5 - Transformada Z

Mediante la Transformada Z y *transformaciones conformes* vamos a poder transformar un sistema de tiempo continuo en uno de tiempo discreto

Definición

Dada una **ecuación diferencial**, podemos utilizar la **Transformada de Laplace** para obtener una razón de polinomios en s. Recordemos que la Transformada de Laplace se define como

$$\mathcal{L}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt, \quad s = \sigma + j\omega$$

Acá podemos ver que, si $\sigma = 0$ o lo que es lo mismo $s = j\omega$, entonces tenemos la **Transformada Continua de Fourier**

$$\int_0^\infty f(t) e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}\{f(t)\}$$

En el caso de **ecuaciones en diferencia** (tiempo discreto) tenemos que utilizar la **Trasnformada Z** para obtener una razón de polinomio en z. La transformada Z **se define como**

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}, \quad \text{donde } z \in \mathbb{C}$$

Es decir que z, como s también es un número complejo, que podemos expresar como $z = re^{j\omega}$.
Se puede ver que, en este caso, si $|z| = 1$ o lo que es lo mismo $z = e^{j\omega}$ entonces estamos frente a la **Transformada de Fourier de Tiempo Discreto**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \mathcal{F}\{x[n]\}$$

Además, para el caso de sistemas causales podemos usar la TZ **unilateral**:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Propiedades

- **Unicidad**: para cada secuencia $x[n]$ corresponde una única transformada $X(z)$
- **Linealidad**: si $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$ y $y[n] \xleftrightarrow{Z} Y(z)$, entonces

$$\alpha x[n] + \beta y[n] \xleftrightarrow{Z} \alpha X(z) + \beta Y(z), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

- **Convolución**: si $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$ y $y[n] \xleftrightarrow{Z} Y(z)$, entonces

$$x[n] * y[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)Y(z)$$

- **Desplazamiento temporal**: Si $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$ entonces $x[n-n_0] \xleftrightarrow{Z} X(z)z^{-n_0}$
- **Desplazamiento en frecuencia**: si $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$, entonces

$$e^{j\Omega_0 n}x[n] \xleftrightarrow{Z} X(e^{-j\Omega_0}z)$$

Con estas propiedades podemos ver que, por ejemplo, para una secuencia causal

$$x[n] = [1.5, 1, 2, 2, 2, 1.5, 0]$$

tendremos que su TZ será

$$X(z) = 1.5 + z^{-1} + 2z^{-2} + 2z^{-3} + 2z^{-4} + 1.5z^{-5}$$

Demostración de Teorema de desplazamiento

Dada una $x[n]$ definimos $x_1[n] = x[n-1]$, es decir $x[n]$ desplazada una muestra. Entonces la TZ será

$$\begin{aligned}
x_1[n] \xleftrightarrow{Z} X_1(z) &= x_1[0] + x_1[1]z^{-1} + x_1[2]z^{-2} + ... + x_1[n]z^{-n} \\
&= x[-1] + x[0]z^{-1} + x[1]z^{-2} + ... + x[n-1]z^{-n}, \quad x_1[n] = x[n-1] \\
&= x[-1] + z^{-1}\left(x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-1} + ...\right) \\
x_1[n] \xleftrightarrow{Z} X_1(z) &= x[-1] + z^{-1}X(z)
\end{aligned}$$

Donde, si x es causal, entonces

$$x[n-1] \xleftrightarrow{Z} z^{-1}X(z)$$

y, generalizando

$$x[n-n_0] \xleftrightarrow{Z} z^{-n_0}X(z)$$

De Laplace a Z

Para muestrear una señal se utiliza un *muestreado*, que no es mas que un *tren de impulsos ponderado*. Para el muestreo $x^*(t)$ de la señal $x(t)$ tenemos entonces que

$$x^*(t) = \delta_t(t)x(t), \quad \text{donde } \delta_t(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT)$$

$$x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

La cual tiene Transformada de Laplace

$$\begin{aligned} X^*(s) = \mathcal{L}\{x^*(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-nTs} \end{aligned}$$

