Corrigé de la feuille d'exercices 12

1 Limites de fonctions

Exercice 1. • cos n'a pas de limite en $+\infty$:
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = 2\pi n$ et $y_n = (2n+1)\pi$.
On sait que (x_n) et (y_n) divergent vers $+\infty$.
Mais, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = \cos(2n\pi) = 1$. Ainsi, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(y_n) = \cos((2n+1)\pi) = \cos(\pi) = -1$. Ainsi, $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers -1.
Ainsi, cos n'admet pas de limite en $+\infty$.

- De même, sin n'a pas de limite en $+\infty$:
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = 2n\pi$ et $y_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.
On sait que (x_n) et (y_n) divergent $+\infty$.
Mais, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = \sin(2n\pi) = 0$. Ainsi, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(y_n) = \sin\left(2n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$. Ainsi, $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
Ainsi, sin n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{\pi/2 + 2n\pi}$ et $v_n = \dfrac{1}{2n\pi}$.
On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0,\ v_n > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.
De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(u_n) = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \text{ et } f(v_n) = 2n\pi\sin(2n\pi) = 0$$

On a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n) = 0$.
Donc f n'a pas de limite à droite en 0.

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = \dfrac{1}{2n}$. La suite (x_n) converge vers 0.
De plus, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x_n) = 2n(-1)^{\lfloor 2n \rfloor} = 2n$. Ainsi, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
On peut donc conclure que f n'a pas de limite finie en 0.
En effet, si f admettait une limite finie $l \in \mathbb{R}$ en 0 alors on aurait $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, ce qui n'est pas le cas.
De plus, posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = \dfrac{1}{2n+1}$. La suite (y_n) converge vers 0.
De plus, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(y_n) = (2n+1)(-1)^{\lfloor 2n+1 \rfloor} = -(2n+1)$. Ainsi, $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.
Les suites $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ admettent donc deux limites différentes. Ainsi, f n'admet pas de limite en 0.

Exercice 4. Supposons que f admette une limite $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$.
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $T > 0$ une période de f. La suite $(x+nT)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, donc $(f(x+nT))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par T-périodicité de f, on a $f(x+nT) = f(x)$. Ainsi, la suite $(f(x+nT))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à $f(x)$, donc converge vers $f(x)$. Par unicité de la limite, on a : $f(x) = l$.
Ainsi, on a prouvé que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = l$ donc f est constante l.

Exercice 5. 1. On factorise par le terme prédominant.
Soit $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{e^{2x}+x+2}{e^x+e^{-x}} = e^x \dfrac{1+\frac{x}{e^x}+\frac{2}{e^x}}{1+e^{-2x}}$.
Or, par croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$.
Ainsi, par somme et quotient de limites, on obtient : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\frac{x}{e^x}+\frac{2}{e^x}}{1+e^{-2x}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.
Ainsi, par produit, on obtient : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x}+2x+7}{e^x+e^{-x}} = 1$

2. On utilise la quantité conjugué.
Soit $x < 0$, on a :

$$x + \sqrt{x^2-1} = \frac{x^2-(x^2-1)}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty} x + \sqrt{x^2-1} = 0$.

3. On a :
$$\frac{\tan(5x)}{\sin(2x)} = \frac{\sin(5x)}{5x} \times \frac{2x}{\sin(2x)} \times \frac{5x}{2x}$$
Or, on sait que $\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$ et $\lim_{y\to 0} \frac{\tan y}{y} = 1$ (limite du taux d'accroissement de sinus et tangente en 0, or les fonctions sinus et tangente sont dérivable en 0).
D'où par produit, $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(5x)}{\sin(2x)} = \frac{5}{2}$.
4. Soit $x \in]1, +\infty[$, on a $0 < \frac{1}{x} < 1$ donc $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$. Ainsi : $\forall x \in]1, +\infty[,\ x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$. On a donc $\lim_{x\to +\infty} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$.
5. On a $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 0$ puisque la fonction sin est dérivable en 0 et $\sin'(0) = \cos(0) = 1$.
De plus, la fonction arctan est continue et $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.
Ainsi, $\lim_{x\to 0} \arctan\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.
6. on a $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$. Or, de la dérivabilité de la fonction ln en 0, il vient que :
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$
Il s'ensuit, par composition des limites que $\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$ (car l'exponentielle est continue en 0).

Exercice 6. Soit $x > 1$, on a : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. Ainsi, $0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$.
De plus, $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ par définition de la partie entière. Ainsi, $2x - 1 < x + \lfloor x \rfloor \leq 2x$. On a donc $\frac{1}{2x} \leq x + \lfloor x \rfloor < \frac{1}{2x-1}$ (tous les termes sont strictement positifs).
D'où : $0 \leq \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x + \lfloor x \rfloor} < \frac{1}{2x-1}$. Or, $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{2x-1} = 0$. Ainsi, par théorème d'encadrement, $\lim_{x\to +\infty} \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x + \lfloor x \rfloor} = 0$.

Exercice 7. a. Il n'y a pas de forme indéterminée.
Par quotient de limites, on a : $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+1}{\sin^2(x)} = +\infty$.
b. On utilise la quantité conjuguée.
Soit $x \in [0, 2]$, on a :
$$\frac{(x+3-4)(\sqrt{2x+7}+3)}{(2x+7-9)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{\sqrt{2x+7}+3}{2\sqrt{x+3}+4}.$$
Ainsi, $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2)}{\sqrt{2x+7}-3} = \frac{3}{4}$.
c. On factorise numérateur et dénominateur par le terme prépondérant.
Soit $x > 0$, on a : $\frac{x^5 - 6x^2 + 1}{3x^5 + 2x^3 + 7} = \frac{1 - \frac{6}{x^3} + \frac{1}{x^5}}{3 + \frac{2}{x^2} + \frac{7}{x^5}}$.
Ainsi, par somme et quotient, $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^5 - 6x^2 + 1}{3x^5 + 2x^3 + 7} = \frac{1}{3}$.
d. Soit $x > 1$, on a :
$$\begin{aligned} x - \ln(x + \sqrt{x^2-1}) &= x - \ln(x + \sqrt{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}) \\ &= x - \ln(x) + \ln\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right) \\ &= x\left(1 - \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\ln\left(1 + \sqrt{\frac{1}{x^2}}\right)\right) \end{aligned}$$
Or, par croissance comparée, $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ d'où $\lim_{x\to +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\ln(1 + \sqrt{1 - x^{-2}})\right) = 1$.
Donc par produit, $\lim_{x\to +\infty} x - \ln(x + \sqrt{x^2-1}) = +\infty$.
e. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$, on a : $\frac{x^2 - x - 12}{x-4} = \frac{(x-4)(x+3)}{x-4} = x + 3$.
Ainsi, $\lim_{x\to 4} \frac{x^2 - x - 12}{x-4} = 7$.

f. Soit $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, on a :

$$\frac{\sqrt{x^3-2x^2+x}}{x-1} = \frac{\sqrt{x(x^2-2x+1)}}{x-1} = \frac{\sqrt{x(x-1)^2}}{x-1} = \frac{\sqrt{x}|x-1|}{x-1}$$

Ainsi, pour tout $x > 1$, on a : $\dfrac{\sqrt{x^3-2x^2+x}}{x-1} = \dfrac{\sqrt{x}(x-1)}{x-1} = \sqrt{x}$. Donc $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x^3-2x^2+x}}{x-1} = \sqrt{1} = 1$.

