Trabalho computacional: Cálculo de campos elétrico e magnático

José Augusto dos Santos
Departamento de Engenharia Elétrica - DEPEL
Unversidade federal de São João del rei
São João del rei, Minas Gerais
jaeletricasantos@gmail.com

Lucas Xavier de Morais
Departamento de Engenharia Elétrica - DEPEL
Unversidade federal de São João del rei
São João del rei, Minas Gerais
lucas.xavier.de.morais@gmail.com

***Resumo* — Este relatório trata da implementação de ferramentas computacionais, com a finalidade de facilitar cálculos envolvidos na teoria eletromagnética, que serão utilizadas para a resolução dos exercícios proposto.**

***Palavras-chave* — campo elétrico, campo magnético, implementação, eletromagnetismo**

I. INTRODUÇÃO

Desde as civilizações antigas com a descoberta do magnetismo, passando pelo estudo e desenvolvimento da eletricidade, até que em 1873 quando pelas mãos de James Clerk Maxwell elegantemente foram criadas as equações gerais do eletromagnetismo, gerando grande transformações incalculáveis ao bem-estar de toda população.

Contudo resolução de diversos problemas de conceitos fundamentais se demonstra menos complexo com a utilização de softwares. Serão abordadas as leis de coulomb, de Ampère e Biot-Savart, implementando-as a fim de obter tais resultados de forma precisa e rápida.

II. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO DOS EXERCÍCIOS

Para a elucidação dos exercícios propostos esboça-se o conceito físico-matemático pontualmente utilizado em cada caso, seja analítica ou através de implementações numéricas.

A. *Campo elétrico gerado no eixo central de um anel carregado uniformemente (o anel encontra-se centrado na origem e em z = 0).*

Neste caso de um anel carregado apresenta uma distribuição de carga linear, ou seja, ρ_L (C/m) o campo elétrico sofre influência da soma de cada elemento de carga dQ que é definido como:

$$dQ = \rho_L dl \rightarrow Q = \int_L \rho_L dl \tag{1}$$

Pela lei de Coulomb o campo elétrico em relação a uma carga Q em determina ponto é:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\mathrm{a}_R \tag{2}$$

Substituindo a equação (1) na equação (2) integrando:

$$E = \int \frac{\rho_L dl}{4\pi\varepsilon_0 R^2} a_R \tag{3}$$

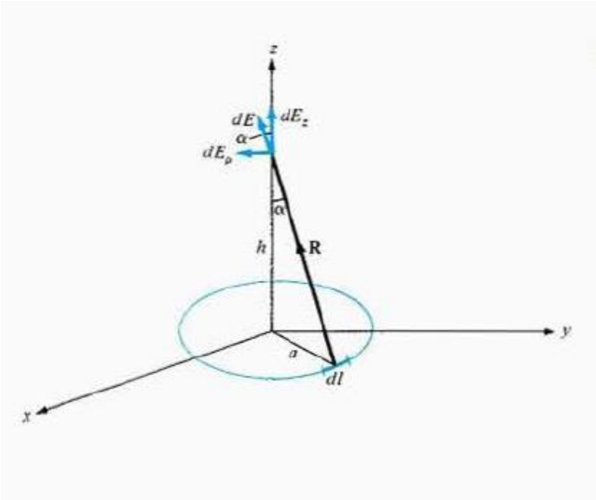

Fig. 1. Sistema de Coordenadas do anel carregado. [1]

Utilizando coordenadas cilíndricas para facilitar os cálculos tem-se que:

$$dl = ad\varphi, \text{ onde } R = a(-\mathrm{a}_\rho) + h\mathrm{a}_z$$

$$R = |\mathbf{R}| = [a^2 + h^2]^{\frac{1}{2}},\ a_R = \frac{\mathbf{R}}{R}$$

$$\frac{a_R}{R^2} = \frac{\mathbf{R}}{|\boldsymbol{R}|^3} = \frac{a(-\mathrm{a}_\rho) + h\mathrm{a}_z}{[a^2 + h^2]^{3/2}} \tag{4}$$