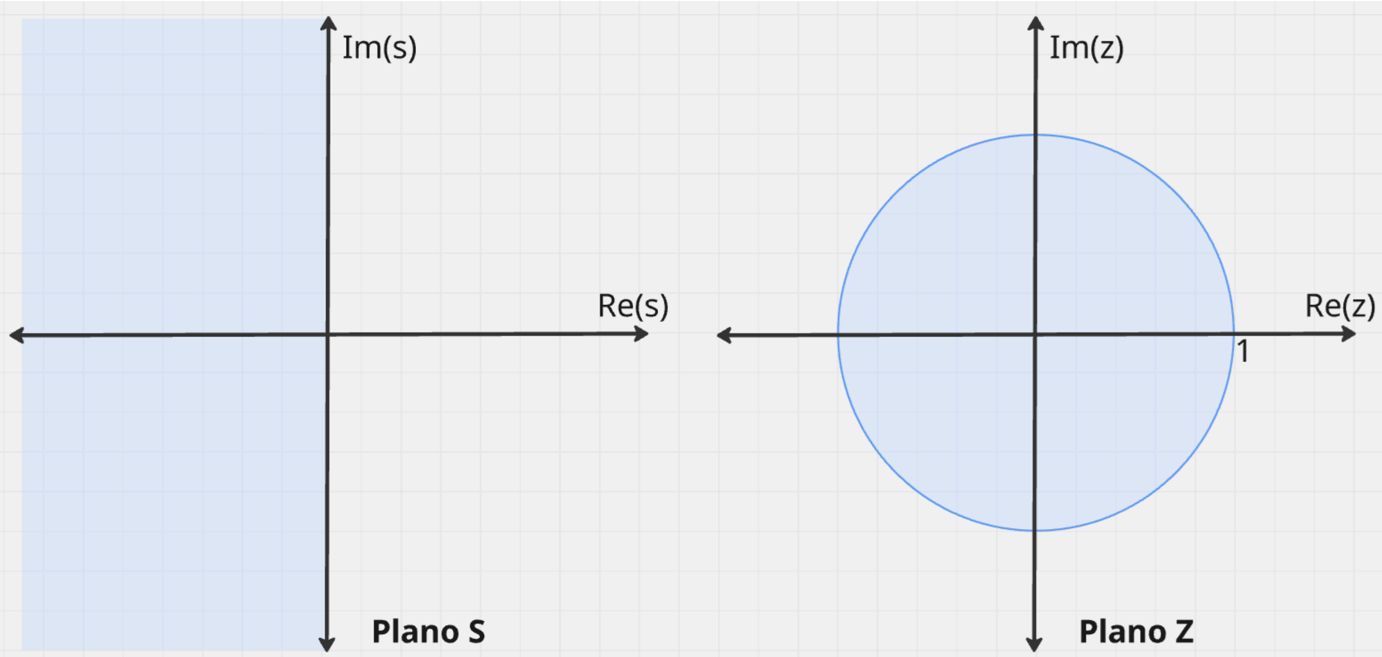
con esto y redefiniendo $e^{sT} = z$

$$X(z) = Z\{x^*(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)z^{-n}$$

Asi vemos que la Transformada z de una secuencia $x(nT)$ no es más que **la Transformada de Laplace de la señal muestreada** y con e^{sT} sustituida por z.
Esto a su vez define un mapeo entre el plano S y el plano Z, denominado *mapeo ideal*:

$$s = ln\left(\frac{z}{T}\right)$$

La correspondencia que genera este mapeo entre el plano S y el plano Z es la siguiente



El semiplano de valores reales negativos (sombreado celeste) corresponde al interior del círculo unitario en el plano Z. Además, el eje de valores imaginarios ($s = j\omega$) corresponde a los valores de frecuencia de la señal (como dijimos, la transformada continua de Fourier) y su correspondencia en el plano Z es el "borde" del círculo unitario ($|z| = 1 \Leftrightarrow z = e^{j\omega}$). Para estos valores $z = e^{j\omega}$, el angulo $\omega = 0$ corresponde a una frecuencia 0, mientras $\omega = \pi$ corresponde a la mitad de la frecuencia muestral $f_m/2$

Transformaciones Conformes

El caso que más nos interesa es aquel en el que debemos **obtener la ecuación en diferencias a partir de la ecuación diferencial**, que es la define la dinámica del sistema en tiempo continuo.
Un método para lograr esto es utilizando **transformaciones conformes** que mapean el plano S en el plano Z. Los pasos involucrados son:

1. Obtener la función de transferencia del sistema en cuestión.
2. Aplicar una transformación confrome para mapear el plano S en el plano Z y obtener así la expresión de la función de transferencia del sistema en el dominio de Z.
3. Aplicar la propiedad de desplazamiento para obtener la ecuación en diferencias del sistema.

Hay ciertas condiciones que debe cumplir una transformación conforme:

1. El eje imaginario del plano S debe ser mapeado en el círculo unitario del plano z, esta condición es necesaria para preservar las características de respuesta en frecuencia del sistema continuo.
2. El semiplano izquierdo del plano S ($Re(s) < 0$) debe ser mapeado en el interior del círculo unitario del plano Z.

