Corrigé de la feuille d'exercices 5

1 Sommes

Exercice 1. $S_1 = \sum_{k=0}^{3} y_k = 3 \times 4 = 12$

$S_2 = \sum_{k=0}^{n+2} y_k = (n+2)(n+3)$

$S_3 = \sum_{k=0}^{2n} y_k = 2n(2n+1)$

$S_4 = \sum_{k=0}^{n} 3y_k = 3\sum_{k=0}^{n} y_k = 3n(n+1)$

$S_5 = \sum_{k=n+4}^{2n} y_k = \sum_{k=0}^{2n} y_k - \sum_{k=0}^{n+3} y_k = 2n(2n+1) - (n+3)(n+4) = 4n^2 + 2n - n^2 - 7n - 12 = 3n^2 - 5n - 12$

Exercice 2.

- $A_n = \dfrac{1-(-1)^{n+1}}{1-(-1)} = \dfrac{1-(-1)^{n+1}}{2}$.

  Ainsi :

  - si n est impair, $A_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = 0$,
  - si n est pair $A_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = 1$

- $B_n = \dfrac{1}{3} \times \sum_{i=2}^{n} \left(\dfrac{2}{3}\right)^i = \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \times \dfrac{1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}}{1 - \dfrac{2}{3}} = \dfrac{4}{9}\left(1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\right)$

- $C_n = 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = 2\dfrac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)^2$

- $D_n = \sum_{k=0}^{n} (2^2)^k = \dfrac{1-4^{n+1}}{1-4} = \dfrac{4^{n+1}-1}{3}$

- $E_n = 3 \times (n - 4 + 1) = 3(n-3)$

- $F_n = \left(\sum_{k=0}^{n} 2^k\right) + 4\left(\sum_{k=0}^{n} k\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} (n-3)\right) = 2^{n+1} - 1 + 4\dfrac{n(n+1)}{2} + (n+1)(n-3) = 2^{n+1} + 3(n+1)(n-1) - 1$

- $G_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n(n+1)(n-1)}{3}$

- - Si $x = 1$, alors $H_n(1) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
  - Si $x \neq 1$, on pose $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

    f est alors dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

    Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f'(x) = H_n(x) = \dfrac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2} = \dfrac{-(n+1)x^n + nx^{n+1} + 1}{(1-x)^2}$

- $I_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \Big(\ln(k+1) - \ln(k)\Big) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$ (somme télescopique).

- $J_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(k+1-1)}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \left(\dfrac{1}{k!} - \dfrac{1}{(k+1)!}\right) = 1 - \dfrac{1}{(n+1)!}$ (somme télescopique)

Exercice 3. 1. Soit $p \in \mathbb{N}$, on a : $(p+1)^2 - p^2 = 2p+1$.

2. $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{2p+1}{(p^2+p)^2} = \sum_{p=1}^{n} \frac{(p+1)^2 - p^2}{p^2(p+1)^2} = \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{(p+1)^2} \right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$ (en utilisant le résultat sur les sommes télescopiques).

Exercice 4. 1. (a) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
& \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2} \\
\iff\ & \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a(k+1)(k+2) + bk(k+2) + ck(k+1)}{k(k+1)(k+2)} \\
\iff\ & \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{k^2(a+b+c) + k(3a+2b+c) + 2a}{k(k+1)(k+2)} \\
\iff\ & \forall k \in \mathbb{N}^*,\ 1 = k^2(a+b+c) + k(3a+2b+c) + 2a \\
\iff\ & \begin{cases} 2a = 1 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \\
\iff\ & \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -1 \\ c = \dfrac{1}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$ et $c = \frac{1}{2}$ conviennent.

(b) $$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\frac{1}{2}}{k} - \frac{\frac{1}{2}}{k+1} - \frac{\frac{1}{2}}{k+1} + \frac{\frac{1}{2}}{k+2} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+2} \right) \qquad \text{(somme télescopique)} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$.

Exercice 5. 1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a $2\mathrm{ch}\,(x)\mathrm{sh}\,(x) = 2\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \mathrm{sh}\,(2x)$.

De plus, comme $x \in \mathbb{R}^*$, $\mathrm{sh}\,(x) \neq 0$.

Ainsi, $\mathrm{ch}\,(x) = \frac{\mathrm{sh}\,(2x)}{2\mathrm{sh}\,(x)}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $x \in \mathbb{R}$.
   - Si $x = 0$, on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{ch}\,\left(\frac{x}{2^k}\right) = 1$.
     Ainsi, $u_n = 1$.

