Chapitre 5 : Calcul algébrique

1 Sommes et produits

1.1 Cas d'un segment de nombres entiers

Définition

Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes.

On pose $\sum\limits_{k=0}^{0} a_k = a_0$ et on construit par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n+1} a_k = \left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\right) + a_{n+1}$.

Remarque : Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On a alors les égalités suivantes par définition

- $\sum\limits_{k=0}^{1} a_k = a_0 + a_1$.
- $\sum\limits_{k=0}^{2} a_k = \left(\sum\limits_{k=0}^{1} a_k\right) + a_2 = a_0 + a_1 + a_2$.
- $\sum\limits_{k=0}^{4} a_k = \left(\sum\limits_{k=0}^{3} a_k\right) + a_3 = \left(\sum\limits_{k=0}^{2} a_k\right) + a_2 + a_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4$.

Remarque : Pour $n \in \mathbb{N}$, on note aussi $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k = a_0 + ... + a_n$.

Généralisation :

Soient $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$ et $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes, on définit alors $\sum\limits_{k=p}^{q} a_k$ en posant :

- si $p > q$: $\sum\limits_{k=p}^{q} a_k = 0$.
- si $p \leq q$: $\sum\limits_{k=p}^{q} a_k = \left(\sum\limits_{k=0}^{q} a_k\right) - \left(\sum\limits_{k=0}^{p-1} a_k\right)$.

  On a alors $\sum\limits_{k=p}^{q} a_k = a_p + ... + a_q$.

Définition

Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes.

On pose $\prod\limits_{k=0}^{0} a_k = a_0$ et on construit par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\prod\limits_{k=0}^{n+1} a_k = \left(\prod\limits_{k=0}^{n} a_k\right) \times a_{n+1}$

Remarque : Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On a alors les égalités suivantes par définition

- $\prod\limits_{k=0}^{1} a_k = a_0 \times a_1$.
- $\prod\limits_{k=0}^{2} a_k = \left(\prod\limits_{k=0}^{1} a_k\right) \times a_2 = a_0 \times a_1 \times a_2$.
- $\prod\limits_{k=0}^{4} a_k = \left(\prod\limits_{k=0}^{3} a_k\right) \times a_3 = \left(\prod\limits_{k=0}^{2} a_k\right) \times a_2 \times a_3 = a_0 \times a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4$.

Remarque : Pour $n \in \mathbb{N}$, on note aussi $\prod\limits_{k=0}^{n} a_k = a_0 \times ... \times a_n$.

Généralisation :

Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $q \in \mathbb{N}$ et $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes, on définit alors $\prod\limits_{k=p}^{q} a_k$ en posant :

- si $p > q$: $\prod\limits_{k=p}^{q} a_k = 1$.

- si $p \leq q$: on définit une autre suite $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par l'expression

$$b_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k < p \\ a_k & \text{sinon} \end{cases},$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, on définit $\prod_{k=p}^{q} a_k$ par l'égalité

$$\prod_{k=p}^{q} a_k = \prod_{k=0}^{q} b_k$$

On a alors $\prod_{k=p}^{q} a_k = 1 \times \cdots \times 1 \times a_p \times \cdots \times a_q$.

Remarque : L'indice k qui figure dans la somme ou le produit est muet : on peut le remplacer par n'importe quelle lettre non utilisée ailleurs. Ainsi $\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{l=p}^{q} a_l = \sum_{j=p}^{q} a_j$.

⚠ Le résultat d'un produit ou d'une somme ne peut donc pas dépendre du choix de l'indice.

Proposition : Règles de calculs pour les sommes

Soient $p, q, r \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq r \leq q$, $(a_k)_{k\in[\![p,q]\!]}$, $(b_k)_{k\in[\![p,q]\!]}$ deux familles de nombres complexes et $\lambda \in \mathbb{C}$.

- $\sum_{k=p}^{q} (a_k + b_k) = \left(\sum_{k=p}^{q} a_k\right) + \left(\sum_{k=p}^{q} b_k\right)$.
- $\sum_{k=p}^{q} \left(\lambda a_k\right) = \lambda \left(\sum_{k=p}^{q} a_k\right)$
- $\sum_{k=p}^{q} \lambda = (q-p+1)\lambda$
- $\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{k=p}^{r} a_k + \sum_{k=r+1}^{q} a_k$ (Relation de Chasles).

Démonstration. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite définie par l'expression

$$x_k = \begin{cases} a_k & \text{si } p \leq k \leq q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

pour tout entier naturel $k \in \mathbb{N}$. Soit $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite définie par l'expression

$$y_k = \begin{cases} b_k & \text{si } p \leq k \leq q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

pour tout entier naturel $k \in \mathbb{N}$.

- Montrons dans un premier temps la relation de Chasles. Montrons par récurrence sur $\mathbb{N}$ que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \sum_{k=p}^{q} x_k = \sum_{k=p}^{p+n} x_k + \sum_{k=p+n+1}^{q} x_k.$$

Pour $n = 0$, on a d'une part $\sum_{k=p}^{p+n} x_k = x_p$ et d'autre part,

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^{q} x_k &= \sum_{k=0}^{q} x_k - \sum_{k=0}^{p-1} x_k \\ &= \sum_{k=0}^{q} x_k - \left(x_p + \sum_{k=0}^{p-1} x_k\right) + x_p \\ &= \sum_{k=0}^{q} x_k - \sum_{k=0}^{p} x_k + x_p \\ &= \sum_{k=p+1}^{q} x_k + x_p \\ &= \sum_{k=p}^{p+n} x_k + \sum_{k=p+1}^{q} x_k. \end{aligned}$$

D'où la propriété vraie au rang $n=0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Supposons la propriété vraie au rang n. On a alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{q} x_k &= \sum_{k=p}^{p+n} x_k + \sum_{k=p+n+1}^{q} x_k \quad \textit{(Hypothèse de récurrence)}\\ &= \sum_{k=p}^{p+n} x_k + x_{p+n+1} + \sum_{k=p+n+1}^{q} x_k - x_{p+n+1}\\ &= \sum_{k=p}^{p+n+1} x_k + \sum_{k=p+n+2}^{q} x_k.\end{aligned}$$

D'où la propriété vraie au rang $n+1$. On a supposé que $p \leq r$. Donc il existe un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ tel que $r = p+n$. On en déduit les égalités suivantes

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{q} a_k &= \sum_{k=p}^{q} x_k\\ &= \sum_{k=p}^{p+n} x_k + \sum_{k=p+n+1}^{q} x_k\\ &= \sum_{k=p}^{r} x_k + \sum_{k=r+1}^{q} x_k.\end{aligned}$$

Or quelquesoit $k \in [\![p,q]\!]$, $x_k = a_k$ donc

$$\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{k=p}^{r} a_k + \sum_{k=r+1}^{q} a_k.$$

- Montrons par récurrence sur $\mathbb{N}$ que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} (x_k + y_k) = \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} y_k\right).$$

