E97) CEFET 98

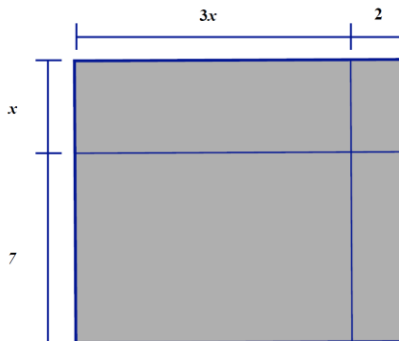
Calcule o valor de $E = \frac{a \cdot b^{-2} \cdot (a^{-1}b^2)^4 \cdot (ab^{-1})^2}{a^{-2} \cdot b \cdot (a^{-2}b^{-1})^{-2} \cdot (a^{-1}b)^{-4}}$, sendo $a = 3$ e $b = 2$.

E98) Encontre o quociente e o resto de $\frac{x^4 - 3x^2 + 9}{x - 1}$

E99) Simplifique a expressão $\frac{(2^n \cdot 3^n)^{\sqrt{4n^2}}}{[2(4 + (23^n)(23^{-n}) - 4)]^{3n^2}}$

E100) Qual das seguintes expressões não representa a área da figura ao lado?

- (A) $(3x^2 + 2x) + (21x + 14)$
 (B) $(3x + 2)(x + 7)$
 (C) $(3x^2 + 7) + (2x + 14)$
 (D) $3x(x + 7) + 2(x + 7)$
 (E) $x(3x) + x(2) + 7(3x) + 7(2)$



E101) Qual é o maior coeficiente da expressão $\left(x^2 + \frac{2x^{21}}{x^{19}}\right)^5 - (3x^3)(4x^4) + (11x)^2$ depois de simplificada?

- (A) 10 (B) 12 (C) 32 (D) 121 (E) 243

E102) Qual das expressões abaixo é equivalente a $(a^{-1} + b^{-1})^{-1}$?

- (A) $\frac{a+b}{ab}$ (B) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ (C) $\frac{ab}{a+b}$ (D) $a+b$ (E) ab

E103) Multiplique: $(2x^{a-1} - 3y^{b+5})(2x^{2a-3} - 3y^{4-b})$

E104) Ao dividirmos $2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 9$ por $x^2 - 2x + 1$, o resto será

- (A) $9x - 14$ (B) $2x^2 + x + 5$ (C) $x^2 - 2x + 1$ (D) $x - 10$ (E) -5

E105) Simplifique a expressão $\frac{x^3 y^{-2}}{(x^{-2} y^3)^{-2}}$

- (A) $\frac{1}{xy^4}$ (B) $\frac{y^4}{x}$ (C) $\frac{x}{y^4}$ (D) $\frac{x^7}{y^3}$ (E) $\frac{x^7}{y^4}$

E106) Dê o quociente da divisão de $x^3 + 2x^2 - 3x + 4$ por $x^2 + x - 2$.

- (A) $x + 1$ (B) $-2x + 8$ (C) $x - 1$ (D) $-5x + 3$ (E) NRA

E107) Simplificar $\sqrt{4x^8}$

- (A) $16x$ (B) $2x^4$ (C) $4x^4$ (D) $16x^2$ (E) $8x^2$

E108) Dê o quociente e o resto da divisão de $(2x^4 - 9x^2 - 5x + 3)$ por $(x + 1)$.

- (A) Quociente: $2x^2 - 11x + 6$; Resto: -3
 (B) Quociente: $2x^2 - 7x - 12$; Resto: -9
 (C) Quociente: $2x^3 - 11x^2 + 6x - 3$; Resto: 0

- (D) Quociente: $2x^3 - 2x^2 - 7x + 2$; Resto: 1
 (E) Quociente: $2x^3 + 2x^2 - 7x - 12$; Resto: -9

E109) Qual das seguintes expressões é um fator de $x^3 + x^2 - 17x + 15$?

- (A) $x - 5$ (B) $x - 3$ (C) $x + 1$ (D) $x + 2$ (E) $x + 3$

E110) Calcule o quociente $\frac{3x^3 + x^2 - 5x + 1}{x - 1}$

- (A) $3x^2 + 4x - 1$ (B) $3x^3 + 4x^2 - x$ (C) $3x^2 - 2x - 3$ (D) $3x^2 - 2x + 3$ (E) NRA

E111) Simplifique $\frac{a^{-1} + b^{-1}}{(a + b)^{-1}}$

E112) Sendo $a = 6$ e $b = 2$, calcule $\sqrt{a} \times \sqrt[3]{(a-b)^2} \times \frac{1}{\sqrt[4]{a^2}} \times \sqrt{a-b}$

E113) Se a , b , c e d são números reais, então quando as expressões $(a + b) \cdot (c + d)$ e $ac + bd$ são iguais?

- (A) nunca (B) sempre (C) quando $a = 0$ (D) quando $ac + bd = 0$ (E) quando $ad + bc = 0$.

E114) Encontre o resto da divisão de $x^3 - 3x^2 - x - 1$ por $x^2 - 2$

E115) Se $3^{x+y} = 81$ e $3^{x-y} = 3$, calcule x e y .

E116) Se $f(x) = x^2 - 3x + 4x^0 - 5x^{-2} + x^{-3}$, calcule $f(1/2)$

E117) Qual é o resto da divisão de $2x^3 + 11x^2 - 31x + 20$ por $2x - 3$?

