

(7 7)

$$\textcircled{1} \text{ a) } D = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -8 - (-3) = -8 + 3 = -5 \quad x = \frac{-10}{-5} = 2$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = -6 - (4) = -10 \quad y = \frac{-25}{-5} = 5$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -16 - 9 = -25$$

$$\begin{array}{ll} 4 \cdot 2 - 5 = 3 & 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = -4 \\ 8 - 5 = 3 & 6 - 10 = -4 \\ 3 = 3 & -4 = -4 \end{array}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}}$$



1,0

$$L_1 = L_1 - L_3$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ 0 \cdot x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y - 2z = -7 \end{cases} \quad D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 10 = -7$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ -7 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ -7 & 10 & -2 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} + 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -3 \cdot (-4 + 21) - 10 \cdot (3 - 6)$$

$$= -3 \cdot 17 - 10 \cdot -3$$

$$= -51 + 30$$

$$= -21$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -8 & -5 \end{vmatrix} = -10 - (-24)$$

$$= -10 + 24$$

$$= 14$$

$$\text{Dg: } \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -8 \end{vmatrix} = -16 - (-2) = -16 + 2 = -14$$

$$x = \frac{-21}{-7} = 3$$

$$y = \frac{14}{-7} = -2$$

$$z = \frac{-14}{-7} = 2$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$3 + 4 \cdot -2 + 3 \cdot 2 = 1 \quad | \quad 2 \cdot -2 + 3 \cdot 2 = 1$$

$$3 - 8 + 6 = 1$$

$$-4 + 7 = 3$$

$$3 = 3$$

$$\begin{matrix} 3 - 2 = 1 \\ 1 = 1 \end{matrix}$$

$$3 + 3 - 2 - 2 = -7$$

$$3 - 6 - 4 = -7$$

$$-3 - 4 = -7$$

$$-7 = -7$$

✓

1,0

$$\textcircled{2} \text{ a) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \sqrt{3} \\ 3 & -15 & -3m^2 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \sqrt{3} \\ 3 & -15 & -3m^2 & -4 \\ 2 & 0 & 0 & 3 + \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & -18 & -3m^2 - 3 & -4 - 3\sqrt{3} \\ 2 & 0 & 0 & 3 + \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \sqrt{3} - \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \\ 0 & -18 & -3m^2 - 3 & -4 - 3\sqrt{3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 18 & 18 & 18 \cdot \frac{-3 + \sqrt{3}}{2} \\ 0 & -18 & -3m^2 - 3 & -4 - 3\sqrt{3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{~~~~~} \\ 0 & 0 & -3m^2 - 3 + 18 & -4 - 3\sqrt{3} + 18 \cdot \frac{-3 + \sqrt{3}}{2} \\ \text{~~~~~} \end{bmatrix}$$

1,0

$$3 \cdot (-3m^2 + 15) = -4 - 3\sqrt{3} + 9 \cdot (-3 + \sqrt{3})$$

$$3 = \frac{\text{~~~~~}}{-3m^2 + 15}$$

$$-3m^2 + 15 \neq 0$$

$$-m^2 + 5 \neq 0$$

$$-m^2 \neq -5$$

$$m^2 \neq 5$$

$$m \neq \pm \sqrt{5}$$

$$\mathbb{R} - \{\pm \sqrt{5}\}$$

✓

$$\begin{cases} 4x - 2y - 2z = 3x \\ 2m \end{cases}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 4 & -n & 2 \\ 2n & 2 & 1 \\ 3 & -n & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -n & -2 \\ 2n & -1 & 1 \\ 3 & -n & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -n & -2 \\ 2n & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -n & -2 & 0 \\ 2n & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -n & 1 & 0 \\ 2n & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$L_3 = L_3 L_1$

$$\begin{bmatrix} 0 & -n & 1 \\ 2n-1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -n & 1 \\ 1 & \frac{-1}{2n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -n & 1 \\ 0 & \frac{1}{2n-1} & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(continua no outro bloco)

3 a)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -3 & 3 \\ 3 & -1 & -2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

operação??

?