De plus, pour tout $x < 1$, on a : $\dfrac{\sqrt{x^3-2x^2+x}}{x-1} = \dfrac{-\sqrt{x}(x-1)}{x-1} = -\sqrt{x}$. Donc $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{x^3-2x^2+x}}{x-1} = -\sqrt{1} = -1$.

Ainsi, les limites à droite et à gauche sont distinctes. Donc, $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^3-2x^2+x}}{x-1}$ n'admet pas de limite en 1.

g. Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$x(e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{2}{x}} - 2) = \frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} + 2\frac{e^{\frac{2}{x}}-1}{\frac{2}{x}}.$$

Or, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{e^u-1}{u} = e^0 = 1$ par continuité de la fonction exponentielle en 0. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1+2 = 3$.

h. On a pour tout x suffisamment proche de 0 et différent de 0 :

$$\frac{\sin x - \sin 5x}{\sin x + \sin 5x} = \frac{1 - \frac{\sin 5x}{\sin x}}{1 + \frac{\sin 5x}{\sin x}}.$$

Or, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ De plus, $\dfrac{\sin(5x)}{\sin(x)} = \sin(5x) \times \dfrac{1}{\sin(x)} = 5\dfrac{\sin 5x}{5x} \times \dfrac{x}{\sin(x)}$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(5x)}{\sin(x)} = 5$.

Finalement, on a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \sin 5x}{\sin x + \sin 5x} = \dfrac{1-5}{1+5} = -\dfrac{2}{3}$

i. On a : $\dfrac{\sin^2 x - \sin^2 \alpha}{x^2-\alpha^2} = \dfrac{(\sin x - \sin\alpha)(\sin x + \sin\alpha)}{(x-\alpha)(x+\alpha)} = \dfrac{\sin x - \sin\alpha}{x-\alpha} \times \dfrac{\sin x + \sin\alpha}{x+\alpha}$.

Or, $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{\sin x - \sin\alpha}{x-\alpha} = \cos(\alpha)$ car sin est dérivable en α (taux d'accroissement) et $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{\sin x + \sin\alpha}{x+\alpha} = \dfrac{2\sin\alpha}{2\alpha}$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{\sin^2 x - \sin^2\alpha}{x^2-\alpha^2} = \dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\alpha}$.

j. On a :

$$\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{\sin x - \sin x \cos x}{x^3 \cos x} = \frac{\sin x}{x} \times \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Or, on a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3} = \dfrac{1}{2}$.

k. Soit $x > 0$, on a : $x \sin\dfrac{1}{x} = \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$.

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1$.

Ainsi, par composition, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\dfrac{1}{x} = 1$.

l. La fonction sin est bornée et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Ainsi, par produit, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.

m. On suppose $\alpha > 0$.

Soit $x > 0$, on a $\dfrac{b}{x} - 1 < \left\lfloor \dfrac{b}{x} \right\rfloor \leq \dfrac{b}{x}$ par définition de la partie entière, puis $\dfrac{b}{\alpha} - \dfrac{x}{\alpha} < \dfrac{x}{\alpha}\left\lfloor \dfrac{b}{x} \right\rfloor \leq \dfrac{b}{\alpha}$ en multipliant par $\dfrac{x}{\alpha} > 0$.

Or, $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{b}{\alpha} - \dfrac{x}{\alpha}\right) = \dfrac{b}{\alpha}$.

Ainsi, par théorème d'encadrement $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\alpha}\left\lfloor \dfrac{b}{x} \right\rfloor = \dfrac{b}{\alpha}$.

On raisonne de même si $\alpha < 0$ en changeant le sens des inégalités.

n. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) &= 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right) \\ &= 2\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(x) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(x)\right) \\ &= 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \\ &= -2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\frac{\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x)}{x - \frac{\pi}{3}} = -2\frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}.$$

Or, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x)}{x - \frac{\pi}{3}} = -2$.

Exercice 8. 1. f n'admet pas de limite en $+\infty$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = 2n\pi$ et $y_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent vers $+\infty$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = 2n\pi\sin(2n\pi) = 0$ et $f(y_n) = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Ainsi, $(f(x_n))$ converge vers 0 alors que $(f(y_n))$ tend vers $+\infty$.
Ainsi, f n'admet pas de limite en $+\infty$.

2. $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ est bornée et $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = \sin 0 = 0$ par continuité de la fonction sin en 0.
Ainsi, par produit, f tend vers 0 en 0.
3. f n'admet pas de limite en 0.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$.
On sait que (x_n) et (y_n) converge vers 0.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x_n) = \cos\left(\frac{1}{2n\pi}\right)\cos(2n\pi) = \cos\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = \cos(x_n)$.
Par continuité de cos en 0, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = \cos(0) = 1$.
De même, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f(y_n) = \cos\left(\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}\right)\cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Ainsi, $(f(y_n))$ converge vers 0.
Ainsi, f n'admet pas de limite en 0.
4. On raisonne par minoration.
Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $f(x) \geq \lfloor \tan x \rfloor > \tan x - 1$. Or, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\tan x - 1) = +\infty$.
Ainsi, par le théorème de minoration, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$.
5. D'après la question précédente, on sait que $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = +\infty$.
De plus, pour tout $x \in]\frac{\pi}{2}, \pi]$, $f(x) \leq \lfloor \tan x \rfloor \leq \tan(x) = \tan(x - \pi)$, par π-périodicité de la fonction tan.
Or, $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)} (x - \pi) = -\frac{\pi}{2}$.
Et $\lim\limits_{y \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan(y) = -\infty$.
Ainsi, par théorème de minoration, on a $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = -\infty$.
f n'admet donc pas de limite en $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 9. 1. Soit $x > 0$, $\int_x^{2x} \frac{dt}{t} = \ln\left(\frac{2x}{x}\right) = \ln(2)$.

2. Soit $t \in [1, +\infty[$, on a $t + \sqrt{t} \geq t$ donc $\frac{1}{t + \sqrt{t}} \leq \frac{1}{t}$. De plus,

$$0 \leq \frac{1}{t} - \frac{1}{t + \sqrt{t}} = \frac{\sqrt{t}}{t(t + \sqrt{t})} \leq \frac{\sqrt{t}}{t^2} = \frac{1}{t^{3/2}}.$$

3. Soit $x \geq 1$. Puisque $x \leq 2x$, on a :

$$0 \leq \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t + \sqrt{t}}\right) dt \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}} = \left[\frac{-2}{\sqrt{t}}\right]_x^{2x} = -\frac{2}{\sqrt{2x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{x}}$$

D'où :

$$0 \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{t} - \int_x^{2x} \frac{dt}{t+\sqrt{t}} \leq \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{x}}$$

on en déduit que :

$$0 \leq \ln(2) - f(x) \leq \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{x}}$$

4. On sait que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$. Ainsi, par théorème d'encadrement $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln(2)$.

