# Corrigé de la feuille d'exercices 16

## 1 Triangle, droites, cerlces

**Exercice 1.** Notons $S = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\} \ / \ \left| \dfrac{2iz-1}{z+1} \right| = 1 \right\}$. Soit $M$ un point d'affixe $z \neq -1$. On écrit $z = x + iy$ sous forme algébrique avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
z \in S \quad & \iff \quad \left| \frac{2iz-1}{z+1} \right| = 1 \\
& \iff \quad |2iz-1| = |z+1| \\
& \iff \quad |2iz-1|^2 = |z+1|^2 \quad \textit{(un module est positif)} \\
& \iff \quad (1-2y)^2 + 4x^2 = (1+x)^2 + y^2 \\
& \iff \quad 4y^2 - 4y + 1 + 4x^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2 \\
& \iff \quad 3x^2 + 3y^2 - 4y - 2x = 0 \\
& \iff \quad 3\left( \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} \right) = 0 \\
& \iff \quad \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2
\end{aligned}$$

On reconnait une équation cartésienne d'un cercle de centre $\Omega(1/3, 2/3)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

**Exercice 2.**

1. Notons respectivement $A$, $B$ et $C$ les points du plan d'affixe $a$, $b$ et $c$.
   (a) Le triangle $ABC$ est équilatéral si et seulement si les points d'affixes $a$, $b$ et $c$ forment un triangle équilatéral. Par suite,

$$\begin{aligned}
ABC \text{ est équilatéral} \quad & \iff \quad AB = AC = BC \\
& \iff \quad |b-a| = |c-a| = |c-b|
\end{aligned}$$

   (b) D'après le théorème de Pythagore, $ABC$ est un triangle rectangle en $A$ si et seulement si $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Par définition, on peut aussi affirmer que $ABC$ est un triangle rectangle en $A$ si et seulement si l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$. Autrement écrit,

$$\begin{aligned}
ABC \text{ est un triangle rectangle en } A \quad & \iff \quad |c-b|^2 = |b-a|^2 + |c-a|^2 \\
& \iff \quad \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \\
& \iff \quad c - a = i(b-a) \ \text{ ou } \ c - a = -i(b-a) \\
& \iff \quad a(i-1) = ib - c \ \text{ ou } \ a(i+1) = ib + c \\
& \iff \quad a = \frac{ib-c}{i-1} \ \text{ ou } \ a = \frac{ib+c}{i+1}
\end{aligned}$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$.
   (a) Soient $A(1), B(z)$ et $C(z^2)$. Le triangle $ABC$ est rectangle s'il est rectangle en $A$ ou en $B$ ou en $C$. Cela revient à résoudre les équations du second degré

$$\left\{ \begin{array}{lcl}
1 \times (i-1) = iz - z^2 & \text{ou} & 1 \times (i+1) = iz + z^2 \\
z(i-1) = iz^2 - 1 & \text{ou} & z(i+1) = iz^2 + 1 \\
z^2(i-1) = iz - 1 & \text{ou} & z^2(i+1) = iz + 1
\end{array} \right.$$

   (b) $z$, $\dfrac{1}{z}$ et $-i$ sont alignés.
   (c) $z$, $z^2$ et $z^4$ sont alignés.

**Exercice 3.**

1. Soient $A$ et $B$ les points d'affixe respective $-i$ et 1.

$$\begin{aligned} |z+i| = |z-1| &\iff AM = BM \\ &\iff M \in \operatorname{med}[AB] \end{aligned}$$

2. Supposons que $z$, $\dfrac{1}{z}$ et $1+z$ aient le même module. On en déduit que

$$|z| = \left|\frac{1}{z}\right|,$$

et donc $|z|^2 = 1$. De plus puisque que $|z| \geq 0$, on a $|z| = 1$. Ainsi, $M$ appartient au cercle de centre $O$ et de rayon 1. De plus $|z| = |1+z| = |z-(-1)| = 1$. Donc $M$ appartient au cercle de centre d'affixe $-1$ et de rayon 1. Il y a donc au plus deux candidats pour le point $M$ (intersection de deux cercles). On écrit $z = x+iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ de sorte que $M(x,y)$. Par l'analyse précédente, on obtient donc

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2+y^2 = 1 \\ (x-1)^2+y^2 = 1 \end{array} \right. ,$$

c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} y^2 = 1-x^2 \\ x = \frac{1}{2} \end{array} \right. ,$$

et donc $x = -1/2$ et $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Autrement dit, on a $z = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ou $z = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

Réciproquement, supposons que $z = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ou $z = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. Alors $|z| = 1$ et donc $|1/z| = |z| = 1$. D'autre part, puisque $|1+z| = |\overline{1+z}|$, en factorisant par l'angle moitié,

$$\begin{aligned} |1+z| &= \left|1+e^{i\frac{2\pi}{3}}\right| \\ &= \left|e^{i\frac{\pi}{3}}\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\right| \\ &= \left|2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right| \\ &= 1. \end{aligned}$$

Finalement, les points $M(z)$ tel que $z$, $1/z$ et $|1+z|$ aient le même module sont les points d'affixe

$$e^{-i\frac{2\pi}{3}} \quad \text{et} \quad e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

3. On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} \frac{z+1}{z-1} \in \mathbb{R} &\iff \operatorname{Im}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = 0 \\ &\iff \frac{z+1}{z-1} = \overline{\frac{z+1}{z-1}} \\ &\iff (z+1)(\overline{z}-1) = (\overline{z}+1)(z-1) \\ &\iff |z|^2 - z + \overline{z} - 1 = |z|^2 + z - \overline{z} - 1 \\ &\iff z - \overline{z} = 0 \\ &\iff \operatorname{Im}(z) = 0 \\ &\iff z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Finalement l'ensemble des points $M(z)$ tels que $\frac{z+1}{z-1} \in \mathbb{R}$ est la droite des abscisses.

