UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI - UFSJ
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA - DEPEL
COORDENAÇÃO DE ENGENHARIA ELÉTRICA - COELE

Lucas Xavier de Morais - 19095011

ESTUDO DE CASO 03

Professor: Dr. Fernando Aparecido de Assis

São João del-Rei - MG
Agosto de 2024

SUMÁRIO

1 EXERCÍCIO 1

1. Determine a solução ótima dos seguintes problemas de otimização:

1.1 a

$$Minf(x_A,x_B) = -x_A - x_B$$

$$s.a. : 2x_A + 4x_B \leq 20$$

$$180x_A + 20x_B \leq 600$$

$$x_A,x_B \geq 0$$

Este primeiro exercício foi resolvido geometricamente. Para isso, foi usada a ferramenta online GeoGebra.

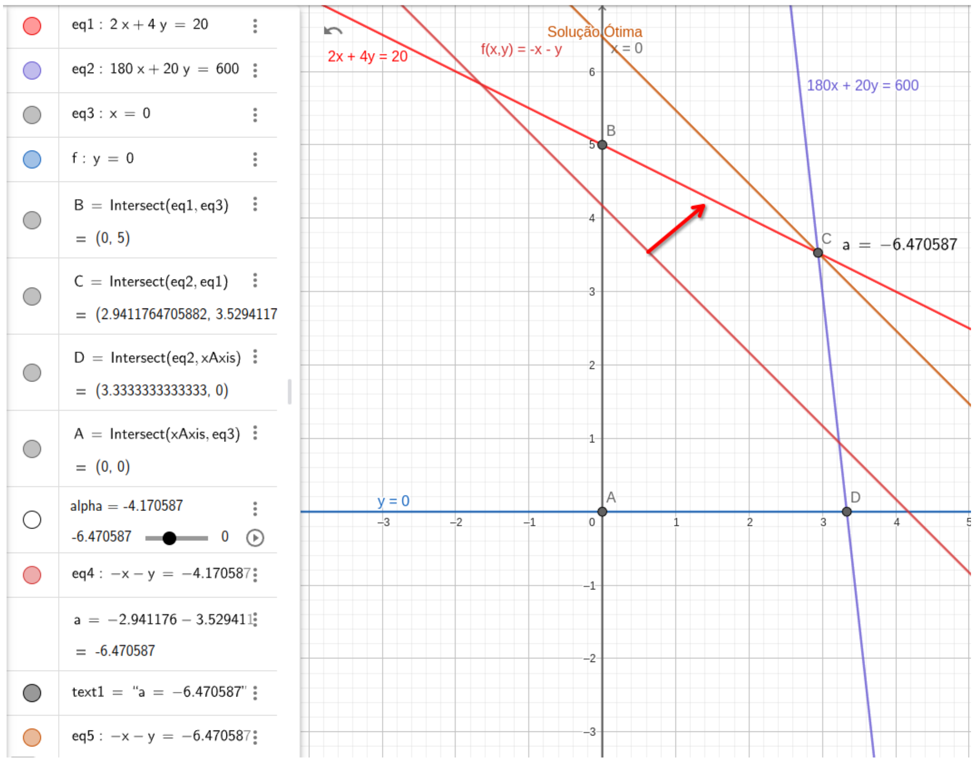

Figura 1 – Solução GeoGebra

A partir da ferramenta, foi encontrado todos os pontos de interseção entre as restrições do problema. Os pontos encontrados são:

$$A = (0,0)$$

$$B = (0,5)$$

$$C = (2,941176,3,352941)$$

$$D = (5,0)$$

A função objetivo é $f(x_A,x_B) = -x_A - x_B$. Logo, seu valor diminui na direção indicada pela seta vermelha na Figura 1.

Assim, o valor ótimo desta função pode ser encontrado em um dos vértices do polígono formado na região factível.

Neste caso, o vértice em questão é o ponto

$$C = (2,941176,3,352941)$$

.