2 Continuité

Exercice 10. 1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ (approximation décimale par défaut de x à la précision 10^{-n}). On a $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$. De plus, comme f et g sont continues sur $\mathbb{R}$, on a : $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$ et $\lim_{n\to+\infty} g(x_n) = g(x)$.
De plus, $(x_n))$ est une suite d'éléments de $\mathbb{Q}$. Ainsi, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(x_n) = g(x_n).$$

En passant à la limite dans cette égalité, on obtient : $f(x) = g(x)$.
Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient $f = g$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ (approximation décimale par défaut de x à la précision 10^{-n}).
On sait que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \mathbb{Q}$.
Ainsi, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(x_n) < g(x_n) \quad (1)$$

Or, $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ et f, g sont continues sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$ et $\lim_{n\to+\infty} g(x_n) = g(x)$.
Donc par passage à la limite dans l'inégalité (1), on obtient : $f(x) \leq g(x)$.
Ainsi, on a prouvé que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq g(x)$ donc $f \leq g$.

(c) Considérons $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & |x-\sqrt{2}| \end{array}$ et $\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2|x-\sqrt{2}| \end{array}$
Soit $x \in \mathbb{Q}$, $x - \sqrt{2} \neq 0$ car $\sqrt{2}$ est irrationnel. Ainsi, $|x-\sqrt{2}| > 0$ et donc $f(x) < g(x)$.
Donc : $\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) < g(x)$.
Cependant $f(\sqrt{2}) = g(\sqrt{2})$.
Ainsi, on n'a pas nécessairement : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) < g(x)$.

2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x < y$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$ (approximation décimale par excès de x à la précision 10^{-n}) et $y_n = \frac{\lfloor 10^n y \rfloor}{10^n}$ (approximation décimale par défaut de y à la précision 10^{-n}).
Posons $\epsilon = \frac{y-x}{3} > 0$ car $y > x$.
On sait que $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ et $\lim_{n\to+\infty} y_n = y$.
Ainsi, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N_1,\ |x_n - x| \leq \epsilon$.
Il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N_2,\ |y_n - y| \leq \epsilon$.
Posons $N = \max(N_1, N_2)$. On a :

$$\forall n \geq N, x_n \leq x + \frac{y-x}{3} \text{ et } y - \frac{y-x}{3} \leq y_n$$

Ainsi, on a :

$$\forall n \geq N, x_n \leq \frac{y+2x}{3} \text{ et } \frac{2y+x}{3} \leq y_n$$

Or, $x < y$ donc $(x+y)+x < (x+y)+y$ d'où $2x+y < x+2y$.
Ainsi, on a :

$$\forall n \geq N, x_n \leq \frac{y+2x}{3} < \frac{2y+x}{3} \leq y_n$$

Ainsi : $\forall n \geq N,\ x_n < y_n$.
De plus, on sait que (x_n) est croissante et (y_n) est décroissante par définition de ces suites.

Ainsi, pour tout $n \geq N$, $x_n \leq x_N < y_N \leq y_n$. Or, f est strictement croissante sur $\mathbb{Q}$ et (x_n), (y_n) sont deux suites d'éléments de $\mathbb{Q}$. Ainsi, pour tout $n \geq N$, on a :

$$f(x_n) \leq f(x_N) < f(y_N) \leq f(y_n) \quad (2)$$

Enfin, on a $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ et $\lim_{n\to+\infty} y_n = y$ et f est continues sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$ et $\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = f(y)$.
En passant à la limite dans (2), on obtient $f(x) \leq f(x_N) < f(y_N) \leq f(y)$. Ainsi, $f(x) < f(y)$.
On a donc prouvé que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y \implies f(x) < f(y)$.
Ainsi, f est strictement croissante.

Exercice 11.

- Soit $y \in \mathbb{R}$.
  - Si $y \in \mathbb{Q}$, posons $x = y+1$. On a $x \in Q$ et $f(x) = y+1-1 = y$.
  - Si $y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, on pose $x = y-1$. $x \notin Q$ (En effet, si $x \in Q$ alors $=y = x+1 \in Q$ absurde.). On a alors $f(x) = y-1+1 = y$.

  Ainsi, f est surjective.
- Soient $x, x' \in \mathbb{R}$, supposons $f(x) = f(x')$.
  - Si $x, x' \in \mathbb{Q}$ alors $x-1 = x'-1$ donc $x = x'$.
  - Si $x, x' \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ alors $x+1 = x'+1$ donc $x = x'$.
  - Si $x \in \mathbb{Q}, x' \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ alors $x-1 = x'+1$ donc $x' = x-2 \in \mathbb{Q}$ contradiction. Ce cas est donc impossible.
  - Si $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, x' \in \mathbb{Q}$ on prouve de même que ce cas est impossible

  Ainsi, $f(x) = f(x') \implies x = x'$.
  Donc f est injective.
- f est injective et surjective donc f est bijective.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = \dfrac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n} \in \mathbb{Q}$ et $x_n = \dfrac{\lfloor 10^n(x-\sqrt{2}\rfloor}{10^n} + \sqrt{2} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ (en effet, si $\dfrac{\lfloor 10^n(x-\sqrt{2}\rfloor}{10^n} + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ alors $\sqrt{2} = y_n - \dfrac{\lfloor 10^n(x-\sqrt{2}\rfloor}{10^n} \in \mathbb{Q}$ absurde).
  De plus, on a $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ et $\lim_{n\to+\infty} y_n = x - \sqrt{2} + \sqrt{2} = x$.
  Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = x_n - 1$ et $f(y_n) = y_n + 1$. Donc $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = x-1$ et $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = x+1$.
  Or $x+1 \neq x-1$.
  Ainsi, f n'admet pas de limite en x. Donc f n'est pas continue en x.
  Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 12.

1. $\forall x > 0$, $f(x) = 1$ donc $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$. En revanche : $\forall x < 0$, $f(x) = -1$ donc $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$.
   Ainsi, f n'admet pas de limite en 0 et n'est donc pas prolongeable pas continuité en 0.
2. Soit $x > 0$, on a $\dfrac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor \leq \dfrac{1}{x}$ donc $1 - x < x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor \leq 1$ (car $x > 0$). Par théorème d'encadrement, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$.
   Soit $x < 0$, on a de même $1 \leq x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor < 1 - x$ (on inverse les inégalités car $x < 0$). Ainsi, par théorème d'encadrement, $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. Ainsi f admet des limites à gauche et à droite égales en 0 qui sont égales, donc f admet une limite en 0 qui vaut 0. On peut donc prolonger f en 0 en posant $f(0) = 0$.
3. $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$ donc $\lim_{x\to 0^-} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.
   En revanche, $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim_{x\to 0^+} \exp\left(\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$.
   Ainsi, f n'admet pas de limite en 0 et n'est donc pas prolongeable par continuité en 0.
4. Soit $x > -1$, $f(x) = (1+x)^{1/x} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$. Or, on sait que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ car $x \to \ln(1+x)$ est dérivable en 0. Ainsi, $\lim_{x\to 0} f(x) = e$. f est donc prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = e$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \dfrac{1}{2\pi n}$ et $y_n = \dfrac{1}{2n+1)\pi}$. Les suites (x_n) et (y_n) convergent vers 0. Or, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(x_n) = \cos(2\pi n) = 1$ donc $(f(x_n))$ converge vers 1.
   En revanche : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(y_n) = \cos(2n\pi + \pi) = \cos(\pi) = -1$ donc $(f(y_n))$ converge vers -1.
   Ainsi, f n'admet pas de limite en 0 et f n'est donc pas prolongeable pas continuité en 0.