- Si $x \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
u_n &= \prod_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sh}\left(2\dfrac{x}{2^k}\right)}{2\operatorname{sh}\left(\dfrac{x}{2^k}\right)} \\
&= \prod_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sh}\left(\dfrac{x}{2^{k-1}}\right)}{2\operatorname{sh}\left(\dfrac{x}{2^k}\right)} \\
&= \frac{1}{2^n}\prod_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sh}\left(\dfrac{x}{2^{k-1}}\right)}{\operatorname{sh}\left(\dfrac{x}{2^k}\right)} \\
&= \frac{1}{2^n}\frac{\operatorname{sh}\left(\dfrac{x}{2^0}\right)}{\operatorname{sh}\left(\dfrac{x}{2^n}\right)} \qquad \text{produit télescopique} \\
&= \frac{1}{2^n}\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{sh}\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}
\end{aligned}$$

3. - Si $x = 0$, (u_n) est constante égale à 1. Ainsi, (u_n) converge vers 1.
   - Si $x \neq 0$: On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{2^n}\dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{sh}\left(\dfrac{x}{2^n}\right)} = \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{x\dfrac{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}} = \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{x} \times \dfrac{1}{\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}}$.

   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{2^n} = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\operatorname{sh}(X)}{X} = \operatorname{sh}'(0) = \operatorname{ch}(0) = 1$ car sh est dérivable en 0.

   Ainsi, on obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}} = 1$.

   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{x}$.

Exercice 6. 1. On peut considérer cette quantité pour $a \in \mathbb{R}$ tel que $a \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ et $a \not\equiv \dfrac{\pi}{4}\ [\frac{\pi}{2}]$ et $a \not\equiv 0[\pi]$. Ainsi,cette quantité a un sens si et seulement si $a \not\equiv 0\ [\frac{\pi}{4}]$.
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{4}\ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$. On a alors :

$$\frac{1}{\tan a} - \frac{2}{\tan 2a} = \frac{\cos a}{\sin a} - \frac{2\cos(2a)}{\sin(2a)} = \frac{\cos^2 a - \cos 2a}{\cos a \sin a} = \frac{\sin^2 a}{\cos a \sin a} = \tan a.$$

2. La somme n'est définie si et seulement si : $\forall k \in [\![0,n]\!],\ 2^k a \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$. Avec le résultat précédent, on a (par télescopage)

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \tan(2^k a) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2^k}{\tan(2^k a)} - \frac{2^{k+1}}{\tan(2^{k+1}a)}\right) = \frac{1}{\tan a} - \frac{2^{n+1}}{\tan(2^{n+1}a)}.$$

Exercice 7. •

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{k=0}^{2n} \min(k,n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \min(k,n) + \sum_{k=n+1}^{2n} \min(k,n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=n+1}^{2n} n \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + n^2 \\
&= \frac{n(3n+1)}{2}
\end{aligned}$$

- $B_n = \sum_{\substack{0 \leq k \leq 2n \\ k \text{ pair}}} k^2 - \sum_{\substack{0 \leq k \leq 2n \\ k \text{ impair}}} k^2$.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{p=0}^{n} (2p)^2 - \sum_{p=0}^{n-1} (2p+1)^2 \\
&= 4\sum_{p=0}^{n} p^2 - \sum_{p=0}^{n-1} (4p^2+4p+1) \\
&= 4n^2 - \sum_{p=0}^{n-1} 4p - \sum_{p=0}^{n-1} 1 \\
&= 4n^2 - 4\frac{(n-1)n}{2} - n \\
&= n(4n - 2n + 2 - 1) = n(2n+1)
\end{aligned}$$

Exercice 8. Montrer que :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $n! = \prod_{k=1}^{n} k$. Soit $k \in [\![2, n]\!]$, on a $k \geq 2$ donc $\prod_{k=2}^{n} k \geq \prod_{k=2}^{n} 2 = 2^{n-1}$. Or, $\prod_{k=1}^{n} k = \prod_{k=2}^{n} k$ donc $n! \geq 2^{n-1}$.

   Soit $k \in [\![1, n]\!]$, on a $k \leq n$ donc $n! = \prod_{k=1}^{n} k \leq \prod_{k=1}^{n} n = n^n$. Ainsi, $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ k! \leq n!$. Ainsi, $\sum_{k=1}^{n} k! \leq \sum_{k=1}^{n} n! = n \times n! \leq (n+1)n! \leq (n+1)!$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on remarque que : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ k \cdot k! = [(k+1) - k]k! = (k+1)! - k!$.

   Ainsi, $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = \sum_{k=1}^{n} ((k+1)! - k!)$. On a alors une somme télescopique et $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$.

