INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina
Câmpus
São José

Avaliação 7 de Processos Estocásticos

Processos Estocásticos

Lucas Costa Fontes

27 de Agosto de 2024

Sumário

1. Enunciado

1. Seja $X[n]$ um processo estocástico de parâmetro discreto, em que

$$\ldots, X[-2], X[-1], X[0], X[1], X[2], \ldots$$

são variáveis aleatórias gaussianas i.i.d. (independentes e identicamente distribuídas) de média 0 e variância 2. Seja

$$Y[n] = 3X[n] + 4X[n-1].$$

Determine:

(a) A função autocovariância de $X[n]$. Esboce.

(b) A função autocovariância de $Y[n]$, sem utilizar análise no domínio da frequência. Esboce.

(c) A função autocovariância de $Y[n]$, utilizando análise no domínio da frequência.

(d) A função densidade de probabilidade de $Y[3]$.

(e) A covariância entre $Y[3]$ e $Y[4]$.

(f) $\Pr[Y[3] > 0 \mid Y[1] = 1]$.

Figura 1: Enunciado da Avaliação

2. Desenvolvimento

2.1. Determinando e esboçando $C_X[n]$

2.1.1. Determinando $C_X[n]$

Ao analisarmos o enunciado vemos que X[n] se distribui de modo que:

$$X[n] \sim^{\text{iid}} N(0, 2) \tag{1}$$

Agora, se verificarmos que precisamos encontrar a função autocovariância do processo estocástico e, recorrendo à fórmula da função autocovariância de um processo estocástico, temos que:

$$X[n_1, n_2] = \text{cov}[X[n_1], X[n_2]] \tag{2}$$

Porém, ao analisarmos que as variáveis aleatórias são independentes, podemos afirmar que são descorrelacionadas, e se são descorrelacionadas, então a covariância entre elas é 0 a não ser que $n_1 = n_2$. Desse modo, teremos uma variância, de maneira que, se dissermos que $n_1, n_2 = \ell$ (ou seja, $n_2 - n_1 = \ell$), então chegamos na conclusão que:

$$C_X[\ell] := \begin{cases} 2, \text{ se } \ell = 0 \text{ ou, se } n_1 = n_2 \\ 0, \text{ se } \ell \neq 0 \text{ ou, se } n_1 \neq n_2 \end{cases} \tag{3}$$

