III VALEUR ABSOLUE D'UN NOMBRE RÉEL

A. PRÉSENTATION

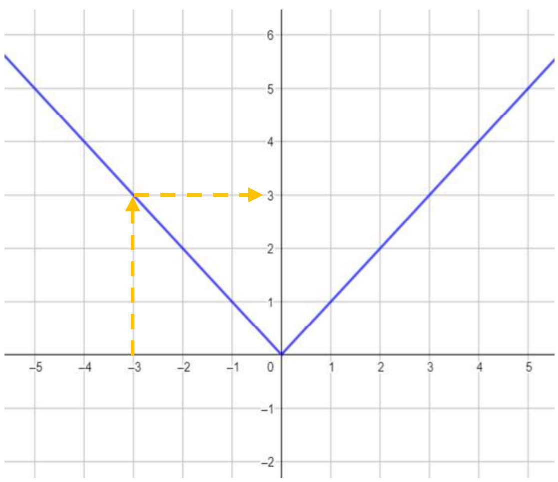
DÉFINITION

On considère une droite graduée d'origine O et un point M de cette droite, d'abscisse x.

La valeur absolue de x, notée $|x|$, est la distance entre le point M et l'origine O.

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

La valeur absolue d'un nombre permet de considérer ce nombre sans tenir compte de son signe.



La fonction valeur absolue $f(x) = |x|$ est représentée ci-contre.

On voit qu'elle est toujours positive. En particulier $|-3| = 3$.

PROPRIÉTÉ

Soit x et y deux nombres réels.

- $|x| \geq 0$
- $|-x| = |x|$
- $|x \times y| = |x| \times |y|$
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y\ ou\ x = -y$

Exemples :

- $|2| = 2$
- $\left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$
- $|-4 \times 6| = |-4| \times |6| = 4 \times 6 = 24$

PROPRIÉTÉ

Soit $a \in \mathbb{R}^+$ (réel positif ou nul).

- L'ensemble des solutions $x \in \mathbb{R}$ de l'équation $|x| = a$ est $\{-a\,;a\}$
- L'ensemble des solutions $x \in \mathbb{R}$ de l'équation $|x| \leq a$ sont $[-a\,;a]$
- L'ensemble des solutions $x \in \mathbb{R}$ de l'équation $|x| \geq a$ sont $]-\infty; -a] \cup [a; +\infty[$

Exemples :

- $|x| > 2$ donc $x \in]-\infty\,; 2[\cup]2\,;\,+\infty[$
- $|x| \leq 5$ donc $x \in [-5\,; 5]$

B. DISTANCE ENTRE DEUX POINTS

DÉFINITION

Soit A et B deux points d'une droite graduée d'abscisses respectives a et b.
La distance entre A et B, notée $d(A;B)$, est le nombre $|b-a|$.

Remarque

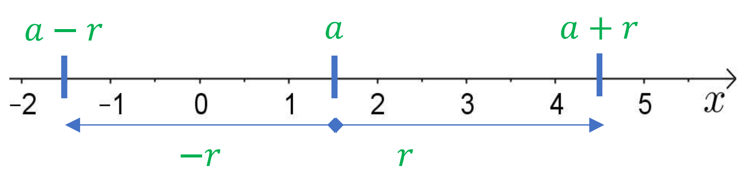
Une distance est une valeur positive, donc $d(A;B) = d(B;A)$ et par définition de la valeur absolue on a bien : $|b-a| = |a-b|$.

PROPRIÉTÉ

Si a et r sont deux réels avec $r > 0$:

$$|\,x-a\,| \leqslant r \iff x \in [a-r; a+r]$$

La distance entre les réels a et x est inférieure ou égale à r.



Exemples :

- $|x-4| < 10 \quad \Leftrightarrow \quad -10 \leq x-4 \leq 10$
  $\Leftrightarrow \quad -6 \leq x \leq 14$
  $\Leftrightarrow \quad x \in [-6\,; 14]$

- $|x-4| < 10$: on a $a = 4$ et $r = 10$ donc d'après la propriété, les solutions sont :
  $x \in [4-10\,; 4+10]$ donc $x \in [-6\,; 14]$