Chapitre 2 : Nombres complexes et trigonométrie

1 Ensemble des nombres complexes

1.1 Définition

Définition

• On appelle ensemble des **nombres complexes** et on note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres qui s'écrivent sous la forme $z = a + ib$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $i^2 = -1$.
• Plus précisément, tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Cette écriture est appelée **écriture algébrique** (ou forme algébrique).
• Si $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, a est appelé **partie réelle** de z et notée $\mathrm{Re}(z)$, b est appelée partie imaginaire de z et notée $\mathrm{Im}(z)$.
• Si $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ avec $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$, on définit $z + z'$ et $z \times z'$ par :

$$z + z' = (a + a') + i(b + b') \text{ et } z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$$

Remarque :

- La formule du produit se retrouve en développant $(a + ib)(a' + ib')$ et en utilisant la relation $i^2 = -1$.
- Si $x \in \mathbb{R}$, on identifie x avec le nombre complexe $x + i0$. Ceci permet d'avoir $\mathbb{R}$ inclus dans $\mathbb{C}$. L'addition est la multiplication sur $\mathbb{C}$ prolongent l'addition et la multiplication usuelles sur $\mathbb{R}$. Elles vérifient donc les même propriétés :
  - associativité :
  $$\forall z, z', z'' \in \mathbb{C},\ (z + z') + z'' = z + (z' + z'') \text{ et } (z \times z') \times z'' = z \times z' \times z'')$$
  - commutativité :
  $$z + z' = z' + z \text{ et } z \times z' = z' \times z$$
  - la multiplication est distributive sur l'addition :
  $$z \times (z' + z'') = z \times z' + z \times z''$$
- Si $y \in \mathbb{R}$, on note simplement iy le nombre complexe $0 + iy$, appelé imaginaire pur. On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaires purs.
- ⚠ $\mathrm{Re}(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$ mais en général, $\mathrm{Re}(zz') \neq \mathrm{Re}(z) \times \mathrm{Re}(z')$.
  De même pour la partie imaginaire.
- $\mathbb{C}$ n'est usuellement muni d'aucune relation d'ordre. Nous ne pouvons donc pas dire qu'un complexe est plus grand qu'un autre ou qu'il est positif.

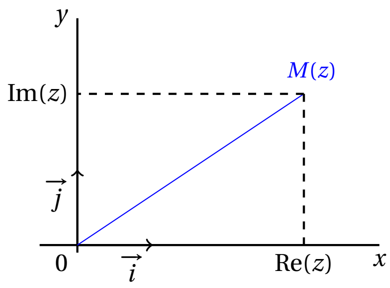
Proposition

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. On a :

$$z = z' \iff \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z') \end{cases}$$

Définition : Interprétation géométrique des nombres complexes

On munit le plan usuel $\mathscr{P}$ d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
A tout point M de $\mathscr{P}$ de coordonnées (x, y) (resp. à tout vecteur $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$) avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on associe le nombre complexe $z = x + iy$ et réciproquement. On dit que z est l'**affixe** de M (resp. $\vec{u}$) et M (resp. $\vec{u}$) est appelé image de z. On note $M(z)$ (resp. $(\vec{u}(z))$ pour exprimer que z est l'affixe de M (resp. $\vec{u}$).



Remarque :

- L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathscr{P} \\ z & \mapsto & M(z) \end{array}\right.$ est une bijection. En effet, à tout point M du plan $\mathscr{P}$ d'affixe z correspond un unique nombre complexe z son affixe.
  On identifie ainsi $\mathbb{C}$ au plan usuel, muni d'un repère orthonormé direct.
- Si A et B sont deux points du plan d'affixes a et b, alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $b-a$.

Proposition

Soit $z \in \mathbb{C}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathrm{Re}(\lambda z) = \lambda \mathrm{Re}(z); \qquad \mathrm{Im}(\lambda z) = \lambda \mathrm{Im}(z) \qquad \mathrm{Re}(iz) = -\mathrm{Im}(z); \qquad \mathrm{Im}(iz) = \mathrm{Re}(z);$$

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
On a : $\lambda(a+ib) = \lambda a + i\lambda b$, $i(\lambda a + ib) = -b + ia$. □

1.2 Conjugaison

Définition

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On appelle **conjugué** de z, et on note $\overline{z}$ le nombre complexe $a - ib$.

Proposition

Soient $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a :

- $\overline{\overline{z}} = z$.
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$.
  Si $z_2 \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.
  On dit que la conjugaison est compatible avec l'addition, la multiplication et le quotient.
- $\left\{\begin{array}{l} \mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2} \\ \mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i} \end{array}\right.$

Démonstration. Posons $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Posons $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ avec $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

- $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{a+ib}} = \overline{a-ib} = a + ib = z$.
- $\overline{z_1+z_2} = \overline{(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)} = \overline{(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)} = a_1+a_2-i(b_1+b_2) = a_1 - ib_1 + a_2 - ib_2 = \overline{z_1} + i\overline{z_2}$.
- $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{(a_1+ib_1)\times(a_2+ib_2)} = \overline{(a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)} = a_1a_2 - b_1b_2 - i(a_1b_2 + a_2b_1$.
  Or, $\overline{z_1} \times \overline{z_2} = \overline{(a_1+ib_1)} \times \overline{(a_2+ib_2)} = (a_1 - ib_1)(a_2 - ib_2) = a_1a_2 - b_1b_2 - i(a_2b_1 + a_1b_2) = \overline{z_1 \times z_2}$.
- Si $z_2 \neq 0$ alors, $\overline{z_2} \neq 0$. On a alors : $1 = \overline{z_2 \times \dfrac{1}{z_2}} = \overline{z_2} \times \overline{\dfrac{1}{z_2}}$ d'où $\overline{\dfrac{1}{z_2}} = \dfrac{1}{\overline{z_2}}$.
  Puis, $\overline{\dfrac{z_1}{z_2}} = \overline{z_1 \times \dfrac{1}{z_2}} = \overline{z_1} \times \overline{\dfrac{1}{z_2}} = \overline{z_1} \times \dfrac{1}{\overline{z_2}} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.
- On a $z = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z)$ et $\overline{z} = \mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z)$. En faisant la somme et la différence, on obtient le résultat voulu.

□

Corollaire

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors :

- $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\overline{z} = z$
- $z \in i\mathbb{R}$ si et seulement si $\overline{z} = -z$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{R} &\iff \mathrm{Im}(z) = 0 \\ &\iff \frac{z - \overline{z}}{2i} = 0 \\ &\iff z - \overline{z} = 0 \\ &\iff z = \overline{z} \end{aligned}$$

□

1.3 Module

Définition

On appelle module du nombre complexe $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et on note $|z|$ le réel positif (ou nul) défini par

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Remarque : La notion de module prolonge celle de valeur absolue, c'est à dire que le module d'un nombre réel est égal à sa valeur absolue.

Proposition

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|z|^2 = z\overline{z}$.

Démonstration. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors $z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$. □

Proposition

Soit $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a :

- $|z| = 0 \iff z = 0$
- $|\overline{z}| = |z|$.
- $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$.
- $|z_1 z_2| = |z_1| \times |z_2|$
  si $z_2 \neq 0$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
  On dit que le module est compatible avec le produit et le quotient.
  ⚠ le module n'est pas compatible avec la somme.

Démonstration. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- $$\begin{aligned} |z| = 0 &\iff |z|^2 = 0 \\ &\iff a^2 + b^2 = 0 \\ &\iff a^2 = 0 \text{ et } b^2 = 0 \\ &\iff a = 0 \text{ et } b = 0 \\ &\iff z = 0 \end{aligned}$$

- $|\overline{z}| = |a - ib| = \sqrt{a^2 + b^2} = |a + ib| = |z|$.

