Corrigé de la feuille d'exercices 4

1 Logarithme - Exponentielle - Puissances

Exercice 1. Montrons que f est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$, soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \ln(e^x+1) = y \\ &\iff e^x = e^y - 1 \\ &\iff x = \ln(e^y - 1) \end{aligned}$$

$\ln(e^y-1)$ est bien définie car $y \in \mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\begin{array}{rccl} f^{-1}: & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & \ln(e^y-1) \end{array}$.

Exercice 2.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{x^2+1}+x > 0$.
   Soit $x \in \mathbb{R}_-$,
   $$\begin{aligned} \sqrt{x^2+1}+x > 0 &\iff \sqrt{x^2+1} > -x \\ &\iff \sqrt{x^2+1} > |x| \\ &\iff x^2+1 > x^2 \end{aligned}$$
   La dernière inégalité étant trivialement vraie sur $\mathbb{R}_-$, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2+1}+x > 0$.
   Ainsi, f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.
   Soit $x \in \mathbb{R}$, $$\begin{aligned} f(-x) &= \ln(\sqrt{x^2+1}-x) \\ &= \ln\left(\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) \\ &= \ln\left(\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) \\ &= -\ln(\sqrt{x^2+1}+x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$
   Ainsi, f est impaire.
3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $$f'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}+1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}+x)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$
   Ainsi, $f'(x) > 0$.
   Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3.

1. $\lim\limits_{x\to 1} \ln(x) = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} X\ln(X) = 0$ donc par composition, $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln(x)\ln(\ln(x)) = 0$
2. On a une forme indéterminée. On factorise par le terme prépondérant.
   Soit $x > 0$, $\dfrac{\ln(1+x^2)}{2x} = \dfrac{\ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)}{2x} = \dfrac{\ln(x^2)+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{2x} = \dfrac{\ln(x)}{x} + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{2x}$.
   Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \ln(1) = 0$ (par composition).
   Ainsi, par produit et somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x^2)}{2x} = 0$
3. On a une forme indéterminée. On factorise par le terme prédominant.
   Soit $x > 0$, $\dfrac{x+1}{e^x-1} = \dfrac{x}{e^x}\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-e^{-x}}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, donc par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\frac{1}{x}}{1-e^{-x}} = 1$. De plus, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$. Ainsi, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{e^x-1} = 0$

4. Soit $x > 0$, $x^{1/x} = e^{\frac{\ln(x)}{x}}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} e^X = 1$ donc par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x} = 1$
5. Soit $x > 0$, on a
$$\frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = \exp(x\ln(x^x) - x^x\ln x) = \exp(x^2\ln x - x^x\ln x) = \exp(x^2\ln x(1 - x^{x-2}))$$
Or, $x^{x-2} = e^{(x-2)\ln x} \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$ donc $x^2\ln x(1-x^{x-2}) \underset{x\to+\infty}{\to} -\infty$ par produit.
Ainsi, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = 0$.
6. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :
$$\frac{a^{(b^x)}}{b^{(a^x)}} = \exp(b^x\ln a - a^x\ln b) = \exp\left(b^x\left(\ln a - \left(\frac{a}{b}\right)^x\ln b\right)\right)$$
Or, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = e^{x\ln\left(\frac{a}{b}\right)}$ et $\dfrac{a}{b} < 1$ donc $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) < 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = 0$. De même, $b^x = e^{x\ln b}$ et $b > 1$ donc $\ln b > 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} b^x = +\infty$. Finalement, $a > 1$ donc $\ln(a) > 0$, ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^{(b^x)}}{b^{(a^x)}} = +\infty$.

Exercice 4. Posons $f : x \mapsto x^x(1-x)^{1-x}$. Soit $x \in]0,1[$, $f(x) = e^{x\ln x}e^{(1-x)\ln(1-x)} = e^{x\ln x + (1-x)\ln(1-x)}$.
f est dérivable sur $]0,1[$.
Soit $x \in]0,1[$, $f'(x) = (\ln x - 1 - \ln(1-x) + 1)f(x) = (\ln x - \ln(1-x))f(x)$.
Comme f est positive, f' est du signe de $g : x \mapsto \ln x - \ln(1-x)$.
Méthode 1 :
g est dérivable sur $]0,1[$ et on a pour tout $x \in]0,1[$, $g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} = \dfrac{1}{x(1-x)} > 0$. Donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
$g(\frac{1}{2}) = 0$, donc g (et donc f') est négative sur $]0, \frac{1}{2}]$, positive sur $[\frac{1}{2}, 1[$.
Méthode 2 : Soit $x \in]0,1[$.
$$\begin{aligned} & \ln(x) \geq \ln(1-x) \\ \iff\ & x \geq 1 - x \\ \iff\ & x \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$
Ainsi, g est négative sur $]0, \frac{1}{2}]$, positive sur $[0, \frac{1}{2}[$.
Ainsi f admet un minimum en $\frac{1}{2}$ valant $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, ce qui nous donne l'inégalité cherchée.

Exercice 5. 1. Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} 2^{x+4} + 3^x = 2^{x+2} + 3^{x+2} &\iff 2^{x+4} - 2^{x+2} = +3^{x+2} - 3^x \\ &\iff 12 \times 2^x = 8 \times 3^x \\ &\iff \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \\ &\iff x = \frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} = 1. \end{aligned}$$
L'équation admet donc une unique solution qui est 1.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $X = 2^x$.
$$\begin{aligned} 4^{x+1} + 2^{2-x} = 65 &\iff 4X^2 + \frac{4}{X} = 65 \\ &\iff 4X^3 - 65X + 4 = 0 \end{aligned}$$
4 est racine évidente de cette équation et on a : $4X^3 - 65X + 4 = (X-4)(4X^2 + 16X - 1)$. Le discriminant de

$4X^2+16X-1$ vaut 272 et ses racines sont $\frac{-4-\sqrt{17}}{2}$ et $\frac{-4+\sqrt{17}}{2}$. On a donc

$$\begin{aligned}
4^{x+1}+2^{2-x}=65 \quad &\iff \left\{\begin{array}{l} X=\frac{-4-\sqrt{17}}{2} \\ \text{ou} \\ X=\frac{-4+\sqrt{17}}{2} \\ \text{ou} \\ X=4 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} 2^x=\frac{-4-\sqrt{17}}{2} \\ \text{ou} \\ 2^x=\frac{-4+\sqrt{17}}{2} \\ \text{ou} \\ 2^x=4 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} e^{x\ln 2}=\dfrac{-4-\sqrt{17}}{2} \quad \text{(aucune solution à cette équation car } e^{x\ln 2}>0\text{).} \\ \text{ou} \\ e^{x\ln 2}=\dfrac{-4+\sqrt{17}}{2} \\ \text{ou} \\ e^{x\ln 2}=4 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{\ln\left(\frac{-4+\sqrt{17}}{2}\right)}{\ln 2} \\ \text{ou } x=\dfrac{\ln 4}{\ln 2} \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{\ln\left(\frac{-4+\sqrt{17}}{2}\right)}{\ln 2} \\ \text{ou } x=2 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation sont donc : $\left\{2, \dfrac{\ln\left(\frac{-4+\sqrt{17}}{2}\right)}{\ln(2)}\right\}$.

3. Soit $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1} \quad &\iff \quad 4^x+\frac{1}{2}4^x=3^x\sqrt{3}+\frac{3^x}{\sqrt{3}} \\
&\iff \quad 4^x\times\frac{3}{2}=3^x\frac{3+1}{\sqrt{3}} \\
&\iff \quad \left(\frac{4}{3}\right)^x=\frac{8}{3\sqrt{3}} \\
&\iff \quad x=\frac{\ln\left(\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)}{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}
\end{aligned}$$

L'équation admet donc une unique solution qui est $\dfrac{\ln\left(\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)}{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}$.

