



TEORÍA DE ALGORITMOS
(75.29) CURSO BUCHWALD - GENENDER

Trabajo Práctico Anual

Juegos de Hermanos

Lucas Fernandez
109250

Nicolás Franco Celano Minig
107666

Ernesto Brian Fernández
Ramírez
107326

Carla Mendoza
107011

1. Solución Greedy

1.1. Análisis del Problema

Para esta parte del trabajo el objetivo es plantear un algoritmo greedy que obtenga la solución óptima al problema planteado.

Repasando el problema en cuestión, tenemos dos jugadores, Sophia y Mateo, y una lista de n monedas con valores diferentes y sin un orden específico. En cada turno, comenzando por Sophia, los jugadores tienen que elegir entre la primera y última moneda de la lista, eventualmente agarrando todas las monedas. Finalmente, quien tenga más valor acumulado en monedas ganará el juego.

Como el turno inicial es de Sophia, el algoritmo comienza con Sophia eligiendo la mayor de las dos monedas para sí misma, y la más pequeña para su hermano Mateo. Esto se repite hasta que ya no queden monedas.

1.2. Optimalidad del Algoritmo

Desestimando el caso en el que la cantidad de monedas es par y los valores son iguales, Sophia siempre ganará porque en cada turno su ganancia es mayor que la de Mateo, ya que no solo Sophia elige la moneda más grande, sino que Mateo se ve obligado a recibir la moneda más pequeña. Como Sophia maximiza su ganancia en cada turno y Mateo la minimiza, la sumatoria final va a dar siempre mayor para Sophia (ignorando el caso especial mencionado).

1.3. Algoritmo Planteado

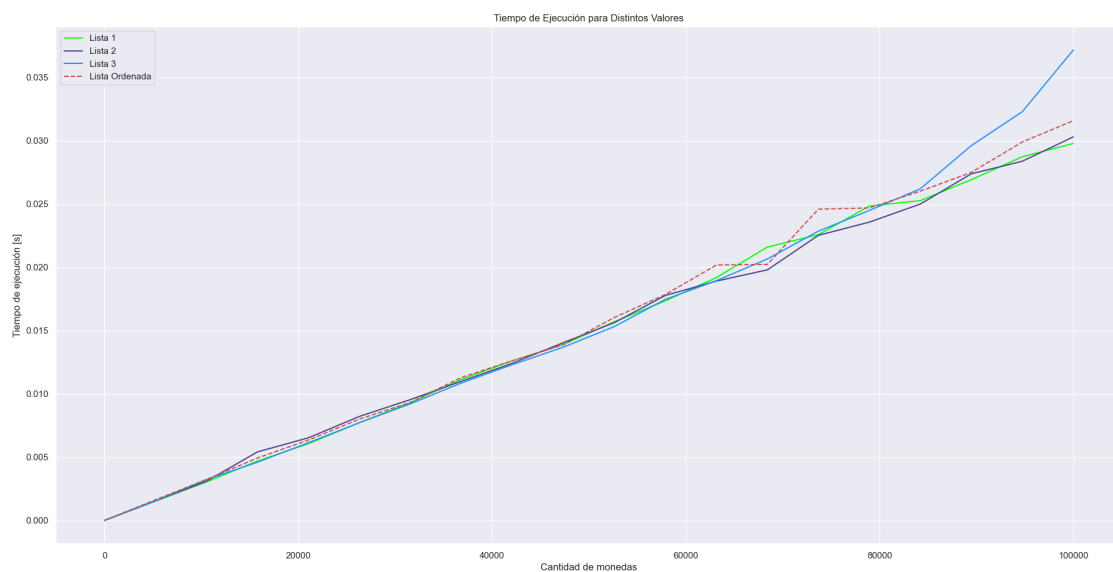
A continuación mostramos una implementación posible del algoritmo en Python

```
1 from collections import deque
2
3 def elegir_sophia(monedas, decisiones):
4     if monedas[0] < monedas[-1] or len(monedas)==1:
5         decisiones.append("ltima moneda para Sophia")
6         return -1
7     else:
8         decisiones.append("Primera moneda para Sophia")
9         return 0
10
11
12 def elegir_mateo(monedas, decisiones):
13     if monedas[0] > monedas[-1] or len(monedas)==1:
14         decisiones.append("ltima moneda para Mateo")
15         return -1
16     else:
17         decisiones.append("Primera moneda para Mateo")
18         return 0
19
20
21 def monedas_greedy(monedas):
22     monedas_sophia = []
23     monedas_mateo = []
24     decisiones = []
25     monedas = deque(monedas)
26
27     while len(monedas) > 0:
28         i = elegir_sophia(monedas, decisiones)
29         moneda_elegida = monedas.pop() if i<0 else monedas.popleft()
30         monedas_sophia.append(moneda_elegida)
31         if len(monedas) > 0:
32             j = elegir_mateo(monedas, decisiones)
33             moneda_elegida = monedas.pop() if j<0 else monedas.popleft()
34             monedas_mateo.append(moneda_elegida)
35
36     return decisiones, monedas_sophia, monedas_mateo
```

El algoritmo la recorre la fila de monedas de inicio a fin pasando una sola vez por cada elemento, por lo que la complejidad de la parte iterativa del algoritmo es $\mathcal{O}(n)$. Teniendo en cuenta que convertir la lista a un *deque* tiene complejidad $\mathcal{O}(n)$ y las operaciones *pop* y *popleft* son $\mathcal{O}(1)$, la complejidad total del algoritmo es de $\mathcal{O}(n)$.

1.3.1. Variabilidad del Tiempo de Ejecución

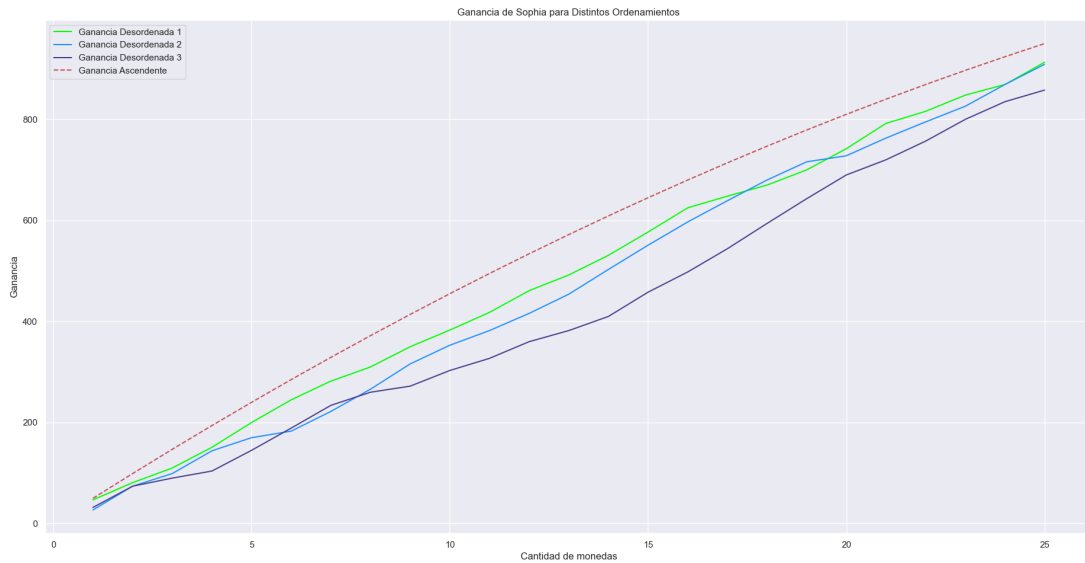
Finalizada esta parte del análisis, es importante saber que la notación Big O no es más que una herramienta conceptual para entender cómo se comporta un algoritmo frente al tamaño de un dato de entrada. En la práctica los tiempos de ejecución pueden variar por más que el tamaño de nuestra lista permanezca constante. En el siguiente ejemplo vamos a ver cómo se comporta nuestro algoritmo frente a variaciones en los valores de las monedas con un tamaño constante lo suficientemente grande (100000).



