5,65

Universidade Federal de Alfenas - UNIFAL-MG
Disciplina: Matemática Discreta — Período: 2025/1
Professor: Anderson José de Oliveira — Data: 03/04/2025

ATENÇÃO: Respostas sem justificativa serão desconsideradas, todas as folhas entregues devem ser devolvidas, não será permitido o uso de celular, calculadora ou qualquer aparelho eletrônico.

PROVA 1 - MATEMÁTICA DISCRETA

Questão 1.

0,3 (a) (1,0) A sentença $(\exists! x)(p(x))$ é equivalente ($\Leftrightarrow$) a $(\exists x)(p(x)) \wedge (\forall x)(\forall y)[(p(x) \wedge p(y)) \to x = y]$, onde a primeira parte da conjunção se refere a existência de x e a segunda parte se refere a unicidade. Negue a sentença $(\exists! x)(p(x))$.

1,0 (b) (1,0) Seja f uma função definida sobre o conjunto dos números reais. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a b é L se $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(0 < |x - b| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon)$. Negue a definição de limite de uma função de uma variável real.

Questão 2.

0,25 (a) (1,0) Prove que o teorema na forma recíproca ($p \to q$; $q \to p$) é equivalente ao teorema na forma contrária ($\sim p \to \sim q$; $\sim q \to \sim p$) (via tabela-verdade e leis do cálculo proposicional).

0,0 (b) (1,25) Prove que n é um número inteiro par se, e somente se, $n - 1$ é um número inteiro ímpar. Qual técnica de demonstração você utilizou?

0,0 (c) (1,25) Prove que $\forall$ inteiros a, b e c, se $a|b$ e $a|c$, então $a|(b + c)$. Qual técnica de demonstração você utilizou?

$\frac{2}{2}$ $\frac{2}{1}$ $\frac{2}{3}$

2,0 **Questão 3.** (2,0) Sejam A, B, C subconjuntos do conjunto universo S. Prove que:

(a) $A \cap B = B \cap A$.

(b) $(A \cap B) - (A \cap C) = A \cap (B - C)$.

(c) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

(d) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

1,5 **Questão 4.** (2,5) Diga se as sentenças a seguir são verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas.

1. O princípio do terceiro excluído é aquele que afirma que: "uma proposição não pode ser verdadeira e falsa."

F ou V

② a) $p \to q \iff \sim q \to \sim p$

Direta — Contrapositiva

• tabela verdade

p	q	$p \to q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \to \sim p$	$p \to q \longleftrightarrow \sim q \to \sim p$
V	V	V	F	F	V	T ✓
V	F	F	V	F	F	T ✓
F	V	V	F	V	V	T ✓
F	F	V	V	V	V	T ✓

equivalem pois formam uma tautologia

• $p \to q \iff \sim p \vee q$

$q \vee \sim p$ (regra comutativa)

$\sim q \to \sim p$

no problema foi pedida a forma contrária e a sua prova

b) n é par, pela definição, $\frac{n}{2}$ é inteiro

$n-1$ é impar, pela definição, $\frac{n-1}{2}$ não é inteiro

é inteiro

c) Hipotese: $\frac{a}{b}$ e $\frac{a}{c}$

Tese: $\frac{a}{(b+c)}$

$a = 2k$

$b = 2k + 1$

$c = 2k + 2$

$$\frac{2k}{2k+1+2k+2} = \frac{2k}{4k+3}$$

esse resultado não será um número inteiro

③ a) $A \cap B \longleftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$ [regra comutação] Comutativa

$(x \in B \wedge x \in A)$ [18]

$B \cap A$

$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$p \wedge (q \vee r)$

b) $(A \cap B) - (A \cap C) \longleftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge (x \notin A \vee x \notin C)$ [19]

$((x \in A \wedge x \in B) \wedge x \notin A) \vee ((x \in A \wedge x \in B) \wedge x \notin C)$ [9]

