Dérivation

1) Soit $x > 0$,

Soit $f : t \mapsto \ln(t)$

f continue sur $[x, x+1]$ $(x>0)$

f dérivable sur $]x, x+1[$

donc (accroissements finis) il existe $c \in]x, x+1[$,

$$f(x+1) - f(x) = (x+1-x) f'(c)$$

Donc : $\frac{1}{c} = \frac{\ln(x+1) - \ln(x)}{1} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

or : $c \in]x, x+1[$ donc $\frac{1}{c} \in \left]\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x}\right[$

Par suite $\frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$

2) Soit $g : \begin{cases} [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) - x \end{cases}$

g continue par somme

$\begin{cases} g(a) = f(a) - a \geqslant 0 \text{ car } f(a) \in [a,b] \\ g(b) = f(b) - b \leqslant 0 \text{ car } f(b) \in [a,b] \end{cases}$

donc : 0 est une valeur intermédiaire entre $g(a)$ et $g(b)$.

g continue sur $[a,b]$ donc : (TVI)

$\exists c \in [a,b]\ g(c) = 0$

3) Soit $f : x \mapsto e^{ix}$

$\cos = Re(f)$ et $\sin = Im(f)$

De plus $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} Re(f^{(n)}) = \cos^{(n)} \\ Im(f^{(n)}) = \sin^{(n)} \end{cases}$

or : $f' = if$ Donc :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} = i^n f$ (récurrence)

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} f^{(4n)} = f \\ f^{(4n+1)} = if \end{cases} \text{ et } \begin{cases} f^{(4n+2)} = -f \\ f^{(4n+3)} = -if \end{cases}$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} \cos^{(4n)} = \cos \\ \cos^{(4n+1)} = -\sin \\ \cos^{(4n+2)} = -\cos \\ \cos^{(4n+3)} = \sin \end{cases}$ et $\begin{cases} \sin^{(4n)} = \sin \\ \sin^{(4n+1)} = \cos \\ \sin^{(4n+2)} = -\sin \\ \sin^{(4n+3)} = -\cos \end{cases}$

4) Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f et g sont dérivables n-fois alors fg est dérivable n-fois et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Polynômes

1) Soit $P = X^3 + (3+i)X + 2 + 2i$

P est un polynôme de degré deux de discriminant

$\Delta = (3+i)^2 - 4(2+2i)$

$= 8 + 6i - 8 - 8i = -2i = \left(\sqrt{2}\, e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)^2 = (1-i)^2$

D'où : $\forall x \in \mathbb{C},\ (P(x) = 0) \iff \left(x = \dfrac{-3-i+\sqrt{2}\,e^{\frac{3i\pi}{4}}}{2}\right)$

ou

$\left(x = \dfrac{-3-i-\sqrt{2}\,e^{\frac{3i\pi}{4}}}{2}\right)$

$\iff (x = -1-i)$ ou $(x = -2)$

2) Soit $P = (X^2-1)(X-i)(X+i) \in \mathbb{C}[X]$

on a $(X-i)(X+i) = X^2+1 \in \mathbb{R}[X]$

le discriminant de X^2+1 est $-1 < 0$ donc : X^2+1 est irreductible dans $\mathbb{R}[X]$

De ~~même~~ plus $X-1$ et $X+1$ sont de degré 1

donc : $X-1$ et $X+1$ sont irreductibles dans $\mathbb{R}[X]$

$X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ dans $\mathbb{R}[X]$

Les facteurs irreductibles de P sont :

$X-1$, $X+1$ et X^2+1

3) $P = 1 + X + X^2$ et $Q = X + 2$

$P \circ Q = 1 + (X+2) + (X+2)^2$

$= 1 + X + 2 + X^2 + 4X + 4$

$= \cancel{7} + 5X + X^2$

4) Soit $x \in \mathbb{C}$. Soit $A \in \mathbb{K}[X]$

Supposons que : x est racine d'ordre deux de A

Donc : $(X-x)^2 \mid A$ et $(X-x)^3 \nmid A$

D'où : $\exists Q \in \mathbb{K}[X],\ A = (X-x)^2 Q$

Supposons que : $Q(x) = 0$

donc : $(X-x) \mid Q$ Donc : $(X-x)^3 \mid A$

Par suite : $Q(x) \neq 0$

$$A(x) = \widetilde{(X-x)^2 Q(X)}(x)$$

$$= 0^2 \times Q(x) = 0$$

$$A' = 2(X-x)Q + (X-x)^2 Q'$$

Donc : $A'(x) = 0$

$$A''(X) = 2Q + 2\times 2(X-x)Q' + (X-x)^2 Q''$$

Donc : $A''(x) = 2Q(x) \neq 0$

Réciproquement, Supposons que : $\begin{cases} A(x) = A'(x) = 0 \\ A''(x) \neq 0 \end{cases}$