- (A) 0 (B) 5 (C) 10 (D) -3 (E) 11

E118) Encontre o resto da divisão de $x^5 - 3$ por $x + 1$

- (A) -4 (B) -3 (C) 0 (D) 2 (E) NRA

E119) Quanto vale x , sabendo que $2^x = -1$?

- (A) 0 (B) $-1/2$ (C) $1/2$ (D) -1 (E) NRA

E120) Simplifique $\frac{16x^4 y^{-2} z^{10}}{2x^{-1} y^4 z^5}$

E121) Encontre o resto da divisão de $2x^4 - 3x^2 + x + x^3 - 10$ por $x - 2$.

E122) Determine o resto da divisão de $x^3 + x + 1$ por $x^2 + x + 1$.

E123) Determine o resto da divisão de $x^3 + x^2 + x + 1$ por $x - 2$.

E124) Qual das expressões abaixo é um fator de $x^7 - 53x^3 + 27x^2 + 25$?

- (A) $(x - 1)$ (B) $(x - 5)$ (C) $(x + 5)$ (D) $(x + 1)$ (E) $(x + 2)$

E125) Encontre o quociente da divisão de $39 + 8x^3 - 4x$ por $2x + 3$

E126) Determine o resto da divisão de $x^3 + 2x^2 - 5x + 30$ por $x + 3$.

E127) Encontre **k** para que $x - 2$ seja um fator de $P(x) = x^3 - 4x^2 + kx + 2$.

E128) Calcule $(x^x)^{(x^x)}$ para $x = 2$.

(A) 16 (B) 64 (C) 256 (D) 1024 (E) 65.536

E129) CN 76 - O resto da divisão de $x^3 - x^2 + 1$ por $x - 2$ é:

(A) 4 (B) 5 (C) 3 (D) -2 (E) -5

E130) CN 78 - O menor número inteiro que se deve somar ao polinômio $x^3 + x - 1$ para que o resto de sua divisão por $x + 3$ seja um número par positivo é:

(A) 33 (B) 31 (C) 39 (D) -1 (E) 29

E131) EPCAr 2002 - O resto da divisão do polinômio

$P(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 1$ por $(x + 1)$ é um número:

- (A) ímpar menor que 5
- (B) par menor que 6
- (C) primo maior que 5
- (D) primo menor que 7

CONTINUA NO VOLUME 2: 80 QUESTÕES DE CONCURSOS

Soluções dos exercícios

E1)

- a) $2x + 3a - 4ax + 11$
- b) $24x - 15y$
- c) $4x + 6y + 5z + 6xyz$
- d) $7x^2 + 5y^2 + 2xy - 8x - 10y$
- e) $4x^2 - 5xy + x - 2y$
- f) $-5y^3 + 5xy^2 - x^2 + 5xy - 3x$
- g) $8m^2n + 8p^2q + 2mp + 4nq$
- h) $5x^2 + 2y^2 + 10x - 9y - 12$
- i) $5xyz - 4xz + 9zy + 3xy$
- j) $-3x^2 - 13xy - 3y$

- k) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- l) $2x^2 + 9xy - 3y^2 + 8x - 7y + 22$
- m) $5x^2 + 2xy + -3x^3 + 6x + 6y$
- n) $8a^2b + 3a^2 - 4b^2 + 3b^2a + 4ba$
- o) $-2x^2y^3 - x^2y^2 + 4xy - 3x^3y^2$
- p) $4ab + 2a^2 - 2b^2 + 2a^2b + 2ab^2$
- q) $8x^2 - 3x^3 - 8x + 8$
- r) $-5x^2y + 5xy + -3xy^2 + 10$
- s) $7ab + -a^2b + 8ab^2 - 4a^2 - 3b^2$
- t) $10x^2 + 5y^2 + 6x - 6y - 10$

E2)

- | | | | | | | | | | |
|-------|-------|----------|--------|------|--------|--------|-------|------|--------|
| a) 20 | c) 2 | e) 14/15 | g) -16 | i) 6 | k) 6/5 | m) -19 | o) -2 | q) 0 | s) -71 |
| b) -1 | d) 23 | f) 35 | h) 7 | j) 4 | l) 12 | n) 16 | p) 0 | r) 0 | t) 30 |

E3)

A classificação depende apenas da parte literal, não é afetada pela parte numérica

- | | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| a) RI | c) I | e) RI | g) RF | i) I | k) RI | m) RI | o) RF | q) RF | s) RI |
| b) RI | d) RF | f) RF | h) RF | j) RF | l) RF | n) I | p) RF | r) RF | t) RI |

E4)

- | | | | | | | | | | |
|-------|---------|-------|-------|-------|-------|---------|---------|-------|---------|
| a) 3° | c) 6° | e) 3° | g) 5° | i) 5° | k) 2° | m) 2° H | o) 2° C | q) 2° | s) 2° C |
| b) 5° | d) 3° H | f) 5° | h) 9° | j) 4° | l) 4° | n) 4° | p) 3° | r) 3° | t) 2° H |