$(F \wedge x \in B) \vee ((x \in A \wedge x \in B) \wedge x \notin C)$ [11]

$F \vee ((x \in A \wedge x \in B) \wedge x \notin C)$ [12]

$x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C$ [19 inversa]

$A \cap (B - C)$

$\sim(p \wedge q)$

$\sim p \vee \sim q$

c) $(A \cap B)^c \longleftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)^c$

$(x \notin A \vee x \notin B)$ [20 inversa]

$A^c \cup B^c$

d) $A \cup (B \cap C) \longleftrightarrow \underbrace{x \in A}_{p} \vee (\underbrace{x \in B}_{q} \wedge \underbrace{x \in C}_{r})$ [6]

$p \vee (q \wedge r)$

$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$

$(A \cup B) \cap (A \cup C)$

Apesar de ter pulado vários passos, vou considerar, dado o entendimento da teoria.

(4) 1. Verdadeiro. Uma proposição possui caráter lógico, tendo seus valores definidos como verdadeiro ou falso. O princípio do terceiro excluído diz respeito a unicidade do valor da proposição sendo este apenas verdadeiro ou falso sem ser os dois ao mesmo tempo

2. Hipotese: $\frac{a}{b}$ e $\frac{b}{a}$ sendo a e b inteiros Verdadeiro

Tese: $a = b$

$a = 2k$, sendo k inteiro

$b = 2l$, sendo l inteiro

$\frac{a}{b} = \frac{2k}{2l} \therefore \frac{a}{b} = \frac{k}{l} \therefore a = \frac{bk}{l}$

$\frac{b}{a} = \frac{2l}{2k} \therefore \frac{b}{a} = \frac{l}{k} \therefore b = \frac{la}{k}$

3.

p	q	$p \to q$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$p \to q \leftrightarrow p \wedge \sim q$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	F	F

contradição

Verdadeiro. De acordo com a tabela verdade, $p \to q \leftrightarrow p \wedge \sim q$ é uma contradição

4. Verdadeiro. É uma proposição por possuir caráter lógico, sendo seu valor definido como positivo ou negativo. Em uma sentença lógica ficaria como: p: Windows é sistema operacional

q: Pascal é linguagem de programação

$p \wedge q$

5.

p	q	$p \vee q$	$p \to (p \vee q)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	V

Falso. A operação lógica $p \to (p \vee q)$ não corresponde a uma Contradição (F)

C

1) a) $\underbrace{(\exists x)(p(x))}_{\sim(\ p} \wedge \underbrace{(\forall x)(\forall y)}_{q)}$ $\underbrace{(p(x) \wedge p(y))}_{\sim(\ p} \to \underbrace{x = y}_{q\ )}$

$\sim(p \wedge q) :: \sim p \vee \sim q$

$\sim[(\exists x)(p(x)] \vee \sim[(\forall x)(\forall y)]$

$(\forall x)(p(x)) \vee (\exists x)(\exists y)$

$\sim(p \to q) :: p \wedge \sim q$

$(p(x) \wedge p(y)) \wedge x \neq y$

$\sim p(x)$

Resposta: $(\forall x)(p(x)) \vee (\exists x)(\exists y)[(p(x) \wedge p(y)) \wedge x \neq y]$

b) • $(\forall \varepsilon > 0)$ negado: $(\exists \varepsilon > 0)$

• $(\exists \delta > 0)$ negado: $(\forall \delta > 0)$

• $(\forall x \in \mathbb{R})$ negado: $(\exists x \in \mathbb{R})$

• $(\underbrace{0 < |x-b| < \delta}_{p} \to \underbrace{|f(x) - L| < \varepsilon}_{q})$ negado: $(0 < |x-b| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \varepsilon)$

$\sim(p \to q) :: p \wedge \sim q$

Resposta: $(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in \mathbb{R})(0 < |x-b| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \varepsilon)$

C