6. $x \mapsto \cos(\dfrac{1}{x})$ est bornée et $x \mapsto x$ tend vers 0 en 0 donc par produit, f tend vers 0 en 0.
   f est prolongeable pas continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$. La suite (x_n) converge vers 0 et on a :
   $\forall n \in \mathbb{N},\ f\left(\dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}\right) = \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$.
   Donc f n'admet pas de limite finie en 0. f n'est donc pas prolongeable par continuité en 0.

Exercice 13. 1. f est immédiatement continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ car la fonction partie entière l'est, puis comme différence et produit de fonctions qui le sont.
Soit $n \in \mathbb{Z}$. Etudions la continuité de f en n.
On sait que $f(n) = 0$.
De plus : $\forall x \in]n, n+1[,\ f(x) = x - n - (x-n)^2$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to n^+} f(x) = 0 = f(n)$.
De même, on a : $\forall x \in [n-1, n[,\ f(x) = x - n + 1 - (x-n+1)^2$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to n^-} f(x) = 1 - 1 = f(n)$. Ainsi, les limites à gauche et droite en n sont égales à $f(n)$. Ainsi, f est continue en n.
En conclusion, f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. $x \to \sin(\frac{1}{x})$ est bornée donc $\lim\limits_{x\to 0^+} x\sin(\frac{1}{x}) = 0 = f(0)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} x\sin(\frac{1}{x}) = 0 = f(0)$.
Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0.
De plus, f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ en tant que produit et composée de fonctions continues. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14. f est immédiatement continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ car la fonction partie entière l'est, puis comme somme, produit et composée de fonctions qui le sont.
Soit $n \in \mathbb{Z}$. Etudions la continuité de f en n.
On a $f(n) = n + \sqrt{n-n} = n$.
On a : $\forall x \in]n, n+1[,\ f(x) = n + \sqrt{x-n}$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to n^+} f(x) = n = f(n)$.
De même, on a : $\forall x \in [n-1, n[,\ f(x) = n - 1 + \sqrt{x-n+1}$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to n^-} f(x) = n - 1 + \sqrt{1} = n = f(n)$.
Ainsi, les limites à gauche et droite de f en n valent $f(n)$ donc f est continue en n.
En conclusion, f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15. On raisonne par l'absurde.
Supposons qu'il existe $a, b \in I$ tels que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe c compris entre a et b tel que $f(c) = 0$. Or, $c \in I$ car I est un intervalle. Absurde !
Ainsi f est de signe strict constant.

Exercice 16. Posons $f : x \mapsto x^{17} - x^{11} - 1$.
f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que fonction polynomiale. De plus, on a $f(0) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $0 \in [-1, +\infty[$.
Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaire, il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(c) = 0$. Ainsi, $c^{17} = c^{11} + 1$. L'équation admet donc au moins une solution dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 17. La fonction $\dfrac{g}{f}$ est continue sur I (puisque f et g le sont et f ne s'annule pas) et on a : $\forall x \in I,\ \left|\dfrac{g(x)}{f(x)}\right| = 1$.
Ainsi :
$$\forall x \in I,\ \frac{g(x)}{f(x)} = 1 \text{ ou } \frac{g(x)}{f(x)} = -1. \quad (*)$$
Montrons que $\left(\forall x \in I,\ \dfrac{g(x)}{f(x)} = 1\right)$ ou $\left(\forall x \in I,\ \dfrac{g(x)}{f(x)} = -1\right)$.
Raisonnons par l'absurde.
Supposons qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $\dfrac{g(x_0)}{f(x_0)} = 1$ et qu'il existe $x_1 \in I$ tel que $\dfrac{g(x_1)}{f(x_1)} = -1$.
Alors, 0 est compris entre $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x_0)$ et $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x_1)$ et $\dfrac{g}{f}$ est continue sur I donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe x_3 compris entre x_0 et x_1 tel que $\dfrac{g(x_3)}{f(x_3)} = 0$. Contradiction avec $(*)$.
Ainsi : $\left(\forall x \in I,\ \dfrac{g(x)}{f(x)} = 1\right)$ ou $\left(\forall x \in I,\ \dfrac{g(x)}{f(x)} = -1\right)$.
D'où : $(\forall x \in I,\ g(x) = f(x))$ ou $(\forall x \in I,\ g(x) = -f(x))$.
Ainsi, $g = f$ ou $g = -f$.

Exercice 18. Raisonnons par l'absurde et supposons que f prenne au moins deux valeurs $a < b$. Comme f est continue sur I, par le théorème des valeurs intermédiaires, f prend alors toutes les valeurs comprises entre a et b, soit une infinité de valeurs. Absurde.
Ainsi, f est constante.

Exercice 19.

1. Posons $g : x \mapsto f(x) - x$. g est continue sur $[a, b]$ et on a $g(a) = f(a) - a \geq 0$ (car $f(a) \in [a, b]$) et $g(b) = f(b) - b \leq 0$ (car $g(b) \in [a, b]$). Ainsi, $0 \in [g(b), g(a)]$ donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$. On a alors $f(c) = c$. Ainsi f admet un point fixe dans $[a, b]$.
2. Comme f est continue sur le segment $[a, b]$ donc f est bornée et atteint ses bornes. Ainsi, il existe $(c, d) \in [a, b]^2$ tels que :
$$\forall x \in [a, b],\ f(c) \leq f(x) \leq f(d)$$
Ainsi, $f([a, b]) = [f(c), f(d)]$. Or, $[a, b] \subset f([a, b])$. Ainsi, $[a, b] \subset [f(c), f(d)]$. Donc : $\forall x \in [a, b]$, $f(c) \leq x \leq f(d)$.
En particulier, on a : $f(c) \leq c \leq f(d)$ et $f(c) \leq d \leq f(d)$.
Posons $h : x \mapsto f(x) - x$.
On a $h(c) \leq 0$ et $h(d) \geq 0$.
Or, h est continue sur $[c, d]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in [c, d] \subset [a, b]$ tel que $h(x_0) = 0$. Ainsi, $f(x_0) = x_0$.