E5)

a) $x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 18$

b) $x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 2x + 0$

c) $2x^6 + 0x^5 + 3x^4 + 0x^3 - 4x^2 + 0x + 0$

d) $4x^6 + 0x^5 + 3x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 2x + 3$

e) $0a^2 + 0b^2 + 3ab + 2a + 4b + 5$

f) $5x^3 + 0x^2 + 3x + 2$

g) $x^5 + 3x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 2x + 5$

h) $x^7 + 0x^6 + 0x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 7$

i) $4a^2 + 4b^2 + 0ab + 0a + 0b + 4$

j) $y^4 + 0y^3 + 2y^2 + 0y + 1$

k) $3x^2 + 2y^2 + 0xy + 4x + 3y + 6$

l) $x^2 + 2y^2 + 6xy + 0x + 0y + 0$

m) $2x^4 + 0x^3 + 3x^2 - 4x + 0$

n) $x^4 + 0x^3 + 0x^2 + x + 0$

o) $6x^5 + 2x^4 + 0x^3 + 4x^2 + 0x + 7$

p) $3x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 0x^2 + 0x + 9$

q) $4x^3 + 0x^2 + 6x - 8$

r) $0a^2 + b^2 + 3ab + 0a + 0b + 6$

s) $-x^5 + 0x^4 + x^3 + 0x^2 + 0x + 0$

t) $-2x^4 + 0x^3 + 2x^2 + 0x + 2$

E6)

a) $9x$

c) $-2x^2$

e) $-2x^2$

g) $9xy$

i) $2x+2y$

k) $-8xy$

m) $-2abc$

o) $7a-5b$

q) $7b+13$

s) $-3abc$

b) $11y$

d) $5x^3$

f) ab

h) $5x+13$

j) $5a+5b+2$

l) $-3z^2$

n) $9x^2y$

p) $9xyz$

r) $-10x^2$

t) $-2x$

E7)

a) $15x^3y^5z^2$

c) $-2x^8$

e) $6a^3b^2c^2$

g) $18x^2y$

i) $-6a^4b^3c$

k) $12x^2y^3$

m) $12a^6b^5$

o) $8x^3$

q) $42x^5y^4$

s) $60x^2y^2z^3$

b) $6a^4b^6x$

d) $-8x^2y$

f) $-2a^4bc$

h) $-15a^3b^4$

j) $24x^5yz$

l) $\sqrt{2}x^5y$

n) $16x^2y^2$

p) $30xyz$

r) $24a^6b^6$

t) $-30x^2y^2z^2$

E8)

a) $32x^{10}$

c) $49x^{10}$

e) $-125x^3$

g) $64a^6c^6$

i) $-x^{21}$

k) $64y^6$

m) $16x^{12}$

o) $5x^8$

q) $81x^4y^8$

s) $-1/(8x^6)$

b) $-64x^9$

d) $81x^8$

f) $4a^2b^6$

h) $9x^4$

j) $16x^8y^{12}$

l) $-27a^3x^6$

n) $-64x^6$

p) $-32x^5$

r) $1/(4x^{12})$

t) $125x^6$

E9)

a) $2xy^2$

c) $-(3/4)xy$

e) $-12xy/5$

g) $-3bc^2$

i) $-6yz/5$

k) $-(2/5)y^3$

m) $16x$

o) $-14xy$

q) $8x^2y^3z^6/3$

s) $-x^2y^3z^6/16$

b) $-2xy$

d) $-1/(5x)$

f) $-4x^2y/3$

h) $-12xy^2/5$

j) $-4x^2z$

l) $-20yz^2$

n) $xyz/6$

p) $-18xyz^2$

r) $-32xyz^2$

t) $4x^2y^2$

E10)

a) $x^3/2y^2$

c) $-3/(abc)$

e) $-2x/y$

g) $9c/(2ab)$

i) $-12yz/x$

k) $-4y^2/x^2$

m) $11/(yz)$

o) $-9x/(2y)$

q) $-9y^3z^6/x$

s) $-y^3z^6/(2x)$

b) $5y^2/(3xz)$

d) $-2y^3/(3z^3)$

f) $8y/x^3$

h) $-4xy^2$

j) $-8x/y$

l) $20yz^2/x$

n) $-6/(xy)$

p) $-8xz^2/y$

r) $-500xy^4/z$

t) $-2x^5y/z^2$

E11)

a) $2x^3 - 6xy^2$

f) $5a^2 - 5b^2$

k) $3xy - 18x^2y - 6x^3y - 9xy^3$

p) $x^4y + 2x^3y + 5xy$

b) $3abx - 6aby - 3abz^2$

g) $-3a^2 + b^2$

l) $-6x + 8y - 4xy - 6$

q) $8a^3b^3c - 12a^3b^2c^4$

c) $-3x^2 + 3x + 15$

h) $-a^2 + b^2$

m) $6a^2b + 4ab^3 - 8a^2b^2$

r) $2x^3y^2 + 4x^2y^3 + 16xy^2$

d) $6a^2b^2 + 4ab^2 + 2a^2b^2 + 12ab$

i) $-a^2 + b^2$

n) $8x^3yz + 12x^2y^2z - 16x^2yz^2$

s) $4x^3y^4 + 12x^2y^5$

e) $-5x^3 + 5xy^2 - 20x^2 + 25x$

j) $-3x^3 + 2x^2 - 5x + 8$

o) $2x^3y + 2xy^3 - 4x^2y^2$

t) $x^5y + 2x^3y^3 + x^4y + x^3y^2$

E12)

