INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina
Câmpus São José

Avaliação 5 de Processos Estocásticos

Vetores aleatórios gaussianos

Lucas Costa Fontes

28 de Julho de 2024

Sumário

1. Enunciado

1. Um vetor gaussiano $\vec{X} = [X_1 \quad X_2 \quad X_3]^{\mathrm{T}}$ tem média nula e matriz covariância

$$C_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine:

(a) $\Pr[2 \leq X_1 \leq 3]$.

(b) $\Pr[2 \leq X_1 \leq 3 \mid X_2 = 2]$.

(c) $\Pr[2 \leq X_1 \leq 3 \mid X_2 = 2 \text{ e } X_3 = 3]$.

(d) $\Pr[X_1 - X_3 > 4]$.

Figura 1: Enunciado da Avaliação

2. Resolução

2.1. Coletando informações do enunciado

No enunciado é dado que temos um vetor aleatório gaussiano, isso quer dizer que as variáveis aleatórias contidas nesse vetor são **conjuntamente gaussianas** e isso implica que **todas as variáveis aleatórias contidas nesse vetor são gaussianas**.

Outra informação dada pelo enunciado é que a média do vetor aleatório gaussiano é nula, isso nos concede o seguinte vetor média:

$$E\left[\vec{X}\right] = \mu_{\vec{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Podemos evocar a representação genérica da matriz covariância 3x3, que são as dimensões da matriz covariância concedida pelo enunciado:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{var}[X_1] & \mathrm{cov}[X_1, X_2] & \mathrm{cov}[X_1, X_3] \\ \mathrm{cov}[X_2, X_1] & \mathrm{var}[X_2] & \mathrm{cov}[X_2, X_3] \\ \mathrm{cov}[X_3, X_1] & \mathrm{cov}[X_3, X_2] & \mathrm{var}[X_3] \end{pmatrix} \tag{2}$$

Analisando a matriz covariância dada pelo enunciado, também podemos encontrar a variância de X_1, X_2 e X_3:

$$\begin{aligned} \mathrm{var}[X_1] &= \sigma^2_{X_1} = 9 \\ \mathrm{var}[X_2] &= \sigma^2_{X_2} = 4 \\ \mathrm{var}[X_3] &= \sigma^2_{X_3} = 1 \end{aligned} \tag{3}$$

Tendo tudo isso de informação, e como base que uma variável aleatória gaussiana se distribui do seguinte modo: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, podemos analisar como as variáveis aleatórias X_1, X_2 e X_3 se distribuem de maneira gaussiana:

$$\begin{aligned} X_1 &\sim N(0, 9) \\ X_2 &\sim N(0, 4) \\ X_3 &\sim N(0, 1) \end{aligned} \tag{4}$$

Ainda analisando essa mesma matriz covariância, podemos obter o valor das covariâncias e analisar como esses valores irão impactar em termos de dependência e correlação entre as variáveis aleatórias do enunciado:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cov}[X_1, X_2] &= \operatorname{cov}[X_2, X_1] = 2 \\
\operatorname{cov}[X_1, X_3] &= \operatorname{cov}[X_3, X_1] = 0 \\
\operatorname{cov}[X_2, X_3] &= \operatorname{cov}[X_3, X_2] = 0
\end{aligned}
\tag{5}
$$

As covariâncias acima nos entregam algumas informações importantes sobre as variáveis aleatórias gaussianas do enunciado:

1. X_1 e X_2 possuem correlação entre si, portanto uma depende da outra
2. X_1 e X_3 são descorrelacionadas entre si
3. X_2 e X_3 são descorrelacionadas entre si

Tratando-se de variáveis aleatórias conjuntamente gaussianas, descorrelação implica independência, logo, chegamos à conclusão que X_1 e X_2 independem de X_3.

Tendo esses dados coletados agora de início, podemos recorrer a isso quando estivermos resolvendo os exercícios solicitados no enunciado dessa avaliação.

2.2. Determinar $\Pr[2 \leq X_1 \leq 3]$

Aqui, precisamos encontrar a probabilidade de X_1 assumir um valor entre 2 e 3. Já sabemos, através da coleta de informações do enunciado que, X_1 se distribui de maneira gaussiana. Dada essa constatação, para encontrarmos a probabilidade de uma variável aleatória gaussiana se situar em um intervalo qualquer, podemos utilizar uma subtração de função Φ, que é expressa por:

$$\Pr[a \leq X \leq b] = \Phi\left(\frac{b - \mu_X}{\sigma_X}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu_X}{\sigma_X}\right) \tag{6}$$

Utilizando os dados do enunciado e aplicando na Equação 6 definimos que:

$$\begin{gathered}\Pr[2 \leq X \leq 3] = \Phi\left(\frac{3 - 0}{\sqrt{9}}\right) - \Phi\left(\frac{2 - 0}{\sqrt{9}}\right) \\ \Pr[2 \leq X \leq 3] = \Phi\left(\frac{3}{3}\right) - \Phi\left(\frac{2}{3}\right) = \Phi(1) - \Phi\left(\frac{2}{3}\right) \\ \Pr[2 \leq X \leq 3] = 0.093837 = 9,3837\% \end{gathered} \tag{7}$$

Através dos cálculos, chegamos à conclusão que a probabilidade de X_1 estar no intervalo entre 2 e 3 é de 9,3837%.