2 Produits

Exercice 9.

- Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \prod_{k=0}^{n} 2^k = 2^{\sum_{k=0}^{n} k}$.

  - Pour $n = 0$, on a : $\prod_{k=0}^{n} 2^k = 2^0 = 1$ et $2^{\sum_{k=0}^{n} k} = 2^0 = 1$. Donc $\prod_{k=0}^{n} 2^k = 2^{\sum_{k=0}^{n} k}$.
  - Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\prod_{k=0}^{n} 2^k = 2^{\sum_{k=0}^{n} k}$.

    On a :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n+1} 2^k &= \left(\prod_{k=0}^{n} 2^k\right) \times 2^{n+1} \\
&= 2^{\sum_{k=0}^{n} k} \times 2^{n+1} \\
&= 2^{\left(\sum_{k=0}^{n} k\right) + n + 1} \\
&= 2^{\sum_{k=0}^{n+1} k}
\end{aligned}$$

  - Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ \prod_{k=0}^{n} 2^k = 2^{\sum_{k=0}^{n} k}$

  On a donc $\prod_{k=0}^{n} 2^k = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$

- On a : $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k+1}{k}\right) = \frac{n+1}{1} = n+1$ (produit télescopique)

- $$\prod_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}(i\times j)=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(i\times j)$$
$$=\prod_{i=1}^{n}\left(i^n\prod_{j=1}^{n}j\right)$$
$$=\prod_{i=1}^{n}(i^n n!)$$
$$=(n!)^n\prod_{i=1}^{n}i^n$$
$$=(n!)^n\left(\prod_{i=1}^{n}i\right)^n$$
$$=(n!)^n(n!)^n$$
$$=(n!)^{2n}$$

- $$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)$$
$$=\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{(k-1)}{k}\times\frac{(k+1)}{k}\right)$$
$$=\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{(k-1)}{k}\right)\times\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{(k+1)}{k}\right)$$
$$=\frac{1}{n}\times\frac{(n+1)}{2}$$
$$=\frac{(n+1)}{2n}$$

Exercice 10. 1. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k)=\left(\prod_{k=1}^{n}2\right)\times\left(\prod_{k=1}^{n}k\right)=2^n\prod_{k=1}^{n}k=2^n n!$.

De plus, $\displaystyle(2n)!=\prod_{p=1}^{2n}p=\left(\prod_{\substack{p\in[\![1,2n]\!]\\ p\text{ pair}}}p\right)\times\left(\prod_{\substack{p\in[\![1,2n]\!]\\ p\text{ impair}}}p\right)=\prod_{k=1}^{n}(2k)\times\prod_{k=1}^{n}(2k-1)$ par regroupement de termes.

Ainsi, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k-1)=\frac{\prod_{k=1}^{2n}k}{\prod_{k=1}^{n}k}=\frac{(2n)!}{2^n n!}$

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(n+k)=\prod_{k=n+1}^{2n}k=\frac{\prod_{k=1}^{2n}k}{\prod_{k=1}^{n}k}=\frac{(2n)!}{n!}=2^n\prod_{k=1}^{n}(2k-1)$

Exercice 11. Soit $n \geq 2$. $\displaystyle\prod_{p=1}^{n} \frac{(2p+1)(2p-1)}{(2p+3)(2p+5)} = \frac{\displaystyle\prod_{p=1}^{n}(2p+1)\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(2i+3)\prod_{j=1}^{n}(2j+5)}$ par changements d'indices

$$= \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k-1)\prod_{p=2}^{n+1}(2p-1)}{\displaystyle\prod_{i=3}^{n+2}(2i-1)\prod_{j=4}^{n+3}(2j-1)}$$

$$= \frac{1\times 3\times 3\times 5}{(2n+1)(2n+3)(2n+3)(2n+5)}$$

$$= \frac{45}{(2n+1)(2n+3)^2(2n+5)}$$

Exercice 12. Considérons pour $n \in \mathbb{N}^*$ la proposition $\mathcal{P}(n)$: $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(k^k \times k!\right) = (n!)^{n+1}$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

- Pour $n = 1$: $\displaystyle\prod_{k=1}^{1}(k^k \times k!) = 1^1 \times 1! = 1$ et $(1!)^2 = 1$. Donc $\displaystyle\prod_{k=1}^{1}(k^k \times k!) = (n!)^2$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n+1}\left(k^k \times k!\right) &= \prod_{k=1}^{n}\left(k^k \times k!\right) \times (n+1)^{n+1} \times (n+1)! \\ &= (n!)^{n+1} \times (n+1)^{n+1} \times (n+1)! \\ &= ((n+1)!)^{n+1} \times (n+1)! \\ &= ((n+1)!)^{n+2}\end{aligned}$$

  Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion, on a prouvé prouvé par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \prod_{k=1}^{n}\left(k^k \times k!\right) = (n!)^{n+1}$$

Exercice 13. Raisonnons par récurrence.

