LA THEORIE DES NOMBRES

PARTIE 1 : ENSEMBLES DE NOMBRES

I CLASSIFICATION 2

A. LES ENTIERS 2

B. LES DÉCIMAUX & LES RATIONELS 2

C. INTRODUCTION DE L'ENSEMBLE DES RÉELS $\mathbb{R}$ 4

Les nombres irrationnels ($\neq$ ratio / raison) 4

Les nombres réels 4

Notations mathématiques 4

Schéma bilan 5

II NOTION D'INTERVALLES 6

A. DROITE DES RÉELS 6

B. INTERVALES & INÉGALITÉS 6

C. ENCADREMENT DÉCIMAL D'UN RÉEL 7

D. RÉUNION & INTERSECTION D'INTERVALLES 8

III VALEUR ABSOLUE D'UN NOMBRE RÉEL 9

A. PRÉSENTATION 9

B. DISTANCE ENTRE DEUX POINTS 10

PARTIE 2 : LA FASCINATION DES NOMBRES ENTIERS

ENSEMBLES DE NOMBRES

I CLASSIFICATION

Il existe de nombreux types de nombres. Ceux à virgule, ceux qui s'écrivent en fraction, les négatifs, les stars internationales comme π, etc.
Pour y voir plus clair et simplifier certains problèmes, il est important de classer ces nombres en fonction de leurs propriétés.

A. LES ENTIERS

DÉFINITION

Un nombre entier naturel est un nombre entier positif ou nul.
L'ensemble des nombres entiers naturels est noté $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0\,;1;2\,;3;4...\}$$

Un nombre entier relatif est un nombre entier qui est positif ou négatif ou nul.
L'ensemble des nombres entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{...;-3\,;-2-1\,;0\,;1;2\,;...\}$$

$\in$ signifie *appartient à*

$\notin$ signifie *n'appartient pas.*

Exemples :

- $\mathbf{4} \in \mathbb{N}$ et $\in \mathbb{Z}$;
- $-\mathbf{2} \notin \mathbb{N}$ mais $-\mathbf{2} \in \mathbb{Z}$;
- $\mathbf{4,6} \notin \mathbb{N}$ et $\notin \mathbb{Z}$.

B. LES DÉCIMAUX & LES RATIONNELS

DÉFINITION

Un nombre décimal est un nombre qui s'écrit avec un nombre fini de chiffres après la virgule. Il peut donc s'écrire sous la forme d'une fraction décimale :

$$\frac{a}{10^n} \quad [a \in \mathbb{Z}\; et\; n \in \mathbb{N}]$$

L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

DÉFINITION

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction de deux entiers :

$$\frac{a}{b} \quad [a \in \mathbb{Z} \; et \; b \in \mathbb{Z}^*]$$

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

PROPRIÉTÉS

- Tout nombre rationnel possède une partie décimale périodique au bout d'une certaine décimale.
- Un nombre rationnel admet une écriture fractionnaire unique appelée la forme irréductible (numérateur et dénominateur n'ont pas de facteur commun).

Exemples :

- $1{,}672 = \frac{1672}{1000} = \frac{1672}{10^3} \in \mathbb{D}$
- $\frac{1}{3} = 0{,}333333 \ldots \in \mathbb{Q}$

Démonstration : Prouver que $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$

Supposons que $\frac{1}{3} \in \mathbb{D}$. Par définition, si a un entier relatif et n un entier naturel, il peut donc s'écrire tel que :

$$\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$$

En multipliant par 10^n de chaque côté, on obtient :

$$a = \frac{10^n}{3}$$

Comme a est un entier, cette égalité signifie que 3 est un diviseur de 10^n (quel que soit la valeur de n).
Or c'est impossible d'après le critère de divisibilité par 3.

> Ce type de démonstration est appelé démonstration par l'absurde. Cette une technique classique de démonstration.

On aboutit à une contradiction et donc, notre hypothèse de départ est fausse.

C. INTRODUCTION DE L'ENSEMBLE DES RÉELS $\mathbb{R}$

Les nombres irrationnels ($\neq$ ratio / raison)

DÉFINITION

Un nombre irrationnel est un nombre qui ne peut pas s'écrire sous la forme d'une fraction.
Tout nombre irrationnel possède une partie décimale infinie et non périodique.