**Exercice 4.** On rappelle qu'un cercle est caractérisé par un centre et la donnée d'un rayon. Notons $A, B$ et $C$ trois points non alignés. Supposons qu'il existe un cercle $\mathcal{C}$ passant par les points $A, B$ et $C$. Soit $\Omega$ le centre du cercle $\mathcal{C}$ et $R$ son rayon. On a alors $\Omega A = \Omega B = \Omega C = R$ et donc les triangles $A\Omega B$ et $B\Omega C$ sont isocèles en $\Omega$. On en déduit que $\Omega \in \operatorname{med}([AB]) \cap \operatorname{med}([BC])$. À l'aide de cette analyse on vient de caractériser le cercle $\mathcal{C}$.

Réciproquement, les points $A$, $B$ et $C$ ne sont pas alignés donc les deux droites $\operatorname{med}([AB])$ et $\operatorname{med}([BC])$ ne sont pas parallèles et se coupent donc en un seul point. Notons $\in \operatorname{med}([AB]) \cap \operatorname{med}([BC])$. Alors, par définition, $\Omega A = \Omega B = \Omega C$. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega$ et de rayon $R = \Omega A$. Alors $A, B, C \in \mathcal{C}$.

Finalement par trois points non alignés il passe un unique cerlce.

**Exercice 5.** Soient $A(1,1)$, $B(4,3)$ et $C(2,5)$. Déterminer l'aire du triangle $ABC$.

En notant $D = C + \overrightarrow{AB}$, le produit mixte $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$ est l'aire du parallélogramme $ABCD$ et donc le double de l'aire du triangle $ABC$. En notant $\mathcal{A}$ l'aire du triangle $ABC$, on a

$$\mathcal{A} = [(3,2),(1,4)] = 12 - 2 = 10.$$

**Exercice 6.** Soit $M$ un point intérieur au triangle $ABC$. En considérant l'aire des triangles $ABC$, $AMB$, $BMC$ et $AMC$, on obtient,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{ABC} &= \mathcal{A}_{AMB} + \mathcal{A}_{AMC} + \mathcal{A}_{BMC}\\ &= \frac{1}{2}\left(AB \times MH_C + AC \times MH_B + BC \times MH_A\right)\\ &= \frac{1}{2}AB\left(MH_C + MH_B + MH_A\right)\\ &= \frac{1}{2}AB \times f(M).\end{aligned}$$

Finalement puisque $AB \neq 0$, on a $f(M) = \frac{2\mathcal{A}_{ABC}}{AB}$.

## 2 Produit scalaire et produit mixte

**Exercice 7.** Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ des vecteurs.

1. On munit le plan d'un repère orthonormé. En notant $a = \mathrm{aff}(\overrightarrow{u})$ et $b = \mathrm{aff}(\overrightarrow{v})$, on a

$$a\bar{b} = (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) + i[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{u}\|^2\|\overrightarrow{v}\|^2 &= |a|^2|b|^2\\ &= |a\bar{b}|^2\\ &= (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})^2 + [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]^2.\end{aligned}$$

2. Soit $ABCD$ un parallélogramme. Par définition, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. La somme des carrés des longueurs des quatre côtés est $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$, ce qui s'écrit vectoriellement

$$2\|\overrightarrow{AB}\|^2 + 2\|\overrightarrow{AD}\|^2.$$

Les deux diagonales du parallélogramme $ABCD$ sont $AC$ et $BD$. Ainsi

$$\begin{aligned}AC^2 + BD^2 &= \|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{BD}\|^2\\ &= \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\|^2 + \|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\|^2 && \textit{(Chasles)}\\ &= \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\|^2 + \|-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\|^2\\ &= \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AD}\|^2 + 2(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}) + \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AD}\|^2 - 2(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD})\\ &= 2\|\overrightarrow{AB}\|^2 + 2\|\overrightarrow{AD}\|^2\\ &= AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2.\end{aligned}$$

3. En développant les expressions $\|\overrightarrow{w} - \overrightarrow{u}\|^2$ et $\|\overrightarrow{w} - \overrightarrow{v}\|^2$, on a

$$\|\overrightarrow{w} - \overrightarrow{u}\|^2 = \|\overrightarrow{w}\|^2 + \|\overrightarrow{u}\|^2 - 2(\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u}) \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{w} - \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{w}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - 2(\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v})$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 &= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}\right)\\ &= \frac{1}{2}\|\overrightarrow{u}\|^2 + \frac{1}{2}\|\overrightarrow{v}\|^2 - \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{w} - \frac{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}}{2}\right\|^2 &= \|\overrightarrow{w}\|^2 + \|\frac{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}}{2}\|^2 - 2\overrightarrow{w} \cdot (\frac{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}}{2})\\ &= \|\overrightarrow{w}\|^2 + \frac{1}{4}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 + 2(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})\right) - \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u} - \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v}.\end{aligned}$$

En sommant les deux égalité précédentes,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2+2\left\|\overrightarrow{w}-\frac{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}}{2}\right\|^2 &= \left(\frac{1}{2}\|\overrightarrow{u}\|^2+\frac{1}{2}\|\overrightarrow{v}\|^2-\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\right)\\
&\quad +2\left(\|\overrightarrow{w}\|^2+\frac{1}{4}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2+2(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})\right)-\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{u}-\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v}\right)\\
&= \|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2+2\|\overrightarrow{w}\|^2-\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+2\frac{2}{4}\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}-2\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v}\\
&= \|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2+2\|\overrightarrow{w}\|^2-2\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v}\\
&= \|\overrightarrow{w}\|^2+\|\overrightarrow{u}\|^2-2\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{u}+\|\overrightarrow{w}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2-2\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v}\\
&= \|\overrightarrow{w}-\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{w}-\overrightarrow{v}\|^2
\end{aligned}$$

Géométriquement, si $ABCD$ est un parallélogramme et que $I$ est le milieu de $BC$ alors

$$AB^2+AC^2=\frac{1}{2}BC^2+2AI^2.$$

C'est une reformulation de l'identité du parallélogramme.

