燎原高数
高等数学辅导领导品牌

高等代数

总习题答案

(PDF)

北大四版

新版教材修订如下：

1. 第一至十章，正文部分没有变动；
2. 书末增加一套总习题。

使用四版教材的同学可将PDF文件与现有第三版辅导书联合使用。

总习题解答

高等代数（北大四版）

1. 解线性方程组：

$$1)\begin{cases} x_1+x_2 & =0, \\ \quad x_2+x_3 & =0, \\ \quad\quad \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \quad\quad x_{n-1}+x_n & =0, \\ x_1 \quad\quad +x_n & =0; \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} x_1+x_2 & =c, \\ \quad x_2+x_3 & =c, \\ \quad\quad \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \quad\quad x_{n-1}+x_n & =c, \\ x_1 \quad\quad +x_n & =c(c\neq 0); \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} x_1+x_2 & =c_1, \\ \quad x_2+x_3 & =c_2, \\ \quad\quad \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \quad\quad x_{n-1}+x_n & =c_{n-1}, \\ x_1 \quad\quad +x_n & =c_n(c_1,c_2,\cdots,c_n \text{ 不全相等}). \end{cases}$$

解：1）方程组的系数行列式

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}=1+(-1)^{n+1}.$$

所以当 n 为奇数时，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，此线性方程组只有零解. 当 n 为偶数时，系数矩阵的秩为 $n-1$. 所以基础解系由一个解

$$\boldsymbol{\eta}=(1,-1,1,-1,\cdots,1,-1)$$

组成. 全部解为

$$\{k\boldsymbol{\eta} \mid k \text{ 为任意数}\}.$$

2）由 1)，知系数矩阵的秩为

$$\text{秩}(\boldsymbol{A})=\begin{cases} n, & \text{当 } n \text{ 为奇数}, \\ n-1, & \text{当 } n \text{ 为偶数}. \end{cases}$$

因此当 n 为奇数时，此方程组有唯一解，即

$$\boldsymbol{\xi}=\left(\frac{c}{2},\frac{c}{2},\cdots,\frac{c}{2}\right).$$

当 n 为偶数时，此方程组有无穷多解，其导出组的基础解系由一个解 $\boldsymbol{\eta}$(见 1))组成，此方程组的解集合为

$$\{\boldsymbol{\xi}+k\boldsymbol{\eta}\mid k\text{ 为任意数}\},\boldsymbol{\xi}=\left(\frac{c}{2},\frac{c}{2},\cdots,\frac{c}{2}\right).$$

3) 与 1) 一样，当 n 为奇数时，方程组有唯一解，解为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}=\Big(&\frac{1}{2}c_1-\frac{1}{2}c_2+\frac{1}{2}c_3-\cdots-\frac{1}{2}c_{n-1}+\frac{1}{2}c_n,\\&\frac{1}{2}c_1+\frac{1}{2}c_2-\frac{1}{2}c_3+\frac{1}{2}c_4-\cdots+\frac{1}{2}c_{n-1}-\frac{1}{2}c_n,\\&-\frac{1}{2}c_1+\frac{1}{2}c_2+\frac{1}{2}c_3-\frac{1}{2}c_4+\frac{1}{2}c_5-\cdots-\frac{1}{2}c_{n-1}+\frac{1}{2}c_n,\\&\frac{1}{2}c_1-\frac{1}{2}c_2+\frac{1}{2}c_3+\frac{1}{2}c_4-\frac{1}{2}c_5+\cdots+\frac{1}{2}c_{n-1}-\frac{1}{2}c_n,\cdots,\\&-\frac{1}{2}c_1+\frac{1}{2}c_2-\frac{1}{2}c_3+\frac{1}{2}c_4-\cdots-\frac{1}{2}c_{n-2}+\frac{1}{2}c_{n-1}+\frac{1}{2}c_n\Big).\end{aligned}$$

当 n 为偶数时，此方程组有解的充分必要条件是

$$c_1-c_2+c_3-c_4+\cdots+c_{n-1}-c_n=0.$$

有解时，其导出组的基础解系由一个解 $\boldsymbol{\eta}$(见 1)) 组成. 解集合是

$$\{\boldsymbol{\xi}+k\boldsymbol{\eta}\mid k\text{ 为任意数}\},$$

其中

$$\boldsymbol{\xi}=(0,c_1,c_2-c_1,c_3-c_2+c_1,\cdots,c_{n-2}-c_{n-3}+\cdots+c_2-c_1,c_{n-1}-c_{n-2}+c_{n-3}+\cdots-c_2+c_1).$$

2. 解线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_n=1,\\ \quad x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}=2,\\ \quad\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \quad\quad\quad x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{2n}=n+1.\end{cases}$$

解：一般解为

$$\begin{cases}x_1=n+x_{n+2}+\cdots+x_{2n},\\x_2=-1-x_{n+2},\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\x_n=-1-x_{2n},\\x_{n+1}=n+1-x_{n+2}-\cdots-x_{2n},\end{cases}$$

其中 $x_{n+2},x_{n+3},\cdots,x_{2n}$ 为自由未知量.

3. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个两两不同的数.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1^{s-1} & a_2^{s-1} & \cdots & a_n^{s-1}\end{pmatrix}_{s\times n}\qquad (s\leqslant n).$$

再设 $\boldsymbol{\alpha}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)'$ 是齐次线性方程组

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$$

的一个非零解,求证 $\boldsymbol{\alpha}$ 至少有 $s+1$ 个非零分量.

证明: 记 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量依次为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$. 因为 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解,故有

$$c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}.$$

如果在 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 中不为 0 的是 $c_{i_1},c_{i_2},\cdots,c_{i_t}$,其余的全为 0,则有

$$c_{i_1}\boldsymbol{\alpha}_{i_1}+c_{i_2}\boldsymbol{\alpha}_{i_2}+\cdots+c_{i_t}\boldsymbol{\alpha}_{i_t}=\boldsymbol{0},$$

其中系数全不为 0. 因此 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_t}$ 线性相关.

$\boldsymbol{A}$ 的任意多于 s 个的列向量线性相关,而少于或等于 s 个的列向量线性无关. 因此 $t\geqslant s+1$. 即 $\boldsymbol{\alpha}$ 至少有 $s+1$ 个非零分量.

4. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是同型实数矩阵,其中 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵. 如果 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}$ 正定,证明:$\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵.

证明: 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值,λ 必为实数. 取属于 λ 的任一实特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$,有 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$.

又由 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}$ 正定,得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}'(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}&=\boldsymbol{\alpha}'(\lambda\boldsymbol{B}+\lambda\boldsymbol{B}')\boldsymbol{\alpha}\\&=\lambda\boldsymbol{\alpha}'(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}')\boldsymbol{\alpha}>0,\end{aligned}$$

所以 $\lambda\neq 0$. 由于 $|\boldsymbol{A}|$ 等于 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值的乘积,故 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$,即 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

5. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & & & & & & & \\ & 2 & & 2 & & & & \\ & & 3 & & 3 & & & \\ & & & \ddots & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & & \ddots & \\ & & & & & n-1 & & n-1\\ & & & & & & & n\end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形 $\boldsymbol{J}$,并求可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使 $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{J}$.

解:

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & n\end{pmatrix},$$

$$
\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 \\
 & & 1 & 3 & \cdots & \frac{1}{2}(n-2)(n-3) & \frac{1}{2}(n-1)(n-2) \\
 & & & \ddots & & \vdots & \vdots \\
 & & & & & 1 & n-1 \\
 & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}.
$$

6. 证明:设 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 为 n 维线性空间 V 中线性相关的向量组,但其中任意 $m-1$ 个向量皆线性无关. 设有 m 个数 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 使 $\sum\limits_{j=1}^{m} b_j\boldsymbol{\beta}_j=\mathbf{0}$. 则或者 $b_1=\cdots=b_m=0$,或者 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 皆不为零. 在后者的情形,若有另一组数 $c_1,c_2,\cdots,c_m$ 使 $\sum\limits_{j=1}^{m} c_j\boldsymbol{\beta}_j=\mathbf{0}$,则 $c_1:b_1=c_2:b_2=\cdots=c_m:b_m$.

证明: 对 $\sum\limits_{j=1}^{m} b_j\boldsymbol{\beta}_j=\mathbf{0}$,若有某 $b_j\neq 0$,不妨 $b_1\neq 0$,则

$$\boldsymbol{\beta}_1=\sum_{j=2}^{m}\left(-\frac{b_j}{b_1}\right)\boldsymbol{\beta}_j.$$

由于 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 中任意 $m-1$ 个向量线性无关,$\boldsymbol{\beta}_1$ 不能被 $\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 中任意 $m-2$ 个向量线性表出,故 $b_2,b_3,\cdots,b_m$ 皆不为零. 于是 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 全不为零.

若又有 $\sum\limits_{j=1}^{m} c_j\boldsymbol{\beta}_j=\mathbf{0}$. 因 $b_1\neq 0$,设 $c_1=kb_1$,则

$$\sum_{j=1}^{m} c_j\boldsymbol{\beta}_j-k\sum_{j=1}^{m} b_j\boldsymbol{\beta}_j=\sum_{j=1}^{m}(c_j-kb_j)\boldsymbol{\beta}_j=\mathbf{0}.$$

由 $c_1-kb_1=0$,前一段的论证得所有 j,有 $c_j-b_jk=0$,$j=1,2,\cdots,m$. 即

$$c_1:b_1=c_2:b_2=\cdots=c_m:b_m.$$

7. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是欧氏空间 V 中的一个非零向量. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p$ 是 V 中 p 个向量,满足

$$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)\leqslant 0,\text{且}(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha})>0,i,j=1,2,\cdots,p;i\neq j.$$

证明：1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p$ 线性无关；

2) n 维欧氏空间中最多有 $n+1$ 个向量，使其两两夹角都大于$\frac{\pi}{2}$.

证明：1) 反证法. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p$ 线性相关. 不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_p$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{p-1}$ 的线性组合，即有实数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{p-1}$ 使 $\boldsymbol{\alpha}_p=\sum_{i=1}^{p-1}\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i$. 将这关系写成

$$\boldsymbol{\alpha}_p=\sum{}'\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i+\sum{}''\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i,$$

将其中 $\lambda_i>0$ 的项归入 $\sum{}'$ 中，将 $\lambda_i\leqslant 0$ 的项归入 $\sum{}''$ 中，且令

$$\boldsymbol{\beta}=\sum{}'\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i,\quad \boldsymbol{\gamma}=\sum{}''\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i.$$

于是 $\boldsymbol{\alpha}_p=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}$. 因$(\boldsymbol{\alpha}_p,\boldsymbol{\alpha})>0$ 及$(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha})=\sum{}''\lambda_i(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha})\leqslant 0$，故 $\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$. 但

$$(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=\Big(\sum_i{}'\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i,\sum_j{}''\lambda_j\boldsymbol{\alpha}_j\Big)=\sum_i{}'\sum_j{}''\lambda_i\lambda_j(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)\geqslant 0.$$

因此

$$(\boldsymbol{\alpha}_p,\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})>0.$$

另一方面，

$$(\boldsymbol{\alpha}_p,\boldsymbol{\beta})=\sum{}'\lambda_i(\boldsymbol{\alpha}_p,\boldsymbol{\alpha}_i)\leqslant 0.$$

这个矛盾证明了结论.

2) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\in V$，它们两两成钝角，于是有

$$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)<0,\quad i,j=1,2,\cdots,m;i\neq j.$$

取 $\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}_m$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 符合第1)小题的假设条件，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性无关. 又 V 是 n 维的，有 $m-1\leqslant n$. 于是 $m\leqslant n+1$.