- $|\mathrm{Re}(z)| = |a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2+b^2} = |z|$. On procède de même pour la partie imaginaire.
- $|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \overline{z_1}\,\overline{z_2}$ par compatibilité de la conjugaison avec la multiplication.
  Ainsi, $|z_1 z_2|^2 = z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 |z_2|^2$. Or, $|z_1 z_2|, |z_1|$ et $|z_2|$ sont des réels positif d'où $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.
- Si $z_2 \neq 0$ alors, on a : $1 = \left|z_2 \times \frac{1}{z_2}\right| = |z_2| \times \left|\frac{1}{z_2}\right|$. Comme $z_2 \neq 0$, on a $|z_2 \neq 0$ d'où $\left|\frac{1}{z_2}\right| = \frac{1}{|z_2|}$.
  Enfin, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|z_1 \times \frac{1}{z_2}\right| = |z_1| \times \left|\frac{1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

□

Proposition : Inverse d'un nombre complexe

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Méthode

Pour calculer l'expression algébrique de l'inverse d'un nombre complexe z, ou simplifier une expression du type $\frac{z_1}{z_2}$ on multipliera toujours en numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Exemple : $\frac{4+3i}{-2+7i} = \frac{(4+3i)(-2-7i)}{(-2+7i)(-2-7i)} = \frac{-8-6i-28i+21}{4+49} = \frac{13}{53} - \frac{34}{53}i.$

Proposition : Inégalité triangulaire

Pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a :

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

avec égalité si et seulement si $z_1 = 0$ ou s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_2 = \lambda z_1$.

Remarque :

- ⚠ Comme pour les nombres réels, on n'a pas : $|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2|$!

Démonstration. Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

- Avec une proposition précédente, on a :

$$\begin{aligned}
|z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)} \\
&= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \\
&= |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} + |z_2|^2 \\
&= |z_1|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \\
&\leq |z_1|^2 + 2|\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})| + |z_2|^2 \\
&\leq |z_1|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| + |z_2|^2 \\
&\leq |z_1|^2 + 2|z_1| \times |\overline{z_2}| + |z_2|^2 \\
&\leq |z_1|^2 + 2|z_1| \times |z_2| + |z_2|^2 \\
&\leq (|z_1| + |z_2|)^2.
\end{aligned}$$

  Comme $|z_1+z_2|$, $|z_1|+|z_2|$ sont des réels positifs, on obtient : $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$.
- Supposons que $|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2|$.
  On a donc égalité dans toutes les inégalités précédentes. Donc :

$$\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) = |\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})| = |z_1\overline{z_2}|.$$

  On a donc $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})^2 = |z_1\overline{z_2}|^2 = \mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})^2 + \mathrm{Im}(z_1\overline{z_2})^2$ donc $\mathrm{Im}(z_1\overline{z_2}) = 0$. Ainsi, le nombre $z_1\overline{z_2}$ est un réel.
  D'où $z_1\overline{z_2} = \mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) = |\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})|$. Ainsi, $z_1\overline{z_2} \in \mathbb{R}_+$.
  Notons α ce réel positif.
  On a alors : $z_2\overline{z_1} = \overline{z_1\overline{z_2}} = \overline{\alpha} = \alpha$.
  Si $z_1 \neq 0$, alors $z_2 = z_2 \frac{z_1\overline{z_1}}{|z_1|^2} = \frac{\alpha}{|z_1|^2} z_1$, donc en posant $\lambda = \frac{\alpha}{|z_1|^2}$, on a $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et $z_2 = \lambda z_1$.
  Réciproquement,

- si $z_1 = 0$, on a l'égalité
- si il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_2 = \lambda z_1$, on a :

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| &= |(1+\lambda)z_1| \\ &= (1+\lambda)|z_1| \quad \text{car } 1+\lambda \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} |z_1| + |z_2| &= |z_1| + |\lambda z_1| \\ &= |z_1| + |\lambda||z_1| \\ &= (1+\lambda)|z_1| \quad \text{car } \lambda \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

donc on a égalité.

□

Corollaire

Pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$.

Démonstration. Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. On a :

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \iff -|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$$

Or, par la proposition précédente, on a :

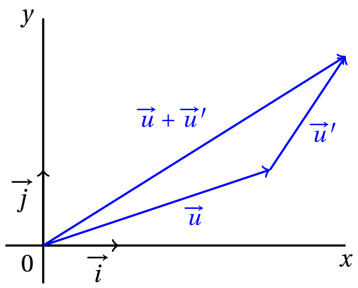
$$|z_2| = |z_2 - z_1 + z_1| \leq |z_2 - z_1| + |z_1|$$

D'où $-|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2|$. Ainsi, l'inégalité de gauche est vérifiée.
Toujours avec la proposition précédente, on a :

$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|$$

D'où $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$. L'inégalité de droite est donc aussi vérifiée.
On a donc le résultat souhaité. □

Interprétation géométrique du module :
Soit $z \in \mathbb{C}$.
Si M est le point du plan $\mathscr{P}$ d'affixe z alors $|z| = ||\overrightarrow{OM}|| = OM$.
De même, si $\overrightarrow{u}$ est le vecteur du plan d'affixe z alors $|z| = ||\overrightarrow{u}||$
Si A et B sont deux points du plan d'affixes a et b alors $|b - a| = ||\overrightarrow{AB}|| = AB$.
L'inégalité triangulaire peut donc s'interpréter de la manière suivante : si z et z' représentent les affixes de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ alors : $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}'|| \leq ||\overrightarrow{u}|| + ||\overrightarrow{u}'||$.
Le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire correspond au cas où les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont colinéaires de même sens.



Cercles et disques :
Soient $\omega \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

- L'ensemble des points du plan d'affixe z vérifiant $|z - \omega| = r$ est le cercle de centre Ω d'affixe ω et de rayon r.
- L'ensemble des points du plan d'affixe z vérifiant $|z-\omega| < r$ (resp. $|z-\omega| \leq r$) est le disque ouvert (resp. fermé) de centre Ω d'affixe ω et de rayon r.
  disque ouvert (c'est à dire ne contenant pas les points du cercle) contrairement au disque fermé.

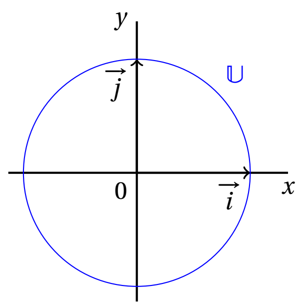
2 Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

Définition

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}.$$

$\mathbb{U}$ s'identifie géométriquement, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, avec le cercle trigonométrique (cercle de centre 0 et de rayon 1) (cas particulier du résultat précédent).



Définition

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note $e^{i\theta}$ le nombre complexe défini par $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$

Exemple :

- $e^{i0} = 1$. Cette nouvelle définition est donc compatible avec la valeur que donne la fonction exponentielle en 0 déjà connue sur $\mathbb{R}$.
- $e^{2i\pi} = 1$, $e^{i\pi} = -1$.
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$.

Proposition : Paramétrisation de $\mathbb{U}$ par les fonctions circulaires

Un nombre complexe z est de module 1 si et seulement si il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$. Autrement dit, on a :

$$\mathbb{U} = \{e^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Démonstration. On procède par double inclusion.

- Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors, par définition du module, $|e^{i\theta}|^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$. Ainsi $|e^{i\theta}| = 1$ et $\{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{U}$.
- Réciproquement, soit $z \in \mathbb{U}$. On écrit z sous la forme $a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Comme $|z| = 1$, $a^2 + b^2 = 1$. On a alors $a^2 \le 1$, donc $a \in [-1, 1]$. Or, la fonction cos réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1; 1]$, il existe un (unique) $t \in [0, \pi]$ tel que $x = \cos(t)$.
  On a alors $b^2 = 1 - a^2 = 1 - \cos^2 t = \sin^2 t$ donc $b = \pm \sin t$. Comme $t \in [0, \pi]$, $\sin t \ge 0$.
  - Si $b \ge 0$, alors $b = \sin t$. On pose $\theta = t$, et on a $z = a + ib = \cos\theta + i \sin\theta = e^{i\theta}$.
  - Si $b < 0$, alors $b = -\sin(t)$. On pose $\theta = -t$ et on a $z = a + ib = \cos t - i \sin t = \cos\theta + i \sin\theta = e^{i\theta}$.

  On a donc $\mathbb{U} \subset \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\}$.

Ainsi, $\mathbb{U} = \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\}$. □

Remarque : On retrouve ici un exemple de raisonnement par double inclusion pour montrer une égalité d'ensembles.

Proposition

Soient $\theta, \phi \in \mathbb{R}$, on a :

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}; \qquad e^{i\theta} e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}; \qquad e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}; \qquad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\phi}} = e^{i(\theta-\phi)}$$

$$e^{i\theta} = e^{i\phi} \iff \theta \equiv \phi \quad [2\pi]$$

Démonstration. • Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on a : $\overline{e^{i\theta}} = \overline{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta}$.

- Soient $\theta, \phi \in \mathbb{R}$. On a :

$e^{i\theta}e^{i\phi} = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\phi + i\sin\theta') = (\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\theta') + i(\sin\phi\cos\theta + \sin\theta\cos\phi) = \cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi) = e^{i(\theta+\phi)}$.