- Pour $n = 1$, on a : $\displaystyle\prod_{i=1}^{1}(1+a_i) = 1 + a_1$ et $2^0\left(1 + \displaystyle\prod_{i=1}^{1} a_i\right) = 1 + a_1$.

  Ainsi, $\displaystyle\prod_{i=1}^{1}(1+a_i) \leq 2^0\left(1 + \prod_{i=1}^{1} a_i\right)$
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \leq 2^{n-1}\left(1 + \prod_{i=1}^{n} a_i\right)$.

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n+1}(1+a_i) &= \left(\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)\right) \times (1 + a_{n+1}) \\ &\leq 2^{n-1}\left(1 + \prod_{i=1}^{n} a_i\right) \times (1 + a_{n+1}) \\ &\leq 2^{n-1}\left(1 + \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) a_{n+1} + a_{n+1} + \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)\right) \\ &\leq 2^{n-1}\left(1 + \left(\prod_{i=1}^{n+1} a_i\right) + a_{n+1} + \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)\right)\end{aligned}$$

Il reste à prouver que $a_{n+1} + \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) \leq 1 + \left(\prod_{i=1}^{n+1} a_i\right)$.

Posons $p = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)$.

On cherche donc à prouver que $a_{n+1} + p \leq 1 + a_{n+1}p$.
Or, $1 + a_{n+1}p - a_{n+1} - p = (1 - a_{n+1})(1 - p)$.
De plus, $a_{n+1} \geq 1$ donc $1 - a_{n+1} \leq 0$.
On a aussi : $\forall k \in [\![1, n+1]\!]$, $a_k \geq 1$. Donc $p \geq 1$.
Ainsi, $1 - p \leq 0$.
Donc $1 + a_{n+1}p - a_{n+1} - p = (1 - a_{n+1})(1 - p) \geq 0$.
Ainsi, $a_{n+1} + p \leq 1 + a_{n+1}p$.
D'où :

$$a_{n+1} + \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) \leq 1 + \left(\prod_{i=1}^{n+1} a_i\right)$$

Donc :

$$\prod_{i=1}^{n+1}(1 + a_i) \leq 2^{n-1}\left(1 + \left(\prod_{i=1}^{n+1} a_i\right) + 1 + \left(\prod_{i=1}^{n+1} a_i\right)\right) \leq 2 \times 2^{n-1}\left(1 + \left(\prod_{i=1}^{n+1} a_i\right)\right) \leq 2^{n}\left(1 + \left(\prod_{i=1}^{n+1} a_i\right)\right)$$

- On a prouvé par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \prod_{i=1}^{n}(1 + a_i) \leq 2^{n-1}\left(1 + \prod_{i=1}^{n} a_i\right)$$

3 Coefficients binomiaux et binôme de Newton

Exercice 14. Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ avec $p < n$.

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{l} \binom{n}{p} = \binom{n}{p+1} \\ 4\binom{n}{p} = 5\binom{n}{p-1} \end{array}\right.
&\iff \left\{\begin{array}{l} \dfrac{n!}{(n-p)!p!} = \dfrac{n!}{(n-p-1)!(p+1)!} \\ 4\dfrac{n!}{(n-p)!p!} = 5\dfrac{n!}{(n-p+1)!(p-1)!} \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} (n-p-1)!(p+1)p! = (n-p)(n-p-1)!p! \\ 4(n-p+1)(n-p)!(p-1)! = 5(n-p)!p(p-1)! \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} (p+1) = (n-p) \\ 4(n-p+1) = 5p \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} n - 2p = 1 \\ 4n - 9p = -4 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} n - 2p = 1 \\ p = 8 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} n = 17 \\ p = 8 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Ce système admet une unique solution qui est $(n, p) = (17, 8)$.