**Exercice 8.** Soit $x\in\mathbb{R}$. Soient $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{M_1M_2}$ et $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{M_1M_3}$.

$$\begin{aligned}
M_1, M_2 \text{ et } M_3 \text{ sont alignés.} &\iff \overrightarrow{M_1M_2}\,/\!/\,\overrightarrow{M_1M_3}\\
&\iff [\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{M_1M_3}]=0\\
&\iff 1\times(x^3-x)-3\times(x^2-x)=0\\
&\iff x^3-x-3x^2+3x=0\\
&\iff x\left(x^2+2-3x\right)=0\\
&\iff x(x-1)(x-2)=0\\
&\iff x=0 \text{ ou } x=1 \text{ ou } x=2.
\end{aligned}$$

**Exercice 9.** Notons $R>0$ le rayon du cercle $\mathcal{C}$ et $\Omega$ son centre. Soit $H$ le projeté orthogonal de $M$ sur la droite $d$. D'après le cours, on distingue trois cas.

- <u>Cas n°1 :</u> $d\cap\mathcal{C}=\emptyset$. Les points $P$ et $P'$ n'existent donc pas.
- <u>Cas n°2 :</u> $d\cap\mathcal{C}=\{P\}$. Les points $P$ et $P'$ sont donc confondus et les droites $(\Omega P)$ et $(MP)$ sont perpendiculaires. Ainsi en considérant le triangle $\Omega PM$ rectangle en $P$, on a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MP'} &= \|\overrightarrow{MP}\|^2\\
&= \|\overrightarrow{\Omega M}\|^2-\|\overrightarrow{\Omega P}\|^2\\
&= \|\overrightarrow{\Omega M}\|^2-R^2.
\end{aligned}$$

  Ce dernier nombre étant indépendant du choix de la droite $d$.
- <u>Cas n°3 :</u> $d\cap\mathcal{C}=\{P,P'\}$ et $P\neq P'$. Soit $I=\mathrm{m}([PP'])$ le milieu du segment $[PP']$. Les points $\Omega$ et $I$ sont donc sur la médiatrice du segment $[PP']$. Ainsi $(\Omega I)\perp(PP')$ et donc

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MP'} &= \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IP}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IP'}\right)\\
&= \|\overrightarrow{MI}\|^2+\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IP'}+\overrightarrow{IP}\cdot\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IP}\cdot\overrightarrow{IP'}\\
&= \|\overrightarrow{MI}\|^2-\|\overrightarrow{IP}\|^2 \quad \textit{(car } I=m([PP'])\textit{)}\\
&= \left(\|\overrightarrow{\Omega M}\|^2-\|\overrightarrow{\Omega I}\|^2\right)-\left(\|\overrightarrow{\Omega P}\|^2-\|\overrightarrow{\Omega I}\|^2\right)\\
&= \|\overrightarrow{\Omega M}\|^2-\|\overrightarrow{\Omega P}\|^2\\
&= \|\overrightarrow{\Omega M}\|^2-R^2
\end{aligned}$$

  Ce dernier nombre étant encore indépendant du choix de la droite $d$.

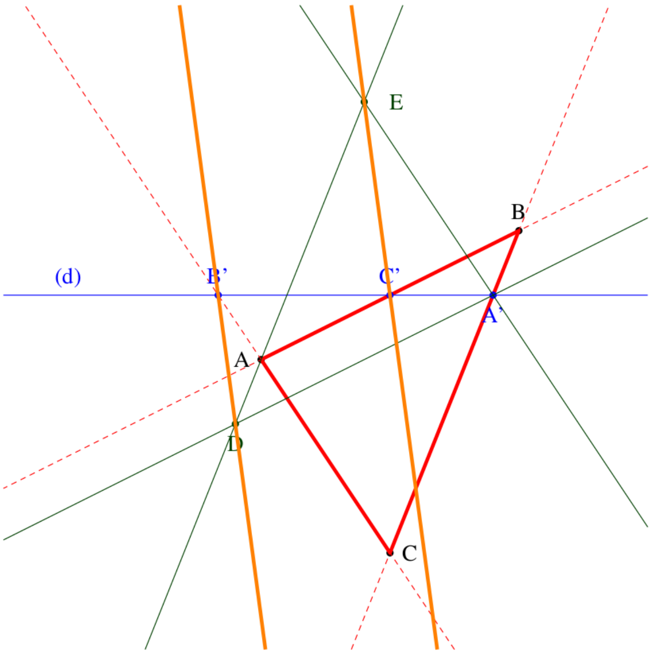
**Exercice 10.** Soit $M$ le point d'intersection des hauteurs du triangles $ABC$ issues de $A$ et $B$. Montrons que $M$ est aussi un point de la hauteur issue de $C$ dans le même triangle $ABC$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\\
&= \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\\
&= \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\\
&= \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\\
&= \overrightarrow{0}.
\end{aligned}$$

On en déduit que $(MC)\perp(AB)$ et donc la droite $(MC)$ et la hauteur issue de $C$ dans le triangle $ABC$ sont confondues. Par suite les hauteurs du triangle $ABC$ sont concourantes.