- On en déduit que $e^{i\theta}e^{-i\theta} = e^{i0} = 1$, donc $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$.
- Soit $\theta, \phi \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
e^{i\theta} = e^{i\phi} &\iff e^{i(\theta-\phi)} = 1 \\
&\iff \cos(\theta-\phi) + i\sin(\theta-\phi) = 1 \\
&\iff \begin{cases} \cos(\theta-\phi) = 1 \\ \sin(\theta-\phi) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \theta-\phi \equiv 0[2\pi] \\ \theta-\phi \equiv 0[\pi] \end{cases} \\
&\iff \theta-\phi \equiv 0\ [2\pi] \\
&\iff \theta \equiv \phi\ [2\pi]
\end{aligned}$$

□

Proposition : Formules d'Euler

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Démonstration. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \qquad \text{et } e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos(\theta) - i\sin(\theta).$$

En additionnant et soustrayant ces deux égalités, on obtient le résultat souhaité. □

Méthode : factorisation par l'angle moitié

Lorsque l'on a une expression de la forme $e^{ia} \pm e^{ib}$, on met en facteur $e^{i\frac{a+b}{2}}$ puis on utilise la formule d'Euler. Cela est en particulier utile pour :

- simplifier des puissances
- déterminer les formules de factorisation de $\cos(a) \pm \cos(b)$ ou $\sin(a) \pm \sin(b)$ en prenant la partie réelle ou la partie imaginaire.

L'expression la plus fréquente est : $1 \pm e^{it}$.

- **$\mathbf{1 + e^{it}}$ avec $\mathbf{t} \in \mathbb{R}$:**
  Soit $t \in \mathbb{R}$.
  $1 + e^{it} = e^{i\frac{t}{2}}\left(e^{-i\frac{t}{2}} + e^{+i\frac{t}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{t}{2}\right)e^{it/2}$.
  Ainsi, $|1 + e^{it}| = 2|\cos(\frac{t}{2})|$.
- **$\mathbf{1 - e^{it}}$ avec $\mathbf{t} \in \mathbb{R}$:**
  $1 - e^{it} = e^{i\frac{t}{2}}\left(e^{-i\frac{t}{2}} - e^{+i\frac{t}{2}}\right) = -2i\sin\left(\frac{t}{2}\right)e^{it/2}$.
  Ainsi, $|1 - e^{it}| = 2|\sin(\frac{t}{2})|$.
- **Factorisation de $\cos(\mathbf{a}) + \cos(\mathbf{b})$ avec $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}$:**
  Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\cos(a) + \cos(b) &= \mathrm{Re}(e^{ia}) + \mathrm{Re}(e^{ib}) = \mathrm{Re}\left(e^{ia} + e^{ib}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{(a+b)}{2}}\left(e^{i\frac{(a-b)}{2}} + e^{-i\frac{(a-b)}{2}}\right)\right) = \mathrm{Re}\left(2e^{i\frac{(a+b)}{2}}\cos\left(\frac{(a-b)}{2}\right)\right) = 2\cos\left(\frac{(a-b)}{2}\right)\mathrm{Re}\left(e^{i\frac{(a+b)}{2}}\right) \\
&= 2\cos\left(\frac{(a-b)}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)
\end{aligned}$$

- **Factorisation de $\sin(\mathbf{a}) + \sin(\mathbf{b})$ avec $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}$:**

$$\begin{aligned}
\sin(a) + \sin(b) &= \mathrm{Im}\left(e^{ia} + e^{ib}\right) = \mathrm{Im}\left(e^{i\frac{(a+b)}{2}}\left(e^{i\frac{(a-b)}{2}} + e^{-i\frac{(a-b)}{2}}\right)\right) = \mathrm{Im}\left(2e^{i\frac{(a+b)}{2}}\cos\left(\frac{(a-b)}{2}\right)\right) = 2\cos\left(\frac{(a-b)}{2}\right)\mathrm{Im}\left(e^{i\frac{(a+b)}{2}}\right) \\
&= 2\cos\left(\frac{(a-b)}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)
\end{aligned}$$

- **Factorisation de** $\cos(\mathbf{a}) - \cos(\mathbf{b})$ **avec** $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}$ **:**

$$\begin{aligned}\cos(a) - \cos(b) &= \mathrm{Re}\left(e^{ia} - e^{ib}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{(a+b)}{2}}\left(e^{i\frac{(a-b)}{2}} - e^{-i\frac{(a-b)}{2}}\right)\right) = \mathrm{Re}\left(2e^{i\frac{(a+b)}{2}} 2i\sin\left(\frac{(a-b)}{2}\right)\right) = 2\sin\left(\frac{(a-b)}{2}\right)\mathrm{Re}\left(ie^{i\frac{(a+b)}{2}}\right)\\ &= -2\sin\left(\frac{(a-b)}{2}\right)\mathrm{Im}\left(e^{i\frac{(a+b)}{2}}\right)\\ &= -2\sin\left(\frac{(a-b)}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\end{aligned}$$

- **Factorisation de** $\sin(\mathbf{a}) - \sin(\mathbf{b})$ **avec** $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}$ **:**

$$\begin{aligned}\sin(a) - \sin(b) &= \mathrm{Im}\left(e^{ia} - e^{ib}\right) = \mathrm{Im}\left(e^{i\frac{(a+b)}{2}}\left(e^{i\frac{(a-b)}{2}} - e^{-i\frac{(a-b)}{2}}\right)\right) = \mathrm{Im}\left(2e^{i\frac{(a+b)}{2}} 2i\sin\left(\frac{(a-b)}{2}\right)\right) = 2\sin\left(\frac{(a-b)}{2}\right)\mathrm{Im}\left(ie^{i\frac{(a+b)}{2}}\right)\\ &= 2\sin\left(\frac{(a-b)}{2}\right)\mathrm{Re}\left(e^{i\frac{(a+b)}{2}}\right)\\ &= 2\sin\left(\frac{(a-b)}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\end{aligned}$$

Proposition : Formule de Moivre

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ ou encore par définition de $e^{i\theta}$:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Démonstration. Raisonnons par récurrence $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$ $(e^{i\theta})^0 = 1 = e^{i0}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.
Alors $(e^{i\theta})^{n+1} = (e^{i\theta})^n e^{i\theta} = e^{in\theta}e^{i\theta} = e^{i(n+1)\theta}$ (par hypothèse de récurrence) . On a donc prouvé par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.
Soit $n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$. On a $e^{in\theta} = \dfrac{1}{e^{-in\theta}} = \dfrac{1}{(e^{i\theta})^{-n}} = (e^{i\theta})^n$.

□

Méthode : Linéarisation

Pour linéariser une expression trigonométrique de la forme $\cos^k x \sin^l x$ (en combinaison linéaire de termes en $\cos(\alpha x)$ ou $\sin(\beta x)$), on procède comme suit :

1. On utilise les formules d'Euler pour exprimer $\cos x$ et $\sin x$ en fonction de e^{ix} et e^{-ix}.
2. On développe complètement, avec le binôme de Newton et la formule de Moivre.
3. On regroupe les termes deux à deux conjugués pour reconnaître des $\cos(\alpha x)$ ou $\sin(\beta x)$.

Exemple : Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos^3(x)\sin^2(x)$.

$$\begin{aligned}\cos^3(x)\sin^2(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 \times \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2\\ &= -\frac{1}{32}(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix})(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix})\\ &= -\frac{1}{32}(e^{5ix} + 3e^{3ix} + 3e^{ix} + e^{-ix} - 2e^{3ix} - 6e^{ix}\\ &\quad - 6e^{-ix} - 2e^{-3ix} + e^{ix} + 3e^{-ix} + 3e^{-3ix} + e^{-5ix})\\ &= -\frac{1}{32}\left((e^{5ix} + e^{-5ix}) + (e^{3ix} + e^{-3ix}) - 2(e^{ix} + e^{-ix})\right)\\ &= -\frac{1}{16}\left(\cos(5x) + \cos(3x) - 2\cos(x)\right).\end{aligned}$$

Remarque : La linéarisation permet de calculer des primitive de fonctions de la forme $x \mapsto \cos^k x \sin^l x$.

Méthode

Pour transformer $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ en un polynôme en cos (ou en sin), on procède comme suit :

1. On écrit $\cos(nx) = \mathrm{Re}(e^{inx}) = \mathrm{Re}\left((e^{ix})^n\right) = \mathrm{Re}\left((\cos x + i\sin x)^n\right)$ grâce à la formule de Moivre.
2. On développe avec le binôme de Newton.
3. On ne garde que la partie réelle (ou imaginaire dans le cas d'un sinus).

