# Éléments clés du cours PTSI 1 Jules Ferry

## Chapitre 1 : Logique

- Rudiments de logiques : négation, P et Q, P ou Q, implication, équivalence, réciproque, contraposée
- Quantificateurs
- Méthodes de raisonnement : raisonnement par l'absurde, démonstration d'une implication (démonstration directe, par contraposée, par l'absurde), démonstration d'une équivalence ( double implication, par équivalence), raisonnement par analyse/synthèse, raisonnement par récurrence (simple, d'ordre p, forte).

## Questions de cours

Q1 Énoncer le tableau de vérité des connecteurs logiques.

Q2 Soient $P$ et $Q$ deux propositions. Démontrer que

$$(P \implies Q) \iff (\neg Q \implies \neg P).$$

Q3 Déterminer le contraire de l'assertion

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in [0,1], \exp(\pi x) = \lambda \implies x = 9.$$

## Chapitre 2 : Complexes

- Nombres complexes
  - Définition par la forme algébrique et l'existence d'un nombre $i$ qui vérifie $i^2 = -1$.
  - Opérations sur les complexes, partie réelle, imaginaire.
  - Conjugaison : compatibilité avec les opérations.
  - Module : opérations sur le module, inégalité triangulaire et cas d'égalité.
- Nombres complexes de module 1 noté $\mathbb{U}$ : cercle trigonométrique, paramétrisation de $\mathbb{U}$ par les foncitons circulaires, formules d'Euler, factorisation par l'angle moitié, factorisation d'une somme ou une différence de cosinus.
- Formule de Moivre, linéarisation de $\cos^k(x)\sin^l(x)$.
- Transformation de $\cos(nx)$ en puissance de cos et de sin.
- Forme trigonométrique et argument d'un complexe.
- Opérations sur les arguments, transformation de $a\cos(x) + b\sin(x)$ en $A\cos(x - w)$.
- Équations algébriques dans $\mathbb{C}$.
  - Racines carrées d'un complexe.
  - Résolution des équations du second degré à coefficients complexes.
  - Racines $n$-ièmes de l'unité noté $\mathbb{U}_n = \{e^{2ik\pi/n} \ / \ k \in [\![0 \ ; \ n-1]\!]\}$. Somme des racines $n$-ièmes de l'unité, racines $n$-ième d'un complexe non nul.
- Exponentielle complexe
- Nombres complexes et géométrie plane
  - Alignement et orthogonalité
  - Transformations remarquables du plan : translation, rotation, symétrie selon l'axe des abscisses.

## Questions de cours

Q1 Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire. Cas d'égalité.

Q2 Propriétés de l'exponentielle complexe.

Q3 Résoudre l'équation $(z+1)^n = (z-i)^n$ pour $z \in \mathbb{C}$. On mettra les solutions sous forme exponentielle.

Q4 Montrer que $\mathbb{U}_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}} / k \in \mathbb{Z}\}$, pour tout entier naturel $n \geq 2$.

Q5 Soit $n \geq 2$ un entier naturel. En admettant que $\mathbb{U}_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}} / k \in \mathbb{Z}\}$, montrer que $\mathrm{Card}\,(\mathbb{U}_n) = n$.

