INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina
Câmpus
São José

Avaliação 4 de Processos Estocásticos

Vetores Aleatórios

Lucas Costa Fontes

10 de julho de 2024

Sumário

1. Enunciado **3**
2. Resolução **4**
2.1. Vetor média de $\vec{Y}$ 4
2.2. Matriz covariância de $\vec{Y}$ 6
2.3. Vetor média de $\vec{Z}$ 9
2.4. Matriz covariância de $\vec{Z}$ 10

1. Enunciado

7. Sejam $X_1, X_2 \sim \text{Unif}([-2, 1])$ variáveis aleatórias sorteadas independentemente.

(a) Sejam

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1^2, \\ Y_2 &= X_2^2, \\ Y_3 &= X_1 X_2. \end{aligned}$$

Determine o vetor média e a matriz covariância do vetor aleatório $\vec{Y} = [Y_1 \quad Y_2 \quad Y_3]^{\mathrm{T}}$.

(b) Sejam

$$\begin{aligned} Z_1 &= Y_1, \\ Z_2 &= Y_1 + Y_2, \\ Z_3 &= Y_1 + Y_2 + Y_3. \end{aligned}$$

Determine o vetor média e a matriz covariância do vetor aleatório $\vec{Z} = [Z_1 \quad Z_2 \quad Z_3]^{\mathrm{T}}$. **Utilize a formulação matricial.**

Figura 1: Enunciado da Avaliação

2. Resolução

2.1. Vetor média de $\vec{Y}$

Quando analisamos o enunciado, verificamos que as variáveis aleatórias X_1 e X_2 são independentes e igualmente distribuídas entre si, onde $a = -2$, $b = 1$ e altura (h) $= \frac{1}{3}$.
Já sabemos que o valor esperado do quadrado de uma variável aleatória que se distribui uniformemente de maneira contínua é expresso por

$$\begin{gathered} E[X^2] = \int_a^b x^2 f(x) \mathrm{dx}, \\ \text{onde f(x) = h.} \end{gathered} \tag{1}$$

Também precisamos entender que, ao analisar que X_1 e X_2 são variáveis independentes entre si, isso faz com que elas também sejam descorrelacionadas. Isso será útil na descoberta do valor esperado e da variância de Y_3, por exemplo, porque com essa informação nós poderemos fazer o seguinte procedimento matemático:

$$E[X_1 X_2] = E[X_1] \times E[X_2] \tag{2}$$

Para que possamos determinar o vetor média de $\vec{Y}$, vamos encontrar o valor esperado dos componentes desse vetor. Portanto devemos encontrar $E[Y_1], E[Y_2], E[Y_3]$.
Com base no enunciado, nós teremos que:

$$\begin{gathered} E[Y_1] = E[X_1^2] \\ E[Y_2] = E[X_2^2] \\ E[Y_3] = E[X_1 X_2] = E[X_1] \times E[X_2]. \end{gathered} \tag{3}$$

De modo que temos todas as informações necessárias para a descoberta do vetor média solicitado no enunciado, podemos finalmente dar início aos cálculos e determiná-lo:

$$
\begin{aligned}
E[Y_1] = E[X_1^2] &= \int_{-2}^{1} \frac{1}{3} x^2 \,\mathrm{dx} \\
E[Y_1] &= \frac{1}{3} \times \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1} \\
E[Y_1] &= \frac{1}{3} \times \frac{1^3 - (-2)^3}{3} \\
E[Y_1] &= \frac{1}{\cancel{3}} \times \cancel{3} = 1
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Se analisarmos o enunciado, perceberemos que $E[Y_2]$ é igual a $E[Y_1]$, pois as variáveis aleatórias X_1 e X_2 se distribuem uniformemente da mesma forma, ou seja $X_1 = X_2$, logo $X_1^2 = X_2^2$.