Viendo el gráfico se puede apreciar una variabilidad despreciable a efectos prácticos.

1.4. Variabilidad de la Optimalidad

Si bien Sophia ganará siempre que la lista no sea un número par de monedas iguales, es posible que la ganancia de Sophia se vea afectada por la variabilidad de los valores de las monedas. Para ver esto, el análisis realizado en el punto anterior no será de gran utilidad, ya que analizar un gráfico de la ganancia de Sophia para listas diferentes no nos permite sacar una conclusión satisfactoria. En cambio, el caso de la ganancia de Sophia para distintos ordenamientos de la misma lista resulta interesante. A continuación tenemos un gráfico de la ganancia de Sophia para distintos ordenamientos de la misma lista, incluyendo una lista de orden ascendente.



Se puede observar como se obtiene la mayor ganancia cuando las monedas están ordenadas. Cabe destacar que el resultado es el mismo para el ordenamiento descendente por la naturaleza del algoritmo.

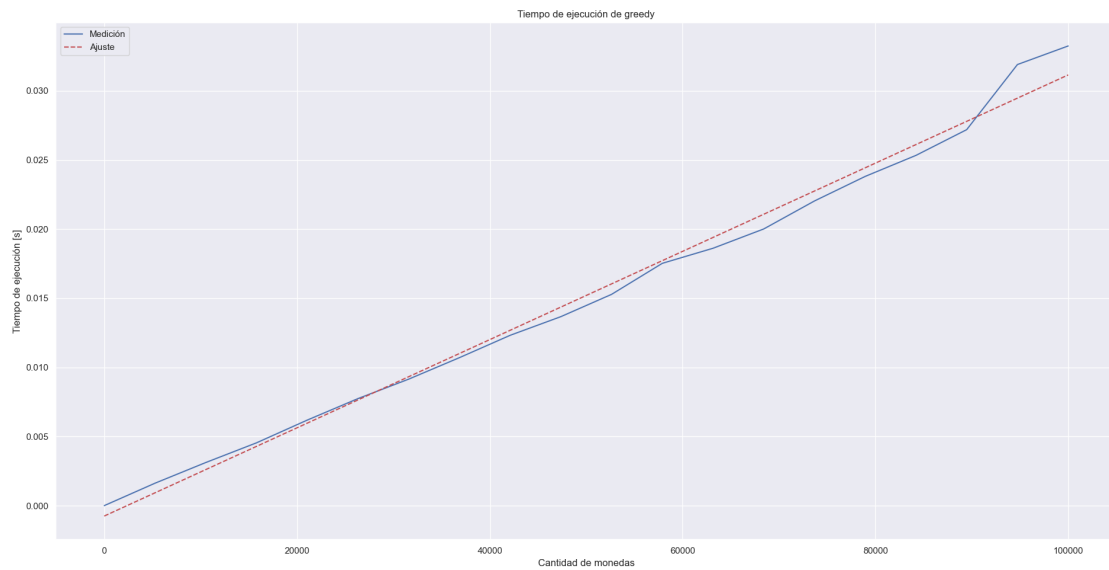
1.5. Ejemplos de Ejecución

Nos aseguramos que se cumpla la optimalidad para los casos brindados por la cátedra (20 elementos hasta 1000 elementos) y que las decisiones tomadas por los jugadores en cada turno sean iguales. Además, probamos los siguientes casos:

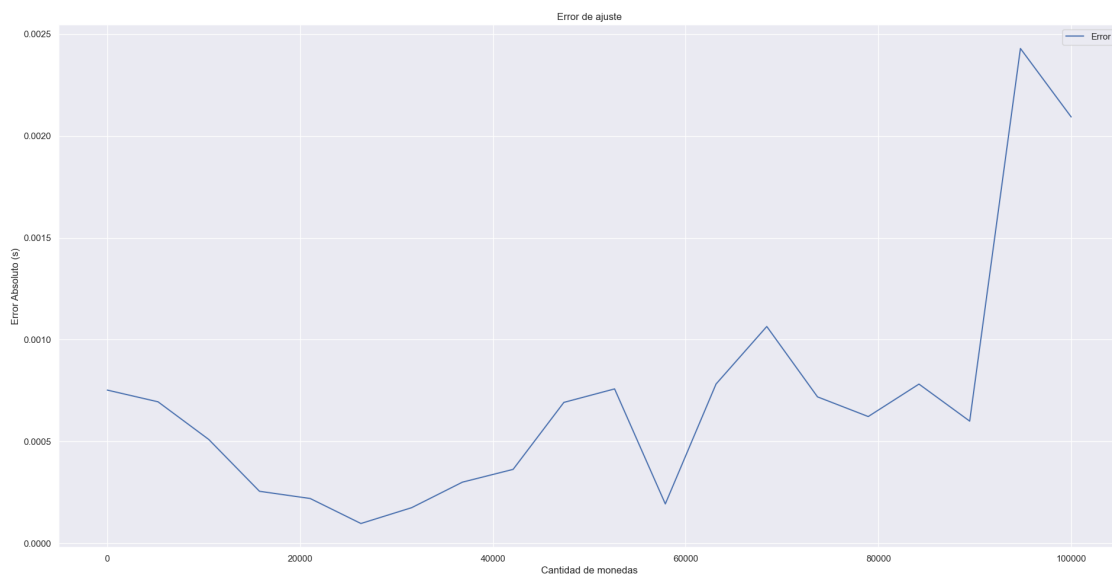
- Lista ordenada (ascendente y descendente).
- Lista par de valores iguales (para asegurarse de que funciona la condición de empate).
- Valores alternados.
- Lista simétrica.
- Caso de una moneda.

1.6. Mediciones de Tiempo

En este apartado se corrobora la complejidad $\mathcal{O}(n)$ indicada en la sección 1.3 de forma experimental y se realiza un ajuste por cuadrados mínimos para ver qué tan buena es la medición. Además, mostramos el error de ajuste para cada tamaño para concluir la efectividad del ajuste.



Podemos apreciar como la tendencia lineal del algoritmo es evidente.



Viendo el error de ajuste para cada tamaño, podemos concluir que el error es lo suficientemente pequeño para concluir que el algoritmo se comporta efectivamente con complejidad temporal lineal.

1.7. Anexo: Código

1.7.1. Variabilidad del Tiempo de Ejecución

```
1 from monedas_greedy import monedas_greedy
2 from random import seed
3 from matplotlib import pyplot as plt
4 import seaborn as sns
5 import numpy as np
6 import scipy as sp
7 from util import time_algorithm
```

```
8
9
10 def get_random_array(size: int):
11     return list(np.random.randint(0, 100000, size))
12
13 if __name__ == '__main__':
14
15     sns.set_theme()
16
17     x = np.linspace(1, 100000, 20).astype(int)
18
19     seed(12345)
20     np.random.seed(12345)
21     results = time_algorithm(monedas_greedy, x, lambda s: [get_random_array(s)])
22     r_ordenado = time_algorithm(monedas_greedy, x, lambda s: [sorted(
23         get_random_array(s))])
24
25     seed(54321)
26     np.random.seed(54321)
27     r1 = time_algorithm(monedas_greedy, x, lambda s: [get_random_array(s)])
28     seed(432535)
29     np.random.seed(432535)
30     r2 = time_algorithm(monedas_greedy, x, lambda s: [get_random_array(s)])
31     seed(11214)
32     np.random.seed(11214)
33     r3 = time_algorithm(monedas_greedy, x, lambda s: [get_random_array(s)])
34
35     ax: plt.axes
36     fig, ax = plt.subplots()
37
38     ax.plot(x, [r1[i] for i in x], label="Lista 1", color="lime")
39     ax.plot(x, [r2[i] for i in x], label="Lista 2", color="darkslateblue")
40     ax.plot(x, [r3[i] for i in x], label="Lista 3", color="dodgerblue")
41     ax.plot(x, [r_ordenado[i] for i in x], "r--", label="Lista Ordenada")
42
43     ax.set_title('Tiempo de Ejecución para Distintos Valores')
44     ax.set_xlabel('Cantidad de monedas')
45     ax.set_ylabel('Tiempo de ejecución [s]')
46     plt.legend()
47     plt.show()
```