Pour $n=0$, par définition, on a d'une part $\sum\limits_{k=0}^{n} (x_k + y_k) = x_0 + y_0$, et d'autre part

$$\sum_{k=0}^{n} x_k = x_0 \text{ et } \sum_{k=0}^{n} y_k = y_0.$$

D'où la propriété vraie pour $n=0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel et supposons la propriété vraie au rang n. Par définition, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} (x_k + y_k) &= \left(\sum_{k=0}^{n} (x_k + y_k)\right) + x_{n+1} + y_{n+1}\\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} y_k\right) + x_{n+1} + y_{n+1} \quad \textit{(Hypothèse de récurrence)}\\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right) + x_{n+1} + \left(\sum_{k=0}^{n} y_k\right) + y_{n+1}\\ &= \left(\sum_{k=0}^{n+1} x_k\right) + \left(\sum_{k=0}^{n+1} y_k\right).\end{aligned}$$

D'où la propriété au rang $n+1$. Finalement, par récurrence on a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} (x_k + y_k) = \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} y_k\right).$$

En particulier, pour $n = q$, on a

$$\sum_{k=0}^{q} (x_k + y_k) = \left(\sum_{k=0}^{q} x_k\right) + \left(\sum_{k=0}^{q} y_k\right).$$

Donc à l'aide de la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{q}(a_k+b_k) &= \sum_{k=p}^{q}(x_k+y_k)\\
&= 0+\sum_{k=p}^{q}(x_k+y_k)\\
&= \sum_{k=0}^{p-1}(x_k+y_k)+\sum_{k=p}^{q}(x_k+y_k)\\
&= \sum_{k=0}^{q}(x_k+y_k)\\
&= \left(\sum_{k=0}^{q}x_k\right)+\left(\sum_{k=0}^{q}y_k\right)\\
&= \left(\sum_{k=0}^{p-1}x_k\right)+\left(\sum_{k=p}^{q}x_k\right)+\left(\sum_{k=0}^{p-1}y_k\right)+\left(\sum_{k=p}^{q}y_k\right)\\
&= 0+\left(\sum_{k=p}^{q}x_k\right)+0+\left(\sum_{k=p}^{q}y_k\right)\\
&= \left(\sum_{k=p}^{q}x_k\right)+\left(\sum_{k=p}^{q}y_k\right)\\
&= \left(\sum_{k=p}^{q}a_k\right)+\left(\sum_{k=p}^{q}b_k\right).
\end{aligned}$$

On convient ici que $\sum_{k=0}^{-1} x_k=0$ et que $\sum_{k=0}^{-1} y_k=0$.

- Montrons par récurrence sur $\mathbb{N}$ que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=p}^{p+n}(\lambda x_k)=\lambda\left(\sum_{k=p}^{p+n}x_k\right).$$

Pour $n=0$, par définition, on a d'une part $\sum_{k=p}^{p+n}(\lambda x_k)=\lambda x_p$ et d'autre part

$$\lambda\left(\sum_{k=p}^{p+n}x_k\right)=\lambda\left(x_p\right)=\lambda x_p.$$

D'où la propriété vraie au rang $n=0$.
Soit $n\in\mathbb{N}$ un nombre entier naturel. Supposons la propriété vraie au rang n. On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{p+(n+1)}(\lambda x_k) &= \sum_{k=p}^{p+n)}(\lambda x_k)+\lambda x_{n+1}\\
&= \lambda\left(\sum_{k=p}^{p+n}x_k\right)+\lambda x_{n+1} \qquad \textit{(Hypothèse de récurrence)}\\
&= \lambda\left[\left(\sum_{k=p}^{p+n}x_k\right)+x_{n+1}\right]\\
&= \lambda\left(\sum_{k=p}^{p+(n+1)}x_k\right).
\end{aligned}$$

D'où la propriété au rang $n+1$. Finalement par récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel $n\in\mathbb{N}$.
On a supposé que $p\le q$. Donc il existe un entier naturel $n\in\mathbb{N}$ tel que $q=p+n$. Ainsi on a

$$\sum_{k=p}^{q}(\lambda a_k)=\sum_{k=p}^{q}(\lambda x_k)=\sum_{k=p}^{p+n}(\lambda x_k)=\lambda\left(\sum_{k=p}^{p+n}x_k\right)=\lambda\left(\sum_{k=p}^{q}x_k\right)=\lambda\left(\sum_{k=p}^{q}a_k\right).$$

- Montrons par récurrence sur $\mathbb{N}$ que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=p}^{p+n}\lambda=(n+1)\times\lambda.$$

Pour $n=0$, par définition, $\sum_{k=p}^{p+n} \lambda = \lambda = (0+1)\lambda$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Supposons la propriété vraie au rang n. On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^{p+(n+1)} \lambda &= \sum_{k=p}^{p+n)} \lambda + \lambda \\ &= (n+1) \times \lambda + \lambda \qquad \textit{(Hypothèse de récurrence)} \\ &= ((n+1)+1)\lambda. \end{aligned}$$

D'où la propriété au rang $n+1$.

On a supposé que $p \leq q$. Donc il existe un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ tel que $q = p+n$. Ainsi on a

$$\sum_{k=p}^{q} \lambda = \sum_{k=p}^{p+n} \lambda = (n+1)\lambda = (q-p+1)\lambda.$$

□

Proposition : Règles de calculs pour les produits

Soient $p, q, r \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq r \leq q$, $(a_k)_{k\in[\![p,q]\!]}$, $(b_k)_{k\in[\![p,q]\!]}$ deux familles de nombres complexes, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{N}$.

- $\prod_{k=p}^{q} (a_k b_k) = \left(\prod_{k=p}^{q} a_k\right) \times \left(\prod_{k=p}^{q} b_k\right)$
- $\prod_{k=p}^{q} a_k^{\alpha} = \left(\prod_{k=p}^{q} a_k\right)^{\alpha}$
- $\prod_{k=p}^{q} \lambda = \lambda^{q-p+1}$
- $\prod_{k=p}^{q} a_k = \prod_{k=p}^{r} a_k \times \prod_{k=r+1}^{q} a_k$ (Relation de Chasles).

Démonstration. On laisse la démonstration en exercice, il suffit de remplacer le symbole de sommation par celui du produit dans la démonstration précédente. □

⚠ $\sum_{k=p}^{q} (a_k + \lambda) = \left(\sum_{k=p}^{q} a_k\right) + (q-p+1)\lambda$ et $\prod_{k=p}^{q} (\lambda a_k) = \lambda^{q-p+1}\left(\prod_{k=p}^{q} a_k\right)$

1.2 Cas d'un ensemble fini

On dispose d'un ensemble fini non vide d'individus I. À chaque élément $i \in I$, on associe un nombre réel positif m_i correspondant par exemple à la masse de l'individu i. On souhaite ici formaliser la masse totale des individus de l'ensemble I. Il s'agit en particulier de sommer la masse de tous les individus de I. Par exemple dans le cas où $I = \{A, B, C\}$. La masse totale de I est le nombre réel $m_A + m_B + m_C$. L'idée de la sommation sur un ensemble fini est de généraliser cette écriture dans le cas où I est quelconque.