8. 证明：(替换定理) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，且可经向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出，则 $r\leqslant s$. 且在 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 中存在 r 个向量，不妨设就是 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$，在用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 替代它们后所得向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 等价.

证明：我们对 r 作数学归纳法. $r=1$ 时，$\{\boldsymbol{\alpha}_1\}$ 线性无关. 这时 $r=1\leqslant s$. $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出，设为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=b_1\boldsymbol{\beta}_1+b_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+b_s\boldsymbol{\beta}_s.$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\mathbf{0}$，至少一个 $b_j\neq 0$. 不妨设为 $b_1\neq 0$，则

$$\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{b_1}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{b_2}{b_1}\boldsymbol{\beta}_2-\cdots-\frac{b_s}{b_1}\boldsymbol{\beta}_s.$$

由此易知$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$ 与$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$ 等价.

现设 $r>1$，且定理对 $r-1$ 的情形已成立. 我们来讨论 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 为 r 个线性无关向量的情形. 这时 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1}$ 也线性无关，且能由 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出. 由归纳假设 $r-1\leqslant s$，且存在 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 中 $r-1$ 个向量，不妨设为 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r-1}$，在用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1}$ 替代后，所得的向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1},\boldsymbol{\beta}_r,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$ 与$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$ 等价. 又 $\boldsymbol{\alpha}_s$ 能由$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$ 线性表出，就能由$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1},\boldsymbol{\beta}_r,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$ 线性表出. 设

$$\boldsymbol{\alpha}_r = \sum_{i=1}^{r-1} a_i \boldsymbol{\alpha}_i + \sum_{j=r}^{s} b_j \boldsymbol{\beta}_j.$$

这时若所有 $b_j = 0$，则 $\boldsymbol{\alpha}_r = \sum_{i=1}^{r-1} a_i \boldsymbol{\alpha}_i$，与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{r-1}, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关矛盾. 故 b_r，$b_{r+1}, \cdots, b_s$ 不全为零. 不妨设 $b_r \neq 0$，则 $r \leqslant s$ 且

$$\boldsymbol{\beta}_r = \frac{1}{b_r}\boldsymbol{\alpha}_r - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{a_i}{b_r}\boldsymbol{\alpha}_i - \sum_{j=r+1}^{s} \frac{b_j}{b_r}\boldsymbol{\beta}_j.$$

由此易知$\{\boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{r-1}, \boldsymbol{\beta}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s\}$ 与$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{r-1}, \boldsymbol{\beta}_r, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s\}$ 等价，也就与$\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s\}$ 等价.

9. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个互不相同的整数. 证明：

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)^2 + 1$$

在 $\mathbf{Q}[x]$ 中不可约.

证明：$f(x) \in \mathbf{Z}[x]$，它在 $\mathbf{Q}[x]$ 中不可约等价于它在 $\mathbf{Z}[x]$ 中不能分解为两个较低次数的多项式的乘积. 用反证法. 设 $f(x) = g(x)h(x)$，$g(x), h(x) \in \mathbf{Z}[x]$，$0 < \partial(g(x)) < \partial(f(x))$.

此时 $g(a_i)h(a_i) = 1$，$i = 1, \cdots, n$，又 $g(a_i)$ 及 $h(a_i)$ 皆为整数，故 $g(a_i)$ 与 $h(a_i)$ 同为 1 或 -1. 显然 $f(x)$ 没有实根，故 $g(x)$，$h(x)$ 也没有实根. 由数学分析知道函数 $g(x)$ 与 $h(x)$ 在区间 $-\infty < x < \infty$ 内不变号，于是对一切 i，$g(a_i)$ 与 $h(a_i)$ 都等于 1 或都等于 -1.

若 $g(a_i) = h(a_i) = 1$，$i = 1, 2, \cdots, n$，则 $g(x) - 1$ 与 $h(x) - 1$ 都有 n 个不同的根 $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 因而它们的次数都 $\geqslant n$. 但 $\partial(g(x)) + \partial(h(x)) = \partial(f(x)) = 2n$. 故 $\partial(g(x)) = \partial(h(x)) = n$. 又 $f(x)$ 的首项系数为 1，$g(x)$ 与 $h(x)$ 皆为整系数及 $f(x) = g(x)h(x)$，故 $g(x)$ 与 $h(x)$ 的首项系数同为 1 或 -1. 于是

$$g(x) = h(x) = \pm (x - a_1)\cdots(x - a_n) + 1,$$

因而有

$$f(x) = g(x)h(x) = [\pm (x - a_1)\cdots(x - a_n) + 1]^2 \neq \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)^2 + 1,$$

得到矛盾.

若 $g(a_i) = h(a_i) = -1$，$i = 1, 2, \cdots, n$，同样能导出矛盾.

故 $f(x)$ 不能有所设的分解，因此在 $\mathbf{Q}[x]$ 中不可约.

10. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 是 $n \times n$ 方阵，$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E}_n + \boldsymbol{BCA}$. 试证如果 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{AB}) = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{E}$，则$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{BA})\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{BA}) = \boldsymbol{E}$，并计算 $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{ADB}$.

证明：

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{BA})\boldsymbol{D} &= (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{BA})(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{BCA}) \\
&= \boldsymbol{E} - \boldsymbol{BA} + \boldsymbol{BCA} - \boldsymbol{BABCA} \\
&= \boldsymbol{E} - \boldsymbol{BA} + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{AB})\boldsymbol{CA} \\
&= \boldsymbol{E} - \boldsymbol{BA} + \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}.
\end{aligned}$$

又

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{D}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}) &= (\boldsymbol{E}+\boldsymbol{BCA})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}) \\
&= \boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{BCA}-\boldsymbol{BCABA} \\
&= \boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}))\boldsymbol{A} \\
&= \boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}.
\end{aligned}
$$

由 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}$，得 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{CAB}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{C}$，于是

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}+\boldsymbol{ADB} &= \boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{BCA})\boldsymbol{B} \\
&= \boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{ABCAB} \\
&= \boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{CAB}) \\
&= \boldsymbol{E}+\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{C},
\end{aligned}
$$

故 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{ADB}=\boldsymbol{C}$.

11. 设数域 P 上 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{F}$ 的特征多项式为 $f(x)$，并设 $g(x)=\prod_{i=1}^{m}(x-a_i)$. 证明：

1) $|g(\boldsymbol{F})|=(-1)^{mn}\prod_{i=1}^{m}f(a_i)$；

2) 对数域 P 上次数 $\geqslant 1$ 的多项式 $G(x)$ 有 $(G(x),f(x))=1$ 当且仅当 $|G(\boldsymbol{F})|\neq 0$.

证明： 1) $\boldsymbol{F}$ 的特征多项式为 $f(x)=|x\boldsymbol{E}-\boldsymbol{F}|$. 于是

$$f(a_i)=|a_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{F}|, i=1,2,\cdots,m.$$

由 $|g(\boldsymbol{F})|=\prod_{i=1}^{m}|\boldsymbol{F}-a_i\boldsymbol{E}|=\prod_{i=1}^{m}(-1)^n|a_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{F}|$，故

$$|g(\boldsymbol{F})|=(-1)^{mn}\prod_{i=1}^{m}f(a_i).$$

2) 对数域上非常数多项式 $G(x)$，$(G(x),f(x))=1$ 当且仅当它们在复数域上没有公共根.

设在复数域上 $G(x)=k(x-a_1)\cdots(x-a_m)$，$k\in\mathbf{C}$，则 $G(x)$ 与 $f(x)$ 有公共根当且仅当有某 a_i 使 $f(a_i)=0$. 所以 $(G(x),f(x))=1$ 当且仅当 $|G(\boldsymbol{F})|\neq 0$.

12. 证明：设 $\mathbf{A}$ 是 $n\times n$ 非零方阵，则有正整数 $k\leqslant n$，使

$$秩(\mathbf{A}^k)=秩(\mathbf{A}^{k+1})=秩(\mathbf{A}^{k+2}).$$

证明： 由于 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{AA},\cdots,\boldsymbol{A}^{l+1}=\boldsymbol{AA}^l,\cdots$，故有

$$秩(\mathbf{A})\geqslant 秩(\mathbf{A}^2)\geqslant\cdots\geqslant 秩(\mathbf{A}^l)\geqslant 秩(\mathbf{A}^{l+1})\cdots.$$

若秩$(\mathbf{A})=n$，即 $\mathbf{A}$ 可逆，则秩$(\mathbf{A})=$秩$(\mathbf{A}^2)=\cdots=$秩$(\mathbf{A}^l)=\cdots$，这时 $k=1\leqslant n$. 如果秩$(\mathbf{A})<n$，由 $n-1\geqslant$秩$(\mathbf{A})\geqslant$秩$(\mathbf{A}^2)\geqslant\cdots\geqslant$秩$(\mathbf{A}^n)\geqslant$秩$(\mathbf{A}^{n+1})\geqslant 0$，则$\{$秩$(\mathbf{A}^l)-$秩$(\mathbf{A}^{l+1}),l=1,2,\cdots,n\}$ 中不能全不为 0，否则秩$(\mathbf{A})=\sum_{l=1}^{n}[$秩$(\mathbf{A}^l)-$秩$(\mathbf{A}^{l+1})]+$秩$(\mathbf{A}^{n+1})\geqslant n$，与所设秩$(\mathbf{A})<n$ 矛盾. 于是有 $k\leqslant n$，使秩$(\mathbf{A}^k)=$

秩($\boldsymbol{A}^{k+1}$).

下面证明对任何 l,若秩($\boldsymbol{A}^{l}$) = 秩($\boldsymbol{A}^{l+1}$),则秩($\boldsymbol{A}^{l+1}$) = 秩($\boldsymbol{A}^{l+2}$). 于是依次取 $l=k, k+1, k+2, \cdots$,就得到

$$秩(\boldsymbol{A}^{k}) = 秩(\boldsymbol{A}^{k+1}) = 秩(\boldsymbol{A}^{k+2}) = \cdots.$$

现设秩($\boldsymbol{A}^{l}$) = 秩($\boldsymbol{A}^{l+1}$),考虑齐次方程组

$$\boldsymbol{A}^{l}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

和

$$\boldsymbol{A}^{l+1}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}. \tag{2}$$

显然(1) 的解是(2) 的解. 又秩($\boldsymbol{A}^{l}$) = 秩($\boldsymbol{A}^{l+1}$),(1) 与(2) 的基础解系有相同数目的解,于是(1) 的基础解系也是(2) 的基础解系,即(1) 与(2) 同解.

再考虑齐次方程组

$$\boldsymbol{A}^{l+2}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}. \tag{3}$$

显然(2) 的解是(3) 的解,对(3) 的任一解 $\boldsymbol{X}_0$,有

$$\boldsymbol{A}^{l+1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0) = \boldsymbol{0},$$

即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0$ 是(2) 的解,因而是(1) 的解. 于是 $\boldsymbol{A}^{l}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0) = \boldsymbol{0}$,因而 $\boldsymbol{X}_0$ 是(2) 的解. 这就证明了(2) 和(3) 同解,它们的系数矩阵必有相同的秩,即秩($\boldsymbol{A}^{l+1}$) = 秩($\boldsymbol{A}^{l+2}$).

13. 证明:设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 皆为 $n \times n$ 实对称矩阵,且 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵. 则有实可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 及 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$ 同时为对角矩阵.