Para calcular o resultado, utilizamos o auxílio do software **Octave**.

2.3. Determinar $\Pr[2 \leq X_1 \leq 3 \mid X_2 = 2]$

Para determinarmos a probabilidade solicitada pelo enunciado, precisamos primeiramente fazer algumas análises. Já verificamos anteriormente que X_1 e X_2 são correlacionadas, haja visto que a covariância entre ambas é diferente de 0. Sendo assim, há uma dependência entre elas. Isso faz com que tenhamos que, primeiramente encontrar a PDF condicional de $X_1|X_2 = 3$, para somente depois, aplicarmos a Equação 6 e encontrarmos a probabilidade em questão.

Para descobrirmos a PDF condicional mencionada anteriormente, teremos que realizar a seguinte operação:

$$f_{X_1}(x_1|X_2 = 2) = \frac{f_{X_1,X_2}(x_1, 2)}{f_{X_2}(2)} \tag{8}$$

Para encontrarmos o numerador dessa fração, precisaremos aplicar a fórmula da gaussiana multidimensional:

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det C}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{\mu})^T C^{-1}(\vec{x} - \vec{\mu})\right) \tag{9}$$

Para encontrarmos o denominador da fração descrita na Equação 8 utilizaremos a mesma fórmula. porém adaptada para n = 1:

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{10}$$

Assim sendo, podemos começar o cálculo da probabilidade solicitada no enunciado. Iremos começar calculando o numerador da Equação 8. Para isso, iremos primeiramente descobrir alguns dados importantes para aplicarmos na Equação 9:

$$\begin{gathered} n = 2 \quad C = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \quad X_2 = 2 \quad \vec{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \det C = (9 \times 4) - (2 \times 2) = 36 - 4 = 32 \\ C^{-1} = \frac{1}{32}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{11}$$

$$
\begin{aligned}
f_{X_1,X_2}(x,2) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 32}} \exp\left(-\frac{1}{2}(X_1 \ \ 2)\frac{1}{32}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \\
f_{X_1,X_2}(x,2) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 32}} \exp\left(-\frac{1}{2} \times \frac{1}{32}([4X_1 - 4] \ \ [-2X_1 + 18])\begin{pmatrix} X_1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \\
f_{X_1,X_2}(x,2) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 32}} \exp\left(-\frac{1}{2} \times \frac{1}{32}(4X_1^2 - 4X_1 - 4X_1 + 36)\right) \\
f_{X_1,X_2}(x,2) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 32}} \exp\left(-\frac{1}{2} \times \frac{4X_1^2 - 8X_1 + 36}{32}\right)
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Temos o numerador da Equação 8, agora calculamos o seu denominador utilizando a Equação 10:

$$
\begin{aligned}
&X_2 \sim N(0,4) \\
f_{X_2}(2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(4)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \times \frac{(2-0)^2}{4}\right) \\
f_{X_2}(2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(4)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \times \frac{4}{4}\right) \\
f_{X_2}(2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(4)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \times 1\right)
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Temos toda a fração da Equação 8, finalmente podemos encontrar a probabilidade solicitada:

$$
\begin{aligned}
f_{X_1}(x_1|X_2 = 2) &= \frac{\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{\cancel{2}}32}}\exp\left(-\frac{1}{2} \times \frac{4X_1^2 - 8X_1 + 36}{32}\right)}{\frac{1}{\sqrt{\cancel{2\pi}(4)}}\exp\left(-\frac{1}{2} \times 1\right)} \\
f_{X_1}(x_1|X_2 = 2) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)8}}\exp\left(-\frac{1}{2} \times \frac{4X_1^2 - 8X_1 + 4}{32}\right) \\
f_{X_1}(x_1|X_2 = 2) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)8}}\exp\left(-\frac{1}{2} \times \frac{X_1^2 - 2X_1 + 1}{8}\right) \\
f_{X_1}(x_1|X_2 = 2) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)8}}\exp\left(-\frac{1}{2} \times \frac{(X_1 - 1)^2}{8}\right)
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Com esse cálculo, nós descobrimos que:

$$
X_1 \mid X_2 = 2 \;\sim\; N(1, 8) \tag{15}
$$

Desse modo, nós podemos finalmente calcular $\Pr[2 \leq X_1 \leq 3 \mid X_2 = 2]$, pois sai pela Equação 6:

