INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina

Câmpus
São José

Prova 2 de PRE

Variáveis aleatórias conjuntamente distribuídas e Distribuição Condicional

Lucas Costa Fontes

15 de Abril de 2024

Sumário

1. ENUNCIADO

Sejam U1, U2 e U3 ~ Unif ({0,1,2}) variáveis aleatórias sorteadas independementemente. Sejam

$$X = U_1 + U_2 + U_3, \quad (1)$$

$$Y = U_1 + U_2 - U_3, \quad (2)$$

(a) Determine a PMF conjunta de X e Y
(b) Determine e esboce as PMFs marginais de X e Y
(c) Determine e esboce as PMFs condicionais de X dado que $Y = y$, para dois valores de $y \varepsilon S_y$ à sua escolha.

2. RESOLUÇÃO

2.1. Determinando a PMF conjunta

Para que possamos descobrir a PMF conjunta entre duas variáveis aleatórias, primeiro precisamos de uma tabela com todos os resultados possíveis dos experimentos probabilísticos. Em seguida somam-se as probabilidades de X e Y assumirem conjuntamente um valor e faz-se a tabela da PMF conjunta de X e Y.

2.1.1. Tabela dos resultados

Os valores de X e Y foram dados pelas equações presentes no enunciado. Como as variáveis aleatórias U1, U2 e U3 assumem valores inteiros contidos no intervalo de 0 a 2 de maneira uniforme, a probabilidade é dada por $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ em todas as linhas da tabela

Tabela dos resultados					
U1	**U2**	**U3**	**X**	**Y**	**Pr**
0	0	0	0	0	1/27
0	0	1	1	−1	1/27
0	0	2	2	−2	1/27
0	1	0	1	1	1/27
0	1	1	2	0	1/27
0	1	2	3	−1	1/27
0	2	0	2	2	1/27
0	2	1	3	1	1/27
0	2	2	4	0	1/27
1	0	0	1	1	1/27

Tabela dos resultados					
U1	**U2**	**U3**	**X**	**Y**	**Pr**
1	0	1	2	0	1/27
1	0	2	3	−1	1/27
1	1	0	2	2	1/27
1	1	1	3	1	1/27
1	1	2	4	0	1/27
1	2	0	3	3	1/27
1	2	1	4	2	1/27
1	2	2	5	1	1/27
2	0	0	2	2	1/27
2	0	1	3	1	1/27
2	0	2	4	0	1/27
2	1	0	3	3	1/27
2	1	1	4	2	1/27
2	1	2	5	1	1/27
2	2	0	4	4	1/27
2	2	1	5	3	1/27
2	2	2	6	2	1/27

2.1.2. Tabela da PMF conjunta de X e Y

Agora, com base na tabela onde todos os resultados do experimento probabilístico estão contidos, podemos fazer a PMF conjunta de X,Y para cada valor que as variáveis aleatórias podem assumir.
Analisando a tabela anterior, podemos listar os valores que X e Y po-

dem assumir. $X = (\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\})$ e $Y = (\{-2, 1, 0, 1, 2, 3, 4\})$. Dadas essas constatações, a PMF conjunta para cada valor de X e Y é dada pela tabela abaixo:

$P_{X,Y}$ (x,y)							
	y = −2	y = −1	y = 0	y = 1	y = 2	y = 3	y = 4
x = 0	0	0	1/27	0	0	0	0
x = 1	0	1/27	0	2/27	0	0	0
x = 2	1/27	0	2/27	0	3/27	0	0
x = 3	0	2/27	0	3/27	0	2/27	0
x = 4	0	0	3/27	0	2/27	0	1/27
x = 5	0	0	0	2/27	0	1/27	0
x = 6	0	0	0	0	1/27	0	0

2.2. Determinando e esboçando as PMFs marginais de X e Y

Para determinarmos as PMFs marginais das variáveis X e Y, precisamos utilizar a definição dadas nas equações abaixo:

$$P_X(x) = \sum_{y \varepsilon S_Y} P_{X,Y}(x, y) \tag{3}$$

$$P_Y(y) = \sum_{x \varepsilon S_X} P_{X,Y}(x, y) \tag{4}$$

Desse modo, percebemos que, para encontrar as marginais de X, basta somar os valores contidos na linha em que se quer encontrar $P_X(x)$ e os valores contidos na coluna em que se quer encontrar $P_Y(y)$. Dadas essas constatações, podemos partir para a determinação das PMFs marginais de X e Y:

