Feuille d'exercices 12 : Limites et continuité

1 Limites de fonctions

Exercice 1. Montrer que les fonctions cos est sin n'ont pas de limite en $+\infty$.

Exercice 2. Montrer que $x \mapsto \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite à droite en 0.

Exercice 3. On considère la fonction : $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{(-1)^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}}{x} \end{array}$

Montrer que f n'admet pas de limite finie en 0.
A t-on $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \pm\infty$?

Exercice 4. Soit f une fonction périodique sur $\mathbb{R}$. Montrer que si f admet une limite finie en $+\infty$, alors f est constante.

Exercice 5. Etudier les limites suivantes :
1. $\dfrac{e^{2x}+x+2}{e^x+e^{-x}}$ en $+\infty$
2. $x+\sqrt{x^2-1}$ en $-\infty$
3. $\dfrac{\tan 5x}{\sin 2x}$ en 0
4. $x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ en $+\infty$
5. $\arctan\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)$ en 0
6. $(1+x)^{1/x}$ en 0

Exercice 6. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-\lfloor x\rfloor}{x+\lfloor x\rfloor}$

Exercice 7. Etudier les limites suivantes :

a. $\dfrac{x^2+1}{\sin^2(x)}$ en 0.
b. $\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{2x+7}-3}$ en 1
c. $\dfrac{x^5-6x^2+1}{3x^5+2x^3+7}$ en $+\infty$
d. $x-\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ en $+\infty$
e. $\dfrac{x^2-x-12}{x-4}$ en 4
f. $\dfrac{\sqrt{x^3-2x^2+x}}{x-1}$ en 1
g. $x(e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{2}{x}}-2)$ en $+\infty$
h. $\dfrac{\sin x-\sin 5x}{\sin x+\sin 5x}$ en 0
i. $\dfrac{\sin^2 x-\sin^2\alpha}{x^2-\alpha^2}$ en $\alpha\neq 0$
j. $\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$ en 0
k. $x\sin\dfrac{1}{x}$ en $+\infty$
l. $\dfrac{\sin x}{x}$ en $+\infty$
m. $\dfrac{x}{\alpha}\left\lfloor \dfrac{b}{x}\right\rfloor$ en 0
n. $\dfrac{\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)}{x-\frac{\pi}{3}}$ en $\dfrac{\pi}{3}$

avec $(\alpha,a,b)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ de telle sorte que l'expression considérée soit définie.

Exercice 8. Déterminer si elle existe, la limite en a de f fonction définie sur I où :

1. $I=\mathbb{R}$, $f(x)=x\sin x$, $a=+\infty$,
2. $I=\mathbb{R}^*$, $f(x)=\sin x\sin\dfrac{1}{x}$, $a=0$,
3. $I=\mathbb{R}^*$, $f(x)=\cos x\cos\dfrac{1}{x}$, $a=0$,
4. $I=[0,\frac{\pi}{2}[$, $f(x)=\cos x+\lfloor\tan x\rfloor$, $a=\frac{\pi}{2}$,
5. $I=[0,\pi]\setminus\{\frac{\pi}{2}\}$, $f(x)=\cos x+\lfloor\tan x\rfloor$, $a=\frac{\pi}{2}$.

Exercice 9. On pose pour tout $x\in[1,+\infty[$, $f(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\frac{dt}{t+\sqrt{t}}$.

1. Que vaut, pour $x>0$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x}\frac{dt}{t}$?
2. Démontrer que pour tout $t\in[1,+\infty[$, on a : $0\leq\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t+\sqrt{t}}\leq\dfrac{1}{t^{3/2}}$.
3. En déduire une majoration de $|\ln(2)-f(x)|$.
4. Quelle est la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

2 Continuité

Exercice 10. 1. Montrer que si f et g sont continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et coïncident sur $\mathbb{Q}$, alors $f = g$ sur $\mathbb{R}$.

2. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que $\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) < g(x)$.
   (a) Montrer que $f \leq g$.
   (b) Montrer qu'on n'a pas nécessairement : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < g(x)$.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue dont la restriction à $\mathbb{Q}$ est strictement croissante. Montrer que f est strictement croissante.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x - 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ x + 1 \text{ si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Montrer que f est bijective et discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 12. Déterminer si les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité en 0 :

1. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$
2. $f(x) = x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$
3. $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)$
4. $f(x) = (1+x)^{1/x}$
5. $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$
6. $f(x) = x\cos(\frac{1}{x})$
7. $f(x) = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$

Exercice 13. Etudier la continuité des fonctions définies par :

1. $f(x) = x - \lfloor x \rfloor - (x - \lfloor x \rfloor)^2$,
2. $f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}.$

Exercice 14. Etudier la continuité de la fonction définie par : $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$,

Exercice 15. Montrer qu'une fonction continue sur I ne s'annulant pas garde un signe strict constant.

Exercice 16. Montrer que l'équation $x^{17} = x^{11} + 1$ admet au moins une solutions $x \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 17. Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I vérifiant $\forall x \in I$, $|f(x)| = |g(x)|$ et $f(x) \neq 0$. Montrer que $f = g$ ou $f = -g$.

Exercice 18. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que si f prend un nombre fini de valeurs, alors f est constante.

Exercice 19. Soit $a \leq b$ et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. On suppose que $f([a, b]) \subset [a, b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.
2. Même question lorsqu'on suppose que $[a, b] \subset f([a, b])$.

Exercice 20. Soit f une application de l'intervalle I dans $\mathbb{R}$ continue et injective.
Montrer que f est strictement monotone.
On pourra considérer la fonction $\phi : t \mapsto f((1-t)x_1 + tx_2) - f((1-t)y_1 + ty_2)$.

Exercice 21. Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ telles que $f(0) = g(1) = 0$ et $f(1) = g(0) = 1$. Montrer que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^+,\ \exists x \in [0,1],\ f(x) = \lambda g(x).$$

Exercice 22. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists x \in [0,1],\ f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x).$$

Exercice 23. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ continue telle que :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 24. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}.$$

Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$. La fonction f atteint-elle ses bornes ?

Exercice 25. Soient $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues telles que $\forall x \in [0,1],\ f(x) < g(x)$.
Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que $\forall x \in [0,1],\ f(x) + m \leq g(x)$.

Exercice 26. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, bornée sur $\mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.

Exercice 27. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que :

$$\sup_{x \in]a,b[} f(x) = \sup_{x \in [a,b]} f(x) \text{ et } \inf_{x \in]a,b[} f(x) = \inf_{x \in [a,b]} f(x).$$

Exercice 28. Soient f et g deux fonctions de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$.
On définit pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $M(x) = \sup_{t \in [-1,1]} (f(t) + xg(t))$

1. Montrer que $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bien définie.
2. Montrer que : $\forall h > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \left(M(x+h) \leq M(x) + h \sup_{t \in [-1,1]} g \quad \text{et} \quad M(x+h) \geq M(x) + h \inf_{t \in [-1,1]} g \right)$.
3. Montrer que pour tout $(a,x) \in \mathbb{R}^2$, $|M(x) - M(a)| \leq |x - a|$. En déduire que $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue.

Exercice 29. On considère la fonction suivante :

$$\begin{array}{rccc} f : &]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}. \end{array}$$

1. Montrer que f est bijective.
2. Déterminer :

$$\lim_{n \to +\infty} f^{-1}(2^{-n}).$$

Exercice 30. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{2} \ln \left| \dfrac{x-1}{x+1} \right|$.

1. Comparer $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $f(x)$.
2. On désigne par φ la restriction de f à $]-1,1[$. Montrer que φ est une bijection de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la fonction $\varphi^{-1} \circ f$.

3 Equations fonctionnelles

Exercice 31. Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Exercice 32. Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(3x) = f(x)$

Exercice 33. Déterminer toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)^2 = f(x)$$

Exercice 34. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x^2) = f(x).$$

On pourra étudier les suites $\left(x^{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ *et* $\left(x^{2^{-n}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 35. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant les équations fonctionnelles suivantes :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$;
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x)f(y)$.