3 - Espacios

Señales y Vectores

Considerando las señales como vectores de un espacio n-dimensional, podemos aprovechar muchas herramientas del álgebra lineal para entender su procesamiento

Los vectores son objetos matemáticos, definidos como colecciones o arreglos de datos que forman una entidad independiente. Podemos ver una señal en el espacio N-dimensional como un vector $[x_1, x_2, ..., x_N]$, definido como una N/upla *ordenada* de números:

$$x = [x_n]; n \in N; x_n \in \mathbb{R}; x \in \mathbb{R}^N$$

Normas

La norma provee una medida del **tamaño** de las señales. La norma de un vector/señal x es un número real positivo que toma el valor 0 solo cuando $x = 0$.

Una norma muy utilizada es la **norma-p**, definida como:

$$||x||_p = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k|^p\right)^{1/p} & 1 <= p < \infty \\ sup|x| & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

Casos particulares de norma p

La norma 1 o **accion** de la señal:

$$||x||_1 = \sum_{k=1}^{N} |x_k|$$

La norma 2 o **longitud** del vector:

$$||x||_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} |x_k|^2}$$

Existen varios parámetros relacionados a esta norma:

- **Energía**: es el cuadrado de la norma 2

$$E(x) = ||x||_2^2$$

- **Potencia** o **valor cuadrático medio**:

$$P(x) = lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} E(x) = lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} ||x||_2^2$$

- Raiz del valor cuadrático medio (**RMS**):

$$RMS(x) = \sqrt{P(x)}$$

La norma infinito o **amplitud** de la señal:

$$A(x) = ||x||_\infty = sup_{n \in [1,N]} |x_n|$$

La norma 0 es llamada una **cuasinorma**, ya que no cumple con la *desigualdad del triángulo*. Vendría a ser la cantidad de elementos del vector distintos de cero.

Existe otra medida de interes de las señales, como el **valor medio**

$$m(x) = lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_k$$

No confundir esto como la norma 1 de la señal, ya que en este caso no estamos sumando el valor absoluto

Producto Interno

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1^* + x_2 y_2^* + ... + x_N y_N^* = \sum_{k=1}^{N} x_k y_k^*$$

o

$$\langle x, y \rangle = ||x||_2 ||y||_2 cos\phi$$

donde y^* representa el conjugado (en caso de tratarse de valores complejos).
Podemos ver que el producto interno de una señal/vector consigo mismo es igual a su norma 2 al cuadrado:

$$\langle x, x \rangle = \sum_{k=1}^{N} x_k^2 = ||x||_2^2$$

Relación con la proyección de vectores

Definimos la proyección de x sobre y como

$$proy_y x = ||x||_2 cos\phi$$

Por lo que podemos verla como

$$proy_y x = \frac{\langle x, y \rangle}{||y||_2}$$

Ahora podemos ver que el producto interno nos da una idea del aporte de una señal sobre otra. En el caso particular de que la señal sobre la que proyectamos tenga norma 2 unitaria, **producto interno es directamente una medida del *parecido* entre ambas señales**

Espacios de señales

Un conjunto de señales S son una colección de señales que cumplen una cierta propiedad o prueba. Una señal solo nos interesa en relación con otras señales del conjunto (si tiene mas energia, mas ceros, etc), por lo

que se suele caracterizar de alguna forma la diferencia entre dos elementos de un conjunto, asignando a cada par un número real positivo (por ejemplo, la distancia geométrica). Para definir esta "distancia" se necesita un *funcional* $d : \{x, y\} \rightarrow \mathbb{R}$.
Si este funcional cumple con las siguientes propiedades, entonces se le llama **métrica**

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
   En ese caso además llamamos a (S, d) **espacio métrico**. En el caso de que los elementos del conjunto sean señales, lo llamamos **espacio de señales**. Es importante notar que dos métricas distintas sobre el mismo conjunto de señales determinan espacios distintos.

Distancia

La distancia es un concepto asociado a un espacio que nos permite darle un sentido geométrico a través de una *métrica*. Una métrica puede derivarse a partir de una norma, aunque pueden existir métricas que no deriven de una norma. Hay que tener en cuenta que la norma refiere a un solo elemento, mientras que la distancia se refiere a dos. Aún así, puede verse la norma como la *distancia del elemento al origen*.