Assim, os valores de x_A e x_B que satisfazem às restrições e ao mesmo tempo minimiza a função objetivo é:

$$x_A = 2,941176$$

$$x_B = 3,352941$$

resultando em:

$$f = -6,470587$$

1.2 b

$$Maxf(x_1,x_2) = 4x_1 + 3x_2$$

$$s.a. : x_1 + x_2 = 3,5$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 7$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_2 \leq 5$$

$$x_1,x_2 \geq 0$$

Para este e os próximos será usada a função *linprog* da biblioteca scipy, em python, capaz de solucionar problemas de *Programação Linear*.

Para isso, foi escrita a seguinte rotina:

```
print('B)')
# Como o objetivo Max, devo colocar negativo
objetivo = [-4, -3]
inequacoes = [
        [1, 3],
        [2, 2],
        ]
```

```python
    inequacoes_limites = [7, 8]
    igualdades = [[1, 1]]
    igualdades_limites = [3.5]
    x1_limites = (0, 2)
    x2_limites = (0, 5)

    resultado = linprog(objetivo,
                        A_ub=inequacoes,
                        b_ub=inequacoes_limites,
                        A_eq=igualdades,
                        b_eq=igualdades_limites,
                        bounds=[
                            x1_limites,
                            x2_limites
                            ])

    print("Valor otimo:", -resultado.fun)
    print(f'Solucao: x1 = {resultado.x[0]} e x2 = {resultado.x[1]} ')
    print("Sucesso:", resultado.success)
    print("Mensagem:", resultado.message)
```

Listing 1.1 – Código exercício b

Assim, foi possível obter o resultado de:

$$x_1 = 2{,}0$$

$$x_2 = 1{,}5$$

resultando em:

$$f = 12{,}5$$

1.3 c

$$Minf(x_1,x_2) = 4x_1^2 + 5x_2^2$$

$$s.a. : 2x_1 + 4x_2 = 7$$

$$2x_1 + x_2 \leq 2{,}5$$

Neste exercício, foi usada a mesma biblioteca, porém como é um problema quadrático, usa-se a função *minimize* do scipy.

Assim, o código escrito utilizado para solucionar esta é:

```
print('C)')
# Fun  o objetivo, definindo o Q
def objetivo(x):
    Q = np.array([[8, 0],
                  [0, 10]])
    return 0.5 * np.dot(x.T, np.dot(Q, x))

# >=
def inequacoes1(x):
    # 2x1 + x2 <= 2,55
    return 2.55 - (2*x[0] + 1*x[1])  # Note: The constraint is written as g(x) >= 0

# =
def igualdades1(x):
    # 2x1 + 4x2 = 7
    return 2*x[0] - 4*x[1] - 7  # Note: The constraint is written as h(x) = 0

# Valores de x
x0 = np.array([0.0, 0.0])

# definindo as restri  es em uma lista de dicion rios
restricoes = [{'type': 'ineq', 'fun': inequacoes1},
              {'type': 'eq', 'fun': igualdades1}]

# chamando a fun  o
resultado = minimize(objetivo, x0, method='SLSQP', constraints=restricoes)

print("Valor otimo:", resultado.fun)
print(f'Solucao: x1 = {resultado.x[0]} e x2 = {resultado.x[1]} ')
print("Sucesso:", resultado.success)
print("Mensagem:", resultado.message)
```

Listing 1.2 – Código exercício c

Por fim, foi possível obter o resultado de:

$$x_1 = 0{,}8333$$

$$x_2 = -1{,}3333$$

resultando em:

$$f = 11{,}6667$$

2 EXERCÍCIO 2

2. Considere que estão à disposição para alimentação animal dois tipos de produto: X e Y. Sabe-se que 1 kg de X custa R$1,20 e fornece 300 calorias e 28 unidades de gordura. Sabe-se também que 1 kg de Y custa R$1,15 e fornece 200 calorias e 10 unidades de gordura. Pretende-se gastar o mínimo valor possível em um dia para alimentar um animal sabendo que a sua necessidade diária é de pelo menos 350 calorias e não mais que 32 unidades de gordura. Determine:

2.1 a

a) as variáveis de decisão para o problema de otimização.

Neste problema, as variáveis de decisão são os dois tipos de alimentos X e Y que a pessoa pode comprar.

2.2 b

b) o modelo de Programação Linear resultante.

O objetivo desta função é ter o menor custo para alimentar um animal, considerando as constrições de calorias e gorduras diárias do animal.