a) $2x(x + 3y)$

k) $4(2a^2b^2c^4 - a^3c^3 + 3b^4c^3 + 4a^3b^2)$

b) $a(x^2 - 2xy + y^2)$

l) $2m(2xy - x + 3y + 5m)$

c) $2xy(2 - xy + 3x^2y^2)$

m) $5a^2b^2c^2(-a + 2bc^2 + 3a^3b)$

d) $2c^4(2a^2b^3 - 4b^3c^2 - 5a^3c)$

n) $xy(x^3 + 3x^2y^2 + x^4 + x^2y)$

e) $a^2(x^2 - 3x + 5)$

o) $2a^3b^2c^2(4b - c^3)$

f) $2m(2x - x^2 + 3m)$

p) $xy(x^3 + 4x^2 + 6)$

g) $25ab(ab - 5b + 15a)$

q) $2xy(x^2 + y^3 - 4x^2y)$

h) $4x^3(x^4 + 5x^2 + 2)$

r) $6xy(1 - 4x - x^2 - 2y^3)$

i) $3a^2b^2x^2(bx - 3 + 4b^2x^3)$

s) $4ab(2a - b + ab - 3)$

j) $5abc(a + 3b + 5ac)$

t) $x^4(3x^2 + 2x^4 + 7x - 3)$

E13)

a) $-x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 25x$

k) $(2x^7 - 4x^6 - 2x^4 + 5x^2 + 5) + (2x^5 - 2x^7 + 4x^3 - 2x^6 - 2x^4)$

b) $2x^3 - 3x^2 + 24x - 12$

l) $(5x^5 - 4x^7 - 2x^6 - 3x^4 - 5) + (2x^5 + 3x^3 - 2x^6 + 2x - 3x^4)$

c) $-x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 6$

m) $(6 - 3x + 4x^4 + 2x^5) + (2x^5 - 2x^7 - 3x^6 + 4x - 2x^4 - 3)$

d) $-x^4 + x^2 + 3x + 5$

n) $(2x^2 + 7x^4 + 3x^5 + 4x^6) + (2x^5 - 4x^7 + 2x^3 - 6x^6 + 2x^2 - 4)$

e) $-2x^6 + 6x^5 - 4x^4 - 4x^3 - x^2 + 6x + 13$

o) $-5x^7 - 2x^6 + 12x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 5x - 7$

- f) $6x^5 + x^4 - 3x$
 g) $-4x^5 - 5x^4 + 4x^2 + 7x + 1$
 h) $9x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 13x + 5$
 i) $2x^6 - x^5 - 4x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 11x - 7$
 j) $2x^5 + 8x^4 + x^3 + 4x^2 + 5$

- p) $x^7 - 5x^5 - 3x^4 + 6x^3 + 2x^2 + 3x + 9$
 q) $-6x^7 - 3x^6 + 5x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 8x + 7$
 r) $-5x^7 - 8x^6 + 2x^4 - x^3 + 2x - 8$
 s) $-5x^6 - 4x^4 + 4x^3 + x^2 + 5x - 1$
 t) $-7x^7 - 2x^6 + 3x^5 - 5x^4 + 12x - 6$

E14)

- a) $-3x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 5x$
 b) $-3x^3 + 4x^2 + 4x - 11$
 c) $2x^6 - 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 6x$
 d) $x^6 + 4x^4 + 4x^3 - 5x^2 + x + 15$
 e) $2x^7 - 3x^6 + 4x^4 - 5x^3 + 4x + 3$
 f) $5x^7 - 5x^5 + 5x^4 - 6x^3 - 11x^2 + 9$
 g) $5x^7 + 2x^6 - 3x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 4$
 h) $-4x^7 + 3x^6 - 4x^5 + x^4 - 3x^3 - 2x - 15$
 i) $10x^7 + x^6 - 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 4$
 j) $-2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 4x - 2$

- k) $-2x^7 + 7x^6 + 4x^5 - 3x^4 - 3x^2 + x + 5$
 l) $3x^7 + 4x^6 - 4x^3 - 5x^2 + x + 15$
 m) $x^7 + 2x^6 + 2x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7$
 n) $3x^7 + 3x^6 + 10x^4 - 8x + 9$
 o) $-4x^7 + 3x^6 - 3x^5 - 2x^3 - 4x - 5$
 p) $2x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 4x^2 + 6x - 6$
 q) $2x^6 - 6x^5 + 4x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 16$
 r) $x^5 - 5x^4 - 7x^2 - 6x + 9$
 s) $x^5 - 8x^4 + 11x^2 - 3x - 11$
 t) $-2x^6 + x^5 + 3x^3 - x^2 - 4x - 2$

E15)

- a) $x^3 + 4x^2 + 10x + 7$
 b) $x^3 - x + 8$
 c) $x^4 - 5x^3 + 13x^2 - 17x + 12$
 d) $-4x^8 - 20x^7 - 10x^6 - 20x^5 - 16x^4$
 e) $2x^6 - 8x^5 + 6x^4 + 4x^2 - 15x + 3$
 f) $6x^8 - 6x^7 - 16x^6 + 8x^5 - 14x - 28$
 g) $-12x^7 + 4x^6 + 30x^5 - 34x^4 + 8x^3 - 30x + 10$
 h) $-7x^8 - 21x^7 + 5x^6 + 13x^5 - 6x^4 + 6x^2 + 18x$
 i) $-3x^6 + 7x^5 + 20x^4 - 4x^3 + 16x^2$
 j) $-4x^5 - 2x^4 + 2x^3 + 10x - 5$