**Exercice 11.**

1. On trace les données de l'énoncé.




2. Par construction le point $B'$ appartient à la droite $(AC)$. Ainsi, son absicce est nulle et donc il existe $\beta\in\mathbb{R}$ tel que $B'(0,\beta)$. De même $C'\in(AB)$ donc $\exists\gamma\in\mathbb{R}, C'(\gamma,0)$.
3. Soit $M(x,y)$ un point du plan. On a

$$\begin{aligned}
M\in(d) &\iff [\overrightarrow{B'M},\overrightarrow{B'C'}]=0\\
&\iff -\beta x-\gamma(y-\beta)=0\\
&\iff \beta x+\gamma y-\beta\gamma=0.
\end{aligned}$$

   De même,

$$\begin{aligned}
M\in(BC) &\iff [\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BC}]=0\\
&\iff x+y=1.
\end{aligned}$$

4. Le point $A'(x_{A'},y_{A'})$ étant l'intersection des droites $(d)$ et $(BC)$, on en déduit que $y_{A'}=1-x_{A'}$ et $\beta x_{A'}+\gamma(1-x_{A'})-\beta\gamma=0$. Autrement dit,

$$x_{A'}=\frac{\gamma(1-\beta)}{\gamma-\beta}\quad\text{et}\quad y_{A'}=\frac{\beta(\gamma-1)}{\gamma-\beta}.$$

   Pour le point $D(x_D,y_D)$, on utilise les parallélismes de l'énoncé. D'une part $(AD)\,/\!/\,(BC)$ et d'autre part $(A'D)\,/\!/\,(AB)$. On obtient alors $[\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}]=0$ c'est-à-dire $x_D+y_D=0$ et $y_D-y_{A'}=0$. Ainsi,

$$x_D=\frac{\beta(1-\gamma)}{\gamma-\beta}\quad\text{et}\quad y_D=\frac{\beta(\gamma-1)}{\gamma-\beta}.$$

Pour le point $E(x_E, y_E)$, on a $(AE) \parallel (BC)$ et $(A'E) \parallel (AC)$ et donc

$$x_E = \frac{\gamma(1-\beta)}{\gamma-\beta} \quad \text{et} \quad y_E = \frac{\gamma(\beta-1)}{\gamma-\beta}.$$

5. On souhaite montrer que $(B'D)$ et $(C'E)$ sont parallèles. Autrement dit, il suffit de montrer que $[\overrightarrow{B'D}, \overrightarrow{C'E}] = 0$. En développant, ce calcul de produit mixte, on obtient le parallélisme des droites $(B'D)$ et $(C'E)$.

**Exercice 12.**

1. On remarque que $BC^2 = 4a^2$ et que $AC^2 + AB^2 = a^2 + 3a^2 = BC^2$. AInsi à l'aide du théorème de Pythagore, on en déduit que $ABC$ est un triangle rectangle en $A$.
2. Soit $M$ un point du plan. En introduisant un point intermédiaire avec la relation de Chalses, on a

$$\begin{aligned} -4MA^2 + 3MB^2 + MC^2 &= -4MA^2 + 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB})^2 + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC})^2 \\ &= (-4+3+1)MA^2 + 3AB^2 + AC^2 + 6\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= 3a^2 + 3a^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \left(6\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right) \\ &= 6a^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \left(6\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$-4MA^2 + 3MB^2 + MC^2 = 6a^2 \iff \overrightarrow{MA} \cdot \left(6\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right) = 0.$$

L'ensemble recherché est donc la droite passant par $A$ dont un vecteur normal est $6\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.

3. Soit $M$ un point du plan. En introduisant le point intermédiaire $C$,

$$\begin{aligned} -4MA^2 + 3MB^2 + MC^2 &= -4(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA})^2 + 3(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB})^2 + MC^2 \\ &= (-4+3+1)MC^2 - 4CA^2 + 3CB^2 - 8\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{CA} + 6\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{CB} \\ &= -4 \times 3a^2 + 12a^2 + \overrightarrow{MC} \cdot \left(8\overrightarrow{AC} + 6\overrightarrow{CB}\right) \\ &= \overrightarrow{MC} \cdot \left(8\overrightarrow{AC} + 6\overrightarrow{CB}\right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$-4MA^2 + 3MB^2 + MC^2 = 0 \iff \overrightarrow{MC} \cdot \left(8\overrightarrow{AC} + 6\overrightarrow{CB}\right) = 0.$$

L'ensembe des points recherchés est donc la droite passant par $C$ dont un vecteur normal est $8\overrightarrow{AC} + 6\overrightarrow{CB}$.

# 3 Transformations

**Exercice 13.**

1. Le module de $a$ est 2 et à l'aide de la forme exponentielle, on a $a = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$, on en déduit qu'un argument de $a$ est $-\frac{\pi}{6}$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$. D'après le cours, on peut dire que $f(z) = e^{i\frac{\pi}{4}}z$.
3. Si $B = r(A)$ est d'affixe $b$, alors $b = f(a) = e^{i\frac{\pi}{4}}a = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} b &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\sqrt{3} - i) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(\sqrt{3} - i) \\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

4. D'après la question précédente, en identifiant la partie réelle et la partie imaginaire de $b$, on a

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

**Exercice 14.** En appliquant les formules du cours, on obtient directement les résultats demandés.

1. $f$ est représentée par $z \mapsto \frac{-1}{3}(z - 4i) + 4i$.