Exercice 20.

$$\begin{aligned} f \text{ strictement monotone} \ &\text{ssi } f \text{ est strictement croissante ou } f \text{ est strictement décroissante} \\ &\text{ssi : } (\forall x, y \in I,\ x < y \implies f(x) < f(y)) \quad \text{ou} \quad (\forall x, y \in I,\ x < y \implies f(x) > f(y)) \end{aligned}$$

On raisonne par l'absurde. Supposons que f n'est pas strictement monotone.
Alors, il existe $x_1, y_1 \in I$ tels que $x_1 < y_1$ et $f(x_1) \geq f(y_1)$ et il existe $x_2, y_2 \in I$ tels que $x_2 < y_2$ et $f(x_2) \geq f(y_2)$.
Posons $\begin{array}{rccl} \phi : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & f(x_1 + t(x_2 - x_1)) - f(y_1 + t(y_2 - y_1)) \end{array}$.
On sait que pour tout $t \in [0, 1]$, $x_1 + t(x_2 - x_1) \in [x_1, x_2] \subset I$ car I est un intervalle.
De même, pour tout $t \in [0, 1]$, $y_1 + t(y_2 - y_1) \in [y_1, y_2] \subset I$.
Ainsi, ϕ est bien définie sur $[0, 1]$.
De plus, ϕ est continue sur $[0, 1]$ en tant que composée de fonctions continues.
Par ailleurs, $\phi(0) = f(x_1) - f(y_1) \geq 0$ et $\phi(1) = f(x_2) - f(y_2) \leq 0$.
Ainsi, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_0 \in [0, 1]$ tel que $\phi(t_0) = 0$.
Posons $x_0 = x_1 + t_0(x_2 - x_1) = (1 - t_0)x_1 + t_0 x_2$ et $y_0 = y_1 + t_0(y_2 - y_1) = (1 - t_0)y_1 + t_0 y_2$.

- Si $t_0 \in]0, 1[$, on a $x_1 < y_1$ donc $(1 - t_0)x_1 < (1 - t_0)y_1$ car $1 - t_0 > 0$. Et $x_2 < y_2$ donc $t_0 x_2 < t_0 y_2$.
D'où $x_0 < y_0$. Ainsi, $x_0 \neq y_0$.
- Si $t_0 = 0$, on a $x_0 = x_1$ et $y_0 = y_1$ donc $x_0 < y_0$ d'où $x_0 \neq y_0$.
- Si $t_0 = 1$, on a $x_0 = x_2$ et $y_0 = y_2$ donc $x_0 < y_0$ d'où $x_0 \neq y_0$.

Or, $\phi(t_0) = 0$ donc $f(x_0) = f(y_0)$. Contradiction avec le fait que f est injective.
Ainsi, f est strictement croissante ou strictement décroissante donc f est strictement monotone.

Exercice 21. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$.
Considérons la fonction $\begin{array}{rccl} h : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) - \lambda g(x) \end{array}$.
h est continue sur $[0, 1]$ en tant que combinaison linéaire de fonctions continues.
De plus, $h(0) = f(0) - \lambda g(0) = -\lambda \leq 0$ et $h(1) = f(1) - \lambda g(1) = 1 > 0$.
Ainsi, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in [0, 1]$ tel que $h(x) = 0$ donc $f(x) = \lambda g(x)$.
On a donc prouvé que : $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+,\ \exists x \in [0, 1], f(x) = \lambda g(x)$.

Exercice 22. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, posons $g_n : x \mapsto f\left(x + \dfrac{1}{n}\right) - f(x)$.
Montrons que g change de signe.
Raisonnons par l'aburde et supposons que g garde un signe strict constant. Quitte à remplacer f et $-f$, on suppose que g est strictement positive sur $\left[0, \dfrac{n-1}{n}\right]$.
On a alors : $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ g\left(\dfrac{k}{n}\right) > 0$.
D'où :
$$\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) > 0.$$

Or :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1}\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] \\ &= f\left(\frac{n}{n}\right) - f(0) \quad \text{par télescopage} \\ &= f(1) - f(0) \\ &= 0\end{aligned}$$

Absurde.
Ainsi, g change de signe. De plus, g est continue sur $\left[0, \frac{n-1}{n}\right]$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c_n \in$ \$ $\left[0, \frac{n-1}{n}\right] \subset [0,1]$ tel que $g(c_n) = 0$.
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x \in [0,1], f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x)$.

Exercice 23. Comme $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |x| \leq \eta \implies f(x) \geq f(1) \quad (1).$$

De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, donc il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x \geq A \implies f(x) \geq f(1) \quad (2).$$

- Si $\eta \geq A$ alors : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \geq f(1)$.
  f admet donc un minimum en 1.
- Supposons $\eta < A$.
  f est continue sur le segment $[\eta, A]$ donc f est bornée et atteint ses bornes. Ainsi, il existe $c \in [\eta, A]$ tel que :

  $$\forall x \in [\eta, A],\ f(c) \leq f(x).$$

  Ainsi, on en déduit que :

  $$\forall x \in [0, \eta],\ f(x) \geq f(1) \geq \min(f(c), f(1))$$
  $$\forall x \in [A, +\infty[,\ f(x) \geq f(1) \geq \min(f(c), f(1))$$
  $$\forall x \in [\eta, A],\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \geq f(c) \geq \min(f(c), f(1))$$

  Ainsi, on a :

  $$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \geq \min(f(c), f(1)) = f(\alpha).$$

  avec $\alpha = c$ ou $\alpha = 1$ donc $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Finalement, f admet un minimum en $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 24. Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$, il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \leq B,\ |f(x) - b| \leq 1$.
Ainsi :

$$\forall x \leq B,\ |f(x)| = |f(x) - b + b| \leq |b| + 1.$$

Ainsi, f est bornée sur $]-\infty, B]$.
De même, comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \geq A,\ |f(x) - a| < 1$.
Ainsi :

$$\forall x \geq A,\ |f(x)| = |f(x) - a + a| \leq |a| + 1.$$

Donc f est bornée sur $[1, +\infty[$.

- Si $B \geq A$, f est bornée sur $]-\infty, B]$ et sur $[A, +\infty[$ donc f est bornée sur $\mathbb{R}$.
- Si $B < A$, f est continue sur le segment $[B, A]$ donc est bornée sur $[B, A]$. Comme f était déjà bornée sur $]-\infty, B]$ et sur $[A, +\infty[$, f bornée sur $\mathbb{R}$.

f n'atteint pas forcément ses bornes :
Posons $\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{1+|x|} \end{array}$.
On a $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 1$ et $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0$. La borne inférieure n'est jamais atteinte.

Exercice 25. Posons $h = g - f$.
h est continue sur $[0,1]$ donc est bornée et atteint ses bornes.
Ainsi, il existe $a \in [0,1]$ tel que $h(a) = \min\limits_{[0,1]} h$.
Or, $a \in [0,1]$. Ainsi, $g(a) - f(a) > 0$.
Posons $m = h(a)$. On a $m > 0$ et : $\forall x \in [0,1]$, $h(x) \geq m$. Donc : $\forall x \in [0,1]$, $g(x) \geq f(x) + m$.

