INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina
Câmpus
São José

Avaliação 3 de Processos Estocásticos

Caso contínuo: Variáveis aleatórias conjuntamente distrbuídas, distribuição condicional e covariância

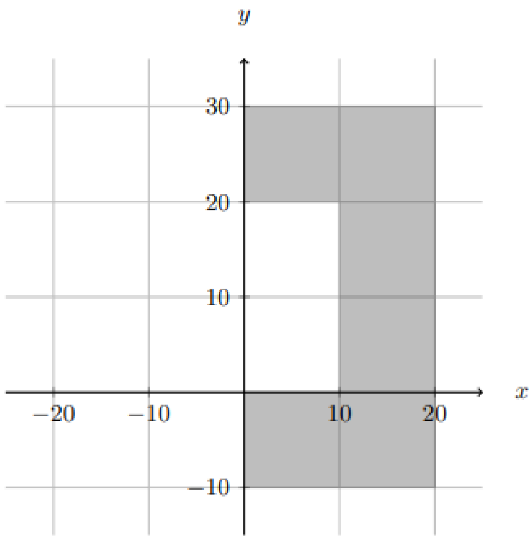
Lucas Costa Fontes

05 de maio de 2024

Sumário

1. Enunciado

10. Considere duas variáveis aleatórias X e Y com PDF conjunta constante (igual a k) e diferente de zero apenas na área sombreada da figura abaixo.



(a) Determine o valor da constante k.

(b) Determine $\Pr[X \geq Y]$.

(c) Determine e esboce a PDF marginal de Y.

(d) Determine e esboce a CDF marginal de Y.

(e) Determine e esboce a PDF condicional de Y dado $X = 5$.

(f) Determine a covariância entre X e Y.

Figura 1: Enunciado da Avaliação

2. Resolução

2.1. Determinando o valor da constante k

Quando observamos a Figura 1, verificamos que a área sombreada proposta pelo enunciado possui 6 quadrados de dimensões 10x10. Essa observação pode ser útil para realizarmos o cálculo da constante k, haja visto que para encontrarmos ela, precisamos da área total da figura.
Temos que toda a PDF conjunta deve possuir valor total igual a 1, portanto, a seguinte igualdade deve ser satisfeita neste caso: $A_{6\square} \times k = 1$.
Se invertermos a igualdade acima podemos encontrar o valor de k, de modo que teremos: $k = \frac{1}{A_{6\square}}$, onde $A_{6\square}$ representa a área dos 6 quadrados, ou seja, a área total da figura.
Resolvemos então a equação e descobrimos logo o valor da constante k:

$$k = \frac{1}{(10^2) \times 6} = \frac{1}{100 \times 6} = \frac{1}{600} \tag{1}$$

2.2. Determinando Pr[X $\geq Y$]

Para que possamos descobrir o valor da probabilidade de X ser maior que Y, nós realizaremos a seguinte sequência de passos:

- Traçaremos uma reta x = y no gráfico
- Iremos somar o valor das áreas das figuras que ficaram abaixo dessa reta no gráfico, afinal representam valores onde $X \geq Y$
- Calcularemos a área total que ficou abaixo da reta x = y;
- Por fim, será feita a razão entre a área encontrada abaixo da reta x = y e a área total da figura. O resultado desta razão, será o valor de Pr$[X \geq Y]$.

Começamos então traçando uma reta x = y no gráfico e pegando a área que ficou abaixo dessa reta, como observado na figura abaixo:

