Devoir n°2

EXERCICE 1

arcsin est bien défini sur $[-1, 1]$.

arctan est défini sur $\mathbb{R}$.

De plus $\forall x \in [-1, 1]$, $1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow (x \neq 1)$ ou $(x \neq -1)$

L'égalité a un sens sur $]-1, 1[$.

Soit $f : \begin{cases}]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \arcsin(x) - \arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \end{cases}$

arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$

arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$

Par suite f est dérivable sur $]-1, 1[$ par composition puis "somme".

Soit $x \in]-1, 1[$,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \left(\frac{1 \times \sqrt{1-x^2} - x\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}\right) \times \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 + \frac{2x^2}{2}}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3} \times \frac{1}{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \times \frac{1-x^2}{1}$$

$$= 0$$

Or, $]-1, 1[$ est un intervalle donc, f constante sur $]-1, 1[$

De plus $f(0) = 0$ donc,

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \arcsin(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

EXERCICE 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i} 3^j \times 4^i = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i} 3^j 4^i$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} 3^j 4^i \quad \text{(Binôme Newton)}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} 3^j (4+1)^j = \sum_{j=0}^{n} 15^j$$

$$= \frac{1 - 15^{n+1}}{1 - 15} \quad (15 \neq 1)$$

Donc

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i} 3^j 4^i = \frac{1}{14}\left(15^{n+1} - 1\right)}$$

EXERCICE 3

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2 - 1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{(k-1)}{\cancel{k}} \times \frac{k+1}{k}\right)$$

OR : $\forall k \in [\![2, n]\!]$, $\frac{k-1}{k} > 0$ et $\frac{k+1}{k} > 0$

donc :

$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n} \left(\ln\left(\frac{k-1}{k}\right) + \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)\right)$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \left(\ln(k-1) - \ln(k)\right)$$

$$+ \sum_{k=2}^{n} \left(\ln(k+1) - \ln(k)\right)$$

$$= \ln(2-1) - \ln(n) + \ln(n+1) - \ln(2)$$

$$= \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)$$

Problème 1

1) a) $x \longmapsto \dfrac{sh(x)}{ch(x)}$ est bien définie sur $\{x \in \mathbb{R} \,/\, ch(x) \neq 0\}$.

Or : $\forall x \in \mathbb{R},\ ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \geqslant 1$.

Donc : $\boxed{x \longmapsto \dfrac{sh(x)}{ch(x)} \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$

b) Par quotient de fonctions dérivables (~~ch ≠ 0 sur R~~ ch ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$), th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ th'(x) = \frac{sh'(x)ch(x) - sh(x)ch'(x)}{ch^2(x)}$$

$$= \frac{ch^2(x) - sh^2(x)}{ch^2(x)} = 1 - th^2(x)$$

$$= \frac{1}{ch^2(x)}$$

c) $\forall x \in \mathbb{R}\quad th(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Donc : $\begin{cases} th(x) = \dfrac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1 \\[2ex] th(x) = \dfrac{e^{-x}(e^{2x} - 1)}{e^{-x}(e^{2x} + 1)} \xrightarrow[x \to -\infty]{} -1 \end{cases}$

d) D'après 1)b), $\forall x \in \mathbb{R}\quad th'(x) = \dfrac{1}{ch^2(x)} > 0$

valeurs de x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
signe de $th'(x)$	$+$
variations de th	$-1 \nearrow 1$

th est continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Donc : th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$

Problème 1 (Suite)

1) e) Montrons que argth est dérivable sur $]-1, 1[$

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ th'(x) = \dfrac{1}{ch^2(x)} \neq 0 \\ th \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \end{cases}$$

Donc, (théorème de dérivation de l'application réciproque)

argth est dérivable et

$$\forall x \in]-1, 1[,\ \operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{th'(\operatorname{argth}(x))}$$

$$= \frac{1}{1 - th^2(\operatorname{argth}(x))}$$

$$= \frac{1}{1 - x^2}.$$

2) Soit $y \in]-1, 1[$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (th(x) = y) \Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y$$

$$\Leftrightarrow (1-y)e^x - (1+y)e^{-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-y)(e^x)^2 - (1+y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (e^x)^2 = \frac{1+y}{1-y} \quad (y \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow e^x = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \qquad \begin{cases} \dfrac{1+y}{1-y} \geqslant 0 \\ e^x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

Par suite : $\boxed{\operatorname{argth}(y) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)}$

Problème 1 (Suite 2)