1.7.2. Variabilidad de la Optimalidad

```
1 from monedas_greedy import monedas_greedy
2 import random
3 import seaborn as sns
4 import numpy as np
5 from matplotlib import pyplot as plt
6
7 #Numeros del 1 al 50 desordenados
8 monedas = [34, 7, 25, 2, 49, 16, 45, 12, 37, 1, 28, 20, 6, 31, 39, 46, 48, 23, 9,
9     11, 30, 36, 15, 14, 21, 38, 44, 5, 10, 32, 24, 50, 42, 13, 22, 3, 17, 18, 8, 4,
10     43, 26, 35, 33, 40, 19, 41, 29, 27, 47]
11
12 #Primero voy a ordenar y desordenar este array de forma diferente para ver como
13 #cambia el resultado
14
15 #El algoritmo siempre va a ser ptimo (siempre va a ganar Sophia), pero puede que
16 #la ganancia de Sophia dependa de como est ordenado el array
17
18 monedas_asc = sorted(monedas)
19 monedas_dec = sorted(monedas, reverse=True)
20
21 decisiones_des, monedas_sophia_des, monedas_mateo_des = monedas_greedy(monedas)
22 decisiones_asc, monedas_sophia_asc, monedas_mateo_asc = monedas_greedy(monedas_asc)
23 decisiones_dec, monedas_sophia_dec, monedas_mateo_dec = monedas_greedy(monedas_dec)
24
25 ganancia_des = sum(monedas_sophia_des)
26 ganancia_asc = sum(monedas_sophia_asc)
27 ganancia_dec = sum(monedas_sophia_dec)
```

```
23 print(ganancia_des) #913
24 print(ganancia_asc) #950
25 print(ganancia_dec) #950
26
27 #Como veo que es igual de optimo si ordeno ascendente o descendente, voy a ver si
    cambia mucho entre diferentes arrays desordenados
28
29 #No uso random.randint porque me genera duplicados
30 def get_random_array():
31     return random.sample(range(1,51), 50)
32
33
34 sns.set_theme()
35 x = np.linspace(1,25,25).astype(int)
36
37 random.seed(12345)
38 res1, y1, mateo1 = monedas_greedy(get_random_array())
39
40 random.seed(54321)
41 res2, y2, mateo2 = monedas_greedy(get_random_array())
42
43 ax: plt.axes
44 fig, ax = plt.subplots()
45 ax.plot(x, [sum(monedas_sophia_des[:i]) for i in x], label="Ganancia Desordenada 1",
    , color="lime")
46 ax.plot(x, [sum(y1[:i]) for i in x], label="Ganancia Desordenada 2", color="
    dodgerblue")
47 ax.plot(x, [sum(y2[:i]) for i in x], label="Ganancia Desordenada 3", color="
    darkslateblue")
48 ax.plot(x, [sum(monedas_sophia_asc[:i]) for i in x], 'r--', label="Ganancia
    Ascendente")
49 #ax.plot(x, [sum(monedas_sophia_dec[:i]) for i in x], label="Ganancia Descendiente
    ", color="pink")
50 #El grafico de los arrays ascendente y descendente son iguales. Me quedo con uno
    solo
51
52 ax.set_title('Ganancia de Sophia para Distintos Ordenamientos')
53 ax.set_xlabel('Cantidad de monedas')
54 ax.set_ylabel('Ganancia')
55 plt.legend()
56 plt.show()
57
58 #Ver que hay una leve variaci n en la ganancia final dependiendo de como est n
    ordenadas las monedas, pero no es significativo.
59 #Parece ser que la ganancia m xima se alcanza cuando el array est  ordenado
    ascendente o descendente, el resultado de cualquier otro ordenamiento va a
    ser menos ptimo (pero ptimo al fin).
```

1.7.3. Mediciones de Tiempo

```
1 from monedas_greedy import monedas_greedy
2 from random import seed
3 from matplotlib import pyplot as plt
4 import seaborn as sns
5 import numpy as np
6 import scipy as sp
7 from util import time_algorithm
8
9 def get_random_array(size: int):
10     return list(np.random.randint(0, 100000, size))
11
12 if __name__ == '__main__': #Este bloque es para que no explote time_algorithm
13     seed(12345)
14     np.random.seed(12345)
15
16     sns.set_theme()
17
18     x = np.linspace(1,100000,20).astype(int)
19     results = time_algorithm(monedas_greedy, x, lambda s: [get_random_array(s)])
```

```
20 f = lambda x, c1, c2: c1*x+c2 #forma de una funci n lineal
21 c, pcov = sp.optimize.curve_fit(f, x, [results[n] for n in x])
22
23 #Ajuste por cuadrados m nimos
24 ax: plt.axes
25 fig, ax = plt.subplots()
26 ax.plot(x, [results[i] for i in x], label="Medici n")
27 ax.plot(x, [c[0]*n+c[1] for n in x], 'r--', label="Ajuste")
28 ax.set_title('Tiempo de ejecuci n de greedy')
29 ax.set_xlabel('Cantidad de monedas')
30 ax.set_ylabel('Tiempo de ejecuci n [s]')
31 plt.legend()
32 plt.show()
33
34 #Error para cada tama o
35 ax: plt.axes
36 fig, ax = plt.subplots()
37 errors = [np.abs(c[0]*n+c[1]-results[n]) for n in x]
38 ax.plot(x, errors, label="Error")
39 ax.set_title('Error de ajuste')
40 ax.set_xlabel('Cantidad de monedas')
41 ax.set_ylabel('Error Absoluto (s)')
42 plt.legend()
43 plt.show()
```


2. Solución Dinámica

2.1. Análisis del Problema

Para esta parte del trabajo el problema cambia ligeramente, ya que ahora Mateo es el que elige la mayor moneda. El objetivo es plantear un algoritmo por programación dinámica que obtenga la solución óptima al problema planteado y plantear su ecuación de recurrencia.

Para cada turno, Sophia tiene que elegir entre agarrar la primera o la última moneda de la fila. Si agarra la primera moneda, entonces la va a quitar de la fila y Mateo va a elegir la más grande disponible entre las otras dos que queden en los extremos. Esta logica se repite si Sophia decide agarrar la última moneda, pero el subarray resultante va a ser diferente.

El caso base es cuando el subarray contiene un solo elemento, por lo que Sophia no tiene otra opción que tomarlo.

Si planteamos $dp[i][j]$ como el valor máximo que agarra Sophia para el subarray que va de i a j , entonces Sophia quiere quedarse con lo que maximice el valor de $dp[i][j]$ teniendo en cuenta que Mateo siempre va a hacer que ella tome el minimo valor entre $dp[i+2][j]$ y $dp[i+1][j-1]$. en caso de elegir la primera moneda, o $dp[i][j-2]$ y $dp[i+1][j-1]$, si elige la última, por lo que tiene que fijarse si le conviene elegir la moneda i o la j . Teniendo esto en cuenta, la ecuación de recurrencia tiene la siguiente forma.

$$dp[i][j] = \max(monedas[i] + \min(dp[i+2][j], dp[i+1][j-1]), monedas[j] + \min(dp[i][j-2], dp[i+1][j-1]))$$

2.2. Demostración de la Efectividad del Algoritmo

Si bien el algoritmo puede no ser optimo en algunos casos (Por ejemplo, para la lista [1,10,5] Sophia gana 6 y Mateo 10), la ganancia de Sophia siempre será la máxima posible para las monedas en el orden dado. Esto se debe a que Sophia siempre está buscando la forma de maximizar su ganancia buscando la mejor decisión luego de optimizar los subproblemas resultantes de elegir la primera o la última moneda, y esto es posible ya que el comportamiento de Mateo es predecible, puesto que siempre busca elegir la moneda más grande para el y minimizar la ganancia posible de Sophia, por lo que Mateo puede ganar si la estructura de la lista lo favorece, pero Sophia siempre estará acumulando lo más que pueda.