Existen distintos mapeos del plano S al plano Z:

- Mapeo ideal: $s = ln(z/T)$ o $z = e^{sT}$
- Transformación conforme de **Euler**:

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T}$$

- Transformación conforme **Bilineal**:

$$s = \frac{2}{T}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

Transformación de Euler

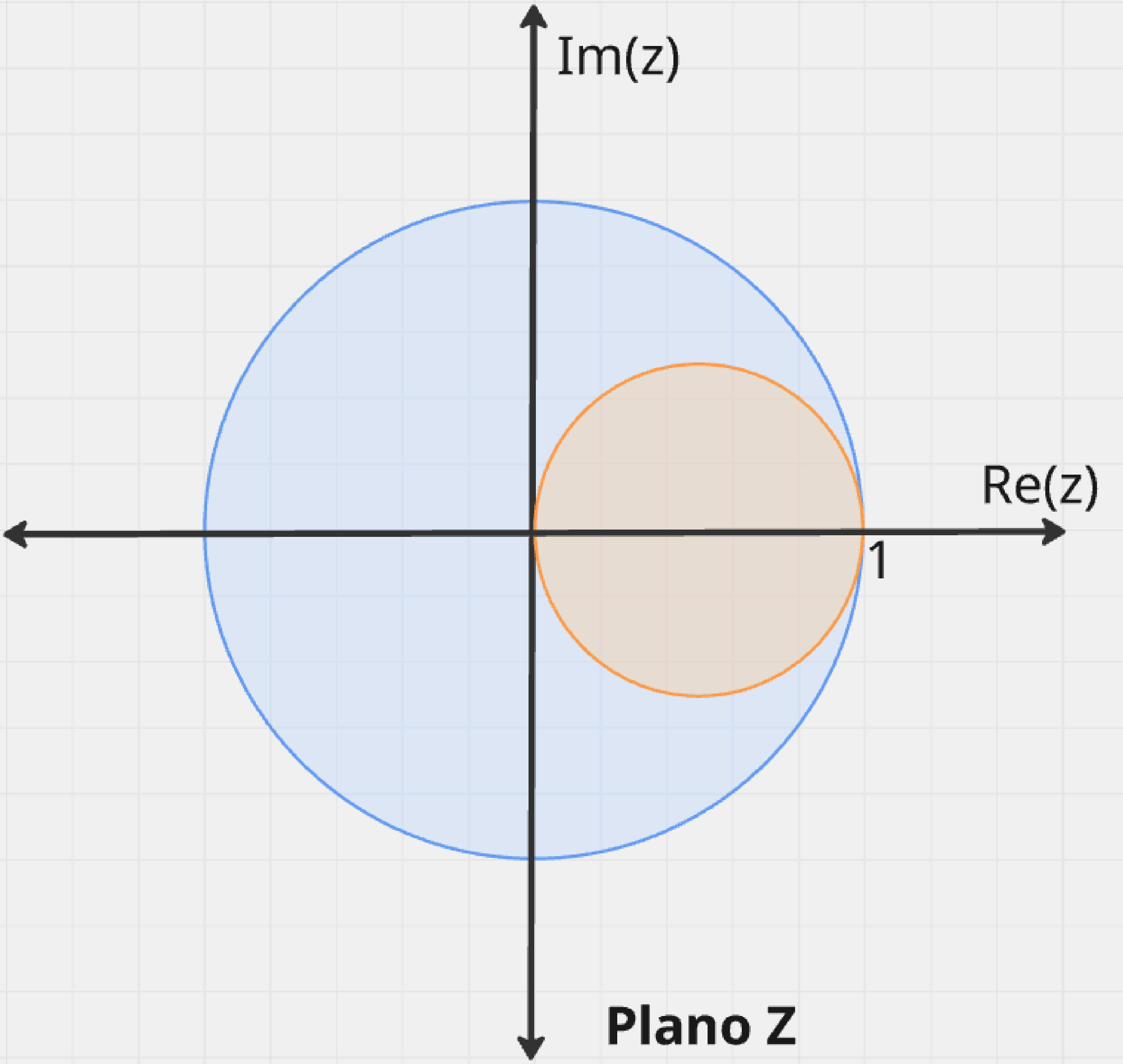
El enfoque que busca es el de aproximar la derivada continua por una *diferencia finita*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y[n] - y[n-1]}{T}$$

Teniendo la Transformación de Laplace de la derivada, si la aproximamos diferencias finitas obtenemos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(\frac{dy}{dt}\right) &= Z\left(\frac{dy}{dt}\right) \\
sY(s) &= Z\left(\frac{y[n]-y[n-1]}{T}\right) \\
sY(s) &= \frac{(1-z^{-1})Y(z)}{T}, \quad Y(s)=Y(z) \\
s &= \frac{1-z^{-1}}{T}
\end{aligned}
$$