Par la formule de Taylor $(x \in \mathbb{C})$,

$$A = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{A^{(k)}(x)}{k!}(X-x)^k$$

$$= \sum_{k \geq 2} \frac{A^{(k)}(x)}{k!}(X-x)^k \quad \text{car } A^{(0)}(x) = A^{(1)}(x) = 0$$

Donc : $A = (X-x)^2 \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{A^{(k+2)}(x)}{(k+2)!}(X-x)^k$

Donc : $(X-x)^2 / A$

Supposons que : $(X-x)^3 / A$

donc $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$, $A = (X-x)^3 Q$

Donc : $(X-x)Q = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{A^{(k+2)}(x)}{(k+2)!}(X-x)^k$

D'où : $(X-x) \mid \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{A^{(k+2)}(x)}{(k+2)!}(X-x)^k$

Donc : $0 = \widetilde{\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{A^{(k+2)}(x)}{(k+2)!}(X-x)^k}(x)$

$$= \frac{A''(x)}{2!} \times 1 \text{ donc : } A''(x) = 0$$

Par suite : $(X-x)^3 \nmid A$

5) <u>Soit $P \in \mathbb{C}[X]$</u>, $(P')^2 = P$

<u>cas n° 1</u> : $P = 0$

alors $P' = 0$ et $(P')^2 = P$ est triviale

<u>cas n° 2</u> : $\deg(P) = 0$

<u>donc</u> : $P' = 0$ <u>donc</u> : $\deg(P') = -\infty$

<u>cas n° 3</u> : $\deg(P) \geq 1$

$\deg((P')^2) = 2\deg(P') = 2\deg(P) - 2 = \deg(P)$

Donc $\deg(P) = 2$

<u>donc</u> $\exists (a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, $\begin{cases} a \neq 0 \\ P = aX^2 + bX + c \end{cases}$

Donc

$P' = 2aX + b$ et <u>donc</u> $(P')^2 = 4a^2X^2 + 4abX + b^2$

or : $(P')^2 = P$ <u>donc</u> : $\begin{cases} 4a^2 = a \\ 4ab = b \\ b^2 = c \end{cases}$

or : $a \neq 0$ <u>donc</u> $\boxed{a = \frac{1}{4}}$ ~~et~~ Finalement,

$P = \frac{1}{4}X^2 + bX + b^2$

Réciproquement, si $P = \frac{1}{4}X^2 + bX + b^2$ où $b \in \mathbb{C}$, ou $P = 0$

$(P')^2 = P$ si $P = 0$

et sinon $(P')^2 = \left(\frac{1}{2}X + b\right)^2 = \frac{1}{4}X^2 + 2 \times \frac{1}{2}bX + b^2 = P$

Dans tous les cas $(P')^2 = P$

Espaces vectoriels

1) Soit $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, 2x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 2xy + 2xz - 4yz = 0\}$

Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$

$$2x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 2xy + 2xz - 4yz$$
$$= x^2 - 2xy + y^2$$
$$+ x^2 + 5z^2 + 2xz - 4yz + y^2$$
$$= (x-y)^2 + x^2 + 2xz + z^2$$
$$+ 4z^2 + y^2 - 4yz$$
$$= (x-y)^2 + (x+z)^2 + (y-2z)^2$$

D'où :

$(x,y,z,t) \in E \iff (x-y)^2 + (x+z)^2 + (y-2z)^2 = 0$

$$\iff \begin{cases} x = y \\ x = -z \\ y = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ y = -z \\ 3z = 0 \end{cases} \iff (x = y = z = 0)$$

$\iff (x,y,z,t) \in \mathrm{Vect}((0,0,0,1))$

Par suite : E est un espace vectoriel de dimension 1.