Pour une première lecture, il est conseillé de passer cette étape de construction des sommations et d'y revenir plus tard.

Définition

Soit A un ensemble. Soit n un nombre entier.
On dit que A est un ensemble fini de cardinal n si,

$$\mathrm{Bij}([\![1,n]\!], A) \neq \emptyset.$$

Définition

Soit A un ensemble. On dit que A est un ensemble fini s'il existe un entier naturel n tel que A est un ensemble fini de cardinal n.

Remarque : Pour A un ensemble, on note $\mathbb{C}^A = \mathscr{F}(A, \mathbb{C})$. Lorsque A est un ensemble fini, si $f \in \mathbb{C}^A$ alors on note aussi $f(a) = f_a$ quelquesoit $a \in A$.

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit A un ensemble fini de cardinal n. Soit $u \in \mathbb{C}^A$ une famille de nombres complexes indexée par A. Soit $\Psi_{A,u}$ l'application définie par

$$\Psi_{A,u} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{Bij}\,(\llbracket 1, n \rrbracket, A) & \to & \mathbb{C} \\ \sigma & \mapsto & \sum\limits_{k=1}^{n} u_{\sigma(k)}. \end{array} \right.$$

On a alors $\Psi_{A,u}$ est une application constante.

Démonstration. Avant tout chose, puisque A est un ensemble fini de cardinal n, l'ensemble $\mathrm{Bij}\,(\llbracket 1, n \rrbracket, A)$ est non vide et pour toute bijection $\sigma \in \mathrm{Bij}\,(\llbracket 1, n \rrbracket, A)$, la famille $(u_{\sigma(k)})_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est bien définie et la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} u_{\sigma(k)}$ est bien définie aussi. De ce fait l'application $\Psi_{A,u}$ est bien définie.

Montrons par récurrence sur $\mathbb{N}^*$ que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathscr{P}(n) : \text{Quelquesoit l'ensemble fini non vide } A \text{ de cardinal plus petit que } n, \forall u \in \mathbb{C}^A,\ \ \Psi_{A,u} \text{ est constante.}$$

Initialisation : pour $n = 1$. Soit A un ensemble fini non vide de cardinal plus petit que n. Soit $u \in \mathbb{C}^A$. On sait que A est un ensemble fini de cardinal exactement 1 car non vide. En particulier A possède un unique élément noté $a \in A$.

Soit $\sigma \in \mathrm{Bij}\,(\llbracket 1, n \rrbracket, A)$. Par définition, $\sigma(1) \in A = \{a\}$. Donc $\sigma(1) = a$. Ainsi, toute bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans A est l'application qui à 1 associe a. Il n'y a donc qu'une seule et unique bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans A. Ainsi l'application $\Psi_{A,u}$ est clairement constante.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons alors que $\mathscr{P}(n+1)$ est aussi vraie. Soit A un ensemble fini non vide de cardinal au plus $n+1$. Soit $u \in \mathbb{C}^A$ une famille indexée par A.

<u>Cas n° 1 :</u> A est un ensemble fini de cardinal plus petit que n. Dans ce cas, puisque $\mathscr{P}(n)$ est supposée vraie, on en déduit que $\Psi_{A,u}$ est une application constante.

<u>Cas n° 2 :</u> A est un ensemble fini de cardinal exactement $n+1$. Puisque $A \neq \emptyset$, il existe $a \in A$. Soit $B = A \backslash \{a\}$. On a alors

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \{a\} \cup B \\ \{a\} \cap B = \emptyset. \end{array} \right. .$$

D'autre part assez clairement, B est un ensemble fini de cardinal $n \neq 0$, donc non vide.

Dans la suite on va procéder en trois étapes. Une première étape consiste à transformer un élément de $\mathrm{Bij}\,(\llbracket 1, n+1 \rrbracket, A)$ pour se ramener à un élement de $\mathrm{Bij}\,(\llbracket 1, n \rrbracket, B)$. La seconde étape consiste à transformer $\mathbb{C}^A$ pour se ramener à une famille de $\mathbb{C}^B$. Finalement, la troisième étape utilise ces deux transformations pour faire apparaître une valeur constante de Ψ.

- Soit $\sigma \in \mathrm{Bij}\,(\llbracket 1, n+1 \rrbracket, A)$. L'élement a est un élement de A. Donc il existe un unqiue nombre entier $a_\sigma \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ tel que $\sigma(a_\sigma) = a$. Soit E l'ensemble de nombres entiers suivant

  $$E = \llbracket 1, n+1 \rrbracket \backslash \{a_\sigma\} = \{1, 2, \cdots, a_\sigma - 1, a_\sigma + 1, \cdots n+1\}.$$

  On définit l'application $f_\sigma : \llbracket 1, n \rrbracket \to A$ par l'expression

  $$f_\sigma(k) = \left\{ \begin{array}{ll} \sigma(k) & \text{si } k < a_\sigma \\ \sigma(k+1) & \text{sinon} \end{array} \right. ,$$

  pour tout nombre entier $1 \leq k \leq n$.

  Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Supposons par l'absurde que $f_\sigma(k) = a$. Si $k < a_\sigma$ alors on aurait $f_\sigma(k) = \sigma(k) = a = \sigma(a_\sigma)$ et donc par bijectivité $k = a_\sigma$. Ce qui est absurde puisqu'on vient de supposer que $k < a_\sigma$. Si $k \geq a_\sigma$, alors on aurait $f_\sigma(k) = \sigma(k+1) = a = \sigma(a_\sigma)$ et donc par bijectivité $k = a_\sigma - 1 < a_\sigma$. Ce qui est absurde puisque $k \geq a_\sigma$. Dans tous les cas, $f_\sigma(k) = a$ aboutit à une contradiction.

  On en déduit que f_σ est une application à valeurs dans B. On peut aussi montrer que $f_\sigma \in \mathrm{Bij}\,(\llbracket 1, n \rrbracket, B)$.

- On définit v par l'expression

  $$v_x = u_x,$$

  pour tout élément $x \in B$. En particulier v est la restriction de u sur l'ensemble B.