$$
E[Y_2] = E[X_2^2] = E[X_1^2] = E[Y_1] = 1 \tag{5}
$$

Antes de calcular $E[Y_3]$, podemos lembrar que, o valor esperado de uma variável aleatória com distribuição uniforme contínua é expressa por:

$$
E[X] = \frac{a+b}{2} \tag{6}
$$

Logo, seguimos para o cálculo de $E[Y_3]$:

$$
\begin{aligned}
E[Y_3] &= E[X_1 X_2] \\
E[Y_3] &= E[X_1] \times E[X_2] \\
E[Y_3] &= \frac{-2+1}{2} \times \frac{-2+1}{2} = \left(\frac{-2+1}{2}\right)^2 \\
E[Y_3] &= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Após a realização de todos os cálculos, finalmente encontramos o vetor média $\vec{Y}$:

$$
E\left[\vec{Y}\right] = \left[1 \ 1 \ \frac{1}{4}\right]^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}. \tag{8}
$$

2.2. Matriz covariância de $\vec{Y}$

Antes de prosseguirmos para o cálculo, é interessante expressar que a matriz covariância é dada por:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{var}[Y_1] & \mathrm{cov}[Y_1, Y_2] & \mathrm{cov}[Y_1, Y_3] \\ \mathrm{cov}[Y_2, Y_1] & \mathrm{var}[Y_2] & \mathrm{cov}[Y_2, Y_3] \\ \mathrm{cov}[Y_3, Y_1] & \mathrm{cov}[Y_3, Y_2] & \mathrm{var}[Y_3] \end{pmatrix} \tag{9}$$

Primeiramente, começaremos calculando os componentes da diagonal principal dessa matriz, que se refere às variâncias de Y_1, Y_2 e Y_3.

$$\begin{gathered} \mathrm{var}[Y_1] = E[Y_1^2] - E[Y_1]^2 \\ E[Y_1^2] = E\left[\left(X_1^2\right)^2\right] = E[X_1^4] \\ E[X_1^4] = \int_{-2}^{1} \frac{1}{3} x^4 \ \mathrm{dx} \\ E[X_1^4] = \frac{1}{3}\left[\frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{1} = \frac{1}{3} \times \frac{1^5 - (-2)^5}{5} = \frac{33}{15} = \frac{11}{5} \\ E[Y_1]^2 = 1^2 = 1 \\ \mathrm{var}[Y_1] = \frac{11}{5} - 1 = \frac{6}{5} \end{gathered} \tag{10}$$

Assim como no exercício do vetor média, chegaremos na conclusão que $\mathrm{var}[Y_2] = \mathrm{var}[Y_1]$ pois X_2 se distribui uniformemente da mesma maneira que X_1, variável aleatória essa da qual Y_1 depende, assim como Y_2 depende de X_2. Logo:

$$\mathrm{var}[Y_2] = \mathrm{var}[X_2^4] = \mathrm{var}[X_1^4] = \mathrm{var}[Y_1] = \frac{6}{5}. \tag{11}$$

$$
\begin{aligned}
\text{var}[Y_3] &= E[Y_3^2] - E[Y_3]^2 \\
\text{var}[Y_3] &= E\left[(\text{X1X2})^2\right] - E[Y_3]^2 \\
\text{var}[Y_3] &= E[X_1^2 X_2^2] - E[Y_3]^2 \\
\text{var}[Y_3] &= E[X_1^2]E[X_2^2] - E[Y_3]^2 \\
\text{var}[Y_3] &= 1 \times 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}
\end{aligned} \tag{12}
$$

Depois de descobertas as variâncias, podemos partir para a descoberta das covariâncias.
Por simetria, já sabemos que $\text{cov}[Y_1, Y_2] = \text{cov}[Y_2, Y_1]$, $\text{cov}[Y_1, Y_3] = \text{cov}[Y_3, Y_1]$ e $\text{cov}[Y_2, Y_3] = \text{cov}[Y_3, Y_2]$.
Ao nos atentarmos novamente ao fato de que X_1 e X_2 são variáveis aleatórias independentes e, portanto, descorrelacionadas entre si, chegamos na conclusão que $\text{cov}[Y_1, Y_2] = 0$, pois Y_1 depende unicamente de X_1 e Y_2 depende unicamente de X_2. Logo Y_1 e Y_2 são descorrelacionadas entre si também, e com isso, concluímos que a covariância entre essas variáveis aleatórias é zero.
Para continuarmos encontrando valores para preencher a matriz covariância de $\vec{Y}$, precisamos encontrar o valor de $\text{cov}[Y_3, Y_1]$ e de $\text{cov}[Y_3, Y_2]$.

