



**Centro Federal de Educação
Tecnológica de Minas Gerais**

2021
2022
2023
2025

ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO

OTIMIZAÇÃO I

PROGRAMAÇÃO LINEAR

Método Gráfico

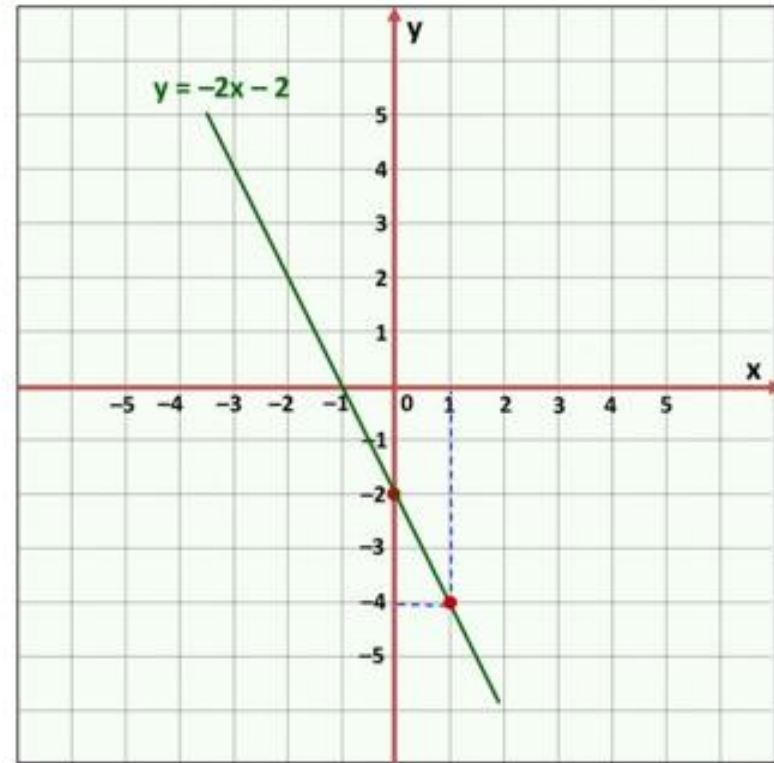
Maurílio Alves Martins da Costa
maurilioamc@gmail.com

Método Gráfico

Tanto na física quanto na matemática, quando se tem uma equação, ou inequação, com mais de 1 variável, o mais comum é fazer uma tabela com alguns valores de testes e com esses valores fazer um gráfico que melhor descreva a equação dada.

Construir o gráfico da função $y = -2x - 2$.

x	$y = -2x - 2$
0	$y = -2 \cdot 0 - 2 = -2$
1	$y = -2 \cdot 1 - 2 = -4$



Método Gráfico

Lembrando que todo modelo linear tem como gráfico um conjunto de retas, a PL também usa desse expediente para encontrar o resultado ótimo de um modelo matemático dado.

O método Gráfico ou método Geométrico permite a resolução de problemas simples de programação linear de forma intuitiva e visual.

As restrições determinam uma região poligonal no plano , chamada região viável ou região de viabilidade . Essa região é construída usando as linhas de restrição , que são as linhas obtidas das desigualdades das restrições.

Este método está limitado a problemas com duas ou três variáveis de decisão. Por que?

Método Gráfico

As fases do processo de resolução de problemas através do método Gráfico são as seguintes:

- 1) Desenhar um sistema de coordenada cartesianas em que cada variável de decisão seja representada por um eixo.
- 2) Estabelecer uma escala de medida para cada um destes eixos adequada à variável associada.
- 3) Traçar as coordenadas de restrições do problema, incluindo as não-negativas (que serão os próprios eixos). Note que uma desigualdade define uma região que será o semiplano limitado pela linha reta obtida ao considerar a restrição como uma igualdade, enquanto que uma equação define uma região que é a própria linha reta.

Método Gráfico

Considere o seguinte modelo matemático:

Maximizar:

$$Z = 3x + 2y$$

Sujeita à:

$$2x + y \leq 18$$

$$2x + 3y \leq 42$$

$$3x + y \leq 24$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Método Gráfico

Maximizar:

$$Z = 3x + 2y$$

Sujeita à:

$$2x + y \leq 18 \quad (1)$$

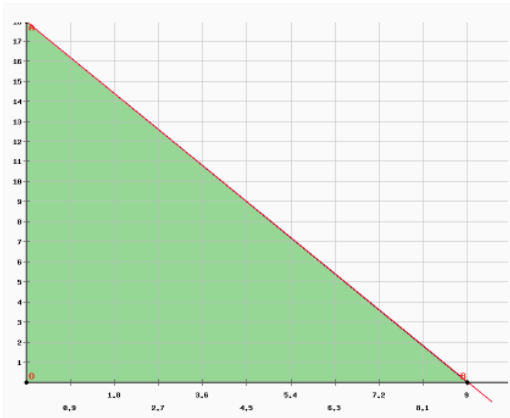
$$2x + 3y \leq 42 \quad (2)$$

$$3x + y \leq 24 \quad (3)$$

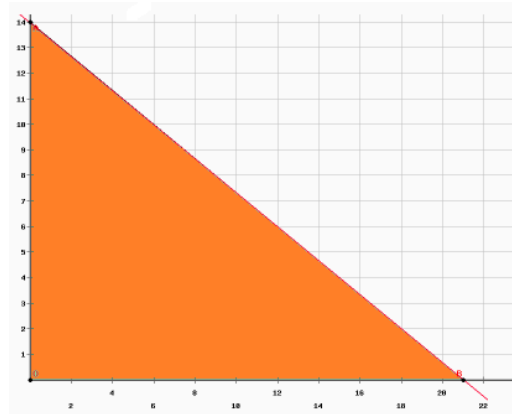
$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

- 1) Desenhar um sistema de coordenada cartesianas.
- 2) Estabelecer uma escala de medida para cada um destes eixos.
- 3) Traçar as coordenadas de restrições do problema,



(1)

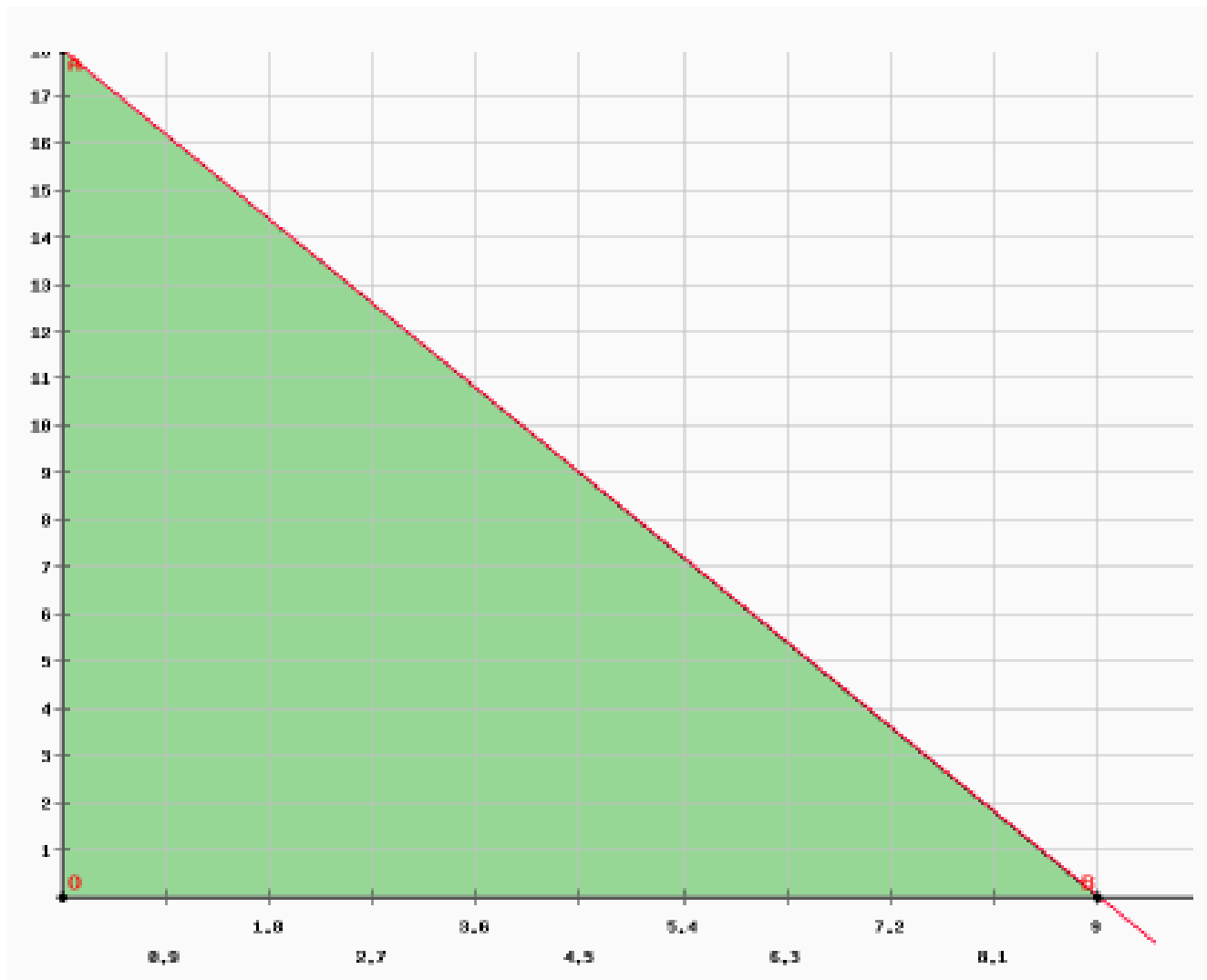


(2)



(3)

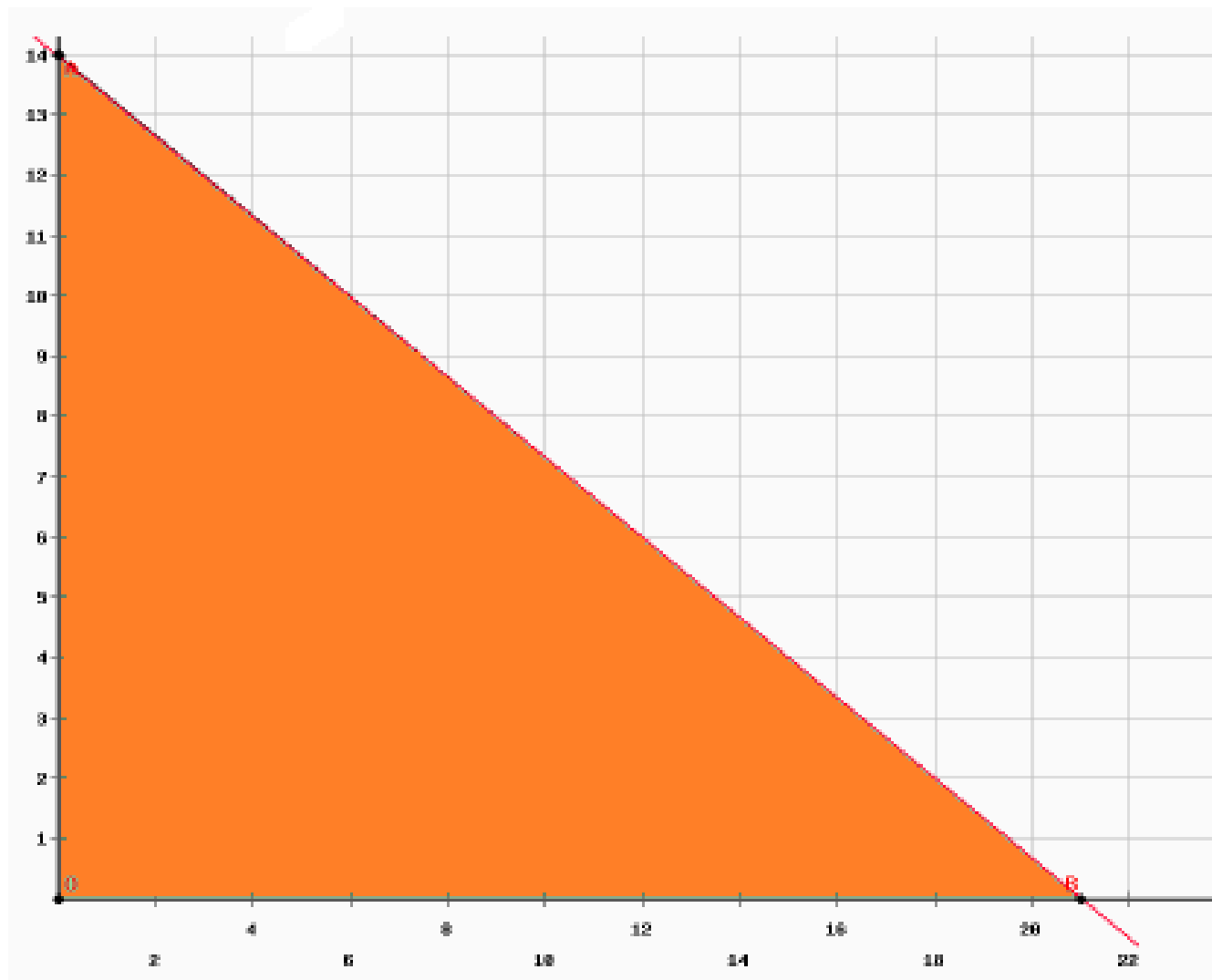
Método Gráfico



$$2x + y \leq 18$$

(1)