  Soit $\sigma \in \mathrm{Bij}\,(\llbracket 1, n+1 \rrbracket, A)$. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

  - Si $k < a_\sigma$ alors

    $$u_{\sigma(k)} = v_{\sigma(k)} = v_{f_\sigma(k)}.$$

- Si $k \geq a_\sigma$ alors
$$u_{\sigma(k+1)} = v_{\sigma(k+1)} = v_{f_\sigma(k)}.$$

- Soit $\sigma \in \mathrm{Bij}(\llbracket 1, n+1 \rrbracket, A)$. On vient de définir une application f_σ associée à la bijection σ et la famille v associée à la famille u. On a les égalités suivantes

$$\begin{array}{rcll}
\Psi_{A,u}(\sigma) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} u_{\sigma(k)} & \\
& = & \displaystyle\sum_{k=1}^{a_\sigma - 1} u_{\sigma(k)} + u_{\sigma(a_\sigma)} + \sum_{k=a_\sigma}^{n+1} u_{\sigma(k)} & \textit{(Chasles)} \\
& = & \displaystyle\sum_{k=1}^{a_\sigma - 1} v_{f_\sigma(k)} + u_a + \sum_{k=a_\sigma}^{n+1} v_{f_\sigma(k)} & \\
& = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_{f_\sigma(k)} + u_a. \quad \textit{(Chasles)} & \\
& = & \Psi_{B,v}(f_\sigma) + u_a. &
\end{array}$$

- Montrons maintenant que $\Psi_{A,u}$ est constante. Soit $(\sigma, \tau) \in \mathrm{Bij}(\llbracket 1, n+1 \rrbracket, A)^2$. En utilisant les paragraphes précédents, on construit deux applications f_σ et f_τ. De plus on a

$$\begin{cases} \Psi_{A,u}(\sigma) = \Psi_{B,v}(f_\sigma) + u_a \\ \Psi_{A,u}(\tau) = \Psi_{B,v}(f_\tau) + u_a \end{cases}$$

Or par hypothèse de récurrence puisque B est un ensemble fini non vide de cardinal plus petit que n et que $v \in \mathbb{C}^B$, l'application $\Psi_{b,v}$ est constante. En particulier, $\Psi_{B,v}(f_\sigma) = \Psi_{B,v}(f_\tau)$ et donc $\Psi_{A,u}(\sigma) = \Psi_{A,u}(\tau)$. On en déduit finalement que $\Psi_{A,u}$ est une application constante.

On a traité deux cas dans cette hérédité. Dans tous les cas on aboutit au fait que $\Psi_{A,u}$ est constante. Par suite on vient de montrer que la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

□

Remarque : Cette proposition exprime le fait que la manière de sommer une famille de nombres complexes indexée par A ne dépend pas de la manière d'énumérer les éléments de A.

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit A un ensemble fini de cardinal n. Soit $u \in \mathbb{C}^A$ une famille de nombres complexes indexée par A. Soit $\Phi_{A,u}$ l'application définie par

$$\Phi_{A,u} : \begin{cases} \mathrm{Bij}(\llbracket 1, n \rrbracket, A) & \to & \mathbb{C} \\ \sigma & \mapsto & \displaystyle\prod_{k=1}^{n} u_{\sigma(k)}. \end{cases}$$

On a alors $\Phi_{A,u}$ est une application constante.

Démonstration. La démonstration de cette proposition est similaire à celle proposée dans le cas des sommes. On laisse le lecteur reprendre les agruments dans le cas particulier de la notion de produit sur un ensemble fini. □

Remarque : Soit I un ensemble fini non vide. Soit $u \in \mathbb{C}^I$. Puisque I est un ensemble fini, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Bij}(\llbracket 1, n \rrbracket, I) \neq \emptyset$. On peut montrer que n est unique et s'appelle le cardinal de I. Soit $\tau \in \mathrm{Bij}(\llbracket 1, n \rrbracket, I)$.

- La proposition précédente montre que
$$\Psi_{A,u}(\sigma) = \Psi_{A,u}(\tau),$$
pour toute bijection $\sigma \in \mathrm{Bij}(\llbracket 1, n \rrbracket, I)$. On note alors $\sum_{i \in I} u_i = \Psi_{A,u}(\tau)$ cette valeur constante.

- De même on a
$$\Phi_{A,u}(\sigma) = \Phi_{A,u}(\tau),$$
pour toute bijection $\sigma \in \mathrm{Bij}(\llbracket 1, n \rrbracket, I)$. On note alors $\prod_{i \in I} u_i = \Phi_{A,u}(\tau)$ cette valeur constante.

Dans le cas où $I = \emptyset$, on convient de la notation

$$\sum_{i \in \emptyset} a_i = 0 \quad \text{et} \quad \prod_{i \in \emptyset} a_i = 1.$$

Proposition

Soit I un ensemble fini non vide. Si I est la réunion de deux sous-ensembles disjoints I_1 et I_2, alors :

$$\sum_{k\in I_1\cup I_2} a_k = \sum_{k\in I_1} a_k + \sum_{k\in I_2} a_k \qquad \text{et} \quad \prod_{k\in I_1\cup I_2} a_k = \prod_{k\in I_1} a_k \times \prod_{k\in I_2} a_k$$

Démonstration. La démonstration est laissée en exercice, il suffit de choisir une représentation de I_1 et I_2 puis d'appliquer la relation de Chasles dans le cas des sommes sur un segment de nombres entiers. □

1.3 Méthodes de calculs de sommes et produits

▶ **Changement d'indice**

Proposition

Soient I et J deux ensembles finis non vides tel qu'il existe une bijection $\varphi : I \to J$ de I dans J. Soit $(a_j)_{j\in J}$ une famille de nombres complexes indexée par J.
On a alors :

$$\sum_{i\in I} a_{\varphi(i)} = \sum_{j\in J} a_j.$$

On dit que l'on a posé le changement d'indice $j = \varphi(i)$.

Démonstration. Puisque φ existe, on peut montrer que I et J sont de même cardinal. On note n le cardinal des ensembles I et J. Soit $\sigma \in \mathrm{Bij}(⟦1,n⟧, I)$. Par définition, on a

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I} a_{\varphi(i)} &= \sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(\sigma(k))}\\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{(\varphi\circ\sigma)(k)}.\end{aligned}$$

Or $\varphi\circ\sigma \in \mathrm{Bij}(⟦1,n⟧, J)$ donc

$$\sum_{k=1}^{n} a_{(\varphi\circ\sigma)(k)} = \sum_{j\in J} a_j,$$

par définition. Ainsi

$$\sum_{i\in I} a_{\varphi(i)} = \sum_{j\in J} a_j.$$

□

L'idée est de définir un nouvel indice en fonction de l'indice de départ. Puis on exprime la somme ou le produit en fonction de ce nouvel indice en veillant à changer les bornes.

Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq q$. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de nombres complexes. On peut poser :

- $l = k + d$ où $d \in \mathbb{Z}$ fixé et tel que $p + d \geq 0$:
$$\sum_{k=p}^{q} a_{k+d} = \sum_{l=p+d}^{q+d} a_l$$
- $l = d - k$ où $d \in \mathbb{N}$ fixé et tel que $d - q \geq 0$:
$$\sum_{k=p}^{q} a_{d-k} = \sum_{l=d-q}^{d-p} a_l$$

⚠ Attention à bien remettre les bornes dans le bon sens.

Exemple : Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} k$. En posant le changement d'indice $l = n - k$, on trouve : $S_n = \sum_{l=0}^{n} (n-l) = n(n+1) - S_n$.

