INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina
Câmpus
São José

Avaliação 6 de Processos Estocásticos

Processos de Poisson

Lucas Costa Fontes

25 de Agosto de 2024

Sumário

1. Enunciado

5. Considere dois processos de Poisson, $X_1(t)$ e $X_2(t)$, independentes, de taxas $\lambda_1 = 2{,}5$ e $\lambda_2 = 2$ eventos/s, respectivamente. Seja $X(t) = X_1(t) + X_2(t)$. As questões abaixo são todas referentes ao processo estocástico $X(t)$.

(a) Determine e esboce a função média do processo estocástico.

(b) Determine a probabilidade de ocorrer pelo menos quinze eventos entre 10 e 13 s, dado que ocorreu exatamente um evento entre 6 e 9 s.

(c) Determine a probabilidade de que o tempo decorrido entre o segundo evento e o terceiro evento seja maior que 0,1 s.

(d) Determine a matriz covariância do vetor aleatório $[X(3) \quad X(4)]^{\mathrm{T}}$.

Figura 1: Enunciado da Avaliação

2. Desenvolvimento

2.1. Determinando e esboçando a função média

Para descobrirmos a função média do processo de Poisson X(t), vamos precisar recorrer à fórmula da função média do processo de Poisson em geral:

$$\mu_{X(t)} = \lambda t[t > 0] \tag{1}$$

Como nesse caso X(t) é uma soma entre X1(t) e X2(t), teremos que:

$$\mu_{X(t)} = (\lambda_1 + \lambda_2)t[t > 0] \tag{2}$$

2.1.1. Determinando a função média

Aplicando a fórmula descrita na Equação 2, teremos que

$$\mu_{X(t)} = (2,5 + 2)t[t > 0] = 4,5t[t > 0] \tag{3}$$

2.1.2. Esboçando a função média

Se esboçarmos uma possível função média obtida anteriormente, perceberemos que é uma reta com μ_X em função de t valendo 4,5t para t > 0:

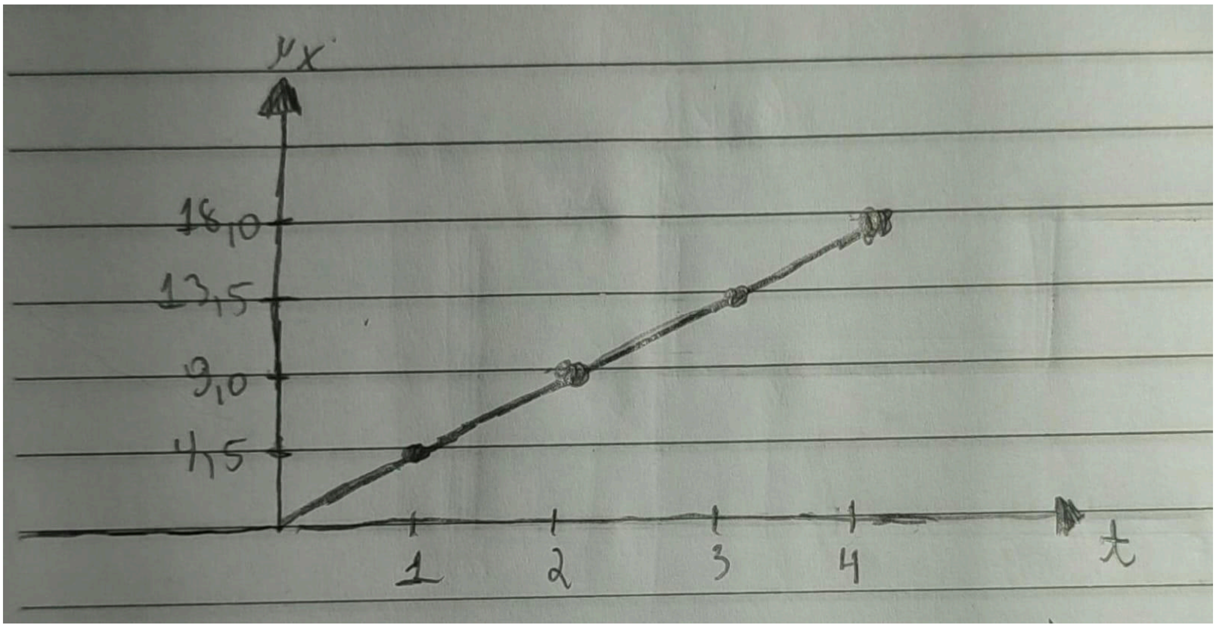

Figura 2: Gráfico da média em função do tempo

2.2. Determinando a probabilidade condiicional

Aqui precisamos calcular a probabilidade $\Pr\left[X_{10,13} \geq 15 \mid X_{6,9} = 1\right]$.
Primeiramente, começamos analisando a definição de um processo de Poisson que dita que $X_{\mathrm{t1,t2}}$ e $X_{\mathrm{t1',t2'}}$ são independentes, quaisquer que sejam os intervalos (t1,t2] e (t1',t2'] disjuntos.
Ou seja, O que ocorreu no intervalo $[6 \leq t \leq 9]$ em nada irá alterar o que ocorrerá no intervalo $[10 \leq t \leq 13]$.
Matematicamente expressando a constatação acima, temos que:

$$\Pr\left[X_{10,13} \geq 15 |\ X_{6,9} = 1\right] = \Pr\left[X_{10,13} \geq 15\right] \tag{4}$$