$$
\begin{aligned}
\text{cov}[Y_1, Y_3] &= E[Y_1 Y_3] - E[Y_1]E[Y_3] \\
\text{cov}[Y_1, Y_3] &= E\big[(X_1^2)(X_1 X_2)\big] - E[Y_1]E[Y_3] \\
\text{cov}[Y_1, Y_3] &= E\big[(X_1^3)(X_2)\big] - E[Y_1]E[Y_3] \\
\text{cov}[Y_1, Y_3] &= \big(E[X_1^3] \times E[X_2]\big) - E[Y_1]E[Y_3] \\
* \, E[X_1^3] &= \int_{-2}^{1} \frac{1}{3} x^3 \\
* \, E[X_1^3] &= \frac{1}{3} \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-2}^{1} \\
* \, E[X_1^3] &= \frac{1}{12} [x^4]_{-2}^{1} \\
* \, E[X_1^3] &= \frac{1}{12} \big[1^4 - (-2)^4\big] \\
* \, E[X_1^3] &= -\frac{15}{12} \\
\text{cov}[Y_1, Y_3] &= \left(-\frac{15}{12} \times \left(-\frac{1}{2} \right) \right) - \left(1 \times \frac{1}{4} \right) \\
\text{cov}[Y_1, Y_3] &= \frac{5}{8} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Utilizaremos a mesma argumentação que utilizamos para definir que $E[Y_2] = E[Y_1]$ e que $\text{var}[Y_1] = \text{var}[Y_2]$, para chegar na conclusão de que $\text{cov}[Y_1, Y_3] = \text{cov}[Y_2, Y_3]$. Portanto:

$$
\text{cov}[Y_1, Y_3] = \text{cov}[Y_2, Y_3] = \frac{3}{8} \tag{14}
$$

Com todos os cálculos necessários, podemos finalmente preencher a matriz covariância de $\vec{Y}$:

$$
C_{\vec{Y}} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & 0 & \frac{3}{8} \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{15}{16} \end{pmatrix} \tag{15}
$$

2.3. Vetor média de $\vec{Z}$

Para determinarmos o vetor média de $\vec{Z}$, vamos utilizar a solução matricial para os cálculos.
Temos que:

$$\begin{cases} Z_1 = Y_1 \\ Z_2 = Y_1 + Y_2 \\ Z_3 = Y_1 + Y_2 + Y_3 \end{cases} \tag{16}$$

Para encontrarmos o vetor média solicitado no enunciado com a solução matricial, vamos utilizar a seguinte fórmula:

$$E\left[\vec{Z}\right] = A \times E\left[\vec{Y}\right] + \vec{b} \tag{17}$$

Com todas as informações que precisamos para prosseguir, podemos finalmente partir para o cálculo:

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 \times 1) + (0 \times 1) + \left(0 \times \frac{1}{4}\right) \\ (1 \times 1) + (1 \times 1) + \left(0 \times \frac{1}{4}\right) \\ (1 \times 1) + (1 \times 1) + \left(1 \times \frac{1}{4}\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{9}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{9}{4} \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{18}$$

Portanto:

$$E\left[\vec{Z}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{9}{4} \end{bmatrix}^T \tag{19}$$

2.4. Matriz covariância de $\vec{Z}$

A exemplo do vetor média de $\vec{Z}$, vamos utilizar a solução matricial para encontrarmos também a matriz covariância solicitada no enunciado. A fórmula que utilizaremos é dada por:

$$C_{\vec{Z}} = A \times C_{\vec{Y}} \times A^T \tag{20}$$

Temos que:

$$\begin{cases} Z_1 = Y_1 \\ Z_2 = Y_1 + Y_2 \\ Z_3 = Y_1 + Y_2 + Y_3 \end{cases} \tag{21}$$

Dessa forma, teremos que:

$$\begin{gathered} C_{\vec{Z}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & 0 & \frac{3}{8} \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{15}{16} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ C_{\vec{Z}} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & \frac{6}{5} & \frac{63}{40} \\ \frac{6}{5} & \frac{12}{5} & \frac{63}{20} \\ \frac{63}{40} & \frac{63}{20} & \frac{387}{80} \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{22}$$

Nesse exercício em específico, para facilitar os cálculos e encurtar o procedimento, utilizamos o software **Octave** para realizar a multiplicação entre as matrizes.