Método Gráfico

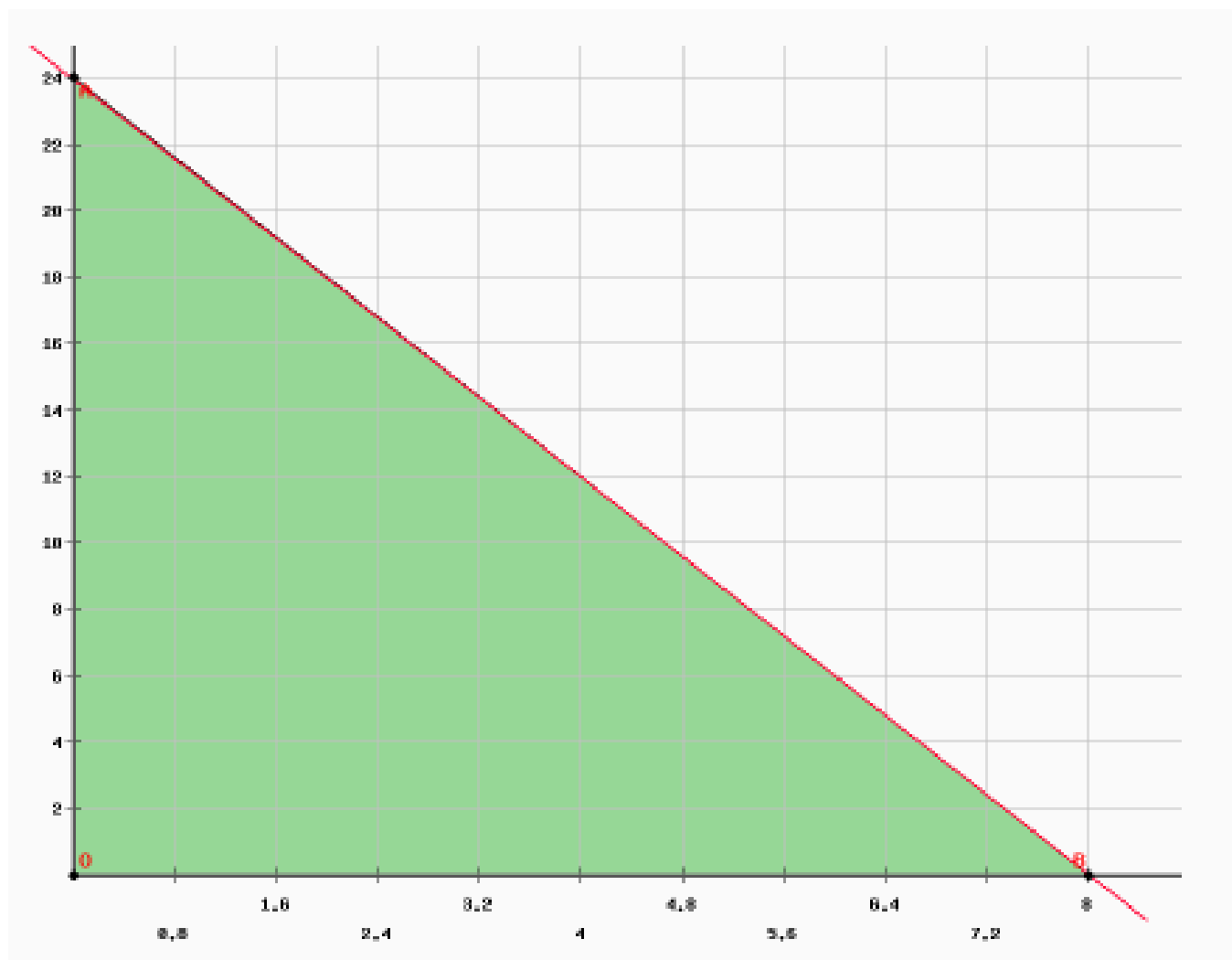


$$2x + 3y \leq 42 \quad (2)$$

Método Gráfico

$$3x + y \leq 24$$

(3)



Método Gráfico

- 4) A interseção de todas as regiões determina o espaço de soluções (que é um conjunto convexo). Se esta for não vazia, deve-se continuar no passo seguinte. Caso contrário, não há nenhum ponto que satisfaça simultaneamente todas as restrições, assim o problema não terá solução e, será chamado de **não-factível**.
- 5) Determinar os pontos extremos ou vértices do polígono ou poliedro que formam a **região factível**. Estes pontos serão os candidatos para a **solução ótima**.
- 6) Avaliar a função objetivo em todos os vértices e aquele (ou aqueles) que maximizam (ou minimizam) o valor resultante, determinarão a solução ótima do problema.

Método Gráfico

Maximizar:

$$Z = 3x + 2y$$

Sujeita à:

$$2x + y \leq 18 \quad (1)$$

$$2x + 3y \leq 42 \quad (2)$$

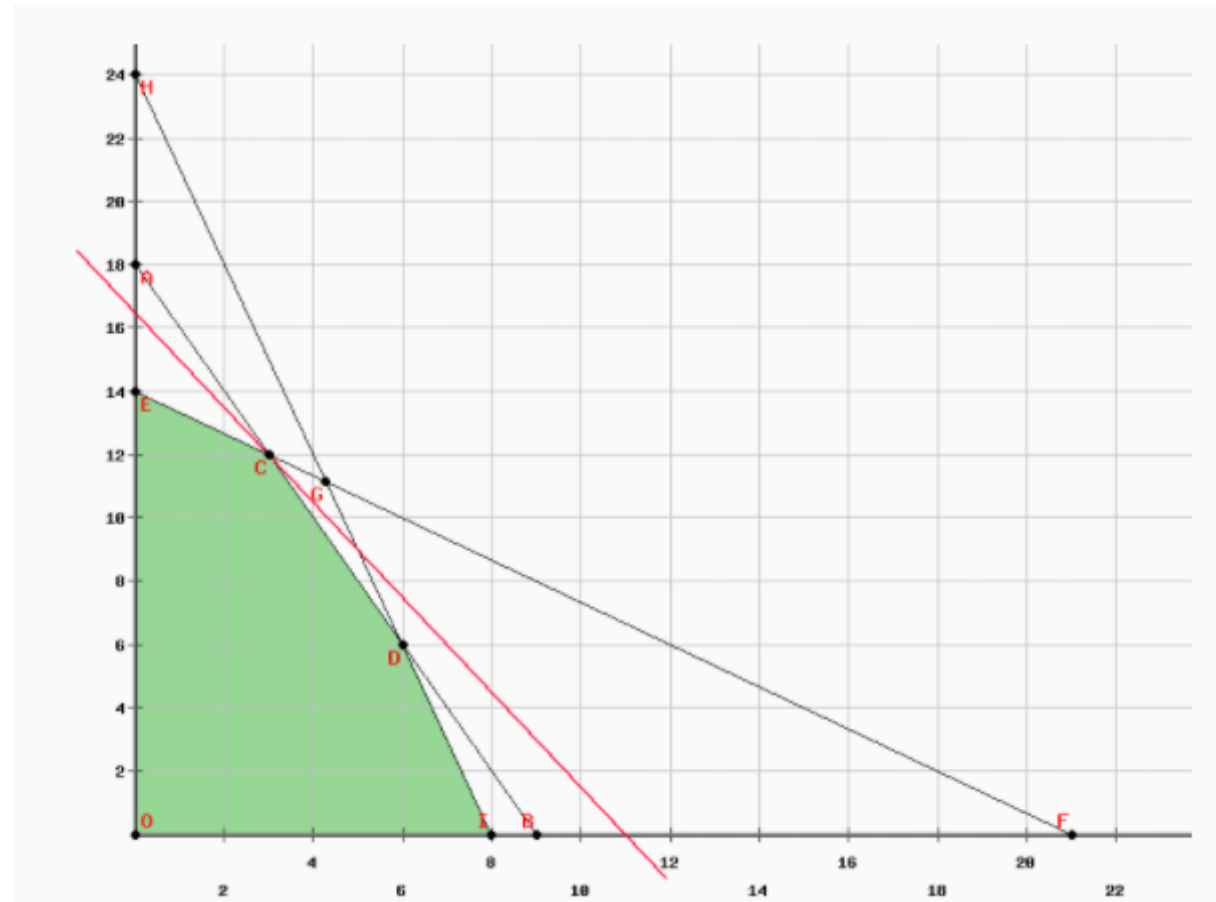
$$3x + y \leq 24 \quad (3)$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

- 4) Fazer a interseção de todas as regiões.
- 5) Determinar os pontos extremos ou vértices do polígono.
- 6) Avaliar a função objetivo em todos os vértices.

Ponto	Coordenada X (X ₁)	Coordenada Y (X ₂)	Valor da função (Z)
O	0	0	0
A	0	18	36
B	9	0	27
C	3	12	33
D	6	6	30
E	0	14	28
F	21	0	63
G	30 / 7	78 / 7	246 / 7
H	0	24	48
I	8	0	24



Método Gráfico

Maximizar:

$$Z = 3x + 2y$$

Sujeita à:

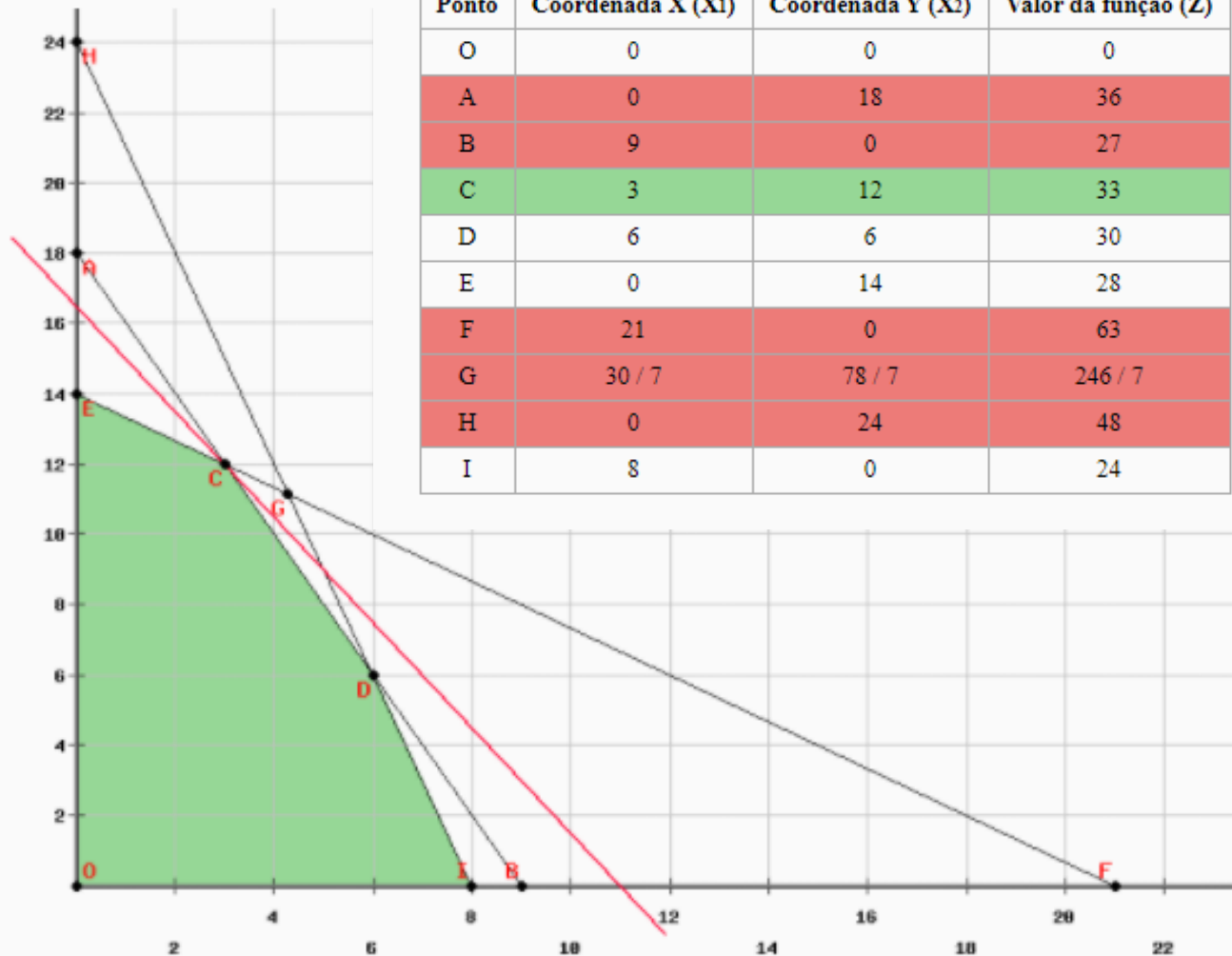
$$2x + y \leq 18 \quad (1)$$

$$2x + 3y \leq 42 \quad (2)$$

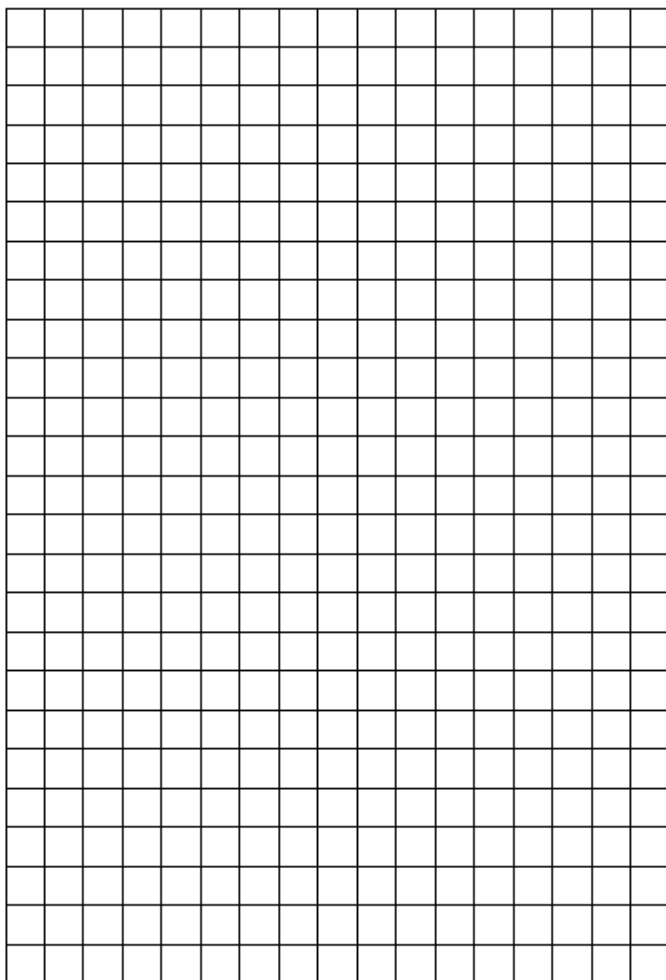
$$3x + y \leq 24 \quad (3)$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$



Método Gráfico



Modelo de papel milimetrado para construção de gráficos.