## Chapitre 3 : Généralités sur les fonctions

- Inégalités dans $\mathbb{R}$
  - Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$
  - Majorant, minorant, maximum, minimum.
  - Valeur absolue : inégalités triangulaires
- Généralités sur les fonctions à valeurs réelles
  - Ensemble de définition, opérations sur les fonctions (somme, produit, quotient, composée)
  - Représentation graphique. Graphes des fonctions $x \mapsto f(x)+a$, $x \mapsto f(x+a)$, $x \mapsto f(a-x)$, $x \mapsto f(ax)$, $x \mapsto af(x)$
  - Propriétés des fonctions : parité, périodicité, fonctions majorées, minorées, bornées. Interprétation géométriques de ces propriétés. Caractérisation des fonctions bornées. Monotonie
  - Rappels sur le calcul de limites : comme produit, quotient, composée, Théorème d'encadrement, de minoration, de majoration, théorème de la limite monotone, asymptote verticale, asymptote horizontale.
  - Rappels sur la continuité : définition, opérations, théorème des valeurs intermédiaires.
  - Bijectivité : définition, réciproque, propriétés, théorème prouvant qu'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle réalise une bijection, graphe de la réciproque.
- Dérivation
  - Dérivabilité en un point, interprétation géométrique, équation de la tangente. Fonction dérivée
  - Opérations sur les fonctions dérivables : somme, produit, quotient, composée, signe de la dérivée et variations
  - Dérivée de la fonction réciproque
  - Dérivées d'ordre supérieur
- Plan d'étude d'une fonction

## Questions de cours

Q1 Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés

(i) : $f$ est strictement croissante.

(ii) : $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) < f(n+1)$.

Q2 Écrire la définition d'un majorant, minorant et leur contraire.

Q3 Écrire la définition de croissance, décroissance et leur contraire.

Q4 Écrire la définition de contuité et de dérivabilité sur un intervalle.

Q5 Déterminer une fonction continue qui n'est pas dérivable.

Q6 Déterminer une fonction dérivable strictement croissante dont la dérivée n'est pas strictement positive.

## Chapitre 4 : Fonctions usuelles

- Logarithme, exponentielle, puissance
  - Fonction logarithme népérien : Définition, dérivée, propriétés algébriques, limites, tableau de variations, graphe, bijection.
  - Logarithme décimal.
  - Fonction exponentielle : Définition, dérivée, limites, propriétés algébriques, tableau de variations, graphe.
  - Fonctions hyperboliques : définition de ch et sh, parités, dérivées, $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$, limites, graphes.
  - Fonctions puissances : définition, propriétés algébriques, dérivée, limites et prolongation éventuelle en 0, tableau de variations et graphe.
  - Croissances comparées
- Fonction circulaires
  - congruence module $2\pi$
  - Fonctions sinus, cosinus, tangente : parité, périodicité, continuité, dérivée, tableau de variations, cas d'égalité $\cos(x) = \cos(y)$, cas d'égalité $\sin(x) = \sin(y)$.
  - Fonctions circulaires réciproques : arccos, arcsin, arctan. Définition, continuité, dérivabilité, expression de la dérivfée, étude de la parité de arcsin et arctan. Graphes.

## Questions de cours

Q1 Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Q2 Montrer que :

$$\forall x > 0, \arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2.$$

Q3 Montrer que :

$$\forall x < 0, \arctan(x) + \arctan(1/x) = -\pi/2.$$

Q4 Montrer que arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et donner une expression de la dérivée.

Q5 Montrer que arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et donner une expression de la dérivée.

Q6 Montrer que arctan est dérivable sur $]-\infty,+\infty[$ et donner une expression de la dérivée.

## Chapitre 5 : Calcul algébrique

1. Sommes et produits :
   (a) définition, règles de calcul, changement d'indice ;
   (b) somme et produit téléscopique ;
   (c) regroupement de termes ;
   (d) somme des termes d'une suite arithmétique ;
   (e) somme des termes d'une suite géométrique ;
   (f) Factorisation de $a^n - b^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Sommes doubles générales, sur un rectangle, sur un triangle. *(Fubini)*
3. Factoriel, coefficients binomiaux (définis par une expression explicite), triangle de Pascal.
4. Binôme de Newton.

## Questions de cours

Q1 Somme des termes d'une suite arithmétique.

Q2 Somme des termes d'une suite géométrique.

Q3 Factorisation de $a^n - b^n$.

Q4 Binôme de Newton.

Q5 Triangle de Pascal.