证明: 由于 $\boldsymbol{A}$ 正定,有实可逆矩阵 $\boldsymbol{C}_1$,使 $\boldsymbol{C}'_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_1 = \boldsymbol{E}$. 这时 $\boldsymbol{C}'_1\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}_1$ 仍为实对称矩阵,故有正交矩阵 $\boldsymbol{C}_2$ 使 $\boldsymbol{C}'_2\boldsymbol{C}'_1\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2$ 为对角矩阵. $\boldsymbol{C}_2$ 正交,于是 $\boldsymbol{C}'_2\boldsymbol{C}'_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2 = \boldsymbol{C}'_2\boldsymbol{E}\boldsymbol{C}_2 = \boldsymbol{C}'_2\boldsymbol{C}_2 = \boldsymbol{E}$. 令 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2$,则 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 及 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$ 同时为对角矩阵.

14. $n \times n$ 复方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为幂零的,若有正整数 k,使 $\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{O}$. 证明:

1) $\boldsymbol{A}$ 是幂零矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值全为零;

2) $\boldsymbol{A}$ 是幂零矩阵的充要条件是 $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}^k) = 0, k = 1, 2, \cdots$,其中 $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A})$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的迹,即 $\boldsymbol{A}$ 的对角线元素的和.

证明: 1) 必要性. 设 λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值,$\boldsymbol{\xi} \neq \boldsymbol{0}$ 是属于 λ_0 的特征向量. 于是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi} = \lambda_0\boldsymbol{\xi}$,则

$$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\xi} = \lambda_0^k\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{0}.$$

因 $\boldsymbol{\xi} \neq \boldsymbol{0}$,故 $\lambda_0^k = 0$,即 $\lambda_0 = 0$.

充分性. $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为零,即 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $f(x)$ 的根全为零. 因 $f(x)$ 有 n 个复根,故 $f(x) = x^n$. 再由哈密顿-凯莱定理有 $\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{O}$,即 $\boldsymbol{A}$ 是幂零的.

2) 必要性. 由 1),$\boldsymbol{A}$ 的 n 个复特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 全为零. 于是 $\boldsymbol{A}^k$ 的 n 个特征值 $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k$ 也全为零. 因此

$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}^k) = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \cdots + \lambda_n^k = 0, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

充分性. 设 $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}^k) = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \cdots + \lambda_n^k = 0, k = 1, 2, \cdots$,则有

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=0, & (1) \\ \lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_n^2=0, & (2) \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1^n+\lambda_2^n+\cdots+\lambda_n^n=0. & (n) \end{cases}$$

设 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$f(x)=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\sigma_2x^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}\sigma_{n-1}x+(-1)^n\sigma_n,$$

其中

$$\sigma_1=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n,$$
$$\sigma_2=\lambda_1\lambda_2+\cdots+\lambda_1\lambda_n+\lambda_2\lambda_3+\cdots+\lambda_{n-1}\lambda_n,$$
$$\sigma_3=\lambda_1\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_2\lambda_4+\cdots+\lambda_1\lambda_2\lambda_n+\lambda_1\lambda_3\lambda_4+\cdots+\lambda_{n-2}\lambda_{n-1}\lambda_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sigma_{n-1}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}+\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-2}\lambda_n+\cdots+\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n,$$
$$\sigma_n=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

将原书第一章补充题 16 的 2) 的公式中 s_k 换成 $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}^k)$，则有

$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}^k)-\sigma_1\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}^{k-1})+\sigma_2\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}^{k-2})+\cdots+$$
$$(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A})+(-1)^kk\sigma_k=0,1\leqslant k\leqslant n.$$

由此可得 $\sigma_1=\sigma_2=\cdots=\sigma_n=0$，就有 $f(x)=x^n$. 再用哈密顿—凯莱定理，$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{O}$，即 $\boldsymbol{A}$ 为幂零矩阵.

15. 证明：设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 皆为 $n\times n$ 实对称矩阵，且互相交换，则它们有公共的特征向量作为欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 的标准正交基.

证明：作欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中线性变换 $\mathscr{A},\mathscr{B}$：

$$\mathscr{A}:\mathbf{R}^n\longrightarrow\mathbf{R}^n,\quad \mathscr{B}:\mathbf{R}^n\longrightarrow\mathbf{R}^n,$$
$$\boldsymbol{X}\longmapsto\boldsymbol{AX},\qquad \boldsymbol{X}\longmapsto\boldsymbol{BX}.$$

$\mathscr{A},\mathscr{B}$ 在标准正交基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,\cdots,0)',\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0,\cdots,0)',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n=(0,0,\cdots,0,1)'$ 下的矩阵就是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$. 由于 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 对称，故 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上对称变换（$\mathbf{R}^n$ 上内积是自然内积 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}$）.

由 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 交换知 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 也交换. $\mathscr{A}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上对称变换，它的矩阵可化为对角形，故 $\mathbf{R}^n$ 是 $\mathscr{A}$ 的特征子空间的直和：

$$\mathbf{R}^n=V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_s},$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是 $\mathscr{A}$ 的全部不同的特征值，由 $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}$，每个 $V_{\lambda_i}(i=1,\cdots,s)$ 都是 $\mathscr{B}$ 的不变子空间. $\mathscr{B}$ 限制在 V_{λ_i} 上也是对称变换，$\mathscr{B}$ 在 V_{λ_i} 上有特征向量作成的标准正交基 $\boldsymbol{\xi}_{i,1},\boldsymbol{\xi}_{i,2},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{i,n_i}$，其中 $n_i=$ 维(V_{λ_i}). 由于它们属于 V_{λ_i}，故都是 $\mathscr{A}$ 的特征向量. 又 V_{λ_i} 与 V_{λ_j} 属于 $\mathscr{A}$ 的不同的特征值，因而它们互相正交，于是 $i\neq l$ 时 $\boldsymbol{\xi}_{i,j}$ 与 $\boldsymbol{\xi}_{l,k}$ 正交. $\boldsymbol{\xi}_{i,1},\boldsymbol{\xi}_{i,2},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{i,n_i}$ 又是 V_{λ_i} 的标准正交基，若 $i=l$，但 $j\neq k$，$\boldsymbol{\xi}_{i,j}$ 与 $\boldsymbol{\xi}_{l,k}$ 也正交. 这样 $\{\boldsymbol{\xi}_{i,j}\mid i=1,2,\cdots,s,j=1,2,\cdots,n_i\}$ 是相互正交的，且长度为

1,是标准正交向量组. 这个向量组中向量数目为

$$n_1+n_2+\cdots+n_s=\text{维}(V_{\lambda_1})+\text{维}(V_{\lambda_2})+\cdots+\text{维}(V_{\lambda_s})=n.$$

故它们组成 $\mathbf{R}^n$ 的一组标准正交基.

16. 证明:反称实矩阵正交相似于准对角矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 0 &&&&&& \\ &&& 0 & b_1 &&&& \\ &&& -b_1 & 0 &&&& \\ &&&&& \ddots &&& \\ &&&&&& 0 & b_s \\ &&&&&& -b_s & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $b_i(i=1,\cdots,s)$ 是实数.

证明:设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 反称实矩阵. 和上一题一样,$\boldsymbol{A}$ 对应于 $\mathbf{R}^n$ 中的一个线性变换

$$\mathscr{A}:\mathbf{R}^n\longrightarrow\mathbf{R}^n, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{X}\longmapsto\boldsymbol{AX}.$$

它在 $\mathbf{R}^n$ 的自然内积$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}$下是反称变换. 第九章习题 16 证明了 $\boldsymbol{A}$ 的特征根为零或纯虚数. 我们想对一般的 n 维欧氏空间 V 上的反称变换 $\mathscr{A}$,证明能找到一组标准正交基使 $\mathscr{A}$ 在这组基下矩阵有题目所要求的形状.

我们对 n 作数学归纳法. $n=1$,这时 $\mathscr{A}$ 的特征值为 0,矩阵也为零. 故题目的结论成立.

现设对维数 $\leqslant n-1$ 的欧氏空间上的反称变换命题已成立. 对 n 维欧氏空间 V 上线性变换 $\mathscr{A}$,由于 V 同构成 $\mathbf{R}^n$,转而考虑 $\mathbf{R}^n$ 中线性变换如(1). 若 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 0,则有 ξ_1 是属于特征值 0 的单位特征向量,作 $V_1=L(\xi_1)^{\perp}$. 因 $\mathscr{A}$ 反称,$\mathscr{A}$ 在 V_1 上不变,且仍反称. 维$(V_1)=n-1$. 考虑 $\mathscr{A}$ 限制在 V_1 上,用归纳假设,有 V_1 的标准正交基 $\xi_2,\xi_3,\cdots,\xi_n$,$\mathscr{A}|_{V_1}$ 在这组基下矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 有题目要求的形状,$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 合起来,是 $\mathbf{R}^n$ 的标准正交基,$\mathscr{A}$ 在这组基下矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_1 \end{pmatrix},$$

也是题目要求的形状.

若 $\boldsymbol{A}$ 有纯虚数特征根 $\mathrm{i}\beta$,β 为非零实数. 则有复特征向量 $\boldsymbol{X}+\mathrm{i}\boldsymbol{Y}$,$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}+\mathrm{i}\boldsymbol{Y})=\mathrm{i}\beta(\boldsymbol{X}+\mathrm{i}\boldsymbol{Y})$,$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in\mathbf{R}^n$. 则有

$$\boldsymbol{AX}=-\beta\boldsymbol{Y}, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{AY}=\beta\boldsymbol{X}. \tag{2}$$

由反称性,

$$(\boldsymbol{AX},\boldsymbol{X})=-(\boldsymbol{X},\boldsymbol{AX})=-(\boldsymbol{AX},\boldsymbol{X})=0,$$

故
$$0=(\boldsymbol{AX},\boldsymbol{X})=-\beta(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}),$$
即 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 正交. 分别将 $\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}$ 和(1),(2) 作内积,然后相加得
$$(\boldsymbol{AX},\boldsymbol{Y})+(\boldsymbol{AY},\boldsymbol{X})=\beta((\boldsymbol{X},\boldsymbol{X})-(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Y})).$$
又
$$\text{左端}=(\boldsymbol{AX},\boldsymbol{Y})+(\boldsymbol{X},\boldsymbol{AY})=(\boldsymbol{AX},\boldsymbol{Y})-(\boldsymbol{AX},\boldsymbol{Y})=0,$$
故右端 $=0$. 又 $\beta\neq 0$,即有
$$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X})=(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Y}).$$
可将 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\mathrm{i}\beta$ 的复特征向量 $\boldsymbol{X}+\mathrm{i}\boldsymbol{Y}$ 取成满足 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X})=(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Y})=1$. 则 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 生成 $\mathscr{A}$ 的二维不变子空间 V_1,且组成 V_1 的标准正交基. 作 $V_2=V_1^{\perp}$,由 $\mathscr{A}$ 反称,$V_1^{\perp}$ 仍 $\mathscr{A}$ 不变. 维$(V_2)<n$,用归纳假设 V_2 有标准正交基 $\xi_3,\xi_4,\cdots,\xi_n$,$\mathscr{A}$ 在这组基下矩阵为 $\boldsymbol{A}_2$,符合题目要求的形状.

$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\xi_3,\cdots,\xi_n$ 合起来是 $\mathbf{R}^n$ 的一组标准正交基,$\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵有形状:
$$\begin{pmatrix} 0 & \beta & \\ -\beta & 0 & \\ & & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}.$$
若有需要,可将前面的标准正交基中元素重排一下顺序,则 $\mathscr{A}$ 在新基下矩阵符合题目要求.

17. 设 $\boldsymbol{S}$ 是非零的反称实矩阵,证明:

1) $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{S}|>1$;

2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵,则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{S}|>|\boldsymbol{A}|$.