Esta transformación genera el siguiente mapeo



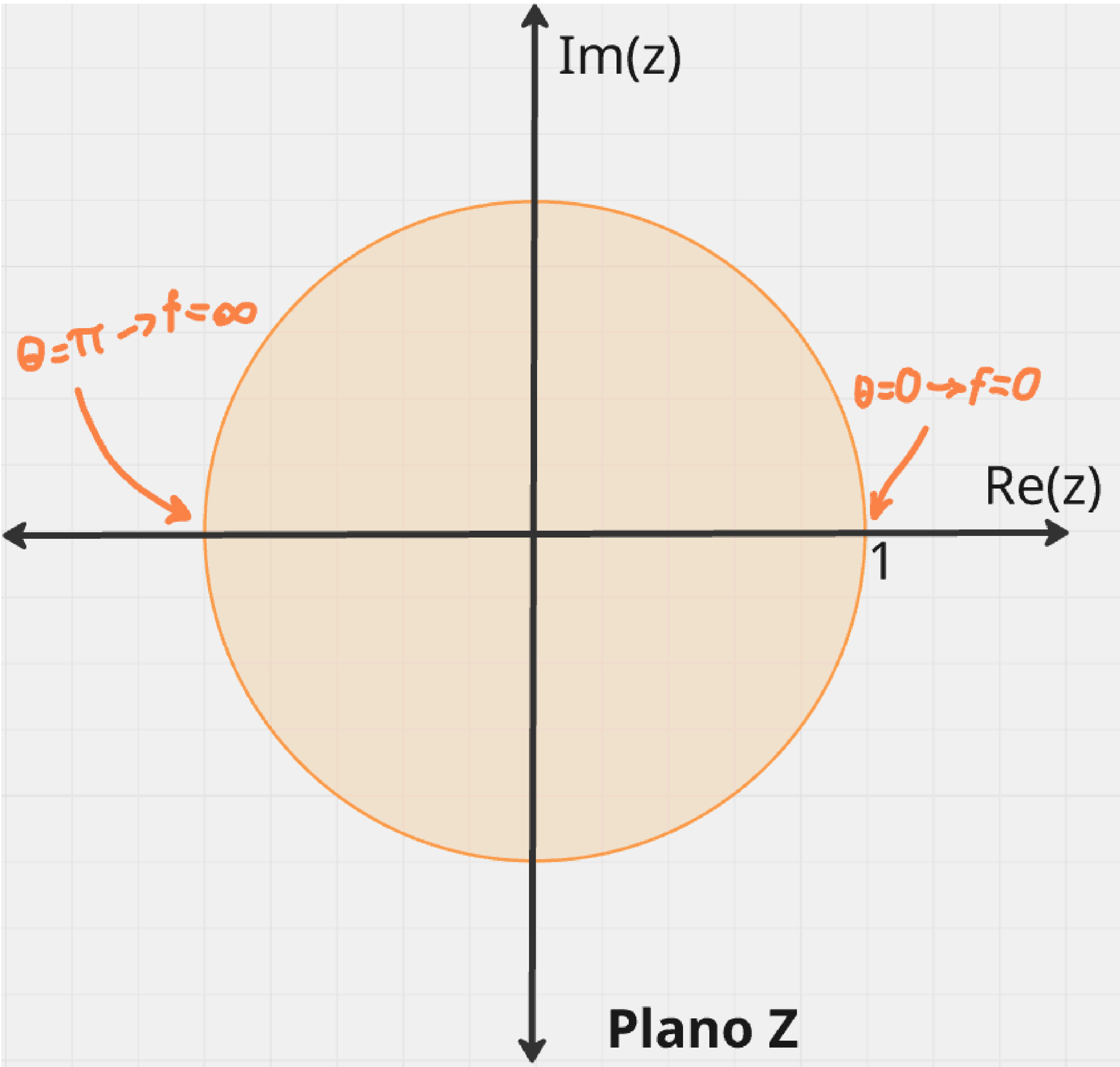
Puede verse que este mapeo puede utilizarse únicamente en mapeo de sistemas pasabajo o pasabanda, ya que no cumple del todo las condiciones de mapeo. La condición de que el eje imaginario del plano s se mapee en el círculo unitario es aceptablemente cercana hasta $\theta < \pi/6$ rad.

Transformación Bilineal

Se define como

$$s = \frac{2}{T}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

y produce el siguiente mapeo



Se puede ver que el círculo unitario coincide con el del mapeo ideal, pero aún así las frecuencias no son mapeadas de forma lineal.