## Chapitre 6 : Primitives

- Calcul de primitives
  - Généralités : définition d'une primitive, lien entre deux primitives
  - Existence de primitives : théorème fondamental de l'analyse (admis).
  - Primitives usuelles
- Intégration par parties
- Changement de variables
- Techniques classiques de calcul de primitives
  - Primitive de la forme $x \mapsto g'(u(x))u'(x)$
  - Primitive de fractions rationnelles
  - Primitive de la forme $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$
  - Primitive de la forme $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$
  - Primitive de la forme $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$
  - Primitive de la forme $x \mapsto \sin^p(x)\cos^q(x)$, avec $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.

## Questions de cours

Q1 Intégrale de Wallis : donner une relation entre $I_{2p}$ et $I_{2p+2}$, et en déduire une expression de $I_{2p}$, pour tout entier naturel $p \in \mathbb{N}$.

Q2 Intégrale de Wallis : donner une relation entre $I_{2p+1}$ et $I_{2p+3}$, et en déduire une expression de $I_{2p+1}$, pour tout entier naturel $p \in \mathbb{N}$.

Q3 Donner une primitive de $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$ pour $a, b$, et $c$ trois nombres réels avec $b^2 - 4ac < 0$.

Q4 Déterminer une pritimive de $x \mapsto ax^n + bx^3 + c$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{Z}$.

## Chapitre 7 : Équations différentielles

- Équation différentielle linéaire du premier ordre générale
  - Résolution de l'équation homogène
  - Résolution de l'équation avec second membre : solution évidente, principe de superposition, méthode de variation de la constante.
  - Théorème de Cauchy-Lipschitz.
  - Idées sur le principe de recollement : importance de l'intervalle d'étude.
- Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
  - Résolution de l'équation homogène
  - Résolution de l'équation avec second membre : principe de superposition, dans le cas d'un second membre de la forme $x \mapsto Ae^{\lambda x}$ ou $x \mapsto e^{\alpha x}(A_1\cos(\beta x) + A_2\sin(\beta x))$
  - Théorème de Cauchy-Lipschitz.

## Questions de cours

Q1 Résolution de $y' + a(x)y = 0$ avec $y(x_0) = y_0$.

Q2 Soit $y_p$ une solution de l'équation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$, avec $a, b : I \to \mathbb{K}$ continues. Montrer que $y$ vérifie $y' + a(x)y = b(x)$ si et seulement si il existe $y_0$ solution de l'équation homogène tel que $y = y_p + y_0$.

Q3 Résolution dans $\mathbb{C}$ de $y'' + ay' + by = 0$ dans le cas où $a^2 - 4b = 0$.

Q4 Résolution dans $\mathbb{C}$ de $y'' + ay' + by = 0$ dans le cas où $a^2 - 4b \neq 0$.

Q5 Résolution dans $\mathbb{R}$ de $y'' + ay' + by = 0$ dans le cas où $a^2 - 4b < 0$.

## Chapitre 8 : Ensembles et applications

- Ensembles
  - Définition d'un ensemble comme collection d'objets appelés éléments.
  - Opérations sur les ensembles : partie, union, intersection, complémentaire, « privation », produit cartésien.
  - Rapide extension de l'union et l'intersection d'une famille d'ensembles.
- Applications
  - Définition comme un procédé d'association
  - Lien avec une définition par les graphes.
  - Exemples d'applications : identité, indicatrice, prolongement, famille d'éléments
  - Composition des applications
  - Image directe et réciproque d'une application.
  - Injection, surjection et bijection.
- Relation d'équivalence : définition comme relation binaire, définition d'une classe d'équivalence.

## Questions de cours

Q1 Soit $f : E \to F$. Montrer que $f$ bijective si et seulement si il existe $g : F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Q2 Soit $f : E \to F$ une bijection. Montrer que $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}$ et que $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$.