3) a) Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit

$$\frac{1}{sh(y)} - \frac{1}{th\left(\frac{y}{2}\right)} + \frac{1}{th(y)} = Q$$

$$sh(y) = 0 \iff e^{y} = e^{-y} \iff e^{2y} = 1 \iff y = 0$$

$th(0) = 0$ donc $\begin{cases} th(y) \neq 0 \\ th\left(\frac{y}{2}\right) \neq 0 \end{cases}$ car $y \neq 0$

$$Q = \frac{2}{e^{y} - e^{-y}} - \frac{e^{y/2} + e^{-y/2}}{e^{y/2} - e^{-y/2}} + \frac{e^{y} + e^{-y}}{e^{y} - e^{-y}}$$

$$= \frac{2 + e^{y} + e^{-y}}{e^{y} - e^{-y}} - \frac{(e^{y/2} + e^{-y/2})(e^{y/2} + e^{-y/2})}{(e^{y/2} + e^{-y/2})(e^{y/2} - e^{-y/2})}$$

$$= \frac{2 + e^{y} + e^{-y} - (e^{y} + e^{-y} + 2e^{0})}{e^{y} - e^{-y}} = 0$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{sh(2^k x)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{th\left(\frac{2^k x}{2}\right)} - \frac{1}{th(2^k x)} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{th(2^{k-1} x)} - \frac{1}{th(2^k x)} \right) = \frac{1}{th\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{th(2^n x)}$$

Finalement,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{th\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{th(2^n x)}}$$

c) Cas n°1 : $x > 0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n x = +\infty$ donc, $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{th\left(\frac{x}{2}\right)} - 1$

Cas n°2, $x < 0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n x = -\infty$ donc, $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{th\left(\frac{x}{2}\right)} + 1$

Problème 2

1) Soit $c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = c$.

$$\left(f \text{ vérifie } (*) \right) \Leftrightarrow c = c + c$$
$$\Leftrightarrow c = 0$$
$$\Leftrightarrow (f = 0)$$

2) Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui vérifie $(*)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $xy \neq 1$.

on a $f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = f(x) + f(y)$

donc, $\lambda f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = \lambda f(x) + \lambda f(y)$

Par suite $(\lambda f)\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = (\lambda f)(x) + (\lambda f)(y)$

Donc, λf vérifie $(*)$.

3) a) Soit $(x, y) \in]-1, 1[^2$.

i) $\begin{cases} \arctan(-1) = \frac{-\pi}{4} \\ \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

Donc, $\begin{cases} \frac{-\pi}{4} < \arctan(x) < \frac{\pi}{4} \\ \frac{-\pi}{4} < \arctan(y) < \frac{\pi}{4} \end{cases}$

or : $|\arctan(x) + \arctan(y)| \leqslant |\arctan(x)| + |\arctan(y)|$

$< 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

ii) On a

$$\tan(\arctan(x) + \arctan(y)) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

où : $\begin{cases} \alpha = \arctan(x) \\ \beta = \arctan(y) \end{cases}$

Problème 2 (Suite)

3) a) ii) (Suite)

or : $\begin{cases} \tan(\alpha) = x \\ \tan(\beta) = y \end{cases}$

donc : $\boxed{\tan(\arctan(x) + \arctan(y)) = \dfrac{x+y}{1-xy}}$

iii) D'après 3)a)i) $\arctan(x) + \arctan(y) \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

donc :

$$\arctan(\tan(\arctan(x) + \arctan(y))) = \arctan(x) + \arctan(y)$$

D'où :

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

b) On a $g : x \longmapsto \arctan\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$

g est ~~de~~ bien définie au voisinage de $+\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{1-x^2} = 0$$

Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \arctan(0) = 0$

on a $h : x \longmapsto 2\arctan(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$$

Supposons que : arctan vérifié $(*)$

Soit $x \in]1, +\infty[$

donc : $x \times x = x^2 \neq 1$

donc : $\arctan\left(\dfrac{x+x}{1-x^2}\right) = \arctan(x) + \arctan(x)$

donc : $g(x) = h(x)$

or : $g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ et $h(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \pi \neq 0$

Problème 2 (Suite 2)

3) b) (Suite)

Donc : arctan vérifie (*) est absurde

4) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable qui vérifie (*).

a) Montrons que : $f(0)=0$

On a $f\left(\frac{0+0}{1-00}\right) = f(0)+f(0)$ car $1-0\times0 \neq 1$

donc : $f(0) = 2f(0)$ d'où : $\boxed{f(0)=0}$

b) Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

Soit $u : y \longmapsto f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$

u est définie sur $\{y \in \mathbb{R} \,/\, xy \neq 1\} = I$

par composition u est dérivable sur I et

$\forall y \in I,\ u'(y) = f'\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \times \frac{1\times(1-xy)+(x+y)x}{(1-xy)^2}$

Donc,

$\forall y \in I,\ u'(y) = \frac{1+x^2}{(1-xy)^2} f'\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$