D'où, $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exemple : Posons $I = \{1,2,3\}$, $J = \{1,4,9\}$. La fonction $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} I & \to & J \\ i & \mapsto & i^2 \end{array}\right.$ est bijective.

Soit a_1, a_4, a_9 trois nombres complexes, on a : $a_1 + a_4 + a_9 = \sum_{i\in I} a_{i^2} = \sum_{j\in J} a_j$.

▶ **Sommes et produits télescopiques**

- Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq q$ et $(a_k)_{k\in[\![p,q]\!]}$ une famille de nombres complexes, on a : $\sum_{k=p}^{q}(a_{k+1}-a_k) = a_{q+1}-a_p$.
- Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq q$ et $(a_k)_{k\in[\![p,q]\!]}$ une famille de nombres complexes non nuls, on a : $\prod_{k=p}^{q}\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right) = \frac{a_{q+1}}{a_p}$.

Dans ces deux cas, les termes s'éliminent deux à deux et il ne reste que le premier et le dernier terme.

Démonstration. On a $\sum_{k=p}^{q}(a_{k+1}-a_k) = \sum_{k=p}^{q} a_{k+1} - \sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{k=p+1}^{q+1} a_k - \sum_{k=p}^{q} a_k = \left(\sum_{k=p+1}^{q} a_k\right) + a_{q+1} - a_p - \left(\sum_{k=p+1}^{q} a_k\right) = a_{q+1} - a_p$ par changement d'indice ($l = k+1$). La formule sur les produits se montre de même. □

Exemple : On a $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = 1-\frac{1}{n+1}$. (sommes télescopique)
$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k}\right) = \frac{1}{n}$ (produit télescopique).

▶ **Regroupement de termes**
On peut décomposer une somme (ou un produit) en plusieurs sommes (ou produits) plus simples à calculer.
Exemple : Calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{2n}\min(k,n)$ où $\min(k,n)$ est le minimum des entier k et n.

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=n+1}^{2n} n \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (2n-(n+1)+1)\times n \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + n^2 \\
&= \frac{n}{2}(n+1+2n) = \frac{n(3n+1)}{2}
\end{aligned}$$

Un cas classique est de regrouper les termes d'indices pairs et impairs :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ k \text{ pair}}} a_k + \sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ k \text{ impair}}} a_k \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^{n} u_k = \prod_{\substack{0\leq k\leq n \\ k \text{ pair}}} a_k \times \prod_{\substack{0\leq k\leq n \\ k \text{ impair}}} a_k.$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k k^2 &= \sum_{\substack{0\leq k\leq 2n \\ k \text{ pair}}} k^2 - \sum_{\substack{0\leq k\leq 2n \\ k \text{ impair}}} k^2 \\
&= \sum_{p=0}^{n}(2p)^2 - \sum_{p=0}^{n-1}(2p+1)^2 \\
&= 4\sum_{p=0}^{n} p^2 - \sum_{p=0}^{n-1}(4p^2+4p+1) \\
&= 4n^2 - 4\sum_{p=0}^{n-1} p - \sum_{p=0}^{n-1} 1 \\
&= 4n^2 - 4\frac{(n-1)n}{2} - n \\
&= n(4n-2n+2-1) = n(2n+1)
\end{aligned}$$

1.4 Quelques exemples classiques de sommes et de produits

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration. On raisonne par récurrence.

- Pour $n = 0$, on a : $\sum_{k=0}^{0} k = 0$ et $\frac{0(0+1)}{2} = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k &= \left(\sum_{k=0}^{n} k\right) + n + 1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= \frac{(n+1)}{2}(n+2)\end{aligned}$$

- On a donc prouvé par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

$\square$

Proposition : Somme d'une progression arithmétique

Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p \leq q$. Soit $(a_k)_{k \in [\![p,q]\!]}$ une famille de nombres complexes en progression arithmétique de raison $r \in \mathbb{C}$, c'est à dire telle que : $\forall i \in [\![p, q-1]\!]$, $a_{i+1} - a_i = r$. Alors,

$$\sum_{k=p}^{q} a_k = \frac{(q-p+1)(a_p + a_q)}{2} = \frac{(\text{nombre de termes})(\text{1er terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

Démonstration. On montre par récurrence que : $\forall k \in [\![p,q]\!]$, $a_k = a_p + (k-p)r$.
On a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{q} a_k &= \sum_{k=p}^{q} (a_p + (k-p)r) \\ &= \sum_{k=p}^{q} (a_p - pr) + r \sum_{k=p}^{q} k \\ &= \sum_{k=p}^{q} (a_p - pr) + r\left(\sum_{k=0}^{q} k - \sum_{k=0}^{p-1} k\right) \\ &= (a_p - pr)(q-p+1) + r\left(\frac{q(q+1)}{2} - \frac{p(p-1)}{2}\right) \\ &= (a_p - pr)(q-p+1) + \frac{r}{2}(q^2 - p^2 + q + p)\end{aligned}$$

$\square$

Proposition

Soit $x \in \mathbb{C}$, $x \neq 1$ un nombre complexe. Soit $n \in \mathbb{N}$, un nombre entier naturel. On a l'égalité

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Démonstration. En développant, on a les égalités

$$\begin{aligned}(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k &= \sum_{k=0}^{n} (1-x)x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} (x^k - x^{k+1}) \qquad \textit{(somme téléscopique)} \\ &= x^0 - x^{n+1}.\end{aligned}$$

Or $x \neq 1$ donc en divisant par $1-x \neq 0$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

$\square$

Proposition : Somme d'une progression géométrique

Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p \leq q$. Soit $(a_k)_{k\in[\![p,q]\!]}$ une famille de nombres complexes en progression géométrique de raison x, c'est à dire telle que : $\forall i \in [\![p,q-1]\!]\ a_{i+1} = a_i x$. Alors :

$$\sum_{k=p}^{q} a_k = \begin{cases} a_p\left(\dfrac{1-x^{q-p+1}}{1-x}\right) = (1^{\text{er}}\text{ terme}) \times \left(\dfrac{1-x^{\text{nombre de termes}}}{1-x}\right) & \text{si } x \neq 1 \\ (q-p+1)a_p \quad \text{si } x = 1 \end{cases}.$$

En particulier :

$$\sum_{k=p}^{q} x^k = \begin{cases} x^p\left(\dfrac{1-x^{q-p+1}}{1-x}\right) & \text{si } x \neq 1 \\ q-p+1 \quad \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Remarque : Ne pas oublier de distinguer le cas $x = 1$ dans l'utilisation de cette formule.

Démonstration. Si $x = 1$, tous les termes valent a_p. Ainsi, $\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{k=p}^{q} a_p = (q-p+1)a_p$.