2.2.1. Determinando PMFs marginais

Primeiramente realizamos a determinação das PMFs marginais para X através da definição:

- $P_X(x = 0) = \frac{1}{27}$
- $P_X(x = 1) = \frac{1}{27} + \frac{2}{27} = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$
- $P_X(x = 2) = \frac{1}{27} + \frac{2}{27} + \frac{3}{27} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$
- $P_X(x = 3) = \frac{2}{27} + +\frac{3}{27} + \frac{2}{27} = \frac{7}{27}$
- $P_X(x = 4) = \frac{3}{27} + \frac{2}{27} + \frac{1}{27} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$
- $P_X(x = 5) = \frac{2}{27} + \frac{1}{27} = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$
- $P_X(x = 6) = \frac{1}{27}$

Em seguida realizamos o mesmo procedimento para determinarmos as PMFs de Y:

- $P_Y(y = -2) = \frac{1}{27}$
- $P_Y(y = -1) = \frac{1}{27} + \frac{2}{27} = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$
- $P_Y(y = 0) = \frac{1}{27} + \frac{2}{27} + \frac{3}{27} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$
- $P_Y(y = 1) = \frac{2}{27} + \frac{3}{27} + \frac{2}{27} = \frac{7}{27}$

- $P_Y(y = 2) = \frac{3}{27} + \frac{2}{27} + \frac{1}{27} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$
- $P_Y(y = 3) = \frac{2}{27} + \frac{1}{27} = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$
- $P_Y(y = 4) = \frac{1}{27}$

E finalmente, temos a tabela contendo as PMFs conjuntas de X e Y e as marginais de cada variável aleatória para cada valor que a própria pode assumir:

$P_{X,Y}$ (x,y)								
	y = −2	y = −1	y = 0	y = 1	y = 2	y = 3	y = 4	P_X (x)
x = 0	0	0	1/27	0	0	0	0	1/27
x = 1	0	1/27	0	2/27	0	0	0	1/9
x = 2	1/27	0	2/27	0	3/27	0	0	2/9
x = 3	0	2/27	0	3/27	0	2/27	0	7/27
x = 4	0	0	3/27	0	2/27	0	1/27	2/9
x = 5	0	0	0	2/27	0	1/27	0	1/9
x = 6	0	0	0	0	1/27	0	0	1/27
P_Y (y)	1/27	1/9	2/9	7/27	2/9	1/9	1/27	1