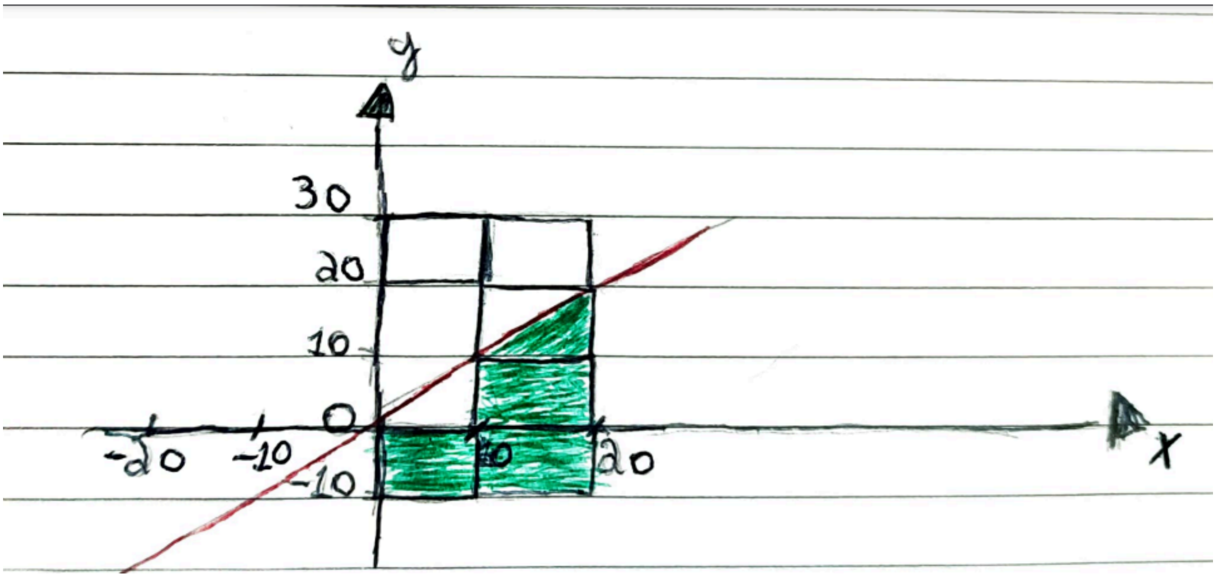


Figura 2: Gráfico de Pr[X >= Y]

Ao avaliaiarmos a imagem acima, verificamos que temos 3 quadrados de dimensões 10x10 e um triângulo de altura e base com valores iguais a 10 abaixo da reta que delimita x = y. A soma da área de todas essas figuras representa a área de $X \geq Y$ e, a Pr$[X \geq Y]$, será encontrada se obtivermos a razão:

$$\frac{A_{X\geq Y}}{A_{6\square}} \tag{2}$$

.
A parte do denominador já foi obtida no cálculo da Equação 1 que foi utilizada para encontrar a constante k, portanto, já é sabido que $A_{6\square} = 600$, agora falta apenas encontrar o numerador e obter a probabilidade solicitada no enunciado.
Para encontrarmos o numerador da fração, vamos somar as áreas que estão abaixo da reta x = y, de modo que teremos: $A_{X\geq Y} = A_{3\square} + A_{\Delta}$. Com isso em mente, resolvemos o numero da fração de $\Pr[X \geq Y]$:

$$A_{X\geq Y} = \left[\left(10^2\right) \times 3\right] + \frac{10 \times 10}{2} = 300 + 50 = 350u.A \tag{3}$$

. E, agora temos condições de determinar $\Pr[X \geq Y]$:

$$\Pr[X \geq Y] = \frac{350}{600} = \frac{7}{12} \tag{4}$$

2.3. Determinando e esboçando PDF marginal de Y

2.3.1. Determinando PDF marginal de Y

Para determinarmos a PDF marginal de Y, precisamos analisar a área hashurada e verificar que há muitos casos para serem calculados. Como é a PDF marginal de Y, nós precisamos integrar caminhando pelo eixo X, utilizando a constante k como integrando, já que trata-se da PDF conjunta da questão. Analisando a geometria do problema, nós iremos dividir o cálculo da PDF em 5 casos:

- Se $y < -10$;
- Se $-10 \leq y < 0$;
- Se $0 \leq y < 20$;
- Se $20 \leq y < 30$;
- Se $y > 30$.