Q3 Soit $E$ un ensemble. Montrer que :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad \mathbb{1}_{C_E(A)} = 1 - \mathbb{1}_A.$$

Q4 Soit $E$ un ensemble. Montrer que :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, \quad \mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}.$$

Q5 Soit $E$ un ensemble. Montrer que :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, \quad \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B.$$

## Chapitre 9 : Systèmes linéaires

- Matrice et matrice augmentée associé à un système linéaire.
- Opérations élémentaires
- Échelonnement par l'algorithme de Gauss-Jordan.
- Ensemble des solutions d'un système linéaire

## Questions de cours

Q1 Résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} 3x + 2y + 7z = 1 \\ 2x + 2y + z = 2 \\ 12x + 12y + 6z = 12 \end{cases}$$

Q2 Déterminer le rand du système linéaire

$$\begin{cases} 3x + 2y + 7z + t = 1 \\ 2x + 2y + z - t = 2 \\ 12x + 12y + 6z + 2t = 11 \end{cases}$$

## Chapitre 10 : Ensembles usuels de nombres

- Nombres entiers, nombres relatifs, nombres rationnels, nombres réels et complexes.
- Nombres réels
  - Borne supérieure, borne inférieure : définition, caractérisation
  - Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$.
  - Partie entière : définition, approximation décimale.

## Questions de cours

Q1 Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ majorée. Soit $s \in R$. Montrer que $\sup(A)$ existe et que
(i) : $s = \sup(A)$
(ii) : $\begin{cases} \forall x \in A, \quad x \leq \sup(A) \\ \forall \epsilon > 0, \quad \exists x \in A, \quad \sup(A) - \epsilon < x \end{cases}$

Q2 Soient $A$ et $B$ deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. Montrer que $A + B = \{a + b \ / \ (a, b) \in A \times B\}$ admet une borne supérieure et que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Q3 Montrer que $\lfloor \cdot \rfloor$ est croissante. Soit $x$ un nombre réel. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n.$$

L'égalité est-elle encore vraie lorsque $n \in \mathbb{R}$ ?

## Chapitre 11 : Suites réelles

- Généralités
  - Opérations : somme, produit, multiplication par un scalaire.
  - Relation d'ordre : croissance, décroissance, monotononie, majoration, minoration, bornitude, stationnarité.
- Cas particuliers
  - Suite arithmétique, géométrique, arithmético-géométrique, récurrente linéaire d'odre deux à coefficients constants.
  - Compositions successives $u_{n+1} = f(u_n)$ : intervalle stable par $f$, la suite est bien définie si $u_0$ est dans un intervalle stable, lien entre la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et les variations de $f$, cas des limites dans le cas où $f$ est continue.
- Limite d'une suite réelle
  - Notion d'à partir d'un certain rang. Ne pas autosier l'abréviation « apcr ».
  - Limite finie $l \in \mathbb{R}$, limite $+\infty$, limite $-\infty$, unicité.
  - Opérations sur les limites.
  - Passage à la limite dans les inégalités larges.
- Existence de limites
  - Théorème d'encadrement : convergence par encadrement, divergence par minoration ou majoration.
  - Théorème de la limite monotone.
  - Suites adjacentes.
- Suites extraites
- Extension rapide aux suites complexes : suite bornée, convergence vers $l \in \mathbb{R}$, lien avec la partie réelle et la partie imaginaire.

## Questions de cours

Q1 Passage à la limite dans les inégalités larges.
Q2 Unicité de la limite.
Q3 Opération : limite d'une somme, limite d'un produit.
Q4 Théorème de la limite monotone : cas croissant, cas décroissant.

## Chapitre 12 : Limite et continuité de fonctions

- Limites de fonctions
  - Définition : limites en un point réel, en $+\infty$, en $-\infty$, unicité de la limite.
  - Limites à droite et à gauche. Définition de la limite en une singularité.
  - Caractérisation séquentielle de la limite.
  - Opérations sur les limties : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.
- Existence de limite
  - Théorèmes d'encadrement : cas d'un encadrement par des fonctions qui admettent une limite finie en un même point, cas d'une majoration par une fonciton qui tend vers $-\infty$, cas d'une minoration par une fonciton qui tend vers $+\infty$.
  - Théorème de la limite monotone.
- Continuité
  - Définition de la continuité en un point, à droite et à gauche, en une singularité.
  - Définition de la continuité d'une fonction sur un intervalle (éventuellement privé d'un point singulier).
  - Opérations sur les fonctions continues sur un intervalle.
  - Théorème des valeurs intermédiaires (par la borne supérieure).
  - Théorème de Heine dans le cas des fonctions réelles.
  - Inversion d'une fonction continue et strictement monotone et conservation de la continuité.
- Extension rapide aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ : fonciton continue, bornée, lien avec les parties réelles et parties imaginaires.