Exemple : Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(4x)$ en fonction de $\cos x$. On a

$$\begin{aligned}
\cos(4x) &= \mathrm{Re}(e^{4ix}) \\
&= \mathrm{Re}((\cos x + i\sin x)^4) \\
&= \mathrm{Re}(\cos^4(x) + 4i\cos^3 x\sin(x) - 6\cos^2(x)\sin^2(x) - 4i\cos(x)\sin^3(x) + \sin^4(x)) \\
&= \cos^4(x) - 6\cos^2(x)(1-\cos^2(x)) + (1-\cos^2(x))^2 \\
&= \cos^4(x) + 1 - 2\cos^2(x) + \cos^4(x)) - 6\cos^2(x) + 6\cos^4(x) \\
&= 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1
\end{aligned}$$

Méthode

La formule de Moivre permet de simplifier les sommes trigonométriques de la forme $\sum_{k=0}^{n}\cos(kt)$ ou $\sum_{k=0}^{n}\sin(kt)$, en écrivant cos et sin comme les parties réelles et imaginaires d'exponentielles complexes.

Exemple : Soit $x \in \mathbb{R}$, calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$.

On a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\cos(kx) = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{Re}(e^{ikx}) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}e^{ikx}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}(e^{ix})^k\right) \quad \text{(par la formule de Moivre)}$$

On reconnait la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison e^{ix} et de premier terme 1.
De plus, $e^{ix} = 1 = e^{i0} \iff x \equiv 0\ [2\pi]$.

- Si $x \equiv 0[2\pi]$ alors, $S_n = \mathrm{Re}(n+1) = n+1$.
- Si $x \not\equiv 0[2\pi]$ ($e^{ix} \neq 1$), on a donc :

$$\begin{aligned}
S_n &= \mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{ix(n+1)}}{1-e^{ix}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{ix(n+1)/2}(e^{-ix(n+1)/2} - e^{ix(n+1)/2})}{e^{ix/2}(e^{-ix/2} - e^{ix/2})}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{ixn/2}\frac{-2i\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \mathrm{Re}(e^{ixn/2})\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \cos\left(\frac{nx}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

On a :

$$T_n = \sum_{k=0}^{n}\sin(kx) = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{Im}(e^{ikx}) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n}e^{ikx}\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n}(e^{ix})^k\right) \quad \text{(par la formule de Moivre)}$$

On reconnait la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison e^{ix} et de premier terme 1.
De plus, $e^{ix} = 1 = e^{i0} \iff x \equiv 0\ [2\pi]$.

- Si $x \equiv 0[2\pi]$ alors, $T_n = \mathrm{Im}(n+1) = 0$.
- Si $x \not\equiv 0[2\pi]$ ($e^{ix} \neq 1$), on a donc :

$$\begin{aligned}
T_n &= \mathrm{Im}\left(\frac{1-e^{ix(n+1)}}{1-e^{ix}}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{e^{ix(n+1)/2}(e^{-ix(n+1)/2} - e^{ix(n+1)/2})}{e^{ix/2}(e^{-ix/2} - e^{ix/2})}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(e^{ixn/2}\frac{-2i\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \mathrm{Im}(e^{ixn/2})\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \cos\left(\frac{nx}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

3 Forme trigonométrique, argument

Théorème : Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.
• Il existe $r_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tels que $z = r_0 e^{i\theta_0}$.
• Soit $\theta \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}_+^*$.

$$z = re^{i\theta} \iff \begin{cases} r = r_0 = |z| \\ \theta \equiv \theta_0\ [2\pi] \end{cases}$$

Démonstration. • Comme $z \neq 0$, on a $|z| \neq 0$, on peut donc poser $u = \frac{z}{|z|}$. On a alors $|u| = 1$, donc $u \in \mathbb{U}$. Ainsi, il existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $u = e^{i\theta_0}$. Ainsi $z = |z|e^{i\theta_0}$ ce qui prouve le résultat en posant $r_0 = |z|$.
Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On raisonne par double implication.

- Si $z = re^{i\theta}$ alors on a $|z| = |re^{i\theta}| = |r||e^{i\theta}| = r$ car $|e^{i\theta}| = 1$ et $r \in \mathbb{R}_+$.
  Ainsi, $|z| = r = r_0$. On a alors $|z|e^{i\theta} = z = |z|e^{i\theta_0}$. Or, $|z| \neq 0$ donc $e^{i\theta} = e^{i\theta_0}$. Ainsi, $\theta \equiv \theta_0 [2\pi]$ d'après une proposition précédente.
- Réciproquement, si $r = r_0 = |z|$ et si $\theta \equiv \theta_0\ [2\pi]$ alors $e^{i\theta} = e^{i\theta_0}$ donc $z = r_0 e^{i\theta_0} = re^{i\theta}$.

□

Définition

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

- Tout réel θ tel que $z = |z|e^{i\theta}$ est appelé un argument de z.
- On appelle forme trigonométrique de z toute écriture de la forme :

$$z = |z|e^{i\theta} = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \text{avec } \theta \in \mathbb{R}$$

Remarque : La forme trigonométrique d'un nombre complexe est très pratique pour le calcul de puissances, grâce à la formule de Moivre.
Remarque : Un nombre complexe non nul admet toujours une infinité d'arguments. Plus précisément, si θ_0 est un argument de z alors les arguments de z sont les $\theta_0 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Définition

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On appelle argument principal de z et on note $\arg(z)$ l'unique argument de z appartenant à $]-\pi, \pi]$.

Proposition

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, $\theta \in \mathbb{R}$.
θ est un argument de z si et seulement si $\theta \equiv \arg(z)\ [2\pi]$.

Méthode : détermination d'un argument

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.
Dans la plupart des cas, il suffit d'écrire $\dfrac{z}{|z|}$ et de reconnaitre que cette expression s'écrit aussi sous la forme $e^{i\theta}$.
Le réel θ est alors un argument de z.

Exemple :

- Déterminer un argument de 1+i.
  On a $1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Ainsi, un argument de $1 + i$ est $\frac{\pi}{4}$.
  Donner la forme cartésienne de $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{2018}$
  $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.
  Ainsi, $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \dfrac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{7i\frac{\pi}{12}}$.
  On a alors :
  $$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{2018} = (\sqrt{2})^{2018} e^{7\times 2018 i\frac{\pi}{12}} = 2^{1009} e^{7\times 1009 i\frac{\pi}{6}} = 2^{1009} e^{7063 i\frac{\pi}{6}}.$$
  Or, $7063 = 588 \times 12 + 7$ Ainsi, $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{2018} = 2^{1009} e^{(588\times 12+7)i\frac{\pi}{6}} = 2^{1009} e^{588\times 2i\pi + 7i\frac{\pi}{6}} = 2^{1009} e^{588\times 2i\pi} \times e^{7i\frac{\pi}{6}}$.
- Déterminer un argument de $1 + e^{ix}$ pour $x \in]-\pi, \pi[$ et pour $x \in]\pi, 2\pi[$.
  Soit $x \in]-\pi, 2\pi[$, $1 + e^{ix} = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{ix/2}$.
  - Si $x \in]-\pi, \pi[$, $|1 + e^{ix}| = \left|2\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\right| = 2\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ car $\cos\left(\frac{x}{2}\right) > 0$. Ainsi, un argument de $1 + e^{ix}$ est $\frac{x}{2}$.
  - Si $x \in]\pi, 2\pi[$, $|1 + e^{ix}| = \left|2\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\right| = -2\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ car $\cos\left(\frac{x}{2}\right) < 0$.
    Ainsi, $1 + e^{ix} = -2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\left(-e^{i(x/2)}\right) = -2\cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{i(x/2+\pi)}$. Ainsi, un argument de $1 + e^{ix}$ est $\frac{x}{2} + \pi$.

Remarque : ⚠ si $z = ae^{i\theta}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ alors on a $|z| = |a|$ où $|a|$ désigne la valeur absolue du réel a et donc :

- si $a > 0$, un argument de z est θ.
- si $a < 0$, alors $z = -a(-e^{i\theta}) = -ae^{i(\theta} + \pi)$ et un argument de z est $\theta + \pi$.