Exercícios

Faça os gráficos e determine os espaços de soluções dos seguintes problemas de PL:

Maximizar: $L = 4x_1 + x_2$

Sujeito a:

$$9x_1 + x_2 \leq 18$$

$$3x_1 + x_2 \leq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Maximizar: $L = 4x_1 + x_2$

Sujeito a:

$$9x_1 + x_2 \leq 18$$

$$3x_1 + x_2 \geq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Maximizar: $L = 4x_1 + x_2$

Sujeito a:

$$9x_1 + x_2 \geq 18$$

$$3x_1 + x_2 \geq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Maximizar: $L = 4x_1 + x_2$

Sujeito a:

$$9x_1 + x_2 \geq 18$$

$$3x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Exercícios

Maximizar: $L = 4x_1 + x_2$

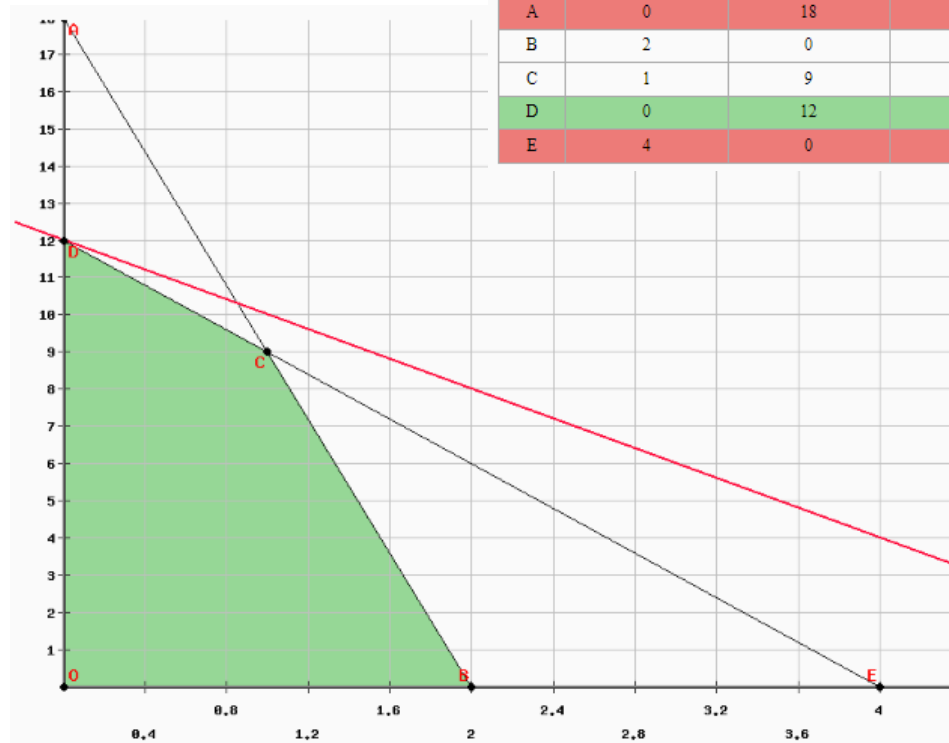
Sujeito a:

$$9x_1 + x_2 \leq 18$$

$$3x_1 + x_2 \leq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Punto	Coordenada X (x_1)	Coordenada Y (x_2)	Valor de la función objetivo (Z)
O	0	0	0
A	0	18	36
B	2	0	8
C	1	9	22
D	0	12	24
E	4	0	16



Exercícios

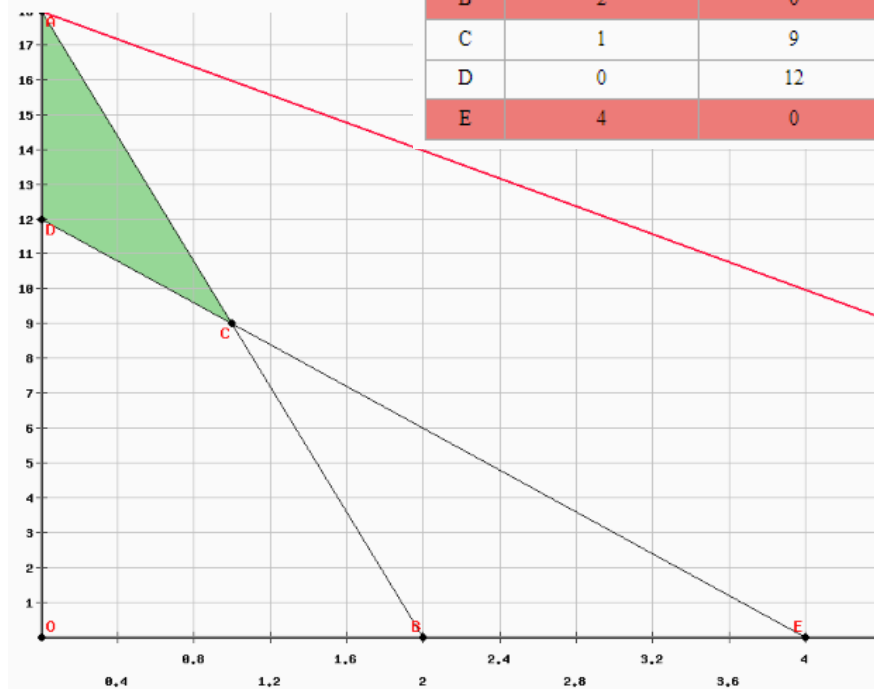
Maximizar: $L = 4x_1 + x_2$

Sujeito a:

$$9x_1 + x_2 \leq 18$$

$$3x_1 + x_2 \geq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Punto	Coordenada X (x_1)	Coordenada Y (x_2)	Valor de la función objetivo (Z)
O	0	0	0
A	0	18	36
B	2	0	8
C	1	9	22
D	0	12	24
E	4	0	16

Exercícios

Maximizar: $L = 4x_1 + x_2$

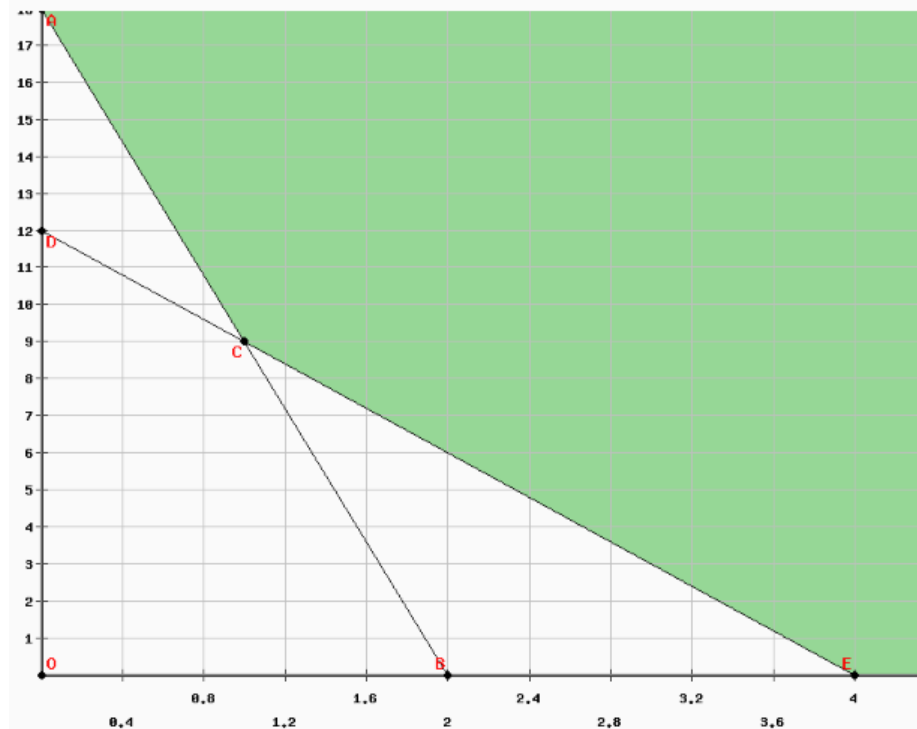
Sujeito a:

$$9x_1 + x_2 \geq 18$$

$$3x_1 + x_2 \geq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Ponto	Coordenada X (x_1)	Coordenada Y (x_2)	Valor da função (Z)
O	0	0	0
A	0	18	18
B	2	0	8
C	1	9	13
D	0	12	12
E	4	0	16



Exercícios

Maximizar: $L = 4x_1 + x_2$

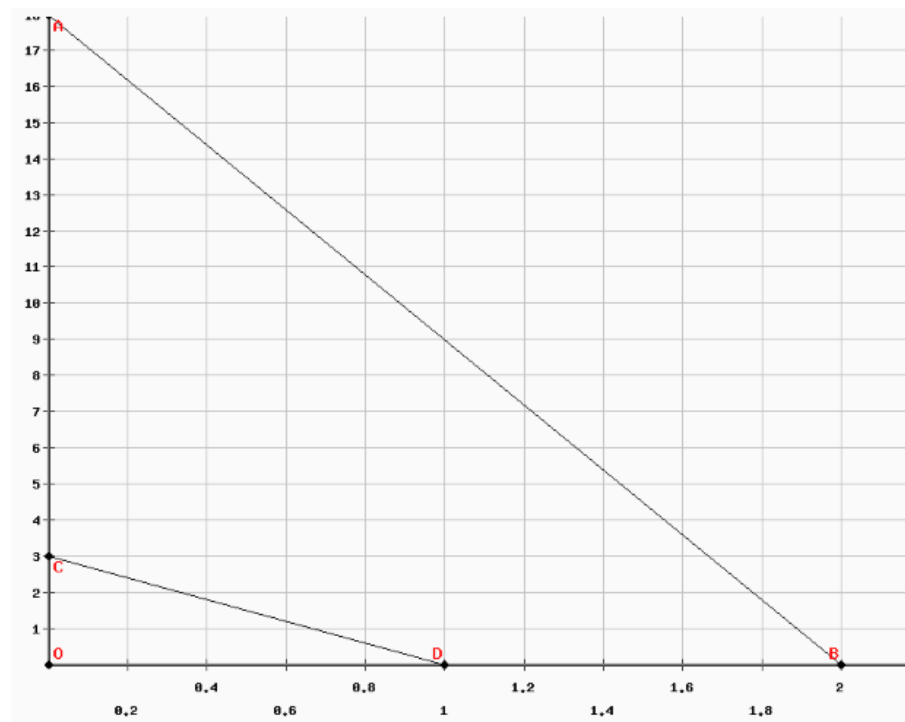
Sujeito a:

$$9x_1 + x_2 \geq 18$$

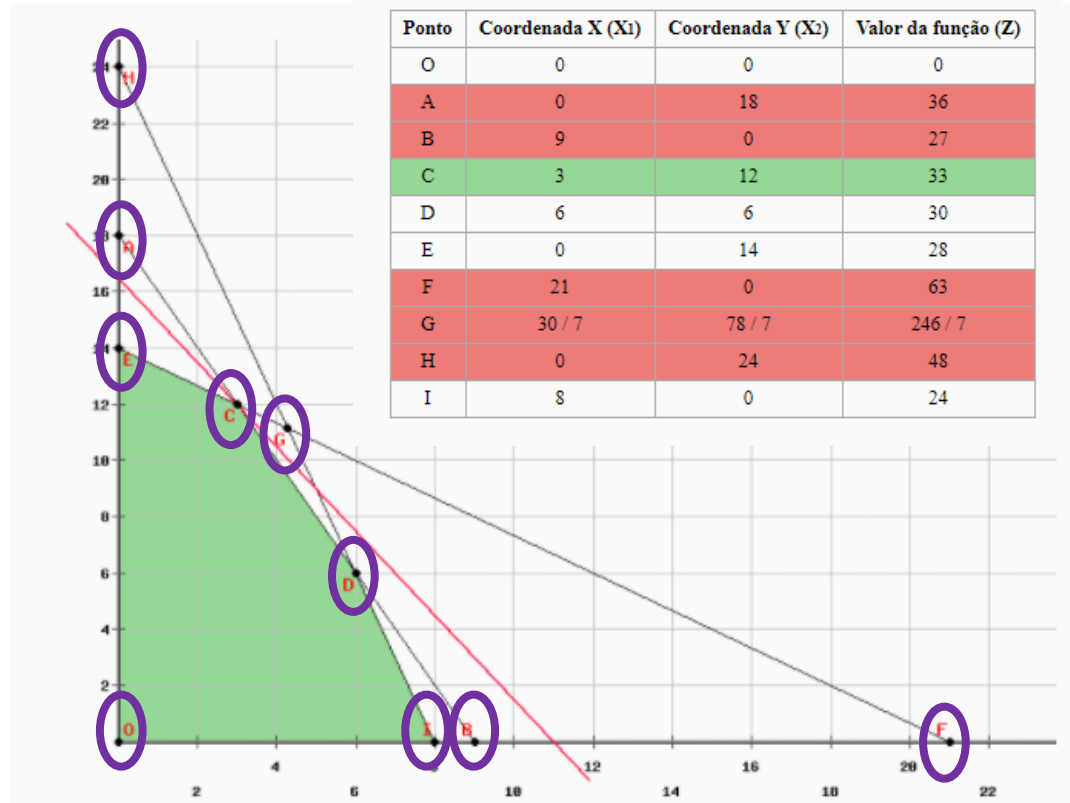
$$3x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Ponto	Coordenada X (x_1)	Coordenada Y (x_2)	Valor da função (Z)
O	0	0	0
A	0	18	18
B	2	0	8
C	0	3	3
D	1	0	4