Exercice 15. 1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a $\sum_{n=1}^{N+1} n^3 = \sum_{p=0}^{N} (p+1)^3$ par changement d'indice en posant $n = p + 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N+1} n^3 = \sum_{n=0}^{N}(n+1)^3 &= \sum_{n=0}^{N}(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) \\
&= \sum_{n=0}^{N} n^3 + 3\sum_{n=0}^{N} n^2 + 3\sum_{n=0}^{N} n + \sum_{n=0}^{N} 1
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} n^2 &= \frac{1}{3}\left[\left(\sum_{n=1}^{N+1} n^3\right) - \left(\sum_{n=0}^{N} n^3\right) - 3\left(\sum_{n=0}^{N} n\right) - \left(\sum_{n=0}^{N} 1\right)\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[\left(\sum_{n=1}^{N} n^3\right) + (N+1)^3 - \left(\sum_{n=1}^{N} n^3\right) - 3\frac{N(N+1)}{2} - (N+1)\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[(N+1)^3 - 3\frac{N(N+1)}{2} - (N+1)\right] \\
&= \frac{(N+1)}{6}(2(N+1)^2 - 3N - 2) \\
&= \frac{(N+1)}{6}(2N^2 + N) \\
&= \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}
\end{aligned}$$

2. On a $\sum\limits_{n=1}^{N+1} n^4 = \sum\limits_{p=0}^{N} (p+1)^4$ par changement d'indice en posant $n = p+1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N+1} n^4 = \sum_{n=0}^{N} (n+1)^4 &= \sum_{n=0}^{N} (n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) \\
&= \sum_{n=0}^{N} n^4 + 4\sum_{k=0}^{N} n^3 + 6\sum_{n=0}^{N} n^2 + 4\sum_{n=0}^{N} n + \sum_{n=0}^{N} 1
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} n^3 &= \frac{1}{4}\left[\left(\sum_{n=1}^{N+1} n^4\right) - \left(\sum_{n=0}^{N} n^4\right) - 6\left(\sum_{n=0}^{N} n^2\right) - 4\left(\sum_{n=0}^{N} n\right) - \left(\sum_{n=0}^{N} 1\right)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\left(\sum_{n=1}^{N} n^4\right) + (N+1)^4 - \left(\sum_{n=0}^{N} n^4\right) - N(N+1)(2N+1) - 4\frac{N(N+1)}{2} - (N+1)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[(N+1)^4 - N(N+1)(2N+1) - 2N(N+1) - (N+1)\right] \\
&= \frac{(N+1)}{4} \times (N^3 + 3N^2 + 3N + 1 - 2N^2 - N - 2N - 1) \\
&= \frac{(N+1)}{4} \times (N^3 + N^2) \\
&= \frac{N^2(N+1)^2}{4}
\end{aligned}$$

Exercice 16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\begin{aligned}
(k+1)\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} &= (k+1)\frac{\frac{n!}{(n-1-k)!(k+1)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} \\
&= (k+1) \times \frac{n!k!(n-k)(n-k-1)!}{(n-k-1)!(k+1)k!n!} \\
&= n - k
\end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} n\right) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right) = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = n \times \left(n - \frac{(n-1)}{2}\right) = \frac{n(n+1)}{2}$

Exercice 17.

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = (1+2)^n = 3^n$ d'après le binôme de Newton.
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{\frac{k}{2}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\sqrt{3})^k = \left(\sqrt{3}+1\right)^n$ d'après le binôme de Newton.
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{k+1} = 3 \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k = 3 \times (3+1)^n = 3 \times 4^n$ d'après le binôme de Newton.

Exercice 18. 1. • Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $f : x \mapsto (1+x)^n$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (1+x)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$, d'après la formule du binôme de Newton.

De plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1}$.

En évaluant cette égalité en 1, on obtient : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k = n2^{n-1}$.

• Repartons du fait que : $\forall x \in \mathbb{R},\ n(1+x)^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1}$.

Evaluons cette égalité en -1, on obtient :

$n(1-1)^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k(-1)^{k-1} = -\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k(-1)^k$.

Ainsi : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(-1)^k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k(-1)^k = -n0^{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } n > 1 \\ -1 & \text{si } n = 1 \end{cases}$

• Repartons de l'égalité : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (1+x)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

f est continue sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

En intégrant cette égalité entre 0 et x, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t)dt &= \int_0^x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k dt \quad . \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_0^x t^k dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1} x^{k+1} \end{aligned}$$

On a également :

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x (1+t)^n dt = \left[\frac{(1+t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^x = \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1} x^{k+1} = \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1})$.

En évaluant cette égalité en 1, on obtient : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)} - \frac{1}{n+1}$

• Partons toujours de l'égalité : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (1+x)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} k(k-1)x^{k-2}$.