证明: 1) 由前一题,有正交矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使
$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{ST}=\begin{pmatrix} 0 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & 0 & b_1 & & & \\ & & & -b_1 & 0 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 0 & b_s \\ & & & & & & -b_s & 0 \end{pmatrix},$$
$b_i(i=1,\cdots,s)$ 为实数. 于是
$$|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{S}|=|\boldsymbol{T}^{-1}||\boldsymbol{E}+\boldsymbol{S}||\boldsymbol{T}|=|\boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{S})\boldsymbol{T}|$$

$$
=\begin{vmatrix}
1 &&&&&&&&\\
&\ddots&&&&&&&\\
&&1&&&&&&\\
&&&1&b_1&&&&\\
&&&-b_1&1&&&&\\
&&&&&\ddots&&&\\
&&&&&&1&b_s\\
&&&&&&-b_s&1
\end{vmatrix}
$$

$$
=\prod_{i=1}^{s}(1+b_i^2)>1.
$$

最后的不等号是因为 $\boldsymbol{S}\neq\boldsymbol{O}$,至少有一 $b_i\neq 0$.

2) $\boldsymbol{A}$ 正定,于是有可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$. $\boldsymbol{S}$ 是反称的,故 $\boldsymbol{S}_1=(\boldsymbol{C}^{-1})'\boldsymbol{S}\boldsymbol{C}^{-1}$ 仍反称,且非零,于是 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{S}_1|>1$.

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{S}| &= |\boldsymbol{C}'(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{S}_1)\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{C}'||\boldsymbol{C}||\boldsymbol{E}+\boldsymbol{S}_1| \\
&= |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{E}+\boldsymbol{S}_1|>|\boldsymbol{A}|.
\end{aligned}
$$

18. 设 $f(x),g(x)$ 是数域 P 上两个不全为零的多项式. 令

$$
S=\{u(x)f(x)+v(x)g(x)\mid u(x),v(x)\in P[x]\}.
$$

证明:存在 $m(x)\in S$,使

$$
S=\{h(x)m(x)\mid h(x)\in P[x]\}.
$$

证明: 因 $f(x),g(x)$ 不全为零,S 中有非零多项式. 在 S 中取次数最低的一个多项式 $m(x)$. 我们证明,对任意 $M(x)\in S$,$m(x)\mid M(x)$.

用 $m(x)$ 去除 $M(x)$,设其商式和余式分别是 $q(x)$ 和 $r(x)$,则

$$
M(x)=q(x)m(x)+r(x),
$$

若 $r(x)\neq 0$,则 $\partial(r(x))<\partial(m(x))$. 但 $M(x),m(x)\in S$,有 $u_i(x),v_i(x),i=1,2$,使

$$
\begin{aligned}
M(x)&=u_1(x)f(x)+v_1(x)g(x),\\
m(x)&=u_2(x)f(x)+v_2(x)g(x),
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
r(x)&=M(x)-q(x)m(x)\\
&=[u_1(x)-q(x)u_2(x)]f(x)+[v_1(x)-q(x)v_2(x)]g(x)\in S,
\end{aligned}
$$

它的次数 $<\partial(m(x))$,与 $m(x)$ 是 S 中次数最低的多项式矛盾. 因此只能 $r(x)=0$,即 $M(x)=q(x)m(x)$. 这证明了

$$
S=\{h(x)m(x)\mid h(x)\in P[x]\}.
$$

19. 1) $\boldsymbol{A}$ 是 n 级可逆矩阵,求下列二次型

$$f=\begin{vmatrix}0 & -\boldsymbol{X}' \\ \boldsymbol{X} & \boldsymbol{A}\end{vmatrix}, \text{其中 } \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

的矩阵;

2) 证明:当 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵时,f 是正定二次型;

3) 当 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵时,讨论 $\boldsymbol{A}$ 的正、负惯性指数与 f 的正、负惯性指数之间的关系.

解: 1) 因 $\boldsymbol{A}$ 可逆,故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在.

$$\begin{vmatrix}1 & \boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}^{-1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0 & -\boldsymbol{X}' \\ \boldsymbol{X} & \boldsymbol{A}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{X} & \boldsymbol{A}\end{vmatrix}$$
$$=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X},$$

故

$$f=\begin{vmatrix}0 & -\boldsymbol{X}' \\ \boldsymbol{X} & \boldsymbol{A}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}.$$

由于 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 不一定是对称矩阵,所以 f 的矩阵是

$$|\boldsymbol{A}|\cdot\frac{1}{2}[\boldsymbol{A}^{-1}+(\boldsymbol{A}^{-1})']=\frac{1}{2}[\boldsymbol{A}^{*}+(\boldsymbol{A}^{*})'],$$

其中 $\boldsymbol{A}^{*}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

2) 当 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵时,f 是实二次型. 此时 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也正定,且 $|\boldsymbol{A}|>0$. 所以 f 是正定二次型.

3) 设 $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数为 p. 故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的正惯性指数也是 p. 但 $|\boldsymbol{A}|$ 与 $(-1)^{n-p}$ 同号,因此有

(i) $n-p$,即 $\boldsymbol{A}$ 的负惯性指数为偶数时,f 的正、负惯性指数与 $\boldsymbol{A}$ 的正、负惯性指数相同;

(ii) $n-p$,即 $\boldsymbol{A}$ 的负惯性指数为奇数时,f 的正、负惯性指数分别等于 $\boldsymbol{A}$ 的负、正惯性指数.

20. 设 $P[x]$ 中多项式 $p_1(x),p_2(x),\cdots,p_s(x)(s\geqslant 2)$ 的次数分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_s$. 证明:若 $n_1+n_2+\cdots+n_s<\dfrac{s(s-1)}{2}$,则 $p_1(x),p_2(x),\cdots,p_s(x)$ 在线性空间 $P[x]$ 中线性相关.

证明: 对 s 作数学归纳法. 当 $s=2$ 时,$n_1+n_2<1$,因此 $n_1=n_2=0$. $p_1(x),p_2(x)$ 皆为非零常数,故线性相关.

设 $s>2$,且结论对 $s-1$ 个多项式成立. 来证结论对 s 个多项式也成立. 可调动

$p_i(x), i=1,2,\cdots,s$ 的次序使得

$$n_1 \leqslant n_2 \leqslant \cdots \leqslant n_s.$$

现在

$$n_1+n_2+\cdots+n_s<\frac{s(s-1)}{2}.$$

如果

$$n_1+n_2+\cdots+n_{s-1}<\frac{(s-1)(s-2)}{2},$$

则由归纳假设 $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_{s-1}(x)$ 线性相关，因此 $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_{s-1}(x), p_s(x)$ 也线性相关. 命题得证.

如果

$$n_1+n_2+\cdots+n_{s-1} \geqslant \frac{(s-1)(s-2)}{2},$$

则

$$n_s<s-1.$$

从而

$$n_1 \leqslant n_2 \leqslant \cdots \leqslant n_{s-1} \leqslant n_s<s-1,$$

$p_1(x), p_2(x), \cdots, p_{s-1}(x), p_s(x)$ 都可由

$$1, x, \cdots, x^{s-2}$$

线性表出. 即 s 个元素 $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_s(x)$ 可由 $s-1$ 个元素 $1, x, \cdots, x^{s-2}$ 线性表出. 这 s 个元素一定线性相关.

21. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 级实对称矩阵. 证明:存在实对称矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{A}$ 的充分必要条件是，$\boldsymbol{A}$ 为半正定矩阵.

证明: 必要性. 设 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{A}$，并设 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，则 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \cdots, \lambda_n^2$. 因 $\boldsymbol{B}$ 为实对称的，$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 皆为实数，$\lambda_1^2, \lambda_2^2, \cdots, \lambda_n^2$ 皆大于等于零. 即 $\boldsymbol{A}$ 为半正定矩阵.

充分性. 设 $\boldsymbol{A}$ 为半正定，则有正交矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使

$$\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_i \geqslant 0, i=1,2,\cdots,n$. 令

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}'\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}\boldsymbol{T},$$

则 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{A}$.

22. 证明:设 $\boldsymbol{A}$ 是非退化实矩阵,则它是一个正交矩阵与一个正定矩阵的乘积.

证明:$\boldsymbol{A}$ 是非退化实矩阵,则 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵,由前一题有正定矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^2=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$. 于是

$$(\boldsymbol{C}^{-1})'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1})'(\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1}),$$

即 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1}$ 是正交矩阵. 因此 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$ 是正交矩阵与正定矩阵的乘积.

23. 证明:设 $\boldsymbol{A}$ 是反称实矩阵,则 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}$ 是正交矩阵.

证明: $[(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}]'(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}$

$=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}')^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}')(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}$

$=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}$

$=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}$

$=\boldsymbol{E}.$

因此$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}$ 与其转置互逆,故是正交矩阵.

24. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 n 个彼此不等的实数,$f_1(x),\cdots,f_n(x)$ 是 n 个次数不大于 $n-2$ 的实系数多项式. 证明:

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \cdots & f_2(a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix}=0.$$

证明:令

$$g(x)=\begin{vmatrix} f_1(x) & f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_n) \\ f_2(x) & f_2(a_2) & \cdots & f_2(a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(x) & f_n(a_2) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix},$$

它是 x 的多项式,或者 $g(x)=0$,或者 $\partial(g(x))\leqslant n-2$. 若为前者,结论已成立. 若为后者,$g(a_2)=g(a_3)=\cdots=g(a_n)=0$,即至少有 $n-1$ 个根,而次数 $\leqslant n-2$. 这是不可能的. 故 $g(x)=0$,当然有 $g(a_1)=0$.

25. 设 $f(x),g(x),h(x)\in P[x]$,且次数皆大于等于1. 证明:$f(g(x))=h(g(x))$ 的充分必要条件为 $f(x)=h(x)$.

证明:充分性显然.

必要性. 设 $f(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_1x+a_0$,$h(x)=b_lx^l+b_{l-1}x^{l-1}+\cdots+b_1x+b_0$,$g(x)=c_mx^m+c_{m-1}x^{m-1}+\cdots+c_1x+c_0$,其中 k,l,m 皆 $\geqslant 1$,a_k,b_l,c_m 皆不为零. 我们来证 $k=l$,$a_i=b_i$,$i=k,k-1,\cdots,0$. 对 k 作数学归纳法. 若 $k=1$,则

$$f(g(x))=a_1(c_mx^m+c_{m-1}x^{m-1}+\cdots+c_1x+c_0)+a_0$$

$$= h(g(x)) = b_l(c_m x^m + c_{m-1}x^{m-1} + \cdots + c_1 x + c_0)^l + b_{l-1}(c_m x^m + c_{m-1}x^{m-1} + \cdots + c_1 x + c_0)^{l-1} + \cdots + b_1(c_m x^m + c_{m-1}x^{m-1} + \cdots + c_1 x + c_0) + b_0.$$

两边的最高次项分别为 $a_1 c_m x^m$ 和 $b_l c_m^l x^{ml}$. 它们相等得 $m = ml$, 因此 $l = 1$, 且 $a_1 c_m = b_1 c_m$, 再得 $a_1 = b_1$.

两边的常数项相等,得

$$a_1 c_0 + a_0 = b_1 c_0 + b_0.$$

于是 $a_0 = b_0$. 故结论对 $k = 1$ 成立.

再设结论在次数 $< k$ 时成立. 当 $\partial(f(x)) = k$ 时,

$$f(g(x)) = h(g(x)),$$

即为

$$a_k(c_m x^m + \cdots + c_1 x + c_0)^k + a_{k-1}(c_m x^m + \cdots + c_1 x + c_0)^{k-1} + \cdots + a_1(c_m x^m + \cdots + c_1 x + c_0) + a_0$$

$$= b_l(c_m x^m + \cdots + c_1 x + c_0)^l + b_{l-1}(c_m x^m + \cdots + c_1 x + c_0)^{l-1} + \cdots + b_1(c_m x^m + \cdots + c_1 x + c_0) + b_0.$$

比较两边最高项得

$$a_k c_m^k x^{km} = b_l c_m^l x^{lm}.$$

于是 $k = l$, $a_k = b_l$.