2.3. Algoritmo Planteado

A continuación mostramos una implementación posible del algoritmo en Python, usando programación dinámica y memoization.

```
1 def reconstruccion(monedas, matriz):
2     i, k = 0, len(monedas)-1
3     instrucciones = []
4     monedas_sophia = []
5     if i == k:
6         instrucciones.append(f"Sophia debe agarrar la ultima ({monedas[i]})")
7     while k > 0:
8         if matriz[k][i] == matriz[k-2][i+1] + monedas[i]:
9             instrucciones.append(f"Sophia debe agarrar la primera ({monedas[i]})")
10            monedas_sophia.append(monedas[i])
11            i += 1
12        elif (matriz[k][i] == matriz[k-2][i+2] + monedas[i]
13              and (matriz[k][i] != matriz[k-2][i] + monedas[k+i-1]
14                   or monedas[i+1] <= (monedas[k+i-1] and monedas[i]))):
15            instrucciones.append(f"Sophia debe agarrar la primera ({monedas[i]})")
16            monedas_sophia.append(monedas[i])
17            i += 1
18        else:
```

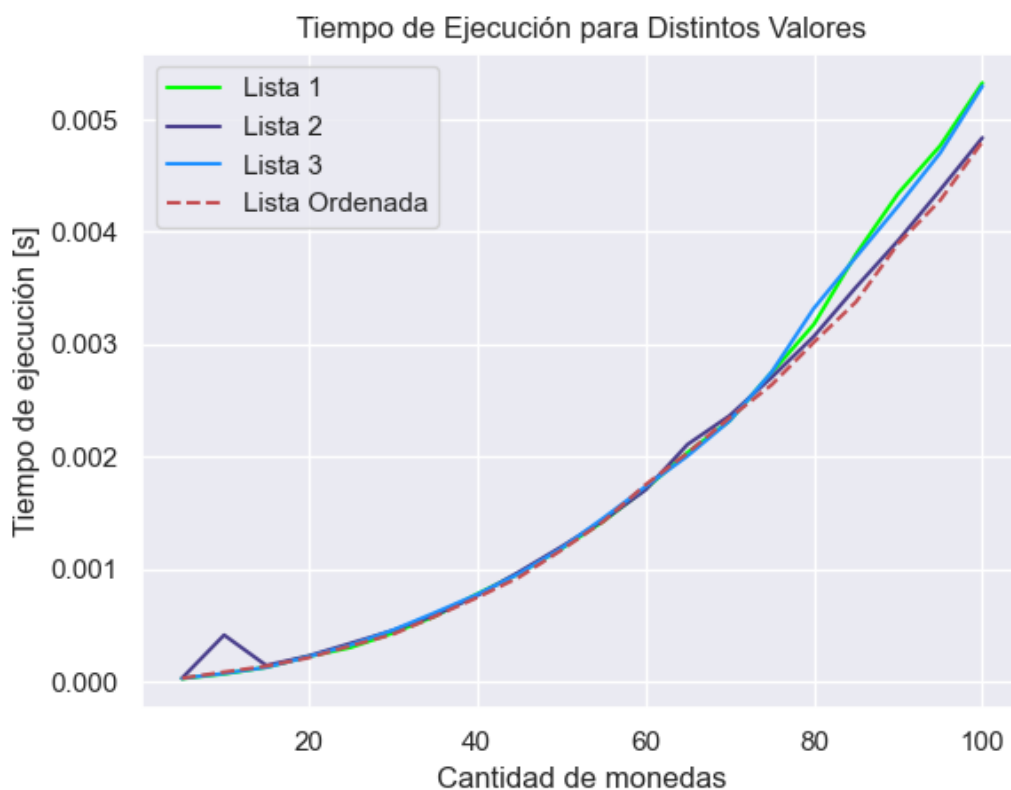
```
19     instrucciones.append(f"Sophia debe agarrar la ultima ({monedas[k + i -  
20     monedas_sophia.append(monedas[k+i-1])  
21     k -= 1  
22  
23     if k > 0:  
24         if monedas[i] <= monedas[k + i - 1]:  
25             instrucciones.append(f"Mateo agarra la ultima ({monedas[k + i -  
26             else:  
27                 instrucciones.append(f"Mateo agarra la primera ({monedas[i]})")  
28                 i += 1  
29                 k -= 1  
30     return instrucciones, monedas_sophia  
31  
32  
33 def elegir_izq(monedas, matriz, inicio):  
34     valor_izq = monedas[0]  
35     if len(monedas) <= 2:  
36         return valor_izq  
37     else:  
38         if monedas[1] < monedas[-1]:  
39             return valor_izq + matriz[len(monedas) - 2][inicio + 1]  
40         else:  
41             return valor_izq + matriz[len(monedas) - 2][inicio + 2]  
42  
43  
44 def elegir_der(monedas, matriz, inicio):  
45     valor_der = monedas[-1]  
46     if len(monedas) <= 2:  
47         return valor_der  
48     else:  
49         if monedas[0] < monedas[-2]:  
50             return valor_der + matriz[len(monedas) - 2][inicio]  
51         else:  
52             return valor_der + matriz[len(monedas) - 2][inicio + 1]  
53  
54  
55 def monedas_dinamicas(monedas):  
56  
57     """Defino una matriz de el optimo de subarreglos que se divide por el largo de  
58     el subarreglo en  
59     filas y por la posicion del arreglo original por la que empiezo a construir el  
60     subarreglo en columnas"""  
61     arr = [0] * (len(monedas))  
62     matriz = []  
63     for i in range(len(monedas) + 1):  
64         matriz.append(arr.copy())  
65  
66     for largo in range(1, len(monedas) + 1):  
67         for comienzo in range(0, len(monedas)):  
68             if largo + comienzo > len(monedas):  
69                 continue  
70             max_izq = elegir_izq(monedas[comienzo:comienzo + largo], matriz,  
71             comienzo)  
72             max_der = elegir_der(monedas[comienzo:comienzo + largo], matriz,  
73             comienzo)  
74             matriz[largo][comienzo] = max(max_der, max_izq)  
75  
76     total_monedas = sum(monedas)  
77     total_sophia = matriz[len(monedas)][0]  
78     total_mateo = total_monedas - total_sophia  
79     decisiones, monedas_sophia = reconstruccion(monedas, matriz)  
80  
81     return decisiones, monedas_sophia, total_sophia, total_mateo
```

2.3.1. Complejidad del Algoritmo

En la primera parte del código llenamos la tabla dp para los distintos subarrays, por lo que tiene complejidad $\mathcal{O}(n^2)$. Por otro lado, la parte de memoization itera k veces ($\mathcal{O}(k)$) cargando cada decisión y las monedas que eligió Sophia, que son todas operaciones $\mathcal{O}(1)$. Finalmente, la complejidad del algoritmo es de $\mathcal{O}(n^2)$.

2.3.2. Variabilidad del Tiempo de Ejecución

Análogamente a la sección Greedy del trabajo, analizaremos cómo varía el tiempo de ejecución para diferentes listas de igual tamaño.



Como se puede observar en la figura, todas las mediciones tienen forma cuadrática, y presentan una variación despreciable.