O custo da alimentação do animal pode ser escrito como:

$$Custo(x{,}y) = 1{,}2x + 1{,}15y$$

Os limites de alimentação do animal são dois, um limite mínimo de calorias, e um limite máximo de gordura.

O limite mínimo de caloria pode ser escrito:

$$300x + 200y \geq 350$$

E o limite máximo:

$$28x + 10y \leq 32$$

Portanto, pode ser definido o modelo:

$$Min f(x{,}y) = 1{,}2x + 1{,}15y$$

$$s.a. : 300x + 200y \geq 350$$

$$28 + 10y \leq 32$$

$$x{,}y \geq 0$$

2.3 c

c) a solução ótima para o problema?

Para a solução ótima do problema foi escrita uma rotina em python similar à implementada em 1.1.

```
objetivo = [1.2, 1.15]
inequacoes = [
        [-300, -200],
        [28, 10]
        ]
inequacoes_limites = [-350, 32]
x_limites = (0, None)
y_limites = (0, None)

resultado = linprog(objetivo,
                    A_ub=inequacoes,
                    b_ub=inequacoes_limites,
                    bounds=[
                        x_limites,
                        y_limites
                        ])

print("Valor otimo:", resultado.fun)
print(f'Solucao: x = {resultado.x[0]} e y = {resultado.x[1]} ')
print("Sucesso:", resultado.success)
print("Mensagem:", resultado.message)
```

Listing 2.1 – Código exercício b

Note que agora, como uma das desigualdades é uma inequação de $\geq$, esta foi multiplicada por -1 para a correta interpretação do problema pelo scipy.

As soluções do problema são:

$$x = 1{,}11538461kg = 1115{,}38g$$

$$y = 0{,}07692307kg = 76{,}92g$$

2.4 d

d) o custo total da dieta, em R$, para a solução ótima do problema.

A solução ótima é:

$$Custo = 1.43$$

3 EXERCÍCIO 3

3. Uma empresa do ramo de café produz misturas que são vendidas no mercado utilizando grãos provenientes de três diferentes estados do Brasil: Minas Gerais, São Paulo e Bahia. Considere que os grãos de cada região possuem aroma e intensidade diferentes, sendo estas características classificadas em porcentagem. Considere ainda que esta empresa produz misturas com aromas e intensidade de, pelo menos, 62% e 14%, respectivamente. Sabendo que os grãos de cada estado apresentam as características apresentadas na Tabela 1, que também indica o custo e as quantidades disponíveis de cada grão no estoque a ser utilizado, busca-se otimizar a composição ótima da mistura, considerando maximizar o lucro da empresa, para produzir 4000 kg.

Considerando este problema, pede-se:

3.1 a

a) defina as variáveis de decisão para o problema de otimização.

Neste problema, as variáveis de decisão são os três tipos de café que a empresa vai utilizar na mistura, e a quantidade de cada um.

3.2 b

b) formule um modelo de Programação Linear resultante.

O objetivo desta função é ter o maior lucro ao produzir a mistura de café ideal, que atenda aos requisitos mínimos de aroma e intensidade. Na Tabela apresentada no PDF da solução, está apresentado o custo de produção de cada café. Portanto podemos minimizar o custo a fim de maximizar o lucro.

Durante a solução deste exercício, serão chamados os cafés de Minas Gerais, São Paulo e Bahia de MG, SP e BA respectivamente.

O custo deste café pode ser escrito como:

$$Custo(mg, sp, ba) = 6{,}0 * mg + 3{,}5 * sp + 5{,}0 * ba$$

Os requisitos de aroma e intensidade podem ser escritos:

Primeiro em %:

$$0{,}55 * mg + 0{,}60 * sp + 0{,}75 * ba \geq 0{,}62 * 4000$$

$$0{,}15 * mg + 0{,}40 * sp + 0{,}18 * ba \geq 0{,}14 * 4000$$

Portanto:

$$0{,}55 * mg + 0{,}60 * sp + 0{,}75 * ba \geq 2480$$

$$0{,}15 * mg + 0{,}40 * sp + 0{,}18 * ba \geq 560$$

Além disso, devemos respeitar a quantidade de café em estoque e a quantidade total que será produzida:

$$mg + sp + ba = 4000$$

$$mg \leq 1500$$

$$sp \leq 1600$$

$$ba \leq 1800$$

Portanto, pode ser definido o modelo:

$$Minf(mg, sp, ba) = 6{,}0 * mg + 3{,}5 * sp + 5{,}0 * ba$$

$$s.a. : mg + sp + ba = 4000$$

$$0{,}55 * mg + 0{,}60 * sp + 0{,}75 * ba \geq 2480$$

$$0{,}15 * mg + 0{,}40 * sp + 0{,}18 * ba \geq 560$$

$$mg \leq 1500$$

$$sp \leq 1600$$

$$ba \leq 1800$$

3.3 c

c) determine a solução ótima para o problema?

Para a solução ótima do problema foi escrita uma rotina em python similar à implementada em 1.1.

```
        objetivo = [6, 3.5, 5]
    inequacoes = [
            [-0.55, -0.6, -0.75],
            [-0.15, -0.4, -0.18],
            ]
    inequacoes_limites = [-2480, -560]
    mg_limites = (0, 1500)
    sp_limites = (0, 1600)
    ba_limites = (0, 1800)
    igualdades = [
            [1, 1, 1]
            ]
    igualdades_limites = [4000]

    resultado = linprog(objetivo,
```

```python
                              A_ub=inequacoes,
                              b_ub=inequacoes_limites,
                              A_eq=igualdades,
                              b_eq=igualdades_limites,
                              bounds=[
                                   mg_limites,
                                   sp_limites,
                                   ba_limites
                                   ])

    print(f'Valor otimo R${resultado.fun} ')
    print(f'Solucao: mg = {resultado.x[0]} g | sp = {resultado.x[1]} g | ba = {resultado.x[2]} g ')
    print("Sucesso:", resultado.success)
    print("Mensagem:", resultado.message)
```

Listing 3.1 – Código exercício b

A solução do problema portanto é:

Valor ótimo R$18200.0

Solução: mg = 600.0 g | sp = 1600.0 g | ba = 1800.0 g

3.4 d

d) qual o nível de aroma e de intensidade da mistura obtida?

Assim, o nível de aroma e intensidade obtido é:

Aroma:

$$(600 * 0{,}55 + 1600 * 0{,}60 + 1800 * 0{,}75) * 100/(4000) = 66\%$$

Intensidade:

$$(600 * 0{,}15 + 1600 * 0{,}40 + 1800 * 0{,}18) * 100/(4000) = 26{,}35\%$$

3.5 e

e) após a produção, sobraram grãos de algum estado no estoque?

Sobraram apenas grãos de Minas Gerais. Destes, sobraram 900g. Os outros grãos foram usados todo o estoque para essa mistura.

4 EXERCÍCIO 4

4.Considere que um produtor independente possui quatro unidades geradoras (UG1, UG2, UG3 e UG4) localizadas em uma determinada barra de um sistema elétrico. Para

UGs, são conhecidas as capacidades mínima e máxima de produção, em MW, e os custos de produção, em $/MW, conforme Tabela 2.

Deseja-se definir neste sistema, ao menor custo de produção possível, o despacho dessas quatro UGs para o atendimento da carga em duas semanas diferentes. Sabe-se que as cargas a serem atendidas em cada semana são, respectivamente, iguais a 850 MW e 750 MW. Além disso, por questões de segurança operativa, uma reserva mínima de geração igual a 20% da carga deve ser despachada em cada semana (considere o custo da reserva igual ao custo de produção). Determine:

4.1 a

a) as variáveis de decisão para o problema de otimização.

Neste problema, as variáveis de decisão são os despachos de cada gerador para cada semana.

4.2 b

b) o modelo de Programação Linear resultante.