Após deixarmos enunciado em como separaremos as etapas, nós iremos executar as integrais caminhando no eixo X para cada caso listado acima.

Caso $y < -10$:

$$f_Y(y) = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} 0 dx = 0 \tag{5}$$

Como podemos observar, não há integrando quando Y é menor que −10, portanto o resultado da integral é zero.

Caso $-10 \leq y < 0$:

$$f_Y(y) = \int_{x=0}^{x=20} \frac{1}{600} dx = \left[\frac{x}{600}\right]_0^{20} = \frac{20}{600} - \frac{0}{600} = \frac{20}{600} = \frac{1}{30} \tag{6}$$

Caso $0 \leq y < 20$**:**

$$f_Y(y) = \int_{x=10}^{x=20} \frac{1}{600} dx = \left[\frac{x}{600}\right]_{10}^{20} = \frac{20}{600} - \frac{10}{600} = \frac{10}{600} = \frac{1}{60} \tag{7}$$

Se pararmos para analisar o resultado dessa última integral, faz sentido, pois é o mesmo integrando com um intervalo que é a metade do intervalo anterior

Caso $20 \leq y < 30$**:**

$$f_Y(y) = \int_{x=0}^{x=20} \frac{1}{600} dx = \frac{1}{30} \tag{8}$$

Caso $y > 30$**:**

$$f_Y(y) = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} 0 dx = 0 \tag{9}$$

Fazendo um sumário do que obtivemos nos cálculos anteriores, temos que:

$$f_{Y(y)} := \begin{cases} 0, \text{ se } y \leq -10 \\ \frac{1}{30}, \text{ se} - 10 \leq y < 0 \\ \frac{1}{60}, \text{ se } 0 \leq y < 20 \\ \frac{1}{30}, \text{ se } 20 \leq y < 30 \\ 0, \text{ se } y > 30 \end{cases} \tag{10}$$

2.3.2. Esboçando PDF marginal de Y

Com o que obtivemos pelos cálculos anteriores, podemos finalmente esboçar a PDF marginal de Y:

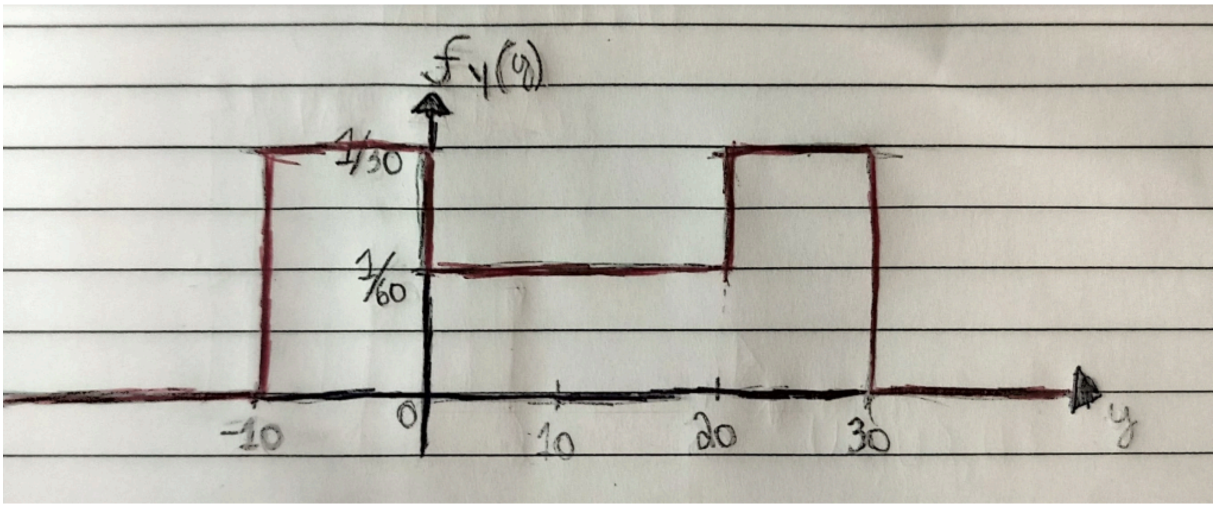


Figura 3: Gráfico da PDF marginal de Y

2.4. Determinando e esboçando CDF marginal de Y

2.4.1. Determinando CDF marginal de Y

Aqui, para que possamos resolver a CDF marginal de Y, também vamos precisar perceber que os cálculos se dividem em casos. A CDF marginal de Y irá depender de onde nós posicionamos o Y no gráfico na PDF presente na Figura 3. Como a CDF se trata de uma cumulativa, temos que fazer o cálculo do seguinte modo para cada um dos casos:

- Caso y < −10:

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} 0du = 0 \tag{11}$$

- Caso $-10 \leq y < 0$:

$$F_Y(y) = 0 + \int_{-10}^{y} \frac{1}{30}du = \left[\frac{u}{30}\right]_{-10}^{y} = \frac{y}{30} + \frac{10}{30} = \frac{y+10}{30} \tag{12}$$

- Caso $0 \leq y < 20$:

$$F_Y(y) = \frac{0+10}{30} + \int_{0}^{y} \frac{1}{60}du = \frac{10}{30} + \left[\frac{u}{60}\right]_{0}^{y} = \frac{y+20}{60} \tag{13}$$

- Caso $20 \leq y < 30$:

$$F_Y(y) = \frac{20+20}{60} + \int_{20}^{y} \frac{1}{30}du = \frac{40}{60} + \left[\frac{u}{30}\right]_{20}^{y} = \frac{2y}{60} \tag{14}$$

- Caso $y \geq 30$:

$$F_Y(y) = \frac{2 \times 30}{60} + \int_{30}^{\infty} 0du = \frac{60}{60} + 0 = 1 \tag{15}$$

Portanto, fazendo os cálculos cumulativos acima, temos a CDF da marginal de Y:

$$F_{Y(y)} := \begin{cases} 0, \text{ se } y \leq -10 \\ \frac{y+10}{30}, \text{ se} -10 < y < 0 \\ \frac{1}{3}, \text{ se } y = 0 \\ \frac{y+20}{60}, \text{ se } 0 \leq y < 20 \\ \frac{2}{3}, \text{ se } y = 20 \\ \frac{2y}{60}, \text{ se } 20 \leq y < 30 \\ 1, \text{ se } y \geq 30 \end{cases} \quad (16)$$