- k) $6x^4 - 10x^3 - 6x^2 + 36x$
 l) $-6x^5 + 18x^3 - 12x^2 + 9x - 9$
 m) $-9x^7 - 6x^5 + 6x^4 + 15x^3 - 5x^2 + 10x - 6$
 n) $-4x^6 + 2x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 2x - 2$
 o) $2x^6 + 3x^5 - 2x^4 - 8x^3 + 5x^2 + 5x - 5$
 p) $2x^6 + 10x^5 + 12x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x$
 q) $-2x^8 - 9x^7 - 6x^6 + 7x^5 - 6x^4 - 3x - 9$
 r) $x^9 + 2x^8 + 2x^7 - 7x^6 - 13x^5 - 4x^4 - 7x^2$
 s) $-x^8 - 2x^7 - x^6 - 2x^4 + x^3 + 2x^2 - 2x - 8$
 t) $-4x^7 - 6x^6 + 2x^4 + x^3 + x^2 + 8x + 3$

E16)

- a) $Q = 9x, R = 10$
 b) $Q = 1/3, R = 3x + 6$
 c) $Q = -2/3, R = 6x + 7$
 d) $Q = -2x + 8, R = 6x^2 - 9x$
 e) $Q = 8x - 1, R = 20x + 52$
 f) $Q = -4, R = 25x^2 - 15x$
 g) $Q = -x^4 - 8x^2 + 3, R = 12x - 18$
 h) $Q = -7x^5 + 13x^3 + 5, R = 0$
 i) $Q = x^4 + 3x^2 + 1, R = 0$
 j) $Q = -5x^3 - x^2 + x - 8, R = 6x^3$

- k) $Q = 2x^3 + 4x^2 - 5, R = 0$
 l) $Q = -3x^4 - x^2 - 2, R = 0$
 m) $Q = -x^5 - 4x^2 - x + 8, R = 15$
 n) $Q = x^5 + x^2 - 2x, R = 6$
 o) $Q = 4x^6 - x^4 - 5x, R = 12$
 p) $Q = -4x^6 + 2x^4 + 4x^2 - 2x, R = -15$
 q) $Q = x^4/4 - x^3/2 + 3x^2/4 - 3x/4, R = 2x$
 r) $Q = -x^9/4 - 3x^5/4 + 3x^4/4 - x^3 + 3x^2/2, R = 0$
 s) $Q = -x^2 - x/3 - 1, R = -3x$
 t) $Q = -x^6/3 - x^5/2 + x^4/6 - x^3/6 + 5/6, R = -3$

E17)

- a) $Q = x, R = 2$
 b) $Q = -x + 3, R = -5$
 c) $Q = x + 5, R = 10$
 d) $Q = 2x - 3, R = 20$
 e) $Q = x - 7, R = 45$
 f) $Q = x^2 - x + 3, R = -9$
 g) $Q = x^2 + 4x + 12, R = 29$
 h) $Q = 2x^2 - 10x + 50, R = -251$
 i) $Q = 3x - 2, R = 10$
 j) $Q = x, R = -5$

- k) $Q = 2x^2 + 4x + 13, R = 28$
 l) $Q = x^3 + x^2 + x + 1, R = 0$
 m) $Q = x^3 - 3x^2 + 13x - 51, R = 205x - 204$
 n) $Q = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5, R = -6$
 o) $Q = 3x^2 - 12x + 52, R = -208$
 p) $Q = 2x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x - 11, R = 11$
 q) $Q = -2x^3 + 6x^2 - 10, R = 10$
 r) $Q = -2x^5 - 4x^4 - 8x^3 + 20x^2 + 38x + 79, R = 165$
 s) $Q = -2x^6 + 4x^5 - 8x^4 + 12x^3 - 22x^2 + 44x - 88, R = 170$
 t) $Q = -7x^5 - 14x^4 - 30x^3 - 60x^2 - 117x - 229, R = -463$

E18)

- a) $x^2 - 6x + 9$
 b) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$
 c) $x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81$
 f) $a^4 + 4ab + 4b^2$
 g) $9x^2 - 12xy + 4y^2$
 h) $4m^2 + 12m + 9$

- k) $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1$
 l) $4x^2 + 12xy^2 + 9y^4$
 m) $1 - 6x^2 + 9x^4$
 p) $4x^4 + 9x^2 + 25 + 12x^3 - 20x^2 - 30x$
 q) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
 r) $4a^2 + 9b^2 + 16c^2 + 12ab + 16ac + 24bc$

- d) $x^2 + 2xy + y^2$ i) $9m^2 - 6mk + k^2$ n) $x^4 + 2x^2y^2 + y^4$ s) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
 e) $x^2 - 2xy + y^2$ j) $x^4 - 19x^2 + 81$ o) $x^2 + 2x\sqrt{2} + 2$ t) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

E19)

