

2 - Sistemas

Un sistema se puede ver como **un proceso** que produce una transformación de señales, constituido por una entrada, una salida y una función de transferencia.

Se puede dividir en sistemas de tiempo discreto $x(t) \rightarrow y(t)$ y sistemas de tiempo continuo $x[t] \rightarrow y[t]$

Interconexión de sistemas

Se puede interconectar sistemas para construir otro más complejos. Pueden conectar en serie, paralelo o como **retroalimentación**.

Propiedades de los sistemas

Los sistemas presentan propiedades que sirven de criterio para clasificarlos, tanto en caso de tiempo discreto como tiempo continuo.

- Memoria
- Invertibilidad
- Causalidad
- Estabilidad
- Invarianza temporal
- Linealidad

Memoria

Un sistema tiene memoria si la salida depende de valores de **entrada anteriores**.

Invertibles

Un sistema es invertible si distintas entradas producen distintas salidas. Esto es $\forall n \forall m (n \neq m \Rightarrow y[n] \neq y[m])$

También puede verse como que, si se conoce la salida, puede recuperarse de forma determinística la entrada que la generó.

Causales o no-anticipativos

Un sistema es causal si su salida depende solo de los valores de **entrada actual y anteriores**. Otra forma de verlo es que no se necesitan conocer con anticipación valores futuros de entrada.

Estables

Un sistema es estable si una entrada de magnitud acotada produce una salida también acotada (no diverge)

Invariantes

Un sistema es invariante si un desplazamiento de la entrada produce un desplazamiento en el tiempo en la salida. También se puede decir que es invariante si los coeficientes de la ecuación que define la **dinámica del sistema** son constantes. Se puede ver como

$$\forall t (x(t) \rightarrow y(t) \Rightarrow x(t - t_0) \rightarrow y(t - t_0))$$

Lineales

Un sistema es lineal si posee la propiedad de superposición. Esto es

$$\forall t (x_1(t) \rightarrow y_1(t) \wedge x_2(t) \rightarrow y_2(t) \Rightarrow \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \rightarrow \alpha y_1(t) + \beta y_2(t))$$

Algunas pruebas que se pueden hacer para descartar si un sistema es lineal son:

- En un sistema lineal, una entrada nula anula la salida.
- Un sistema lineal no agrega armónicos a la señal.

Sistemas no-determinísticos

Existen otros tipos de sistemas no-determinísticos o estocásticos, donde la regla del sistema es de naturaleza probabilística. Por tanto, aunque tengamos una entrada determinística, la salida no lo es.

Parámetros distribuidos

Existen también sistemas donde no todas las entradas o sus efectos no afectan a todas las salidas y su dinámica debe describirse mediante ecuaciones diferenciales parciales.

Dinámica del sistema

La dinámica de los sistemas de tiempo continuo se representa mediante una ecuación diferencial, mientras que los de tiempo discreto se representan mediante una ecuación de diferencias.

En el caso de que ésta ecuación sea lineal de coeficientes constantes, se dice que el sistema es *lineal e invariante en el tiempo* (LTI). Ejemplos de este tipo de sistemas son los circuitos pasivos RLC, sistemas mecánicos masa-resorte y cinética de reacciones químicas, en el caso de tiempo continuo; mientras que para sistemas de tiempo discreto tenemos la obtención de la respuesta que produce el tracto vocal a la excitación de las cuerdas vocales.

Para un orden N, estas ecuaciones lineales de coeficientes constantes están dadas por

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M \beta_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

o, en su contraparte discreta, por

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

Vamos a hacer énfasis en las discretas. Esta última ecuación puede reescribirse

$$\begin{aligned} a_0 y[n] + \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] &= \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \\ a_0 y[n] &= \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \\ y[n] &= \frac{1}{a_0} \left[\sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \right] \end{aligned}$$

De esta forma expresamos la salida en el instante n en función de los **valores actual y anteriores de entrada** y de los **valores anteriores de salida**

Sistemas FIR (o MA)

En el caso de la ecuación no recursiva, estaremos hablando de sistemas de *respuesta finita al impulso* (FIR, *Finite Impulse Response*)

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

Estos sistemas también son llamados de *promedios móviles* (MA, *Moving Average*), ya que realizan un promedio de la entrada en sucesivos instantes de tiempo.

Podemos ver que estos sistemas son **estables** y **causales**, ya que su salida depende únicamente de entradas anteriores y la actual, aunque pueden existir sistemas FIR no causales ($M = 0$)

Sistemas IIR

Los sistemas representados por la primera ecuación recursiva que reescribimos

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left[\sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \right]$$

son denominados de *respuesta infinita al impulso* (IIR, *Infinite Impulse Response*). Son **estables** si todos los polos de la función de transferencia tienen parte real negativa.

Se dividen en dos tipos

- **Sistemas Autogresivos (AR):** la salida está dada por los *valores anteriores de salida* y únicamente el *valor actual de entrada*

$$y[n] = x[n] - \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{a_0} y[n-k]$$

- **Sistemas ARMA:** la salida está dada por los valores anteriores de salida y entrada. Es decir, la ecuación recursiva que ya vimos en un inicio.