2. $g$ est représentée par $z \mapsto e^{i\frac{3\pi}{4}}(z+2)-2$.
3. $h$ est représentée par $z \mapsto z+(4-2i)$.

**Exercice 15.**

1. **Méthode géométrique.** Soit $d$ une droite formant un angle $\theta$ avec l'axe des abscisses. On note $r_\theta$ la rottation d'angle $\theta$ dans le plan, $r_{-\theta}$ la rotation d'angle $-\theta$, $t$ la symétrie d'axe $d$ et $s$ la symétrie d'axe $(Ox)$.

   Par définition $r_{-\theta}$ transforme $d$ en l'axe des abscisses et $r_\theta$ transforme l'axe des abscisses en la droite $d$. Ainsi, $r_\theta \circ t \circ r_{-\theta} = s$. Par suite
   $$t = r_{-\theta} \circ s \circ r_\theta,$$
   et donc $t$ est représentée par l'application $z \mapsto e^{i\theta}\overline{e^{-i\theta}z}$ autrement dit
   $$z \longmapsto e^{2i\theta}\bar{z}.$$

   **Méthode analytique.** On se place dans le repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les vecteurs
   $$\vec{u}_\theta = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{v}_\theta = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}$$
   Par un calcul (ou bien une interprétation géométrique en terme de rotation), on obtient
   $$\vec{i} = \cos(\theta)\vec{u}_\theta - \sin(\theta)\vec{v}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{j} = \sin(\theta)\vec{u}_\theta + \cos(\theta)\vec{v}_\theta$$
   Soit $M$ un point du plan tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Dans ce cas
   $$\overrightarrow{OM} = (x\cos(\theta) + y\sin(\theta))\,\vec{u}_\theta + (-x\sin(\theta) + y\cos(\theta))\,\vec{v}_\theta.$$
   Or $\vec{u}_\theta$ est un vecteur directeur de la droite $d$ et $\vec{v}_\theta$ est un vecteur orthogonal à $\vec{u}_\theta$. En notant $M'$ le symétrique de $M$ par la droite $d$, on a donc
   $$\begin{aligned}
   \overrightarrow{OM'} &= (x\cos(\theta) + y\sin(\theta))\,\vec{u}_\theta - (-x\sin(\theta) + y\cos(\theta))\,\vec{v}_\theta \\
   &= (x\cos(\theta) + y\sin(\theta))\,\vec{u}_\theta + (x\sin(\theta) - y\cos(\theta))\,\vec{v}_\theta \\
   &= (x\cos(\theta) + y\sin(\theta))\left(\cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}\right) \\
   &\quad + (x\sin(\theta) - y\cos(\theta))\left(-\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}\right) \\
   &= \big[x\cos^2(\theta) + y\sin(\theta)\cos(\theta) \\
   &\quad -x\sin^2(\theta) + y\cos(\theta)\sin(\theta)\big]\vec{i} \\
   &\quad + \\
   &\quad \big[x\cos(\theta)\sin(\theta) + y\sin^2(\theta) \\
   &\quad +x\sin(\theta)\cos(\theta) - y\cos^2(\theta)\big]\vec{j} \\
   &= (x\cos(2\theta) - y\sin(2\theta))\,\vec{i} + (x\sin(2\theta) - y\cos(2\theta))\,\vec{j}.
   \end{aligned}$$
   Finalement, dans le repère $\mathcal{R}$, si $M$ est d'affixe $z$ alors $M'$ est d'affixe $e^{2i\theta}\bar{z}$.
2. En notant $d_1$ une droite passant par l'origine formant un angle $\theta_1$ avec l'axe des abscisses et $d_2$ une droite passant par l'origine formant un angle $\theta_2$ avec l'axe des abscisses. La transformation du plan $t = s_1 \circ s_2$ est donc représentée d'après la question précédente par $z \mapsto e^{2i\theta_1}\overline{e^{2i\theta_2}\bar{z}}$, c'est-à-dire par l'application
   $$z \mapsto e^{2i(\theta_1-\theta_2)}z,$$
3. Soit $A$ le point d'intersection des droites. Quitte à effectuer une translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$, on est ramené au problème précédent. En notant $a$ l'affixe du point $A$ dans le repère canonique, $\theta_1$ et $\theta_2$ respectivement l'angle formé par la première (respectivement la seconde) droite avec la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par $A$, on obtient une représentation complexe définie par
   $$z \mapsto e^{2i(\theta_1-\theta_2)}(z-a)+a$$

**Exercice 16.** À l'aide des propriétés du cours, on obtient les représentations complexe des transformations du plan

- $h : z \mapsto -\sqrt{2}(z-3+i)+3-i$.
- $r : z \mapsto e^{i\frac{3\pi}{4}}(z-2i)+2i$.
- $t : z \mapsto z-2i$.

