$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$ LD

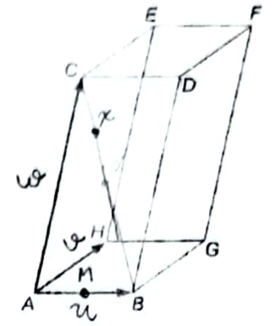
$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 10 - 6 \neq 0$ LI

Exercícios Propostos[1]

1. **(2,5 pt.)** Resolva os exercícios abaixo.

$AF = AC + CE + EF$
$= w + AH + AB$
$= w + v + u$

$AB + BC = AC$
$u + BC = w$
$BC = w - u$



(a) **(1,5 pt.)** Sendo $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AH} = \vec{v}$ e $\overrightarrow{AC} = \vec{w}$, utilize o paralelepípedo da figura ao lado para determinar os vetores $\vec{a} = 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AF}$ e $\vec{b} = 3\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BE} - 2\overrightarrow{DH}$ em termos de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

$-2 - (2m - 1{,}5m^2) \cdot 3$

$-6 - (6m - 4{,}5m^2)$

$-6 - 6m + 4{,}5m^2$

$-12 - 12m + 9m^2$

$(1,-1,2) + (0,-3,6)$
$(1,-4,8)$

(b) **(1,0 pt.)** Em um triângulo ΔABC, seja X um ponto no lado BC tal que $3\overrightarrow{BX} = 5\overrightarrow{XC}$. Sendo M o ponto médio do lado AB, escreva o vetor $\overrightarrow{MX}$ em função de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

2. **(2,0 pt.)** Considere os exercícios abaixo.

(a) **(1,0 pt.)** Fixada uma base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, determine os valores de m para os quais os vetores $\vec{a} = 3\vec{i} + \left(2 - \frac{3m}{2}\right)\vec{j}$ e $\vec{b} = 3m\vec{i} - 2\vec{j}$ não são paralelos. $\rightarrow$ L. I

(b) **(1,0 pt.)** Sendo $\vec{u} = (1, 1-m, 3)$, $\vec{v} = (-2, m, -1)$ e $\vec{w} = (1, 2, 1)$, calcule m para que os vetores sejam L.D.

3. **(2,5 pt.)** Sejam $\vec{u} = (1, 2, 0)$, $\vec{v} = (1, -1, 2)$ e $\vec{w} = (0, 1, -2)$ vetores expressos na base canônica do $\mathbb{R}^3$.

(a) **(0,5 pt.)** O vetor $\vec{u}$ é uma combinação linear de $\vec{v}$ e $\vec{w}$? Justifique.

(b) **(1,0 pt.)** Determine o ângulo entre os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, onde $\vec{a} = \vec{u} + 2\vec{v}$ e $\vec{b} = \vec{v} - 3\vec{w}$.

(c) **(1,0 pt.)** Escreva $\vec{t} = (2, 3, 6)$ como combinação linear de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e determine os coeficientes dessa combinação.

4. **(3,0 pt.)** São dados os pontos $A = (1, 2, -1)$, $B = (0, 1, 1)$, $C = (2, 0, 0)$ e $D = (2, 0, -1)$ expressos na base canônica do $\mathbb{R}^3$.

(a) **(1,0 pt.)** Mostre que os pontos A, B e C não são colineares e formam um *triângulo equilátero* em $\mathbb{R}^3$, e calcule a área do triângulo.

(b) **(1,0 pt.)** Determine o vetor projeção ortogonal de $\overrightarrow{AB}$ na direção de $\overrightarrow{AC}$ (isto é, $\text{Proj}_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB}$) e comente o resultado com base no item anterior.

(c) **(1,0 pt.)** Calcule o volume do tetraedro $ABCD$ e determine sua altura em relação à face ABD.

$2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$

$2 \cdot (-2+2) \quad -(2-(-1))$

$2 \cdot 0 \quad - 3$

$2(2-b) - b + c = 3$
$4 - 2b - b + c = 3$
$-3b + c = -1$
$2b - 2c = 6$

$c = -1 + 3b$
$2b - 2(-1+3b) = 6$
$2b + 2 - 6b = 6$
$-4b = 4$
$b = -1$

$c = -1 + 3 \cdot -1$
$= -1 - 3$
$= -4$

$24 \times 24 = 576$

28×28

17×17

[1] Coloque o nome completo nas folhas de prova e escreva o resultado final das questões à caneta. Respostas sem resolução e/ou justificativa não serão consideradas. Não é permitido o uso de quaisquer equipamentos eletrônicos. Data da Avaliação: 15/05/2024.