Estudo dos Pontos de Interseção



Maximizar:

$$Z = 3x + 2y$$

Sujeita à:

$$2x + y \leq 18 \quad (1)$$

$$2x + 3y \leq 42 \quad (2)$$

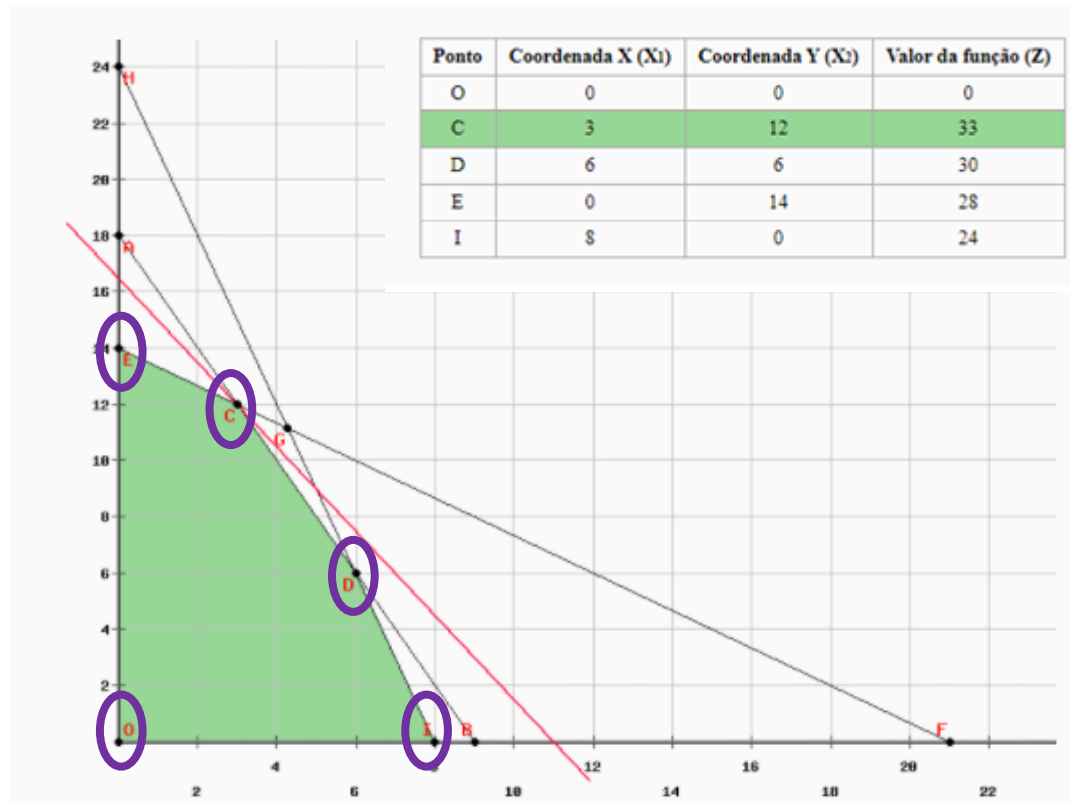
$$3x + y \leq 24 \quad (3)$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

No método gráfico, os pontos de análise dos candidatos a máximo ou mínimo são sempre os pontos de interseção entre as retas formadas pelas restrições.

Estudo dos Pontos de Interseção



Maximizar:

$$Z = 3x + 2y$$

Sujeita à:

$$2x + y \leq 18 \quad (1)$$

$$2x + 3y \leq 42 \quad (2)$$

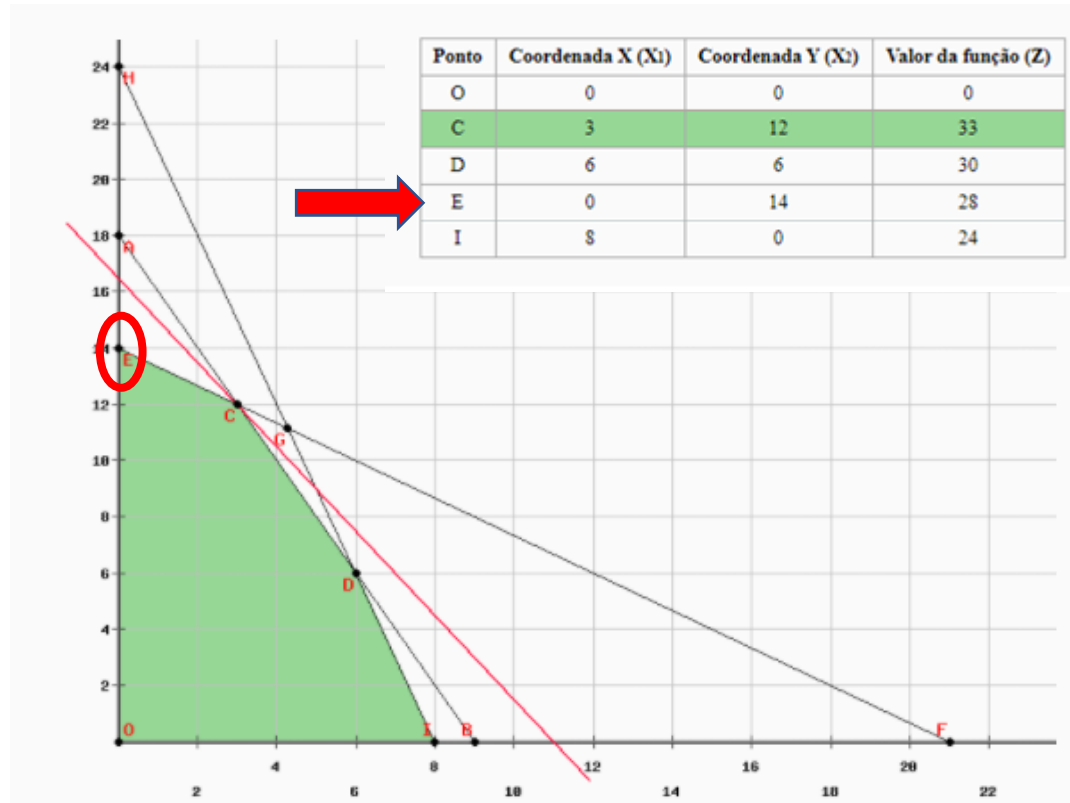
$$3x + y \leq 24 \quad (3)$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Dentre os pontos de interseção entre as retas formadas pelas restrições, são objetos de análise apenas os pontos que fazem parte da região factível.

Estudo dos Pontos de Interseção



Maximizar:

$$Z = 3x + 2y$$

Sujeita à:

$$2x + y \leq 18 \quad (1)$$

$$2x + 3y \leq 42 \quad (2)$$

$$3x + y \leq 24 \quad (3)$$

$$x \geq 0 \quad (4)$$

$$y \geq 0 \quad (5)$$

O ponto E, em destaque, é formado pela interseção das retas (2) e (4).

Estudo dos Pontos de Interseção

O ponto E, em destaque, é formado pela interseção das retas (2) e (4), e suas coordenadas podem ser calculadas através do seguinte sistema de equações lineares:

$$2x + 3y = 42$$

$$x = 0$$

Logo, temos que:

$$3y = 42 \rightarrow y = 14$$

Assim, o ponto E é melhor determinado pelas coordenadas (0,14)

Maximizar:

$$Z = 3x + 2y$$

Sujeito à:

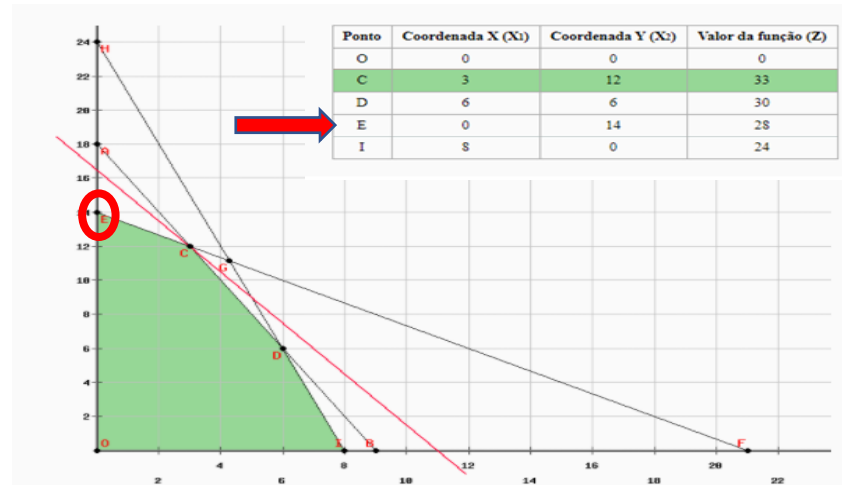
$$2x + y \leq 18 \quad (1)$$

$$2x + 3y \leq 42 \quad (2)$$

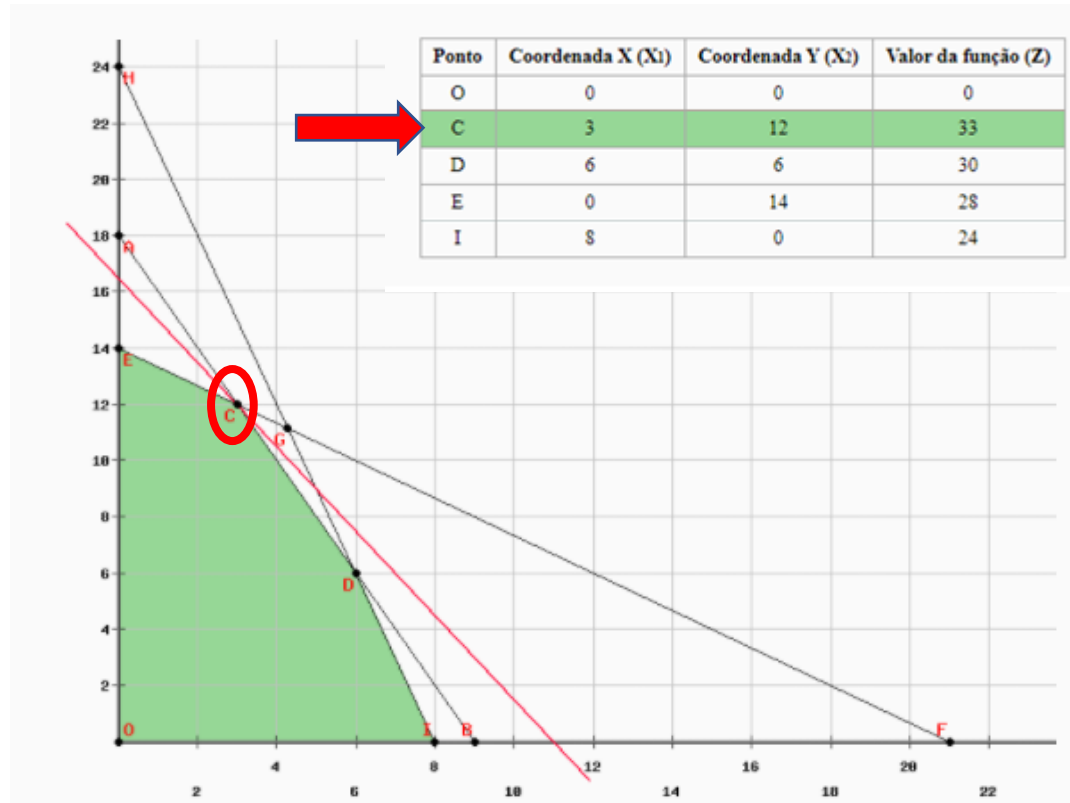
$$3x + y \leq 24 \quad (3)$$

$$x \geq 0 \quad (4)$$

$$y \geq 0 \quad (5)$$



Estudo dos Pontos de Interseção



Maximizar:

$$Z = 3x + 2y$$

Sujeito à:

$$2x + y \leq 18 \quad (1)$$

$$2x + 3y \leq 42 \quad (2)$$

$$3x + y \leq 24 \quad (3)$$

$$x \geq 0 \quad (4)$$

$$y \geq 0 \quad (5)$$

O ponto C, em destaque, é formado pela interseção das retas (1) e (2).