$$
\begin{aligned}
\Pr[2 \leq X_1 \leq 3 \mid X_2 = 2] &= \Phi\left(\frac{3-1}{\sqrt{8}}\right) - \Phi\left(\frac{2-1}{\sqrt{8}}\right) \\
\Pr[2 \leq X_1 \leq 3 \mid X_2 = 2] &= \Phi\left(\frac{2\sqrt{8}}{8}\right) - \Phi\left(\frac{\sqrt{8}}{8}\right) \\
\Pr[2 \leq X_1 \leq 3 \mid X_2 = 2] &= 0,1221 \\
\Pr[2 \leq X_1 \leq 3 \mid X_2 = 2] &= 12,21\%
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Com isso, chegamos na conclusão que, a probabilidade para que X_1 esteja no intervalo entre 2 e 3, dado que $X_2 = 2$, é de 12,21%.
Novamente, utilizamos o software **Octave** para auxiliar no cálculo da função Φ

2.4. Determinar $\Pr[2 \leq X_1 \leq 3 \mid X_2 = 2 \wedge X_3 = 3]$

Novamente, assim como fizemos na questão anterior, antes de determinar a probabilidade solicitada, nós precisamos fazer algumas análises. Já se sabe que X_1 depende de X_2. Porém, quando analisamos a matriz covariância do enunciado, nós verificamos que X_1 e X_3 são descorrelacionadas entre si, pois a covariância entre essas variáveis vale 0. Como são variáveis aleatórias conjuntamente gaussianas, a descorrelação entre elas implica independência entre ambas. Dada essa constatação, não importa o valor que X_3 assume, em nada irá interferir em X_1. Sendo assim então:

$$\begin{gathered} \Pr[2 \leq X_1 \leq 3 \mid X_2 = 2 \wedge X_3 = 3] = \Pr[2 \leq X_1 \leq 3 \mid X_2 = 2] \\ \Pr[2 \leq X_1 \leq 3 \mid X_2 = 2] = 12,21\% \end{gathered} \tag{17}$$

Como X_3 em nada altera X_1 independente do valor que ela assuma, nós chegamos na conclusão que a probabilidade de X_1 estar entre o intervalo de 2 e 3 dado que $X_2 = 2$ e $X_3 = 3$ é a mesma probabilidade já calculada no exercício anterior: 12,21%

2.5. Determinar $\Pr[X_1 - X_3 > 4]$

Para descobrirmos a probabilidade solicitada pelo enunciado, primeiramente vamos definir que $Y = X_1 - X_3$. Como X_1 e X_3 se distribuem de maneira gaussiana, Y se distribui de maneira gaussiana também. Podemos assumir que $Y = \vec{Y}$. Nós vamos precisar descobrir como Y se distribui realizando as operações abaixo:

$$\mu_{\vec{Y}} = A\vec{\mu}_{\vec{X}} + \vec{b} \tag{18}$$

$$C_{\vec{Y}} = AC_{\vec{X}}A^T \tag{19}$$

Pelas equações, logo percebemos que teremos que realizar transformações lineares afins para descobrirmos a probabilidade solicitada pelo enunciado. A Equação 18 nos concede o vetor média de $\vec{Y}$ e a Equação 19 nos permite encontrar a matriz covariância de $\vec{Y}$.

Após compreendermos isso, podemos extrair algumas informações para aplicarmos nas equações:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_3 \end{pmatrix} \quad \vec{\mu}_{\vec{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C_{\vec{X}} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = (0) \tag{20}$$

Com isso, podemos partir para os cálculos, começando pelo vetor média de $\vec{Y}$:

$$\mu_{\vec{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (0) = (0) \tag{21}$$

Em seguida, calculamos a matriz covariância de $\vec{Y}$:

$$\begin{gathered} C_{\vec{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ C_{\vec{Y}} = (10) \end{gathered} \tag{22}$$

Para o cálculo da matriz covariância de $\vec{Y}$, utilizamos o software **Octave**.

Com os cálculos anteriores, temos que:

$$Y \sim N(0, 10) \tag{23}$$

Após isso, fica fácil encontrarmos a probabilidade solicitada. Assumimos que a probabilidade de $X_1 - X_3 > 4$ sai pela probabilidade máxima subtraída da função Φ aplicada para o valor 4:

$$
\begin{aligned}
\Pr[X_1 - X_3 > 4] &= 1 - \Phi\left(\frac{4-0}{\sqrt{10}}\right) \\
\Pr[X_1 - X_3 > 4] &= 1 - \Phi\left(\frac{4\sqrt{10}}{10}\right) \\
\Pr[X_1 - X_3 > 4] &= 1 - 0,8970 = 0,1030 \\
\Pr[X_1 - X_3 > 4] &= 10,30\%
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Logo, chegamos na conclusão que a probabilidade de $X_1 - X_3$ ser maior que 4 vale 10,30%

Novamente, utilizamos o **Octave** para calcular a função Φ