消去上式两边的第一项,就得

$$f_1(g(x)) = h_1(g(x)).$$

其中

$$f_1(x) = a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$$h_1(x) = b_{k-1}x^{k-1} + \cdots + b_1 x + b_0.$$

若 $f_1(x)$ 是常数(包括零常数),显然 $h_1(x)$ 也是常数,且 $f_1(x) = h_1(x)$.

所以

$$f(x) = a_k x^k + f_1(x) = b_k x^k + h_1(x) = h(x).$$

若 $f_1(x)$ 非常数,则 $h_1(x)$ 也非常数. 又 $f_1(x)$ 是次数 $\leqslant k-1$ 的多项式,则由归纳假设有 $f_1(x) = h_1(x)$. 同样得到 $f(x) = h(x)$.

26. 设整系数多项式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, 它没有有理根. 又有素数 p 满足

1) $p \nmid a_n$;　2) $p \mid a_{n-2}, \cdots, p \mid a_0$;　3) $p^2 \nmid a_0$.

证明: $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}[x]$ 中不可约.

证明: 如果 $p \mid a_{n-1}$, 则由艾森斯坦判别法,结论成立. 下面对 $p \nmid a_{n-1}$ 的情形加以证明.

反设 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}[x]$ 中可约,则 $f(x)$ 可以分解为两个次数较低的整系数多项式 $g(x)$, $h(x)$ 的乘积:

$$f(x) = g(x)h(x), \tag{1}$$

其中

$$g(x)=b_lx^l+b_{l-1}x^{l-1}+\cdots+b_1x+b_0,$$
$$h(x)=c_mx^m+c_{m-1}x^{m-1}+\cdots+c_1x+c_0.$$

因为 $f(x)$ 无有理根，所以 l,m 皆大于 1. 由(1) 有，

$$a_n=b_lc_m,\quad a_0=b_0c_0.$$

根据 $p\mid a_0,p^2\nmid a_0$，p 能整除 b_0,c_0 中的一个，但不能同时整除它们两个. 因此不妨设 $p\mid b_0$ 但 $p\nmid c_0$. 又 $p\nmid a_n$，故 $p\nmid b_l$. 可设 $b_0,b_1,\cdots,b_l$ 中第一个不能被 p 整除的是 b_k，即 $p\mid b_0,p\mid b_1,\cdots,p\mid b_{k-1}$，但 $p\nmid b_k$，且 $1\leqslant k\leqslant l<n-1$. 比较(1) 式两边 x^k 的系数，得

$$a_k=b_kc_0+b_{k-1}c_1+\cdots+b_0c_k.$$

式中右边除 b_kc_0 外其余各项都可被 p 整除，而 $p\nmid b_kc_0$，因此右边不能被 p 整除，从而 p 不能整除左端 a_k. 但 $k<n-1$，题目假设 $p\mid a_k$，矛盾. 这证明了 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}[x]$ 中不可约.

27. 1) 设 $f(x)$ 及 $G(x)$ 是 $P[x]$ 中 m 次及 $\leqslant m+1$ 次多项式，证明：$G(n)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}f(k)$ 对所有 $n\geqslant 1$ 成立的充分必要条件是 $G(x+1)-G(x)=f(x)$ 且 $G(0)=0$；

2) 证明：对 $P[x]$ 中任何 m 次多项式 $f(x)$，必有 $P[x]$ 中次数 $\leqslant m+1$ 的多项式 $G(x)$ 满足 $G(n)=f(0)+f(1)+\cdots+f(n-1)$ 对任何 $n\geqslant 1$ 的整数成立；

3) 求 $1^2+2^2+\cdots+n^2$ 及 $1^3+2^3+\cdots+n^3$.

证明： 1) 必要性. 如果 $G(n)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}f(k)$，那么

$$G(n+1)-G(n)=\sum_{k=0}^{n}f(k)-\sum_{k=0}^{n-1}f(k)=f(n).$$

这说明当 x 是正整数时，

$$G(x+1)-G(x)=f(x)$$

成立，因此在 $P[x]$ 中成立.

当 $x=0$ 时，由上式有 $G(1)-G(0)=f(0)$. 但题设 $G(1)=f(0)$，故 $G(0)=0$.

充分性. 由 $G(x+1)-G(x)=f(x)$ 及 $G(0)=0$ 有，

$$G(n)-G(n-1)=f(n-1),$$
$$G(n-1)-G(n-2)=f(n-2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$G(3)-G(2)=f(2),$$
$$G(2)-G(1)=f(1),$$
$$G(1)=G(1)-G(0)=f(0),$$

将上述各式相加即得

$$G(n)=\sum_{k=0}^{n-1}f(k).$$

2) 作次数 $\leqslant m+1$ 的多项式 $G(x)$ 使 $n=1,2,\cdots,m+1$ 时有

$$G(n)=\sum_{k=0}^{n-1}f(k)\quad 及\quad G(0)=0.$$

易验证

$$G(x+1)-G(x)$$

是次数 $\leqslant m$ 的多项式. 当 $x=1,2,\cdots,m+1$ 时它与 $f(x)$ 有相同的值 $f(n)$. 又它们的次数皆 $\leqslant m$,故在 $P[x]$ 中

$$G(x+1)-G(x)=f(x).$$

再由 1),结论成立.

3)
$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n,$$

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2.$$

28. P 是一个数域,N 是 $P[x]$ 中的一个子集,满足 1) $f(x),g(x)\in N$,则 $f(x)+g(x)\in N$;2) 对 $f(x)\in N$ 及任何 $q(x)\in P[x]$ 有 $q(x)f(x)\in N$. 证明:N 中有 $d(x)$,满足 $N=\{d(x)q(x)\mid q(x)\in P[x]\}$.

证明: 若 $N=\{0\}$,则 $d(x)=0$ 为所求.

若 $N\neq\{0\}$. 设 $d(x)$ 是 N 中非零多项式中次数最低的一个多项式. 对 N 中任一多项式 $f(x)$,作带余除法,

$$f(x)=q(x)d(x)+r(x),$$

其中 $r(x)=0$ 或 $\partial(r(x))<\partial(d(x))$.

由题设 $q(x)d(x)$ 及 $r(x)=f(x)-q(x)d(x)\in N$. 若 $r(x)\neq 0$,则与 $d(x)$ 是 N 中次数最低的矛盾. 故 $r(x)=0$,即有 $f(x)=q(x)d(x)$.

另一方面,$d(x)\in N$,由题设 $f(x)=q(x)d(x)\in N$. 故

$$N=\{q(x)d(x)\mid q(x)\in P[x]\}.$$

29. n 为正整数,$f(x)\in \mathbf{Q}[x]$,$\partial(f(x))=n$. 证明:有不全为零的有理数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 使得 $f(x)\left|\ \sum_{i=0}^{n}a_ix^{2^i}\right.$.

证明: 设

$$f(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n,\quad b_n\neq 0.$$

要找

$$g(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_{2^n-n}x^{2^n-n},$$

$$h(x)=a_0x^{2^0}+a_1x^{2^1}+a_2x^{2^2}+\cdots+a_nx^{2^n}$$

使

$$h(x)=f(x)g(x). \tag{1}$$

这等价于

$$\begin{cases}\sum\limits_{i+j=s}b_ic_j=a_l, & s=2^l,l=0,1,2,\cdots,n,\\ \sum\limits_{i+j=s}b_ic_j=0, & 其他\ s,0\leqslant s\leqslant 2^n,\end{cases}$$

也即等价于未知数 $x_0,x_1,\cdots,x_{2^n-n},y_0,y_1,\cdots,y_n$ 的齐次线性方程组

$$\begin{cases}\sum\limits_{i+j=s}b_ix_j=y_l, & s=2^l,l=0,1,2,\cdots,n,\\ \sum\limits_{i+j=s}b_ix_j=0, & 其他\ s,0\leqslant s\leqslant 2^n\end{cases}$$

有解.

这个方程组共 2^n+1 个方程,有 $(2^n-n)+1+n+1=2^n+2$ 个未知数. 故上述方程组有非零解. 记它的一个非零解为上述 $c_0,\cdots,c_{2^n-n},a_0,a_1,\cdots,a_n$. 作成相应的 $g(x),h(x)$ 就满足(1). 若 $a_0=a_1=\cdots=a_n=0$,则 $c_0,c_1,\cdots,c_{2^n-n}$ 不全为零,此时 $g(x)\neq 0,h(x)=0$. 但 $f(x)\neq 0$. $f(x)g(x)\neq 0$,与 $f(x)g(x)=h(x)=0$ 矛盾. 故 $a_0,\cdots,a_n$ 不全为零.

30. $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ 为整系数 4 次多项式,令 r_1,r_2,r_3,r_4 是它的根,已知 r_1+r_2 为有理数,$r_1+r_2\neq r_3+r_4$. 证明:$f(x)$ 可表成两个次数较低的整系数多项式的乘积.

证明:由题设

$$\begin{aligned}f(x)&=a(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)(x-r_4)\\&=a[x^2-(r_1+r_2)x+r_1r_2][x^2-(r_3+r_4)x+r_3r_4],\end{aligned} \tag{1}$$

及 $f(x)\in\mathbf{Q}[x]$,展开上式后可知

$$\begin{gathered}(r_1+r_2)+(r_3+r_4),\\(r_1+r_2)(r_3+r_4)+r_1r_2+r_3r_4,\\(r_1+r_2)r_3r_4+(r_3+r_4)r_1r_2,\\r_1r_2r_3r_4\end{gathered}$$

都是有理数. 由于 r_1+r_2 是有理数,于是 r_3+r_4 是有理数及

$$\begin{cases}r_1r_2+r_3r_4=有理数,\\(r_3+r_4)r_1r_2+(r_1+r_2)r_3r_4=有理数.\end{cases}$$

又

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\ r_1+r_2 & r_3+r_4\end{vmatrix}\neq 0,$$

用克拉默法则,得 r_1r_2 及 r_3r_4 是有理数. 由(1)知 $x^2-(r_1+r_2)x+r_1r_2$ 是 $f(x)$ 的有理因式,即 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}[x]$ 中可约,故可表成两个低次整系数多项式的乘积.

31. $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 是闭区间$[a,b]$上的实函数,且在实数域上是线性无关的.

证明:在$[a,b]$上存在数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,使

$$|(f_i(a_j))|\neq 0,\quad i,j=1,2,\cdots,n$$

证明: 对 n 作数学归纳法. $n=1$, $f_1(x)$ 是非零函数,必有 $a_1\in[a,b]$ 使 $f_1(a_1)\neq 0$. 即 $|f_1(a_1)|\neq 0$.

设函数的数目为 $n-1$ 时结论成立. 考虑 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 线性无关的情形. 由归纳假设有 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 使

$$D_1=\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_{n-1}) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \cdots & f_2(a_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n-1}(a_1) & f_{n-1}(a_2) & \cdots & f_{n-1}(a_{n-1}) \end{vmatrix}\neq 0.$$

作
$$D=\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_{n-1}) & f_1(x) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \cdots & f_2(a_{n-1}) & f_2(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_{n-1}(a_1) & f_{n-1}(a_2) & \cdots & f_{n-1}(a_{n-1}) & f_{n-1}(x) \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \cdots & f_n(a_{n-1}) & f_n(x) \end{vmatrix}.$$

由于左上角的 $n-1$ 级子式不为 0,它的 $n-1$ 个行向量组成 $\mathbf{R}^{n-1}$ 的一组基. $(f_n(a_1),f_n(a_2),\cdots,f_n(a_{n-1}))\in\mathbf{R}^{n-1}$ 是它们的线性组合,设为

$(f_n(a_1),f_n(a_2),\cdots,f_n(a_{n-1}))=l_1(f_1(a_1),f_1(a_2),\cdots,f_1(a_{n-1}))+$
$l_2(f_2(a_1),f_2(a_2),\cdots,f_2(a_{n-1}))+\cdots+l_{n-1}(f_{n-1}(a_1),f_{n-1}(a_2),\cdots,f_{n-1}(a_{n-1}))$.

