

**Instruções Gerais:**

1. Apresente a formulação matemática completa do Problema de Valor Inicial (PVI).
2. Em seguida, escolha e aplique um método numérico de ordem apropriada (segunda, terceira, ou quarta/quinta ordem), justificando brevemente a escolha, para aproximar a solução numérica no intervalo e com o passo indicados.
3. Para os demais passos, você pode apresentar uma tabela com os resultados numéricos.
4. Analise os resultados obtidos, comentando sobre o comportamento da solução e a precisão esperada do método.
5. Lembre-se de compartilhar o código (link, em caso de Python, ou arquivo, em caso de R ou Scilab) .
6. Comente sobre a precisão esperada.

**Observação:** Lembre-se de escolher métodos diferentes e de ordens diferentes.

**Problema 1: Aquisição de Habilidades (Curva de Aprendizagem)**

Em um estudo sobre a aquisição de uma nova habilidade por um indivíduo, a taxa de aumento no nível de proficiência é modelada como proporcional à quantidade de proficiência que ainda falta ser adquirida. Este modelo é conhecido como a Curva de Aprendizagem e pode ser descrito por:

$$\frac{dL}{dt} = k(M - L),$$

em que:

1.  $L(t)$  é o nível de proficiência do indivíduo no tempo  $t$  (em horas de prática).
2.  $M$  é o nível máximo de proficiência que pode ser alcançado (considere  $M = 10$  unidades).
3.  $k$  é a constante de aprendizado (considere  $k = 0.2 \text{ hora}^{-1}$ ).

No início do treinamento ( $t = 0$ ), o nível de proficiência inicial do indivíduo é de  $L_0 = 1$  unidade.

**Formulação do PVI:**

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= 0.2(10 - L) \\ L(0) &= 1\end{aligned}$$

**Tarefa:** Aproxime o nível de proficiência do indivíduo após 8 horas de prática (no intervalo  $t \in [0, 8]$ ) utilizando um passo de  $h = 0.8$  horas.

### Problema 2: Esfriamento de Xícara de Café em Ambiente Variável

Uma xícara de café quente é colocada em um ambiente cuja temperatura não é constante, mas varia ao longo do tempo. A taxa de resfriamento do café ainda segue a Lei de Resfriamento de Newton, mas com a temperatura ambiente sendo uma função do tempo.

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a(t)),$$

em que:

1.  $T(t)$  é a temperatura do café no tempo  $t$  (em minutos).
2.  $T_a(t)$  é a temperatura ambiente, dada por  $T_a(t) = 20 + 5 \sin\left(\frac{\pi t}{10}\right)^\circ C$  (variação sinusoidal ao longo do tempo).
3.  $k$  é a constante de proporcionalidade do resfriamento do café (considere  $k = 0.07 \text{ min}^{-1}$ ).

No momento inicial ( $t = 0$ ), a temperatura do café é  $T_0 = 90^\circ C$ .

**Formulação do PVI:**

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= -0.07 (T - (20 + 5 \sin(\frac{\pi t}{10}))) \\ T(0) &= 90\end{aligned}$$

**Tarefa:** Aproxime a temperatura do café nos primeiros 30 minutos (no intervalo  $t \in [0, 30]$ ) utilizando um passo de  $h = 2$  minutos.

### Problema 3: Propagação de Doença (Modelo SIR Simplificado)

Em uma pequena comunidade isolada, a taxa de mudança no número de indivíduos suscetíveis ( $S$ ) a uma doença é modelada como proporcional ao produto do número de suscetíveis pelo número de infectados ( $I$ ), sendo que o número de infectados é constante e muito pequeno em relação à população total ( $I \approx 10$  pessoas). Considere que não há recuperação ou mortes na fase inicial do modelo, apenas a redução de suscetíveis.

A equação diferencial que descreve a variação de suscetíveis é:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI,$$

em que:

1.  $S(t)$  é o número de indivíduos suscetíveis no tempo  $t$  (em dias).
2.  $\beta$  é a taxa de infecção (considere  $\beta = 0.0005 \text{ pessoas}^{-1} \text{ dia}^{-1}$ ).
3.  $I$  é o número constante de infectados (considere  $I = 10$  pessoas).

No início do surto ( $t = 0$ ), o número de indivíduos suscetíveis é  $S_0 = 500$ .

**Formulação do PVI:**

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -0.0005 \times S \times 10 = -0.005S \\ S(0) &= 500\end{aligned}$$

**Tarefa:** Aproxime o número de indivíduos suscetíveis para os primeiros 10 dias (no intervalo  $t \in [0, 10]$ ) utilizando um passo de  $h = 1$  dia.