On en déduit que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
s(z) &= t \circ r(h(z)) \\
&= t \circ r(-\sqrt{2}(z-3+i)+3-i) \\
&= t\left(e^{i\frac{3\pi}{4}}(-\sqrt{2}(z-3+i)+3-i-2i)+2i\right) \\
&= -\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}(z-3+i)+3(1-i)e^{i\frac{3\pi}{4}} \\
&= -\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}(z-3+i)+3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{3\pi}{4}} \\
&= -\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}(z-3+i)+3\sqrt{2}i \\
&= -(-1+i)(z-3+i)+3\sqrt{2}i \\
&= (1-i)z-2+4i+3\sqrt{2}i.
\end{aligned}$$

Soit $M$ un point du pan d'affixe complexe $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
s(M) = O &\iff (1-i)z-2+4i+3\sqrt{2}i = 0 \\
&\iff z = \frac{2-4i-3\sqrt{2}i}{1-i}.
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
s(M) = M &\iff (1-i)z-2+4i+3\sqrt{2}i = z \\
&\iff z = \frac{-2+4i+3\sqrt{2}i}{i} \\
&\iff z = 2i+4+3\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

**Exercice 17.** En toute généralité, on considère $t : z \mapsto z+a$ et $h : z \mapsto \lambda(z-a)+a$, avec $(a,\lambda) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^*$. Soient $z_1 = r_1e^{i\theta_1}, z_2 = r_2e^{i\theta_2}$ et $u$ trois nombres complexes.

On a alors

$$\frac{t(z_1)-t(u)}{t(z_2)-t(u)} = \frac{z_1-u}{z_2-u}.$$

Ainsi l'angle formé par les points d'affixe $z_1, u$ et $z_2$ est le même que celui formé par les points $t(z_1), t(u)$ et $t(z_2)$.

De plus,

$$\frac{h(z_1)-h(u)}{h(z_2)-h(u)} = \frac{\lambda(z_1-u)}{\lambda(z_2-u)}.$$

Ainsi l'angle formé par les points d'affixe $z_1, u$ et $z_2$ est le même que celui formé par les points $h(z_1), h(u)$ et $h(z_2)$.

**Exercice 18.**

1. Montrons que $f$ est bien définie. Soit $M \in \mathcal{P}^*$. Soit $(r,\theta)$ d'un point $\in \mathcal{P}^*$. La difficulté ici est de prouver que le point dont un système de coordonnées polaire est $(\frac{k}{r},\theta)$ ne dépend pas du choix de $(r,\theta)$. Soit $(r',\theta')$ un autre système de coordonnées polaires du point $M$. Alors on a
$$\theta = \theta'[\pi] \text{ et } |r| = |r'|.$$
Ainsi,
$$\begin{cases} \theta = \theta'+\pi[2\pi] \\ r = -r' \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \theta = \theta'[2\pi] \\ r = r' \end{cases}$$
Dans les deux cas, on obtient que $(\frac{k}{r'},\theta')$ est aussi un système de coordonnées polaire du point $M'$.
2. Soit $M \in \mathcal{P}^*$ un point dont un système de coordonnées polaire est $(r,\theta)$. Un système de coordonnées polaire du point $M' = f(M)$ est $\left(\frac{k}{r},\theta\right)$. On remarque alors qu'un système de coordonnées polaire du point $M'' = f(M')$ est $\left(\frac{k}{\frac{k}{r}},\theta\right)$ c'est-à-dire $(r,\theta)$. Ainsi $M'' = M$ et donc $f \circ f(M) = M$. Comme ceci est vrai pour tout $M \in \mathcal{P}^*$ on a $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}^*}$. On a donc montré que $f$ est bijective et que sa bijection réciproque est elle-même.
3. Un point $M \in \mathcal{P}^*$ est invariant par $f$ si et seulement si $f(M) = M$. Ainsi si $(r,\theta)$ est un système de coordonnées polaire de $M$ alors $M$ est invariant par $f$ si et seulement si $\frac{k}{r}e^{i\theta} = re^{i\theta}$ (égalité des affixes) donc si et seulement si $r^2 = k$. Les points invariants par $f$ sont les points du cercle de centre $O$ et de rayon $\sqrt{k}$. *On dit que ce cercle est le cercle d'inversion de $f$.*
*Attention à ne pas écrire $\left(\frac{k}{r},\theta\right) = (r,\theta)$ car un point $M$ peut avoir plusieurs systèmes de coordonnées polaires différents. C'est pour cela qu'on travaille avec les affixes qui sont uniques.*

4. Soit $M \in \mathcal{P}^*$ d'affixe $z$. Un système de coordonnées polaires de $M$ est $(r, \theta)$ où $z = re^{i\theta}$. L'affixe $z'$ de $f(M)$ est alors
$$z' = \frac{k}{r}e^{i\theta} = \frac{k}{re^{-i\theta}} = \frac{k}{\bar{z}}.$$
Notons $a$, $b$, $a'$ et $b'$ les affixes des points $A$, $B$, $A'$ et $B'$. On a $a' = \frac{k}{\bar{a}}$ et $b' = \frac{k}{\bar{b}}$. On obtient alors
$$\begin{aligned}
A'B' &= |b' - a'| \\
&= \left|\frac{k}{\bar{b}} - \frac{k}{\bar{a}}\right| \\
&= k\left|\frac{1}{\bar{b}} - \frac{1}{\bar{a}}\right| \qquad \text{car } k \in \mathbb{R}^{+*} \\
&= k\left|\overline{\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)}\right| \\
&= k\left|\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)\right| \\
&= k\left|\frac{a-b}{ab}\right| \\
&= k\frac{|a-b|}{|a|\,|b|} \\
&= k\frac{AB}{OA \times OB}
\end{aligned}$$

5. Soient $M \in \mathcal{P}^*$ et $M' = f(M)$. En notant $z = re^{i\theta}$ l'affixe de $M$, on en déduit que $M'$ est d'affixe $\frac{k}{r}e^{i\theta}$. On en déduit que $barzz' = k$. Ainsi, $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont colinéaires et
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} &= \mathrm{Re}(barzz') \\
&= k.
\end{aligned}$$

6. (a) On note $\Delta' = \Delta \setminus \{O\}$. Si $M$ est un point de $\Delta'$ alors $M' = f(M)$ est (d'après la question précédente) un point de la droite $(OM)$ tel que $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = k$. Or $\Delta = (OM)$ donc $M' \in \Delta'$. Ceci prouve que $f(\Delta') \subset \Delta'$. En appliquant $f$, puisque $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}^*}$, on obtient $\Delta' \subset f(\Delta')$ et donc l'égalité souhaitée.