- a) $-x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x - 17$ k) $3x^2 + 12x + 14$
 b) $5x^2 + x - 40$ l) $x^3 + 5x^2 + 12x + 12$
 c) $2x^2 - 5x + 7$ m) $-3x^2 + 13x - 8$
 d) $x^2 - 2xy + y^2 - 3x + 3y + 5$ n) $-8x$
 e) $x^2 - 2x + 2$ o) $10(a + b)^2 = 10a^2 + 20ab + 10b^2$
 f) $3a + 5$ p) $4(x + 1)^2 + 6(x - 1)^2 = 10x^2 - 4x + 10$
 g) $x^3 + x^2 - x + 2$ q) $12x$
 h) $x^2 + x - 1$ r) $x^2 + 2x + 1$
 i) $-x^2 - 4x + 6$ s) $x^2 + 3x + 3$
 j) $4ab$ t) $4x + 10$

E20)

- a) $-x^2 - 2x - 1$ c) $9ab^2 + 4a^2b$ e) $16a^5x^3y$ g) $-2a^3 + a^2b$ i) $6x^{2m-n}$
 b) $4a^2b - 5ab^2 + 5b^3$ d) $7x^2 + 4xy - y$ f) $3a^3/7 + 5 + 26ab^2/3 + 4a^2/21$ h) $-2b + 4c$ j) $125a^6b^3mc^{3p}$

E21)

- a) $-10x^2$ c) a^3b^4 e) $12x^6y^7z^3$ g) $63x^2y^2$ i) $10a^7b^{10}c^5$ k) $21x^6y^7$ m) $12x^8y^5z^5$ o) $24x^7y^3z^7$
 b) $28x^2$ d) $28x^3y^4z$ f) $24a^4b^4$ h) $3a^6b^3c^4$ j) $-30a^2b^3c^4$ l) $-30a^4b^7c^5x^5$ n) $48a^5m^4x^6$

E22)

- a) -65 c) 56 e) -19 g) -34 i) -48 k) -48 m) 0 o) 45
 b) -13 d) -8 f) 0 h) 24 j) 22 l) -70 n) -18

E23)

- a) x^4 c) $7x$ e) $4x^4$ g) $-4x$ i) $4x^3y$ k) $3y^2$ m) $12xy^2$ o) $3xy$
 b) $8x^3$ d) $-6x^2$ f) $17x$ h) $x^2y/4$ j) $5x^3/y$ l) $-4a^3b^2$ n) $3x^2y/5$

E24)

- a) $-ab^2c^3d^5$ c) $5a^2b^5c$ e) $4am^2n^4$ g) $-4c$ i) $3pr^2$ k) $1/abc$ m) $2/(mnp)$ o) $-q^2/(3mgt)$
 b) $2xyz/3$ d) $-xyz^2w^4$ f) $3yz^3$ h) $2n^2$ j) $-13agt$ l) $3/(2xy^3z^3)$ n) $-a/(3b^2)$

E25)

- a) $2a^2 + 2b^2$ c) $6x - 2z$ e) $2b + 2c$ g) $3a^2 + 5a - 2$ i) $9x^3 - 3x$
 b) $9a^2 - 2a + 6$ d) $4x + 4y + 4z$ f) $4a + 4c$ h) $8ab + 3ac$ j) $5x^2 - 2y^2 + 3xy$

E26)

- a) $-2b^2$ c) $6m^3 + 4m^2 + 7m + 2$ e) $7x^3 + 7x^2 + 2$ g) $3a^3 - a^2b - 2ab^2 + b^3$ i) $-3x^3 - 4y^3 - x^2y - 4xy^2$
 b) $a^3 + 3a^2 + 6a + 2$ d) $2x^3 - 2x^2 + 4x + y$ f) $a^3 + 3a^2b - ab^2$ h) $5x^3 + 3x^2y + 5xy^2 + 13$ j) $3c^3 - d^3 + c^2d + cd^2$

E27)

- a) $a^3 - 5a^2 - a + 4$ c) $a - b + c$ e) $2x - 3y + 8z$ g) $2ac + 2bc$ i) $x^3 + 3x^2 + 2x - 8$
 b) $-ax^4$ d) $2a - 2b + 6c$ f) $x + 4y + 5z$ h) $2ab + ac + 4bc - 2bd$ j) $x^3 - 7x^2 + 4x$

E28)

- a) $-7b^3 + 8c^3 - 18abc + 7c^2$ f) $-2b^3 + 4a^2b - 2ab^2$
 b) $3x^2 + x - 2$ g) $ab^2 + 2a^3b^3 - 2b^4$
 c) $a^3 + 3b^3 + 4c^3 - 6abc$ h) $-x^3 - 11x^2y - 2y^3 + 4xy^2 - 3x^2 - 5y^2$
 d) $x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 7x - 5$ i) $3a^2b - 3ab^2$
 e) $-x^5 - x^3 - x^2 - 2x$ j) $-2c^2 - 2ab + 2bc + 2ac$

E29)

- | | | | | |
|------------------|---------------------|-------------------|-------------------|--------------|
| a) $5a + 2b - 2$ | c) $13x - 15y + 3z$ | e) $5a + 2b - 4c$ | g) $3a - b$ | i) $-8x + y$ |
| b) $x + 2a$ | d) $2a + b - 4c$ | f) $3x - 5y + z$ | h) $2x + 3y + 2z$ | j) $6x - 3z$ |

E30)