将 D 的第 n 行依次减去第 1 行的 l_1 倍,第二行的 l_2 倍,…,第 $n-1$ 行的 l_{n-1} 倍,就得到

$$D=\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_{n-1}) & f_1(x) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \cdots & f_2(a_{n-1}) & f_2(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_{n-1}(a_1) & f_{n-1}(a_2) & \cdots & f_{n-1}(a_{n-1}) & f_{n-1}(x) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & f_n(x)-\sum\limits_{j=1}^{n-1}l_jf_j(x) \end{vmatrix}$$

$$=\left[f_n(x)-\sum_{j=1}^{n-1}l_jf_j(x)\right]D_1.$$

若 x 取$[a,b]$中任何值,都有 $D=0$. 则由于 $D_1\neq 0$,故 x 取$[a,b]$中任何值都有

$$f_n(x)-\sum_{j=1}^{n-1}l_jf_j(x)=0.$$

即 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 线性相关,矛盾. 故必有某 $a_n\in[a,b]$ 使

$$|(f_i(a_j))|\neq 0,\quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

32. 令 S 是 $P^{n\times n}$ 中所有形如 $\boldsymbol{XY}-\boldsymbol{YX}$ 的矩阵生成的线性子空间，又设 H 为 $P^{n\times n}$ 中迹为零的矩阵组成的空间. 求证 $S=H$，因而维$(S)=$ 维$(H)=n^2-1$.

证明：因为矩阵 $\boldsymbol{XY}-\boldsymbol{YX}$ 的迹为零，故 $S\subseteq H$. 为了证明 $S=H$，只要证明 H 的某组基属于 S. 取 H 的一组基为

$$\boldsymbol{E}_{ij},i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n \quad 及 \quad \boldsymbol{E}_{ii}-\boldsymbol{E}_{i+1,i+1},i=1,2,\cdots,n-1.$$

易知

$$\boldsymbol{E}_{ij}=\boldsymbol{E}_{i1}\boldsymbol{E}_{1j}-\boldsymbol{E}_{1j}\boldsymbol{E}_{i1}\in S,$$

$$\boldsymbol{E}_{ii}-\boldsymbol{E}_{i+1,i+1}=\boldsymbol{E}_{i,i+1}\boldsymbol{E}_{i+1,i}-\boldsymbol{E}_{i+1,i}\boldsymbol{E}_{i,i+1}\in S.$$

所以 $H\subseteq S$，即得 $S=H$.

33. 证明：设 $\boldsymbol{A}\in P^{n\times n}$，$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A})=0$，则有 $P^{n\times n}$ 中可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}=\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & * & \\ & * & \vdots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

证明：对矩阵的级数 n 作数学归纳法. $n=1$，$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A})=0$，即为 $\boldsymbol{A}=0$，结论成立.

设对级数 $n-1$ 的矩阵结论成立. 设 $\boldsymbol{A}_{n\times n}=(\boldsymbol{a}_{ij})$ 的迹 $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A})=0$.

如 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 中有一个为零，设为 $a_{ii}=0$. 对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等变换，先作第 1 行和第 i 行互换，再作第 1 列与第 i 列互换. 这是对 $\boldsymbol{A}$ 的相似变换，其结果是得到一个与 $\boldsymbol{A}$ 相似的矩阵，它的第 1 行第 1 列的元素为 0.

如 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 都不为零，由 $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=0$，必有某 $a_{ii}\neq a_{11}$. 即 $a_{11}-a_{ii}\neq 0$. 与前面类似的方法，可用相似变换将 $\boldsymbol{A}$ 中 a_{ii} 换至 a_{22} 处，且 a_{11} 不变. 不妨就设 $\boldsymbol{A}$ 中 $a_{11}\neq a_{22}$. 这时若 $a_{12}=a_{21}=0$，可作初等变换：先将第 2 行加到第 1 行，再将第 1 列的 -1 倍加到第 2 列，这是相似变换. 其结果是第 1 行第 2 列元素是 $a_{22}-a_{11}\neq 0$. 不妨再设 $\boldsymbol{A}$ 中 $a_{12}\neq 0$ 或 $a_{21}\neq 0$. 当 $a_{12}\neq 0$ 时，对 $\boldsymbol{A}$ 先将第 2 列的 $\dfrac{-a_{11}}{a_{12}}$ 倍加到第 1 列，然后将第 1 行的 $\dfrac{a_{11}}{a_{12}}$ 倍加到第 2 行，这是 $\boldsymbol{A}$ 上的相似变换，其结果是变换后的矩阵的 a_{11} 处元素等于零.

当 $a_{21}\neq 0$ 时，可类似地对 $\boldsymbol{A}$ 作相似变换，使 a_{11} 处元素变为零. 总之，对 $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A})=0$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$，可作相似变换使其变成

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{B}$ 是 $n-1$ 级的矩阵，$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{B})=0$.

由归纳假设

$$\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{T}_1^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}_1 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & * & \\ & * & \vdots & \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

于是

$$\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{T}_1 \end{pmatrix}^{-1} \boldsymbol{A}_1 \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{T}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & * & \\ & * & \vdots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

34. 设 $\boldsymbol{A} \in P^{n\times n}$，$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}) = 0$. 证明：有 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y} \in P^{n\times n}$ 使 $\boldsymbol{XY} - \boldsymbol{YX} = \boldsymbol{A}$.

证明：对 $\boldsymbol{A}$ 的级数 n 作数学归纳法.

当 $n = 1$ 时，$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}) = 0$，即 $\boldsymbol{A} = 0$. 结论显然成立.

设 $n-1$ 时结论已成立. 又设 $\boldsymbol{A} \in P^{n\times n}$，$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}) = 0$. 由上题结论，$\boldsymbol{A}$ 相似于下述形状的矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{A}_1 \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_1$ 是 $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}_1) = 0$ 的 $n-1$ 级矩阵. 由归纳假设有 $n-1$ 级方阵 $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{Y}_1$，使

$$\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{X}_1\boldsymbol{Y}_1 - \boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{X}_1.$$

又对于 $k = 0,1,2,\cdots$，皆有

$$(\boldsymbol{X}_1 + k\boldsymbol{E})\boldsymbol{Y}_1 - \boldsymbol{Y}_1(\boldsymbol{X}_1 + k\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{A}_1.$$

故可设 $\boldsymbol{X}_1$ 是可逆矩阵. 令

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}_1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{X}_1^{-1} \\ \boldsymbol{X}_1^{-1}\boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{Y}_1 \end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{XY} - \boldsymbol{YX} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{X}_1\boldsymbol{Y}_1 - \boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{X}_1 \end{pmatrix}$$

与 $\boldsymbol{A}$ 相似，不妨设 $\boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{XY} - \boldsymbol{YX})\boldsymbol{T} = \boldsymbol{A}$，则

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{XT})(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{YT}) - (\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{YT})(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{XT}).$$

这就完成了归纳法.

35. 证明：若 $\boldsymbol{A}$ 是 $P^{n\times n}$ 中的一个若尔当块，则与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵一定是 $\boldsymbol{A}$ 的多项式.

证明：取 P 上 n 维线性空间 V，并取定一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$. 作线性变换 $\mathscr{A}$，使它在上述基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$，设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda_0 & & & & \\ 1 & \lambda_0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda_0\end{pmatrix}_{n\times n}.$$

于是

$$\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1=\lambda_0\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2,$$
$$\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2=\lambda_0\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_{n-2}=\lambda_0\boldsymbol{\varepsilon}_{n-2}+\boldsymbol{\varepsilon}_{n-1},$$
$$\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}=\lambda_0\boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}+\boldsymbol{\varepsilon}_n,$$
$$\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_n=\lambda_0\boldsymbol{\varepsilon}_n,$$

即

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{E})\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_3=(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{E})^2\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}=(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{E})^{n-2}\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_n=(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{E})^{n-1}\boldsymbol{\varepsilon}_1,$$

及

$$(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{E})^n\boldsymbol{\varepsilon}_1=\boldsymbol{0}.$$

设 $\mathscr{B}$ 是 V 上线性变换,$\mathscr{B}$ 与 $\mathscr{A}$ 交换,来证明 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{A}$ 的多项式.

考察 $\mathscr{B}\boldsymbol{\varepsilon}_1$,它可由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 表出,设为

$$\begin{aligned}\mathscr{B}\boldsymbol{\varepsilon}_1&=a_0\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_1\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{\varepsilon}_n\\&=a_0\mathscr{E}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_1(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{E})\boldsymbol{\varepsilon}_1+\cdots+a_{n-1}(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{E})^{n-1}\boldsymbol{\varepsilon}_1\\&=[a_0\mathscr{E}+a_1(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{E})+\cdots+a_{n-1}(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{E})^{n-1}]\boldsymbol{\varepsilon}_1\\&\xlongequal{\text{记为}}f(\mathscr{A})\boldsymbol{\varepsilon}_1,\end{aligned}$$

其中 $f(\mathscr{A})$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个多项式.

同样地任一向量 $\boldsymbol{\xi}\in V$ 是 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的线性组合,也可写成 $\boldsymbol{\xi}=g(\mathscr{A})\boldsymbol{\varepsilon}_1$,$g(\mathscr{A})$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个多项式. 于是

$$\begin{aligned}\mathscr{B}\boldsymbol{\xi}&=\mathscr{B}g(\mathscr{A})\boldsymbol{\varepsilon}_1=g(\mathscr{A})\mathscr{B}\boldsymbol{\varepsilon}_1=g(\mathscr{A})f(\mathscr{A})\boldsymbol{\varepsilon}_1\\&=f(\mathscr{A})(g(\mathscr{A})\boldsymbol{\varepsilon}_1)=f(\mathscr{A})\boldsymbol{\xi}.\end{aligned}$$

故 $\mathscr{B}$ 与 $f(\mathscr{A})$ 在 V 的任一元素上的作用都相同,即 $\mathscr{B}=f(\mathscr{A})$.

由于与 $\mathscr{A}$ 交换的线性变换 $\mathscr{B}$ 都是 $\mathscr{A}$ 的多项式,故与 $\boldsymbol{A}$ 交换的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的多项式.

36. $\boldsymbol{A}\in P^{n\times n}$,$C(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{B}\in P^{n\times n}\mid \boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}\}$. 证明:维$(C(\boldsymbol{A}))\geqslant n$.

证明: 因为

$$\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{AX}\Leftrightarrow(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{XT})(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT})=(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT})(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{XT}),$$

所以只要对 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当形进行证明.

当 $\boldsymbol{A}$ 是一个若尔当块时,由上一题知与 $\boldsymbol{A}$ 交换的矩阵是 $\boldsymbol{A}$ 的多项式. 即 $C(\boldsymbol{A})$ 是由

$\boldsymbol{A}$ 的多项式构成的线性空间. 由于若尔当块

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda_0 & & & & \\ 1 & \lambda_0 & & & \\ & 1 & \lambda_0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda_0\end{pmatrix}_{n\times n}.$$

的最小多项式就是特征多项式 $(\lambda-\lambda_0)^n$,故没有不全为零的数 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$ 使

$$a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}=\boldsymbol{O},$$

即 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{A},\cdots,\boldsymbol{A}^{n-1}$ 线性无关. 由此可知维 $C((\boldsymbol{A}))\geqslant n$.