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

grau de liberdade = 0

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

X

1,0

$$b) \begin{bmatrix} 3 & -4 & -2 & -13 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 4 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1: L_1 - 2L_3} \begin{bmatrix} 5 & 0 & -10 & -35 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 4 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2: L_2 + L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & -5 & 5 & 10 \\ -1 & -2 & 4 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3: L_3 + L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & -5 & 5 & 10 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2: L_2 + 5L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2: L_2 - L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x - 2z &= -7 & x &= -7 + 2z \\ -y + z &= 2 & -y &= 2 - z \rightarrow y = z - 2 \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 + 2\lambda \\ \lambda - 2 \\ \lambda \end{bmatrix} \quad \text{grau de liberdade} = 1$$

$$4) \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & (12-a^2) & 2a-5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3: L_3 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 12-a^2+2 & 2a-5-2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3: L_3 - 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 14-a^2 & 2a-7 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3: L_3 + L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 16-a^2 & 2a-8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(16-a^2) &= 2a-8 \\ f &= \frac{2a-8}{16-a^2} \end{aligned} \quad \begin{aligned} 0 &= \frac{2 \cdot 4 - 8}{16 - (-4)^2} = \frac{-8-8}{16-16} = \frac{-16}{0} \\ a &= 4 \quad \frac{2 \cdot 4 - 8}{16 - 4^2} = \frac{8-8}{16-16} = \frac{0}{0} \end{aligned}$$

sistema sem solução : $a = -4$

" com solução única : $a \rightarrow \mathbb{R} - \{-4\}$

" com soluções infinitas : $a = 4$

$$⑤ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 9 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$L_1 = L_1 - 3L_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & 9 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & -9 \end{array} \right]$$

$$L_2 = L_2 - 5L_3$$

$$L_3 = L_3 + 2L_2$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & -9 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 5 \end{array} \right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -9 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

✓ 1,5

$$② \text{ b) } \left[\begin{array}{ccc} 0 & -n & 1 \\ 0 & \frac{-1}{2n-1} - n & 0 \\ \hline \end{array} \right] \quad y \left(\frac{-1}{2n-1} - n \right) = 0 \quad \frac{-1}{2n-1} - n = 0$$

$$y = 0 \quad \frac{-1}{2n-1} - n = 0$$

$$\frac{-1}{2n-1} - n = 0 \quad -1 - n(2n-1) = 0$$

$$\frac{-1}{2n-1} - n = 0 \quad -1 - 2n^2 + n = 0$$

$$\frac{-1}{2n-1} - n = 0 \quad -2n^2 + n - 1 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-1)$$

$$\Delta = 1 - 9 = -8$$

✗

0,3

Exercícios Propostos¹

1. (2,0 pt.) Resolva os sistemas lineares usando a regra de Cramer.

(1,0 pt.)
$$\begin{cases} 4x - y = 3 \\ 3x - 2y = -4 \end{cases}$$

(1,0 pt.)
$$\begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ 2y + 3z + 1 = 3 \\ x + 3y - 2z = -7 \end{cases}$$

2. (2,0 pt.) Considere os exercícios abaixo.

- (1,0 pt.) O sistema linear
$$\begin{cases} x + y + z = \sqrt{3} \\ 3x - 15y - 3m^2z = -4 \\ x - y - z = 3 \end{cases}$$
 admite uma única solução para quais valores de m ? Justifique.

- (1,0 pt.) Sendo $A = \begin{pmatrix} 4 & -n & -2 \\ 2n & 2 & 1 \\ 3 & -n & 3 \end{pmatrix}$ e X uma matriz coluna de ordem 3×1 , encontre o(s) valor(es) de n para que o sistema $AX = 3X$ admita infinitas soluções para a incógnita X . Justifique sua resposta.

3. (3,0 pt.) Para cada um dos sistemas abaixo, obtenha a forma escalonada reduzida da matriz ampliada, determine o conjunto solução e o grau de liberdade associado.

(1,5 pt.)
$$\begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ -2x + 3y - 3z = 3 \\ 3x - y - 2z = 9 \end{cases}$$

(1,5 pt.)
$$\begin{cases} 3x - 4y - 2z = -13 \\ x - 3y - z = -1 \\ -x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$$

4. (1,5 pt.) Considere o seguinte sistema linear:
$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y - z = 2 \\ 2x - 3y + (12 - a^2)z = 2a - 5 \end{cases}$$

Encontre todos os valores de a para os quais o sistema não tem solução, tem solução única ou tem infinitas soluções.

5. (1,5 pt.) Use a matriz identidade e as operações elementares entre linhas para encontrar

a matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} -2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 &= 0 \\ -2 \cdot 0 & \end{aligned}$$

¹ Os exercícios foram compilados a partir de provas anteriores, onde se encontra a resolução de cada questão. Não há garantia de que a resolução apresentada aqui seja a única correta. Não é permitida a cópia e qualquer reprodução sem autorização expressa do autor.