2) On note E_{ij} les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pour tout $(i,j) \in [\![1,2]\!]^2$.

On a donc :

$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

et $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est :

$(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$

3) Montrons que : $E = F' \oplus G$

Soit $x \in E$

On a $E = F + G$ donc $\exists f \in F, \exists g_0 \in G, x = f + g_0$

or : $F = F' \oplus (F \cap G)$

donc : $\exists f' \in F', \exists y \in F \cap G, f = f' + y$

Soit $g = y + g_0$. On a $g \in G$ car $\begin{cases} g_0 \in G \\ y \in F \cap G \subset G. \end{cases}$

De plus $x = f + g_0$

$$= f' + y + g_0 = \underbrace{f'}_{\in F'} + \underbrace{g}_{\in G} \in F' + G.$$

Soit $x \in F' \cap G$

donc : $\begin{cases} x \in F' \\ x \in G \end{cases}$

or : F' est un sous-espace vectoriel de F

donc : $x \in F$ donc $x \in F \cap G$ et $x \in F'$

or, F' et $F \cap G$ sont supplémentaires

donc $x = 0$

Finalement $E = F' + G$ et $F' \oplus G$

Applications linéaires et géométrie

1) Soit $P = mat_{\mathcal{E}}(\mathcal{B})$

donc : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(P) = -0 \times \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2(1+3) = 8 \neq 0$$

donc : $P \in GL_3(\mathbb{K})$

déf : $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{K}^3$

$$P_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) on a $mat_{\mathcal{E}}(s) = P_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}}$

donc : $\begin{cases} s(e_1) = e_1 + \sqrt{3}e_3 + 0e_2 \\ s(e_3) = -\sqrt{3}e_1 + 0e_3 + 0e_2 \\ s(e_2) = 0e_1 + 0e_3 + 2e_2 \end{cases}$

Déf :

$$mat_{(e_1, e_3, e_2)}(s) = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ +\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3) Soit $\mathcal{B}' = (e_1, e_3, e_2)$

$$mat_{\mathcal{B}'}(s) = 2 \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

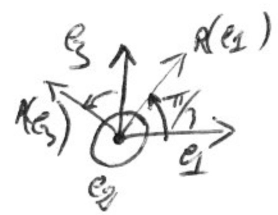
Soit R la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ autour de $Vect(e_2)$

Soit $h = 2Id_{\mathbb{K}^3}$.

on a $s = h \circ R$ car

$mat_{\mathcal{B}'}(h \circ R) = 2 mat_{\mathcal{B}'}(R) = mat_{\mathcal{B}'}(s)$

En effet $\begin{cases} R(e_1) = \frac{1}{2}e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_2 \\ R(e_3) = \frac{-\sqrt{3}}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 \\ R(e_2) = e_2 \end{cases}$



4) Soit R' la rotation d'angle $\frac{-\pi}{3}$ autour de $Vect(e_2)$

donc : $R \circ R' = R' \circ R = Id_{\mathbb{R}^3}$

d'où : $s^{-1} = \frac{1}{2} R'$

Donc : $mat_{\mathcal{E}}(s^{-1}) = \frac{1}{2} mat_{\mathcal{E}}(R')$

or : $\begin{cases} R'(e_1) = \frac{1}{2}e_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}e_3 \\ R'(e_2) = e_2 \\ R'(e_3) = \frac{1}{2}e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_3 \end{cases}$

Donc :

$$mat_{\mathcal{E}}(s^{-1}) = P_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}}^{-1} = \frac{1}{\cancel{2}\,4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5) ~~m~~ Par définition,

$\begin{cases} u(e_1) = e_1 \\ u(e_3) = e_3 \end{cases}$ et $u(e_2) = -e_2$

Donc : $mat_{\mathcal{E}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Par un changement de base,

$$mat_{\mathcal{B}}(u) = P_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}}^{-1}\, mat_{\mathcal{E}}(u)\, P_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & -2 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6) On a $\begin{cases} e_2 \perp e_1 \\ e_2 \perp e_3 \end{cases}$ (et $e_2 = e_3 \wedge e_1$)

e_2 est donc un vecteur normal à P

D'où $P \,/\, y = 0$

$A(1,2,3)$ donc $d(A,P) = \frac{|2|}{\sqrt{1^2}} = 2$