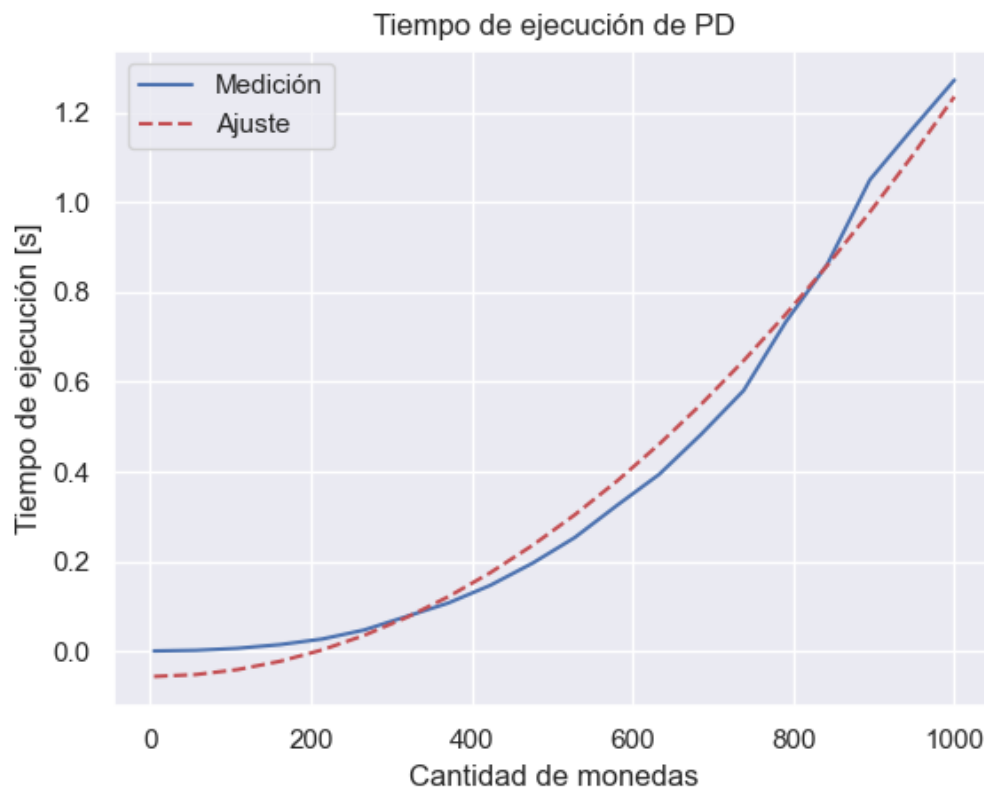
2.4. Ejemplos de Ejecución

Similar a la primera parte del trabajo, nos aseguramos que se cumplan los casos brindados por la cátedra, además de agregar algunos casos nuestros:

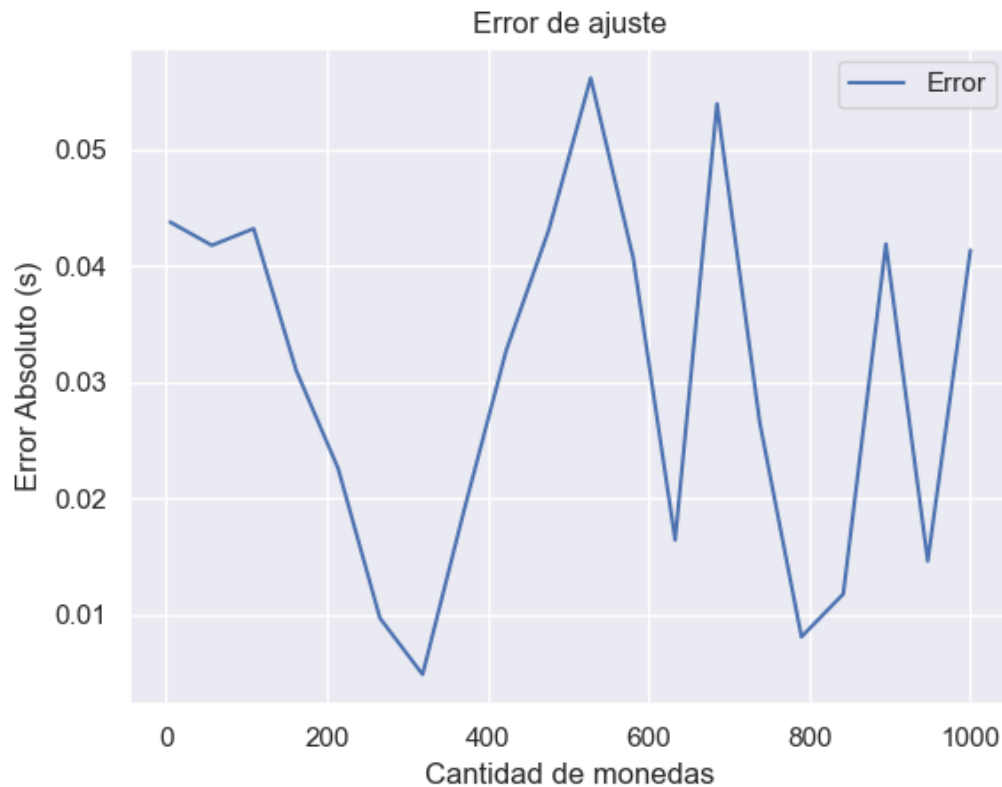
- Lista ordenada (ascendente y descendente).
- Lista $[1,10,5]$ (para asegurarnos de que Mateo puede ganar).
- Lista simétrica.
- Caso de una moneda.

2.5. Mediciones de Tiempo

A continuación, realizamos mediciones de tiempo para corroborar que el algoritmo es realmente $\mathcal{O}(n^2)$ de forma experimental y ajustamos los resultados usando cuadrados mínimos, además de calcular el error de ajuste.



Se puede ver como la medición experimental tiene la misma forma cuadrática que el ajuste. A continuación vemos el error para asegurarnos que es una medición aceptable.



El error absoluto se mantiene acotado por $0,6 \cdot 10^{-1}$ para cantidades menores a 1000. Consideramos que esto es un error aceptable y la medición es correcta.

2.6. Anexo: Código

2.6.1. Variabilidad de Tiempo de Ejecución

```
1 from monedas_dinamicas import monedas_dinamicas
2 from random import seed
3 from matplotlib import pyplot as plt
4 import seaborn as sns
5 import numpy as np
6 import scipy as sp
7 from util import time_algorithm
8
9 def get_random_array(size: int):
10     return list(np.random.randint(0, 1000, size))
11
12 if __name__ == '__main__': #Este bloque es para que no explote time_algorithm
13
14     sns.set_theme()
15
16     x = np.linspace(5,100,20).astype(int)
17
18     seed(12345)
19     np.random.seed(12345)
20     results = time_algorithm(monedas_dinamicas, x, lambda s: [get_random_array(s)])
21     r_ordenado = time_algorithm(monedas_dinamicas, x, lambda s: [sorted(
22         get_random_array(s))])
23
24     np.random.seed(2)
25     r1 = time_algorithm(monedas_dinamicas, x, lambda s: [get_random_array(s)])
26     np.random.seed(3)
```

```
26 r2 = time_algorithm(monedas_dinamicas, x, lambda s: [get_random_array(s)])
27 np.random.seed(54321)
28 r3 = time_algorithm(monedas_dinamicas, x, lambda s: [get_random_array(s)])
29
30 ax: plt.axes
31 fig, ax = plt.subplots()
32
33 ax.plot(x, [r1[i] for i in x], label="Lista 1", color="lime")
34 ax.plot(x, [r2[i] for i in x], label="Lista 2", color="darkslateblue")
35 ax.plot(x, [r3[i] for i in x], label="Lista 3", color="dodgerblue")
36 ax.plot(x, [r_ordenado[i] for i in x], "r--", label="Lista Ordenada")
37
38 ax.set_title('Tiempo de Ejecuci n para Distintos Valores')
39 ax.set_xlabel('Cantidad de monedas')
40 ax.set_ylabel('Tiempo de ejecuci n [s]')
41 plt.legend()
42 plt.show()
```

