Evaluación Continua 3

Lucas Saurin

5 de junio de 2023

1. Consigna

Se desea conocer la trayectoria de una partícula que se mueve en el plano, dada por la curva $(x(t), y(t))$. Para ello se cuenta con dos sensores, que determinan la posición de la partícula: uno mide la posición en el eje x cada 2 segundos, y otro en el eje y cada 1 segundo. En el inicio de las mediciones ($t = 0$) se sabe que la partícula se encuentra a 2cm del origen en la dirección x y se mueve a una velocidad $\frac{\pi}{2} cm/s$ en la dirección y, y después de 6 segundos llega al origen a la misma velocidad inicial, pero en dirección negativa de y. Las mediciones de posición de los sensores se muestran en la siguiente tabla:

t[s]	Sensor x[cm]	Sensor y[cm]
0	2.0	0.0
1	-	1.0
2	1.5	0.0
3	-	-1.0
4	0.5	0.0
5	-	1.0
6	0.0	0.0

Tabla 1: Valores sensados.

(a) Realice interpolaciones por spline cúbicos sujetos para determinar expresiones de $x(t)$ y de $y(t)$ utilizando los datos de la tabla, y las velocidades inicial y final que describe el problema.

(b) Grafique la trayectoria de la partícula y determine la posición y el vector velocidad a los 3 segundos.

(c) Recuerde que la logitud de la trayectoria de la partícula durate lo T primeros segundos está dada por $\int_0^T \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2} dt$. Estimar la distancia recorrida por la partícula durante el proceso. Dar el resultado con 6 cifras exactas.

2. Introducción

En este informe se utilizarán unos pocos datos de posición dados por sensores para aproximar no solo la trayectoria de una partícula, sino también para calcular la distancia recorrida por la misma. Para ello se hará uso de métodos numéricos de interpolación e integración, para cuyos algorítmos se utilizará el software Octave.

3. Interpolacion

El primer paso (y consigna) que realizaremos es la aproximación de la trayectoria, a partir de la cual haremos el resto de cálculos.

Como especifica el problema, utilizaremos la técnica de Splines Cúbicos. Estos tienen la ventaja de generar curvas con continuidad C^2, es decir que, además de ser continuas, su derivada primera y segunda también lo son. En nuestro caso, al conocer las velocidades iniciales y finales (condiciones de frontera) de la partícula usaremos Splines Cúbicos Sujetos.

A partir de esta interpolación obtendremos las funciones $S_x(t)$ y $S_y(t)$ definidas por partes, donde cada intervalo estará dado por los puntos interpolantes y que cumplen con las siguientes condiciones:

a. $S_x(t)$ es un polinomio cúbico, denotado $S_{x_j}(x)$, en el subintervalo $[t_j, t_{j+1}]$ para cada $j = 0, 1, ..., n-1$.

b. $S_x(t_j) = x(t_j)$ para cada $j = 0, 1, ..., n$.

c. $S_{x_{j+1}}(t_{j+1}) = S_{x_j}(t_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, ..., n-1$.

d. $S'_{x_{j+1}}(t_{j+1}) = S'_{x_j}(t_{j+1})$ para cada $j = 1, 2, ..., n-1$.

e. $S''_{x_{j+1}}(t_{j+1}) = S''_{x_j}(t_{j+1})$ para cada $j = 1, 2, ..., n-1$.

f. $S'_x(t_0) = x'(t_0)$ y $S'_x(t_n) = x'(t_n)$.

Lo mismo para S_y.

Para los puntos $x_0, x_1, ..., x_n$ entonces tendremos:

$$S_x(t) = \begin{cases} a_0 + b_0 t + c_0 t^2 + d_0 t^3 & t_0 \leq t \leq t_1 \\ a_1 + b_1 t + c_1 t^2 + d_1 t^3 & t_1 < t \leq t_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{n-1} + b_{n-1} t + c_{n-1} t^2 + d_{n-1} t^3 & t_{n-1} < t \leq t_n \end{cases}$$