2.1.2. Esboçando $C_X[n]$

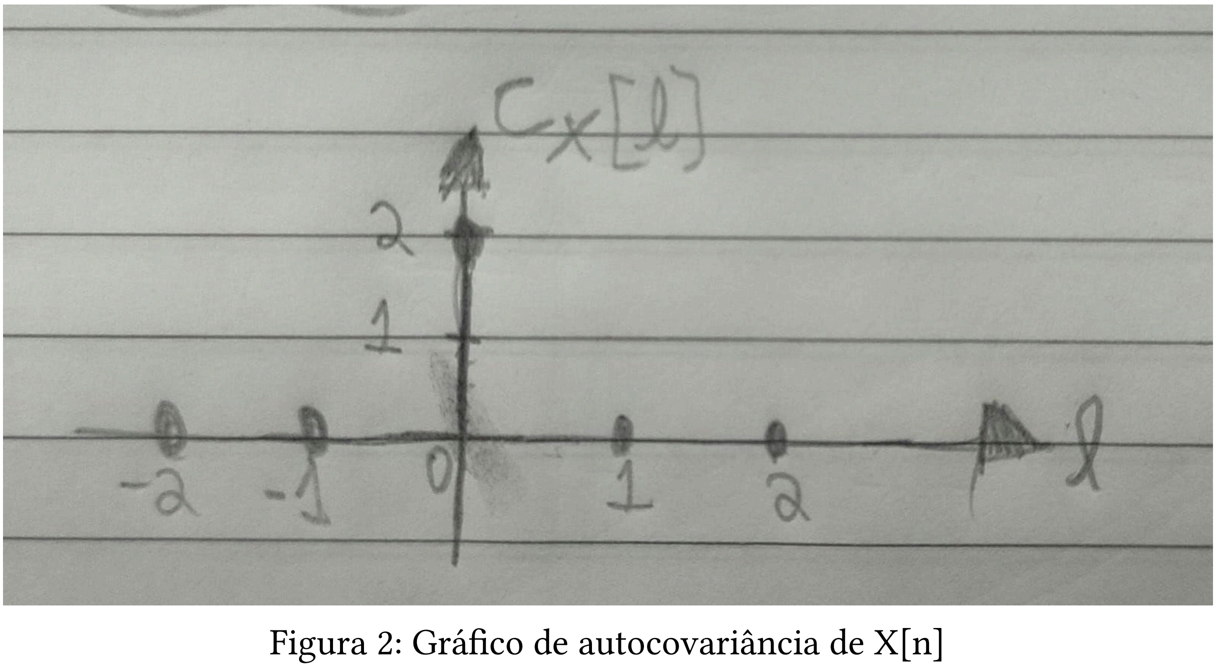

Figura 2: Gráfico de autocovariância de X[n]

2.2. Determinando e esboçando $C_Y[n]$ sem usar o domínio da frequência

2.2.1. Determinando $C_Y[n]$

Para determinarmos a função do enunciado, podemos sair direto pela fórmula da covariância:

$$
\begin{aligned}
C_Y[n_1, n_2] &= \operatorname{cov}\left[Y_{n_1}, Y_{n_2}\right] \\
&= E\left[Y_{n_1}, Y_{n_2}\right] - \cancel{E\left[Y_{n_1}\right]E\left[Y_{n_2}\right]} \\
&= E[\left(3X_{n_1} + 4X_{n_1-1}\right)\left(3X_{n_2} + 4X_{n_2-1}\right] \\
&= E\left[9X_{n_1}X_{n_2} + 12X_{n_1}X_{n_2-1} + 12X_{n_1-1}X_{n_2} + 16X_{n_1-1}X_{n_2-1}\right] \\
&= 9 \times E\left[X_{n_1}X_{n_2}\right] + 12 \times E\left[X_{n_1}X_{n_2-1}\right] + 12 \times E\left[X_{n_1-1}X_{n_2}\right] + 16 \times E\left[X_{n_1-1}X_{n_2-1}\right] \\
&= 9 \times C_X[n_1, n_2] + 12 \times C_X[n_1, n_2 - 1] + 12 \times C_X[n_1 - 1, n_2] + 16 \times C_X[n_1 - 1, n_2 - 1] \\
&= 9 \times C_X[\ell] + 12 \times C_X[\ell - 1] + 12 \times C_X[\ell + 1] + 16 \times C_X[\ell] \\
&= 25 \times 2\delta[\ell] + 12 \times 2\delta[\ell - 1] + 12 \times 2\delta[\ell + 1] \\
&= 50\delta[\ell] + 24\delta[\ell - 1] + 24\delta[\ell + 1]
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Com os cálculos acima, chegamos na conclusão que:

$$
C_Y[\ell] := \begin{cases} 50 \text{ , se } \ell = 0 \text{ ou, se } n_1 = n_2 \\ 24 \text{ , se } \ell = -1 \text{ ou, se } n_1 - n_2 = 1 \\ 24 \text{ , se } \ell = 1 \text{ ou, se } n_2 - n_1 = 1 \\ 0 \text{ , se } |\ell| \geq 2 \text{ ou, caso } n_2 - n_1 \geq 2 \text{ ou } n_1 - n_2 \geq 2 \end{cases}
\tag{5}
$$