2.6.2. Mediciones de Tiempo

```
1 from monedas_dinamicas import monedas_dinamicas
2 from random import seed
3 from matplotlib import pyplot as plt
4 import seaborn as sns
5 import numpy as np
6 import scipy as sp
7 from util import time_algorithm
8
9 def get_random_array(size: int):
10     return list(np.random.randint(0, 1000, size))
11
12 if __name__ == '__main__': #Este bloque es para que no explote time_algorithm
13     seed(12345)
14     np.random.seed(12345)
15
16     sns.set_theme()
17
18     x = np.linspace(5,1000,20).astype(int)
19     results = time_algorithm(monedas_dinamicas, x, lambda s: [get_random_array(s)])
20     f = lambda x, c1, c2: c1*(x**2)+c2 #forma de una funci n cuadr tica
21     c, pcov = sp.optimize.curve_fit(f, x, [results[n] for n in x])
22
23     #Ajuste por cuadrados m nimos
24     ax: plt.axes
25     fig, ax = plt.subplots()
26     ax.plot(x, [results[i] for i in x], label="Medici n")
27     ax.plot(x, [c[0]*(n**2)+c[1] for n in x], 'r--', label="Ajuste")
28     ax.set_title('Tiempo de ejecuci n de PD')
29     ax.set_xlabel('Cantidad de monedas')
30     ax.set_ylabel('Tiempo de ejecuci n [s]')
31     plt.legend()
32     plt.show()
33
34     #Error para cada tama o
35     ax: plt.axes
36     fig, ax = plt.subplots()
37     errors = [np.abs(c[0]*(n**2)+c[1]-results[n]) for n in x]
38     ax.plot(x, errors, label="Error")
39     ax.set_title('Error de ajuste')
40     ax.set_xlabel('Cantidad de monedas')
41     ax.set_ylabel('Error Absoluto (s)')
42     plt.legend()
43     plt.show()
```

3. Cambios

3.1. Análisis del Problema

Pasó mucho tiempo desde que Mateo y Sophia jugaban al juego de las monedas. Los hermanos ahora están en la etapa de la adolescencia y empiezan a tener gustos diferentes. Con respecto a los juegos, cada uno iba a por su lado. Centrándonos en Sophia, empezó a engancharse mucho con un juego creado en nuestro país por Jaime Poniachik denominado Batalla Naval Individual.

En dicho juego, tenemos un tablero de $n \times m$ casilleros, y k barcos. Cada barco i tiene b_i de largo. Es decir, requiere de b_i casilleros para ser ubicado. Todos los barcos tienen 1 casillero de ancho. El tablero a su vez tiene un requisito de consumo tanto en sus filas como en sus columnas. Si en una fila indica un 3, significa que deben haber 3 casilleros de dicha fila siendo ocupados. Ni más, ni menos. No podemos poner dos barcos de forma adyacente (es decir, no pueden estar contiguos ni por fila, ni por columna, ni en diagonal directamente). Debemos ubicar todos los barcos de tal manera que se cumplan todos los requisitos.

En esta parte del informe vamos a explorar el problema que nos presenta este juego. Vamos a demostrar por qué el problema en su versión de decisión es NP y NP-Completo. Luego usaremos su versión de optimización para aplicar una solución que utilice un algoritmo de Backtracking y otra que empleé Programación Lineal, calcular sus mediciones de tiempos y comparar. Mas adelante, implementaremos y analizaremos en detalle un algoritmo de aproximación propuesto por John Jellicoe. Y por ultimo, propondremos un algoritmo de aproximación o un algoritmo Greedy, comparándolo con el algoritmo dicho anteriormente.

3.2. ¿El problema en su versión de decisión está en NP?

En principio, vamos a demostrar si el problema está en NP usando su versión de decisión:

Dado un tablero de $n \times m$ casilleros, y una lista de k barcos (donde el barco i tiene b_i de largo), una lista de restricciones para las filas (donde la restricción j corresponde a la cantidad de casilleros a ser ocupados en la fila j y una lista de restricciones para las columnas (símil filas, pero para columnas), ¿es posible definir una ubicación de dichos barcos de tal forma que se cumplan con las demandas de cada fila y columna, y las restricciones de ubicación?

Como sabemos, un problema en NP es aquel que teniendo una posible solución al mismo, podemos comprobar su veracidad en un tiempo polinomial, basándonos en la teoría de complejidad algorítmica. Es decir, teniendo los datos que nos proporciona una instancia del problema junto con una posible solución a ella, debemos verificar que la función que reciba esos argumentos se ejecute en $O(f(x))$ siendo $f(x)$ una función polinomial.

Ahora, que argumentos va a recibir esta función verificador? Bueno, a continuación daremos una breve síntesis de lo que trata cada uno de ellos y luego mostraremos el código:

- 1) **tablero**: Una matriz de n filas por m columnas, donde sus valores están inicializados con None.
- 2) **longitud_barcos**: Una lista de las longitudes de los k barcos (el barco i tiene b_i de largo).
- 3) **restricciones_filas**: Una lista de restricciones para las filas (la fila i tiene el número de casilleros a ocupar en la misma).
- 4) **restricciones_columnas**: La lista de restricciones para las columnas (símil **restricciones_filas** pero para columnas).
- 5) **ubicacion_barcos**: Una lista de sublistas, donde cada sublista i representa las posiciones (f, c) del barco i .

```
1  ##Ejemplo de referencia:
2  ubicacion_barcos = [[(),(),...,()),
3                      [(),(),...,()),
4                      ...,
5                      [(),(),...,())]
```

```
1 def verificador_de_solucion(tablero, longitud_barcos, restricciones_filas,
2     restricciones_columnas,
3     ubicacion_barcos):
4
5     n = len(tablero) ## cantidad de filas del tablero
6     m = len(tablero[1]) ##cantidad de columnas del tablero
7     k = len(longitud_barcos) ##cantidad de barcos que deber haber en el tablero
8
9     if not es_valida_la_lista_ubicacion_barcos(n,m,longitud_barcos,k,
10        ubicacion_barcos):
11         return False
12
13     ## Colocamos lo barcos en tablero
14     id_barco = 0
15     for posiciones_de_barco in ubicacion_barcos:
16
17         for (f,c) in posiciones_de_barco:
18             tablero[f][c] = id_barco
19
20             id_barco += 1
21     ####
22
23     if not se_cumplen_requisitos_consumo_filas_y_columnas(tablero,n,m,
24        restricciones_filas, restricciones_columnas):
25         return False
26
27     if hay_barcos_adyacentes(tablero,n,m,ubicacion_barcos,k):
28         return False
29
30     return True
31
32 def es_valida_la_lista_ubicacion_barcos(n,m,longitud_barcos,k,ubicacion_barcos):
33
34     if len(ubicacion_barcos) != k:
35         return False
36
37     for i in range(0,k):
38         posiciones_de_barco = ubicacion_barcos[i]
39         if len(posiciones_de_barco) != longitud_barcos[i]:
40             return False
41
42         for (f,c) in posiciones_de_barco:
43
44             if not (0 <= f <= n-1) or not (0 <= c <= m-1):
45                 return False
46
47     return las_posiciones_de_cada_barco_son_verticales_u_horizontales(
48        ubicacion_barcos)
49
50 def las_posiciones_de_cada_barco_son_verticales_u_horizontales(ubicacion_barcos):
51
52     for posiciones_de_barco in ubicacion_barcos:
53         if not barco_esta_posicionado_de_forma_vertical(posiciones_de_barco) and \
54            not barco_esta_posicionado_de_forma_horizontal(posiciones_de_barco):
55             return False
56
57     return True
58
59 def barco_esta_posicionado_de_forma_vertical(posiciones_de_barco):
60
61     pos_columna = posiciones_de_barco[0][1]
62     for i in range(1,len(posiciones_de_barco)):
63         _,c = posiciones_de_barco[i]
64         if c != pos_columna:
65             return False
66
67     return True
```



```
67 def barco_esta_posicionado_de_forma_horizontal(posiciones_de_barco):
68
69     pos_filas = posiciones_de_barco[0][0]
70     for i in range(1, len(posiciones_de_barco)):
71         f, _ = posiciones_de_barco[i]
72         if f != pos_filas:
73             return False
74     return True
75
76
77 def se_cumplen_requisitos_consumo_filas_y_columnas(tablero, n, m, restricciones_filas,
78     restricciones_columnas):
79
80     return se_cumplen_requisitos_consumo_filas(tablero, n, restricciones_filas) and \
81         se_cumplen_requisitos_consumos_columnas(tablero, n, m, restricciones_columnas)
82
83 def se_cumplen_requisitos_consumo_filas(tablero, n, restricciones_filas):
84
85     cant_elementos_en_fila = 0
86     for f in range(0, n):
87         fila = tablero[f]
88         for elemento in fila:
89             if elemento != None:
90                 cant_elementos_en_fila += 1
91
92         if cant_elementos_en_fila != restricciones_filas[f]:
93             return False
94
95     cant_elementos_en_fila = 0
96
97     return True
98
99 def se_cumplen_requisitos_consumos_columnas(tablero, n, m, restricciones_columnas):
100
101
102     cant_elementos_en_columna = 0
103
104     for c in range(0, m):
105         for f in range(0, n):
106
107             elemento = tablero[f][c]
108             if elemento != None:
109                 cant_elementos_en_columna += 1
110
111         if cant_elementos_en_columna != restricciones_columnas[c]:
112             return False
113
114     cant_elementos_en_columna = 0
115
116     return True
117
118
119 def hay_barcos_adyacentes(tablero, n, m, ubicacion_barcos, k):
120
121     id_barco = 0
122     for posiciones_de_barco in ubicacion_barcos:
123         for (f, c) in posiciones_de_barco:
124
125             for i in range(-1, 2):
126                 for j in range(-1, 2):
127
128                     offset_f = f + i
129                     offset_c = c + j
130
131                     if offset_f == f and offset_c == c:
132                         continue
133
134                     if posicion_de_desplazamiento_hay_posicion_de_otro_barco(
135                         tablero, n, m, offset_f, offset_c, id_barco):
```

```

135         return True
136     id_barco += 1
137     return False
138
139
140 def posicion_de_desplazamiento_hay_posicion_de_otro_barco(tablero, n, m, offset_f,
141     offset_c, id_barco):
142
143     ultima_pos_de_fila = n-1
144     ultima_pos_de_columna = m-1
145
146     if 0 <= offset_f <= ultima_pos_de_fila:
147         if 0 <= offset_c <= ultima_pos_de_columna:
148             return tablero[offset_f][offset_c] != None and tablero[offset_f][
149                 offset_c] != id_barco
150             ##return True
151             ##return False
152         return False
153     return False
154
155 ###Este seria el tablero con las ubicaciones de los barcos que se muestra en imagen
156 en el tp3
157 tablero = [[None for _ in range(10)] for _ in range(10)]
158 longitud_barcos = [3,1,1,2,4,2,1,3,1,2]
159 restricciones_filas = [3,2,2,4,2,1,1,2,3,0]
160 restricciones_columnas = [1,2,1,3,2,2,3,1,5,0]
161 ubicacion_barcos = [(0,4),(0,5),(0,6)],
162                     [(1,0)],
163                     [(1,8)],
164                     [(2,2),(2,3)],
165                     [(3,5),(3,6),(3,7),(3,8)],
166                     [(4,1),(5,1)],
167                     [(4,3)],
168                     [(6,8),(7,8),(8,8)],
169                     [(7,6)],
170                     [(8,3),(8,4)]]
171
172 print(verificador_de_solucion(tablero, longitud_barcos, restricciones_filas,
173     restricciones_columnas, ubicacion_barcos))