Estudo dos Pontos de Interseção

O ponto C, em destaque, é formado pela interseção das retas (1) e (2), e suas coordenadas podem ser calculadas através do seguinte sistema de equações lineares:

$$2x + y = 18$$

$$2x + 3y = 42$$

Por subtração, temos que:

$$2y = 24 \Rightarrow y = 12$$

$$\text{Assim, } 2x + y = 18 \Rightarrow 2x + 12 = 18 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

Assim, o ponto C é melhor determinado pelas coordenadas (3,12)

Maximizar:

$$Z = 3x + 2y$$

Sujeito à:

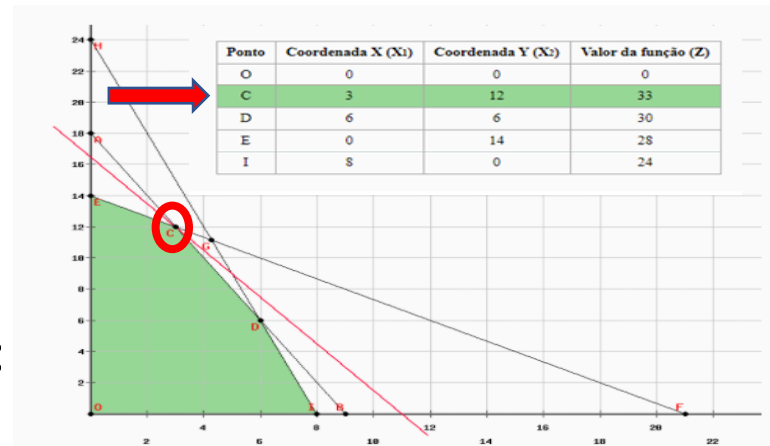
$$2x + y \leq 18 \quad (1)$$

$$2x + 3y \leq 42 \quad (2)$$

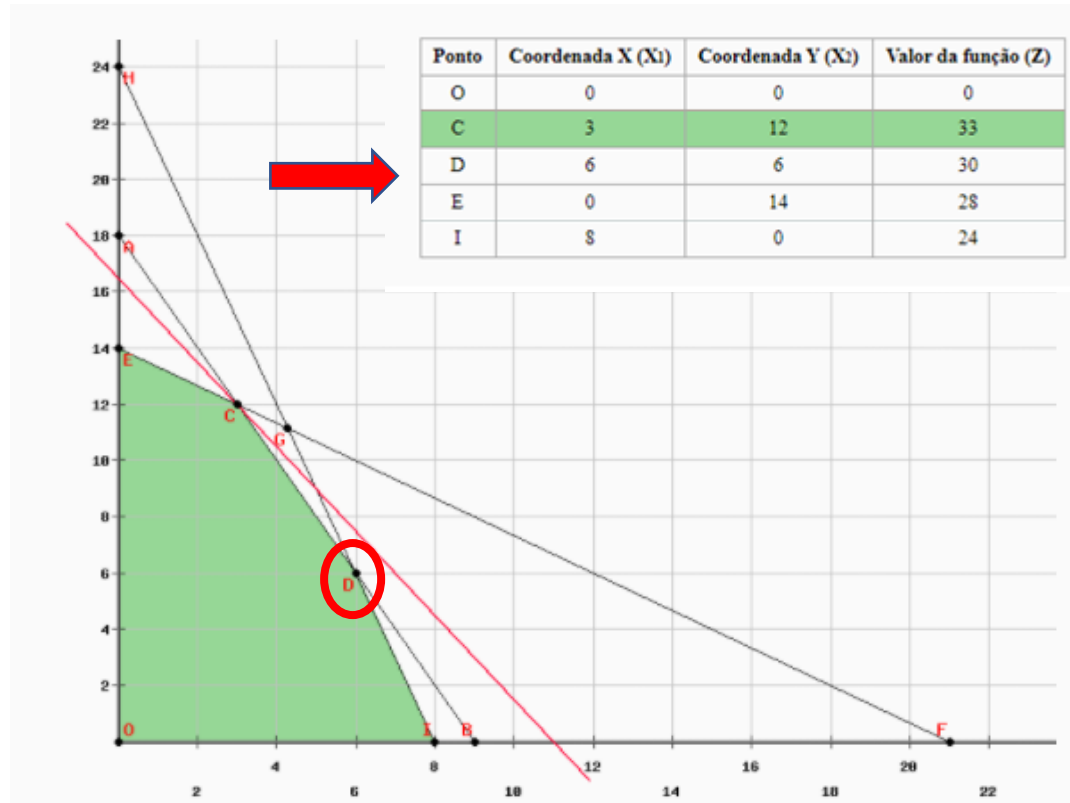
$$3x + y \leq 24 \quad (3)$$

$$x \geq 0 \quad (4)$$

$$y \geq 0 \quad (5)$$



Estudo dos Pontos de Interseção



Maximizar:

$$Z = 3x + 2y$$

Sujeito à:

$$2x + y \leq 18 \quad (1)$$

$$2x + 3y \leq 42 \quad (2)$$

$$3x + y \leq 24 \quad (3)$$

$$x \geq 0 \quad (4)$$

$$y \geq 0 \quad (5)$$

O ponto D, em destaque, é formado pela interseção das retas (1) e (3).

Estudo dos Pontos de Interseção

O ponto D, em destaque, é formado pela interseção das retas (1) e (3), e suas coordenadas podem ser calculadas através do seguinte sistema de equações lineares:

$$2x + y = 18$$

$$3x + y = 24$$

Por subtração, temos que:

$$x = 6$$

$$\text{Assim, } 2x + y = 18 \rightarrow 12 + y = 18 \rightarrow y = 6$$

Assim, o ponto D é melhor determinado pelas coordenadas (6,6)

Maximizar:

$$Z = 3x + 2y$$

Sujeito à:

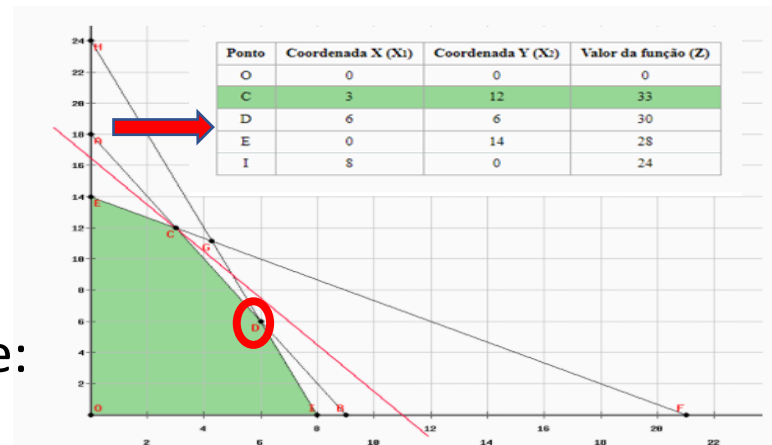
$$2x + y \leq 18 \quad (1)$$

$$2x + 3y \leq 42 \quad (2)$$

$$3x + y \leq 24 \quad (3)$$

$$x \geq 0 \quad (4)$$

$$y \geq 0 \quad (5)$$



Estudo dos Pontos de Interseção

Analisando todos os pontos de interseção tem-se a seguinte tabela:

Ponto	Coordenada X (X ₁)	Coordenada Y (X ₂)	Valor da função (Z)
O	0	0	0
C	3	12	33
D	6	6	30
E	0	14	28
I	8	0	24

Maximizar:

$$Z = 3x + 2y$$

Sujeito à:

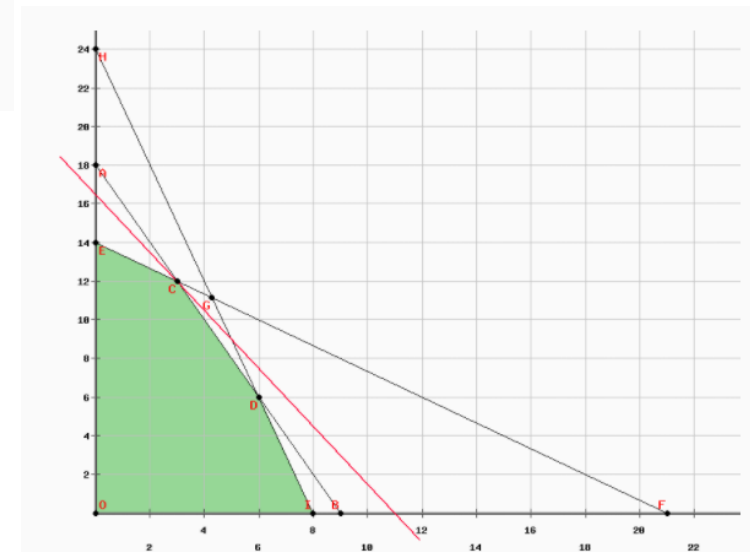
$$2x + y \leq 18 \quad (1)$$

$$2x + 3y \leq 42 \quad (2)$$

$$3x + y \leq 24 \quad (3)$$

$$x \geq 0 \quad (4)$$

$$y \geq 0 \quad (5)$$



Exercícios

Faça o estudo dos pontos de interseção dos seguintes problemas de PL:

Maximizar: $L = 4x_1 + x_2$

Sujeito a:

$$9x_1 + x_2 \leq 18$$

$$3x_1 + x_2 \leq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Maximizar: $L = 4x_1 + x_2$

Sujeito a:

$$9x_1 + x_2 \leq 18$$

$$3x_1 + x_2 \geq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Maximizar: $L = 4x_1 + x_2$

Sujeito a:

$$9x_1 + x_2 \geq 18$$

$$3x_1 + x_2 \geq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Maximizar: $L = 4x_1 + x_2$

Sujeito a:

$$9x_1 + x_2 \geq 18$$

$$3x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Estudo da Função Objetivo

Aplicando os valores de x e y à função objetivo

$$Z = 3x + 2y$$

Tem-se os seguintes valores para Z:

Maximizar:

$$Z = 3x + 2y$$

Sujeito à:

$$2x + y \leq 18 \quad (1)$$

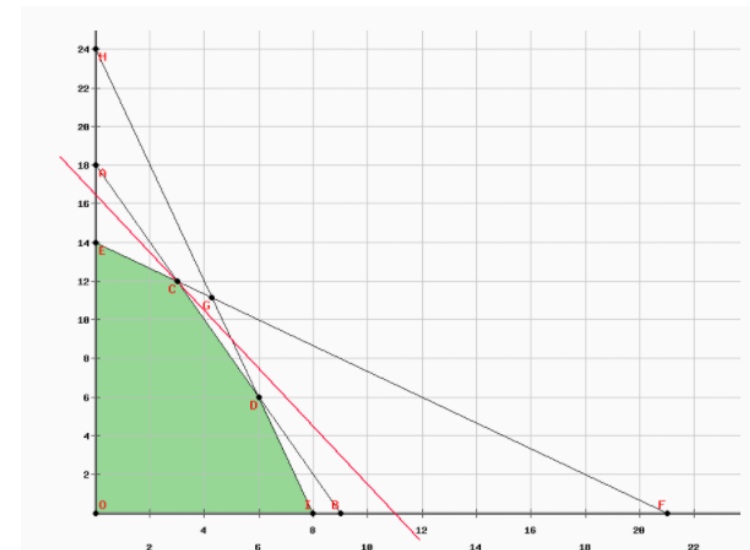
$$2x + 3y \leq 42 \quad (2)$$

$$3x + y \leq 24 \quad (3)$$

$$x \geq 0 \quad (4)$$

$$y \geq 0 \quad (5)$$

Ponto	Coordenada X (X1)	Coordenada Y (X2)	Valor da função (Z)
O	0	0	0
C	3	12	33
D	6	6	30
E	0	14	28
I	8	0	24



Estudo da Função Objetivo

Se o objetivo for maximizar, a resposta é o ponto onde Z tem o maior valor.

Se o objetivo for minimizar, a resposta é o ponto onde Z tem o menor valor.

Maximizar:

$$Z = 3x + 2y$$

Sujeito à:

$$2x + y \leq 18 \quad (1)$$

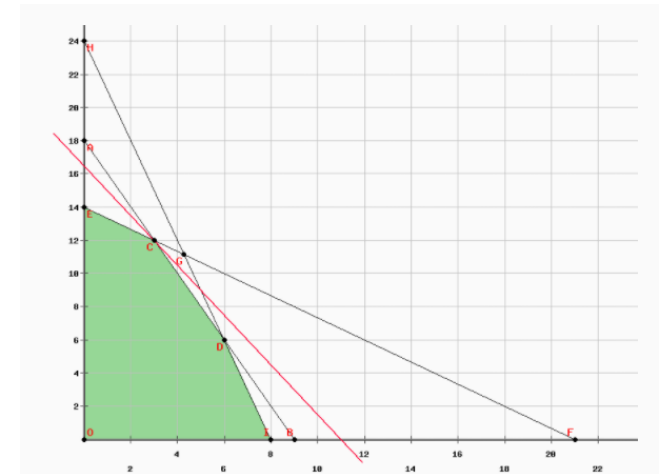
$$2x + 3y \leq 42 \quad (2)$$

$$3x + y \leq 24 \quad (3)$$

$$x \geq 0 \quad (4)$$

$$y \geq 0 \quad (5)$$

Ponto	Coordenada X (X ₁)	Coordenada Y (X ₂)	Valor da função (Z)
O	0	0	0
C	3	12	33
D	6	6	30
E	0	14	28
I	8	0	24



Toda função objetivo **SEMPRE** encontra um valor no objetivo proposto?