En évaluant cette expression en 1, on obtient :

$n(n-1)2^{n-2} = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} (k^2-k) = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} k^2 - \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} k$.

$$\begin{aligned}\text{Ainsi, } \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2 &= \binom{n}{1}+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}k^2\\ &= \binom{n}{1}+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}(k^2-k)+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}k\\ &= n+n(n-1)2^{n-2}+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}k\\ &= n+n(n-1)2^{n-2}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k-\binom{n}{1}\\ &= n+n(n-1)2^{n-2}+n2^{n-1}-n\\ &= n2^{n-2}(n-1+2)\\ &= n2^{n-2}(n+1)\end{aligned}$$

2. Soit $k \in [\![1,n]\!]$,

$$\begin{aligned} k\binom{n}{k} &= k\frac{n!}{k!(n-k)!}\\ &= \frac{n!}{(n-k)!k(k-1)!}\\ &= \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}\\ &= \frac{n!}{(n-1-(k-1))!(k-1)!}\\ &= \frac{n(n-1)!}{(n-1-(k-1))!(k-1)!}\\ &= n\binom{n-1}{k-1}\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}\\ &= \sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}\\ &= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\\ &= n\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1}{l} \quad \text{par changement d'indice } l=k-1\\ &= n2^{n-1} \quad \text{par le binôme de Newton.}\end{aligned}$$

Exercice 19. 1. Le changement d'indice $j = 2n+1-k$ donne :

$$S_n = \sum_{j=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{2n+1-j} = \sum_{j=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{j}$$

par symétrie des coefficients binomiaux.

2. L'indice j étant muet, on en déduit que :

$$\begin{aligned}2S_n = S_n+S_n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}+\sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k} = \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\\ &= 2^{2n+1}\end{aligned}$$

par le binôme de Newton.

Ainsi, $S_n = \dfrac{2^{2n+1}}{2} = 2^{2n}$.

Exercice 20. 1. Soit $n \geq p$.

D'après la formule de Pascal, on sait que : $\forall k \in [\![p+1, n]\!]$, $\binom{k}{p} + \binom{k}{p+1} = \binom{k+1}{p+1}$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} &= \binom{p}{p} + \sum_{k=p+1}^{n} \binom{k}{p} \\
&= 1 + \sum_{k=p+1}^{n} \left(\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} \right) \\
&= 1 + \binom{n+1}{p+1} - \binom{p+1}{p+1} \qquad \text{par la formule sur les sommes télescopiques.} \\
&= \binom{n+1}{p+1}
\end{aligned}$$

2. • Pour $p = 1$, on a : $\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{1} = \binom{n+1}{2}$ ce qui donne :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n+1)!}{(n-1)!2!} = \frac{n(n+1)(n-1)!}{2(n-1)!} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

• Pour $p = 2$, on a : $\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}$ ce qui donne :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)}{2} = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}.$$

$$\begin{aligned}
\text{Donc } \sum_{k=1}^{n} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k(k-1) + \sum_{k=1}^{n} k \\
&= \frac{2(n-1)n(n+1)}{6} + \sum_{k=1}^{n} k \\
&= \frac{2(n-1)n(n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(2n-2+3)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

Exercice 21. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n + B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, d'après la formule du binôme de Newton.

$$A_n - B_n = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} - \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k}(-1)^k + \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}(-1)^k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = (1-1)^n = 0.$$

Ainsi, $A_n - B_n = 0$ et $A_n + B_n = 2^n$ donc $A_n = B_n = 2^{n-1}$.

Exercice 22. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété : $\mathcal{P}(n)$: pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \geq n + q + 1$, $\sum_{k=0}^{n} \binom{p-k}{q} = \binom{p+1}{q+1} - \binom{p-n}{q+1}$. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

- Pour $n = 0$: soit $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \geq q + 1$, $\sum_{k=0}^{0} \binom{p-k}{q} = \binom{p}{q}$ et $\binom{p+1}{q+1} - \binom{p}{q+1} = \binom{p}{q}$ d'après la formule de Pascal.
  Ainsi, $\mathcal{P}[0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}[n)$ vraie.

Soit $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \geq n+1+q+1$. On a alors : $p \geq n+q+1$. D'où :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \binom{p-k}{q} &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{p-k}{q}\right) + \binom{p-n-1}{q} \\
&= \binom{p+1}{q+1} - \binom{p-n}{q+1} + \binom{p-n-1}{q} \\
&= \binom{p+1}{q+1} - \binom{p-n-1}{q+1} \qquad = \binom{p+1}{q+1} - \binom{p-(n+1)}{q+1}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- On a donc prouvé que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exercice 23. Montrons par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \leq n!$.

- Pour $n = 0$: $S_0 = 1 \leq 0!$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $S_k \leq k!$.