   (b) Soit $ax + by + c = 0$ une équation cartésienne de la droite $\Delta$. Puisque $O \notin \Delta$, on en déduit que $(a, b) \neq (0, 0)$ et que $c \neq 0$.

   - Si $M(x, y) \in \Delta$ et $M'(x', y') = f(M)$ alors $f(f(M)) = M$ et donc
   $$x = \frac{x'}{x'^2 + y'^2} \quad \text{et} \quad y = \frac{y'}{x'^2 + y'^2}.$$
   Ainsi puisque $M \in \Delta$, on obtient
   $$ax' + by' + c(x'^2 + y'^2) = 0,$$
   c'est-à-dire
   $$x'^2 + y'^2 + \frac{a}{c}x' + \frac{b}{c}y' = 0.$$
   Il s'agit de l'équation d'un cercle passant par $O$ qu'on notera $\mathcal{C}$.
   - Réciproquement, si $M'(x', y') \in \mathcal{C} \setminus \{O\}$, son antécédent $M(x, y)$ par $f$ vérifie $ax + by + c = 0$.

   Finalement, $f(\Delta) = \mathcal{C}$.

   (c) En utilisant le fait que $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}^*}$, on obtient le résultat souhité.

   (d) L'image du cercle $\mathcal{C} \mid x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ avec $c \neq 0$ est le cercle $\mathcal{C}' \mid 1 + ax + by + c(x^2 + y^2) = 0$.

7. Soient trois points distincts $A$, $B$ et $C$. On sait que $f$ transforme un cercle passant par $O$ en une droite ne passant pas par $O$. On définit
$$A' = f(A), B' = f(B) \ \text{ et } \ C' = f(C).$$
$OA\ BC$, $OB\ AC$ et $OC\ AB$ D'après l'étude précédente,
$$A'B' = k\frac{AB}{OA \times OB},$$

et donc

$$\begin{aligned} OC\ AB = OA\ BC + OB\ AC & \iff \frac{AB}{OA\ OB} = \frac{BC}{OB\ OC} + \frac{AC}{OA\ OC} \\ & \iff A'B' = B'C' + A'C'. \end{aligned}$$

Ainsi les points $O, A, B$ et $C$ sont cocycliques si et seulement $B'$, $C'$, $D'$ sont alignés c'est-à-dire si et seulement si parmi els trois quantité $A'B'$, $B'C'$ et $A'C'$ l'une est la somme des deux autres.

# 4 Distances

**Exercice 19.** Soit $\Omega(2,4)$ le centre du cercle $\mathcal{C}$. On calcule la distance du point $\Omega$ à la droite $d$. On obtient

$$\mathrm{d}(\Omega, d) = \frac{|2+4-4|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{2}.$$

Ainsi

- Si $R > \sqrt{2}$ alors $\mathcal{C} \cap d = \emptyset$.
- Si $R = \sqrt{2}$ alors $d$ est tangente au cercle $\mathcal{C}$ et le coupe en un unique point.
- Si $R < \sqrt{2}$ alors $d$ coupe le cerlce $\mathcal{C}$ en deux points distincts.

**Exercice 20.** On sait que $d$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}(2,1)$ et passe par $A$. Ainsi on peut écrire

$$d \mid x - 2y - 1 = 0.$$

Pour déterminer la distance de $M$ à la droite $d$ on utilise l'égalité

$$\mathrm{d}(M, d) = \frac{|1-2-1|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

**Exercice 21.** On a $\mathcal{D} \mid 3x - 4y + 4 = 0$ et $\mathcal{D}' \mid 12x + 5y - 5 = 0$.

Soit $M(x,y)$ un point du plan. On a alors

$$\mathrm{d}(M, \mathcal{D}) = \frac{|3x-4y+4|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|3x-4y+4|}{5}$$

et

$$\mathrm{d}(M, \mathcal{D}') = \frac{|12x+5y-5|}{\sqrt{144+25}} = \frac{|12x+5y-5|}{13}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{E} & \iff \frac{|3x-4y+4|}{5} = \frac{|12x+5y-5|}{13} \\ & \iff 13|3x-4y+4| = 5|12x+5y-5| \\ & \iff 39x - 52y + 52 = 60x + 25y - 25 \ \text{ ou } \ 39x - 52y + 52 = -60x - 25y + 25 \\ & \iff 21x + 77y - 77 = 0 \ \text{ ou } \ 99x - 27y + 27 = 0 \\ & \iff 3x + 11y - 11 = 0 \ \text{ ou } \ 11x - 3y + 3 = 0. \end{aligned}$$

Par suite $\mathcal{E}$ est l'union des droites $d_1$ et $d_2$ définies par

$$d_1 \mid 3x + 11y - 11 = 0 \ \text{ et } \ d_2 \mid 11x - 3y + 3 = 0.$$

**Exercice 22.** Soit $M(x,y)$ un point du plan. Pour tout nombre réel $\lambda$, on définit $f(\lambda) = \mathrm{d}(M, \mathcal{D}_\lambda)$. Par une formule du cours,

$$\begin{aligned} f(\lambda) & = \frac{\left|(1-\lambda^2)x + 2\lambda y - 4\lambda - 2\right|}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4\lambda^2}} \\ & = \frac{\left|(1-\lambda^2)x + 2\lambda y - 4\lambda - 2\right|}{1+\lambda^2}. \end{aligned}$$

On procède par analayse synthèse en supposant que $M$ est équidistant de toutes les droites $(\mathcal{D}_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$. Ainsi $f$ est une application constante. Or

$$f(1) = \frac{|2y-6|}{2} \ \text{ et } \ f(2) = f(1) = \frac{|-2y+2|}{2},$$

donc

$$|y-3| = |y-1|.$$

On a donc $y$ qui est un nombre réel équidistant de 1 et 3 donc $y=2$ et donc $f(1)=1$.