Estudo dos Pontos de Interseção

Agora é a sua vez:

Minimizar:

$$Z = 50x + 100y$$

Sujeito à:

$$7x + 2y \geq 28$$

$$2x + 12y \geq 24$$

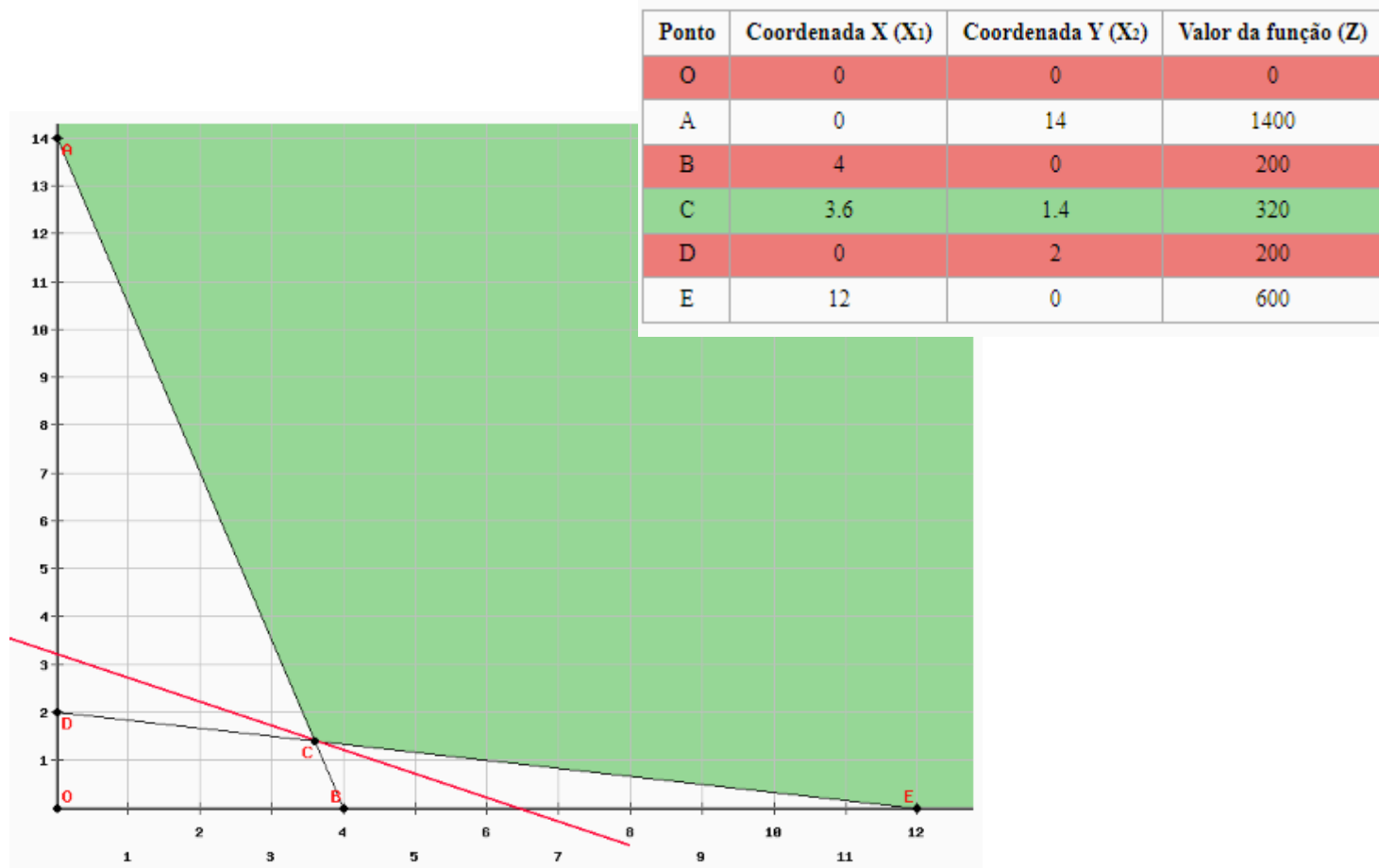
$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Resposta: (3.6 , 1.4)

Estudo dos Pontos de Interseção

Agora é a sua vez:

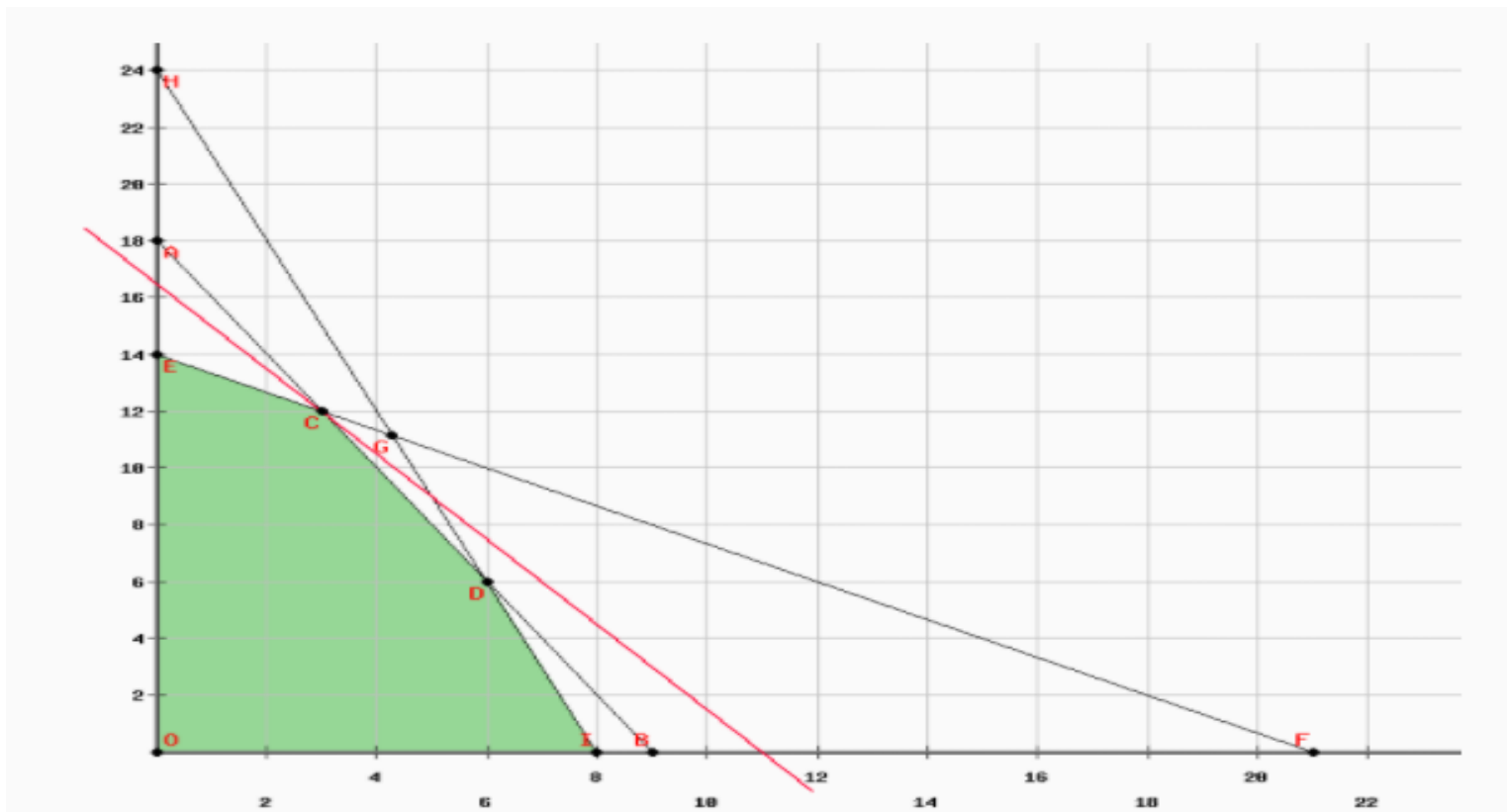


Resposta: (3.6 , 1.4)

Estudo da Função Objetivo

E se eu representasse graficamente a função objetivo?

$$Z = 3x + 2y$$



Estudo da Função Objetivo

E se eu representasse graficamente a função objetivo?

$$Z = 3x + 2y$$

É interessante buscar valores para Z que possa ser bem representado no gráfico que foi criado. Esse valor é resultado da observação da equação que se tem e do gráfico que se fez.

Por exemplo:

Para $Z = 12$ temos: $3x + 2y = 12$

Se $x=0$: $2y = 12 \rightarrow y = 6$

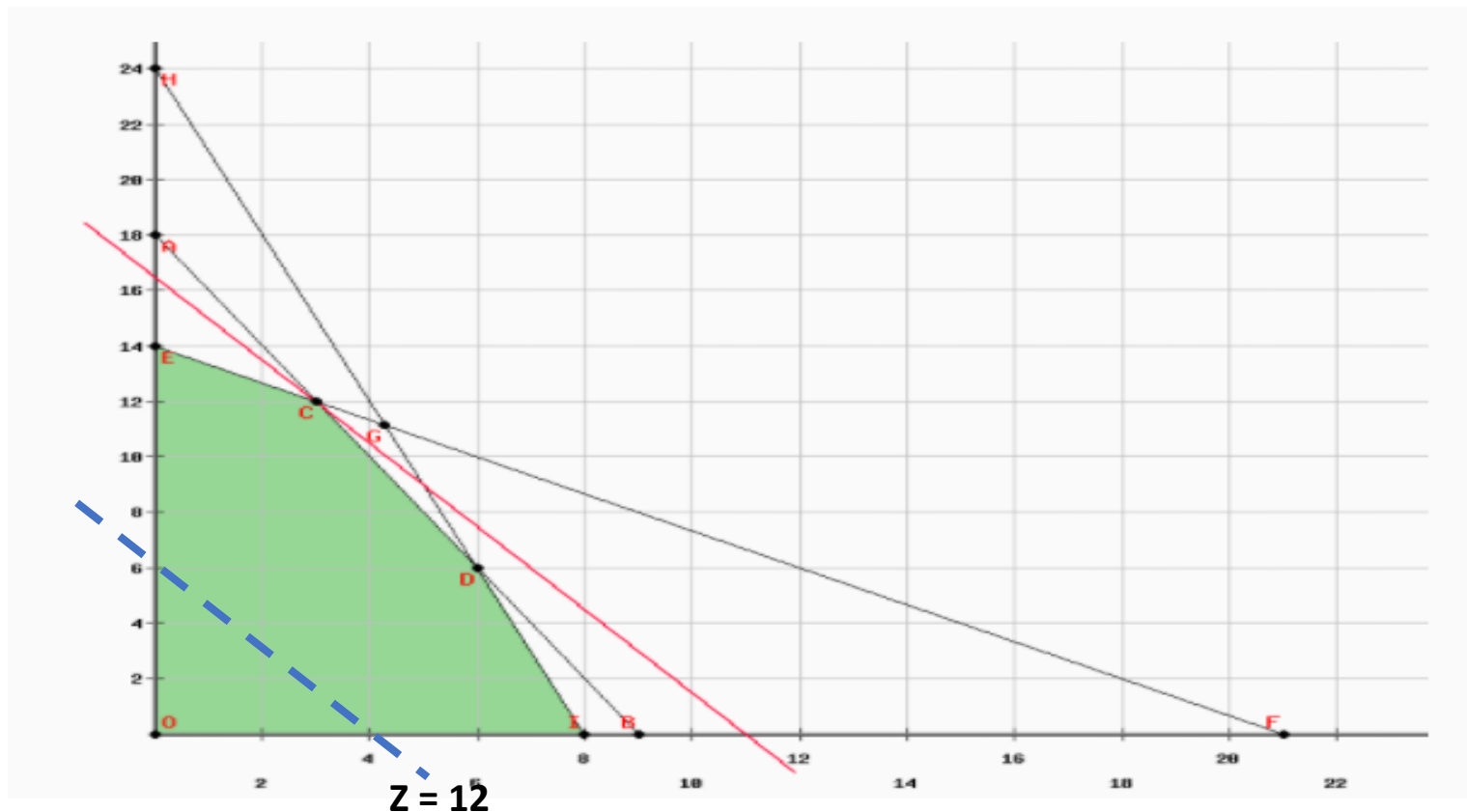
Se $y=0$: $3x = 12 \rightarrow x = 4$

$Z = (4,6)$

Estudo da Função Objetivo

E se eu representasse graficamente a função objetivo?

$$Z = 3x + 2y$$



Estudo da Função Objetivo

E se eu representasse graficamente a função objetivo?

$$Z = 3x + 2y$$

Para $Z = 18$ temos: $3x + 2y = 18$

Se $x=0$: $2y = 18 \rightarrow y = 9$

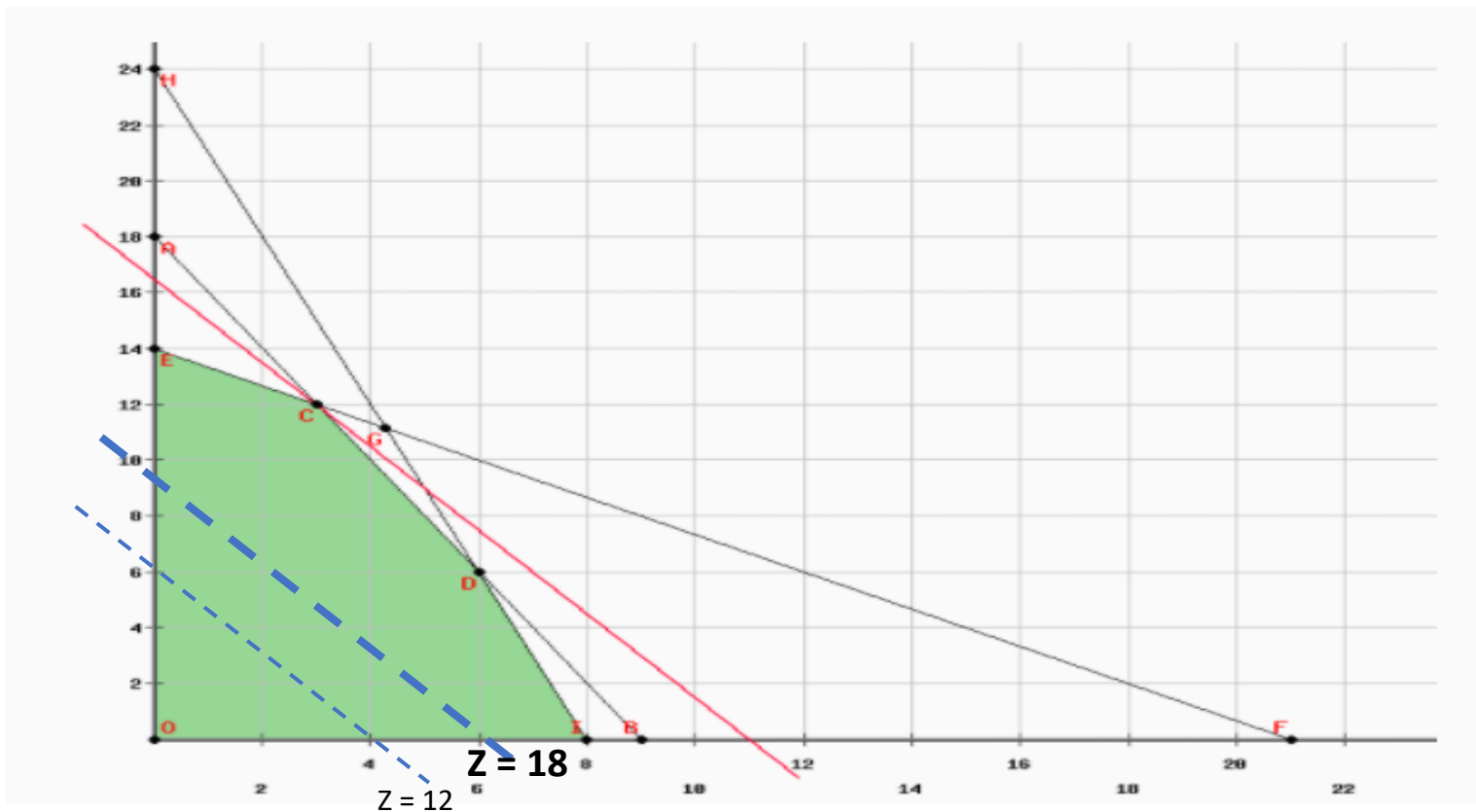
Se $y=0$: $3x = 18 \rightarrow x = 6$

$Z = (6,9)$

Estudo da Função Objetivo

E se eu representasse graficamente a função objetivo?