Substituindo a equação (4) na equação (3):

$$E = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} \frac{(-a\mathrm{a}_\rho + h\mathrm{a}_z)}{[a^2 + h^2]^{3/2}} ad\varphi \tag{5}$$

Como há simetria em a_ρ as contribuições ao campo se anulam, portanto, teremos contribuição apenas ao longo de z.

$$E = \frac{\rho_L a h \mathrm{a_z}}{4\pi\varepsilon_0[a^2 + h^2]^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi \tag{6}$$

$$E = \frac{\rho_L a h \mathrm{a_z}}{2\varepsilon_0[a^2 + h^2]^{3/2}} \tag{7}$$

Como o campo é calculado no eixo central do anel tem-se:

$$E(0,0,h) = \frac{\rho_L a h}{2\varepsilon_0[a^2 + h^2]^{3/2}} \mathbf{a}_\mathrm{z} \tag{8}$$

B. *Campo elétrico, em qualquer ponto do espaço, gerado por um anel (o anel encontra-se centrado na origem e em z = 0).*

Definindo o anel de raio r como:

$$(\varphi) = \mathrm{r}\cos(\varphi)\hat{\mathrm{a}}_x + r\,\mathrm{sen}(\varphi)\hat{\mathrm{a}}_y\ \forall\ \{0 \le \varphi \le 2\pi\} \tag{9}$$

$$\mathrm{P} = \mathrm{x}\,\hat{\mathrm{a}}_x + y\hat{\mathrm{a}}_y + z\hat{\mathrm{a}}_z \tag{10}$$

O campo elétrico no ponto P, é definido como:

$$E(x,y,z) = \int \frac{\rho\,\mathrm{dl}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{R} \tag{11}$$

O vetor R é o vetor do anel no ponto P convertendo em coordenadas polar tem-se:

$$\vec{R} = (\mathrm{x} - \mathrm{r}\cos(\varphi))\hat{\mathrm{a}}_x + (y - r\,\mathrm{sen}(\varphi))\hat{\mathrm{a}}_y + z\hat{\mathrm{a}}_z \quad \forall\ \{0 \le \varphi \le 2\pi\} \tag{12}$$

A equação do campo magnético no anel:

$$E = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho \mathrm{r}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}(x - r\cos\varphi)\hat{\mathrm{a}}_x + \frac{\rho \mathrm{r}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}(y - r\,\mathrm{sen}\,\varphi)\hat{\mathrm{a}}_y + \frac{\rho \mathrm{rz}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\hat{\mathrm{a}}_z \right) d\varphi \tag{13}$$

C. *Campo magnético gerado por uma linha filamentar infinitamente longa localizada em x = y = 0.*

Inicia-se definido um sistema de coordenadas cilíndricas com o eixo da linha filamentar coincidindo com o eixo z. Como a distribuição de corrente é simétrica o vetor densidade de corrente se mantem mesmo que haja rotação da linha filamentar portanto não depende da variável azimutal. A translação ao longo do eixo da linha filamentar também não altera a as componentes do campo uma vez que é considerada infinitamente longa. O campo dependera apenas coordenada r do sistema sendo descrito como:

$$\vec{B} = B_r(r)\hat{\mathrm{a}}_\mathrm{r} + B_\varphi(r)\hat{\mathrm{a}}_\varphi + B_z(r)\hat{\mathrm{a}}_\mathrm{z} \tag{14}$$

Aplicando a lei de Gauss para o magnetismo terá que componente radial do vetor $\vec{B}$ é nula $B_r(r) = 0$ e aplicando a lei de ampere a componente axial de $\vec{B}$ é constante como a distribuição é localizada e finita em r = 0, e o campo tende a zero com r → ∞, a componente axial deve ser nula em todo o espaço $B_z(r) = 0$ que seria possível apenas se houvesse uma distribuição com corrente infinita, situação fisicamente impossível.

Pode-se afirmar que:

$$\vec{B} = B_\varphi(r)\hat{\mathrm{a}}_\varphi \tag{15}$$

Usando a lei de Ampère para um caminho por sobre o qual o vetor $\vec{B}$ seja constante.