4. Soit $x\in\mathbb{R}$. On remarque que $\cos(x)\le 1$ et $(\sin x)^2\ge 0$ donc $e^{(\sin x)^2}\ge 1$ donc $2^{(\sin(x))^2}\ge 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
x^{(\sin x)^2}=\cos x \quad &\iff \quad \cos(x)=1=2^{(\sin(x))^2} \\
&\iff \quad \cos(x)=1 \text{ et } \sin(x)=0 \\
&\iff \quad x\equiv 0[2\pi] \text{ et } x\equiv 0[\pi] \\
&\iff \quad x\equiv 0[2\pi]
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\{2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

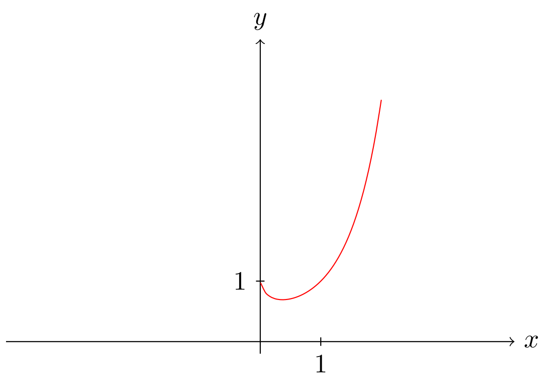
Exercice 6. L'équation est bien définie sur $]1, +\infty[$.
Soit $x > 1$.

$$\begin{aligned}
\ln(x-1) + \ln(x+1) < 2\ln(x) - 1 &\iff \ln\left(\frac{(x-1)(x+1)}{x^2}\right) < -1 \\
&\iff \frac{(x-1)(x+1)}{x^2} < e^{-1} \\
&\iff \frac{x^2-1}{x^2} < e^{-1} \\
&\iff 1 - \frac{1}{x^2} < e^{-1} \\
&\iff 1 - \frac{1}{e} < \frac{1}{x^2} \\
&\iff x^2 < \frac{e}{e-1} \\
&\iff x \in \left]1, \sqrt{\frac{e}{e-1}}\right[
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\left]1, \sqrt{\frac{e}{e-1}}\right[$.

Exercice 7.

1. f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = e^{x\ln x}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ par croissances comparées et $\lim\limits_{X\to 0} e^X = 1$. Ainsi, par composition, on a $\lim\limits_{x\to 0} x^x = 0$.
   On a par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$ donc par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^x = +\infty$.
3. D'après la question précédente, on a $\lim\limits_{x\to 0} x^x = 0$, on peut donc poser $f(0) = 0$.
   Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   $$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{x^x}{x} = x^{x-1} = e^{(x-1)\ln x}$$
   Or, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ donc par somme, $\lim\limits_{x\to 0}(x-1)\ln x = +\infty$. Puis par composition avec l'exponentielle, on obtient, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. La fonction ainsi prolongée n'est donc pas dérivable en 0. La courbe représentative admet une tangente verticale au point d'abscisse $(0, 0)$.
4. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que composée de fonction composée de fonctions dérivables. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = (\ln(x)+1)e^{x\ln x}$.
   Or,
   $$\begin{aligned}
   ln(x) + 1 > 0 &\iff \ln(x) > -1 \\
   &\iff x > e^{-1}
   \end{aligned}$$



Exercice 8. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{x} > 0 &\iff \frac{x+1}{x} > 0 \\
&\iff x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[
\end{aligned}$$

Ainsi, f est définie sur $\mathcal{D} =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$ et on a : $\forall x \in \mathcal{D},\ f(x) = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.
Posons $h(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$, ainsi : $\forall x \in \mathcal{D},\ f(x) = \exp(h(x))$.

f est dérivable sur son ensemble de définition et on a : $\forall x \in \mathcal{D},\ f'(x) = h'(x)\exp(h(x))$.
f' est du signe de h' définie par :

$$\forall x \in \mathcal{D},\ h'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}.$$

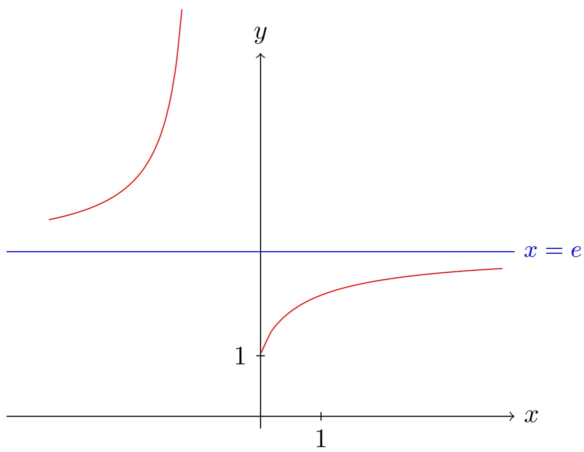
h' est dérivable sur $\mathcal{D}$ et on a : $\forall x \in \mathcal{D}$, $h''(x) = \dfrac{-1}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)} + \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{-1}{x(x+1)^2}$.
De plus, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} h'(x) = \ln(1) - 0 = 0$ par composition. Ainsi :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$h''(x)$	$+$	‖	‖	$-$
h'	$0 \nearrow$	‖	‖	$\searrow 0$

Ainsi : $\forall x \in \mathcal{D},\ h'(x) > 0$. On a donc : $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f'(x) > 0$. Ainsi, f est croissante sur $]-\infty, -1[$ et sur $]0, +\infty[$.
Comme $f = \exp \circ h$, on commence par étudier les limites de h aux bornes de $\mathcal{D}$.

- en $\pm\infty$: on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $h(x) = \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$. Ainsi, par composition des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 1$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e$ (toujours par composition).
- en 0 : pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $h(x) = x\ln(1+x) - x\ln(x)$. Ainsi, par croissances comparées (pour le deuxième terme), $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$ et donc
$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = e^0 = 1$.
- en -1 : $\lim\limits_{x\to(-1)^-} \left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$ donc par composition et produit, $\lim\limits_{x\to(-1)^-} h(x) = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = +\infty$ (par composition).

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	‖	$+$
f	$e \nearrow +\infty$	‖	‖	$1 \nearrow e$



2 Fonctions hyperboliques

Exercice 9. 1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{sh}\,(x) \leq 2 \iff \frac{e^x - e^{-x}}{2} \leq 2$$

On pose $X = e^x$. On a alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{sh}\,(x) \leq 2 &\iff X - \frac{1}{X} - 4 \leq 0\\ &\iff X^2 - 4X - 1 \leq 0\end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme X^2-4X-1 vaut 20. Les racines de ce polynôme sont donc : $2-\sqrt{5}<0$ et $2+\sqrt{5}>0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathrm{sh}\,(x)\leq 2 &\iff 2-\sqrt{5}<X<2+\sqrt{5}\\
&\iff 2-\sqrt{5}<e^x<2+\sqrt{5}\\
&\iff 0\leq e^x<2+\sqrt{5}\\
&\iff x<\ln(2+\sqrt{5})
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble solution est $]-\infty,\ln\left(2+\sqrt{5}\right)[$.

2. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{ch}\,(x)=3 \iff \frac{e^x+e^{-x}}{2}=3$$

On pose $X=e^x$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}\,(x)=3 &\iff X+\frac{1}{X}-6=0\\
&\iff X^2-6X+1=0
\end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme X^2-6X+1 vaut 32. Les racines de ce polynôme sont donc : $3-2\sqrt{2}>0$ et $3+2\sqrt{2}>0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}\,(x)=3 &\iff \left\{\begin{array}{l} e^x=3+2\sqrt{2}\\ \text{ou}\\ e^x=3-2\sqrt{2}\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{l} e^x=3+2\sqrt{2}\\ x=\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)\\ \text{ou}\\ x=\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\{\ln\left(3-2\sqrt{2}\right),\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)\}$.

3. L'équation $\mathrm{ch}\,(x)=3$ admet deux solutions réelles qui sont $\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)$ et $\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)$. Or, ch est strictement décroissante sur $]-\infty,0]$ et $3-2\sqrt{2}=\sqrt{9}-\sqrt{8}\leq 0$. Ainsi, pour tout $x\in[\ln(3-2\sqrt{2}),0]$, $\mathrm{ch}\,(x)\leq 3$ et pour tout $x\in]-\infty,\ln(3-2\sqrt{2})[$, $\mathrm{ch}\,(x)>3$. De la même manière, ch est croissante sur $[0,+\infty[$ donc pour tout $x\in[0,\ln(3+2\sqrt{2})]$, $\mathrm{ch}\,(x)\leq 3$ et pour tout $x\in]\ln(3+2\sqrt{2}),+\infty[$, $\mathrm{ch}\,(x)>3$. On en déduit que l'ensemble des solutions est $[\ln\left(3-2\sqrt{2}\right),\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)]$.

