Avaliação de Álgebra Linear

Prof. José Claudinei Ferreira - 14/11/2024

Nome e matrícula:

Leia atentamente cada item antes de começar a resolver. É preciso colocar detalhes que expliquem matematicamente sua resposta. Cada item correto vale 1.5 pontos.

Problema: Sejam $\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \{v_1, v_2, v_3\}$, $k = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ a transformação linear definida como

$$T(u) = xv_1 + yv_2 + zv_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \qquad u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

e seja $T^* : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por transposta

$$T^*(v) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ r \\ s \\ t \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} q \\ r \\ s \\ t \end{bmatrix}.$$

a) Determine os subespaços vetoriais $U = T(\mathbb{R}^3)$, a imagem de T, e W, o núcleo de T^*.
Determine quatro elementos em $a_i \in U$ e cinco elementos $b_j \in W$ e verifique que o produto interno $\langle a_i, b_j \rangle = a_i \cdot b_j = 0$; ou seja, o núcleo de T^* é ortogonal à imagem de T.
Verifique também que $U + W = \{u + w, \mid u \in U, w \in W\} = \mathbb{R}^4$ e $U \cap W = \emptyset$.

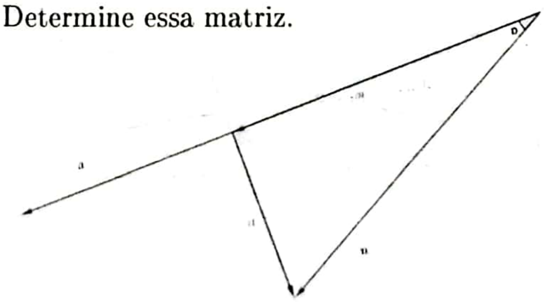
b) Determine

$$k_1 = Proj_W k,$$

calcule $k_2 = k - k_1$ e verifique que $k_1 \perp k_2$;

c) Verifique que $T(u) = k$ não tem solução, ou seja $k \notin U$. Resolva a equação $T(u) = k_2$, por eliminação ou escalonamento.

d) Determine uma base ortogonal $\mathcal{B}$ para U, tal que a matriz de mudança da base $\mathcal{A}$ para a base $\mathcal{B}$ seja triangular. Determine essa matriz.



Mantenha a calma e boa prova!