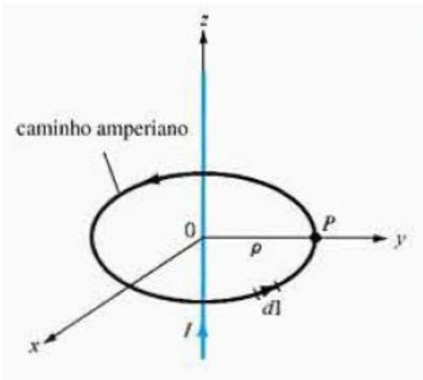

Fig. 2. Caminha amperiano para calculo do campo magnetico. [1]

O caminho é uma circunferência de raio r, envolvendo a distribuição de corrente.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\,\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \overrightarrow{dS} \tag{16}$$

$$d\,\vec{l} = r d\varphi' \hat{\mathrm{a}}_\varphi [0 \le \varphi' \le 2\pi] \tag{17}$$

$$\int_0^{2\pi} B_\varphi(r) r d\varphi' = \mu_0 I \Longrightarrow B_\varphi(r) r \int_0^{2\pi} d\varphi'$$

$$B_\varphi(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\mathrm{a}}_\varphi \tag{18}$$

D. *Campo magnético gerado por uma linha filamentar, representada por um segmento de reta arbitrário.*

O segmento de reta arbitrário será definido como dois pontos (A e B), inseridos pelo usuário. Os pontos A e B serão definidos como:

$$\mathrm{A} = x_a\,\hat{\mathrm{a}}_x + y_a\hat{\mathrm{a}}_y + z_a\hat{\mathrm{a}}_z \tag{19}$$

$$\mathrm{B} = x_b\,\hat{\mathrm{a}}_x + y_b\hat{\mathrm{a}}_y + z_b\hat{\mathrm{a}}_z \tag{20}$$

O ponto P onde será calculado o campo magnético será definido como:

$$P = x_p\,\hat{a}_x + y_p\hat{a}_y + z_p\hat{a}_z \tag{21}$$

Pela lei de Biot-Savart, o campo magnético é definido como:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \cdot d\vec{L}\,X\vec{R} \tag{22}$$

O vetor $d\vec{L}$ representa o caminho por onde será calculado o campo e o vetor R é o vetor definido entre o ponto P e o caminho. Temos que:

$$L(t) = A + t(B - A) \tag{23}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = B - A$$

$$d\vec{L} = (b - A)dt$$

$$R = P - d\vec{L} = P - A - t(B - A)$$

$$d\vec{L}\,X\vec{R} = \begin{matrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ xdl & ydl & zdl \\ xR & yR & zR \end{matrix}$$

$$\begin{aligned}(d\vec{L}\,X\vec{R})\hat{a}_x = {} & y_b z_p - y_b z_a - y_b t(z_{b-} z_a) - y_a z_p + y_a z_a \\ & + y_a t(z_b - z_a) - z_b y_p + z_b y_a \\ & + z_b t(y_{b-} y_a) + z_a y_p - z_a y_a \\ & - z_a t(y_b - y_a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(d\vec{L}\,X\vec{R})\hat{a}_x = {} & y_b\big(z_p - z_a - t(z_b - z_a)\big) \\ & - y_a\big(z_p - t(z_b - z_a)\big) \\ & + z_a\big(y_p - t(y_b - y_a)\big) \\ & - z_b\big(y_p - y_a - t(y_b - y_a)\big)\end{aligned} \tag{24}$$

