第七章测试 2017.06.01

1，设矩阵 A,B 相似，其中 $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & x\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}y & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，

（1） 求 x,y 的值； （2） 求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$； （3）求 A^n

2，设 V 是实数域上由全部 2 阶方阵按矩阵的加法和数量乘法构成的线性空间，

$E_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},E_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},E_{21}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},E_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 是 V 的一组基向量，

已知 V 上的线性变换 $\mathscr{A}:V\to V$ 满足如下关系

$$\mathscr{A}(E_{11})=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \mathscr{A}(E_{12})=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \mathscr{A}(E_{21})=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \mathscr{A}(E_{22})=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix},$$

（1）求 $\mathscr{A}$ 在 $\left\{E_{ij}\right\}$ 这组组基下的矩阵；

（2）求 $\mathscr{A}$ 的特征值及其对应的全部特征向量；

（3）判断是否存在一组基向量，使得 $\mathscr{A}$ 在该组基下的矩阵是对角矩阵？

如果存在，求 $\left\{E_{ij}\right\}$ 到该组基的过渡矩阵.

3，在实数域上的三维线性空间 $\mathbb{R}^3$ 中定义如下变换 $\mathscr{A}$ ：

对于 $\forall\alpha=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$，令 $\mathscr{A}(\alpha)=\begin{pmatrix}2x_1-x_2\\ x_1\\ x_2+2x_3\end{pmatrix}$.

（1）证明：$\mathscr{A}$ 是线性变换， 并证明 $\mathscr{A}$ 可逆；

（2） 给定 $\mathbb{R}^3$ 中的一组基向量 $\eta_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$，$\eta_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$，$\eta_3=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$，

求 $\mathscr{A}$ 在该组基下的矩阵.

4，已知 4 阶方阵 A 的秩为 3，且满足 $A^2+A=O$ ，

（1）求 A 的特征值；（2）证明 A 相似于一个对角矩阵并求该对角矩阵.

5，已知 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 是线性空间 V 的一组基，$\mathscr{A}:V\to V$ 是线性变换，且 $\mathscr{A}$ 在该组基下的矩阵为

$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 5 & 5\\ 2 & -2 & 1 & -2\end{pmatrix}$， 求 $\mathscr{A}$ 的秩、零度，并求 $\mathscr{A}$ 的值域 $\mathscr{A}(V)$ 与核 $\mathscr{A}^{-1}(O)$.

儿童节快乐！