Exercice 10. Soit $x\in\mathbb{R}^*$, on a $\dfrac{\mathrm{ch}\,(\ln x)+\mathrm{sh}\,(\ln x)}{x}=\dfrac{e^{\ln x}}{x}=1$.

Exercice 11. Soit $x\in\mathbb{R}$,

$$7\mathrm{ch}\,(x)+2\mathrm{sh}\,(x)=9 \iff 7\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)+2\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)=9$$

On pose $X=e^x$. On a alors :

$$\begin{aligned}
7\mathrm{ch}\,(x)+2\mathrm{sh}\,(x)=9 &\iff 7\left(X+\frac{1}{X}\right)+2\left(X-\frac{1}{X}\right)-18=0\\
&\iff 9X^2-18X+5=0.
\end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $9X^2-18X+5$ vaut 12^2. Les racines de ce polynôme sont donc :$\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{5}{3}$.
On a alors :

$$\begin{aligned}
7\mathrm{ch}\,(x)+2\mathrm{sh}\,(x)=9 &\iff \left\{\begin{array}{l} e^x=\dfrac{1}{3}\\ \text{ou}\\ e^x=\dfrac{5}{3}\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x=-\ln(3)\\ \text{ou}\\ x=\ln\left(\dfrac{5}{3}\right)\end{array}\right.
\end{aligned}$$

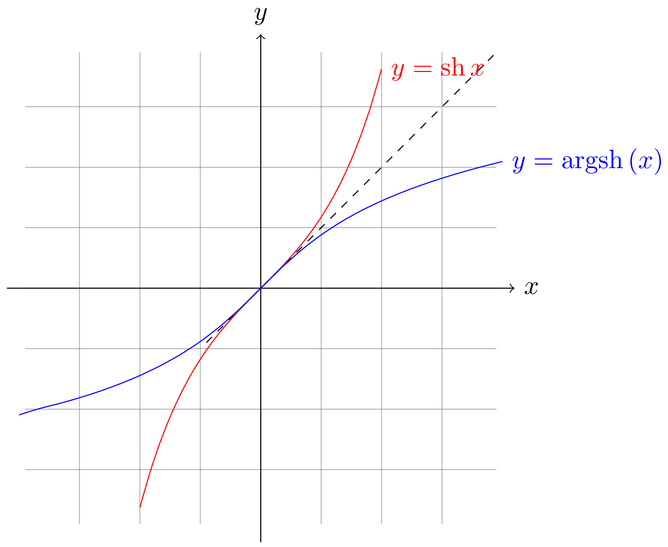
Ainsi, l'ensemble des solutions est $\{-\ln(3),\ln\left(\dfrac{5}{3}\right)\}$.

Exercice 12. 1. (a) La fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (car dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée ch, strictement positive) et continue. Elle est donc bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathrm{sh}(\mathbb{R}) =]\lim_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x), \lim_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x)[$.

Or, $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$. Ainsi, sh est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Comme vu plus haut, sh est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable, de dérivée de signe strictement positif. Par le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque, argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$,
$\mathrm{argsh}'(x) = \frac{1}{\mathrm{sh}'(\mathrm{argsh}(x))} = \frac{1}{\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}(x))}$.
Or $\mathrm{ch}^2(\mathrm{argsh}(x)) - \mathrm{sh}^2(\mathrm{argsh}(x)) = 1$, donc $\mathrm{ch}^2(\mathrm{argsh}(x)) = 1 + x^2$ et comme $\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}(x)) > 0$, $\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}(x)) = \sqrt{1+x^2}$. On a donc $\mathrm{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

(c) Le graphe de argsh est le symétrique de celui de sh par rapport à la droite $y = x$:



(d) Soit $y \in \mathbb{R}$, soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{sh}(x) = y &\iff \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \\ &\iff e^{2x} - 1 = 2ye^x \end{aligned}$$

Posons $X = e^x$. On a alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{sh}(x) = y &\iff X^2 - 2yX - 1 = 0 \\ &\iff X = y \pm \sqrt{1+y^2} \end{aligned}$$

Or, le produit des racines du polynôme $X^2 - 2yX - 1$ vaut -1 donc une des racines est strictement négative et l'autre est strictement positive. Or, $y + \sqrt{1+y^2} \geq y - \sqrt{1+y^2}$ donc $y + \sqrt{1+y^2} > 0$ et $y - \sqrt{1+y^2} < 0$. Comme $X = e^x$ doit être positif, on en déduit que

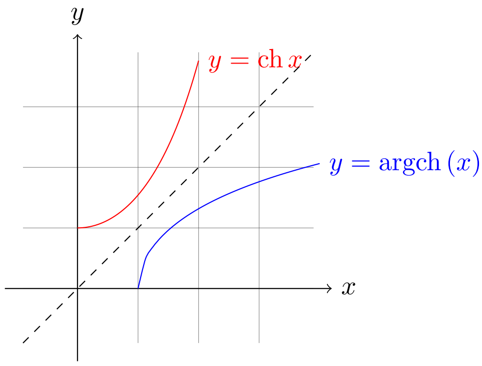
$$\begin{aligned} \mathrm{sh}(x) = y &\iff e^x = y + \sqrt{1+y^2} \\ &\iff x = \ln(y + \sqrt{y^2+1}) \end{aligned}$$

Ainsi, sh est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (chaque élément de $\mathbb{R}$ admet un unique antécédent par sh) et on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

2. (a) La fonction ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (car dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{ch}'x = \mathrm{sh}\, x > 0$) et est continue. Elle est donc bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $[\mathrm{ch}(0), \lim_{x\to+\infty} \mathrm{ch}\, x[$. Or, $\mathrm{ch}(0) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$. Ainsi, ch est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$.

(b) $\mathrm{ch} : \mathbb{R}_+ \to [1, +\infty[$ est bijective, dérivable. De plus : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{ch}'(x) \neq 0$ et $\mathrm{ch}'(0) \neq 0$. Donc argch est dérivable sur $]\mathrm{ch}(0), \lim_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(x)[=]1, +\infty[$.
Finalement, ch est donc dérivable sur $[1, +\infty[$. Soit $x \in]1, +\infty[$, $\mathrm{argch}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}'(\mathrm{argch}(x))} = \frac{1}{\mathrm{sh}(\mathrm{argch}(x))}$.
Or $\mathrm{ch}^2(\mathrm{argch}(x)) - \mathrm{sh}^2(\mathrm{argch}(x)) = 1$, donc $\mathrm{sh}^2(\mathrm{argch}(x)) = x^2 - 1$ et comme $\mathrm{sh}(\mathrm{argch}(x)) > 0$ (car $\mathrm{argch}(x) > 0$), $\mathrm{sh}(\mathrm{argch}(x)) = \sqrt{x^2-1}$. On a donc $\mathrm{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

(c) La courbe représentative de argch est la symétrique de celle de ch par rapport à la droite d'équation $y = x$.



(d) Soit $y \in [1, +\infty[$, soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} x = y \quad &\iff \quad e^x + e^{-x} = 2y \\ &\iff \quad e^{2x} + 1 = 2ye^x \end{aligned}$$

Posons $X = e^x$. On a alors :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} x = y \quad &\iff \quad X^2 - 2yX + 1 = 0 \\ &\iff \quad X = y \pm \sqrt{y^2 - 1} \end{aligned}$$

Or, $x \geq 0$, donc $X \geq 1$. De plus, le produit des racines X_0, X_1 du polynôme $X^2 - 2yX + 1$ vaut 1 donc $X_1 = \frac{1}{X_0} < 1$. On en déduit que l'une est strictement supérieur à 1 et l'autre strictement inférieure à 1. Or, $y + \sqrt{y^2 - 1} > y - \sqrt{y^2 - 1}$. Ainsi, $y + \sqrt{y^2 - 1} > 1$ et $y - \sqrt{y^2 - 1} < 1$. On a donc :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} x = y \quad &\iff \quad X = y + \sqrt{y^2 - 1} \\ &\iff \quad e^x = y + \sqrt{y^2 - 1} \\ &\iff \quad x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) \end{aligned}$$

Ainsi, $\operatorname{ch} : \mathbb{R}_+ \to [1, +\infty[$ est bijective et on a : $\forall x \in [1, +\infty[, \ \operatorname{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