2.4.2. Esboçando CDF marginal de Y

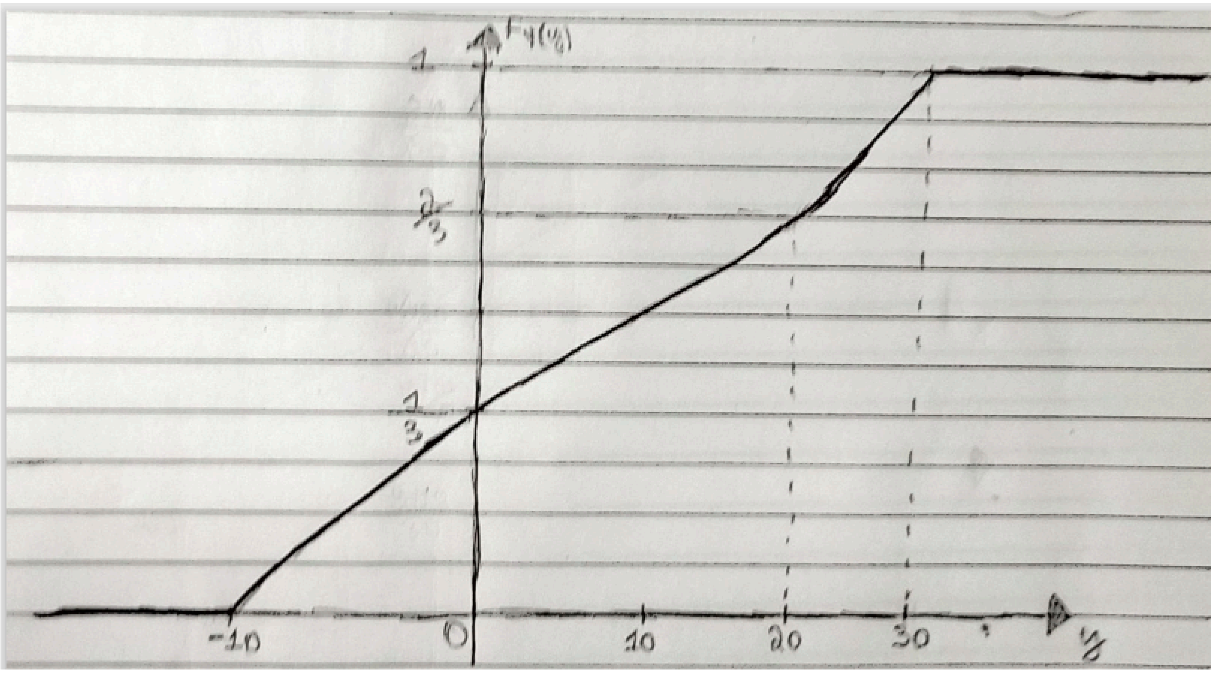


Figura 4: Gráfico da CDF Marginal de Y

2.5. Determinando e esboçando a PDF condicional de $[Y|X = 5]$

2.5.1. Determinando a PDF condicional de $[Y|X = 5]$

Para que possamos determinar aqui PDF $[Y|X = 5]$, vamos precisar definir o valor da equação

$$\frac{f_{X,Y}(5, y)}{f_{X(5)}} \tag{17}$$

.

Para que seja menos custoso realizar todos os cálculos aqui necessários, vamos começar fazendo o denominador da fração.

Podemos descobrir a PDF marginal de X para o seguinte caso $0 \leq X \leq 10$, afinal, X = 5 está nesse intervalo. Realizamos isso com a integral abaixo caminhando no eixo y no x = 5:

$$f_{X(5)} = \int_{y=-10}^{y=0} \frac{1}{600} dy + \int_{y=20}^{y=30} \frac{1}{600} dy = \frac{10}{600} + \frac{10}{600} = \frac{1}{30} \tag{18}$$

Com isso realizado, agora basta encontrarmos o numerador da Equação 17 para podermos finalmente encontrar a resposta do enunciado.

Sabemos que quando temos $f_{X,Y}(5, y)$, estamos na região do gráfico em que se traça uma reta x = 5. Nessa região do gráfico nós temos que a PDF conjunta é a constante k, a qual sabemos que já é $\frac{1}{600}$, se estivermos no intervalo $-10 \leq y \leq 0$ ou no intervalo $20 \leq y \leq 30$.

Podemos representar isso com a seguinte notação:

$$f_{X,Y}(5, y) := \begin{cases} \frac{1}{600}, \text{ se } (-10 \leq y \leq 0) \vee (20 \leq y \leq 30) \\ 0, \text{ c.c} \end{cases} \tag{19}$$

Isso nos permite usar a notação do colchete de Iverson para $f_{X,Y}(x, y)$:

$$f_{X,Y}(5, y) = \left(\frac{1}{600}\right)[(-10 \leq y \leq 0) \vee (-20 \leq y \leq 30)] \tag{20}$$

Quando aplicamos $f_{X(5)}$ e $f_{X,Y}(5, y)$, na Equação 17 e consideramos que estamos nos intervalos de X que faz com que o colchete de Iverson seja verdadeiro (ou seja, 1), nós tempos que:

$$\frac{f_{X,Y}(5, y)}{f_{X(5)}} = \frac{\frac{1}{600}}{\frac{1}{30}} = \frac{30}{600} = \frac{1}{20} \tag{21}$$

.