Proposition

Soient $z, z' \in \mathbb{C}^*$.

$$z = z' \iff \left\{ \begin{array}{l} |z| = |z'| \\ \arg(z) = \arg(z') \end{array} \right.$$

Remarque : Soit $z = |z|e^{i\theta}$ et $z' = |z'|e^{i\theta'}$ avec $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. On a :

$$z = z' \iff \left\{ \begin{array}{l} |z| = |z'| \\ \theta \equiv \theta'[2\pi] \end{array} \right.$$

Proposition

Soient $z_1 \in \mathbb{C}^*$ et $z_2 \in \mathbb{C}^*$ d'arguments respectifs θ_1 et θ_2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors

1. $\overline{z_1}$ est non nul et $-\theta_1$ est un argument de $\overline{z_1}$.
2. $z_1 z_2$ est non nul et $\theta_1 + \theta_2$ est un argument de $z_1 + z_2$.
3. $\dfrac{1}{z_2}$ est non nul et $-\theta_2$ est un argument de $\dfrac{1}{z_2}$.
4. $\dfrac{z_1}{z_2}$ est non nul et $\theta_1 - \theta_2$ est un argument de $\dfrac{z_1}{z_2}$.
5. z_1^n est non nul et $n\theta_1$ est un argument de z_1^n.
6. $-z_1$ est non nul et $\theta_1 + \pi$ est un argument de $-z_1$.

Démonstration. Comme θ_1 est un argument de z_1, on a $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$. De même, $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$.

- $\overline{z_1} = \overline{|z_1|e^{i\theta_1}} = |z_1|e^{-i\theta_1} = |\overline{z_1}|e^{-i\theta_1}$.
- On a : $z_1 z_2 = |z_1|e^{i\theta_1} \times |z_2|e^{i\theta_2} = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)} = |z_1 z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.
- On a $\dfrac{1}{z_2} = \dfrac{1}{|z_2|e^{i\theta_2}} = \dfrac{1}{|z_2|}e^{-i\theta_2} = \left|\dfrac{1}{z_2}\right|e^{-i\theta_2}$
- Comme $\dfrac{z_1}{z_2} \dfrac{|z_1|e^{i\theta_1}}{|z_2|e^{i\theta_2}} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\theta_1-\theta_2} = \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|e^{i(\theta_2-\theta_1}$.
  Ainsi, $\theta_1 - \theta_2$ est un argument de $\dfrac{z_1}{z_2}$.
- $z_1^n = \left(|z_1|e^{i\theta_1}\right)^n = |z_1|^n \left(e^{i\theta_1}\right)^n = |z_1^n|e^{in\theta_1}$ (par récurrence on a $|z_1|^n = |z_1^n|$, la formule de Moivre permet alors de conclure.
- $-z_1 = -|z_1|e^{i\theta_1} = |z_1|e^{i(\theta_1+\pi)} = |-z_1|e^{i(\theta_1+\pi)}$.

$\square$

Proposition Calcul d'arguments

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}^*$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Alors :

$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad \text{si } a > 0$$

Remarque : On a :

$$\arg(z) = \left\{ \begin{array}{ll} \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) - \pi & \text{si } a < 0 \text{ et } b < 0 \\ \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) + \pi & \text{si } a < 0 \text{ et } b > 0 \\ \text{signe}(b)\dfrac{\pi}{2} & \text{si } a = 0 \end{array} \right.$$

Démonstration. On a $z = |z|e^{i\arg(z)}$. Ainsi, $z = |z|\cos(\arg z) + i|z|\sin(\arg z)$ donc $a = |z|\cos(\arg z)$ et $b = |z|\sin(\arg z)$.

- Si $a \neq 0$ alors $\cos(\arg z) \neq 0$. Donc $\tan(\arg z) = \dfrac{b}{a} = \tan\left(\arctan\dfrac{b}{a}\right)$. Or, $\arg z \in]-\pi, \pi]$ et $\arctan\dfrac{b}{a} \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
  - si $a > 0$ alors $\arg z \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ donc $\arg z = \arctan\dfrac{b}{a}$.
  - si $a < 0$ alors :

- si $b < 0$ alors $\arg z \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$. Donc $\arg z + \pi \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\tan(\arg z + \pi) = \tan(\arg z) == \tan\left(\arctan \frac{b}{a}\right)$. Ainsi, $\arg z + \pi = \arctan \frac{b}{a}$.
- si $b \geq 0$, alors $\arg z \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. Donc $\arg z - \pi \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ et $\tan(\arg z - \pi) = \tan(\arg z) == \tan\left(\arctan \frac{b}{a}\right)$. Ainsi, $\arg z - \pi = \arctan \frac{b}{a}$.

- si $a = 0$ alors $z = ib$ donc $\arg(z) = \text{signe}(b)\frac{\pi}{2}$

□

Interprétation géométrique de l'argument :
Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et θ un argument de z.
Si M a pour affixe z, alors, θ représente une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM})$.
Si $\overrightarrow{u}$ a pour affixe z, alors, θ représente une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u})$.

Proposition

Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, il existe $(A, \omega) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tels que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $a\cos t + b\sin t = A\cos(t - \omega)$.

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}$, d'après la formule d'Euler, on a :

$$a\cos t + b\sin t = a\left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right) + b\left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right) = \frac{(a - ib)}{2}e^{it} + \frac{(a + ib)}{2}e^{-it}.$$

Notons $z = a + ib \neq 0$ et $z = Ae^{i\omega}$ sa forme trigonométrique (avec $A \in \mathbb{R}_+^*$ et $\omega \in \mathbb{R}$), alors

$$a\cos(t) + b\sin t = \frac{\overline{z}}{2}e^{it} + \frac{z}{2}e^{-it} = \frac{A}{2}e^{-i\omega}e^{it} + \frac{A}{2}e^{i\omega}e^{-it} = \frac{A}{2}(e^{i(t-\omega)} + e^{-i(t-\omega)}) = A\cos(t - \omega)$$

□

Remarque : Une telle fonction $t \mapsto a\cos t + b\sin t$ est appelée signal sinusoïdal. Physiquement, le réel A représente son amplitude, et ω sa phase. Comme vu dans la preuve, l'amplitude est le module de $a + ib$ et la phase son argument.

Méthode

Pour transformer une expression de la forme $a\cos t + b\sin t$ avec $a, b \in \mathbb{R}$:

- On pose $z = a + ib$. On détermine le module et un argument θ de z.
- On a alors :
$$a\cos t + b\sin t = |z|\cos\theta\cos t + |z|\sin\theta\sin t = |z|\cos(t - \theta)$$

Ceci est particulièrement utile pour résoudre une équation de la forme $a\cos t + b\sin t = C$ avec $a, b, C \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $z = \sqrt{3} - i$.
On a :

$$\begin{aligned} z &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) \\ &= 2e^{-i\frac{\pi}{6}} \\ &= 2\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + 2i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - 2i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1 &\iff 2\cos\frac{\pi}{6}\cos x - 2\sin\frac{\pi}{6}\sin x = 1\\
&\iff 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x - \sin\frac{\pi}{6}\sin x\right) = 1\\
&\iff 2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = 1\\
&\iff \cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right) = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}\\
&\iff \frac{\pi}{6}+x \equiv \pm\frac{\pi}{3}\ [2\pi]\\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]\\ \text{ou}\\ x \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\end{array}\right.
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\{\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}\cup\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

4 Équations algébriques dans $\mathbb{C}$

4.1 Racines carrées d'un nombre complexe

Définition

On appelle racine carrée d'un nombre complexe z tout nombre complexe u vérifiant $u^2 = z$.

Proposition

Tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées et celles-ci sont opposées.

Démonstration. Soit $z\in\mathbb{C}^*$ de forme trigonométrique $re^{i\theta}$ avec $r\in\mathbb{R}_+^*$ et $\theta\in\mathbb{R}$.
0 n'est pas une racine carrée de z. On peut donc chercher les racines carrées sous forme trigonométrique.
Soient $s\in\mathbb{R}_+^*$, $\beta\in\mathbb{R}$. Posons $u = se^{i\beta}$. On a :

$$\begin{aligned}
u^2 = z &\iff s^2e^{2i\beta} = re^{i\theta}\\
&\iff \left\{\begin{array}{l} s^2 = r\\ 2\beta\equiv\theta\ \ [2\pi]\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{ll} s = \sqrt{r} & \text{car } s>0\\ \beta\equiv\frac{\theta}{2}\ \ [\pi] & \end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{l} u = \sqrt{r}e^{i\theta/2}\\ \text{ou}\\ u = \sqrt{r}e^{i(\theta/2+\pi)} = -\sqrt{r}e^{i\theta/2}\end{array}\right.
\end{aligned}$$

On a donc le résultat voulu. □

Remarque :

- Même un réel a strictement positif admet deux racines carrées. Cependant par convention, on privilégie l'une des deux (celle qui est positive). On l'appelle alors **la** racine carrée de a et on note $\sqrt{a}$. Les racines carrées complexes de a sont alors $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- On ne sait pas dans $\mathbb{C}$ privilégier l'une des deux racines contrairement à ce qui se passe lorsque $a\in\mathbb{R}^+$. Ainsi :
  - Il est impossible d'utiliser la notation $\sqrt{z}$ pour un complexe quelconque.
  - Il faut parler d'une racine carrée de a et non pas de *la* racine carrée de z.
- 0 n'admet qu'une seule racine carrée, lui-même.