Si $x \neq 1$: on sait que : $\forall k \in [\![p,q]\!]$, $a_k = x^{k-p}a_p$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}
(1-x)\left(\sum_{k=p}^{q} a_k\right) &= (1-x)\left(\sum_{k=p}^{q} x^{k-p}a_p\right) \\
&= a_p(1-x)\left(\sum_{k=p}^{q} x^{k-p}\right) \\
&= a_p\left[\left(\sum_{k=p}^{q} x^{k-p}\right) - x\left(\sum_{k=p}^{q} x^{k-p}\right)\right] \\
&= a_p\left[\sum_{k=p}^{q} x^{k-p} - \sum_{k=p}^{q} x^{k+1-p}\right] \\
&= a_p\left[\sum_{k=p}^{q} (x^{k-p} - x^{k+1-p})\right]. \\
&= a_p\left[1 - x^{q+1-p}\right].
\end{aligned}$$

par une somme télescopique.
En divisant des deux côtés par $1-x$ (non nul pour $x \neq 1$), on a le résultat. $\square$

Proposition : Factorisation de $a^n - b^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k.$$

Démonstration. Démontrons la première égalité :

On a :

$$\begin{aligned}(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} &= a\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} - b\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(a^{k+1}b^{n-(k+1)} - a^k b^{n-k}\right)\\ &= a^n b^0 - a^0 b^n\\ &= a^n - b^n\end{aligned}$$

par télescopage, en posant $u_k = a^k b^{n-k}$. □

Exemple : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$
$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$

2 Sommes doubles

On a défini la notion de somme sur un ensemble Ω fini. Un cas particulier est celui où Ω est une partie finie de $\mathbb{N}^2$. Pour tout élément $w \in \Omega$, puisque $\Omega \subset \mathbb{N}^2$, il existe $i_x \in \mathbb{N}$ et il existe $j_x \in \mathbb{N}$ tel que $w = (i_x, j_x)$. On préfère alors décrire un élément $(i,j) \in \Omega$ plutôt que $x \in \Omega$. On note et l'on définit

$$\sum_{x\in\Omega} a_x = \sum_{(i,j)\in\Omega} a_{i,j}.$$

On parle aussi de somme double.

Définition

Soit $\mathscr{P}$ une proprosition dépendant de deux paramètres entiers. Soit $\Omega = \{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \;\;/\;\; \mathscr{P}(i,j)\}$. Soit $(a_{i,j}) \in \mathbb{C}^\Omega$.
On définit

$$\sum_{\mathscr{P}(i,j)} a_{i,j} = \sum_{(i,j)\in\Omega} a_{i,j}.$$

Exemple : On a l'égalité suivante

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} a_{i,j} = \sum_{\left\{\begin{array}{l}1\le i\le n\\ 1\le j\le p\end{array}\right.} a_{i,j}$$

2.1 Sommes doubles sur un rectangle

Théorème (de Fubini)

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.
Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \in \mathbb{C}^{[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ une famille de nombres complexes.
On a alors

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right)$$

Démonstration. Montrons par récurrence sur $\mathbb{N}$ que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall p\in\mathbb{N}^*,\;\; \forall a\in\mathbb{C}^{[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]},\;\; \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\right).$$

Initialisation : pour $n = 1$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $a \in \mathbb{C}^{[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$. On définit $\sigma : j \in [\![1,p]\!] \mapsto (1,j) \in [\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$. L'application σ

est clairement bijective. Ainsi par définition,

$$\begin{aligned}
\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} a_{i,j} &= \sum_{j\in[\![1,p]\!]} a_{i,\sigma(j)}\\
&= \sum_{j=1}^{p} a_{i,\sigma(j)}\\
&= \sum_{j=1}^{p} a_{1,j}\\
&= \sum_{i=1}^{1}\sum_{j=1}^{p} a_{1,j}\\
&= \sum_{i=1}^{1}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}.
\end{aligned}$$

D'où la propriété vraie pour $n = 1$.

Hérédité. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $a \in \mathbb{C}^{[\![1,n+1]\!]\times[\![1,p]\!]}$.

- Soit $(x, y) \in [\![1, n+1]\!] \times [\![1, p]\!]$. On a alors
$$(x-1)p + y \geq y \geq 1.$$
D'autre part,
$$\begin{aligned}
(x-1)p + y &\leq np + y\\
&\leq np + p\\
&\leq (n+1)p.
\end{aligned}$$
Par suite l'application
$$\varphi : \begin{cases} [\![1, n+1]\!] \times [\![1, p]\!] & \to & [\![1, (n+1)p]\!] \\ (i, j) & \mapsto & (i-1)p + j \end{cases},$$
est bien définie.
- Montrons que φ est une bijection.
Soit $u \in [\![1, (n+1)p]\!]$,
  Cas n° 1 : $u = (n+1)p$.
  donc $u = \varphi(n+1, p)$.
  Cas n° 2 : $u < (n+1)p$.

  D'après la division euclidienne de u par p,
$$\exists!(q, r) \in \mathbb{N}^2,\ \begin{cases} u = qp + r \\ r < p \end{cases}.$$
  Par l'absurde supposons que : $q \geq n+1$. Alors $pq + r \geq (n+1)p$ ce qui est absurde dans ce cas numéro deux. On en déduit que $q < (n+1)p$.
  Cas n° 2.1 : $r = 0$.
  On sait que $u \geq 1$ donc $q \neq 0$ et donc $q \geq 1$. De plus, on peut écrire
$$u = (q-1)p + p.$$
  C'est-à-dire $u = \varphi(q, p)$.
  Cas n° 2.2 : $r \neq 0$.
  Puisque r est un entier naturel, $r \geq 1$. Donc $1 \leq r \leq p$. On a montré que $q < (n+1)$ et on sait que $q \geq 0$, donc
$$1 \leq q+1 \leq n+1.$$
  Ainsi, $u = qp + r = \varphi(q+1, r)$.

  Dans tous les cas il existe $(i, j) \in [\![1, n+1]\!] \times [\![1, p]\!]$ tel que $u = \varphi(i, j)$. Montrons que cette existence est unique.
  Soit $(x, y) \in \left([\![1, n+1]\!] \times [\![1, p]\!]\right)^2$ tel que $\varphi(x) = \varphi(y)$,
  On sait que $x \in [\![1, n+1]\!] \times [\![1, p]\!]$, il existe donc $(u, v) \in [\![1, n+1]\!] \times [\![1, p]\!]$ tel que $x = (u, v)$.
  De même il existe $(a, b) \in [\![1, n+1]\!] \times [\![1, p]\!]$ tel que $y = (a, b)$.
  L'égalité $\varphi(x) = \varphi(y)$ donne $up + v = ap + b$. Quitte à échanger x et y, on peut supposer que $v \geq b$. On obtient alors
$$(u-a)p + (v-b) = 0 = 0 \times p + 0.$$

D'autre part, on sait que $v \leq p$ et $b \geq 1$. Ainsi $0 \leq v - b < p$. Par unicité dans la division euclidienne,

$$\begin{cases} v - b = 0 \\ u - a = 0 \end{cases}.$$

D'où $x = y$.
Finalement on a montré que φ est une bijection. On en déduit par définition que

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j)\in[\![1,n+1]\!]\times[\![1,p]\!]} a_{i,j} &= \sum_{k=1}^{(n+1)p} a_{\varphi^{-1}(k)} \\ &= \sum_{k=1}^{np} a_{\varphi^{-1}(k)} + \sum_{k=1+np}^{(n+1)p-1} a_{\varphi^{-1}(k)} + a_{\varphi^{-1}((n+1)p)}. \end{aligned}$$

Soit $k \in [\![1, np]\!]$,

Par définition, $\varphi^{-1}(k) \in [\![1, n+1]\!] \times [\![1, p]\!]$. Donc il existe $(\lambda(k), \mu(k)) \in [\![1, n+1]\!] \times [\![1, p]\!]$ tel que $\varphi^{-1}(k) = (\lambda(k), \mu(k))$.