- | | | | | |
|----------------------------------|------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| a) $ab + ac$ | d) $6x^2 - 9xy$ | g) $bx - 3b^2$ | j) $4a^3b - 20a^2b^2$ | m) $5x^2y - 15y^3$ |
| b) $a^2b^2c + a^2bc^2 - ab^2c^2$ | e) $12xy + 6y^2$ | h) $-6a^3 + 9a^2b$ | k) $-x^2y^2 + 3xy^3$ | n) $-x^4 + 3x^2y^2$ |
| c) $4x^2 + 28x$ | f) $6a - 6a^2$ | i) $10x^2z + 15xz^2$ | l) $-2x^4$ | o) $-a^3b^3 + a^5b^2$ |

E31)

- | | | |
|------------------------------------|--|----------------------------------|
| a) $a^5 + 2a^4b + 2a^3b^2$ | f) $-a^5 - a^4b^2 - a^2b^3$ | k) $8a^4b^2 + 12a^5$ |
| b) $a^3b^2 + 2a^2b^3 + 2ab^4$ | g) $3a^2y^4 - 9a^2xy^4 + 3a^2y^6$ | l) $8a^5b^3 + 10a^5$ |
| c) $8x^3 - 12x^2y - 18xy^2$ | h) $x^{15}y^2 - x^{13}y^4 - x^6y^{12}$ | m) $4x^5 - 6x^4 + 6x^3 - 10x^2$ |
| d) $x^2y^2 - 2xy^3 + y^4$ | i) $4x^5y^3 - 6x^4y^5 + 4x^3y^6$ | n) $9x^7 - 12x^5 + 15x^4 - 6x^3$ |
| e) $15a^4b^4 - 20a^3b^5 + 5a^5b^3$ | j) $a^{10}x^5y^{10} - a^9x^4y^9 - a^8x^3y^3$ | o) $10a^3b - 25a^2b^2 - 15ab^3$ |

E32)

- | | | |
|--------------------------|--|--|
| a) $8m^2 - 10mp + 3p^2$ | f) $a^3 - b^3$ | k) $-a^4 + 4a^3b - 7ab^3 - 2b^4$ |
| b) $x^2 - bx - cx + bc$ | g) $a^3 + b^3$ | l) $20a^4b^5 + 7a^3b^6 - 25a^5b^4 - 2a^2b^7$ |
| c) $25x^2 - 30xy + 9y^2$ | h) $a^2 + ab - bc - c^2$ | m) $2x^4 + 13x^3 + 9x^2 - 50x + 40$ |
| d) $a^2 - 12ab + 35b^2$ | i) $a^4 + b^4 + 2a^2b^2 - a^3b - ab^3$ | n) $3x^4 + 5x^3 + 3x^2 + x$ |
| e) $a^2 + ab - 6b^2$ | j) $x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 16x^2 - 21$ | o) $x^5 + 2x^4y - x^3y^2 - 4x^2y^3 + 2xy^4$ |

E33)

- | | |
|--|--|
| a) $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$ | f) $-a^4 + b^4 + 4a^2b^2 - 4ab^3$ |
| b) $a^2b^2 + c^2d^2 + 2abcd - a^2c^2$ | g) $a^4 - b^4 - c^4 - 2b^2c^2 + ac^3 - a^3c + ab^2c$ |
| c) $3x^4y^4 + 9x^2y^6 - 2x^5y^3 - 6x^3y^5$ | h) $a^4 - 16a^2b^2x^2 + 32a^3b^3x^3 - 16a^4b^4x^4$ |
| d) $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$ | i) $6a^4 + 5a^3bx - 6a^2b^2x - 4a^2b^2x^2 + 3ab^3x^3 + 4ab^3x - 2b^4x^3$ |
| e) $3x^4 - 5x^3y - 12x^2y^2 - xy^3 + 3y^4$ | j) $14x^4y^3 + 32x^3y^5 - 48x^4y^4 + 10x^5y^2 - 16x^2y^6$ |

E34)

- | | | | | |
|---------------|------------------|----------------|-------------|----------------------|
| a) $2a^2 - a$ | d) $5m^2 - p^2$ | g) $2x^2 - 3x$ | j) $5x - y$ | m) $-3a + 4b - c$ |
| b) $7a^4 - a$ | e) $3x^3 - 5x^2$ | h) $-x^2 + 2$ | k) $ax - 1$ | n) $ab - b^4 - a^2b$ |
| c) $7x^2 + 1$ | f) $-3x^3 + 1$ | i) $a + 2c$ | l) $x + xy$ | o) $x - 2xy - 3y^2$ |

E35)

- | | | | | |
|---------------------|-----------------------|-------------------|-----------------------|-------------------------|
| a) $xy - x^2 - y^2$ | c) $-a + 1 - b$ | e) $x^2 + 2x + 1$ | g) $x^3 - x^2y - y^2$ | i) $a^2c^2 + a - c$ |
| b) $a^2 - ab - b^2$ | d) $-1 + xy + x^2y^2$ | f) $a - b - c$ | h) $ab - 2 - 3b^2$ | j) $a^2b^2 - 3abc - 2c$ |

E36)

- | | | |
|-----------------------|-------------------------------|--|
| a) $Q = x + 8, R = 0$ | f) $Q = 3a + 1, R = 0$ | k) $Q = a^2 - ab - ac - bc + b^2 + c^2, R = 0$ |
| b) $Q = x - 8, R = 0$ | g) $Q = a + 5, R = 0$ | l) $Q = x - 3, R = -6x^2 + 6x + 2$ |
| c) $Q = x + 8, R = 0$ | h) $Q = x^2 - x + 1, R = 0$ | m) $Q = x^2 + 3x + 1, R = 0$ |
| d) $Q = x - 8, R = 0$ | i) $Q = x^4 + x^2 + 1, R = 0$ | n) $Q = a - b, R = 0$ |
| e) $Q = a + 5, R = 0$ | j) $Q = -3a - 2, R = 0$ | o) $Q = x + y - z, R = 0$ |