O objetivo deste problema é minimizar o custo de geração em cada semana para atender uma demanda especificada. Assim, são definidos dois problemas, um para cada semana.

$$Custo(g1, g2, g3, g4) = 50 * g1 + 60 * g2 + 30 * g3 + 45 * g4$$

Os limites de cada gerador:

$$140 \leq g1 \leq 300$$

$$200 \leq g2 \leq 450$$

$$250 \leq g3 \leq 600$$

$$60 \leq g4 \leq 250$$

4.2.1 Semana 1

Na semana 1 deve ser atendida uma demanda de 850 MW e uma reserva extra de 20%, portanto na primeira semana deve ser gerado um total de 1020 MW.

$$g1 + g2 + g3 + g4 = 1020$$

Portanto, pode ser definido o modelo:

$$Minf(g1,g2,g3,g4) = 50 * g1 + 60 * g2 + 30 * g3 + 45 * g4$$

$$s.a. : g1 + g2 + g3 + g4 = 1020$$

$$140 \leq g1 \leq 300$$

$$200 \leq g2 \leq 450$$
$$250 \leq g3 \leq 600$$
$$60 \leq g4 \leq 250$$

4.2.2 Semana 2

Na semana 2 deve ser atendida uma demanda de 750 MW e uma reserva extra de 20%, portanto na primeira semana deve ser gerado um total de 900 MW.

$$g1 + g2 + g3 + g4 = 900$$

Portanto, pode ser definido o modelo:

$$Minf(g1,g2,g3,g4) = 50 * g1 + 60 * g2 + 30 * g3 + 45 * g4$$
$$s.a. : g1 + g2 + g3 + g4 = 900$$
$$140 \leq g1 \leq 300$$
$$200 \leq g2 \leq 450$$
$$250 \leq g3 \leq 600$$
$$60 \leq g4 \leq 250$$

Para a solução ótima de ambos os problemas foi escrita a rotina em python:

```
def semana1():
    print('SEMANA 1')
    objetivo = [50, 60, 30, 45]
    g1_limites = (140, 300)
    g2_limites = (200, 450)
    g3_limites = (250, 600)
    g4_limites = (60, 250)
    igualdades = [
            [1, 1, 1, 1]
            ]
    igualdades_limites = [1020]

    resultado = linprog(objetivo,
                        A_eq=igualdades,
                        b_eq=igualdades_limites,
                        bounds=[
                            g1_limites,
                            g2_limites,
```

```
                            g3_limites,
                            g4_limites
                            ])

    print(f'Despacho: G1 = {resultado.x[0]} MW | G2 = {resultado.x[1]} MW | G3 = {resultado.x[2]} MW | G4 = {resultado.x[3]} MW')
    print(f'Geracao: {resultado.x[0] + resultado.x[1]  + resultado.x[2] + resultado.x[3]} MW')
    print(f'Valor otimo R${resultado.fun} ')
    print("Sucesso:", resultado.success)
    print("Mensagem:", resultado.message)

def semana2():
    print('SEMANA 2')
    objetivo = [50, 60, 30, 45]
    g1_limites = (140, 300)
    g2_limites = (200, 450)
    g3_limites = (250, 600)
    g4_limites = (60, 250)
    igualdades = [
            [1, 1, 1, 1]
            ]
    igualdades_limites = [900]

    resultado = linprog(objetivo,
                        A_eq=igualdades,
                        b_eq=igualdades_limites,
                        bounds=[
                            g1_limites,
                            g2_limites,
                            g3_limites,
                            g4_limites
                            ])

    print(f'Despacho: G1 = {resultado.x[0]} MW | G2 = {resultado.x[1]} MW | G3 = {resultado.x[2]} MW | G4 = {resultado.x[3]} MW')
    print(f'Geracao: {resultado.x[0] + resultado.x[1]  + resultado.x[2] + resultado.x[3]} MW')
    print(f'Valor otimo R${resultado.fun} ')
```

```python
    print("Sucesso:", resultado.success)
    print("Mensagem:", resultado.message)

semana1()
semana2()
```

Listing 4.1 – Código exercício b

4.3 c) e d)

c) a solução ótima para o problema?

d) o custo total de produção, em $, para o atendimento da carga em cada semana.

4.3.1 Semana 1

A solução do problema portanto é:
Despacho: G1 = 140,0 MW | G2 = 200,0 MW | G3 = 600,0 MW | G4 = 80,0 MW
Geração: 1020,0 MW
Custo ótimo R$40600,00

4.3.2 Semana 2

Despacho: G1 = 140,0 MW | G2 = 200,0 MW | G3 = 500,0 MW | G4 = 60,0 MW
Geração: 900,0 MW
Custo ótimo R$36700,00