L'ensemble des nombres irrationnels est parfois noté $\overline{\mathbb{Q}}$.

Les irrationnels représentent l'énorme majorité des nombres. Il y a en réalité infiniment plus de nombres irrationnels que de nombres rationnels.

Parmi cette immensité de nombres, on peut de nouveau les séparer en sous-groupes :
- Les irrationnels *constructibles* : la diagonale du carré $\sqrt{2}$;
- Les irrationnels *algébriques :* nombres solutions des équations à coefficients entiers ;
- Les nombres *transcendants* : nombres non-solutions des équations algébriques ;
- Les nombres *univers* : nombre qui contient l'ensemble des nombres finis.

Les nombres réels

L'ensemble des nombres rationnels et des nombres irrationnels forment l'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$. Ce sont les nombres connus et utilisés au quotidien. On peut les définir comme suit :

DÉFINITION

L'ensemble des nombres réels est l'ensemble des nombres x tels que $x^2 \geq 0$.

L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

Notations mathématiques

Ensemble vide : $\emptyset$

Un ensemble qui ne contient pas d'élément est dit vide et se note $\emptyset$.

Symbole d'exclusion

Lorsque l'on parle d'ensemble mais qu'on souhaite en exclure certain(s) élément(s), on utilise le symbole « privé de ».
Exemple : $\mathbb{N}\backslash\{0\}$ correspond à l'ensemble de tous les entiers naturels privé de 0.

Cas particuliers :
- Le signe * exclu le nombre 0 d'un ensemble. Par exemple, $\mathbb{N} \setminus \{0\} = \mathbb{N}^*$
- Exclure tous les nombres négatifs : $\mathbb{R}^+$(tous les réels positifs)

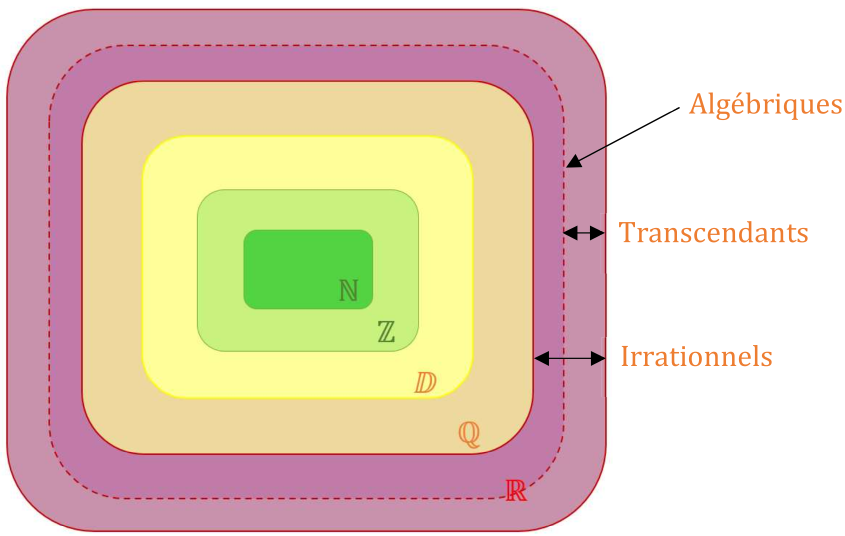
- De même, $\mathbb{R}^-$ correspond à tous les réels négatifs (on exclue les nombres positifs)

Inclusions $\subset$

Tous les nombres de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ appartiennent à l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$.
On dit que l'ensemble $\mathbb{N}$ est inclus dans l'ensemble $\mathbb{Z}$. On note : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
On a également les inclusions suivantes :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset D \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Schéma bilan



$\mathbb{N}$	Nombre « sans virgule » positif (dont 0)							
$\mathbb{Z}$		Nombre « sans virgule » négatif						
$\mathbb{D}$			Nombre à virgule Nombre fini de décimales	De la forme $\frac{a}{10^n}$ $(a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N})$				
$\mathbb{Q}$					Nombres à virgule Infinité de décimales périodiques à partir d'une certaine décimale	Peut se mettre sous la forme d'une fraction irréductible		
$\mathbb{R}$							Nombre à virgule Nombre infini de décimales non périodique	Ne peut pas s'écrire sous forme d'une fraction