## Questions de cours

Q1 Passage à la limite dans les inégalités larges.
Q2 Unicité de la limite.
Q3 Opération : limite d'une somme, limite d'un produit.
Q4 Théorème de la limite monotone : cas croissant, cas décroissant.
Q5 Théorème d'encadrement.
Q6 Théorème des valeurs intermédiaires.
Q7 Caractérisation séquentielle de la limite.
Q8 Composition des limites

## Chapitre 13 : Dérivation

- Nombre dérivé, fonction dérivée.
  - Dérivabilité en un point comme limite du taux d'accroissement en ce point.
  - Dérivabilité à gauche et à droite
  - Développement limité à l'ordre 1, lien continuité et dérivabilité
  - Opérations sur les fonctions dérivables : combinaison linéaire, produit, quotient, composée, réciproque
- Fonction de classe $\mathcal{C}^n$
  - Définition par récurrence
  - Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ : combinaison linéaire, formule de Leibniz, quotient, composée, réciproque.
- Théorèmes de dérivation
  - Extremum local
  - Théorème de Rolle
  - Égalité des accroissements finis et application aux fonctions monotones
  - Théorème de la limite de la dérivée
  - Inégalité des accroissements finis et application aux suites récurrentes
  - Définition des fonctions lipschitziennes
- Extension aux fonctions à valeurs complexes.

## Questions de cours

Q1 Linéarité de la dérivation
Q2 Formule de dérivation d'une composition
Q3 Formule de dérivation d'un produit
Q4 Théorème de Rolle
Q5 Théorème des accroissements finis et application au théorème de la limite de la dérivée.
Q6 Soit $f : I \to I$ une fonction contractante qui admet un point fixe $l$. Soient $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que $(u_n)$ converge vers $l$.

## Chapitre 14 : Entiers naturels et dénombrement

- Arithmétique élémentaire dans $\mathbb{N}$.
  - Divisibilité dans $\mathbb{N}$ : multiples, diviseurs, division euclidienne.
  - pgcd et ppcm : définition, caractérisation, algortihme d'Euclide.
  - Nombres premiers : crible d'Eratosthène, décomposition en facteurs premiers.
- Ensembles finis
  - Cardinal d'un ensemble fini, parties d'un ensemble fini, prnicipe des tiroirs.
  - Opérations sur les ensembles finis : union et produit caractésien.
- Dénombrement
  - Listes : nombre de $p$-listes, nombre de parties d'un ensemble fini, nombre de $p$-liste d'éléments deux à deux distincts, nombre d'injections, nombre de permutations
  - Nombre de partie à $p$ éléments d'un ensemble fini de cardinal $n$.
  - Démonstration combinatoire du binôme de Newton

## Questions de cours

Q1 Théorème d'Euclide
Q2 Soit $E$ un ensemble fini. Montrer que toute partie de $E$ est finie.
Q3 Soient $E$ et $F$ deux ensembles de même cardinal. Montrer que $f$ injective $\iff$ $f$ surjective.
Q4 Calculer le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ lorsque $E$ est un ensemble fini.
Q5 Soient $E$ et $F$ deux ensembles finis. Montrer que $E \times F$ est un ensemble fini et calcul du cardinal.
Q6 Démonstration combinatoire du triangle de Pascal.
Q7 Démonstration combinatoire du binôme de Newton.