Par l'absurde, supposons que $\lambda(k) = n + 1$,

En composant avec φ, on obtient $k = (\lambda(k) - 1)p + \mu(k) = np + \mu(k) > np$, ce qui est absurde.

On en déduit que $\lambda(k) \leq n$. Ainsi l'application φ^{-1} peut être restreinte comme suit

$$\varphi^{-1} : [\![1, np]\!] \to [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!],$$

tout en conservant son caractère bijectif.
Par définition, on a alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{np} a_{\varphi^{-1}(k)} &= \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} a_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} \right) \quad \textit{(Hypothèse de récurrence).} \end{aligned}$$

D'autre part, $\varphi(n+1, p) = np + p = (n+1)p$. On en déduit que $\varphi^{-1}((n+1)p) = (n+1, p)$. D'où l'égalité

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,n+1]\!]\times[\![1,p]\!]} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} \right) + a_{n+1,p} + \sum_{k=1+np}^{(n+1)p-1} a_{\varphi^{-1}(k)}.$$

Soit $k \in [\![1, (n+1)p - 1]\!]$,

La division euclidienne de k par p assure qu'il existe deux nombres entiers q et r tels que $k = qp + r$, avec $r \leq p - 1$.
Supposons par l'absurde que $q \leq n - 1$. On obtient alors

$$\begin{aligned} k &= pq + r \\ &\leq (n-1)p + r \\ &\leq np - p + p = np, \end{aligned}$$

ce qui est absurde. Finalement, on en déduit que $q \geq n$.
Supposons encore une fois par l'absurde que $q > n$. On obtient alors

$$pq + r \geq (n+1)p + 0.$$

ce qui est absurde et donc $q \leq n$.
On vient donc de montrer que $q = n$ et donc que $k = np + r$. De plus, $r \neq 0$ car $k \geq 1 + np$ et $r \leq p - 1$. On obtient donc

$$k = np + r = \varphi(n+1, r).$$

Soit f l'application définie par

$$f : \begin{cases} [\![1, p-1]\!] & \to & [\![1 + np, (n+1)p - 1]\!] \\ j & \mapsto & \varphi(n+1, j) \end{cases}.$$

On peut montrer que f est bijective. On obtient donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=1+np}^{(n+1)p-1} a_{\varphi^{-1}(k)} &= \sum_{j=1}^{p-1} a_{\varphi^{-1}(f(j))} \\ &= \sum_{j=1}^{p-1} a_{n+1,j} \end{aligned}$$

Par suite, on a montré que

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in[\![1,n+1]\!]\times[\![1,p]\!]} a_{i,j} &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\right) + a_{n+1,p} + \sum_{j=1}^{p-1} a_{n+1,j}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\right) + \sum_{j=1}^{p} a_{n+1,j}\\ &= \sum_{i=1}^{n+1}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\right).\end{aligned}$$

D'où la propriété vraie au rang $n+1$.

On a démontré par récurrence que

$$\forall p\in\mathbb{N}^*,\ \ \forall a\in\mathbb{C}^{[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]},\qquad \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\right).$$

L'égalité

$$\forall p\in\mathbb{N}^*,\ \ \forall a\in\mathbb{C}^{[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]},\qquad \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right).$$

s'obtient en considérant la famille auxiliaire

$$b_{i,j} = a_{i,j},$$

pour tout $(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,n]\!]$. □

Remarque : L'idée de la preuve précédente consiste à écrire les nombres dans un tableau :

	$j=1$	$j=2$	$\cdots$	$j=p$	
$i=1$	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\cdots$	$a_{1,p}$	$\sum_{j=1}^{p} a_{1,j}$
$i=2$	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$\cdots$	$a_{2,p}$	$\sum_{j=1}^{p} a_{2,j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$i=n$	$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	$\cdots$	$a_{n,p}$	$\sum_{j=1}^{p} a_{n,j}$
	$\sum_{i=1}^{n} a_{i,1}$	$\sum_{i=1}^{n} a_{i,2}$	$\cdots$	$\sum_{i=1}^{n} a_{i,p}$	$\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} a_{i,j}$

Pour sommer tous les éléments du tableau, on peut :

- d'abord sommer ligne par ligne $\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} \text{ à la ligne } i\right)$, puis sommer les valeurs obtenues sur toutes les lignes $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}$
- d'abord sommer colonne par colonne $\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \text{ à la colonne } j\right)$, puis sommer les valeurs obtenues sur toutes les colonnes $\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$.

Remarque :

- On pourra désormais omettre les parenthèses et écrire $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$
- Si $n=p$, on pourra encore noter $\sum_{1\le i,j\le n} a_{i,j}$.

Proposition

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, soient $(a_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ et $(b_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ deux familles de nombres complexes, on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\times\left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_i b_j = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_i b_j.$$

Démonstration. $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\times\left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right) a_i\right] = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_i b_j\right)$. On est ramené à une somme double. □

2.2 Somme double triangulaire

Remarque : Si $\Omega = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ 1 \leq i \leq j \leq n\}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, la somme $\sum\limits_{(i,j)\in\Omega} a_{i,j}$ se note $\sum\limits_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j}$ et on parle de somme double triangulaire.

Théorème

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a_{i,j})_{1\leq i\leq j\leq n}$ une famille de nombres complexes.
Alors :

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{k,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}$$

Démonstration. On définit dans un premier temps $(c_{i,j})$ par l'expression

$$c_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{sinon}. \end{cases}$$

Dans ce cas, par le théorème précédent, on obtient d'une part

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i,j\leq n} c_{i,j} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i-1} c_{i,j} + \sum_{j=i}^{n} c_{i,j}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(0 + \sum_{j=i}^{n} c_{i,j}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} c_{i,j}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\right).
\end{aligned}$$

D'autre part, encore une fois avec le théorème précédent,

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i,j\leq n} c_{i,j} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{i,j} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} c_{i,j} + \sum_{i=j+1}^{n} c_{i,j}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} c_{i,j} + 0\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} c_{i,j}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}\right).
\end{aligned}$$

On peut montrer que

$$[\![1,n]\!]^2 = \{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \ /\ i \leq j\} \cup \{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \ /\ i > j\},$$

et de manière disjointe. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i,j\leq n} c_{i,j} &= \sum_{1\leq i\leq j\leq n} c_{i,j} + \sum_{i>j} c_{i,j} \\
&= \sum_{1\leq i\leq j\leq n} c_{i,j} \\
&= \sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j}.
\end{aligned}$$

Finalement en regrouppant les égalités précédentes, on a

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j} = \sum_{1\leq i,j\leq n} c_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}\right).$$

□

Remarque : À nouveau l'idée de la preuve est de disposer les $a_{i,j}$ dans un tableau à double entrée. Mais cette fois le tableau est triangulaire : seuls sont pris en compte les éléments $a_{i,j}$ où $i \leq j$.