Méthode : détermination des racines carrées d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.
• **Via la forme trigonométrique de** z
Si $z = re^{i\theta}$ où $r = |z|$, ses racines carrées sont $\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $-\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ (cf preuve).

Via la forme cartésienne de z
On note $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la forme cartésienne de z.
Soit $x, y \in \mathbb{R}$.

$$(x+iy)^2 = z \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a & \text{(égalité des parties réelles)} \\ 2xy = b & \text{(égalité des parties imaginaires)} \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} & \text{(égalité des modules)} \end{cases}$$

On peut alors calculer x^2 et y^2 puis en déduire x et y, les signes relatifs de x et y étant donnés par l'équation $2xy = b$.

4.2 Équation du second degré à coefficients complexes

Proposition : Résolution de l'équation du second degré

Soit $az^2 + bz + c = 0$ une équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ à coefficients $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$.
On appelle discriminant de l'équation, le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

— Si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$, appelée racine double et
$$\forall z \in \mathbb{C},\ az^2 + bz + c = a(z - z_0)^2.$$

— Si $\Delta \neq 0$, l'équation admet deux solutions distinctes, $z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$, où δ est une racine carrée de Δ et
$$\forall z \in \mathbb{C},\ az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a\left(z + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) \quad \text{car } a \neq 0 \\ &= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) \end{aligned}$$

Cette écriture est appelée forme canonique du trinôme.
Soit δ une racine carrée de Δ. On a alors :

$$az^2 + bz + c = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right) = a\left(z - \frac{-b+\delta}{2a}\right)\left(z - \frac{-b-\delta}{2a}\right)$$

- Si $\Delta = 0$ alors $\delta = 0$. L'équation admet une racine double $z_0 = -\dfrac{-b}{2a}$ et $az^2 + bz + c = (z - z_0)^2$.
- Si $\Delta \neq 0$, l'équation admet deux solutions distinctes $z_1 + \dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

□

Remarque : Si $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$ et si le discriminant de $az^2 + bz + c = 0$ est strictement négatif alors ses solutions sont complexes conjugués.

Exemple : Résolvons l'équation $z^2 - 2z - i = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
Son discriminant est $4+4i$. Par calcul précédent, ses racines carrées sont $\pm 2\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)$. Ainsi les solutions de l'équation sont $1 \pm \left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)$.

Proposition : Relations coefficients racines

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$. Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors :

z_1, z_2 sont les solutions (éventuellement confondues) de l'équation $az^2+bz+c=0 \iff \begin{cases} z_1+z_2 = -\dfrac{b}{a} \\ z_1 z_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

Démonstration. - Supposons que z_1 et z_2 sont les solutions de $az^2+bz+c=0$.
Notons δ une racine carrée de $\Delta = b^2-4ac$. Alors $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$ (quitte à changer δ en $-\delta$).
Ainsi $z_1+z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{(-b+\delta)(-b-\delta)}{4a^2} = \frac{b^2-\delta^2}{4a^2} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{c}{a}$.

- Réciproquement, supposons que z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ vérifient $z_1+z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.
Soit $z \in \mathbb{C}$, on a alors : $a(z-z_1)(z-z_2) = az^2 - a(z_1+z_2)z + az_1z_2 = az^2+bz+c$. Ainsi, z_1 et z_2 sont les deux solutions de l'équation $az^2+bz+c=0$.

□

Méthode

Pour résoudre un système de la forme $\begin{cases} xy = \alpha \\ x+y=\beta \end{cases}$, on introduit l'équation $z^2-\beta z+\alpha = 0$.
(x,y) est alors le couple de solutions de cette équation du second degré (écrit dans un ordre ou l'autre).

4.3 Racines n-ièmes

Racines n-ièmes de l'unité

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine n-ième de l'unité tout nombre complexe z vérifiant $z^n = 1$.
On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

Exemple : $\mathbb{U}_2 = \{-1, 1\}$.

Proposition : Énumèration de l'ensemble $\mathbb{U}_n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe exactement n racines n-ièmes de l'unité distinctes, qui sont les $\xi_k = e^{2ik\pi/n}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$.
Ainsi :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{2ik\pi/n}, k \in [\![0, n-1]\!] \right\}.$$

Démonstration. • **Etape 1 : Montrons que $\mathbb{U}_n = \{e^{2ik\pi/n}, k \in \mathbb{Z}\}$**
Les racines n-ième de 1 sont non nuls. On peut donc les chercher sous forme trigonométrique.
Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Posons $z = re^{i\theta}$. On a :

$$\begin{aligned} z^n = 1 &\iff r^n e^{in\theta} = 1 \text{ (par la formule de Moivre)}. \\ &\iff \begin{cases} r^n = 1 \\ n\theta \equiv 0 \quad [2\pi] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} r = 1 \quad \text{car } r \in \mathbb{R}_+^* \\ \theta \equiv 0 \quad \left[\frac{2\pi}{n}\right] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} r = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \dfrac{2k\pi}{n} \end{cases} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ z = e^{2ik\pi/n} \end{aligned}$$

On a donc montré que $\mathbb{U}_n = \left\{e^{2ik\pi/n}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

- **Etape 2 : Montrons que $\mathbb{U}_n = \{e^{2ik\pi/n}, k \in [\![0, n-1]\!]\}$**
Montrons que $\left\{e^{2ik\pi/n}, k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{e^{2ik\pi/n}, k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$.

- On sait déjà que $\{e^{2ik\pi/n}, k \in [\![0, n-1]\!]\} \subset \{e^{2ik\pi/n}, k \in \mathbb{Z}\}$.
- Montrons désormais que $\{e^{2ik\pi/n}, k \in \mathbb{Z}\} \subset \{e^{2ik\pi/n}, k \in [\![0, n-1]\!]\}$.
  Soit $k \in \mathbb{Z}$. Effectuons la division euclidienne de k par n.
  Il existe $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $k = nq + r$.
  Ainsi, $e^{2ik\pi/n} = e^{2i(qn+r)\pi/n} = e^{2iq\pi+2ir\pi/n} = e^{2iq\pi}e^{2ir\pi/n} = e^{2ir\pi/n}$.
  Donc $e^{2ik\pi/n} \in \{e^{2ik\pi/n}, k \in [\![0, n-1]\!]\}$ et $\{e^{2ik\pi/n}, k \in \mathbb{Z}\} \subset \{e^{2ik\pi/n}, k \in [\![0, n-1]\!]\}$.

On a ainsi prouvé que $\mathbb{U}_n = \{e^{2ik\pi/n},\ k \in [\![0, n-1]\!]\}$.
Il y a donc au plus n racines n-ièmes distinctes.

- **Etape 3 : Démontrons désormais qu'il y a exactement n racines n-ièmes dictinctes**
  Pour ce faire, étudions le cas d'égalité :
  Soit $(k, l) \in [\![0, n-1]\!]$. Supposons que $e^{2ik\pi/n} = e^{2il\pi/n}$. Alors, $\dfrac{2k\pi}{n} \equiv \dfrac{2l\pi}{n}$ $[2\pi]$. Donc $k \equiv l$ $[n]$ Ainsi, il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $k - l = pn$. Or, $k, l \in [\![0, n-1]\!]$ donc $-n < k - l < n$. Ainsi, $-n < pn < n$ et $n \neq 0$ d'où $-1 < p < 1$ donc $p = 0$. Ainsi, $k = l$.
  Ainsi, les $e^{2ik\pi/n}$ sont deux à deux distincts pour $k \in [\![0, n-1]\!]$. Ce qui prouve le résultat annoncé.

□

Remarque : On peut encore prendre $[\![1, n]\!]$ ou tout ensemble de n entiers consécutifs à la place de $[\![0, n-1]\!]$.
Exemple :

- On note généralement $j = e^{2i\pi/3}$, les racines cubiques de l'unité sont alors 1, j et j^2.
- Les racines quatrièmes de l'unité sont ± 1 et $\pm i$.