## Chapitre 15 : Matrices

- Ensemble des matrices
  - définition en tant qu'application de $\mathbb{K}^{[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ représenté par un « tableau de nombres », ligne, colonne, matrice ligne, matrice colonne, matrice carrée, matrice nulle.
  - Opérations dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ : somme, produit par un scalaire, produit
  - Matrices et vecteurs colonnes : lien entre système linéaire et matrice.
  - Matrices élémentaires.
  - Matrices carrées : diagonales, triangulaires.
  - Puissance d'une matrice, binôme de Newton, Bernoulli.
- Opérations élémentaires et pivot de Gauss.
  - Matrices associées aux opérations élémentaires : transvection, transposition, dilatation.
  - Opérations sur les lignes et les colonnes.
- Matrices inversibles : définition et propriétés, caractérisation de l'inversibilité. Méthode du pivot de Gauss-Jordan pour la calcul de l'inverse. Calcul d'inverse par la résolution d'un système linéaire associé.
- Transposition : définition et propriétés, matrices symétriques et antisymétriques.

## Questions de cours

Q1 Associativité du produit matriciel.
Q2 Matrices diagonales inversibles.
Q3 Linéarité de la transposition.
Q4 Transposée d'un produit.

## Chapitre 16 : Géométrie plane

- Géométrie du triangle : somme des angles, égalité et théorème de Pythagore, bissectrice d'un angle, théorème de Thalès.
- Modes de repérage d'un point
  - coordonnées cartésiennes, obtention du milieu d'un segment, les équations cartésiennes
  - affixe d'un point du plan dans un repère otrhonormé, lien entre vecteur et nombres complexes, relation de Chasles, changement d'origine
  - systèmes de coordonnées polaires, les équations polaires, cas particulier du cercle
  - changement de représentation.
- Produit scalaire : définition géométrique, bilinéarité, symétrie, carré scalaire. Lien avec l'orthogonalité, décomposition d'un vecteur dans un repère orthonormé. Théorème d'Al-Kashi, inégalité de Cauchy-Schwarz.
- Produit mixte : définition géométrique, bilinéarité, antisymétrie. Lien avec la colinéarité, expression dans un repère orthonormé.
- Droites : définition par un point et une direction, espace vectoriel directeur, équations paramétrique et cartésiennes, vecteur normaux, distance d'un point à une droite.
- Cercles : équations cartésiennes, équations polaires, intersection avec une droite.
- Transformations : définition comme une bijection du plan, représentation complexe. Translation, rotation, symétrie axiale, homothétie ainsi que leur représentation complexe.

## Questions de cours

Q1 Égalité et théorème de Pythagore.
Q2 Décomposition d'un vecteur dans un repère othonormé.
Q3 Distance d'un point à une droite.
Q4 Réprésentation complexe des transformations usuelles.

## Chapitre 17 : Polynômes

- Ensemble $\mathbb{K}[X]$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
  - Définition d'un polynôme comme une expression algébrique faisant intervenir des puissance d'une indéterminée $X$.
  - Opérations dans $\mathbb{K}[X]$ : addition, multiplication, associativité, commutativité, distributivité, intégrité. Compositions de polynômes.
  - Formules sommatoires : Newton, Bernoulli.
  - Degré d'un polynôme : cas d'une somme, d'un produit, d'une composition, éléments inversibles de $\mathbb{K}[X]$, définition de $\mathbb{K}_n[X]$.
  - Fonction polynomiale associée à un polynôme.
- Divisibilité et division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$, multiples, polynômes associés.
- Dérivation d'un polynôme : définition, propriétés. Dérivées successives, formule de Leibniz, formule de Taylor.
- Racines d'un polynôme
  - Définition d'une racine, lien avec la divisibité, majoration du nombre de racines deux à deux distinctes d'un polynôme non nul. Identification entre polynôme et fonction polynomiale (dans le cas de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
  - ordre de multiplicité d'une racine : caractérisation, lien avec la divisibilité.
  - Polynômes scindés : définition et caractérisation pour les polynômes non constants.
  - Décomposition en facteurs irreductibles dans $\mathbb{C}[X]$, factorisation dans $\mathbb{R}[X]$
  - Relation coefficients et racines.