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_k \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k! \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} \times k! \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} n! = (n+1)!
\end{aligned}$$

car pour tout $p \in \mathbb{N}$, $1 \leq p!$.
Ainsi, la propriété est vraie au rang $n+1$.

- On a donc prouvé par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n \leq n!$.

4 Sommes doubles

Exercice 24.

- $$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} 2^{2i-j} \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n} 2^{2i}\right)\left(\sum_{j=0}^{n} 2^{-j}\right) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n} 4^{i}\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{j}\right) \\
&= \frac{1-4^{n+1}}{1-4} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1-4^{n+1}}{-3} \times 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \\
&= \frac{2}{3}(4^{n+1}-1)\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)
\end{aligned}$$

- Soit $i, j \in \mathbb{N}$, on a :

$$1 \leq i < j \leq n \iff \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq i < n \\ i < j \leq n \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq i \leq n-1 \\ i+1 \leq j \leq n \end{array} \right.$$

Ainsi : $B_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} 2^j$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} 2^{i+1} \left(\frac{1-2^{n-i}}{1-2} \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} \left(2^{n+1} - 2^{i+1} \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} 2^{n+1} - \sum_{i=1}^{n-1} 2^{i+1}$$
$$= (n-1)2^{n+1} - 2 \sum_{i=1}^{n-1} 2^i$$
$$= (n-1)2^{n+1} - 4 \frac{1-2^{n-1}}{1-2}$$
$$= (n-1)2^{n+1} + 4(1-2^{n-1}) = 2^{n+1}(n-1-1) + 4$$
$$= 2^{n+1}(n-2) + 4$$

- Soit $i, j \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} j \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq i \end{array} \right.$$

Ainsi : $C_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} \frac{j}{in}$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{in} \sum_{j=1}^{i} j \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{in} \times \frac{i(i+1)}{2}$$
$$= \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} (i+1)$$
$$= \frac{1}{2n} \sum_{i=2}^{n+1} i$$
$$= \frac{1}{2n} \left(\frac{(n+3)n}{2} \right)$$
$$= \frac{n+3}{4}$$

- $D_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (i+j)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} i + \sum_{j=1}^{n} j \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left[in + \frac{n(n+1)}{2} \right]$$
$$= n \left(\sum_{i=1}^{n} i \right) + n \times \frac{n(n+1)}{2}$$
$$= n^2(n+1)$$

- Soit $i, j \in \mathbb{N}$, on a :

$$1 \leq i < j \leq n \iff \begin{cases} 1 \leq i < j \\ 1 < j \leq n \end{cases} \iff \begin{cases} 1 \leq i \leq j-1 \\ 2 \leq j \leq n \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{Ainsi : } E_n &= \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} (i+j) \\
&= \sum_{j=2}^{n} \left[\left(\sum_{i=1}^{j-1} i \right) + \left(\sum_{i=1}^{j-1} j \right) \right] \\
&= \sum_{j=2}^{n} \left[\frac{j(j-1)}{2} + j(j-1) \right] \\
&= \frac{3}{2} \sum_{j=1}^{n} j(j-1) \\
&= \frac{3}{2} \sum_{j=1}^{n} j^2 - \frac{3}{2} \sum_{j=1}^{n} j \\
&= \frac{3}{2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{3}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{3n(n+1)}{12} \times (2n-2) = \frac{(n-1)n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

- Soit $i, j \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leq i < j \leq n \iff \begin{cases} 0 \leq i < n \\ i < j \leq n \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leq i \leq n-1 \\ i+1 \leq j \leq n \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leq i \leq j-1 \\ 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{Ainsi : } F_n &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \min(i,j) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} i \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} i(n-i) \\
&= n \sum_{i=0}^{n-1} i - \sum_{i=0}^{n-1} i^2 \\
&= n \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\
&= n(n-1) \left(\frac{n}{2} - \frac{2n-1}{6} \right) \\
&= \frac{n(n-1)(n+1)}{6}
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{j-1} \min(i,j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{j-1} i \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{j(j-1)}{2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} j^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} j \\
&= \frac{1}{2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{2} \\
&= n(n+1) \left(\frac{2n+1}{12} - \frac{1}{4} \right) \\
&= \frac{n(n+1)(n-1)}{6}
\end{aligned}$$