Exercice 13. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{sh}(a+b) = e^{a+b} \quad \text{et} \quad (\operatorname{ch}(a) + \operatorname{sh}(a))(\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(b)) = e^a e^b = e^{a+b}.$$

Ainsi, $\operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{sh}(a+b) = (\operatorname{ch}(a) + \operatorname{sh}(a))\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(b))$. De même,

$$\operatorname{ch}(a+b) - \operatorname{sh}(a+b) = e^{-(a+b)} \quad \text{et } (\operatorname{ch}(a) - \operatorname{sh}(a))(\operatorname{ch}(b) - \operatorname{sh}(b)) = e^{-a}e^{-b} = e^{-(a+b)}$$

Donc $\operatorname{ch}(a+b) - \operatorname{sh}(a+b) = (\operatorname{ch}(a) - \operatorname{sh}(a))(\operatorname{ch}(b) - \operatorname{sh}(b))$.
En ajoutant ces deux formules, on obtient alors :

$$\begin{aligned} 2\operatorname{ch}(a+b) &= (\operatorname{ch}(a) + \operatorname{sh}(a))(\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(b)) + (\operatorname{ch}(a) - \operatorname{sh}(a))(\operatorname{ch}(b) - \operatorname{sh}(b)) \\ &= \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b) \\ &\quad + \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) - \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b) - \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b) \\ &= 2\operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + 2\operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b) \end{aligned}$$

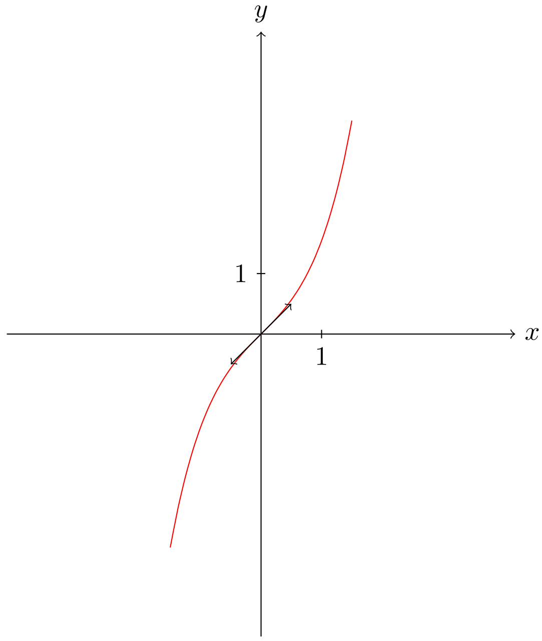
dont on déduit $\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)$.
De même en soustrayant les deux formules, on obtient $\operatorname{sh} a + b = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a$.
On a donc $\operatorname{ch}(2a) = \operatorname{ch}(a)^2 + \operatorname{ch}(a)^2 = 1 + 2\operatorname{sh}(a)^2 = 2\operatorname{ch}(a)^2 + 1$, $\operatorname{sh}(2a) = 2\operatorname{sh} a \operatorname{ch} a$. Enfin, comme ch est paire et sh est impaire, on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(a-b) &= \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(-b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(-b) \\ &= \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) - \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(a-b) &= \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(-b) + \operatorname{sh}(-b)\operatorname{ch}(a) \\ &= \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) - \operatorname{sh}(b)\operatorname{ch}(a) \end{aligned}$$

Exercice 14. f est définie sur $\mathbb{R}$.
De plus, f est impaire. Il suffit donc de l'étudier sur $\mathbb{R}_+$. Lors du tracé de la courbe, on réalisera une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que produit de fonctions dérivables.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = \text{ch}\,(x) + x\text{sh}\,(x)$.
De plus, $\text{ch}\,(x) > 0$ et $\text{sh}\,(x) \geq 0$ pour $x \in \mathbb{R}_+$. Ainsi, Donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) > 0$.
Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Par imparité, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$, c'est à dire $y = x$.
On obtient alors la courbe représentative suivante :



3 Fonctions circulaires

Exercice 15. 1. cos est 2π périodique. Soit $x \in]-\pi, \pi]$,

$$\cos x > 0 \iff x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions réelles de l'équation $\cos x > 0$ est $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[$.

2. sin est 2π périodique. Soit $x \in]-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

$$\sin x \leq \frac{1}{2} \iff x \in \left]-\frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right].$$

Ainsi, l'ensemble des solutions réelles de l'équation $\sin x \leq \frac{1}{2}$ est $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right]$.

3. tan est π périodique et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. De plus, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\tan x > \frac{\sqrt{3}}{3} \iff x \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions réelles de l'équation $\tan x > \frac{\sqrt{3}}{3}$ est $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$.

Exercice 16. 1. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \cos x = \frac{1}{2} &\iff \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \\ &\iff x \equiv \pm\frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\{\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{6}-x)=1 &\iff \sin(\frac{\pi}{6}-x)=\sin(\frac{\pi}{4}) \\
&\iff \begin{cases} \frac{\pi}{6}-x \equiv \frac{\pi}{4} \quad [2\pi] \\ \text{ou} \\ \frac{\pi}{6}-x \equiv \pi-\frac{\pi}{4} \quad [2\pi] \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \equiv -\frac{\pi}{12} \quad [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv -\frac{7\pi}{12} \quad [2\pi] \end{cases}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\{-\frac{\pi}{12}+2k\pi\,;\,k\in\mathbb{Z}\}\cup\{-\frac{7\pi}{12}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
2\cos(2x)=\sqrt{3} &\iff \cos(2x)=\cos\frac{\pi}{6} \\
&\iff 2x \equiv \pm\frac{\pi}{6} \quad [2\pi] \\
&\iff x \equiv \pm\frac{\pi}{12} \quad [\pi]
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\{\pm\frac{\pi}{12}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $X=\cos(2x)$. On a :

$$\begin{aligned}
2\cos^2(2x)-3\cos(2x)=-1 &\iff X^2-3X+1=0 \\
&\iff (2X-1)(X-1)=0 \\
&\iff X=\frac{1}{2} \text{ ou } X=1 \\
&\iff \begin{cases} \cos(2x)=1 \\ \text{ou} \\ \cos(2x)=\frac{1}{2} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x\equiv 0 \quad [2\pi] \\ \text{ou} \\ 2x \equiv \pm\frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x\equiv 0 \quad [\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv \pm\frac{\pi}{6} \quad [\pi] \end{cases}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\{k\pi\,;\,k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\pm\frac{\pi}{6}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

5. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\cos(2x)=\cos x &\iff 2x\equiv \pm x \quad [2\pi] \\
&\iff \begin{cases} x\equiv 0 \quad [2\pi] \\ \text{ou} \\ 3x\equiv 0 \quad [2\pi] \end{cases} \\
&\iff x\equiv 0 \quad [\frac{2\pi}{3}]
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\{\frac{2k\pi}{3}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

6. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\sin(2x)+\sin x=0 &\iff 2\sin x\cos x+\sin x=0 \\
&\iff \sin x(2\cos x+1)=0 \\
&\iff \begin{cases} \sin x=0 \\ \text{ou} \\ \cos x=-\frac{1}{2} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x\equiv 0 \quad [\pi] \\ \text{ou} \\ x\equiv \pm\frac{2\pi}{3} \quad [2\pi] \end{cases}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\{k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

7. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\sin(2x) + \sin(\frac{\pi}{3} + 3x) = 0 \quad &\iff \quad \sin(\frac{\pi}{3} + 3x) = \sin(-2x) \\
&\iff \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{3} + 3x \equiv -2x \quad [2\pi] \\ \text{ou} \\ \frac{\pi}{3} + 3x \equiv \pi + 2x \quad [2\pi] \end{array} \right. \\
&\iff \quad \left\{ \begin{array}{l} x \equiv -\frac{\pi}{15} \quad [\frac{2\pi}{5}] \\ \text{ou} \\ x \equiv \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi] \end{array} \right.
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\{-\frac{\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5} \ , \ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$.

8. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\cos(3x) + \sin x = 0 \quad &\iff \quad \cos(3x) = \cos(x + \frac{\pi}{2}) \\
&\iff \quad 3x \equiv \pm(x + \frac{\pi}{2}) \quad [2\pi] \\
&\iff \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \\ \text{ou} \\ 4x \equiv -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \end{array} \right. \\
&\iff \quad \left\{ \begin{array}{l} x \equiv \frac{\pi}{4} \quad [\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv -\frac{\pi}{8} \quad [\frac{\pi}{2}] \end{array} \right.
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\{\frac{\pi}{4} + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$.

9. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\cos(x) - \cos 2x = \sin(3x) \quad &\iff \quad -2\sin\frac{3x}{2}\sin(-\frac{x}{2}) = 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2} \\
&\iff \quad \sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2} = \sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2} \\
&\iff \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin\frac{3x}{2} = 0 \\ \text{ou} \\ \sin\frac{x}{2} = \cos\frac{3x}{2} \end{array} \right. \\
&\iff \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{3x}{2} \equiv 0 \quad [\pi] \\ \text{ou} \\ \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}) = \cos\frac{3x}{2} \end{array} \right. \\
&\iff \quad \left\{ \begin{array}{l} x \equiv 0 \quad [\frac{2\pi}{3}] \\ \text{ou} \\ \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \equiv \pm\frac{3x}{2} \quad [2\pi] \end{array} \right. \\
&\iff \quad \left\{ \begin{array}{l} x \equiv 0 \quad [\frac{2\pi}{3}] \\ \text{ou} \\ x \equiv -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \\ \text{ou} \\ 2x \equiv \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]\Big) \end{array} \right. \\
&\iff \quad \left\{ \begin{array}{l} x \equiv 0 \quad [\frac{2\pi}{3}] \\ \text{ou} \\ x \equiv -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv \dfrac{\pi}{4} \quad [\pi] \end{array} \right.
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\{\frac{2k\pi}{3} \ , \ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{4} + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$.

10. On sait que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x \leq 1$ et $\sin x \leq 1$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a alors :

$$\cos x + \sin x = 2 \quad \iff \quad \cos x = \sin x = 1$$

Cette dernière équation n'admet aucune solution. Ainsi, l'équation $\cos x + \sin x = 2$ n'admet aucune solution.

11. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1 &\iff \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = \frac{1}{2}\\
&\iff \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos x - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\\
&\iff \cos(x+\frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{3})\\
&\iff x+\frac{\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{3} \quad [2\pi]\\
&\iff \begin{cases} x \equiv \frac{\pi}{6} \quad [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \end{cases}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 17. 1. On remarque que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$.

Ainsi, en utilisant les formules d'additions, on trouve $\cos\dfrac{\pi}{12} = \cos(\dfrac{\pi}{3})\cos(\dfrac{\pi}{4}) + \sin(\dfrac{\pi}{3})\sin(\dfrac{\pi}{4})$ et

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin\frac{\pi}{12} &= \sin(\frac{\pi}{3})\cos(\frac{\pi}{4}) - \sin(\frac{\pi}{3})\cos(\frac{\pi}{4}).\\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)
\end{aligned}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
(\sqrt{3}+1)\cos(2x) + (\sqrt{3}-1)\sin(2x) = \sqrt{2} &\iff \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)\cos(2x) + \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)\sin(2x) = \frac{1}{2}\\
&\iff \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\cos(2x) + \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin(2x) = \frac{1}{2}\\
&\iff \cos(2x - \frac{\pi}{12}) = \frac{1}{2}\\
&\iff 2x - \frac{\pi}{12} \equiv \pm\frac{\pi}{3} \quad [2\pi]\\
&\iff \begin{cases} x \equiv \frac{5\pi}{24} \quad [\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv -\frac{\pi}{8} \quad [\pi] \end{cases}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\{\frac{5\pi}{24} + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\frac{\pi}{8} + k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 18. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, considérons la propriété $\mathcal{P}(n) : \forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, |\sin(nx)| < n|\sin(x)|$.
Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.
Pour $n = 2$: soit $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z},\ \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.
Or, $\cos(x) < 1$. Ainsi, $|\sin(2x)| = 2|\sin(x)||\cos(x)| < 2|\sin(x)|$.
Donc : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z},\ |\sin(2x)| < 2|\sin x|$ et $\mathcal{P}(2)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on a alors $\sin((n+1)x) = \sin(nx)\cos(x) + \sin(x)\cos(nx)$.
Or, d'après l'inégalité triangulaire, on a : $|\sin((n+1)x)| \leq |\sin(nx)\cos(x)| + |\sin(x)\cos(nx)| \leq |\sin(nx)|\cos(x)| + |\sin(x)||\cos(nx)|$.
De plus, on sait que : $|\sin(nx)| < n|\sin(x)|$ et $|\cos(x)| < 1$ donc $|\sin(nx)||\cos(x)| < 1$ et $|\sin(x)||\cos(nx)| \leq |\sin(x)|$.
Ainsi, en ajoutant ces 2 termes, on obtient : $|\sin((n+1)x)| < n|\sin(x)| + |\sin(x)| = (n+1)|\sin(x)|$.
Donc : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z},\ |\sin((n+1)x)| < (n+1)|\sin(x)|$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
On a donc montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z},\ |\sin((n+1)x)| < (n+1)|\sin(x)|.$$

4 Fonctions circulaires réciproques

Exercice 19. 1. $\dfrac{2\pi}{3} \in [0,\pi]$ donc $\arccos\left(\cos\dfrac{2\pi}{2}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$.

2. $\arccos\,(\cos(4\pi)) = \arccos\,(\cos(0)) = 0$ car $0 \in [0,\pi]$.
3. $\arccos\left(\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right) = \dfrac{2\pi}{3}$ car $\dfrac{2\pi}{3} \in [0,\pi]$.
4. $\arctan\left(\tan\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right) = \arctan\left(\tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = -\dfrac{\pi}{4}$ par π périodicité de tan et car $-\dfrac{\pi}{4} \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
5. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos^2(\arctan x) = \dfrac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \dfrac{1}{1+x^2}$. Comme $\arctan x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\cos(\arctan x) > 0$ et $\cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
6. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\cos^2(\arctan x) = \dfrac{1}{1+\tan^2\arctan x} = \dfrac{1}{1+x^2}$. Comme $\arctan x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et que cos est positive sur cet intervalle, $\cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Ainsi $\sin(\arctan x) = \tan(\arctan x)\cos(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
Posons $y = \arctan x$, on a :
$$\sin(3y) = \sin y\cos(2y) + \sin(2y)\cos y = (1-2\sin^2 y)\sin y + 2\sin y\cos^2 y$$
Ainsi,
$$\begin{aligned}\sin(3\arctan x) &= \left(1 - \frac{2x^2}{1+x^2}\right)\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{1+x^2}\\ &= \frac{(1-x^2)x+2x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\\ &= \frac{3x-x^3}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\end{aligned}$$
7. Soit $x \in]-1,1[$, $\arcsin x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc $\tan(\arcsin x)$ est bien défini.
On a $\sin(\arcsin x) = x$ et $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ (comme dans le cours), donc $\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
8. • Première méthode, en dérivant : Soit $f : x \mapsto \arccos\,(x) + \arccos\,(-x)$. f est dérivable sur $]-1,1[$. De plus, $\forall x \in]-1,1[$, $f'(x) = 0$. Ainsi f est constante sur $]-1,1[$. De plus, f est continue sur $[-1,1]$ donc f est constante sur $[-1,1]$. En prenant la valeur en 0 on trouve $f(0) = \pi$ donc : $\forall x \in [-1,1]$, $f(x) = \pi$.
• Seconde méthode, en utilisant la fonction cosinus : Soit $x \in [-1,1]$, on a :
$$\begin{aligned}\cos(\arccos\,(x) + \arccos\,(-x)) &= \cos(\arccos\,(x))\cos(\arccos\,(-x)) - \sin(\arccos\,(x))\sin(\arccos\,(-x))\\ &= -x^2 - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-(-x)^2} = -x^2 - (1-x^2) = -1\end{aligned}$$
Ainsi, $\cos(\arccos\,(x)) + \arccos\,(-x)) = \cos(\pi)$. De plus, comme arccos est à valeurs dans $[0,\pi]$, $0 \leq \arccos\,(x) + \arccos\,(-x) \leq 2\pi$. L'équation $\cos(y) = -1$ admet une unique solution dans $[0,2\pi]$ qui est π.
Ainsi, $\arccos\,(x) + \arccos\,(-x) = \pi$.