Las **distancias de Minkowski** son distancias que se definen como la norma-p de la diferencia de dos vectores del espacio.

$$d(x, y) = ||x - y||_p = L_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p} \quad ; \quad p >= 1$$

- Distancia **Manhattan** ($p = 1$):

$$L_1(x, y) = \sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|$$

- Distancia **Euclidiana** ($p = 2$):

$$L_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^2}$$

- Distancia **máximo** ($p = \infty$):

$$L_\infty(x, y) = max_{i=1}^{N} |x_i - y_i|$$

La **distancia en habla ruidosa** es una alternativa a la *relación señal-ruido (SNR)*, mejor ya que menor ruido no significa mayor *inteligibilidad* de las palabras.

Espacios vectoriales

Una vez tenemos un conjunto de señales con una métrica asociada, para manipularlo necesitamos una estructura algebraica, proporcionada por un **espacio vectorial**.
Un espacio vectorial S es un cuadruplete $(S, K, +, \cdot)$ (conjunto de vectores, campo de escalares, operación

de adición y operación de producto por un escalar) y satisfacen **9 propiedades** (consultar libro), entre las que se encuentra el cierre en la adición, cierre en el producto por un escalar, etc.

En general el campo de escalares es $K = \mathbb{C}$, la adición se define como

$$x + y = [x_i + y_i]_{i \in [1,N] \subset \mathbb{N}}$$

y el producto por un escalar $\alpha \in K$ como

$$\alpha x = [\alpha x_i]_{i \in [1,N] \subset \mathbb{N}}$$

Subespacios

Podemos demostrar que un subconjunto no vacío del conjunto de señales que constituye un espacio vectorial V es también un espacio vectorial V_0, que denominamos **subespacio vectorial**.

Espacio normado

Un espacio vectorial con una definición de norma constituye un **espacio normado** si *la norma es finita para todos sus elementos*. Por ejemplo, tomando la norma-p, podemos definir el espacio normado

$$\{x / ||x||_p < +\infty\}$$

Diferencia entre espacio metrico y espacio vectorial

La principal diferencia entre estos es que el espacio métrico los definimos teniendo un conjunto y "agregando" una métricas y esto nos proporciona una **estructura geométrica**. En el caso de el espacio vectorial, la **estrucutra algebraica** nos la proporciona el conjunto de manera intrínseca, no es algo que podemos obtener cambiando el campo de escalares, la adición o el producto por un escalar.

Bases

Conjuntos generadores

Dado un conjunto de N vectores $X_0 = x_i$, con $N < \infty$, se define la **combinación lineal** de los vectores x_i como

$$x = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i$$

donde α_i son escalares.

Se dice que un vector es **linealmente dependiente** del conjunto X_0 si y sólo si se puede escribir x como combinación lineal de los vectores x_i. En caso contrario, el vector es **linealmente independiente** de los vectores x_i.

Al variar los coeficientes α_i se generan todas las combinaciones lineales posibles de los x_i y el resultado es un conjunto X de nuevos vectores x_j que heredan muchas propiedades de los x_i generadores. Si a su vez el nuevo conjunto X constituye un espacio vectorial X, etnocnes se dice que el conjunto X_0 es un **conjunto**

generador del espacio. También se puede decir que para todo vector $x \in X$ existe un conjunto de escalares $A = \{\alpha_i\}$ tales que x se puede expresar como combinación lineal de los x_i.

Un **conjunto linealmente independiente** es un conjunto de vectores que cumplen con la condición

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [1, N]\, (\alpha_i = 0)$$

También puede definirse como que ningún vector del conjunto puede expresarse como combinación lineal de los demás vectores del mismo conjunto.

El conjunto de vectores X_0 es una **base** del espacio vectorial X si X_0 es *linealmente independiente* y es un *conjunto generador* de X. A partir de esto, la **dimension** D de un espacio vectorial es el número de vectores de una base de dicho espacio, y puede demostrarse que cualquier conjunto de $N > D$ vectores del espacio será *linealmente dependiente*. Particularmente nos interesa saber que *todo conjunto de N vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^N$ será una base para $\mathbb{R}^N$*

Ortogonalidad y Ortonormalidad

Un conjunto de vectores X_0 es **ortogonal** si

$$\begin{aligned} \langle x_i, x_j \rangle &= 0 \quad \forall i \neq j \text{ y} \\ \langle x_i, x_j \rangle &= k \quad \forall i = j \end{aligned}$$

donde k es una constante escalar distinta de cero. Si además $k = 1$, entonces el conjunto es **ortonormal**.

