Feuille d'exercices 9 : Systèmes linéaires

Exercice 1. Déterminer la matrice échelonnée réduite par lignes équivalente par lignes aux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Déterminer la matrice échelonnée réduite par lignes équivalente par lignes aux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & -5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Résoudre les systèmes suivants d'inconnues x, y, z ou x, y, z, t :

1. $\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 2x + y + z = -1 \\ x + 11y - z = 5 \end{cases}$
3. $\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$

Exercice 4. Résoudre les systèmes suivants d'inconnues x, y, z ou x, y, z, t :

1. $\begin{cases} 2x - 3y + 6z + 2t = 5 \\ y - 2z + t = 1 \\ z - 3t = 2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x - 2y + z + t = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ 3x - y + t = 3 \\ 4x - 3y + z + 2t = 4 \end{cases}$

Exercice 5.
1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$, résoudre le système :
$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ ax + 3y = b \end{cases}$$
Interpréter géométriquement les résultats obtenus.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, résoudre le système :
$$\begin{cases} x + y + az = 0 \\ x + ay + z = 0 \\ ax + y + z = b \end{cases}$$
Interpréter géométriquement les résultats obtenus.

Exercice 6. Résoudre les systèmes suivants d'inconnues x, y, z ou x, y, z, t :

1. $\begin{cases} 2x + y - 3z = a \\ 3x + 2y + z = a + 3 \\ 7x + 4y - 5z = 2a + 5 \end{cases}$
2. $\begin{cases} mx + y + z + t = 1 \\ x + my + z + t = m \\ x + y + mz + t = m + 1 \end{cases}$

Exercice 7. Résoudre les systèmes suivants d'inconnues x, y, z ou x, y, z, t :

1. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = a \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ 5x + 2y - 2z = a \\ 4x + y - z = b \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x + y + z + t = 3 \\ x + 2y + z + t = 1 \\ x + y + 2z + t = 2 \\ x + y + z + 2t = 4 \\ 4x - 3y + 3z - 4t = a \\ 2x + 7y + 7z + 2t = b \end{cases}$
4. $\begin{cases} x + y + (2m - 1)z = 1 \\ mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 3(m + 1) \end{cases}$
5. $\begin{cases} x - my + m^2 z = m \\ mx - m^2 y + mz = 1 \\ mx + y - m^3 z = 1 \end{cases}$

Exercice 8. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq b$. On considère le système suivant, d'inconnues $x, y, z, t \in \mathbb{R}$:

$$(S) \begin{cases} x + ay + z + bt = 1 \\ ax + a^2 y + bz + b^2 t = c \\ a^2 x + a^3 y + b^2 z + b^3 t = c^2 \end{cases}$$

Montrer que l'ensemble des solutions de (S) est non vide si et seulement si $c \in \{a, b\}$.

Exercice 9. Résoudre le système suivant d'inconnue x_1, …, $x_n \in \mathbb{C}$:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 2a_1 \\ x_2 + x_3 = 2a_2 \\ \qquad \vdots \\ x_{n-1} + x_n = 2a_{n-1} \\ x_1 + x_n = 2a_n \end{array}\right.$$

Exercice 10. On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ pour qu'il existe une même droite contenue dans les trois plans définis par les équations suivantes :

$$\begin{array}{lll} (P_1) & : & (1-a)x - 2y + z = 0 \\ (P_2) & : & 3x - (1+a)y - 2z = 0 \\ (P_3) & : & 3x - 2y - (1+a)z = 0 \end{array}$$

Exercice 11. Déterminer le rang, le nombre d'inconnues principales et secondaires des systèmes homogènes associés aux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 9 & 11 & -2 & 19 \end{pmatrix}$$

Exercice 12. Discuter, suivant les valeurs de de $m \in \mathbb{R}$, le rang du système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} (2-m)x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + (5-m)y + 4z = 0 \\ 2x + 4y + (5-m)z = 0 \end{array}\right.$$

Exercice 13. 1. Résoudre la système :

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{array}\right.$$

2. On considère le système :

$$(S) \quad \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ 2x + y + 2z = 5 \\ x + 2y + z = 4 \end{array}\right.$$

Vérifier que $(1, 1, 1)$ est solution de (S) et en déduire toutes les solutions de (S).

Exercice 14. On note $E = \mathbb{R}^2$ et on se donne $\overrightarrow{u} = (a, b)$ et $\overrightarrow{v} = (c, d)$ deux vecteurs non nul et non colinéaires de E. On note $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la forme échelonnée réduite de A est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. En déduire que pour tout vecteur $\overrightarrow{w} \in E$, il existe un unique couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$.

Exercice 15. Soit $u_1, \ldots, u_n \in E = \mathbb{K}^n$. On suppose que :

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = (0, \ldots, 0) \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Montrer que :

$$\forall v \in E, \exists (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n, \ v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i.$$

Exercice 16. Soit $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p > n$, soient $u_1, \ldots, u_p \in E = \mathbb{K}^n$.

1. Montrer que :

$$\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \backslash \{(0, \ldots, 0)\}, \ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = 0.$$

2. En déduire qu'il existe $k \in [\![1, p]\!]$ tel que u_k s'écrive comme combinaison linéaire des autres vecteurs.