Exercice 20. On a :

- ▷ *tan* $\left(\arctan\dfrac{1}{239}\right) = \dfrac{1}{239}$.

  ▷ $\tan\left(4\arctan\dfrac{1}{5}\right) = \dfrac{2\tan\left(2\arctan\frac{1}{5}\right)}{1-\tan^2\left(2\arctan\frac{1}{5}\right)}$ et $\tan\left(2\arctan\dfrac{1}{5}\right) = \dfrac{2\tan\left(\arctan\frac{1}{5}\right)}{1-\tan^2\left(\arctan\frac{1}{5}\right)} = \dfrac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \dfrac{5}{12}$.

  Ainsi, $\tan\left(4\arctan\dfrac{1}{5}\right) = \dfrac{120}{119}$.

  ▷ D'où $\tan\left(4\arctan\dfrac{1}{5} - \arctan\dfrac{1}{239}\right) = \dfrac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{120}{119} \times \frac{1}{239}} = 1 = \tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.
- On a $0 < \dfrac{1}{5} < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ donc comme arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a $0 < \arctan\dfrac{1}{5} < \arctan\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
Donc $0 < \arctan\dfrac{1}{5} < \dfrac{\pi}{6}$ puis $0 < 4\arctan\dfrac{1}{5} < \dfrac{2\pi}{3}$.

De même, $0 < \dfrac{1}{239} < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ donc $0 < \arctan \dfrac{1}{239} < \arctan \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ donc $0 < \arctan \dfrac{1}{239} < \dfrac{\pi}{6}$.
Puis $0 > -\arctan \dfrac{1}{239} > -\dfrac{\pi}{6}$.
Ainsi, $4\arctan \dfrac{1}{5} - \arctan \dfrac{1}{239} \in \left]-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{2\pi}{3}\right[\subset \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
Donc $4\arctan \dfrac{1}{5} - \arctan \dfrac{1}{239} = \dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 21. 1. • L'équation a un sens pour $x \in [-1, 1]$.

- Analyse : supposons qu'il existe $x \in [-1, 1]$ tel que $\arcsin \dfrac{4}{5} + \arcsin \dfrac{5}{13} = \arcsin x$.
  Alors, $\sin\left(\arcsin \dfrac{4}{5} + \arcsin \dfrac{5}{13}\right) = \sin(\arcsin x)$.
  Or :

$$\begin{aligned}
\sin(\arcsin x) = \sin\left(\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13}\right) &\iff x = \sin\left(\arcsin \frac{4}{5}\right)\cos\left(\arcsin \frac{5}{13}\right) + \sin\left(\arcsin \frac{5}{13}\right)\cos\left(\arcsin \frac{4}{5}\right) \\
&\iff x = \frac{4}{5} \times \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} + \frac{5}{13}\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} \\
&\iff x = \frac{4}{5}\sqrt{\frac{169-25}{13^2}} + \frac{5}{13}\sqrt{\frac{25-16}{5^5}} \\
&\iff x = \frac{4}{5} \times \frac{12}{13} + \frac{5}{13} \times \frac{3}{5} \\
&\iff x = \frac{48+15}{65} \\
&\iff x = \frac{63}{65}
\end{aligned}$$

  Donc $x = \dfrac{63}{65}$.
- Synthèse : Posons $x = \dfrac{63}{65}$.
  Alors, $\sin(\arcsin x) = \sin\left(\arcsin \dfrac{4}{5} + \arcsin \dfrac{5}{13}\right)$, d'après l'équivalence de la phase d'analyse.
  - Or, $\arcsin(x) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ car $x \geq 0$
  - De plus, on a $0 \leq \dfrac{4}{5} \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ car $\dfrac{16}{25} \leq \dfrac{3}{4}$ (car $64 \leq 75$) donc $0 \leq \arcsin\left(\dfrac{4}{5}\right) \leq \arcsin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ (croissance de l'arcsinus).
    De même, $0 \leq \dfrac{5}{13} \leq \dfrac{1}{2}$ car $10 < 13$ donc $0 \leq \arcsin\left(\dfrac{5}{13}\right) \leq \dfrac{\pi}{6}$.
    On en déduit que $\arcsin\left(\dfrac{4}{5}\right) + \arcsin\left(\dfrac{5}{13}\right) \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

  Donc $\arcsin x = \arcsin \dfrac{4}{5} + \arcsin \dfrac{5}{13}$.
- En conclusion, l'ensemble des solutions est $\left\{\dfrac{63}{65}\right\}$.

2. • L'équation a un sens pour $x \in [-1, 1]$.
- Analyse : supposons qu'il existe $x \in [-1, 1]$ tel que $\arccos x = \arcsin x$.
  Alors, $\cos(\arccos x) = \cos(\arcsin x)$.
  Or :

$$\begin{aligned}
\cos(\arccos x) = \cos(\arcsin x) &\iff x = \sqrt{1-x^2} \\
&\iff \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 1 - x^2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \\
&\iff x = \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

  Donc $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

- Synthèse : Posons $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
On a $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ et $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ donc $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- En conclusion, l'ensemble des solutions est $\left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$.

3.
- L'équation a un sens pour $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$.
- Analyse : supposons qu'il existe $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$ tel que $\arccos x = \arcsin 2x$.
Alors, $\cos(\arccos x) = \cos(\arcsin 2x)$.
Or :

$$\begin{aligned}
\cos(\arccos x) = \cos(\arcsin 2x) &\iff x = \sqrt{1-4x^2} \\
&\iff \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 1 - 4x^2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = \frac{1}{5} \end{cases} \\
&\iff x = \frac{\sqrt{5}}{5}
\end{aligned}$$

Donc $x = \frac{\sqrt{5}}{5}$.
- Synthèse : Posons $x = \frac{\sqrt{5}}{5}$.
Alors, $\cos(\arccos x) = \cos(\arcsin 2x)$, d'après l'équivalence de la phase d'analyse.
  - Or, $\arccos(x) \in [0, \pi]$
  - De plus, on a $0 \leq \frac{2\sqrt{5}}{5} \leq 1$ donc $0 \leq \arcsin(2x) \leq \frac{\pi}{2}$ (croissance de l'arcsinus).
  On en déduit que $\arcsin(2x) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \subset [0, \pi]$.

  Donc $\arccos x = \arcsin 2x$.
- En conclusion, l'ensemble des solutions est $\left\{ \frac{\sqrt{5}}{5} \right\}$.

4.
- Soit $x \in [-1, 1]$,

$$\begin{aligned}
-1 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1 &\iff \sqrt{1-x^2} \leq 1 \\
&\iff 1 - x^2 \leq 1 \\
&\iff 0 \leq x^2
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in [-1, 1]$, $\sqrt{1-x^2} \in [-1, 1]$ et l'équation a un sens pour $x \in [-1, 1]$.
- Analyse : supposons qu'il existe $x \in [-1, 1]$ tel que $\arcsin x + \arcsin \sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2}$.
Alors, $\sin(\arcsin x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{1-x^2}\right)$.
Or :

$$\begin{aligned}
\sin(\arcsin x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{1-x^2}\right) &\iff x = \cos\left(\arcsin \sqrt{1-x^2}\right) \\
&\iff x = \sqrt{1 - (\sqrt{1-x^2})^2} \\
&\iff x = \sqrt{1 - (1-x^2)} \\
&\iff x = |x| \\
&\iff x \geq 0
\end{aligned}$$

Donc $x \in [0, 1]$.
- Synthèse : Soit $x \in [0, 1]$.
Alors, $\sin(\arcsin x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{1-x^2}\right)$, d'après l'équivalence de la phase d'analyse.

- Or, $\arcsin(x) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ car $x \geq 0$
- De plus, on a $0 \leq \sqrt{1-x^2}$ donc $\arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (croissance de l'arcsinus).
  D'où $\frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{1-x^2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Donc $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{1-x^2}$.

- En conclusion, l'ensemble des solutions est $[0, 1]$.

5. - L'équation a un sens pour $\begin{cases} x \in [-1,1] \\ |2x^2-1| \in [-1,1] \end{cases}$

   Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} |2x^2-1| \in [-1,1] &\iff -1 \leq 2x^2 - 1 \leq 1 \\ &\iff 0 \leq 2x^2 \leq 2 \\ &\iff x \in [-1,1] \end{aligned}$$

   Finalement, l'équation a un sens pour $x \in [-1,1]$.