2.2.2. Esboçando $C_Y[n]$

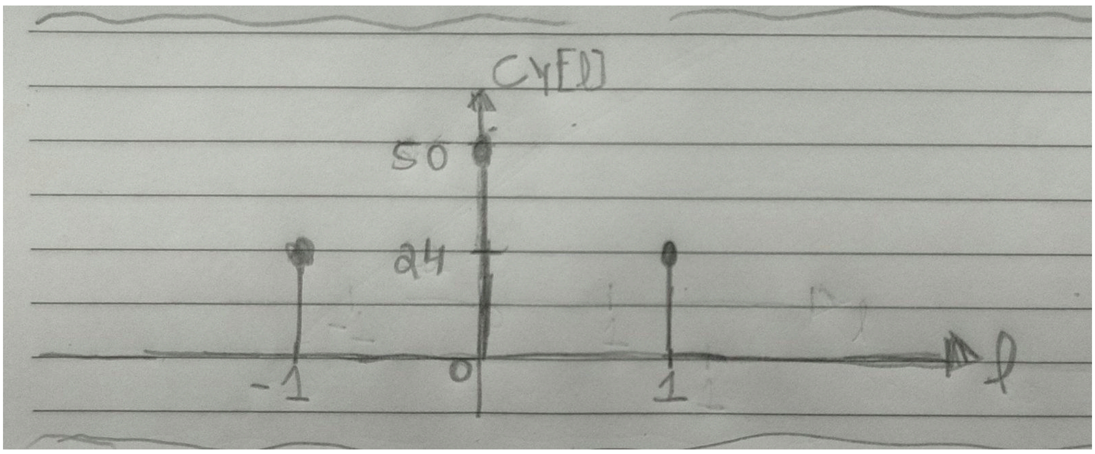

Figura 3: Gráfico de autocovariância de Y[n]

2.3. Determinando $C_Y[\ell]$, utilizando o domínio da frequência

Primeiramente, analisamos o problema interpretando o X$[n]$ sendo:

- $\mu_X = 0$
- $C_X[\ell] = 2\delta[\ell]$
- $S_X[\Phi] = F\{2\delta[\ell]\} = 2$

Podemos então utilizar $h[n]$ e $h[\Phi]$ sendo:

- $h[n] = 3\delta[n] + 4\delta[n-1]$
- $\hat{h}[\Phi] = 3 + 4e^{-j2\pi\Phi}$

E então podemos encontrar a PDF e, com isso a autocovariância de Y no domínio da frequência:

$$\begin{aligned} \left(\left|\hat{h}(\Phi)\right|\right)^2 &= \left|3 + 4e^{-j2\pi\Phi}\right|^2 \\ &= |3 + 4[\cos(2\pi\Phi) - j\sin(2\pi\Phi)]|^2 \\ &= [3 + 4\cos(2\pi\Phi)]^2 + 16\sin^2(2\pi\Phi) \\ &= 9 + 24\cos(2\pi\Phi) + 16\cos^2(2\pi\Phi) + 16\sin^2(2\pi\Phi) \\ &= 9 + 24\cos(2\pi\Phi) + 16(\cos{}^2(2\pi\Phi) + \sin{}^2(2\pi\Phi)) \\ &= 9 + 24\cos(2\pi\Phi) + 16 \\ &= 25 + 24\cos(2\pi\Phi) \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} S_{Y(\Phi)} &= \left|\hat{h}(\Phi)\right|^2 S_X(\Phi) \\ &= (25 + 24\cos(2\pi\Phi)) \times 2 = 50 + 48\cos(2\pi\Phi) \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} C_Y[\ell] &= F^{-1}\left\{S_{Y(\Phi)}\right\} \\ C_Y[\ell] &= F^{-1}\{50\} + F^{-1}\{48\cos(2\pi\Phi)\} \\ C_Y[\ell] &= 50\delta[l] + 24\delta[\ell - 1] + 24\delta[\ell + 1] \end{aligned} \tag{8}$$

2.4. Determinando a PDF de Y[3]

Sabemos que $Y[3]$ irá se distribuir de maneira gaussiana com média 0, afinal $X[n]$ se distribui de maneira gaussiana, logo $Y[n]$ sendo a sua saída, irá se distribuir de maneira gaussiana também.

Mas ainda é necessário encontrar a variância dessa distribuição. Para encontrar a variância de Y[3], podemos aplicar: $\text{var}Y[3] = \text{cov}[Y[3], Y[3]]$.

Podemos analisar que, nesse caso, $n_1 = n_2 = 3$, ou seja, $\ell = 0$.