Podemos denotar o que obtivemos acima com a notação de colchetes de Iverson, uma vez que o resultado da fração só será $\frac{1}{20}$ se nos intervalos $-10 \leq y \leq 0$ e $20 \leq y \leq 30$:

$$f_Y(Y|X = 5) := \begin{cases} \frac{1}{20}, \text{ se } (-10 \leq y < 0) \vee (20 \leq y < 30) \\ 0, \text{ c.c} \end{cases} \tag{22}$$

2.5.2. Esboçando a PDF condicional [Y|X=5]

Após equacionarmos essa PDF condicional, nós podemos finalmente esboçar o seu gráfico:

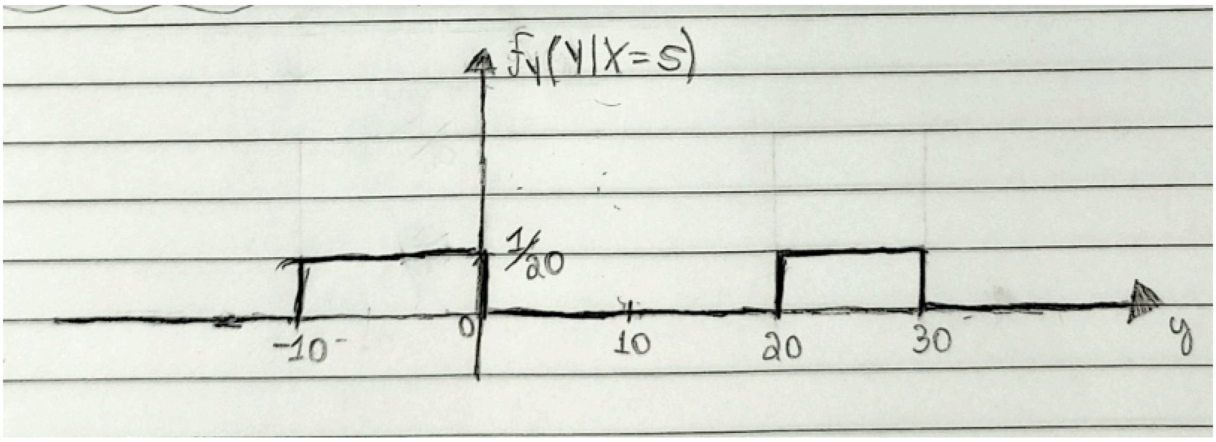


Figura 5: Gráfico da PDF condicional de Y dado que X = 5

2.6. Determinando a covariância entre X e Y

Para determinar a covariância de X e Y precisamos de E[X], E[Y] e E[XY], afinal, cov[X,Y] = E[XY] - E[X] x E[Y].
Partindo desse princípio, temos o desenvolvimento a seguir:
Como temos liberdade de escolha, caminharemos pelo eixo x para determinar os valores esperados.
Começamos calculando E[X]:

$$E[X] = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} x f_{X,Y}(x,y)dydx \tag{23}$$

$$\begin{gathered}
E[X] = \int_{x=0}^{x=10} \left[\int_{y=-10}^{y=0} \frac{x}{600} dy + \int_{y=20}^{y=30} \frac{x}{600} dy \right] dx \\
+ \int_{x=10}^{x=20} \int_{y=-10}^{y=30} \frac{x}{600} dydx \\
E[X] = \int_{x=0}^{x=10} \left[\left(\frac{x}{600} \right) [y]_{-10}^{0} + \left(\frac{x}{600} \right) [y]_{20}^{30} \right] dx + \int_{x=10}^{x=20} \left(\frac{x}{600} \right) [y]_{-10}^{30} dx \\
E[X] = \int_{x=0}^{x=10} \left[\frac{x}{600}(10) + \frac{x}{600}(10) \right] dx + \int_{x=10}^{x=20} \frac{x}{600}(40) \\
E[X] = \int_{x=0}^{x=10} \frac{20x}{600} dx + \int_{x=10}^{x=20} \frac{40x}{600} \\
E[X] = \frac{1}{60}[x^2]_0^{10} + \frac{2}{60}[x^2]_{10}^{20} = \frac{1}{60}(10^2) + \frac{2}{60}(20^2 - 10^2) = \frac{100}{60} + \frac{600}{60} \\
E[X] = \frac{700}{60} = \frac{35}{3}
\end{gathered} \tag{24}$$