	$j=1$	$j=2$	$\cdots$	$j=n$	
$i=1$	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\cdots$	$a_{1,n}$	$\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}$
$i=2$		$a_{2,2}$	$\cdots$	$a_{2,n}$	$\displaystyle\sum_{j=2}^{n} a_{2,j}$
$\vdots$			$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$i=n$				$a_{n,n}$	$\displaystyle\sum_{j=n}^{n} a_{n,j}$
	$\displaystyle\sum_{i=1}^{1} a_{i,1}$	$\displaystyle\sum_{i=1}^{2} a_{i,2}$	$\cdots$	$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,n}$	$\displaystyle\sum_{0\leq i\leq j\leq n} a_{k,j}$

Pour sommer tous les éléments du tableau, on peut :

- d'abord sommer ligne par ligne $\left(\sum_{j=i}^{p} a_{i,j} \text{ à la ligne } i\right)$, puis sommer les valeurs obtenues sur toutes les lignes $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{p} a_{i,j}$
- d'abord sommer colonne par colonne $\left(\sum_{i=1}^{j} a_{i,j} \text{ à la colonne } j\right)$, puis sommer les valeurs obtenues sur toutes les colonnes $\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}$.

Remarque : En pratique, on écrit :

$$\left\{\begin{array}{l} 1 \leq i \leq n \\ i \leq j \leq n \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 1 \leq i \leq j \\ 1 \leq j \leq n \end{array}\right.$$

Remarque : ⚠ Seul les bornes de la somme interne peuvent dépendre de l'indice de la somme externe!

Méthode : Interversion de signes sommes

- Pour une somme double indexée par un rectangle, on peut intervertir les signes sommes sans se poser de questions.
- Pour une somme double triangulaire, on écrit les équivalences pour modifier correctement les bornes.

Exemple : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j}$.

On a :

$$\left\{\begin{array}{l} 1 \leq i \leq n \\ i \leq j \leq n \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 1 \leq i \leq j \\ 1 \leq j \leq n \end{array}\right.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} \frac{i}{j} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j} i\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\frac{j(j+1)}{2} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{(j+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{l=2}^{n+1} l \end{aligned}$$

On reconnait la somme des termes d'une progression arithmétique :

$$S_n = \frac{n(n+3)}{4}$$

3 Coefficients binomiaux et binôme de Newton

3.1 Définitions et propriétés

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle factorielle n et on note $n!$ le nombre entier défini par :

$$0! = 1 \quad \text{et,} \quad \text{si } n \geq 1,\ n! = \prod_{k=1}^{n} k$$

Remarque : Si $n \geq 1$, $n! = n \times (n-1)!$

Définition

Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq n$, on pose :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$\binom{n}{p}$ est appelé coefficient binomial et se lit « p parmi n ».

Remarque : On pose parfois : $\binom{n}{p} = 0$ si $p > n$.

Proposition

Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq p \leq n$. On a :

- $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$
- Symétrie des coefficients binomiaux : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

Démonstration. Cela résulte directement de la formule. □

Proposition (Égalité du triangle de Pascal)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n-1]\!]$. On a :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} = \frac{p(n-1)!}{p!(n-p)!} + \frac{(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{n(n-1)!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}.\end{aligned}$$

□

Remarque :

- Avec cette formule, on peut montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in [\![0, n]\!]$, $\binom{n}{p} \in \mathbb{N}$..

  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $\mathscr{P}(n)$: « $\forall p \in [\![0, n]\!]$, $\binom{n}{p} \in \mathbb{N}$ ».

  Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
  Pour $n = 0$: soit $p \in [\![0, n]\!]$. On a $p = 0$.

Or, $\binom{0}{0} = 1 \in \mathbb{N}$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

On a : $\forall p \in [\![0, n]\!]$, $\binom{n}{p} \in \mathbb{N}$.
Soit $p \in [\![0, n+1]\!]$.

- Si $p = 0$ alors, $\binom{n+1}{0} = 1 \in \mathbb{N}$.
- Si $p = n+1$ alors, $\binom{n+1}{n+1} = 1 \in \mathbb{N}$.
- Si $p \in [\![1, n+1]\!]$, on a : $\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}$ par la formule de Pascal.

  Or, par hypothèse de récurrence, $\binom{n}{p}, \binom{n}{p-1} \in \mathbb{N}$ donc $\binom{n+1}{p} \in \mathbb{N}$.

On a donc prouvé par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in [\![0, n]\!],\ \binom{n}{p} \in \mathbb{N}.$$

- Cette formule permet de calculer de proche en proche les coefficient binomiaux en construisant le triangle de Pascal.

	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$		
$n=0$	1							
$n=1$	1	1						
$n=2$	1	2	1					
$n=3$	1	3	3	1				
$n=4$	1	4	6	4	1			
$\vdots$	$\vdots$							
$n-1$	1				$\binom{n-1}{p-1}$	$\binom{n-1}{p}$	1	
n	1					$\binom{n}{p}$		1

Théorème du binôme de Newton

Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Démonstration. Soient $a, b \in \mathbb{C}$.
Raisonnons par récurrence sur n.
Pour $n = 0$, on a $(a+b)^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$ ainsi, $(a+b)^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. On a :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} && \text{(par hypothèse de récurrence)}\\
&= a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} + b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}\\
&= \sum_{p=1}^{n+1}\binom{n}{p-1}a^p b^{n+1-p} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} && \text{(par changement d'indice } p=k+1 \text{ dans la 1ère somme)}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{n}a^{n+1}b^0 + \binom{n}{0}a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}\\
&= \binom{n}{n}a^{n+1}b^0 + \binom{n}{0}a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}\right)\\
&= \binom{n}{n}a^{n+1}b^0 + \binom{n}{0}a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right)a^k b^{n+1-k}\\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k} && \text{(par la formule de Pascal)}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

On a donc prouvé par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$. $\square$

Exemple : Soit $n \in \mathbb{N}$.

- On a $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$.
- On a $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = (-1+1)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$
- $(a+b)^2 = \binom{2}{0}b^2 + \binom{2}{0}ab + \binom{2}{2}a^2 = b^2 + 2ab + a^2$
- $(a+b)^3 = \binom{3}{0}b^3 + \binom{3}{1}ab^2 + \binom{3}{2}a^2 b + \binom{3}{3}a^3 = b^3 + 3ab^2 + 3a^2 b + a^3$