De même en évaluant $f$ en 0 et $\sqrt{3}$, on obtient

$$|x-2| = f(1) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{|x+1|}{2} = 1.$$

On en déduit l'égalité $x=1$.

Finalement si $M$ est équidistant de toutes les droites $(\mathcal{D}_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ alors $M(1,2)$.

Réciproquement, si $M(1,2)$ alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \frac{\left|(1-\lambda^2)\times 1 + 2\lambda \times 2 - 4\lambda - 2\right|}{1+\lambda^2} \\ &= \frac{\left|1-\lambda^2-2\right|}{1+\lambda^2} \\ &= \frac{\left|-\lambda^2-1\right|}{1+\lambda^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Donc l'application $f$ est constante. Par définiton de $f$ cela signifie que $M$ est équidistant de toutes les droites $(\mathcal{D}_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$.

**Exercice 23.**

1. Soit $M(x,y)$ un point du plan. Soit $m \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$. L'équation donnée pour définir $\mathcal{C}_m$ est une expression polynômiale de degré deux. On met cette expression sous forme canonique.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}_m \quad &\iff \quad x^2+y^2-4mx-2my+\frac{9m^2}{2}-m-\frac{1}{2}=0 \\ &\iff \quad (x-2m)^2-4m^2+(y-m)^2+m^2+\frac{9m^2}{2}-m-\frac{1}{2}=0 \\ &\iff \quad (x-2m)^2+(y-m)^2=\frac{m^2}{2}+m+\frac{1}{2} \\ &\iff \quad (x-2m)^2+(y-m)^2=\frac{1}{2}(m+1)^2. \end{aligned}$$

   On est donc en présence d'une équation cartésienne du cercle de centre $\Omega_m(2m,m)$ et de rayon $R_m = \frac{|m+1|}{\sqrt{2}}$.
2. Dans le cas où $m=-1$, le rayon du cercle $\mathcal{C}_m$ est nul et donc $\mathcal{C}_m$ est un cercle réduit à un point.
3. Soit $\mathcal{D} \mid y = x+1$. Soit $m \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$. On a

$$\mathrm{d}(\Omega_m, \mathcal{D}) = \frac{|2m+1-m|}{\sqrt{2}} = R_m.$$

   Ainsi la droite $\mathcal{D}$ est tangente au cercle $\mathcal{C}_m$.
4. Soit $T \mid ax+by+c=0$ une droite du plan où $a,b,c\in\mathbb{R}$. EN procédant par analyse synthèse, on cherche des conditions sur $a,b$ et $c$ pour que $T$ soit une droite tangente à tous les cercles $(\mathcal{C}_m)_{m\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}}$.
   Pour tout $m \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, on note

$$f(m) = \mathrm{d}(\Omega_m, T) = \frac{|2am+bm+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

   À l'aide de $f$, pour tout $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $T$ est tangente à $\mathcal{C}_m$ si et seulement si $f(m) = R_m$.

De plus,

$$
\begin{aligned}
f(m) = R_m \quad & \Longleftrightarrow \quad \frac{|2am+bm+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = R_m \\
& \Longleftrightarrow \quad \frac{|2am+bm+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|m+1|}{\sqrt{2}} \\
& \Longleftrightarrow \quad \frac{2am+bm+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{m+1}{\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad \frac{2am+bm+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = -\frac{m+1}{\sqrt{2}} \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 2a+b = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \\ c = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2a+b = -\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \\ c = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 2a+b = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \quad \text{ou} \quad 2a+b = -\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \\ c = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} (2a+b)^2 = \frac{a^2+b^2}{2} \\ c = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 7a^2+8ba+b^2 = 0 \\ c = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \end{array} \right. .
\end{aligned}
$$

On reconnait une équation du second degré en $a$. On a $64b^2 - 28b^2 = (6b)^2 > 0$. D'où

$$
\begin{aligned}
7a^2+8ba+b^2 = 0 \quad & \Longleftrightarrow \quad a = \frac{-8b-6b}{14} \quad \text{ou} \quad a = \frac{-8b+6b}{14} \\
& \Longleftrightarrow \quad b = -a \quad \text{ou} \quad b = -7a.
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$
\begin{aligned}
f(m) = R_m \quad & \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} b = -a \\ c = |a| \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} b = -7a \\ c = 2|a| \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow \quad T \mid ax - ay + |a| = 0 \quad \text{ou} \quad T \mid ax - 7ay + 2|a| = 0.
\end{aligned}
$$

Les droites tangente à tous les cercles sont donc de la forme

$$T \mid ax - ay + |a| = 0 \quad \text{ou} \quad T \mid ax - 7ay + 2|a| = 0.$$

*On remarque que la droite $\mathcal{D}$ est bine de la première forme avec $a = 1$.*