As componentes $\hat{a}_y$ e $\hat{a}_z$ do campo são similares. Assim, é possível definir o campo magnético como:

$$\begin{aligned}\vec{B} = \int_0^1 \Bigg(& \left(\frac{\mu_0 I}{4\pi R^3}\right)\Big(y_b\left(z_p - z_a - t(z_b - z_a)\right) \\ & - y_a\left(z_p - t(z_b - z_a)\right) \\ & + z_a\left(y_p - t(y_b - y_a)\right) \\ & - z_b\left(y_p - y_a - t(y_b - y_a)\right)\Big)\hat{a}_x \\ & + \left(\frac{\mu_0 I}{4\pi R^3}\right)\Big(z_b\left(x_p - x_a \right. \\ & \left. - t(x_b - x_a)\right) \\ & - z_a\big(x_p - t(x_b - x_a)\big) \\ & + x_a\big(z_p - t(z_b - z_a)\big) \\ & - x_b\big(z_p - z_a - t(z_b - z_a)\big)\Big)\hat{a}_y \\ & + \left(\frac{\mu_0 I}{4\pi R^3}\right)\Big(x_b\left(y_p - y_a \right. \\ & \left. - t((y_b - y_a)\right) \\ & - x_a\big(y_p - t(y_b - y_a)\big) \\ & + y_a\big(x_p - t(x_b - x_a)\big) \\ & - y_b\big(x_p - x_a - t(x_b - x_a)\big)\Big)\hat{a}_z\Bigg)dt\end{aligned} \tag{25}$$

III. RESULTADOS

A partir das resoluções teóricas dos problemas, foi possível elaborar um trabalho computacional, utilizando Julia como linguagem de programação.

Para resolver os problemas "B" e "D", foi necessário um método numérico de solução de integração. Escolhida tendo como base os conhecimentos adquiridos até então no curso explora-se o método "1/3 (Um terço) de Simpson repetida".

O exercício "A" aborda o módulo, direção e sentido do campo elétrico em algum ponto do eixo central de um anel.

Já o exercício "B" propôs encontrar o módulo, direção e sentido de qualquer ponto em relação à um anel. Para a resolução deste, foi escolhido um anel de raio "r" nos planos equação (9).

É possível portanto, simular o exercício "A" ao executar o "B".

Para tanto, escolhe-se um ponto P = 10m $\hat{a}_z$, sobre um anel de raio 5m, com densidade linear de carga -15C/m.

Obtêm o resultado do campo elétrico:

$$E = -3{,}0319565796607277 * 10^{10}\ \mathrm{J}$$

Logo, à 10m do eixo central de um anel de raio 5m e densidade de -15C/m, encontra-se um campo elétrico no eixo central, orientado ao centro do anel.

Ao simular a mesma situação para o exercício "b", obtêm como resultado um vetor de campo elétrico:

$$\begin{aligned}&(1.4780544049939774 * 10^{-6}\mathrm{J})\hat{a}_x \\ &\quad + (4.969526387428701 * 10^{-7}\mathrm{J})\hat{a}_y \\ &\quad + (-3{,}031956579660737 * 10^{10}\mathrm{J})\hat{a}_z\end{aligned}$$

$$\text{Com módulo} = -3{,}031956579660737 * 10^{10}\ \mathrm{J}$$

Observa-se que devido a aproximação computacional não ser perfeita, a simulação aponta um pequeno campo nos eixos x e y. Teoricamente, impossível, pois os pontos opostos do anel geram campos que se anulam no ponto de observação. Nota-se, porém, que o campo é muito menor que o módulo do campo, e que os resultados são muito próximos, tornando a simulação válida.

O exercício "C" trata de um filamento infinito posicionado sobre o eixo "z", sendo percorrido por uma corrente I. Procura-se o módulo do campo magnético a uma distância do filamento.

O exercício "D" procura o módulo, direção e sentido do campo magnético gerado por uma linha percorrida por uma corrente em algum ponto no espaço.