E agora, para calcularmos a equação acima, basta recorrermos novamente à definição, onde temos que

$$X_{\mathrm{t1,t2}} \sim \ \mathrm{Poisson}(\lambda(\mathrm{t2} - \mathrm{t1})) \tag{5}$$

Para qualquer que seja o intervalo (t1,t2].
Descobrindo o argumento dentro da distribuição de Poisson, nós teremos a média com a qual o intervalo se distribui. Isso nos auxiliará a descobrir a PMF com a seguinte equação:

$$p_{X(x)} = e^{-\mu} \frac{\mu}{x!},\ \mathrm{com}\ x = 0, 1, 2..., \tag{6}$$

E descobrindo a PMF, para a descobrir a probabilidade acima, bastará pegar o valor máximo de uma PMF e subtrair da descoberta, fazendo o seguinte cálculo:

$$\Pr\left[X_{10,13} \geq 15\right] = 1 - p_{X(x=14)} \tag{7}$$

Com tudo isso bem detalhado, podemos finalmente partir para os cálculos e encontrar a probabilidade solicitada pelo enunciado:

$$\begin{gathered} X_{10,13} \sim \ \mathrm{Poisson}(4,5(13 - 10)) \\ X_{10,13} \sim \ \mathrm{Poisson}(13,5) \end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered} p_{X(x)} = e^{-13,5} \times \sum_{x=0}^{14} \left(\frac{13,5^x}{x!} \right) \\ p_{X(x)} = 0,6233 \end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\Pr\left[X_{10,13} \geq 15\right] &= 1 - 0,6233 \\ \Pr\left[X_{10,13} \geq 15\right] &= 0,3767 = 37,67\%\end{aligned} \tag{10}$$

2.3. Determinando a probabilidade da variação de tempo entre eventos

Aqui precisaremos determinar $\Pr[\Delta_n > 0,1s]$ e nesse caso, podemos recorrer à seguinte fórmula:

$$\Pr[T > t] = e^{-\lambda t} \tag{11}$$

Onde t é o tempo avaliado, que nesse caso, é de 0,1 segundos e portanto teremos que:

$$\begin{gathered}\Pr[T > 0,1] = e^{-(4,5\times 0,1)} = e^{-0,45} \\ \Pr[T > 0,1] = 0,6376 = 63,76\%\end{gathered} \tag{12}$$

2.4. Determinando a matriz covariância

Para começarmos nossa análise, verificamos aqui que a matriz covariância é composta por duas variáveis aleatórias, então isso irá gerar uma matriz covariância quadrada de duas dimensões, ou seja, uma matriz 2x2, cuja composição, pare este enunciado é:

$$\begin{pmatrix} \text{cov}[X(3), X(3)] & \text{cov}[X(3), X(4)] \\ \text{cov}[X(3), X(4)] & \text{cov}[X(4)X(4)] \end{pmatrix} \tag{13}$$

E aplicando conhecimentos de Poisson, avaliamos que a função autocovariância desse tipo de variável aleatória é dada por:

$$C_{X(\text{t1,t2})} = \lambda\text{min}\{\text{t1,t2}\}[\text{t1,t2} > 0] \tag{14}$$

Aplicando esses conhecimentos, nós teremos que a matriz covariância do enunciado poderá ser calculada do seguinte modo:

$$\begin{gathered} \text{cov}[X(3), X(3)] = 4,5 \times \text{min}\{3,3\} = 4,5 \times 3 = 13,5 \\ \text{cov}[X(3), X(4)] = 4,5 \times \text{min}\{3,4\} = 4,5 \times 3 = 13,5 \\ \text{cov}[X(4), X(3)] = 4,5 \times \text{min}\{4,3\} = 4,5 \times 3 = 13,5 \\ \text{cov}[X(4), X(4)] = 4,5 \times \text{min}\{4,4\} = 4,5 \times 4 = 18 \end{gathered} \tag{15}$$

Com os cálculos elemento a elemento da matriz covariância realizados acima, finalmente teremos a matriz covariância solicitada pelo enunciado:

$$\begin{pmatrix} 13{,}5 & 13{,}5 \\ 13{,}5 & 18 \end{pmatrix} \tag{16}$$