2 - Convolución

Convolución

La propiedad de superposición de los sistemas LTI (lineales e invariantes) permite representar la señal de entrada **en términos de un conjunto de señales básicas** y determinar la salida en términos de las respuestas a estas más básicas. Esto, sumado a la propieda de invarianza temporal, permite caracterizar un sistema en términos de su **respuesta al impulso**.
La forma de representar sistemas en términos de su respuesta al impulso se conoce como **integral de convolución** en el caso continuo, o **sumatoria de convolución** en tiempo discreto.

Convolución Lineal

Para representar una señal de tiempo discreto $x[n]$ en términos de impulsos unitarios $\delta[n]$ (**Delta de Dirac** para el caso continuo) se utiliza la suma de señales **impulso unitario** desplazados escalados y desplazados en el tiempo.

$$x[n] = ... + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + ...$$

O en forma compacta como

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Esta es la **representación de una secuencia arbitraria como combinación lineal de secuencias de impulsos unitarios desplazados $\delta[n-k]$ con peso $x[k]$**.

Notese que, para un valor dado de n, sólo uno de los términos del lado derecho será diferente de cero.

Supongamos un sistema LTI con respuesta al impulso $h[n]$ y una entrada arbitraria x[n] dada por la ecuación anterior. Por invarianza temporal, $x[n] = \delta[n] \to h[n] = \delta[n-m] \to h[n-m]$ (si la entrada $\delta[n]$ da salida $h[n]$, $\delta[n-m]$ da salida $h[n-m]$). Además, por superposición, la salida puede expresarse como la combinación lineal de las respuestas a los impulsos escalados y desplazados. Es decir:

$$y[n] = ... + x[-2]h[n+2] + x[-1]h[n+1] + x[0]h[n] + x[1]h[n-1] + x[2]h[n-2] + ...$$
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

Esto es lo que se conoce como **sumatoria de convolución**, y el lado derecho de la ecucación se conoce como **convolución lineal** $x[n]$ y $h[n]$, o $y[n] = x[n] * h[n]$

Representación Matricial

Desarrollando la sumatoria en cada instante podemos ver que se puede representar la convolución de forma matricial

$$\begin{aligned}
y[0] &= x[0]h[0] \\
y[1] &= x[0]h[1] + x[1]h[0] \\
y[2] &= x[0]h[2] + x[1]h[1] + x[2]h[0] \\
y[3] &= x[0]h[3] + x[1]h[2] + x[2]h[1] + x[3]h[0] \\
&\dots \\
y[N] &= x[0]h[N] + \sum_{i=0}^{N-1} x[N-i]h[i]
\end{aligned}$$

es equivalente a

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ y[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h[0] & 0 & 0 & 0 \\ h[1] & h[0] & 0 & 0 \\ h[2] & h[1] & h[0] & 0 \\ h[3] & h[2] & h[1] & h[0] \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

Aunque solo se obtienen las primeras N muestras correspondientes a la $x * h$. De todas formas esta forma es útil para la deconvolución

Convolución Circular

La propiedad de equivalencia entre convolución en el tiempo y multiplicación en frecuencias (y viceversa) no se aplica para el caso de la convolución lineal en tiempo discreto. Para esto es necesario utilizar la **convolución circular**.
Esta convolución equivale a hacer periódicas las señales x y h. Al contrario que la convolución lineal, mantiene la cantidad de muestras.

Lineal a partir de circular

Deconvolucion

Es la operación inversa de la convolución. Quiere decir que si tenemos la salida de un sistema correspondiente a una señal de entrada que no conocemos, podemos recuperarla mediante la deconvolución. Una forma de obtenerla es mediante la división término a término.
Pero si realizamos la convolución mediante su forma matricial $y = Hx$, podemos deconvolucionar mediante $H^{-1}y = x$. Ahora bien, en este caso estamos tratando de obtener la entrada (llamado caso de **control**), pero también puede ser que estemos intentando obtener la respuesta al impulso conociendo la entrada (llamado caso de **identificación**) $y = Xh \Rightarrow X^{-1}y = h$

Problemas

Como la deconvolución corresponde al **problema inverso** de la convolución, presenta algunos problemas. La presencia de una señal de ruido afectará más o menos a la deconvolución dependiendo de dónde aparezca (en la entrada, o luego de la convolución).

Video

Correlación: muy relacionado a la convolución

Interpretación de la convolución:

- Plegado
- Desplazamiento
- Multiplicación
- Integración (suma)

Propiedad de suavizado de la convolución para filtrado de señales con ruido

Propiedades de la convolución

- Conmutativa
- Asociativa:
- Distributiva
- Conmutativa del producto con escalar
- Desplazamiento
- Derivabilidad
- Soporte de la convolución: una de las cosas que nos dice es la cantidad de muestras que va a tener la convolución de acuerdo a la cantidad de muestas de x y h

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$
$$\text{si x[n] es distinto de cero en [0,N-1] y h[n] es distinto de cero para [0,M-1] entonces}$$
$$0 \leq k \leq N-1 \Rightarrow x[k] \neq 0$$
$$0 \leq n-k \leq M-1 \Rightarrow h[n-k] \neq 0$$
$$\text{sumando los lados de las inecuaciones}$$
$$\Rightarrow 0 \leq n \leq N+M-2$$
$$\text{es el intervalo donde y[n] no es cero, donde hay N+M-1 muestras}$$

- Convolución y multiplicación

Lineal a partir de circular