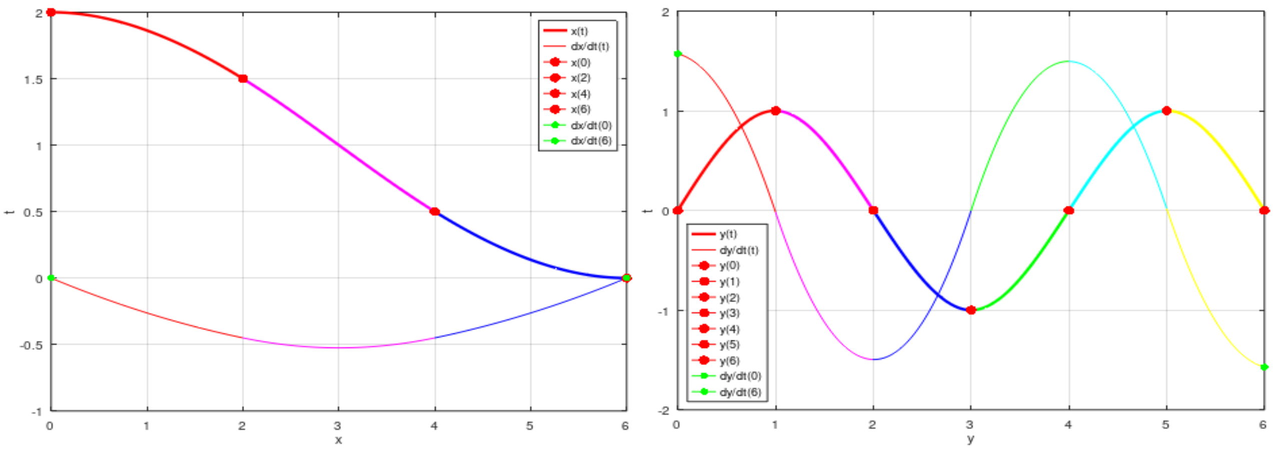
Vemos que además es facilmente calculable su derivada, la cual usaremos para calcular la distancia más adelante.

Extendiendo la tabla anterior, podemos visualizar toda la información de la siguiente forma:

t[s]	Posicion x[cm]	Posicion y[cm]	Velocidad x'[cm/s]	Velocidad y'[cm/s]
0	2.0	0.0	0.0	$\frac{\pi}{2}$
1	-	1.0	-	-
2	1.5	0.0	-	-
3	-	-1.0	-	-
4	0.5	0.0	-	-
5	-	1.0	-	-
6	0.0	0.0	0.0	$-\frac{\pi}{2}$

Tabla 2: Valores sensados

A partir de estos datos, utilizando la función $funcion\_spline$, obtendremos una funcion correspondiente al Spline Cúbico tanto de $x(t)$ e $y(t)$ como de sus primeras derivadas, los cuales nos servirán para graficar la trayectoria de la partícula.



(a) (b)

Figura 1: Gráficas de las componentes x (a) e y (b) con cada tramo diferenciado por color.

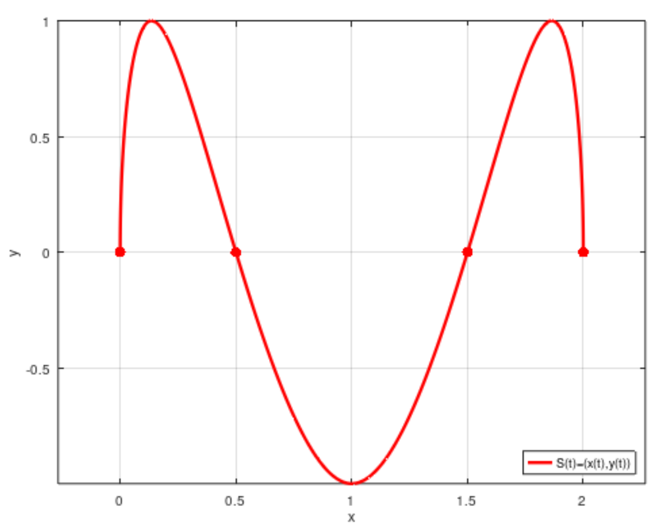


Figura 2: Trayectoria seguida por la partícula.