   - Analyse : supposons qu'il existe $x \in [-1,1]$ tel que $2\arcsin x = \arccos|2x^2-1|$.
   Alors, $\cos(2\arcsin x) = \cos\left(\arccos|2x^2-1|\right)$.
   Or :

$$\begin{aligned} \cos(2\arcsin x) = \cos\left(\arccos|2x^2-1|\right) &\iff 1 - 2\sin^2(\arcsin x) = ||2x^2-1| \\ &\iff 1 - 2x^2 = ||2x^2-1| \\ &\iff 2x^2 - 1 \leq 0 \\ &\iff x^2 \leq \frac{1}{2} \\ &\iff x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \end{aligned}$$

   Donc $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

   - Synthèse : Soit $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.
   Alors, $\cos(2\arcsin x) = \cos\left(\arccos|2x^2-1|\right)$, d'après l'équivalence de la phase d'analyse.
     - Or, $\arccos|2x^2-1| \in [0, \pi]$.
     - De plus, si $x \geq 0$, $\arcsin(x) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $2\arcsin(x) \in [0, \pi]$. Donc $2\arcsin x = \arccos|2x^2-1|$. x est donc solution.
     - Si $x < 0$. $\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ donc $2\arcsin(x) \in [-\pi, 0[$ et $\arccos|2x^2-1| \in [0, \pi]$ donc x n'est pas solution.
   - En conclusion, l'ensemble des solutions est $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

6. - Soit $x \in [-1,1]$.

$$\begin{aligned} -1 \leq 2x\sqrt{1-x^2} \leq 1 &\iff |2x|\sqrt{1-x^2} \leq 1 \\ &\iff 4x^2(1-x^2) \leq 1 \\ &\iff -4\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

   Ainsi, pour tout $x \in [-1,1]$, $2x\sqrt{1-x^2} \in [-1,1]$.
   L'équation a finalement un sens pour $x \in [-1,1]$.

   - Analyse : supposons qu'il existe $x \in [-1,1]$ tel que $2\arcsin x = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.
   Alors, $\sin(2\arcsin x) = \sin\left(\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})\right)$.
   Or :

$$\begin{aligned} \sin(2\arcsin x) = \sin\left(\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})\right) &\iff 2\cos(\arcsin x)\sin(\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2} \\ &\iff 2x\sqrt{1-x^2} = 2x\sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

   Donc $x \in [-1,1]$.

- Synthèse : Soit $x \in [-1,1]$.
  Alors, $\sin(2\arcsin x) = \sin\left(\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})\right)$, d'après l'équivalence de la phase d'analyse.
  - Or, $\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
  - - Si $x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, $\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ donc $2\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi, $2\arcsin x = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.
    - Si $x \in \left[-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$, $\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right[$ donc $2\arcsin x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$. Ainsi, $2\arcsin x \neq \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.
    - Si $x \in \left]\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$, $\arcsin x \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $2\arcsin x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Ainsi, $2\arcsin x \neq \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.
- En conclusion, l'ensemble des solutions est $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

7. - L'équation a un sens pour $x \in \mathbb{R}$.
   - Analyse : supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\arctan x + \arctan 2x = \frac{\pi}{4}$.
     Alors, $\tan(\arctan x + \arctan 2x) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
     Or :

$$\begin{aligned}
\tan(\arctan x + \arctan 2x) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) &\iff \frac{\tan(\arctan x) + \tan(\arctan 2x)}{1 - \tan(\arctan x)\tan(\arctan 2x)} = 1 \\
&\iff \frac{3x}{1-2x^2} = 1 \\
&\iff x = \frac{-3-\sqrt{17}}{4} \text{ ou } x = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}
\end{aligned}$$

   Donc $x \in \{\frac{-3-\sqrt{17}}{4}, \frac{-3+\sqrt{17}}{4}\}$.
   - Synthèse : Soit $x \in \{\frac{-3-\sqrt{17}}{4}, \frac{-3+\sqrt{17}}{4}\}$.
     Alors, $\tan(\arctan x + \arctan 2x) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$, d'après l'équivalence de la phase d'analyse.
     - Si $x = \frac{-3-\sqrt{17}}{4}$.
       On a $x < 0$ et $2x < 0$ donc $\arctan x < 0$ et $\arctan 2x < 0$ car $\arctan 0 = 0$ et (croissance de l'arcsinus) donc $\arctan x + \arctan 2x < 0$.
       Ainsi, x n'est pas solution.
     - Si $x = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}$.
       $x > 0$ donc $\arctan x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $2x > 0$ donc $\arctan 2x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Ainsi, $\arctan x + \arctan 2x \in [0, \pi[$.
       Or, l'équation $\tan x = 1$ admet une unique solution sur $[0,\pi[$ qui est $\frac{\pi}{4}$. Ainsi, $\arctan x + \arctan 2x = \frac{\pi}{4}$.
   - En conclusion, l'ensemble des solutions est $\left\{\frac{-3+\sqrt{17}}{4}\right\}$.

8. - L'équation a un sens pour $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.
   - Analyse : Supposons qu'il existe $x \in \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ tel que $\arcsin(2x) - \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin(x)$.
     On a alors, $\sin\left(\arcsin(2x) - \arcsin(x\sqrt{3})\right) = \sin(\arcsin x)$.
     Or :

$$\begin{aligned}
\sin\left(\arcsin(2x) - \arcsin(x\sqrt{3})\right) = \sin(\arcsin x) &\iff \sin(\arcsin(2x))\cos(\arcsin(x\sqrt{3})) - \sin(\arcsin(x\sqrt{3}))\cos(\arcsin(2x)) = x \\
&\iff 2x\sqrt{1-3x^2} - \sqrt{3}x\sqrt{1-4x^2} = x \\
&\iff x = 0 \text{ ou } 2\sqrt{1-3x^2} - \sqrt{3}\sqrt{1-4x^2} = 1
\end{aligned}$$

De plus, $2\sqrt{1-3x^2}-\sqrt{3}\sqrt{1-4x^2}=1 \iff 2\sqrt{1-3x^2}=1+\sqrt{3}\sqrt{1-4x^2}$

$$\begin{aligned}
&\iff 4(1-3x^2)=1+2\sqrt{3}\sqrt{1-4x^2}+3(1-4x^2) \quad \text{car } \geq 0\\
&\iff 4-12x^2=1+2\sqrt{3}\sqrt{1-4x^2}+3-12x^2\\
&\iff 0=2\sqrt{3}\sqrt{1-4x^2}\\
&\iff 1-4x^2=0\\
&\iff x=\pm\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi, $x\in\{0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\}$.

- Synthèse : On vérifie si nos éventuelles solutions sont bien solutions :
  $\arcsin(2\times 0)-\arcsin(\sqrt{3}\times 0)=0=\arcsin(0)$ donc 0 est bien solution.
  $\arcsin(-1)-\arcsin(\frac{-\sqrt{3}}{2})=\frac{-\pi}{2}-\left(\frac{-\pi}{3}\right)=-\frac{\pi}{6}=\arcsin(-\frac{1}{2})$ donc $-\frac{1}{2}$ est bien solution.
  $\arcsin(1)-\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}=\arcsin(\frac{1}{2})$ donc $\frac{1}{2}$ est bien solution.

- Ainsi, l'ensemble des solutions est : $\mathcal{S}=\{-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\}$.

Exercice 22. 1. Cette formule sera vraie pour tout $x\in[-1,1]$. Posons $h:\begin{array}{ccc}[-1,1] & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \arcsin x+\arccos x\end{array}$.
h est dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout $x\in]-1,1[$, $h'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0$. Ainsi, h est constante sur $]-1,1[$ et h est continue sur $[-1,1]$ donc h est constante sur $[-1,1]$. Ainsi, pour tout $x\in[-1,1]$, $h(x)=h(0)=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$.

2. Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

$$\frac{1-x}{1+x}\geq 0 \iff x\in]-1,1]$$

(faire un tableau de signes). Ainsi, cette formule a un sens pour $x\in]-1,1]$.
Posons $g:\begin{array}{ccc}]-1,1] & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)+\arcsin x\end{array}$. g est dérivable sur $]-1,1[$.
Soit $x\in]-1,1[$, $g'(x)=\frac{2}{1+\frac{1-x}{1+x}}\times\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\times\frac{-2}{(1+x)^2}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{-(1+x)\sqrt{1+x)}}{\sqrt{1-x(1+x)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}=0$.
Ainsi, g est constante sur $]-1,1[$. Or, g est continue en 1 donc g est constante sur $]-1,1]$. Ainsi, pour tout $x\in[-1,1]$, $g(x)=g(0)=\frac{\pi}{2}$.

3. Cette formule a un sens pour tout $x\in\mathbb{R}$. Posons $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & 2\arctan(\sqrt{1+x^2}-x)+\arctan x\end{array}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\frac{2}{1+\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^2}\times\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1\right)+\frac{1}{1+x^2}=\frac{2}{2+2x^2-2x\sqrt{1+x^2}}\times\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1\right)+\frac{1}{1+x^2}.\\
&=\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{(1+x^2)(\sqrt{1+x^2}-x)}+\frac{1}{1+x^2}\\
&=0
\end{aligned}$$

Ainsi, f est constante sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=f(0)=\frac{\pi}{2}$.

4. **Par étude de fonction.**
On pose $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \arctan(x)+\arctan(\frac{1}{x})\end{array}$.
f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a : $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $f'(x)=0$. Ainsi, il existe $C_1,C_2\in\mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x\in\mathbb{R}_-^*,\ f(x)=C_1$$

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f(x)=C_2$$

De plus,

- $f(1) = 2\arctan(1) = \frac{\pi}{2}$ Donc $C_1 = \frac{\pi}{2}$.
  $= C_1$
- $f(-1) = 2\arctan(-1) = -\frac{\pi}{2}$ Donc $C_2 = -\frac{\pi}{2}$.
  $= C_2$

Ainsi,

$$\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{si } x \in \mathbb{R}_-^* \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

Méthode directe :
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrons que $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \dfrac{1}{\tan(\arctan(\frac{1}{x}))} = x = \tan(\arctan(x))$.

De plus, $\arctan(x) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ (car $x > 0$ et $\frac{1}{x} > 0$) donc $\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Ainsi, $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

Soit $x \in \mathbb{R}_-^*$. La fonction arctan étant impaire, on a : $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = -\left(\arctan(-x) + \arctan(\frac{1}{(-x)})\right)$ avec $-x \in \mathbb{R}_+^*$. Ainsi, $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{2}$.

Exercice 23. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ (pour que la racine carrée soit bien définie)

$$-1 \leq \frac{2\sqrt{x}}{1+x} \leq 1 \iff \begin{cases} \dfrac{1+x+2\sqrt{x}}{1+x} \geq 0 \\ \dfrac{2\sqrt{x}-1-x}{1+x} \leq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{(1+\sqrt{x})^2}{1+x} \geq 0 \\ \dfrac{-(1-\sqrt{x})^2}{1+x} \leq 0 \end{cases}$$

Ainsi, f est définie sur $\mathbb{R}_+$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$,

$$-1 < \frac{2\sqrt{x}}{1+x} < 1 \iff x \neq 1$$

(d'après les calculs précédents). Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$.

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\},\ f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{4x}{(1+x)^2}}} \times \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}(1+x) - 2\sqrt{x}}{(1+x)^2}$$

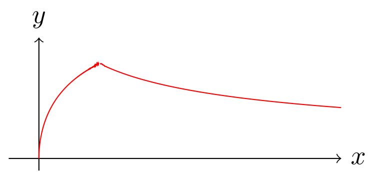
$$= \frac{(1+x)}{\sqrt{(1-x)^2}} \times \frac{(1-x)}{\sqrt{x}(1+x)^2}$$

$$= \frac{(1-x)}{|1-x|} \times \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$$

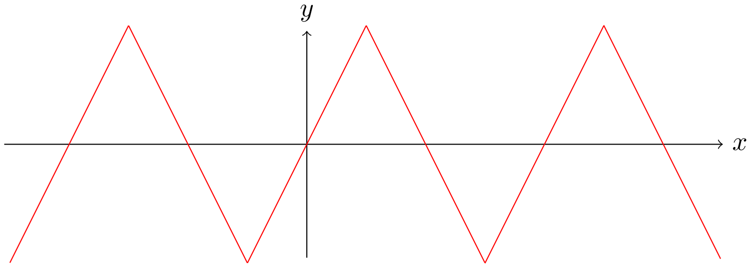
Soit $x \in \mathbb{R}_+$, $\dfrac{\sqrt{x}}{1+x} = \dfrac{\sqrt{x}}{x}\left(\dfrac{1}{\frac{1}{x}+1}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)$. Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x} = 0$.
De plus, $\lim\limits_{x \to 0} \arcsin(x) = \arcsin(0) = 0$ donc par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

On a $f(0) = \arcsin(0) = 0$ et $f(1) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0



Exercice 24. On sait que f est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, f est 2π périodique. Il suffit donc de l'étudier sur un intervalle de longueur 2π. Choisissons ce l'étudier sur $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = x$. De plus, pour tout $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $f(x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x$ car pour tout $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $\pi - x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Il suffit ensuite d'utiliser la 2π périodicité. On trace la courbe représentative de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ puis on effectue des translations de vecteurs $(2k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.



Exercice 25. Posons $\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \arctan(x) - \dfrac{x}{1+x^2} \end{array}$.

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que combinaison linéaire de fonctions dérivables.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-1+x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$$

Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) > 0$. De plus, on a : $\lim_{x\to 0} f(x) = \arctan(0) = 0$.
Ainsi, on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathbb{R}_+^*,\ f(x) > \lim_{x\to 0} f(x)$. Donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) > 0$.
Ce qui permet de conclure.

Exercice 26.

1. Posons $g : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. g est définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g(x) \in [-1,1] &\iff -1 \leq \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \leq 1 \\ &\iff \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} \leq 1 \\ &\iff |x| \leq \sqrt{x^2+1} \\ &\iff x^2 \leq x^2+1 \end{aligned}$$

   Ainsi, f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. . Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|x| < \sqrt{x^2+1}$ (car $0 \leq x^2 < x^2+1$ et la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$), donc $0 \leq \dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} < 1$. Ainsi, $-1 < \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1$. La fonction g est donc définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]-1,1[$. De plus, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et arcsin est dérivable sur $]-1,1[$. Ainsi, $f = \arcsin \circ g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2}} \times \frac{\sqrt{x^2+1} - \dfrac{2x^2}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{1+x^2}$$

3. D'après la question précédente, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \arctan'(x)$. Ainsi, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \arctan(x) + C$. Or, $f(0) = \arcsin(0) = 0$ et $f(0) = \arctan(0) + C = C$. Ainsi, $C = 0$.
   On en déduit que f est la fonction arc tangente.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$, $\sin(f(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ donc $\sqrt{x^2+1}\sin(f(x)) = x$ et $(x^2+1)\sin^2(f(x)) = x^2$.
   Ainsi, $x^2(1-\sin^2(f(x))) = \sin^2(f(x))$. Donc $x^2\cos^2(f(x)) = \sin^2(f(x))$.
   Or, $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \in]-1,1[$ donc $f(x) \in]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$. Ainsi, $\cos(f(x)) \neq 0$.
   On obtient alors : $x^2 = \dfrac{\sin^2(f(x))}{\cos^2(f(x))} = \tan^2(f(x))$.

D'où $\tan(f(x)) = x$ ou $\tan(f(x)) = -x$. Ainsi, $\tan(f(x)) = \tan \arctan x$ ou $\tan(f(x)) = \tan(\arctan(-x))$.
Or, $f(x), \arctan(x), \arctan(-x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $f(x) = \arctan(x)$ ou $f(x) = \arctan(-x) = -\arctan(x)$ (par imparité de la fonction arc tangente). Or, on sait que $\arcsin$ est strictement croissante sur $[-1, 1]$ et $\arcsin(0) = 0$. Ainsi, $f(x)$ est du signe de x. De même, $\arctan$ est strictement croissante $\mathbb{R}$ et $\arctan(0) = 0$ donc $\arctan x$ est du signe de x. Ainsi, on retrouve :$f(x) = \arctan(x)$.