```

La función `verificador_solucion` es la función principal que recibe los argumentos mencionados. Se crean algunas variables que se ejecutan en tiempo constante. Luego se llama a la función `es_valida_la_lista_ubicacion_barcos()` que verifica, justamente, que la lista solución sea correcta. Esto es, que la cantidad de sublistas sea igual a k , que la longitud de cada sublista i sea igual a `longitud_barcos[i]`, que las posiciones (f, c) de cada sublista estén dentro del rango de la matriz y que se pueda comprobar que las posiciones de los barcos se reflejen en el tablero de forma vertical u horizontal, usando `las_posiciones_de_cada_barco_son_verticales_u_horizontales`. La complejidad hasta el momento es $O\left(\sum_{i=1}^k b_i\right)$ siendo k la cantidad de barcos y b_i la longitud de los barcos. En el peor de los casos, vamos a recorrer toda la lista solución y luego recorreremos cada sub-lista.

Volviendo a la función principal, vamos agregando los barcos al tablero. Esto también es $O\left(\sum_{i=1}^k b_i\right)$.

Luego llamamos a `se_cumplen_requisitos_consumo_filas_y_columnas()` que verifica si cada fila y columna cumple con las restricciones correspondientes. Todo esto se ejecuta en tiempo $O(n \times m)$, ya que recorreremos todas las posiciones del tablero en el peor caso.

Por último, nos encontramos con el llamado a `hay_barcos_adyacentes()`. Si observan esta función, podrán notar que estamos recorriendo todas las posiciones (f, c) de cada barco, y por cada posición verificamos si las posiciones que están alrededor contienen alguna parte de otro barco. En ese caso, se devuelve `True` y, por lo tanto, la solución no es válida. Caso contrario, recorreremos todas las posiciones, llegando a la conclusión de que esta función tiene complejidad

$$O\left(\sum_{i=1}^k b_i \cdot 9\right) = O\left(\sum_{i=1}^k b_i\right)$$

Si sumamos todas las complejidades....

$$f(n, m, k) = O\left(\sum_{i=1}^k b_i\right) + O\left(\sum_{i=1}^k b_i\right) + O(n \times m) + O\left(\sum_{i=1}^k b_i\right)$$

$$f(n, m, k) = O(n \times m) + O\left(3 \sum_{i=1}^k b_i\right)$$

La complejidad total del algoritmo es ...

$$f(n, m, k) = O(n \times m) + O\left(\sum_{i=1}^k b_i\right)$$

Como ven, la función verificador es polinómica, concluyendo que el problema en su versión de decisión de Batalla Naval está en NP.

3.3. ¿El problema en su versión de decisión está en NP-Completo?

Debemos comprobar que el problema está en NP-Completo. Un problema X es NP-Completo si cumple dos condiciones:

1. X está en NP.
2. Para todo problema Y en NP, existe una reducción polinómica de Y a X .

La primera condición ya la hemos comprobado en la sección anterior. Para la segunda condición, sería exhaustivo demostrarlo para todos los problemas en NP. Sin embargo, podemos demostrar que el problema de *Batalla Naval* es NP-Completo si reducimos un problema NP-Completo conocido al nuestro.

En este caso, utilizaremos el problema denominado *Bin Packing* en su versión unaria:

Bin Packing (versión unaria) Datos:

- Un conjunto de números $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$, cada uno representado en código unario.
- Una cantidad de contenedores B , también en código unario.
- Una capacidad C para cada contenedor, en código unario.

Se desea saber si es posible dividir U en B subconjuntos disjuntos (bins), tal que la suma de los elementos de cada subconjunto sea exactamente igual a C . Además, la suma total de los elementos de U es $C \times B$.

Reducción al problema de Batalla Naval :

Dado el conjunto U , transformamos cada elemento u_i en la longitud de un barco b_i y creamos una lista L que almacena las longitudes de los barcos. Cada u_i se convierte en b_i calculando la cantidad de unos que tiene.

Dimensiones del tablero: : - El tablero tendrá dimensiones $2 \times \text{len}(U)$ filas y C columnas:

- $2 \times \text{len}(U)$ filas: Cada fila impar va a contener un barco (representando un elemento de U), mientras que cada fila par se restringe a cero casilleros ocupados, reduciendo la probabilidad de adyacencia.
- C columnas: Si la longitud de un barco supera C , no va a poder guardarse en el tablero

Restricciones de filas y columnas: : - Las restricciones de filas alternarán entre consumir b_i casilleros (longitud del barco i) y cero casilleros para las filas siguientes. - Las restricciones de columnas serán de B casilleros por columna.