现在设 $\boldsymbol{A}$ 是若尔当标准形

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}_1 & & & \\ & \boldsymbol{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_s\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{J}_1,\boldsymbol{J}_2,\cdots,\boldsymbol{J}_s$ 分别是 $m_1,m_2,\cdots,m_s$ 级的若尔当块.

令

$$\widetilde{C}(\boldsymbol{J}_i)=\left\{\begin{pmatrix}0 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & \boldsymbol{A}_i & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0\end{pmatrix}\middle|\ \boldsymbol{A}_i\in C(\boldsymbol{J}_i)\right\}\cong C(\boldsymbol{J}_i),$$

则

$$\widetilde{C}(\boldsymbol{J}_1)\oplus\widetilde{C}(\boldsymbol{J}_2)\oplus\cdots\oplus\widetilde{C}(\boldsymbol{J}_s)\subseteq C(\boldsymbol{A}).$$

因此

$$维(C(\boldsymbol{A}))\geqslant\sum_{i=1}^{s}维(\widetilde{C}(\boldsymbol{J}_i))=\sum_{i=1}^{s}维(C(\boldsymbol{J}_i))\geqslant\sum_{i=1}^{s}m_i=n.$$

37. V 是 n 维复线性空间. $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 是 V 上线性变换,$\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}$. 证明:

1)$\mathscr{B}$ 不变 $\mathscr{A}$ 的每一个根子空间;

2)若 $\mathscr{A}$ 只有一个非常数不变因子,则 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{A}$ 的多项式;

3)若与 $\mathscr{A}$ 可交换的线性变换仅有 $\mathscr{A}$ 的多项式,则 $\mathscr{A}$ 只有一个非常数不变因子.

证明: 1) 设 $\mathscr{A}$ 的对于特征值 λ_0 的根子空间为 V^{λ_0},

$$V^{\lambda_0}=\{\boldsymbol{\xi}\in V\mid(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{E})^n\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}\},$$

其中 $n=维(V)$.

任意 $\boldsymbol{\xi}\in V^{\lambda_0}$，$(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{E})^m(\mathscr{B}\boldsymbol{\xi})=\mathscr{B}(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{E})^m\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}$. 故 $\mathscr{B}\boldsymbol{\xi}\in V^{\lambda_0}$.

2) 首先，由教材第八章定理 14 及其证明知道，$\mathbf{A}$ 只有一个非常数不变因子 $d(x)$ 的充分必要条件是 $\mathbf{A}$ 的有理标准形是 $d(x)$ 的友矩阵. 设 $d(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$，则 $\mathbf{A}$ 相似于

$$\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&-a_n\\1&0&\cdots&0&-a_{n-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&-a_2\\0&0&\cdots&1&-a_1\end{pmatrix},\quad \mathbf{A}_1=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}.$$

于是 n 维线性空间 V 上线性变换 $\mathscr{A}$ 只有一个非常数不变因子的充要条件是 V 有一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_0,\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}$，$\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵就是上面的 $\mathbf{A}_1$. 于是

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_0,\boldsymbol{\varepsilon}_2=\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1=\mathscr{A}^2\boldsymbol{\varepsilon}_0,$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}_3=\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2=\mathscr{A}^3\boldsymbol{\varepsilon}_0,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}=\mathscr{A}^{n-1}\boldsymbol{\varepsilon}_0,$$

且

$$\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}=\mathscr{A}^n\boldsymbol{\varepsilon}_0=a_1\boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}+a_2\boldsymbol{\varepsilon}_{n-2}+\cdots+a_n\boldsymbol{\varepsilon}_0.$$

由于 $\boldsymbol{\varepsilon}_0,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_0,\cdots,\mathscr{A}^{n-1}\boldsymbol{\varepsilon}_0$ 是 V 的一组基，V 中任意向量 $\boldsymbol{\xi}$，可表成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}&=b_1\mathscr{A}^{n-1}\boldsymbol{\varepsilon}_0+b_2\mathscr{A}^{n-2}\boldsymbol{\varepsilon}_0+\cdots+b_n\boldsymbol{\varepsilon}_0\\&=(b_1\mathscr{A}^{n-1}+b_2\mathscr{A}^{n-2}+\cdots+b_n\mathscr{E})\boldsymbol{\varepsilon}_0\\&\xlongequal{\text{记为}}g(\mathscr{A})\boldsymbol{\varepsilon}_0,\end{aligned}$$

$g(\mathscr{A})$ 是前一等号右端括号中 $\mathscr{A}$ 的多项式.

题设 $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}$，令 $\mathscr{B}\boldsymbol{\varepsilon}_0=f(\mathscr{A})\boldsymbol{\varepsilon}_0$，$f(\mathscr{A})$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个多项式. 计算

$$\begin{aligned}\mathscr{B}\boldsymbol{\varepsilon}_i&=\mathscr{B}\mathscr{A}^{n-i}\boldsymbol{\varepsilon}_0=\mathscr{A}^{n-i}\mathscr{B}\boldsymbol{\varepsilon}_0=\mathscr{A}^{n-i}f(\mathscr{A})\boldsymbol{\varepsilon}_0\\&=f(\mathscr{A})\mathscr{A}^{n-i}\boldsymbol{\varepsilon}_0=f(\mathscr{A})\boldsymbol{\varepsilon}_i,i=0,1,\cdots,n-1.\end{aligned}$$

即线性变换 $\mathscr{B}$ 与 $f(\mathscr{A})$ 在 V 的基向量上有相同的像，故

$$\mathscr{B}=f(\mathscr{A}).$$

3) 反证法. 设 $\mathscr{A}$ 有多于两个非常数不变因子. 其最后两个不变因子 $d_{n-1}(x)$ 及 $d_n(x)$ 必非常数，且 $d_{n-1}(x)\mid d_n(x)$. $\mathscr{A}$ 必有特征值 λ_0，使得 $d_{n-1}(x)$ 与 $d_n(x)$ 至少各含有一个初等因子，分别形为 $(x-\lambda_0)^k$ 与 $(x-\lambda_0)^l$. 因此有 V 的一组基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$，$\mathscr{A}$ 在这组基下矩阵为若尔当形，且若尔当形为

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}(\lambda_0,k)&&&&\\&\boldsymbol{J}(\lambda_0,l)&&&\\&&\boldsymbol{J}(\lambda_1,k_1)&&\\&&&\ddots&\\&&&&\boldsymbol{J}(\lambda_s,k_s)\end{pmatrix}.$$

取线性变换 $\mathscr{B}$,它在 V 的上述基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 下矩阵为 $\boldsymbol{B}$,

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_k &&&&\\ & 2\boldsymbol{E}_l &&&\\ && \boldsymbol{E}_{k_1} &&\\ &&& \ddots &\\ &&&& \boldsymbol{E}_{k_s}\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{E}_i$ 是 i 级单位矩阵,有 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}$,于是 $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}$.

若设有多项式 $f(x)$ 使 $\boldsymbol{B}=f(\boldsymbol{A})$. 则 $\boldsymbol{E}_k=f(\boldsymbol{J}(\lambda_0,k))$,$2\boldsymbol{E}_l=f(\boldsymbol{J}(\lambda_0,l))$,$\cdots$. 最前面两式中四个矩阵都分别有唯一特征值 $1,f(\lambda_0),2,f(\lambda_0)$,于是有 $1=f(\lambda_0)$ 及 $2=f(\lambda_0)$.

这是不可能的. 于是 $\boldsymbol{B}$ 不能是 $\boldsymbol{A}$ 的多项式,即 $\mathscr{B}$ 不能是 $\mathscr{A}$ 的多项式. 矛盾. 故假设不成立,即 $\mathscr{A}$ 只有一个非常数不变因子.

38. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 皆为 $n\times n$ 复矩阵,证明:方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XB}$ 有非零解的充分必要条件是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有公共特征值.

证明:矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XB}$ 可以写成齐次线性方程组. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$,$\boldsymbol{X}=(x_{ij})_{n\times n}$. 把 $\boldsymbol{X}$ 对应到下面的 $n^2\times 1$ 向量

$$\operatorname{vex}(\boldsymbol{X})=\begin{pmatrix}x_{11}\\ x_{21}\\ \vdots\\ x_{n1}\\ x_{12}\\ \vdots\\ x_{n2}\\ \vdots\\ x_{1n}\\ \vdots\\ x_{nn}\end{pmatrix},$$

经过计算,上面的矩阵方程等价于下面的方程组:

$$\left[\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&&&\\ &\boldsymbol{A}&&\\ &&\ddots&\\ &&&\boldsymbol{A}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b_{11}\boldsymbol{E} & b_{21}\boldsymbol{E} & \cdots & b_{n1}\boldsymbol{E}\\ b_{12}\boldsymbol{E} & b_{22}\boldsymbol{E} & \cdots & b_{n2}\boldsymbol{E}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{1n}\boldsymbol{E} & b_{2n}\boldsymbol{E} & \cdots & b_{nn}\boldsymbol{E}\end{pmatrix}\right]\operatorname{vex}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{0}. \tag{1}$$

又 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XB}$ 与 $(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT})(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{XT})=(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{XT})(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{BT})$ 同时有非零解. 对复矩阵 $\boldsymbol{B}$ 有可逆的 $\boldsymbol{T}$ 使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{BT}$ 成上三角形

$$\begin{pmatrix} * & & & & \\ & * & & * & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & * \end{pmatrix}.$$

我们记 $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}, \boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{BT}, \boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{XT}, \boldsymbol{A}_1 = (\tilde{a}_{ij})_{n\times n}, \boldsymbol{B}_1 = (\tilde{b}_{ij})_{n\times n}$，则 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{X}_1\boldsymbol{B}_1$ 与下面的齐次线性方程组等价：

$$\left[\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{b}_{11}\boldsymbol{E} & \tilde{b}_{21}\boldsymbol{E} & \cdots & \tilde{b}_{n1}\boldsymbol{E} \\ \tilde{b}_{12}\boldsymbol{E} & \tilde{b}_{22}\boldsymbol{E} & \cdots & \tilde{b}_{n2}\boldsymbol{E} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{b}_{1n}\boldsymbol{E} & \tilde{b}_{2n}\boldsymbol{E} & \cdots & \tilde{b}_{nn}\boldsymbol{E} \end{pmatrix}\right] \mathrm{vex}(\boldsymbol{X}_1) = \boldsymbol{0},$$

即

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 - \tilde{b}_{11}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} \\ -\tilde{b}_{12}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}_1 - \tilde{b}_{22}\boldsymbol{E} & \cdots & \boldsymbol{O} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\tilde{b}_{1n}\boldsymbol{E} & -\tilde{b}_{2n}\boldsymbol{E} & \cdots & \boldsymbol{A}_1 - \tilde{b}_{nn}\boldsymbol{E} \end{pmatrix} \mathrm{vex}(\boldsymbol{X}_1) = \boldsymbol{0}. \tag{2}$$

方程组(2)有非零解的充分必要条件是系数行列式为零，即

$$\prod_{i=1}^{n} |\boldsymbol{A}_1 - \tilde{b}_{ii}\boldsymbol{E}| = 0, \tag{3}$$

也即有某 $\tilde{b}_{ii}$ 是 $\boldsymbol{A}_1$ 的特征值. 由 $\boldsymbol{B}_1$ 是上三角形矩阵，与 $\boldsymbol{B}$ 相似，故 $\tilde{b}_{ii}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的一个特征值，又 $\boldsymbol{A}_1$ 与 $\boldsymbol{A}$ 相似，$\boldsymbol{A}_1$ 的特征值是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 这说明条件(3)是 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的公共特征值.