- Soit $i, j \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leq i \leq j \leq n \iff \begin{cases} 0 \leq i \leq j \\ 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{Ainsi : } G_n &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} 2^{i+j} \quad .\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(2^j \sum_{i=1}^{j} 2^i\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(2^j \times \frac{1-2^j}{1-2}\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}(2^{2j}-2^j)\\
&= \sum_{j=1}^{n}4^j - \sum_{j=1}^{n}2^j\\
&= 4\times\frac{(1-4^n)}{1-4} - 2\times\frac{(1-2^n)}{1-2}\\
&= \frac{4}{3}\times 4^n - \frac{4}{3} - 2^{n+1} + 2\\
&= \frac{1}{3}\times 4^{n+1} - 2^{n+1} + \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

- Soit $k, l \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \le k \le l \le n \iff \begin{cases} 0 \le k \le n \\ 0 \le l \le n \end{cases}$$

Ainsi :
$H_n = \displaystyle\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k} = \sum_{l=0}^{n} 2^l = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1}-1$ d'après le binôme de Newton.

- $I_n = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} j\right) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Exercice 25. 1.

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j\in[\![1,n]\!]}\min(i,j) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min(i,j) \quad .\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\min(i,j) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\min(i,j)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} i\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{i(i+1)}{2} + \sum_{i=1}^{n} i(n-i)\\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \left(\frac{2n+1}{2}\right)\sum_{i=1}^{n} i\\
&= -\frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{(2n+1)}{2}\frac{n(n+1)}{2}\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

2. Soit $i, j \in [\![1,n]\!]$.
   - Si $i \ge j$, alors $\max(i,j) = i$ et $\min(i,j) = j$ donc $\max(i,j)+\min(i,j) = i+j$.
   - Si $i < j$, alors $\max(i,j) = j$ et $\min(i,j) = i$ donc $\max(i,j)+\min(i,j) = i+j$.

   Ainsi, on a : $\forall i,j \in [\![1,n]\!]$, $\max(i,j)+\min(i,j) = i+j$.
   On a alors : $\displaystyle\sum_{i,j\in[\![1,n]\!]}\min(i,j) + \sum_{i,j\in[\![1,n]\!]}\max(i,j) = \sum_{i,j\in[\![1,n]\!]}(i+j)$.

   Or, $\displaystyle\sum_{i,j\in[\![1,n]\!]}(i+j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j = n^2(n+1)$ (détail du calcul exercice 24 D_n).

Donc $\displaystyle\sum_{i,j\in[\![1,n]\!]} \max(i,j) = n^2(n+1) - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$

3. Soit $i, j \in [\![1,n]\!]$.
   - Si $i \geq j$, alors $\max(i,j) = i$ et $\min(i,j) = j$ donc $|i-j| = i-j = \max(i,j) - \min(i,j)$.
   - Si $i < j$, alors $\max(i,j) = j$ et $\min(i,j) = i$ donc $|i-j| = j-i = \max(i,j) - \min(i,j)$.

   Ainsi, on a : $\forall i,j \in [\![1,n]\!]$, $\max(i,j) - \min(i,j) = |i-j|$.
   On a alors :
$$\sum_{i,j\in[\![1,n]\!]} |i-j| = \sum_{i,j\in[\![1,n]\!]} \max(i,j) - \sum_{i,j\in[\![1,n]\!]} \min(i,j) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}$$

Exercice 26. Soit $i, k \in \mathbb{N}$, on a :
$$\begin{cases} 0 \leq k \leq n \\ k \leq i \leq n \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leq k \leq i \\ 0 \leq i \leq n \end{cases}$$

Ainsi : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k} = \sum_{i=0}^{n}\left(\binom{n}{i}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\right) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}2^i = (1+2)^n = 3^n$, d'après le binôme de Newton.

Exercice 27. 1. On a :
$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{k} 2^k = \sum_{k=1}^{n}\left(2^k\sum_{l=1}^{k}1\right) = \sum_{k=1}^{n} k2^k$$

2. Soit $k, l \in \mathbb{N}$, on a :
$$\begin{cases} 1 \leq k \leq n \\ 1 \leq l \leq k \end{cases} \iff \begin{cases} l \leq k \leq n \\ 1 \leq l \leq n \end{cases}$$

   Ainsi :
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k2^k &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{k} 2^k \\
&= \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=l}^{n} 2^k \\
&= \sum_{l=1}^{n} 2^l\left(\frac{1-2^{n-l+1}}{1-2}\right) \\
&= \sum_{l=1}^{n}(2^{n+1}-2^l) \\
&= n2^{n+1} - \sum_{l=1}^{n} 2^l \\
&= n2^{n+1} - 2\times\frac{(1-2^n)}{1-2} \\
&= n2^{n+1} - 2^{n+1} + 2 \\
&= (n-1)2^{n+1} + 2
\end{aligned}$$