~~Finalemen~~

Or : f vérifie (*) donc,

$\forall y \in I \quad u(y) = f(x)+f(y)$

donc : $\forall y \in I \quad u'(y) = 0 + f'(y)$

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (xy \neq 1) \Rightarrow$

$$\left(f'(y) = \frac{1+x^2}{(1-xy)^2} f'\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\right)$$

c) Soit $y \in \mathbb{R}$,

$y^2 \neq 1 \Leftrightarrow (y \neq -1)$ ou $(y \neq 1)$

$-y^2 = 1 \Leftrightarrow 1+y^2=0$

donc : $-y^2 \neq 1$

Problème 2 (Suite 2)

4) c) (Suite)

D'après 4) b), on a

$$f'(y) = \frac{1+(-y)^2}{(1+y^2)^2} \times f'(0)$$

$$= \frac{f'(0)}{1+y^2}$$

d) On a $\forall y \in \mathbb{R}$, $\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$

$\mathbb{R}$ est un intervalle donc

$\exists c \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $f(y) = k\arctan(y) + c$

où $k = f'(0)$.

5) On a montré que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable vérifie $(*)$ implique :

$\exists (k, c) \in \mathbb{R}^2$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $f(y) = k\arctan(y) + c$

Supposons que : $f : x \mapsto k\arctan(x) + c$ avec $(k, c) \in \mathbb{R}^2$.

~~Soit~~ Si f vérifie $(*)$ alors $f(0) = c = 0$

Si $k \neq 0$ alors

Si f vérifie $(*)$ alors $\frac{1}{k} \times f$ vérifie $(*)$ et donc arctan est solution du problème

Par suite : $k = c = 0$

La seule solution du problème est la fonction nulle

Problème 3

1)a) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \frac{n(n+1)}{2}}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

v_n est la somme d'une suite arithmétique

D'où :

$$v_n = \frac{\left(2(S_{n-1}+1) - 1 + 2S_n - 1\right)\left(S_n - S_{n-1}\right)}{2}$$

$$= \frac{2\left(S_n + S_{n-1}\right)\left(S_n - S_{n-1}\right)}{2}$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = S_n^2 - S_{n-1}^2$

$$= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(n-1)(n)}{2}\right)^2$$

$$= \frac{n^2}{4}\left(n^2 + 2n + 1 - (n^2 - 2n + 1)\right)$$

$$= \frac{n^2}{4}(4n)$$

Par suite :

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = n^3}$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=S_{k-1}+1}^{S_k} (2l-1) \underset{\text{(Chasles)}}{=} \sum_{k=S_0+1}^{S_n} (2k-1)$$

$$= \frac{\left(2(S_0+1) - 1 + 2S_n - 1\right)\left(S_n - S_0\right)}{2}$$

$$= \frac{2S_n \times S_n}{2} \quad \text{car } S_0 = 0$$

$$= S_n^2$$

Par suite : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2}$

Problème 3 (Suite)

2) Montrons par récurrence sur $\mathbb{N}^*$ que

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, " $u_n = n$ "

- Soit $n = 1$:

on a $\begin{cases} u_1 > 0 \\ \sum_{k=1}^{n} u_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)^2 \end{cases}$

donc : $u_1 > 0$ et $u_1^3 = (u_1)^2$

or : $u_1 \neq 0$ donc : $\boxed{u_1 = 1}$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie jusqu'au rang n

on a $\sum_{k=1}^{n+1} u_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} u_k\right)^2$

or par hypothèse $\forall k \leq n$, $u_k = k$

donc : $\sum_{k=1}^{n+1} u_k^3 = u_{n+1}^3 + \sum_{k=1}^{n} k^3$

$= u_{n+1}^3 + \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$ (D'après 1)c))

or : $\sum_{k=1}^{n+1} u_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} u_k\right)^2$

$= \left(u_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} u_k\right)^2$

$= \left(u_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} k\right)^2$

$= u_{n+1}^2 + 2\,u_{n+1} \sum_{k=1}^{n} k + \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$

Problème 3 (Suite 2)

2) (Suite)

Ainsi, $\sum_{k=1}^{n+1} u_k^3 = u_{n+1}^3 + \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$

$$= u_{n+1}^2 + 2\,\frac{n(n+1)}{2}u_{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

Donc, $u_{n+1}^3 - u_{n+1}^2 - n(n+1)u_{n+1} = 0$

or : $u_{n+1} \neq 0$

donc : $u_{n+1}^2 - u_{n+1} - n(n+1) = 0$

or : $(n+1)^2 - (n+1) - n(n+1) = (n+1)(n+1-1-n)$

$$= 0$$

De plus $\dfrac{-n(n+1)}{n+1} = -n$

Donc :

$$u_{n+1}^2 - u_{n+1} - n(n+1) = (u_{n+1} - (n+1))(u_{n+1} + n)$$

Donc : $u_{n+1} = n+1$ ou $u_{n+1} = -n$

or : $\begin{cases} u_{n+1} > 0 \\ -n \leqslant 0 \end{cases}$ donc $u_{n+1} = n+1$

<u>d'où la propriété au rang $n+1$</u>