E37)

- | | |
|-------------------------------------|--|
| a) $x + 5a + 9$ | f) $-15a + 8b - c$ |
| b) $5a + 4b + 7d - 12$ | g) $7a - 5b$ |
| c) $-f + 8m - 6x - 3d - 8$ | h) $3a^2 + a^2b + 2ab^2 - 7b^3$ |
| d) $-7a - 17b + 8c - 19d + 3e + 2f$ | i) $8a^4 - 5a^3b + 36a^2b^2 - 9ab^3 + b^4$ |
| e) $27a - 14b$ | |

E38) 4 E39) a^4b E40) (A) E41) (A) E42) (D)

E43) (D)

E44) a) $9x^2 - 36x + 35$ b) $8x^2 + 26x + 15$ c) $4x^2 + 12x + 9$

E45) (E) E46) $4r^3s^7\sqrt{z}$ E47) (D) E48) (B)

E49) (A) E50) $-2a^3 + 7a^2b - ab^2 - 4b^3$

E51) $x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

E52) $x^3 - 2x^2 - 6x + 27$ E53) $x^4 - x^3 + x^2 + x - 2$ E54) $47/6$

E55) 0 E56) Expressão algébrica racional fracionária

E57) $Q = x^4 - 2x + 1, R = 0$ E58) $Q = 3x^2 + 6x - 1, R = -17x - 4$

E59) (B) E60) (C) E61) (12) E62) (C) E63) (B)

E64) (C) E65) (D) E66) (C) E67) (D) E68) (A)

E69) (C) E70) (A) E71) (B) E72) (E) E73) (A)

E74) (B) E75) (E) E76) (C) E77) (C) E78) (B)

E79) (B) E80) (B) E81) (C) E82) (C) E83) (A)

E84) (C) E85) (A) E86) (C) E87) (C)

E88) (B)

Solução:

Todos os termos de $P(x)$ terão o sinal invertido, quando trocamos -5 por 5 (e vice-versa). Se $P(-5)$ vale 17 , os três termos em x, x^5 e x^9 têm soma 14 para $x = -5$. Se fizermos $x = 5$, esta soma passará a ser -14 . Somando 3 , teremos que $P(5) = -14 + 3 = -11$.

E89) (C)

E90) (A)

OBS: Dizer que $Q(x) = -2x + 1$ é um fator de $P(x) = -6x^3 + 11x^2 - 2x + k$ é o mesmo que dizer que o resto da divisão de $-6x^3 + 11x^2 - 2x + k$ por $-2x + 1$ vale 0 . Para encontrar de forma rápida o resto da divisão por $-2x + 1 = -2(x - 1/2)$, usamos o teorema do resto, calculando $P(-1/2)$ e igualamos a zero.

E91) (E) E92) (B) E93) (C) E94) (C) E95) (D)

E96) (D)

E97) Solução:

Calcule o valor de $E = \frac{a \cdot b^{-2} \cdot (a^{-1}b^2)^4 \cdot (ab^{-1})^2}{a^{-2} \cdot b \cdot (a^{-2}b^{-1})^{-2} \cdot (a^{-1}b)^{-4}}$, sendo $a = 3$ e $b = 2$.

Solução: Devemos simplificar a expressão para depois calcular o valor numérico. Como todos os fatores a e b estão operados apenas por multiplicações, divisões e potências, podemos operar com os expoentes:

Expoente de a no numerador: $1 - 4 + 2 = -1$

Expoente de a no denominador: $-2 + 4 + 4 = 6$

Expoente de b no numerador: $-2 + 8 - 2 = 4$

Expoente de b no denominador: $1 + 2 - 4 = -1$

Ficamos então com: $\frac{a^{-1}b^4}{a^6b^{-1}} = \frac{b^5}{a^7}$

Fazendo $a=3$ e $b=2$ ficamos com $2^5/3^7 = 32/2187$

E98) $Q = x^3 + x^2 - 2x - 2$, $R = 7$

E99) $\left(\frac{9}{2}\right)^{n^2}$, se $n > 0$ E100) (C)

E101) (A) E102) (C) E103) $4x^{3a-4} - 6x^{a-1}y^{4-b} - 6x^{2a-3}y^{b+5} + 9y^9$

E104) (A) E105) (B) E106) (A) E107) (B) E108) (D)

E109) (B) E110) (A) E111) $\frac{(a+b)^2}{ab}$

E112) 4. Simplifique antes de atribuir os valores de a e b .

E113) (E) E114) $(x - 7)$ E115) $x = 5/2$ e $y = 3/2$ E116) $-37/4$

E117) (B) E118) (A) E119) (E) E120) $\frac{8x^5z^5}{y^6}$ E121) 20

E122) $x + 2$ E123) 15 E124) (A) E125) $4x^2 - 6x + 7$ E126) 36

E127) $P(2)$ tem que ser 0, ou seja, tem que deixar resto 0 na divisão por $x - 2$.

$P(2) = 0 \rightarrow k = -3$

E128) (B) E129) (B) E130) (A) E131) (C) = 7