3.4. Backtracking

```
1 def cumplir_maxima_demanda(datos, tablero, resultado_final, resultado_actual,
2   indice_barco, posiciones_usadas):
3     if len(resultado_actual["posiciones"]) == len(datos["barcos"]):
4       return es_solucion(datos, resultado_final, resultado_actual)
5
6     if cortar_si_no_va_superar_resultado_final(datos, resultado_final,
7       resultado_actual, indice_barco):
8       return False
9
10    tamaño_barco = datos["barcos"][indice_barco]
11
12    if ((indice_barco) and (tamaño_barco != datos["barcos"][indice_barco-1])):
13      for indice_x in posiciones_usadas[tamaño_barco]["derecha"]:
14        posiciones_usadas[tamaño_barco]["derecha"][indice_x] = 0
15
16      for indice_y in posiciones_usadas[tamaño_barco]["abajo"]:
17        posiciones_usadas[tamaño_barco]["abajo"][indice_y] = 0
18    else:
19      posiciones_usadas = copy.deepcopy(posiciones_usadas)
20
21    i_inicial_derecha = posiciones_usadas[tamaño_barco]["derecha"]
22    i_inicial_abajo = posiciones_usadas[tamaño_barco]["abajo"]
23
24    if datos["posibles_posiciones"][tamaño_barco]["derecha"]:
25      for indice_x in datos["posibles_posiciones"][tamaño_barco]["derecha"]:
26        if datos["filas"][indice_x] < tamaño_barco:
27          continue
28
29        for i in range(i_inicial_derecha[indice_x], len(datos["posibles_posiciones"][tamaño_barco]["derecha"][indice_x])):
30          posiciones_usadas[tamaño_barco]["derecha"][indice_x] += 1
31
32          valores_y = datos["posibles_posiciones"][tamaño_barco]["derecha"][indice_x][i]
33
34          if es_valida_posicion_derecha(datos, tablero, tamaño_barco,
35            indice_x, valores_y):
36            poner_barco_derecha(datos, tablero, tamaño_barco, indice_x,
37              valores_y, resultado_actual)
38            if cumplir_maxima_demanda(datos, tablero, resultado_final,
39              resultado_actual, indice_barco+1, posiciones_usadas):
40              return True
41            sacar_barco_derecha(datos, tablero, tamaño_barco, indice_x,
42              valores_y, resultado_actual)
43
44    if datos["posibles_posiciones"][tamaño_barco]["abajo"]:
45      for indice_y in datos["posibles_posiciones"][tamaño_barco]["abajo"]:
46        if datos["columnas"][indice_y] < tamaño_barco:
47          continue
48
49        for i in range(i_inicial_abajo[indice_y], len(datos["posibles_posiciones"][tamaño_barco]["abajo"][indice_y])):
```

```
44         posiciones_usadas[tamano_barco]["abajo"][indice_y] += 1
45
46         valores_x = datos["posibles_posiciones"][tamano_barco]["abajo"][
47             indice_y][i]
48
49         if es_valida_posicion_abajo(datos, tablero, tamaño_barco, indice_y,
50             valores_x):
51             poner_barco_abajo(datos, tablero, tamaño_barco, indice_y,
52                 valores_x, resultado_actual)
53             if cumplir_maxima_demanda(datos, tablero, resultado_final,
54                 resultado_actual, índice_barco+1, posiciones_usadas):
55                 return True
56             sacar_barco_abajo(datos, tablero, tamaño_barco, indice_y,
57                 valores_x, resultado_actual)
58
59 resultado_actual["posiciones"].append([0])
60 if cumplir_maxima_demanda(datos, tablero, resultado_final, resultado_actual,
61     índice_barco+1, posiciones_usadas):
62     return True
63 resultado_actual["posiciones"].pop()
```

3.5. John Jellicoe

```
1
2 def get_index(lista, barco, aparicion):
3     cont = 0
4     for i, n in enumerate(lista):
5         if n == barco:
6             cont += 1
7             if cont == aparicion:
8                 return i
9
10
11 def contar_lista(lista):
12     total = 0
13     for i in lista:
14         total += i
15     return total
16
17
18 def barcos_adyacentes(tablero, coordenada, inicio, barco):
19     if coordenada[0] is None:
20         coordenadas = (inicio, coordenada[1])
21         for i in range(barco):
22             for f in range(-1, 2):
23                 if coordenadas[0] + f < 0 or coordenadas[0] + f >= len(tablero):
24                     continue
25                 for c in range(-1, 2):
26                     if coordenadas[1] + c + i < 0 or coordenadas[1] + c + i >= len(
27                         tablero[0]):
28                         continue
29                     elif tablero[coordenadas[0] + f][coordenadas[1] + c + i] is not
30                         None:
31                         return True
32     else:
33         coordenadas = (coordenada[0], inicio)
34         for i in range(barco):
35             for f in range(-1, 2):
36                 if coordenadas[0] + f + i < 0 or coordenadas[0] + f + i >= len(
37                     tablero):
38                     continue
39                 for c in range(-1, 2):
40                     if coordenadas[1] + c < 0 or coordenadas[1] + c >= len(tablero
41                         [0]):
42                         continue
43                     elif tablero[coordenadas[0] + f + i][coordenadas[1] + c] is not
44                         None:
45                         return True
```

```
41
42     return False
43
44
45 def posicionar_barco(barcos, valor_restriccion, restriccion_min, tablero,
46 coordenada):
47     for barco in barcos:
48         if barco <= valor_restriccion:
49             inicio = 0
50             while inicio + barco <= len(restriccion_min):
51                 entra = True
52                 for j in range(barco):
53                     if restriccion_min[inicio + j] <= 0:
54                         entra = False
55                         break
56                 if entra and not barcos_adyacentes(tablero, coordenada, inicio,
57 barco):
58                     return barco, inicio
59                 inicio += 1
60     return -1, -1
61
62
63 def solucion_naval_jj(tablero, barcos, restricciones_f, restricciones_c):
64     barcos_ordenados = sorted(barcos, reverse=True)
65     solucion = {}
66     colocado = False
67     demanda_total = contar_lista(restricciones_f) + contar_lista(restricciones_c)
68     max_r_fil = sorted(restricciones_f, reverse=True)
69     max_r_col = sorted(restricciones_c, reverse=True)
70     while len(barcos_ordenados) > 0 and len(max_r_fil) > 0 and len(max_r_col) > 0:
71         coordenadas = []
72         if colocado:
73             max_r_fil = sorted(restricciones_f, reverse=True)
74             max_r_col = sorted(restricciones_c, reverse=True)
75             colocado = False
76             if max_r_fil[0] >= max_r_col[0]:
77                 coordenada = restricciones_f.index(max_r_fil[0])
78                 barco, inicio = posicionar_barco(barcos_ordenados, max_r_fil[0],
79 restricciones_c, tablero, (coordenada, None))
80                 if barco == -1:
81                     max_r_fil.pop(0)
82                     continue
83                 for i in range(barco):
84                     coordenadas.append((coordenada, inicio + i))
85                     restricciones_c[inicio + i] -= 1
86                 restricciones_f[restricciones_f.index(max_r_fil[0])] -= barco
87             else:
88                 coordenada = restricciones_c.index(max_r_col[0])
89                 barco, inicio = posicionar_barco(barcos_ordenados, max_r_col[0],
90 restricciones_f, tablero, (None, coordenada))
91                 if barco == -1:
92                     max_r_col.pop(0)
93                     continue
94                 for i in range(barco):
95                     coordenadas.append((inicio + i, coordenada))
96                     restricciones_f[inicio + i] -= 1
97                 restricciones_c[restricciones_c.index(max_r_col[0])] -= barco
98
99         i = 1
100         while not colocado:
101             posicion = get_index(barcos, barco, i)
102             if posicion not in solucion:
103                 colocado = True
104                 solucion[posicion] = coordenadas.copy()
105                 for k in coordenadas:
106                     tablero[k[0]][k[1]] = posicion
107             i += 1
108         barcos_ordenados.remove(barco)
```

```
107     demanda_cumplida = 0
108     for i in solucion:
109         demanda_cumplida += len(solucion[i]) * 2
110     return solucion, demanda_cumplida, demanda_total
```