Aluno: Lucas Carrijo Ferrari 2024.1.08.016

8,7

(1) a)

$AB + BC = AC$
$u + BC = w$
$BC = w - u$

$AF = AB + BG + GF$
$= u + v + w$

$CF = CD + DF$
$CF = AB + AH$
$= u + v$

$BE = BD + DC + CE$
$= AC - CD + AH$
$= w - AB + v$
$= w - u + v$

$DH = DB + BA + AH$
$= -BD + -AB + v$
$= -w - u + v$
$= v - w - u$

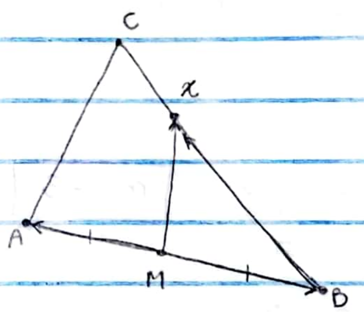
$a = 2(w - u) - (u + v + w)$
$= 2w - 2u - u - v - w$
$= w - 3u - v$

$$\boxed{\begin{aligned} a &= w - 3u - v \\ b &= 4u + 2v + 3w \end{aligned}}$$

1,5

$b = 3(u+v) + (w - u + v) - 2(v - w - u)$
$= 3u + 3v + w - u + v - 2v + 2w + 2u$
$= 4u + 2v + 3w$

b)



$3BX = 5XC \rightarrow \frac{3BX}{5} = XC$

$BX = BM + MX$
$BX = \frac{-AB}{2} + MX$

$MX = MA + AC + CX$
$= \frac{-AB}{2} + AC - \frac{3BX}{5}$

$\frac{BA}{2} = MA$ $\quad BM = \frac{BA}{2}$

$\frac{-AB}{2} = MA$ $\quad BM = \frac{-AB}{2}$

$= \frac{-AB}{2} + AC - \frac{3 \cdot \left(\frac{-AB}{2} + MX\right)}{5}$

$= \frac{-AB}{2} + AC + \frac{\frac{3AB}{2} - 3MX}{5}$

$= \frac{-AB}{2} + AC + \frac{\frac{3AB - 6MX}{2}}{5} = \frac{-AB}{2} + AC + \frac{3AB - 6MX}{2} \cdot \frac{1}{5}$

$$\boxed{MX = \frac{-AB + 5AC}{2}}$$

$= \frac{-AB}{2} + AC + \frac{3AB - 6MX}{10}$

0,5

$= \frac{-5AB + 10AC + 3AB - 6MX}{10}$

$10MX + 6MX = -2AB + 10AC$

$4MX = -2AB + 10AC$

$MX = \frac{-AB + 5AC}{2}$

a)

$$\textcircled{2}\ \begin{vmatrix} 3 & 2-\frac{3m}{2} \\ 3m & -2 \end{vmatrix} = -6-\left(3m\cdot\frac{4-3m}{2}\right) = -6-\frac{(12m-9m^2)}{2} = \frac{-12-12m+9m^2}{2}$$

$$9m^2-12m-12\neq 0$$
$$\Delta = 144-4\cdot 9\cdot -12$$
$$\Delta = 144-36\cdot -12$$
$$= 144+432$$
$$= 576$$

1,0

$$m = \frac{12\pm\sqrt{576}}{18}$$

$$m_1 = \frac{12+\sqrt{576}}{18} \qquad \frac{12+24}{18} = \frac{36}{18} = 2$$

$$m_2 = \frac{12-\sqrt{576}}{18} \qquad \frac{12-24}{18} = \frac{-12}{18} = \frac{-6}{9} = \frac{-2}{3}$$

para os valores no conjunto $\mathbb{R}$, exceto $\cancel{\frac{12\pm\sqrt{576}}{18}}$ 2 e $-\frac{2}{3}$

b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1-m & 3 \\ -2 & m & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1-m & 3 \\ -1 & m+2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} -1 & m+2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1-m \\ -1 & m+2 \end{vmatrix}$$