$$Z = 3x + 2y$$



Estudo da Função Objetivo

E se eu representasse graficamente a função objetivo?

$$Z = 3x + 2y$$

Para $Z = 24$ temos: $3x + 2y = 24$

Se $x=0$: $2y = 24 \rightarrow y = 12$

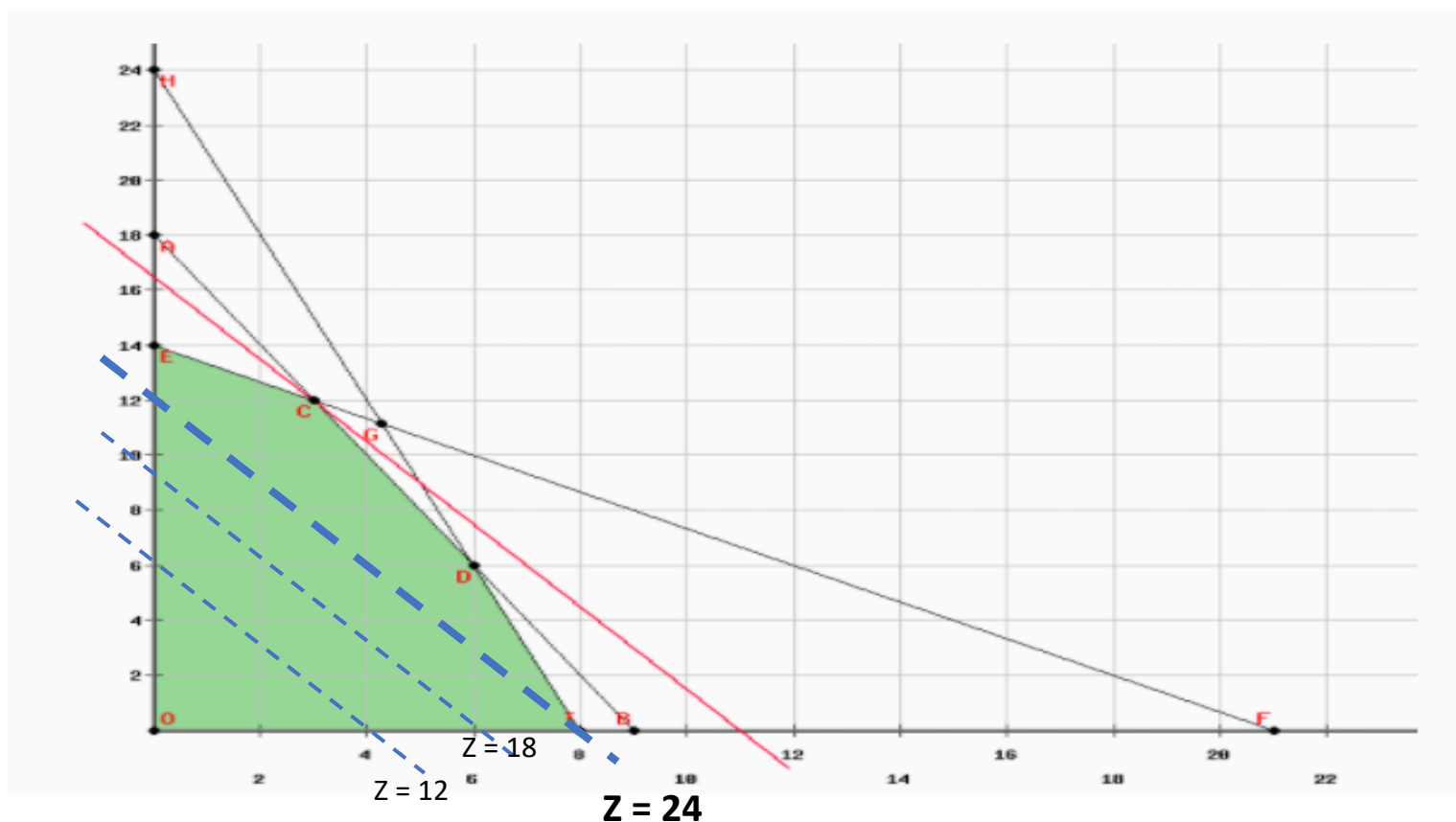
Se $y=0$: $3x = 24 \rightarrow x = 8$

$Z = (8,12)$

Estudo da Função Objetivo

E se eu representasse graficamente a função objetivo?

$$Z = 3x + 2y$$



Estudo da Função Objetivo

E se eu representasse graficamente a função objetivo?

$$Z = 3x + 2y$$

Para $Z = 30$ temos: $3x + 2y = 30$

Se $x=0$: $2y = 30 \rightarrow y = 15$

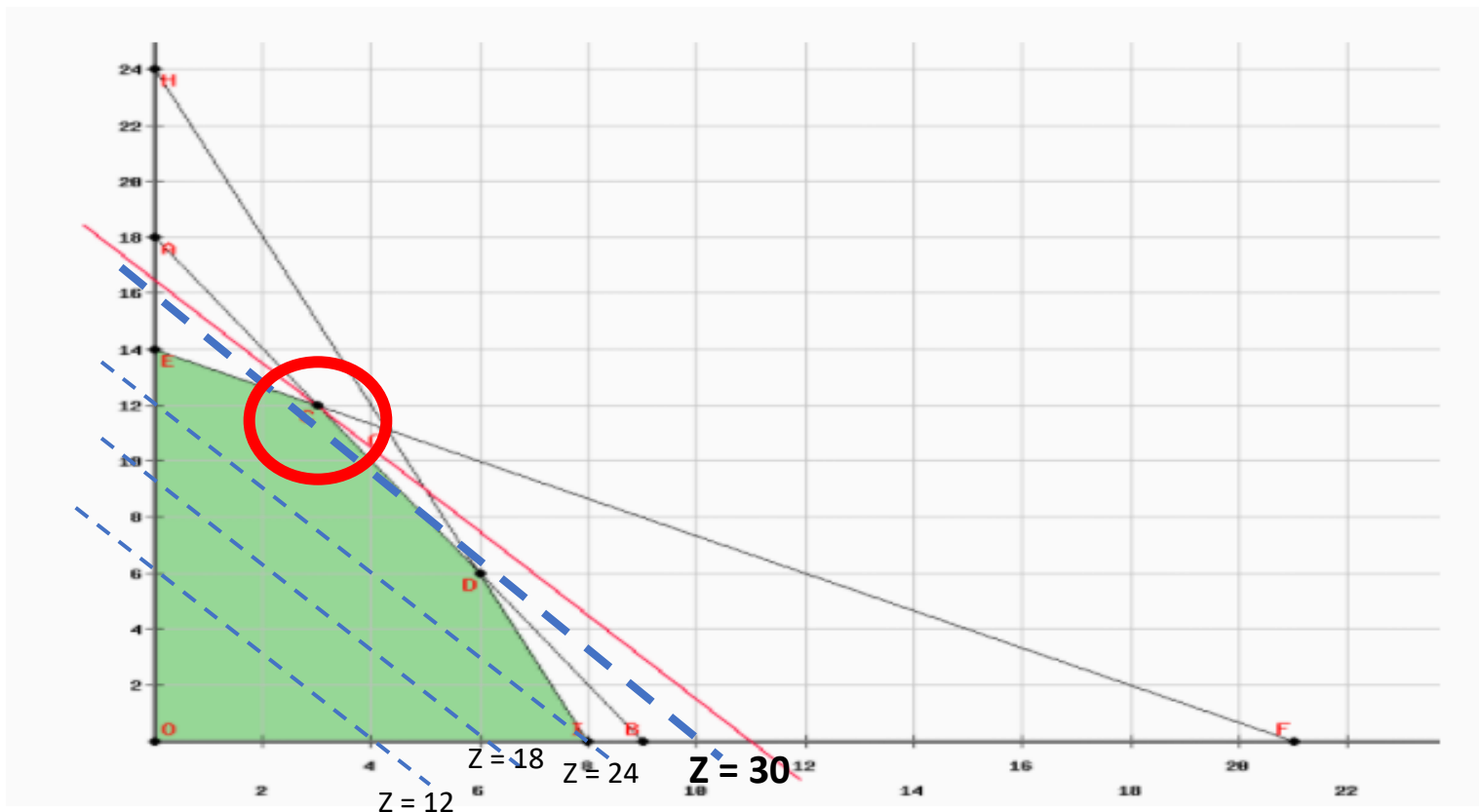
Se $y=0$: $3x = 30 \rightarrow x = 10$

$Z = (10,15)$

Estudo da Função Objetivo

E se eu representasse graficamente a função objetivo?

$$Z = 3x + 2y$$



Estudo da Função Objetivo

E se eu representasse graficamente a função objetivo?

$$Z = 3x + 2y$$

Para $Z = 33$ temos: $3x + 2y = 33$

Se $x=0$: $2y = 33 \rightarrow y = 16.6$

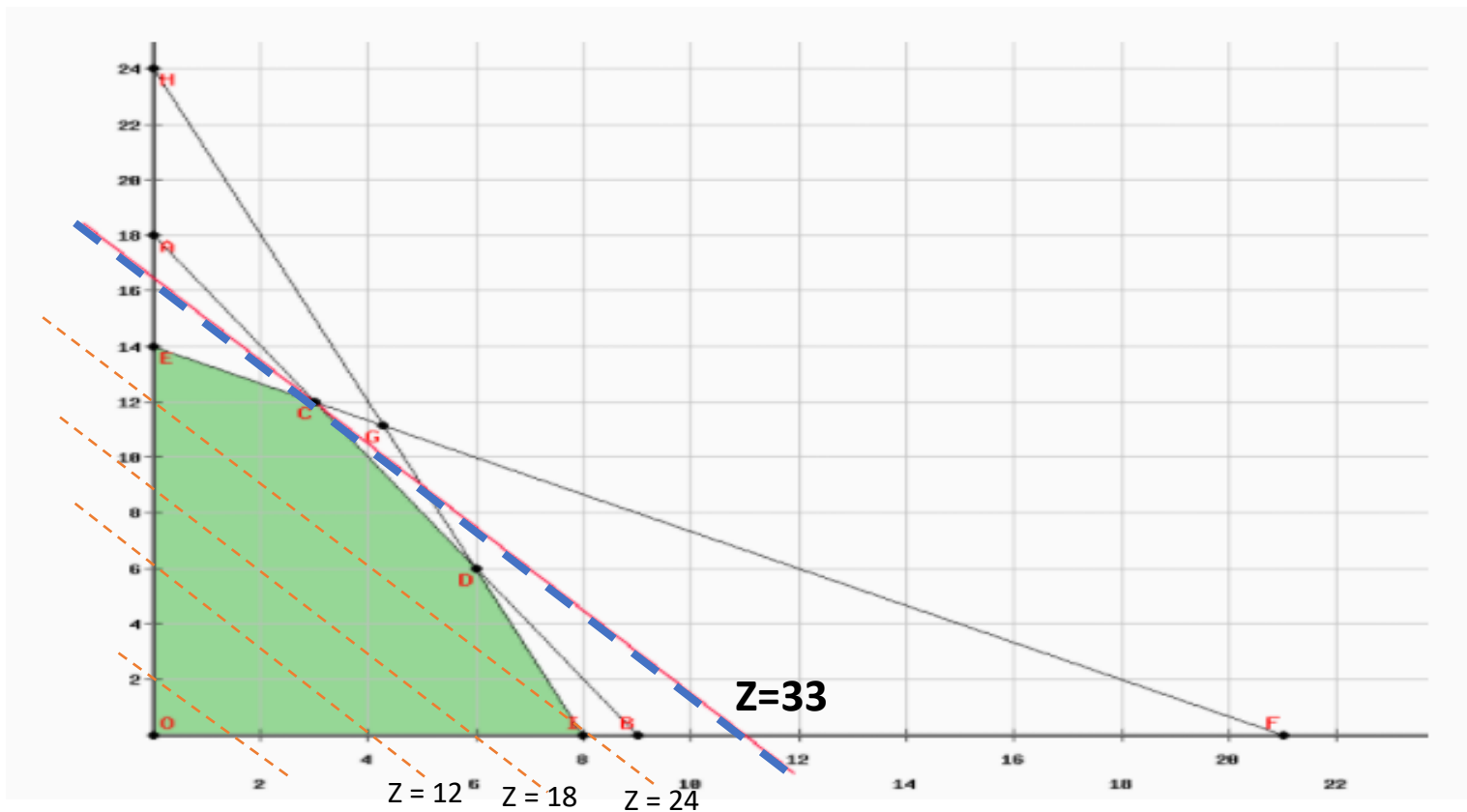
Se $y=0$: $3x = 33 \rightarrow x = 11$

$Z = (11, 16.5)$

Estudo da Função Objetivo

E se eu representasse graficamente a função objetivo?

$$Z = 3x + 2y$$

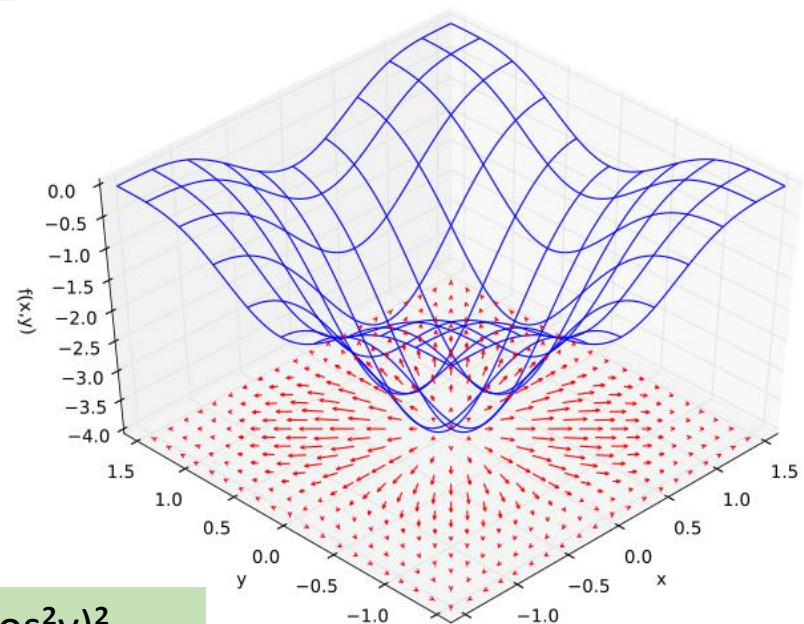


Estudo da Função Objetivo

Uai, isso é uma pegadinha?