Proposition

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

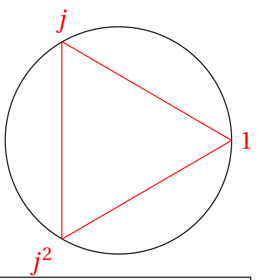
- Si on note $\xi_1 = e^{2i\pi/n}$, alors les racines n-ième de l'unité sont 1, ξ_1, $\xi_1^2, \ldots, \xi_1^{n-1}$.
- Si ξ est une racine n-ième de l'unité différente de 1, on a : $\sum_{k=0}^{n-1} \xi^k = 0$
- La somme des n racines n-ième de l'unité est égale à 0.

Démonstration.

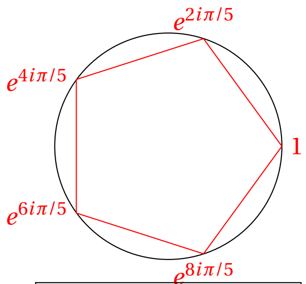
- Découle directement de la proposition précédente.
- $1 + \xi + \ldots + \xi^{n-1}$ constitue la somme des termes d'une progression géométrique de raison $\xi \neq 1$.
  Ainsi, $1 + \xi + \ldots + \xi^{n-1} = \dfrac{1-\xi^n}{1-\xi} = 0$ car $\xi^n = 1$.
- Découle directement des points 1 et 2. En posant $\xi = \xi_1$, on obtient le résultat.

□

Remarque : Les points du plan complexe dont les affixes sont les racines n-ièmes de l'unité forment un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique.



Représentation de $\mathbb{U}_3$



Représentation de $\mathbb{U}_5$

Les points en question sont tous situés sur le cercle trigonométrique et l'angle au centre formé par deux points consécutifs sur le cercle vaut $\dfrac{2\pi}{n}$.

Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Définition

Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle racine n-ième de a tout nombre complexe z vérifiant $z^n = a$.

Méthode

- Pour résoudre une équation du type $z^n = a$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, on détermine la forme trigonométrique de a : $a = |a|e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$ puis on écrit :

$$\begin{aligned}
z^n = a &\iff \frac{z^n}{a} = 1 \\
&\iff \left(\frac{z}{|a|^{1/n}e^{i\theta/n}}\right)^n = 1 \\
&\iff \frac{z}{|a|^{1/n}e^{i\theta/n}} \in \mathbb{U}_n \\
&\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ \frac{z}{|a|^{1/n}e^{i\theta/n}} = e^{2ik\pi/n} \\
&\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ z = |a|^{1/n}e^{i(\theta/n+2ik\pi/n)}
\end{aligned}$$

- Pour résoudre une équation du type $z_1^n = z_2^n$, on se ramène à $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = 1$ (après avoir vérifié $z_2 \neq 0$)

Remarque :

- ⚠ $u^n = v^n$ ne se simplifie pas en $u = v$!
- On montre avec le point méthode que : tout nombre complexe non nul a admet exactement n racines n-ièmes distinctes. Si $\theta \in \mathbb{R}$ est un argument de a alors, les racines n-ième de a sont les complexes $|a|^{\frac{1}{n}}e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Exemple : Déterminer les racines 8-ième de $\frac{1-i}{\sqrt{3}-i}$.

Cela revient à résoudre l'équation $z^8 = \frac{1-i}{\sqrt{3}-i}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

On a :$1-i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$.

Et $\sqrt{3}-i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = 2e^{-i\pi/6}$.

Ainsi, $\frac{1-i}{\sqrt{3}-i} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\pi/12} = 2^{-1/2}e^{-i\pi/12}$.
Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
z^8 = \frac{1-i}{\sqrt{3}-i} &\iff \frac{z^8}{\frac{1-i}{\sqrt{3}-i}} = 1 \\
&\iff \frac{z^8}{2^{-1/2}e^{-i\pi/12}} = 1 \\
&\iff \left(\frac{z}{2^{-1/16}e^{-i\pi/96}}\right)^8 = 1 \\
&\iff \frac{z}{2^{-1/16}e^{-i\pi/96}} \in \mathbb{U}_8 \\
&\iff \exists k \in [\![0, 7]\!],\ \frac{z}{2^{-1/16}e^{-i\pi/96}} = e^{2ik\pi/8} \\
&\iff \exists k \in [\![0, 7]\!],\ z = 2^{-1/16}e^{i(k\pi/4-\pi/96)}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\{2^{-1/16}e^{i(k\pi/4-\pi/96)},\ k \in [\![0, 7]\!]\}$.
Exemple : Résolvons l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
Tout d'abord, on remarque que i n'est pas solution de l'équation. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
(z+i)^n = (z-i)^n &\iff \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1 \\
&\iff \frac{z+i}{z-i} \in \mathbb{U}_n \\
&\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ \frac{z+i}{z-i} = e^{2ik\pi/n} \\
&\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ (z+i) = e^{2ik\pi/n}(z-i) \\
&\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ z(1-e^{2ik\pi/n}) = -i(e^{2ik\pi/n}+1)
\end{aligned}$$

Pour $k=0$, l'équation devient : $0=-2i$ qui est impossible. On a donc

$$\begin{aligned}(z+i)^n=(z-i)^n &\iff \exists k\in[\![1,n-1]\!],\ z(1-e^{2ik\pi/n})=-i(e^{2ik\pi/n}+1)\\ &\iff \exists k\in[\![1,n-1]\!],\ z=\frac{-i(e^{2ik\pi/n}+1)}{(1-e^{2ik\pi/n})}=-i\frac{e^{ik\pi/n}(e^{ik\pi/n}+e^{-ik\pi/n})}{e^{ik\pi/n}(e^{-ik\pi/n}-e^{ik\pi/n})}=-i\frac{2\cos(k\pi/n)}{-2i\sin(k\pi/n)}=\frac{\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)}\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\left\{\frac{\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)}, k\in[\![1,n-1]\!]\right\}$

5 Exponentielle complexe

Définition

Pour tout $z\in\mathbb{C}$, on appelle exponentielle de z et on note e^z ou $\exp(z)$ le nombre complexe défini par :

$$e^z=e^{\mathrm{Re}z}e^{i\mathrm{Im}z}.$$

Remarque : Cette définition est compatible avec la définition de l'exponentielle :

- sur $\mathbb{R}$ puisque si $z\in\mathbb{R}$ alors $\mathrm{Im}z=0$ et donc $e^{i\mathrm{Im}z}=1$ et
- sur $i\mathbb{R}$ puisque si $z\in i\mathbb{R}$ alors $\mathrm{Re}z=0$ et donc $e^{\mathrm{Re}z}=1$.

Proposition

Soient $z,z'\in\mathbb{C}$ et $n\in\mathbb{Z}$. On a :

- $|\exp(z)|=e^{\mathrm{Re}z}$ et $\mathrm{Im}z$ est un argument de $\exp(z)$.
- $\exp(z+z')=\exp(z)\exp(z')$.
- $\dfrac{1}{e^z}=e^{-z}$
- $\dfrac{e^z}{e^{z'}}$
- $(e^z)^n=e^{nz}$.
- $\exp(z)=\exp(z') \iff \exists k\in\mathbb{Z},\ z-z'=2i\pi k$

Démonstration.