Exercice 26. Si f est bornée alors, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq M$.
Ainsi, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|(f \circ g)(x)| = |f(g(x))| \leq M$.
Donc, $f \circ g$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
De plus, $f(\mathbb{R}) \subset [-M, M]$. Or, g est continue sur le segment $[-M, M]$ donc est bornée sur $[-M, M]$. Ainsi, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall y \in [-M, M]$, $|g(y)| \leq A$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $|(g \circ f)(x)| = |g(f(x))|$. Or, $f(x) \in [-M, M]$, donc $|(g \circ f)(x)| \leq A$.
On a donc prouvé que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|(g \circ f)(x)| \leq A$.
D'où $g \circ f$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 27. Indication : Justifier et utiliser le fait que la borne supérieure sur $[a; b]$ est atteinte. Traiter les cas où elle est atteinte sur $]a, b[$ puis en a ou en b.

f est continue sur $[a, b]$ donc est bornée et atteint ses bornes. Ainsi, il existe $x_0 \in [a, b]$ et $x_1 \in [a, b]$ tel que : $\forall x \in [a, b]$, $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ c'est à dire $\sup\limits_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_1)$ et $\inf\limits_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_0)$.

De plus, f est bornée sur $]a, b[$ car bornée sur $[a, b]$ et $]a, b[\neq \emptyset$ donc $\sup\limits_{x \in]a,b[} f(x)$ et $\inf\limits_{x \in]a,b[} f(x)$ existent.

Comme $]a, b[\subset [a, b]$, on sait déjà que : $\forall x \in]a, b[,\ f(x) \leq \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. Donc $\sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ est un majorant de f sur $]a, b[$.
Ainsi :

$$\sup_{x \in]a,b[} f(x) \leq \sup_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_1).$$

De même : $\forall x \in]a, b[,\ f(x) \geq \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. Donc $\inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ est un minorant de f sur $]a, b[$.
Ainsi :

$$\inf_{x \in]a,b[} f(x) \geq \inf_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_0).$$

- Si $x_1 \in]a, b[$, alors, $f(x_1) \leq \sup\limits_{x \in]a,b[} f(x)$ par définition de la borne supérieure. Donc $f(x_1) = \sup\limits_{x \in]a,b[} f(x)$.
- Si $x_1 = a$ alors on pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = x_1 + \dfrac{1}{n}$. (x_n) est une suite d'éléments de $]a, b[$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) \leq \sup\limits_{x \in]a,b[} f(x)$. Or, f est continue sur $[a, b]$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_1$. Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x_1)$. D'où par passage à la limite dans les inégalités, on obtient : $f(x_1) \leq \sup\limits_{x \in]a,b[} f(x)$ d'où $f(x_1) = \sup\limits_{x \in]a,b[} f(x)$ et on a de nouveau l'égalité souhaitée.
- Si $x_1 = b$ alors on pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = x_1 - \dfrac{1}{n}$. (y_n) est une suite d'éléments de $]a, b[$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(y_n) \leq \sup\limits_{x \in]a,b[} f(x)$. Or, f est continue sur $[a, b]$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = x_1$. Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(y_n) = f(x_1)$. Par passage à la limite dans les inégalités, on obtient : $f(x_1) \leq \sup\limits_{x \in]a,b[} f(x)$ d'où $f(x_1) = \sup\limits_{x \in]a,b[} f(x)$ et on a de nouveau l'égalité souhaitée.

On peut donc conclure que l'on a bien : $\sup\limits_{x \in]a,b[} f(x) = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.
On procède exactement de la même manière pour prouver l'égalité : $\inf\limits_{x \in]a,b[} f(x) = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

Exercice 28.

1. On pose : $\begin{array}{rccl} u_x : & [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & f(t) + xg(t) \end{array}$.
   u_x est continue sur $[-1, 1]$ en tant que combinaison linéaire de fonctions continues. Ainsi, u_x est bornée sur $[-1, 1]$ et atteint ses bornes. En particulier, $M(x) = \sup\limits_{t \in [-1,1]} (u_x(t))$ est bien définie et il existe $t_x \in [-1, 1]$ tel que $M(x) = u_x(t_x) = f(t_x) + xg(t_x)$.
2. Soient $h > 0$ et $x \in \mathbb{R}$.
   Soit $t \in [-1, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} u_{x+h}(t) &= f(t) + (x+h)g(t) = u_x(t) + hg(t) \\ &\leq M(x) + hg(t) \leq M(x) + h \sup_{t \in [-1,1]} (g(t)) \end{aligned}$$

$M(x)+h \sup_{t\in[-1,1]}(g(t))$ est un majorant de $\{u_{x+h}(t), t\in[-1,1]\}$. Il est donc supérieur au plus petit des majorants.
Ainsi, $M(x+h) \leq M(x) + h \sup_{t\in[-1,1]}(g(t))$.
Pour la minoration :
Comme $t_x \in [-1,1]$ et $M(x+h) = \sup_{t\in[-1,1]}(u_{x+h}(t))$, on a :

$$M(x+h) \geq u_{x+h}(t_x) = f(t_x) + (x+h)g(t_x) = f(t_x) + xg(t_x) + hg(t_x) = M(x) + hg(t_x)$$

D'où

$$M(x+h) \geq M(x) + h \inf_{t\in[-1,1]}(g(t)$$

3. D'après la question précédente, on a :

$$\forall (x,h) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*,\ h \inf_{t\in[-1,1]}(g(t)) \leq M(x+h) - M(x) \leq h \sup_{t\in[-1,1]}(g(t)).$$

Posons : $K = \max\left(\left|\inf_{t\in[-1,1]}(g(t))\right|, \left|\sup_{t\in[-1,1]}(g(t))\right|\right)$, on a :

$$\forall (x,h) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*,\ -Kh \leq M(x+h) - M(x) \leq Kh.$$

Ainsi :

$$\forall (x,h) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*,\ |M(x+h) - M(x)| \leq Kh.$$

Soient $x, a \in \mathbb{R}$.
- si $a = x$, l'inégalité est immédiate.
- si $a > x$, on pose $h = a - x > 0$, on a alors : $|M(x+h) - M(x)| \leq Kh$ d'où $|M(a) - M(x)| \leq K(a-x)$ donc $|M(a) - M(x)| \leq K|x-a|$ car $|x-a| = a-x$.
- si $x > a$, on pose $h = x - a > 0$, on a alors : $|M(a+h) - M(a)| \leq Kh$ d'où $|M(x) - M(a)| \leq K(x-a)$ donc $|M(x) - M(a)| \leq K|x-a|$ car $|x-a| = x-a$ et $|M(x) - M(a)| = |M(a) - M(x)|$.

On a donc prouvé que :

$$\forall (a,x) \in \mathbb{R}^2,\ |M(x) - M(a)| \leq |x-a|$$

Soit $a \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{x\to a} M(x) = M(a)$ donc M est continue en a.
Ceci étant vraie pour tout $a \in \mathbb{R}$ donc M est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 29. 1. f est dérivable sur $]0,1[$ en tant que somme de fonctions dérivables (les dénominateurs ne s'annulant pas) et on a :

$$\forall x \in]0,1[,\ f'(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2} < 0.$$

Ainsi, f est strictement décroissante sur $]0,1[$.
De plus, f est continue sur $]0,1[$.
Ainsi, f est bijective de $]0,1[$ sur $\left]\lim_{x\to1} f(x), \lim_{x\to0} f(x)\right[=]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$.