Não. Categoricamente não. Existe muita matemática por trás desse comportamento da equação objetiva linear.

Particularmente, temos aqui uma aplicação de uma teoria do cálculo vetorial chamada de vetor gradiente que é um vetor que indica o sentido e a direção na qual, por deslocamento a partir do ponto especificado, obtém-se o maior incremento possível no valor de uma grandeza a partir da qual se define um campo escalar para o espaço em consideração.



A inclinação da função $f(x, y) = -(\cos^2 x \cos^2 y)^2$

Estudo da Função Objetivo

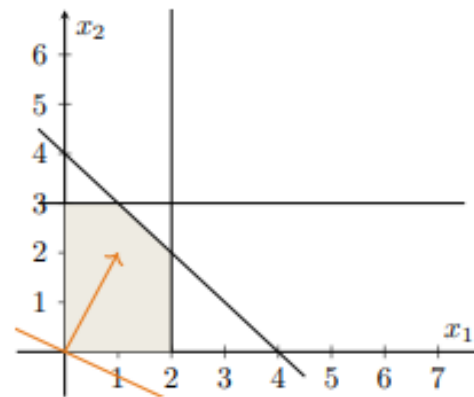
Uai, isso é uma pegadinha?

O vetor gradiente de uma função $f(x_1, x_2)$, dado por

$$\nabla f(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)$$

indica o sentido de maior crescimento da função. Se a função for linear, o gradiente será constante (a direção e o sentido não variam)

Consequentemente, indica a direção onde as curvas de f assumem valores maiores ou menores. **No caso de retas a direção é constante e perpendicular às mesmas.**



Quer conhecer mais sobre a matemática por trás das PLs? [Leia esse TCC.](#)

Analise de Sensibilidade

Através da representação gráfica é possível verificar porque algumas soluções indesejadas podem ocorrer.

1. **Restrições Incompatíveis**: É possível que alguns problemas não possuam solução alguma (solução impossível), fato este causado por incompatibilidade entre as restrições. Por exemplo:

Maximizar: $Z = x + 2y$

Sujeito a:

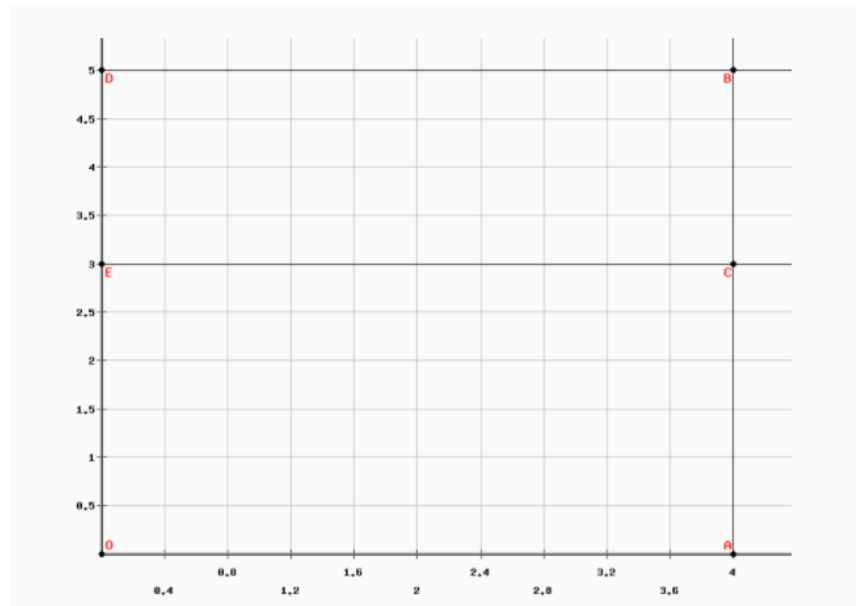
$$x \geq 4$$

$$y \geq 5$$

$$y \leq 3$$

$$x, y \geq 0$$

Ponto	Coordenada X (X_1)	Coordenada Y (X_2)	Valor da função (Z)
O	0	0	0
A	4	0	4
B	4	5	14
C	4	3	10
D	0	5	10
E	0	3	6



Analise de Sensibilidade

2. **Solução sem Fronteiras**: É possível que alguns problemas não tenham um máximo definido para a função objetivo: ela pode ser tão grande quanto se deseje, já que seu valor aumenta com o crescimento de X e Y e nenhuma destas variáveis tem seu valor máximo limitado. Por exemplo:

Maximizar: $Z = x + 2y$

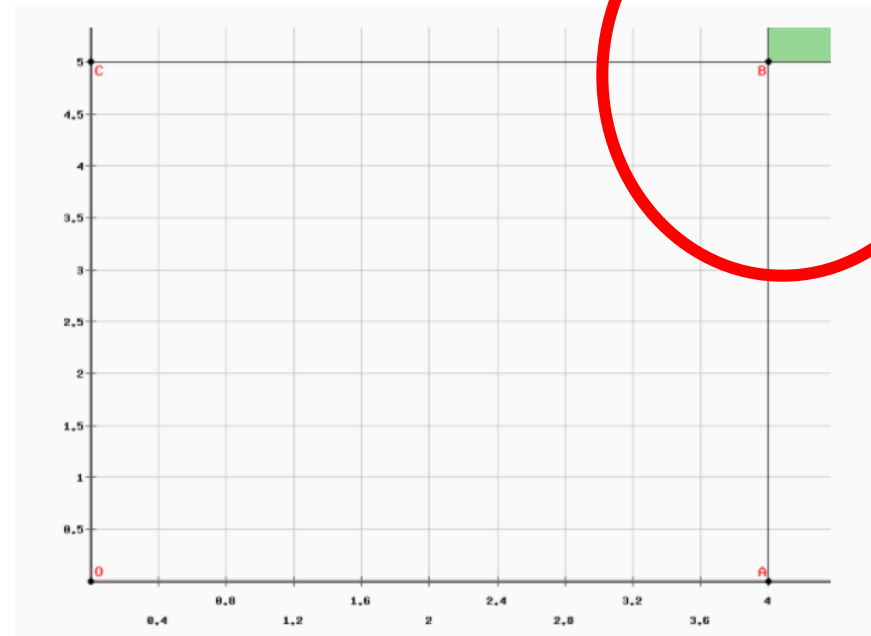
Sujeito a:

$$x \geq 4$$

$$y \geq 5$$

$$x, y \geq 0$$

Ponto	Coordenada X (X_1)	Coordenada Y (X_2)	Valor da função (Z)
O	0	0	0
A	4	0	4
B	4	5	14
C	0	5	10



Analise de Sensibilidade

3. **Restrições Redundantes**: Não constitui em si um problema para encontrar a solução final de um problema de PL, mas pode trazer uma confusão no entendimento do problema ou tornar mais complexa a busca por uma solução gráfica por incluir elementos já atendidos em outra restrição. Por exemplo:

Maximizar: $Z = x + 2y$

Sujeito a:

$$x \leq 4$$

$$y \leq 5$$

$$y \leq 3$$

$$x, y \geq 0$$

Analise de Sensibilidade

4. **Soluções Múltiplas**: Ocorre na situação em que a reta que representa a função objetivo é paralela à uma das restrições tornando impossível determinar um único ponto de extremo que seja a solução ótima. Por exemplo:

Minimizar: $Z = 50x + 100y$

Sujeito a:

$$7x + 2y \geq 28$$

$$2x + 4y \geq 24$$

$$x, y \geq 0$$

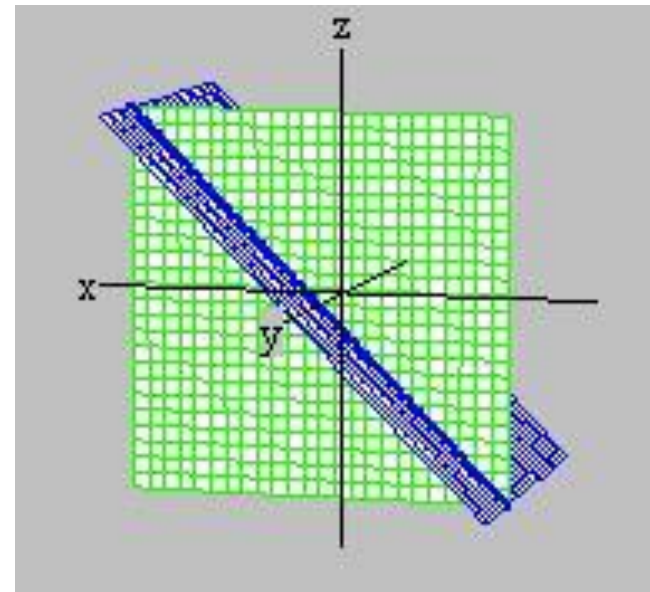
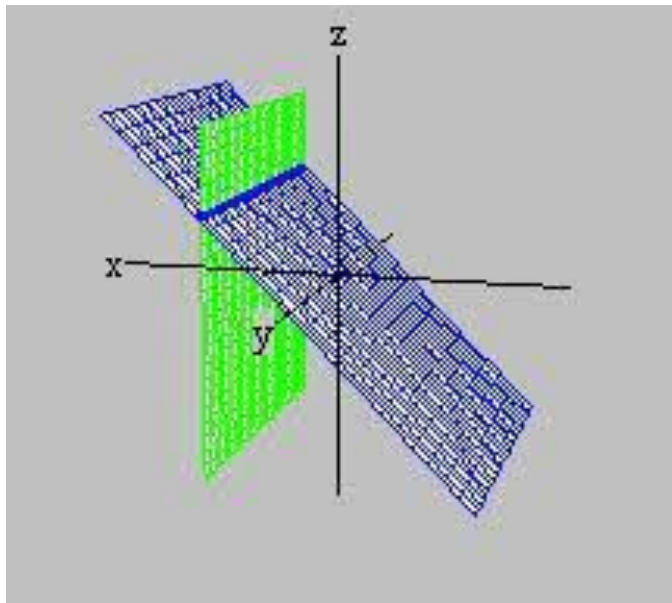
Ponto	Coordenada X (X_1)	Coordenada Y (X_2)	Valor da função (Z)
O	0	0	0
A	0	14	1400
B	4	0	200
C	2.66666666666667	4.66666666666667	600
D	0	6	600
E	12	0	600



Método Gráfico

E quando for 3 variáveis?

A representação com 3 variáveis gera um gráfico 3D, utilizando os eixos x , y e z .



Método Gráfico

E quando for 3 variáveis?

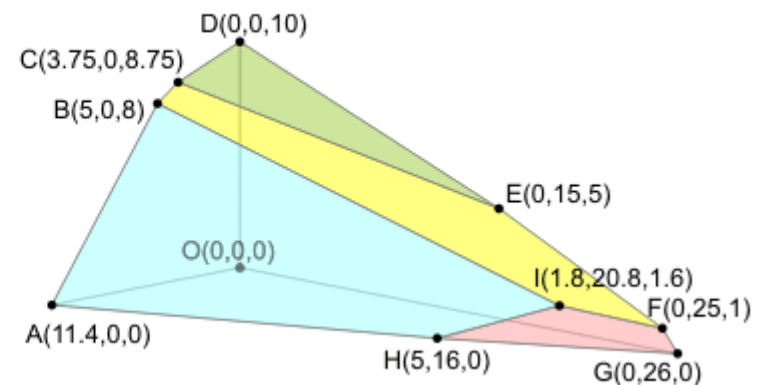
Exemplo de resolução de um problema de PL com 3 variáveis: [Clique aqui](#).

Artigo sobre resolução de problemas de PL com 3 variáveis: [Clique aqui](#).

Resolução de problemas de PL com variáveis do Wolfram: [Clique aqui](#).

Solve this linear programming problem.

$$\begin{array}{llll} \text{Maximize} & P = & 20x_1 & + & 10x_2 & + & 15x_3 \\ \text{Subject to:} & & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 \leq 55 \\ & & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 \leq 26 \\ & & x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 \leq 30 \\ & & 5x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 \leq 57 \\ & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 \geq 0 \end{array}$$



Método Gráfico

Para pensar um pouco:

Aproveite para consolidar o conhecimento em resolução de um problema de PL usando o método gráfico e conhecer uma ferramenta computacional para resolver essas equações.

Aplicação web para ensino de resolução gráfica em disciplinas de Pesquisa Operacional