Em seguida calculamos E[Y]:

$$E[Y] = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} y f_{X,Y}(x,y) dy dx \tag{25}$$

$$\begin{aligned} E[Y] &= \int_{x=0}^{x=10} \left[\int_{y=-10}^{y=0} \frac{y}{600} dy + \int_{y=20}^{y=30} \frac{y}{600} dy \right] dx \\ &+ \int_{x=10}^{x=20} \int_{y=-10}^{y=30} \frac{y}{600} dy dx \\ E[Y] &= \int_{x=0}^{x=10} \left[\frac{1}{1200} [y^2]_{-10}^{0} + \frac{1}{1200} [y^2]_{20}^{30} \right] dx \\ &+ \int_{x=10}^{x=20} \frac{1}{1200} [y^2]_{-10}^{30} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[Y] &= \int_{x=0}^{x=10} \left\{ \frac{1}{1200} [0^2 - (-10^2)] + \frac{1}{1200} (30^2 - 20^2) \right\} dx \\ &+ \int_{x=10}^{x=20} \left\{ \frac{1}{1200} [30^2 - (-10^2)] \right\} dx \\ E[Y] &= \int_{x=0}^{x=10} \left[-\frac{100}{1200} + \frac{500}{1200} \right] dx + \int_{x=10}^{x=20} \left[\frac{900}{1200} - \frac{100}{1200} \right] dx \\ E[Y] &= \int_{x=0}^{x=10} \frac{400}{1200} dx + \int_{x=10}^{x=20} \frac{800}{1200} dx \\ E[Y] &= \frac{1}{3} [x]_0^{10} + \frac{2}{3} [x]_{10}^{20} = \frac{10}{3} + \frac{20}{3} = \frac{30}{3} = 10 \end{aligned} \tag{26}$$

Por fim, calculamos E[XY]

$$E[XY] = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} xyf_{X,Y}(x,y)dydx \tag{27}$$

$$E[XY] = \int_{x=0}^{x=10} \left[\int_{y=-10}^{y=0} \frac{xy}{600} dy + \int_{y=20}^{y=30} \frac{xy}{600} dy \right] dx$$
$$+ \int_{x=10}^{x=20} \int_{y=-10}^{y=30} \frac{xy}{600} dydx$$
$$E[XY] = \int_{x=0}^{x=10} \left\{ \frac{x}{1200} [y^2]_{-10}^{0} + \frac{x}{1200} [y^2]_{20}^{30} \right\} + \int_{x=10}^{x=20} \left\{ \frac{x}{1200} [y^2]_{-10}^{30} \right\} \tag{28}$$
$$E[XY] = \int_{x=0}^{x=10} \frac{400x}{1200} dx + \int_{x=10}^{x=20} \frac{800x}{1200} dx$$
$$E[XY] = \frac{400}{2400} [x^2]_{0}^{10} + \frac{800}{2400} [x^2]_{10}^{20} = \frac{1}{6}(100) + \frac{1}{3}(300)$$
$$E[XY] = \frac{100}{6} + \frac{300}{3} = \frac{350}{3}$$

Após tudo isso, finalmente chegamos na covariância entre X e Y:

$$\mathrm{cov}[X, Y] = \frac{350}{3} - \frac{35}{3} \times 10 = \frac{350}{3} - \frac{350}{3} = 0 \tag{29}$$

.
Chegamos no resultado que a covariância entre as variáveis aleatórias X e Y é igual a zero, isso significa dizer que ambas não possuem dependência linear entre si.