2. f est strictement décroissante et continue sur $]0,1[$. Ainsi, f^{-1} est continue sur $f(]0,1[) = \mathbb{R}$. Or, $\lim_{n\to+\infty} 2^{-n} = 0$.
Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} f^{-1}(2^{-n}) = f^{-1}(0)$.
Il nous reste à déterminer $f^{-1}(0)$.
Soit $x \in]0,1[$,

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = 0 \\ &\iff \frac{1}{x} = -\frac{1}{x-1} \\ &\iff x - 1 = -x \\ &\iff x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, $f^{-1}(0) = \frac{1}{2}$ d'où $\lim_{n\to+\infty} f^{-1}(2^{-n}) = f^{-1}(0) = \frac{1}{2}$.

Exercice 30. 1. f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on a $\frac{1}{x} \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. De plus :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x} + 1} \right| | \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - x}{1 + x} \right| | \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| | \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$.

2. ϕ est dérivable sur $]-1, 1[$. Soit $x \in]-1, 1[$, on a : $\phi(x) = \frac{1}{2} \ln |x - 1| - \frac{1}{2} \ln |x + 1| = \frac{1}{2} \ln(1 - x) - \frac{1}{2} \ln(1 + x)$.
   Donc $f'(x) = \frac{-1}{2(1 - x)} - \frac{1}{2(1 + x)} < 0$.
   Ainsi, ϕ est strictement décroissante et continue sur $]-1, 1[$.
   Donc ϕ réalise une bijection de $]-1, 1[$ sur $]\lim\limits_{x \to -1} \phi(x), \lim\limits_{x \to 1} \phi(x)[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.
3. Par propriété des fonctions réciproques, on a : $\forall y \in]-1, 1[,\ \phi^{-1}(\phi(y)) = y\ (*)$.
   Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,
   - si $x \in]-1, 1[$, avec $(*)$ on a : $\phi^{-1}(f(x)) = x$.
   - si $x \in \mathbb{R} \setminus]-1, 1[$, alors $|x| > 1$ donc $\left|\frac{1}{x}\right| < 1$. Ainsi, $\frac{1}{x} \in]-1, 1[$.
     Donc $\phi^{-1}(f(x)) = \phi^{-1}\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{x}$ avec $(*)$.

   Donc finalement : $$\begin{array}{rccl} \phi^{-1} \circ f : & \mathbb{R} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} x & \text{si } |x| < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } |x| > 1 \end{cases} \end{array}.$$

3 Equations fonctionnelles

Exercice 31. Raisonnons par analyse synthèse :

Analyse :

Supposons qu'il existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) \quad (*)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que $f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

- Pour $n = 0$, $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f\left(\frac{x}{2^0}\right) = f(x)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$.
  D'après $(*)$, on a $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$.
  D'où par hypothèse de récurrence : $f(x) = f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$
- Ainsi, on a prouvé que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right) \quad (**)$.

Or, la suite $(\frac{x}{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 et f est continue en 0 donc $f\left(\frac{x}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(0)$.
Ainsi, en passant à la limite dans l'égalité $(**)$, on obtient : $f(x) = f(0)$.
Ainsi, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(0)$.
Donc, la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.

Synthèse :

Les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$ sont bien continues en 0 et vérifient bien l'équation souhaitée.

Conclusion :

L'ensemble solution est l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.

Exercice 32. Raisonnons par analyse synthèse :
Analyse :
Supposons qu'il existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 et telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(3x) = f(x)$.
En appliquant l'hypothèse à $\dfrac{x}{3}$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f\left(\frac{x}{3}\right) \quad (*).$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.
Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x) = f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.

- Pour $n = 0$, $f\left(\dfrac{x}{3^n}\right) = f\left(\dfrac{x}{3^0}\right) = f(x)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $f(x) = f\left(\dfrac{x}{3^n}\right)$.
  D'après $(*)$, on a $f\left(\dfrac{x}{3^n}\right) = f\left(\dfrac{x}{3^{n+1}}\right)$.
  D'où par hypothèse de récurrence : $f(x) = f\left(\dfrac{x}{3^{n+1}}\right)$
- Ainsi, on a prouvé que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = f\left(\dfrac{x}{3^n}\right) \quad (**)$.

Or, la suite $(\dfrac{x}{3^n})$ converge vers 0. Ainsi, comme f est continue en 0, $f\left(\dfrac{x}{3^n}\right)$ converge vers $f(0)$.
Ainsi, en passant à la limite dans l'égalité $(**)$, on obtient : $f(x) = f(0)$.
Ainsi, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(0)$.
Donc la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.
Synthèse :
Les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$ sont bien continues en 0 et vérifient bien l'équation souhaitée.
Conclusion :
L'ensemble solution est l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.

Exercice 33. Raisonnons par analyse-synthèse :
Analyse : Supposons qu'il existe f continue sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)^2 = f(x)$.
On a alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)(f(x) - 1) = 0$. Donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \in \{0, 1\}$.
Montrons que f est constante en raisonnant pas l'absurde.
Supposons qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(a) = 0$ et $f(b) = 1$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe c compris entre a et b tel que $fc) = \dfrac{1}{2}$. Absurde.
Ainsi, f est constante égale à 0 ou à 1.
Synthèse :
La fonction constante égale à 0 est continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)^2 = 0^2 = 0 = f(x)$.
Ainsi, la fonction constante égale à 0 est solution.
De même, la fonction constante égale à 1 est solution.
Conclusion :
Les solutions du problème sont la fonction constante égale à 0 et la fonction constante égale à 1.

Exercice 34. Raisonnons par analyse-synthèse :
Analyse :
Supposons qu'il existe $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x^2) = f(x) \quad (*)$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ f(x) = f\left(x^{2^n}\right)$$

- Pour $n = 0$, $f\left(x^{2^n}\right) = f(x^1) = f(x)$
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $f(x) = f\left(x^{2^n}\right)$.
  En appliquant $(*)$ à x^{2^n}, on obtient : $f\left(x^{2^n}\right) = f\left((x^{2^n})^2\right) = f\left(x^{2^n \times 2}\right) = f\left(x^{2^{n+1}}\right)$.
  Ainsi, par hypothèse de récurrence, on obtient : $f(x) = f\left(x^{2^{n+1}}\right)$
- Ainsi, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = f\left(x^{2^n}\right) \qquad (1)$.

Si $x \in [0, 1[$, $\left(x^{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et f est continue en 0 donc $\left(f\left(x^{2^n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(0)$.
En passant à la limite dans (1), on obtient : $f(x) = f(0)$.
Ainsi : $\forall x \in [0, 1[,\ f(x) = f(0)$.

En appliquant $(*)$ à $\sqrt{x} = x^{2^{-1}}$, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = f\left(x^{2^{-1}}\right) \quad (**)$.
Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ f(x) = f\left(x^{2^{-n}}\right)$$

- Pour $n = 0$, $f\left(x^{2^{-n}}\right) = f(x^1) = f(x)$
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $f(x) = f\left(x^{2^{-n}}\right)$.
  En appliquant $(**)$ à $x^{2^{-n}}$, on obtient : $f\left(x^{2^{-n}}\right) = f\left((x^{2^{-n}})^{2^{-1}}\right) = f\left(x^{2^{-n}\times 2^{-1}}\right) = f\left(x^{2^{-(n+1)}}\right)$.
  Ainsi, par hypothèse de récurrence, on obtient : $f(x) = f\left(x^{2^{-n}}\right)$
- Ainsi, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = f\left(x^{2^{n}}\right) \qquad (2)$.