## Questions de cours

Q1 Degré d'une somme de polynômes.
Q2 Théorème de division euclidienne.
Q3 Formule de Taylor dans le cadre des polynômes.
Q4 Formule de Newton.
Q5 Formule de Bernoulli.
Q6 Dérivation d'un produit.
Q7 Dérivation d'une composition.
Q8 Formule de Leibniz *(en admettant la dérivation d'un produit).*
Q9 Si $a_1, \cdots, a_n$ sont $n \in \mathbb{N}^*$ racine(s) deux à deux distinctes de $P \in \mathbb{K}[X]$, montrer que

$$\prod_{i=1}^{n} (X - a_i) | P.$$

## Chapitre 18 : Espace vectoriel

- Définition et espaces de référence : $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K})$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}[X]$, $E \times F$.
- Sous espace vectoriel
- Espace vectoriel engendré par un ensemble/une famille
- Somme de sous-espace vectoriels : définition, somme directe, espaces supplémentaires
- Famille libre, liée, génératrice
- Base : définition, lien avec les sommes directes, bases canoniques des esapces de référence.

## Questions de cours

Q1 Si $F$ et $G$ sont deux sous espaces vectoriels de $E$, montrer que $F \cap G$ est un espace vectoriel.

Q2 Déterminer une famille génératrice de $\{(x, y, z) \ / \ x + y + z = x - z = 0\}$.

Q3 Soit $E$ un espace vectoriel. Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. Montrer que $E = F \oplus G$ si et seulement si

$$\forall x \in E, \exists!(f, g) \in F \times G, \quad x = f + g.$$

## Chapitre 19 : Espace vectoriel de dimension finie

- Définition, existence de base
- Théorème de la base extraite d'une famille génératrice, théorème de la base incomplète.
- Calcul de dimension d'espaces classiques : $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}_n[X], \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- Exemples d'espaces vectoriels de dimension infinie : $\mathbb{R}[X]$, $\mathcal{C}^0$.
- Rang d'une famille de vecteur
- Dimension d'un sous-espace vectoriel
- Formule de Grassmann

## Questions de cours

Q1 Formule de Grassmann

Q2 Soit $(x_1, \cdots, x_n)$ une famille libre d'un espace vectoriel $E$. Soit $x \in E$. Montrer que $(x_1, \cdots, x_n, x)$ est liée si et seulement si $x \in \operatorname{Vect}(x_1, \cdots, x_n)$.

## Chapitre 20 : Intégration

- Intégration des fonctions en escalier : notion de subdivision, définition de l'intégrale et propriétés.
- Intégration des fonctions continues : linéariré, Chasles, positivité, croissance, valeur moyenne, fonction continue d'intégrale nulle.
- Somme de Riemann
- Extension aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$
- Calcul intégrale : Théorème fondamental de l'analyse, intégration par parties, formule de changement de variable
- Formules de Taylor : Young, avec reste intégral.

## Questions de cours

Q1 Convergence des sommes de Riemann

Q2 Linéarité de l'intégrale pour les fonctions continues

Q3 Formule de Taylor avec reste intégral

Q4 Toute fonction de signe constant d'intégrale nulle est nulle

## Chapitre 21 : Analyse asymptotique


- Intégration des fonctions en escalier : notion de subdivision, définition de l'intégrale et propriétés.
- Intégration des fonctions continues : linéariré, Chasles, positivité, croissance, valeur moyenne, fonction continue d'intégrale nulle.
- Somme de Riemann
- Extension aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$
- Calcul intégrale : Théorème fondamental de l'analyse, intégration par parties, formule de changement de variable
- Formules de Taylor : Young, avec reste intégral.


