1. **Problem**
   Uma máquina industrial enche pacotes de café. O peso de cada pacote individual varia seguindo uma distribuição desconhecida, mas um longo histórico de produção indica que a média de peso (μ) é de **498g** e o desvio padrão (σ) é de **12g**.

   Se um inspetor de qualidade selecionar uma amostra aleatória de **36** pacotes, qual é a probabilidade percentual de que o **peso médio** dessa amostra seja **maior que 502.5g**?

   (Forneça a resposta em porcentagem, com 2 casas decimais. Ex: 5.29)

   Solution
   O Teorema Central do Limite (TCL) nos permite aproximar a distribuição da média amostral ($\bar{X}$) por uma distribuição Normal.

   (a) **Definir a Distribuição da Média Amostral:** Pelo TCL, $\bar{X}$ segue aproximadamente uma distribuição Normal com:
      - Média: $E(\bar{X}) = \mu = 498$
      - Erro Padrão (desvio padrão da média): $SE(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{12}{\sqrt{36}} \approx 2$

   (b) **Padronizar o Valor de Interesse (Calcular o Z-score):** Convertemos o valor de 502.5g para a escala da Normal Padrão:

   $$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{SE(\bar{X})} = \frac{502.5 - 498}{2} \approx 2.25$$

   (c) **Calcular a Probabilidade:** A pergunta $P(\bar{X} > 502.5)$ se torna $P(Z > 2.25)$. Usando a função `pnorm()` do R, calculamos a área à direita de Z: `pnorm(2.25, lower.tail = FALSE)` resulta em 0.0122.

   Convertendo para porcentagem, a probabilidade é de **1.22%**.

2. **Problem**
   O Teorema Central do Limite é um dos resultados mais importantes da estatística, mas sua aplicação depende de certas condições. Qual das seguintes alternativas **NÃO** é uma condição necessária para a versão clássica do TCL?

   (a) A população original deve ter média e variância finitas.
   (b) A população original deve seguir uma distribuição Normal.
   (c) As observações na amostra devem ser independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.).
   (d) A amostra deve ser grande o suficiente.

   Solution
   A resposta correta é que a população original **não precisa** seguir uma distribuição Normal. O poder e a beleza do Teorema Central do Limite residem justamente no fato de que ele é válido para populações com qualquer distribuição (desde que tenham média e variância finitas). As outras três opções são condições necessárias para o teorema.

3. **Problem**
   Uma livraria especializada em itens raros recebe, em média, **17 clientes por dia**. O número de clientes que chegam a cada dia é independente dos outros dias.

   Considerando um período de **250 dias** de funcionamento, qual é a probabilidade aproximada de que o **número total de clientes** recebidos nesse período seja **menor que 4409**?

   (Use a aproximação Normal via Teorema Central do Limite e forneça a resposta em formato decimal com 4 casas. Ex: 0.8765)

   Solution
   Este é um problema de duas camadas. Primeiro, reconhecemos que o número de clientes

por dia, sendo um evento de contagem em um intervalo fixo, pode ser modelado por uma distribuição de Poisson com $\lambda = 17$. Em uma Poisson, a média e a variância são iguais a λ.

Em seguida, queremos encontrar a distribuição do **número total de clientes** em 250 dias. Seja T o total de clientes, temos $T = X_1 + X_2 + \ldots + X_{250}$, onde cada X_i é uma variável aleatória Poisson($\lambda = 17$) independente e identicamente distribuída.

Pelo **Teorema Central do Limite**, a soma de um grande número de variáveis aleatórias i.i.d. pode ser aproximada por uma distribuição Normal.

(a) **Parâmetros da Distribuição Normal:**

- **Média da Soma:** $E(T) = n \times \lambda = 250 \times 17 = 4250$
- **Variância da Soma:** $\text{Var}(T) = n \times \lambda = 250 \times 17 = 4250$
- **Desvio Padrão da Soma:** $\sigma_T = \sqrt{4250} \approx 65.192$ Portanto, $T \approx N(4250, 4250)$.

(b) **Calcular a Probabilidade:** Queremos encontrar $P(T < 4409)$. Como estamos usando uma distribuição contínua (Normal) para aproximar uma discreta (Poisson), aplicamos uma **correção de continuidade**, usando $P(T \leq 4408)$, que na aproximação se torna $P(T < 4408.5)$.

Padronizamos o valor corrigido:

$$Z = \frac{(4409 - 0.5) - 4250}{65.192} \approx 2.4313$$

A probabilidade é $P(Z < 2.4313)$, que pode ser encontrada com `pnorm(2.4313)`. O resultado é aproximadamente **0.9925**.

4. **Problem**
Suponha que a média amostral de 100 observações seja $\bar{X}_n = 13$ e a variância amostral seja $s^2 = 24$. Usando o Método Delta, estime a variância aproximada da transformação logarítmica da média, $\text{Var}(\log(\bar{X}_n))$.

Solution
A função de transformação é $g(\mu) = \log(\mu)$. A derivada é $g'(\mu) = 1/\mu$. A fórmula do Método Delta para a variância é: $\text{Var}(g(\bar{X}_n)) \approx [g'(\mu)]^2 \cdot \text{Var}(\bar{X}_n)$.

Estimamos os parâmetros com os valores da amostra: 1. **Estimativa da derivada:** $g'(\bar{x}) = 1/13 \approx 0.0769$. 2. **Estimativa da variância da média:** $\text{Var}(\bar{X}_n) = s^2/n = 24/100 \approx 0.24$. 3. **Variância via Método Delta:** $(0.0769)^2 \times 0.24 = 0.00142$.

5. **Problem**
Em um estudo, o Grupo A teve 68 sucessos em 100 tentativas, enquanto o Grupo B teve 54 sucessos em 100 tentativas. O Odds Ratio (OR) é usado para comparar as chances de sucesso entre os grupos. Usando o Método Delta para encontrar o erro padrão do logaritmo do OR, qual é o intervalo de confiança de 95% aproximado para o Odds Ratio?

(a) [0.71, 2.25]

(b) [1.02, 3.22]

(c) [1.52, 3.72]

(d) [0.95, 1.05]

Solution

(a) **Proporções:** $\hat{p}_A = 68/100 = 0.68$ e $\hat{p}_B = 54/100 = 0.54$.

(b) **Odds Ratio (OR):** $OR = (\hat{p}_A/(1 - \hat{p}_A))/(\hat{p}_B/(1 - \hat{p}_B)) \approx 1.81$.

(c) **Variância do log(OR) (via Método Delta):**

$$\mathrm{Var}(\log(\widehat{OR})) \approx \frac{1}{n_A \hat{p}_A (1-\hat{p}_A)} + \frac{1}{n_B \hat{p}_B (1-\hat{p}_B)} \approx 0.0862$$

(d) **Intervalo de Confiança:** Construímos o IC de 95% para o log(OR) e depois aplicamos a exponencial para obter o IC do OR. O resultado é [1.02, 3.22]. Como este intervalo não contém o valor 1, o resultado é estatisticamente significativo.