Si $x \in]1, +\infty[$, $\left(x^{2^{-n}}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\exp\left(\dfrac{1}{2^n}\ln(x)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 et f est continue en 1 donc $\left(f\left(x^{2^{-n}}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(1)$.
En passant à la limite dans (2), on obtient : $f(x) = f(1)$.
Ainsi : $\forall x \in]1, +\infty[,\ f(x) = f(1)$.
De plus, comme : $\forall x \in [0, 1[,\ f(x) = f(0)$ et f est continue en 1, ainsi on $f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(0)$.
D'où : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = f(0)$.
Ainsi, f est constante.
Synthèse :
Soit f une fonction constante sur $\mathbb{R}$. Alors, f est continue sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x^2) = f(0) = f(x)$.
Donc f est bien solution.
Conclusion :
L'ensemble des solutions de ce problème est l'ensemble des fonctions constantes.

Exercice 35. 1. Raisonnons par analyse-synthèse.
Analyse :
Supposons qu'il existe $f; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ et vérifiant tel que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y)$$

- Préliminaire :
  Montrons que :
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(nx) = nf(x)$$
  Soit $x \in \mathbb{R}$. Procédons par récurrence.
  - Pour $n = 0$, en prenant $x = y = 0$ dans $(*)$, on trouve : $f(0) = 2f(0)$ d'où $f(0)$. Ainsi, la propriété est vérifiée.
  - Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $f(nx) = nf(x)$.
    On a alors $f((n + 1)x) = f(nx + x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n + 1)f(x)$.
    Ainsi, la propriété est vraie au rang $n + 1$.
  - Ainsi, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = nf(x)$.

  On a donc bien prouvé que :
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(nx) = nf(x)$$
  Nous allons procéder par étapes pour déterminer f sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ puis $\mathbb{R}$.
- **Détermination sur $\mathbb{N}$:**
  D'après le point précédent, on a :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = nf(1).$$
- **Détermination sur $\mathbb{Z}$:**
  On remarque que f est impaire.
  $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.
  Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $0 = f(0) = f(x - x) = f(x) + f(-x)$.
  Ainsi, $f(-x) = -f(x)$.
  Ainsi, f est impaire.
  Soit $n \in \mathbb{Z}$.
  Si $n \in \mathbb{N}$, alors on a : $f(n) = nf(1)$ d'après le point précédent.
  Si $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, on a $f(n) = -f(-n)) = -(-nf(1))$ car $-n \in \mathbb{N}$ et d'après le point précédent.
  Ainsi :
  $$\forall n \in \mathbb{Z},\ f(x) = nf(1).$$

- **Détermination sur $\mathbb{Q}$:**
Soit $r \in Q$, il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $r = \dfrac{p}{q}$. On a : $f(qr) = f(p) = pf(1)$ car $p \in \mathbb{Z}$. Or, $f(qr) = qf(r)$ d'après le préliminaire.
Ainsi, $f(r) = \dfrac{p}{q}$.
Donc :
$$\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = rf(1).$$
- **Détermination sur $\mathbb{R}$:**
Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ (approximation décimale par défaut de x à la précision 10^{-n}).
On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \mathbb{Q}$.
Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = x_n f(1) \quad (1)$ d'après le point précédent.
Or, on sait que (x_n) converge vers x donc $(x_n f(1))$ converge vers $xf(1)$.
De plus, f est continue en x donc $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$. En passant à la limite dans (1), on obtient : $f(x) = xf(1)$.
Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut conclure que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = xf(1).$$

Synthèse :
Soit $a \in \mathbb{R}$, posons $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & ax \end{array}$.
f est continue sur $\mathbb{R}$.
Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a :
$$f(x+y) = (x+y)a = xa + ya = f(x) + f(y)$$
Ainsi, f est solution.
Conclusion :
L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$$
est l'ensemble des fonctions linéaires c'est à dire l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto ax$, où $a \in \mathbb{R}$.

2. Raisonnons par analyse-synthèse.
Analyse :
Supposons qu'il existe $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue telle que :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x) \times f(y) = f(x+y) \qquad (*)$$
En prenant $x = y = 0$ dans $(*)$, on obtient : $f(0)^2 = f(0)$. Ainsi, deux cas se présentent :
   - Si $f(0) = 0$. Alors, en prenant $y = 0$ dans la relation, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(0)f(x) = 0$.
   Ainsi, f est constante égale à 0.
   - Si $f(0) = 1$.
   D'après la relation $(*)$: $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}\right) = f\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 \qquad (**)$.
   Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$.
   Montrons par l'absurde que f est strictement positive.
   Supposons au contraire qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = 0$.
   Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f\left(\dfrac{c}{2^n}\right) = 0$.
      - Pour $n = 0$, $f\left(\dfrac{c}{2^n}\right) = f(c) = 0$ par hypothèse.
      - Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $f\left(\dfrac{c}{2^n}\right) = 0$.
      En utilisant $(**)$ pour $x = \dfrac{c}{2^n}$, on obtient : $f\left(\dfrac{c}{2^n}\right) = f\left(\dfrac{c}{2^{n+1}}\right)^2$.
      Ainsi, $f\left(\dfrac{c}{2^{n+1}}\right)^2 = 0$ donc $f\left(\dfrac{c}{2^{n+1}}\right) = 0$.
      - Ainsi, on a prouvé que :
      $$\forall n \in \mathbb{N},\ f\left(\dfrac{c}{2^n}\right) = 0 \qquad (***)$$

Or, la suite $\left(\dfrac{c}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et f est continue en 0. Ainsi, $\left(f\left(\dfrac{c}{2^n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(0)$.
En passant à la limite dans $(***)$, on obtient : $f(0)=0$ Absurde car on est dans le cas $f(0)=1$.
Ainsi, on a :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)>0.$$

Posons $\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \ln(f(x)) \end{array}$.
Comme f est à valeurs strictement positives, h est bien définie.
De plus, de l'égalité $(*)$ vérifiée par f, on en déduit que :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ h(x+y)=h(x)+h(y)$$

Ainsi, d'après la question 1., il existe $a\in\mathbb{R}$, tel que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ h(x)=ax.$$

Ainsi, on a :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=e^{h(x)}=e^{ax}.$$

Synthèse :
La fonction nulle est bien solution.
Soit $a\in\mathbb{R}$, posons $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & e^{ax} \end{array}$.
f est continue sur $\mathbb{R}$.
Soient $x,y\in\mathbb{R}$, on a : $f(x+y)=e^{a(x+y)}=e^{ax+ay}=e^{ax}e^{ay}=f(x)f(y)$.
Ainsi, f est solution.
Conclusion :
Les solutions du problème posé sont la fonction nulle et les fonctions de la forme $x\mapsto e^{ax}$, où $a\in\mathbb{R}$.