Para exemplificar a eficácia do trabalho, simula-se o exercício "C" para calcular o campo magnético sobre um filamento infinito sendo percorrido por uma corrente de 1.0A a uma distância de 1.0 cm. Obtêm-se:

Módulo do Campo Magnético

$$H = 2.0000000000000012 * 10^{-5}\ \mathrm{T}$$

Para simular um filamento infinito no exercício "D", com ponto inicial (0, 0, 0) ao ponto (100m, 0, 0) sendo percorrido por uma corrente de 1.0A, e calcula-se o campo no ponto

(50m, 0.01m, 0). Tem-se como resultado vetor campo magnético:

$$(0.0\text{T})\hat{a}_x + (0.0\text{T})\hat{a}_y + (1.9999999599996986 * 10^{-5}\text{T})\hat{a}_z$$

$$\text{Com módulo} = (1.9999999599996986 * 10^{-5}\text{T})$$

É possível então, verificar que os resultados são muito próximos.

Utilizando a lei de Biot-Savart para calcular o campo magnético sobre um filamento de comprimento finito, localizado sobre o eixo "z", com x=y=0, a uma distância d do fio, sendo percorrido por uma corrente I:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \cdot d\vec{L}\, X\vec{R}$$

E:

$$d\vec{L}\, X\vec{R} = dx \operatorname{sen}\theta$$

Sendo θ o ângulo entre o ponto de observação e o fio, é possível escrever:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \cdot d\vec{L} \operatorname{sen}\theta$$

Simulando este exemplo, tendo um filamento de comprimento 1.0 cm, sendo percorrido por uma corrente de 2.0 A, definindo o campo magnético à 1.0m do fio:

O ângulo θ pode ser calculado por:

$$\theta = \text{tag}^{-1}\frac{1}{0{,}01} = 89.4°$$

$$B = 1 * 10^{-7}\frac{Tm}{A} \cdot \frac{(2\text{A} \, * \, 0{,}01\text{m} \, * \, \text{sen}(89.4°))}{(1m)^2}$$

$$B = 2{,}0 * 10^{-9}T$$

Simulando o mesmo exemplo, obtêm-se, Vetor Campo Magnético:

$$(0.0\text{T}, 1.999975000468682 * 10^{-9}\text{T}, 0.0\text{T})$$

$$\text{Com módulo} = (1.999975000468682 * 10^{-9}\text{T})$$

É possível portanto, verificar a eficácia do trabalho computacional.

IV. CONCLUSÃO

Devido à complexidade de certos problemas sobre a teoria eletromagnética ferramentas computacionais se demonstra como uma alternativa a soluções mais rápidas preservando resultados com grande grau de aproximação reduzindo o risco de erros quando se é exigido uma solução imediata.

Com a implantação das fórmulas analíticas, obtém-se resultados exatos, e mesmo a implementação numérica, utilizando de um método menos complexo, resulta em desvio apenas na casa de 10^{-6} um valor consideravelmente aceito, mas que deve ser observado de acordo com o problema a ser resolvido.

V. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Buck, J. A. e Hayt, W. H. Jr. Eletromagnetismo. 8ª. Ed. São Paulo: Mc Graw-Hill, 2012.

[2] Sadiku, M. N. O. Elementos de Eletromagnetismo. 3ª. Ed. Porto Alegre: Bookman, 2004.

[3] Tipler, Paul A. e Mosca, Gene, FÍSICA para Cientistas e Engenheiros Volume 2 Eletricidade e Magnetismo, Óptica, Ed. LTC, Rio de Janeiro, 2009.

[4] Halliday, David, Resnick, Robert e Walker, Jearl, Fundamentos de Física Volume 3 Eletromagnetismo, Ed. LTC, Rio de Janeiro, 2007

[5] "A Lei Biot-Savart" da OpenStax , LibreTexts é licenciado sob notset . https://phys.libretexts.org/Bookshelves/University_Physics/Book%3A_University_Physics_(OpenStax)/Book%3A_University_Physics_II_-_Thermodynamics_Electricity_and_Magnetism_(OpenStax)/12%3A_Sources_of_Magnetic_Fields/12.02%3A_The_Biot-Savart_Law

[6] Ruggiero, Márcia A. G. Ruggiero; Lopes, Vera L. R. Lopes. Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais. 2ª Edição. Makrom Books, Pearson, São Paulo.

[7] J. Clerk Maxwell, A Treatise on Electricity and Magnetism, 3rd ed., vol. 2. Oxford: Clarendon, 1892.