Si un conjunto X_0 *ortonormal* es base de un espacio X y se quiere expresar un vector como combinación lineal de los elementos de X_0, entonces los coeficientes α_i se pueden obtener simplemente mediante el *producto interno* entre el vector y cada uno de los elementos de la base. Es decir:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_N x_N \\ &= \langle x, x_1 \rangle x_1 + \langle x, x_2 \rangle x_2 + \ldots + \langle x, x_N \rangle x_N \end{aligned}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_N x_N \\ \langle x, x_1 \rangle &= \alpha_1 \langle x_1, x_1 \rangle + \alpha_2 \langle x_2, x_1 \rangle + \ldots + \alpha_N \langle x_N, x_1 \rangle && \text{(producto interno por } x_1 \text{ de ambos lados)} \\ \langle x, x_1 \rangle &= \alpha_1 (1) + \alpha_2 (0) + \ldots + \alpha_N (0) && \text{(por ortonormalidad)} \\ \langle x, x_1 \rangle &= \alpha_1 = \sum_{n=1}^{N} x_n x_n^* \end{aligned}$$

Como vemos, en esta forma cada coeficiente es una medida del *parecido* entre el vector y el elemento de la base. A su vez, como vimos antes al analizar el producto interno como proyección, conceptualmente el coeficinete es la *componente de la señal x en elemento x_i*.

Aproximación de señales

Si queremos aproximar la señal $y \in \mathbb{R}^M$ mediante una combinación lineal del conjunto *ortonormal* $X_0 = x_1, x_2, ..., x_N$, debemos encontrar los coeficientes α_k que minimicen el error entre la combinación lineal y la señal y. El criterio más intuitivo para medir el error es el cuadrado de la longitud del *vector diferencia* entre la señal y la aproximación, que se conoce como **error cuadrático total**:

$$\epsilon = ||e||_2^2 = ||y - \tilde{y}||_2^2 = \sum_{j=1}^{M} (y_j - \tilde{y_j})^2 = \sum_{j=1}^{M} \left(y_j - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_{ij} \right)^2$$

Para encontrar el mínimo del error debemos resolver $\nabla_\alpha \epsilon = 0$

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha_k} \\
0 &= \frac{\partial \sum_{j=1}^{M} \left(y_j - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_{ij} \right)^2}{\partial \alpha_k} \\
0 &= 2 \sum_{j=1}^{M} \left(y_j - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_{ij} \right) \frac{\partial \left(y_j - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_{ij} \right)}{\partial \alpha_k} \qquad \text{(regla de la cadena)} \\
0 &= 2 \sum_{j=1}^{M} \left(y_j - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_{ij} \right) \left(\frac{\partial y_j}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_{ij}}{\partial \alpha_k} \right) \\
0 &= 2 \sum_{j=1}^{M} \left(y_j - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_{ij} \right) (-x_{kj}); \quad \frac{\partial y_j}{\partial \alpha_i} = 0; \quad \forall i \neq k \left(\frac{\partial \alpha_i x_{ij}}{\partial \alpha_k} = 0 \right) \\
0 &= -2 \sum_{j=1}^{M} \left(y_j - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_{ij} \right) x_{kj} \\
0 &= -2 \sum_{j=1}^{M} \left(y_j x_{kj} - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_{ij} x_{kj} \right) \\
\frac{0}{-2} &= \sum_{j=1}^{M} y_j x_{kj} - \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_{ij} x_{kj} \\
\sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_{ij} x_{kj} &= \sum_{j=1}^{M} y_j x_{kj} \\
\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \sum_{j=1}^{M} x_{ij} x_{kj} &= \langle y, x_k \rangle \\
\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \langle x_i, x_k \rangle &= \langle y, x_k \rangle \\
\alpha_k \langle x_k, x_k \rangle &= \langle y, x_k \rangle; \quad \forall i \neq k \, (\langle x_i, x_k \rangle = 0) \\
\alpha &= \frac{\langle y, x_k \rangle}{\langle x_k, x_k \rangle}
\end{aligned}$$

Si además el conjunto es ortonormal, vemos que $\alpha_i = \langle y, x_i \rangle$. Este resultado demuestra que el conjunto de coeficientes obtenido mediante proyecciones ortogonales minimiza el error total. Otra forma de verlo es que el coeficiente que aproxima a un vector es la proyección de dicho vector sobre el vector "aproximador" (?).

Cambio de base

Para un espacio vectorial dado existen infinitas bases. Por lo general representamos una señal simplemente utilizando la base canónica $X_e = e_1, e_2, ..., e_N$