## Questions de cours


Q1 Convergence des sommes de Riemann

Q2 Linéarité de l'intégrale pour les fonctions continues

Q3 Formule de Taylor avec reste intégral

Q4 Toute fonction de signe constant d'intégrale nulle est nulle

## Chapitre 22 : Géométrie dans l'espace

- coordonnées cartésiennes, produit scalaire, décomposition d'un vecteur dans une base orthonormée, coordonnées cylindrique et sphériques.
- produit vectoriel : orthonoganilé, vecteurs colinéaires, bilinéarité, antisymétrie, Cauchy-Schwarz
- produit mixte : règle de Sarrus, coplanéarité.
- droites : équations catrésiennes, paramétriques, direction. plans : représentation paramétrique, cartésienne, direction, vecteur normal, parallélisme. sphères : équations cartésinnes et sphériques.
- projection d'un point sur une droite et un plan.
- intersections : droite, plan, sphère.

## Questions de cours

Q1 Décomposition d'un vecteur dans une base orthonormée.

Q2 Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs de l'espace alors $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|^2 + (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 \|\overrightarrow{v}\|^2$.

Q3 Distance d'un point à un plan, à une droite.

## Chapitre 23 : Applications linéaires

- Définition, caractérisation, opérations
- Noyau et image
- Isomorphisme : définition, lien avec l'image d'une base, cas de la dimension finie
- Modes de définition d'une application linéaire : explicite, avec une base, à l'aide d'une décomposition en deux espaces supplémentaires
- Endomorphismes remarquables : homothétie, projections, symétries
- Rang d'une application linéaire
- Équations linéaires

## Questions de cours

Q1 Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont des espaces vectoriels.

Q2 Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que tout supplémentaire de $\ker(f)$ est isomorphe à $\text{Im}(f)$. En déduire aussi le théorème du rang.

Q3 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\forall x \in E, \exists \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(x) = \lambda x$. Montrer que $f$ est une homothétie.

## Chapitre 24 : Probabilités

- Notion d'expérience aléatoire, univers, évènements.
- Évènements particuliers : certain, impossible, contraire, union et intersection.
- Système complet d'évênements
- Espaces probabilisés fini. Définition d'une probabilité, propriétés, détermination d'une probabilité par l'image des singletons, probabilité uniforme.
- Probabilités conditionnelles
- Formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formyle de Bayes
- Indépendance, indépendance mutuelle et deux à deux.

## Questions de cours

Q1 Formule des probabilités composées.

Q2 Formule des probabilités totales puis application à la formule de Bayes.

Q3 Soit $B$ un évènement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$, montrer que $\mathbb{P}_B$ est une probabilité.

## Chapitre 25 : Séries numériques

- Définition, symbologies : terme général d'une série, convergence, divergence, convergence grossière (terme général qui ne tend pas vers 0), convergence absolue.
- Reste d'une série convergente.
- Propriétés linéaires des séries.
- Séries usuelles : géométrique, Riemann, exponentielle
- Critères de comparaison des séries à termes positifs
- Technique de la monotonie intégrale.
- Inégalité triangulaire.
- Développement décimal

## Questions de cours

Q1 Divergence de la série harmonique.

Q2 Donner un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ lorsque $1 < \alpha$.

Q3 Critère de comparaison des séries à termes positifs.

Q4 Nature des séries de Riemann.

Q5 Nature des séries géométriques.

Q6 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Q7 Montrer qu'une série absolument convergente est une série convergente. En déduire l'inégalité triangulaire.

## Chapitre 26 : Variables aléatoires

- Définition en tant que fonction sur un univers. Notations ensemblistes de l'évênement $X = a$.
- Loi d'une variable aléatoire. Transformation d'une variable aléatoire et loi induite.
- Lois usuelles : Bernoulli, uniforme, Binomiale.
- Couple de variable aléatoires : définition, loi conjointe, lois marginales, loi conditionnelle.
- Indépendance de variables aléatoires : cas d'un couple, indépendance mutuelle.
- Somme de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes.
- Espérance : définition, cas des lois usuelles.
- Variance : König-Huygens, variance d'une somme de variables indépendantes, variances usuelles
- Inégalité de concentration : Markov, Bienaymé-Tchebychev.

## Questions de cours

Q1 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Q2 Lois usuelles, espérance, variance.

Q3 Somme de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes.

Q4 Formule de transfert.