$L_2 = L_2 + L_1$

$$= 3\cdot(-2-(m+2)) + m+2-(-1+m)$$
$$= 3\cdot(-2-m-2)+m+2+1-m$$
$$= 3\cdot(-m-4)+3$$
$$= -3m-12+3$$
$$= -3m-9$$

$$-3m-9=0$$
$$-3m=9$$
$$3m=-9$$
$$m=-3$$

$$\boxed{m=-3}$$

1,0

③ a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(-4) = 4 \quad \text{L.I}$$

$L_2 = L_2 + L_1$

0,5

Não, pois u, v e w formam uma base, e portanto, são linearmente independentes

b)

$$a = (1,2,0)+2\cdot(1,-1,2) = (1,2,0)+(2,-2,4) = (3,0,4)$$

$$b = (1,-1,2)-3(0,1,-2) = (1,-1,2)-(0,3,-6) = (1,-4,8)$$

$$a\cdot b = 3+0+32 = 35$$

1,0

$$\cos\theta = \frac{u\cdot v}{\|u\|\cdot\|v\|} = \frac{35}{\sqrt{9+16}\cdot\sqrt{1+16+64}} = \frac{35}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{81}} = \frac{\cancel{35}^{\,7}}{\cancel{5}_{\,1}\cdot 9} = \frac{7}{9}$$

$$\boxed{\arccos\left(\frac{7}{9}\right)=\theta}$$

$2 \cdot -1 - 2 \cdot -1$ $\quad 2 \cdot 3$
$-2 + 2$
0

c) $a \cdot u + b \cdot v + c \cdot w = t$

$a(1,2,0) + b(1,-1,2) + c \cdot (0,1,-2) = (2,3,6)$

$2+1=3$

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a - b + c = 3 \\ 2b - 2c = 6 \end{cases}$$

$\bullet\ a = 2 - b$
$2(2-b) - b + c = 3$
$4 - 2b - b + c = 3$
$4 - 3b + c = 3$
$\bullet\ -3b + c = -1$
$c = -1 + 3b$
$c = -1 - 3 = -4$

$\bullet\ b - c = 3$
$b - (-1+3b) = 3$
$b + 1 - 3b = 3$
$-2b = 2$
$b = -1$

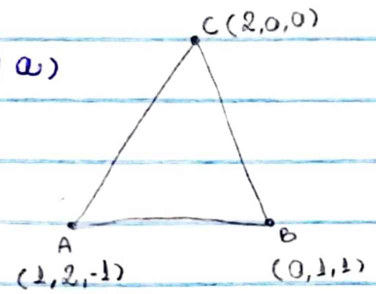
coef v $\quad$ coef u

$$\boxed{\begin{matrix} a = 3 \\ b = -1 \\ c = -4 \end{matrix}}$$

coef w

1,0

④ a)



$\frac{1}{2}$

angulo entre AC e AB $\rightarrow 60°$

$\hookrightarrow \cos 60° = \frac{AC \cdot AB}{\|AC\| \cdot \|AB\|} = \frac{(1,-2,1) \cdot (-1,-1,2)}{\sqrt{1+4+1} \cdot \sqrt{1^2+1+4}}$

$= \frac{-1+2+2}{\sqrt{6}^{\,2}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

angulo entre BA e BC $\rightarrow 60°$

$\frac{1}{2} = \frac{BA \cdot BC}{\|BA\| \cdot \|BC\|} = \frac{(1,1,-2) \cdot (2,-1,-1)}{\sqrt{1+1+4} \cdot \sqrt{4+1+1}} = \frac{2-1+2}{(\sqrt{6})^2} = \frac{1}{2}$

todos os angulos formam 60°, a norma é a mesma

0,7

área $= \frac{\|AB\| \cdot \|AC\|}{2} = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}}{2} = \frac{6}{2} = 3$

b) $\text{proj}_{AC} AB = \frac{AC \cdot AB}{\|AC\|^2} \cdot AC = \frac{3}{(\sqrt{6})^2} \cdot (1,-2,1) = \frac{1}{2} \cdot (1,-2,1) = \boxed{\left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)}$

1,0

c) $\frac{1}{6} \cdot |AB \cdot (AC \times AD)|$

$AB = (-1,-1,2)$, $AC = (1,-2,1)$, $AD = (1,-2,0)$

$\frac{1}{6} \cdot 3 = \frac{1}{2}$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(2-(-1))$$

$= -(2+1)$

$= -3$

$\boxed{\frac{1}{2}}$

0,5