又(1)与(2)的等价性说明它们同时有非零解. 且(1)与 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{XB}$ 等价，说明(1)有非零解即 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{XB}$ 有非零解. 最终得到 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{XB}$ 有非零解的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 有公共的特征值.

39. 在 $P^{n\times n}$ 中，证明：若 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BC}, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{AD}$，则有可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{AQ}$.

证明： 由 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BC}$，知 $\boldsymbol{A}$ 的列向量是 $\boldsymbol{B}$ 的列向量的线性组合，同样由 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{AD}$，知 $\boldsymbol{B}$ 的列向量是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量的线性组合，于是 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的列向量组相互等价，它们的秩相等，设为 r.

经初等列变换分别把 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的极大线性无关组移至 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 的前 r 列. 即有可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}_1$ 及 $\boldsymbol{S}_1$ 使 $(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2) = \boldsymbol{AQ}_1$ 及 $(\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2) = \boldsymbol{BS}_1$.

其中 $\boldsymbol{A}_1$ 的 r 个列是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的极大线性无关组，$(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2)$ 的秩与 $\boldsymbol{A}$ 的秩相等，也是 r，故 $\boldsymbol{A}_1$ 的 r 个列是 $(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2)$ 的列向量组的极大线性无关组. $\boldsymbol{A}_2$ 的各列是 $\boldsymbol{A}_1$ 的列的线性组合. 仍用初等列变换可将 $(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2)$ 变成 $(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{O})$. 即有 $(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{O}) = (\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2)\boldsymbol{Q}_2$，$\boldsymbol{Q}_2$ 是可逆矩阵.

同样有 $\boldsymbol{S}_2$ 可逆使$(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{O})=(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2)\boldsymbol{S}_2$. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价，则它们的极大线性无关组等价. 故有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_1^{r\times r}$，使

$$\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{P}_1.$$

于是，令

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_{n-r}\end{pmatrix}_{n\times n}.$$

它是可逆矩阵，且

$$(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{O})=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{O})\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_{n-r}\end{pmatrix}\xlongequal{\text{记为}}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{O})\boldsymbol{P}.$$

因此

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2=(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2)\boldsymbol{S}_2=(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{O})=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{O})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{P}.$$

最后得到

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{P}(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2)^{-1}\xlongequal{\text{记为}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q},$$

其中 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{P}(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2)^{-1}$ 是可逆矩阵.

40. 设 V 上线性变换 $\mathscr{A}$ 可以对角化，$V=V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_s}$ 是 $\mathscr{A}$ 的特征子空间的直和. W 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间，对 $\boldsymbol{w}\in W$，$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2+\cdots+\boldsymbol{w}_s$，$\boldsymbol{w}_i\in V_{\lambda_i}$，$i=1,2,\cdots,s$. 证明每个 $\boldsymbol{w}_i\in W$.

证明：设 $\mathscr{A}$ 的特征多项式为

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{l_1}(\lambda-\lambda_2)^{l_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{l_s}.$$

由教材第七章定理 12，

$$V=V^{\lambda_1}\oplus V^{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus V^{\lambda_s},\tag{1}$$

其中 $V^{\lambda_i}=\{\boldsymbol{v}\in V\mid(\mathscr{A}-\lambda_i\mathscr{E})^{l_i}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}\}$. 由 $V_{\lambda_i}=\{\boldsymbol{v}\in V\mid(\mathscr{A}-\lambda_i\mathscr{E})\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}\}$，知 $V_{\lambda_i}\subseteq V^{\lambda_i}$ 及维$(V_{\lambda_i})\leqslant$维(V^{λ_i}).

再由

$$V=V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_s},\tag{2}$$

得

$$\sum_{i=1}^{s}\text{维}(V_{\lambda_i})=\sum_{i=1}^{s}\text{维}(V^{\lambda_i}),\quad \sum_{i=1}^{s}(\text{维}(V^{\lambda_i})-\text{维}(V_{\lambda_i}))=0.$$

但维$(V^{\lambda_i})\geqslant$维(V_{λ_i})，上式成立推出对所有 i，维$(V^{\lambda_i})=$维(V_{λ_i}).

即对所有 i，$V^{\lambda_i}=V_{\lambda_i}$.

仍据教材第七章定理 12，若 $g(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{k_s}$ 是 $\mathscr{A}|_W$ 的特征多项式，其中 $0\leqslant k_i\leqslant l_i(1\leqslant i\leqslant s)$，则

$$W=W^{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus W^{\lambda_s},$$

$W^{\lambda_i}=\{\boldsymbol{w}\in W\mid(\mathscr{A}-\lambda_i\mathscr{E})^{k_i}\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0}\}$. 由 $W^{\lambda_i}\subseteq V^{\lambda_i}=V_{\lambda_i}$，$W^{\lambda_i}\subseteq W\cap V_{\lambda_i}=W_{\lambda_i}$.

又因 $W_{\lambda_i} \subseteq W^{\lambda_i}$. 故 $W_{\lambda_i} = W^{\lambda_i}$. 于是有

$$W = W_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus W_{\lambda_s}. \tag{3}$$

现在题设 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_s, \boldsymbol{w}_i \in V_{\lambda_i}$ 又由(3)可设 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}'_1 + \cdots + \boldsymbol{w}'_s, \boldsymbol{w}'_i \in W_{\lambda_i} \subset V_{\lambda_i}$. 所以这是 $\boldsymbol{w}$ 按 $V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}$ 的两个分解式,但直和分解决定了它们是相同的. 故每个 $\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{w}'_i \in W$.

41. V 是 n 维复线性空间,$\mathscr{A}$ 是 V 上线性变换. 证明:$\mathscr{A}$ 的若尔当标准形矩阵中若尔当块的数目等于 V 中 $\mathscr{A}$ 的线性无关的特征向量的最大数目.

证明: 设 $\mathscr{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{l_1}(\lambda - \lambda_2)^{l_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{l_s}$,则

$$V = V^{\lambda_1} \oplus V^{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V^{\lambda_s}, \tag{1}$$

其中 $V^{\lambda_i} = \{\boldsymbol{v} \in V \mid (\mathscr{A} - \lambda_i \mathscr{E})^{l_i}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\}, i = 1, \cdots, s$. 又设 V_{λ_i} 是属于 λ_i 的特征子空间,则

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s} \subseteq V. \tag{2}$$

V 的任一个特征向量皆属于某个 V_{λ_i},故由任一组线性无关的特征向量都可由(2)的左端的基线性表出可知,取 V_{λ_1} 的基,V_{λ_2} 的基,$\cdots$,V_{λ_s} 的基合起来,就是 V 中最大数目的一组线性无关的特征向量.

$\mathscr{A}$ 的若尔当标准形,是由 $\mathscr{A}|_{V_1}, \mathscr{A}|_{V_2}, \cdots, \mathscr{A}|_{V_s}$ 的若尔当标准形构成的准对角矩阵. $\mathscr{A}$ 的若尔当标准形中若尔当块的总数等于各 $\mathscr{A}|_{V_i}$ 的若尔当标准形中若尔当块数目的和. 我们只要证明 $\mathscr{A}|_{V_i}$ 的若尔当标准形中若尔当块的数目等于 V_{λ_i} 的维数就行了. 设 $\mathscr{A}|_{V_i}$ 的若尔当标准形为

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}(\lambda_i, k_1) & & & \\ & \boldsymbol{J}(\lambda_i, k_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}(\lambda_i, k_s) \end{pmatrix}.$$

并设这是 $\mathscr{A}|_{V_i}$ 在 V^{λ_i} 的基

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1, (\mathscr{A} - \lambda_i\mathscr{E})\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, (\mathscr{A} - \lambda_i\mathscr{E})^{k_1-1}\boldsymbol{\varepsilon}_1 \left((\mathscr{A} - \lambda_i\mathscr{E})^{k_1}\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \boldsymbol{0}\right),$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}_2, (\mathscr{A} - \lambda_i\mathscr{E})\boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, (\mathscr{A} - \lambda_i\mathscr{E})^{k_2-1}\boldsymbol{\varepsilon}_2 \left((\mathscr{A} - \lambda_i\mathscr{E})^{k_2}\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{0}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}_s, (\mathscr{A} - \lambda_i\mathscr{E})\boldsymbol{\varepsilon}_s, \cdots, (\mathscr{A} - \lambda_i\mathscr{E})^{k_s-1}\boldsymbol{\varepsilon}_s \left((\mathscr{A} - \lambda_i\mathscr{E})^{k_s}\boldsymbol{\varepsilon}_s = \boldsymbol{0}\right)$$

下的矩阵. 我们将证明 $(\mathscr{A} - \lambda_i\mathscr{E})^{k_j-1}\boldsymbol{\varepsilon}_j, 1 \leqslant j \leqslant s$,是 V_{λ_i} 的基. 于是 $\mathscr{A}|_{V_i}$ 的若尔当标准形 $\boldsymbol{J}$ 中若尔当块的数目 s 等于维(V_{λ_i}),就完成了题目的证明.

首先 $(\mathscr{A} - \lambda_i\mathscr{E})^{k_1-1}\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, (\mathscr{A} - \lambda_i\mathscr{E})^{k_s-1}\boldsymbol{\varepsilon}_s$ 都属于 $\mathscr{A} - \lambda_i\mathscr{E}$ 的核($(\mathscr{A} - \lambda_i\mathscr{E})[(\mathscr{A} - \lambda_i\mathscr{E})^{k_j-1}\boldsymbol{\varepsilon}_j] = (\mathscr{A} - \lambda_i\mathscr{E})^{k_j}\boldsymbol{\varepsilon}_j = \boldsymbol{0}, j = 1, 2, \cdots, s$),所以它们是 V_{λ_i} 中 s 个线性无关的向量.

又设 $\boldsymbol{w} = \sum\limits_{j=1}^{s}\sum\limits_{m=1}^{k_j} a_{jm}(\mathscr{A} - \lambda_i\mathscr{E})^{m-1}\boldsymbol{\varepsilon}_j \in V_{\lambda_i}$,则

$$\begin{aligned}\mathbf{0} = (\mathscr{A}-\lambda_i\mathscr{E})\boldsymbol{w} &= \sum_{j=1}^{s}\sum_{m=1}^{k_j} a_{jm}(\mathscr{A}-\lambda_i\mathscr{E})^m\boldsymbol{\varepsilon}_j \\ &= \sum_{j=1}^{s}\sum_{m=1}^{k_j-1} a_{jm}(\mathscr{A}-\lambda_i\mathscr{E})^m\boldsymbol{\varepsilon}_j.\end{aligned}$$

由于最后和号中各元素线性无关，故它们前面的系数全部为零，即

$$a_{jm}=0,\quad j=1,2,\cdots,s;\quad m=1,2,\cdots,k_j-1.$$

因此

$$\boldsymbol{w}=\sum_{j=1}^{s} a_{jk_j}(\mathscr{A}-\lambda_i\mathscr{E})^{k_j-1}\boldsymbol{\varepsilon}_j.$$

这说明 V_{λ_i} 中任一元 $\boldsymbol{w}$ 是$\{(\mathscr{A}-\lambda_j\mathscr{E})^{k_j-1}\boldsymbol{\varepsilon}_j, 1\leqslant j\leqslant s\}$ 的线性组合，又因为它们线性无关，所以组成 V_{λ_i} 的一组基，即得 $s=$ 维(V_{λ_i}).

一、2014年考研数学真题及详解

数学一

数学二

数学三

二、大学基础数学各学科公式定理

微积分

线性代数

概率统计

三、其他下载

考研数学公式定理

高数上册期末测试

高数下册期末测试