- $|e^z|=|e^{\mathrm{Re}(z)}e^{i\mathrm{Im}(z)}|=|e^{\mathrm{Re}(z)}||e^{i\mathrm{Im}(z)}|=e^{\mathrm{Re}(z)}$ car la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}$ est strictement positive.
- $e^{z+z'}=e^{\mathrm{Re}(z+z')}e^{i\mathrm{Im}(z+z')}=e^{\mathrm{Re}z+\mathrm{Re}z'}e^{i(\mathrm{Im}z+\mathrm{Im}z')}$. Or, d'après les propriétés de l'exponentielle réelle et de l'exponentielle d'un imaginaire pur, on a : $e^{z+z'}=e^{\mathrm{Re}z}e^{\mathrm{Re}z'}e^{i\mathrm{Im}z}e^{i\mathrm{Im}z'}=e^ze^{z'}$
- $1=e^0=e^{z-z}=e^ze^{-z}$ d'après le résultat précédent. Ainsi, $e^{-z}=\dfrac{1}{e^z}$.
- $\dfrac{e^z}{e^{z'}}=e^z\times\dfrac{1}{e^{z'}}=e^ze{-z'}=e^{z-z'}$.
- En effet, on a $$\begin{aligned}(e^z)^n&=\left(e^{\mathrm{Re}(z)}e^{i\mathrm{Im}(z)}\right)^n\\&=\left(e^{\mathrm{Re}(z)}\right)^n\left(e^{i\mathrm{Im}(z)}\right)^n\\&=e^{n\mathrm{Re}(z)}e^{in\mathrm{Im}(z)}\\&=e^{nz}\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}e^z=e^{z'} &\iff \begin{cases}e^{\mathrm{Re}z}=e^{\mathrm{Re}z'}\\ \mathrm{Im}z\equiv\mathrm{Im}z' \quad [2\pi]\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}\mathrm{Re}z=\mathrm{Re}z'\\ \exists k\in\mathbb{Z}, \mathrm{Im}(z)-\mathrm{Im}(z')=2k\pi\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}\mathrm{Re}z=\mathrm{Re}z' \quad \text{car } \exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^* \text{ est bijective}\\ \exists k\in\mathbb{Z}, \mathrm{Im}(z)-\mathrm{Im}(z')=2k\pi\end{cases}\\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ z-z'=2k\pi i\end{aligned}$$

□

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned} e^z = 3 &\iff e^z = e^{\ln 3} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ z - \ln 3 = 2k\pi i \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\{\ln 3 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}\}$.

On a : $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\pi/3}$.
Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned} e^z = 1 + i\sqrt{3} &\iff e^z = 2e^{i\pi/3} \\ &\iff e^z = e^{\ln 2} e^{i\pi/3} \\ &\iff e^z = e^{\ln 2 + i\pi/3} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ z = \ln 2 + i\frac{\pi}{3} + 2k\pi i \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\{\ln 2 + i\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}\}$.

6 Nombres complexes et géométrie plane

6.1 Alignement et orthogonalité

Proposition

Soit $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ deux vecteurs du plan non nuls d'affixes respectives z_1 et z_2. Une mesure de l'angle $\widehat{(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})}$ est donnée par un argument de $\frac{z_2}{z_1}$.
Par suite :

- $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont colinéaires si et seulement si $\frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}$.
- $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont orthogonaux si et seulement si $\frac{z_2}{z_1} \in i\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit θ_1 (resp. θ_2) un argument de z_1 (resp. z_2).
On a $\theta_1 \equiv (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u_1})[2\pi]$ et $\theta_2 \equiv (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u_2})[2\pi]$. Or, $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u_2}) - (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u_1})$ donc $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) \equiv \theta_2 - \theta_1 [2\pi]$.
Ainsi, $\theta_2 - \theta_1$ qui est un argument de $\dfrac{z_2}{z_1}$ est une aussi mesure l'angle $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$.
On a alors :

- $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont colinéaires si et seulement si $\widehat{(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})} \equiv 0[\pi]$ si et seulement si $\theta_2 - \theta_1 \equiv 0[\pi]$ si et seulement si $\dfrac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}$
- De même, $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont orthogonaux si et seulement si $\widehat{(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})} \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$ si et seulement si $\theta_2 - \theta_1 \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$ si et seulement si $\dfrac{z_2}{z_1} \in i\mathbb{R}$

$\square$

Corollaire

Soient A, B et C trois points du plan, deux à deux distincts et d'affixes respectives z_A, z_B et z_C. Une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est donnée par un argument de $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$. Par suite :

- A, B et C sont alignés si et seulement si $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.
- ABC est rectangle en A si et seulement si $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$.

6.2 Transformations remarquables du plan

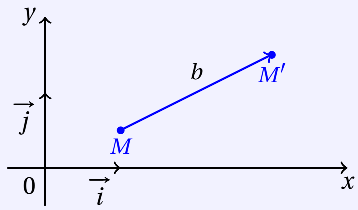
Si F est une application du plan dans lui-même, on peut lui associer une unique application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que pour tous points M et M' d'affixes respectives z et z' on ait $M' = F(M)$ si, et seulement si $z' = f(z)$.
Réciproquement, la donnée de f caractérise l'application F. On dit que f représente F dans le plan complexe.
Remarque : Le plan usuel $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé direct pouvant être identifié avec $\mathbb{C}$, on identifie souvent f et F.

Définition

Une transformation du plan est une bijection du plan dans lui-même.

Proposition

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan d'affixe $b \in \mathbb{C}$.
L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z+b \end{array} \right.$ représente la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.



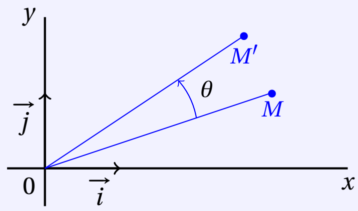
Démonstration. Soit $M, M' \in \mathscr{P}$ d'affixes respectives z, z'. Notons $T_{\overrightarrow{u}} : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et $t_b : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z+b \end{array} \right.$.
On a :

$$\begin{aligned} M' = T_{\overrightarrow{u}}(M) &\iff \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u} \\ &\iff z' - z = b \\ &\iff z' = z + b \\ &\iff z' = t_b(z) \end{aligned}$$

□

Proposition

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & e^{i\theta} z \end{array} \right.$ représente la rotation de centre O et d'angle θ.



Remarque : Plus généralement, l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & e^{i\theta}(z-\omega)+\omega \end{array} \right.$ représente la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $M, M' \in \mathscr{P}$ d'affixes respectives z, z'. Notons $R_\theta : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ la rotation d'angle θ et $r_\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & ze^{i\theta} \end{array} \right.$.

- Cas 1 : si $z \neq 0$ i.e $M \neq O$:

$$\begin{aligned} M' = T_{\overrightarrow{u}}(M) &\iff \left\{ \begin{array}{l} OM = OM' \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \theta [2\pi] \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} |z| = |z'| \\ \arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv \theta \ [2\pi] \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} \left|\frac{z'}{z}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv \theta \ [2\pi] \end{array} \right. \\ &\iff \frac{z'}{z} = e^{i\theta} \\ &\iff z' = ze^{i\theta} \\ &\iff z' = r_\theta(z) \end{aligned}$$

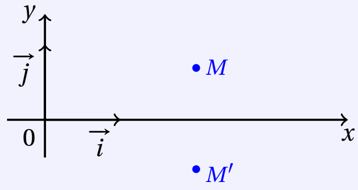
- Cas 2 : si $z = 0$ i.e $M = O$:

$$\begin{aligned} M' = R_\theta(M) &\iff M' = M = O \\ &\iff z' = z = 0 \\ &\iff z' = r_\theta(z) \end{aligned}$$

$\square$

Proposition

L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \overline{z} \end{array} \right.$ représente la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.



Démonstration. Soit $M, M' \in \mathscr{P}$ d'affixes respectives $z = a + ib$, $z' = a' + ib'$ avec $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$. Notons $S : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ la symétrie par rapport à l'axe des abscisses et $s : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \overline{z} \end{array} \right.$.

On a :

$$\begin{array}{rcl} M' = S(M) & \iff & \left\{ \begin{array}{l} a' = a \\ b' = -b \end{array} \right. \\ & \iff & a + ib = a' + ib' \\ & \iff & z' = \overline{z} \\ & \iff & z' = s(z) \end{array}$$

$\square$

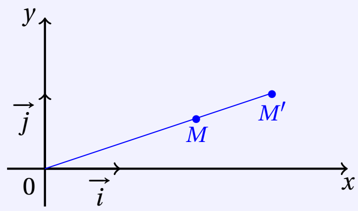
Définition

L'homothétie de centre $\Omega \in \mathscr{P}$ et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$ est l'application du plan dans lui même qui, à tout point M, associe le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$.

Proposition

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \lambda z \end{array} \right.$ représente l'homothétie de centre O et de rapport λ



Remarque : Plus généralement, l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \lambda(z - \omega) + \omega \end{array} \right.$ où $\lambda \in \mathbb{R}^*$ représente l'homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport λ.

Démonstration. Soit $M, M' \in \mathscr{P}$ d'affixes respectives z, z'.

Notons $H_\lambda : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ l'homothétie de centre O et de rapport λ et $h_\lambda : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \lambda z \end{array} \right.$.

$$\begin{array}{rcl} M' = H_\lambda(M) & \iff & \overrightarrow{OM'} = \lambda \overrightarrow{OM} \\ & \iff & z' = \lambda z \\ & \iff & z' = h_\lambda z \end{array}$$

$\square$