2.2.2. Esboçando as PMFs marginais para X e Y

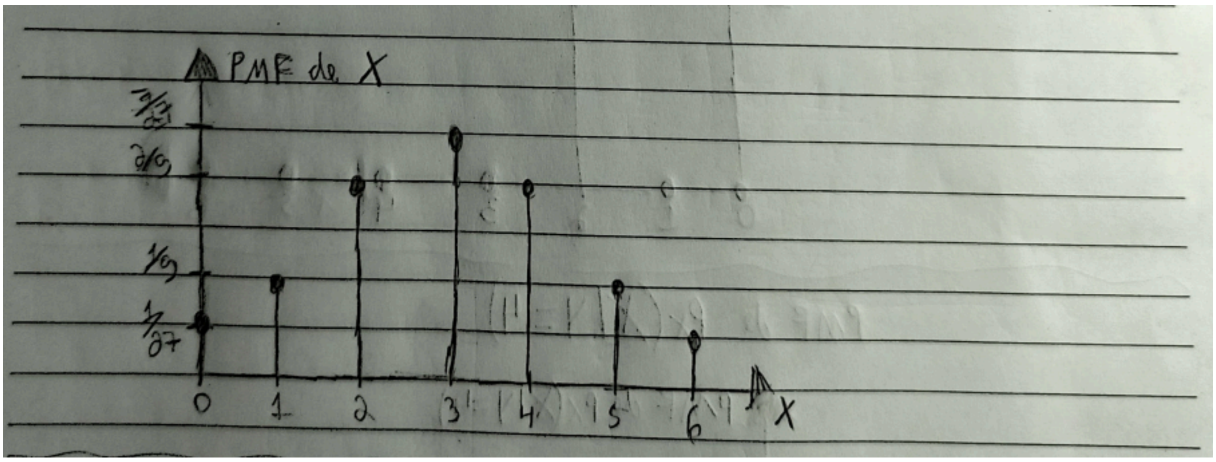

Figura 1: PMF marginal de X

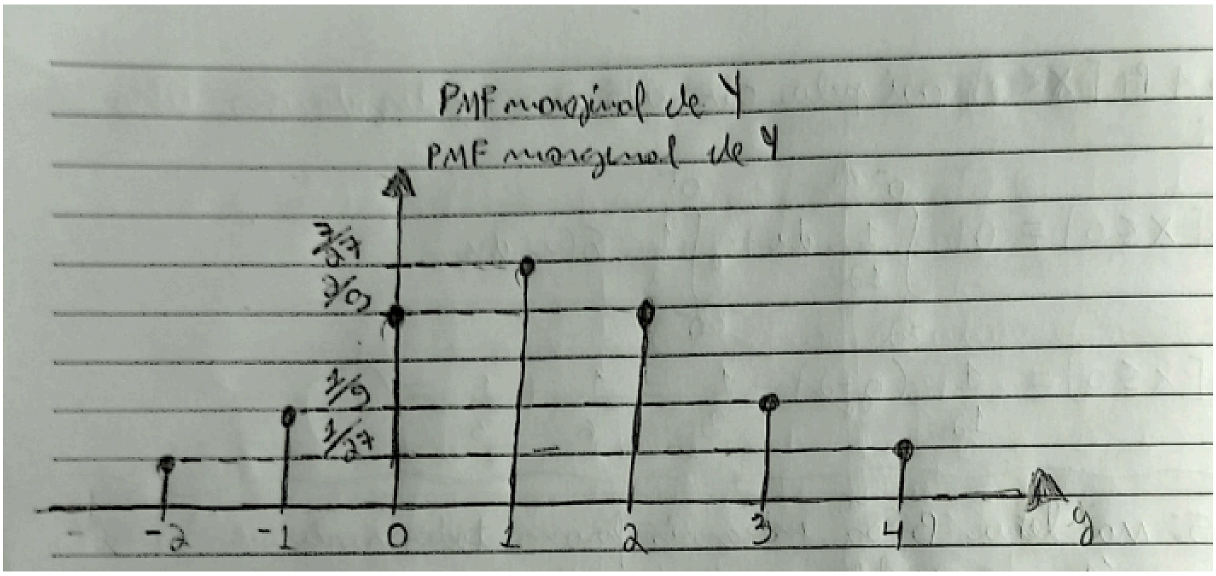

Figura 2: PMF marginal de Y

2.3. Determinando e esboçando $P_X(X|Y = y)$

2.3.1. Determinando $P_X(X|Y = y)$

Para determinarmos o valor de X dado que Y=y, podemos utilizar a definição da PMF Condicional, onde:

$$P_X(X|Y = y) = \frac{P_{X,Y}(x, y)}{P_Y(y)}, \tag{5}$$

Definida apenas se $P_Y(y) \neq 0$.

Para demosntração, iremos escolher os valores y = −2 e y = 4. Portanto, temos que:

$$P_X(X|Y = -2) = \frac{P_{X,Y}(x,-2)}{P_Y(-2)} \text{ e } P_X(X|Y = 4) = \frac{P_{X,Y}(x,4)}{P_Y(4)}$$

desse modo, já podemos aplicar as respectivas fórmulas para cada X e, logo após, fazer a tabela com os resultados:

Primeiramente começamos aplicando para Y = −2:

- $P_X(0|Y = -2) = 0$
- $P_X(1|Y = -2) = 0$
- $P_X(2|Y = -2) = 1$
- $P_X(3|Y = -2) = 0$
- $P_X(4|Y = -2) = 0$
- $P_X(5|Y = -2) = 0$
- $P_X(6|Y = -2) = 0,$

Depois repetimos o mesmo procedimento para Y = 4:

- $P_X(0|Y = 4) = 0$
- $P_X(1|Y = 4) = 0$

- $P_X(2|Y = 4) = 0$
- $P_X(3|Y = 4) = 0$
- $P_X(4|Y = 4) = 1$
- $P_X(5|Y = 4) = 0$
- $P_X(6|Y = 4) = 0,$

Por fim, após determinarmos os valores para cada X dado que Y ocorreu em −2 ou em 4, podemos partir para a tabela:

	x = 0	x = 1	x = 2	x = 3	x = 4	x = 5	x = 6
$P_X(X\|Y = -2)$	0	0	1	0	0	0	0
$P_X(X\|Y = 4)$	0	0	0	0	1	0	0

