Devoir surveillé n°3

samedi 30 novembre 2019
Durée : 4 heures

◇ Le candidat peut admettre le résultat d'une question et l'utiliser dans la suite à condition de l'écrire clairement sur sa copie.

◇ Si le candidat repère ce qu'il croit être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice 1

Soient E, F et G trois ensembles non vides.
Soient $f : E \to F$ et $g : E \to G$ deux applications.
Soit $h : E \to F \times G$ définie par l'expression $h(x) = (f(x), g(x))$, pour tout $x \in E$.

1. Montrer que si f ou g est injective alors h l'est aussi.
2. On suppose que f et g sont surjective. Qu'en est-il de la sujectivité de h ?

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel non nul. On définit $z = (1+i)^n$.

1. Déterminer le module de z.
2. Écrire z sous forme algébrique à l'aide d'une somme.
3. Montrer que

$$\left(1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \cdots\right)^2 + \left(\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \cdots\right)^2 = 2^n$$

Exercice 3

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\quad \arctan(n+2) - \arctan(n) = \arctan\left(\frac{2}{(1+n)^2}\right)$. En déduire la limite de

$$\sum_{n=0}^{N} \arctan\left(\frac{2}{1+2n+n^2}\right),$$

lorsque $N \to +\infty$.

Problème 1

Dans ce problème on s'intéresse à la résolution d'une équation différentielle issue de la compréhension du mouvement induit par une traction.

Partie I. Mise en équation du problème de traction

Soient $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, trois fonctions dérivables.

Soit pour tout $t \in \mathbb{R}$, M_t un point du plan dont les coordonnées cartésiennes sont $(x(t), y(t))$ et A_t le point de coordonnées cartésiennes $(p(t), 0)$.

1. Déterminer une expression explicite de la distance A_tM_t en fonction de x, y et p, pour $t \in \mathbb{R}$.
   Dans la suite, on définit la fonction
   $$d : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (A_tM_t)^2 \end{array} \right. .$$
2. Montrer que d est dérivable et calculer la dérivée de d.
3. Dans cette question on fixe $L \in \mathbb{R}^+$ un nombre réel. On fait l'hypothèse que d est la fonction constante égale à L sur $\mathbb{R}$. Physiquement cela permet d'ajouter l'hypothèse que le vecteur vitesse (x', y') est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{A_tM_t}$ ce qui se traduit par l'égalité
   $$x' \times y - y' \times (x - p) = 0$$
   Montrer que $Lx' = p'x^2 - 2pp'x + p^2p'$.

4. Dans cette question, on suppose qu'il existe quatre fonctions $a, b, c, d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\begin{cases} x' & = ax + by \\ y' & = cx + dy \end{cases}.$$

De plus on supposera que y ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Montrer que $z = \frac{x}{y}$ est une fonction dérivable et que

$$z' = (a - d)z - cz^2 + b.$$

Partie II. Étude générale de l'équation de Riccati

Dans cette partie, on s'intéresse à l'équation générale de Riccati

$$(E) : y' = ay + by^2 + c,$$

où $a, b, c : I \to \mathbb{R}$ sont trois fonctions continues sur l'intervalle $I = [0, T[$, avec $T \in \mathbb{R}$.

1. Pour tout $t \in I$, on définit $P_t : u \in \mathbb{R} \mapsto a(t)u + b(t)u^2 + c(t) \in \mathbb{R}$. On suppose que $b(0) > 0$ et que b ne s'annule pas sur I.
   (a) Montrer que $\forall t \in I, b(t) > 0$. *On pourra raisonner par l'absurde.*
   (b) Écrire sous forme canonique la fonction polynomiale P_t.
   (c) En introduisant la fonction $\Delta : t \mapsto a(t)^2 - 4b(t)c(t)$, montrer que si $\Delta < 0$ sur I alors toute solution de (E) est strictement croissante sur I.
   (d) Montrer que toute solution $y : I \to \mathbb{R}$ de (E) est une bijection de I sur un intervalle J qu'on déterminera.
2. Dans cette question, on suppose qu'il existe $y_p : I \to \mathbb{R}$ une solution de (E) sur un intervalle I. Soit $y : I \to \mathbb{R}$ une solution de (E) sur un intervalle I.
   (a) Soit $u = y - y_p$. Montrer que $-u' + (a + 2by_p)u = -bu^2$.
   (b) On suppose dans cette question que u ne s'annule pas sur I. Montrer que $\frac{1}{u}$ est solution de l'équation différentielle $f' + (a + 2by_p)f = -b$.

   Dans la suite, on note A une primtive de $(a + 2by_p)$ sur I.

   (c) Résoudre l'équation différentielle $f' + (a + 2by_p)f = 0$, pour $f : I \to \mathbb{R}_+^*$.
   (d) Montrer que

$$\forall t \in I, \quad \frac{1}{u(t)} = \frac{\exp(A(0))}{u(0)} \exp(-A(t)) - \int_0^t b(s) \exp(A(s) - A(t)) ds.$$

Partie III. Cas des coefficients constants

Soit $T > 0$ un nombre réel. Soit $I = [0, T[$. Dans cette partie, on s'intéresse à $y : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur l'intervalle I telle que

$$y' = ay + by^2 + c,$$

où a, b et c sont trois nombres réels tels que $\Delta = a^2 - 4bc < 0$.

1. Dans cette question, on s'intéresse au calcul d'une intégrale à l'aide de y.
   (a) Montrer que $b \neq 0$. Dans la suite, on supposera que $y(0) = \frac{-a}{2b}$.
   (b) Montrer qu'il existe α, β et γ trois nombres réels tels que

$$\forall u \in \mathbb{R}, au + bu^2 + c = \alpha \left[(\beta u + \gamma)^2 + 1 \right].$$

   On donnera une expression de α, β et γ en fonction de a, b, c et Δ.
   (c) Calculer

$$\int_{y(0)}^{y(t)} \frac{\mathrm{d}u}{au + bu^2 + c},$$

   en fonction de $y(t)$ pour tout nombre réel $t \in I$.
2. En effectuant un changement de variable, Montrer que

$$\forall t \in I, \quad \int_{y(0)}^{y(t)} \frac{\mathrm{d}u}{au + bu^2 + c} = t.$$

3. (a) Montrer que $T \leq \frac{\pi}{\sqrt{-\Delta}}$. *Dans la suite on suppose que cette inégalité est vraie.*
   (b) Donner une expression explicite de y sur I.
   (c) Dans le cas où $T = \frac{\pi}{\sqrt{-\Delta}}$, calculer $\lim\limits_{t \to T} y(t)$.

FIN.