Guardamos essa informação e verificamos que esse processo estocástico segue todas as propriedades de um processo estocástico estacionário no sentido amplo, afinal:

- A função é par, pois $C_Y[\ell - 1] = C_Y[\ell + 1]$;
- O valor na origem é a própria variância ($C_Y[0] = \sigma_Y^2$), afinal $\ell = 0$, significa dizer que $n_1 = n_2$, em outras análises: $\text{cov}[n_1, n_2]$, se $n_1 = n_2$, então essa covariância é $\text{cov}[n_1, n_1] = \text{var}[n_1]$;
- A desigualdade de Cauchy-Schwarz está sendo respeitada, afinal Essa desigualdade é expressa por $-\sigma_X^2 \leq C_{X[n]} <= \sigma_X^2$.

  Analisando $C_Y[\ell]$, nós podemos observar claramente que a faixa de valores respeita a desigualdade de Cauchy-Schwarz para este processo estocástico ESA que é: $-50 \leq C_Y[\ell] \leq 50$. Como $C_Y[\ell]$ possui o seguinte intervalo ao analisarmos o gráfico $24 \leq C_Y[\ell] \leq 50$, ele está dentro do intervalo da desigualdade, atendendo assim, essa propriedade.

Ao validarmos todas as propriedades e analisarmos que a relação entre $Y[n]$ e $X[n]$ pode ser encarada como um SLIT, podemos assumir com toda a certeza que esse é um processo estocástico ESA, e aí a variância de Y[3] sai pela propriedade 2 aplicada à autocovariância anteriormente encontrada:

$$\text{var}Y[3] = C_Y[0] = 50 \therefore Y[3] \sim N(0, 50) \tag{9}$$

O restante é simples, pois agora basta utilizarmos a fórmula da PDF de uma distribuição gaussiana para uma única dimensão, que é expressa por:

$$F_{X(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{10}$$

Aplicando esse caso particular na Equação 10, teremos que:

$$F_{Y[3]} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \times 50}} \exp\left(-\frac{y^2}{2 \times 50}\right) \tag{11}$$

2.5. Determinando cov[Y[3],Y[4]]

Podemos analisar que, se generalizarmos essa covariância, nós teremos $C_Y[Y_{\mathrm{n1}}, Y_{\mathrm{n2}}]$. Se avaliarmos esse caso, temos que n1 = 3 e n2 = 4.
Isso significa dizer que, para esse caso:

$$\ell = n_2 - n_1 = 4 - 3 = 1 \tag{12}$$

Ou seja, como $\ell = 1$, já temos elementos suficientes para descobrir a covariância solicitada, pois sai pela função autocovariância $C_Y[\ell]$ anteriormente calculada. Logo, ao analisarmos isso, chegamos à conclusão que:

$$C_Y[Y_3, Y_4] = 24 \tag{13}$$

2.6. Determinando Pr$[Y[3] > 0 \mid Y[1] = 1]$

Vamos primeiramente observar que Y[3] é independente de Y[1]. Podemos comprovar isso com a função autocovariância descoberta anteriormente, se analisarmos que $n_2 = 3$ e $n_1 = 1$. Isso irá nos conceder que:

$$\ell = 3 - 1 = 2 \tag{14}$$

Quando $|\ell| \geq 2$, para a autocovariância anteriormente descoberta, o seu resultado é igual a 0. Ou seja, $C_Y[Y_3, Y_1] = 0$, isso significa dizer que Y[3] e Y[1] são descorrelacionados e, como são conjuntamente gaussianos por causa da relação com $X[n]$, a descorrelação implica a independência entre eles. Saber disso, nos concede a possibilidade de realizar o seguinte procedimento:

$$\Pr[Y[3] > 0 \mid Y[1] = 1] = \Pr[Y[3] > 0] \tag{15}$$

E agora para encontrarmos a probabilidade solicitada podemos sair pela diferença entre a probabilidade máxima de qualquer variável aleatória, que é 1, com a probabilidade de Y[3]. Se tratando de uma variável gaussiana, nós podemos utilizar a função Φ para determinar a sua probabilidade.
Portanto, relembramos que $Y[3] \sim N(0, 50)$ e determinamos a probabilidade solicitada:

$$\begin{gathered} \Pr[Y[3] > 0] = 1 - \Phi\left(\frac{0-0}{\sqrt{50}}\right) \\ \Pr[Y[3] > 0] = \frac{1}{2} = 50\% \end{gathered} \tag{16}$$