2.3.2. Esboçando $P_X(X|Y = y)$

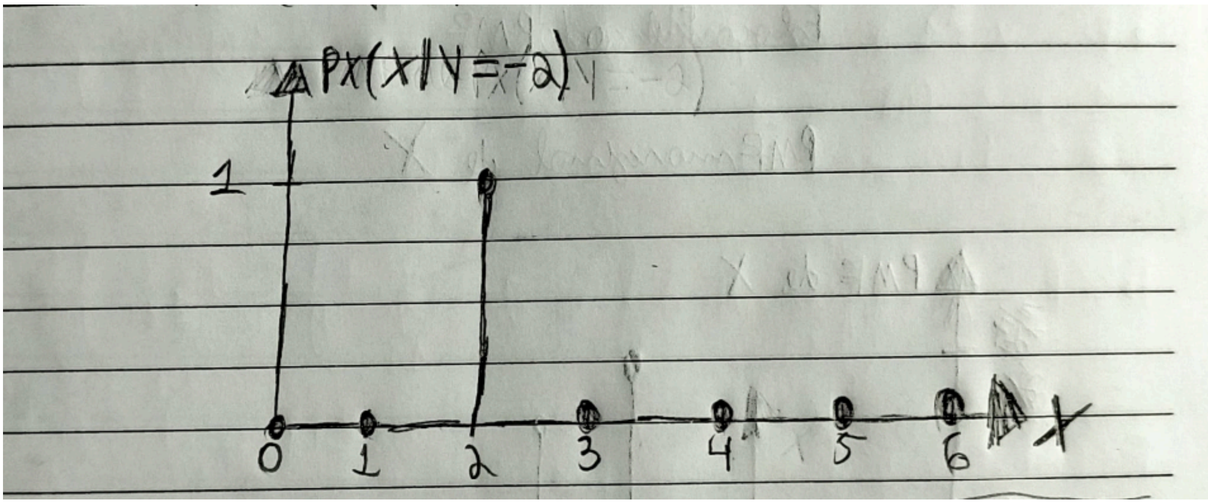

Figura 3: PMF de Px(X|Y= - 2)

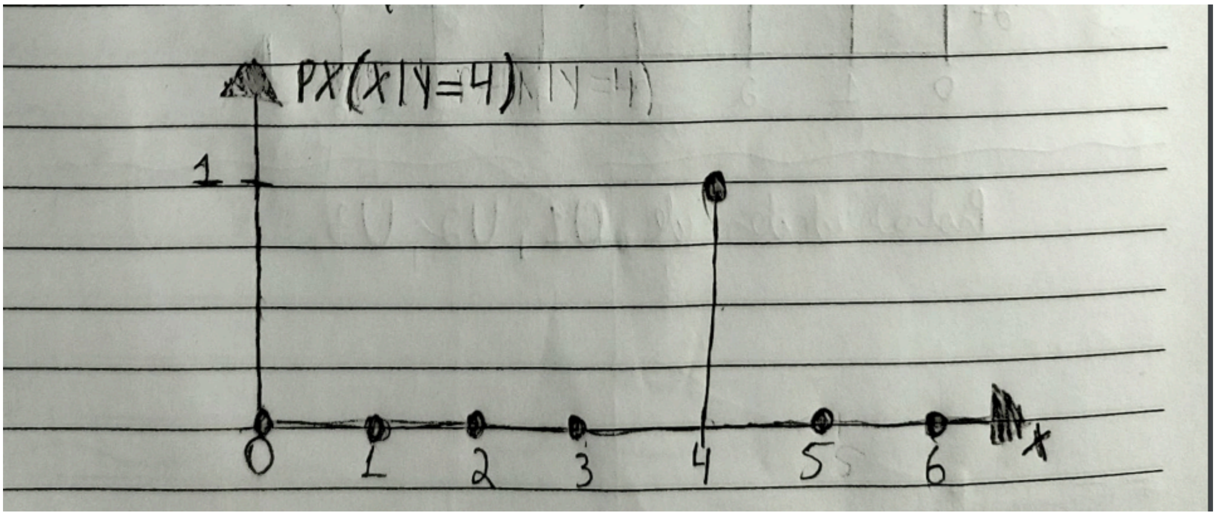

Figura 4: PMF de Px(X|Y= 4)