Corrigé de la feuille d'exercices 27

1 Variables aléatoires

Exercice 1.
On a : $X(\Omega) = [\![0, N]\!]$.
Pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, on note B_k : « Obtenir Pile au k-ième tirage ».
Soit $k \in [\![1, N]\!]$, on a :

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(\overline{B_1} \cap ...\overline{B_{k-1}} \cap B_k) \\ &= P(\overline{B_1})...P(\overline{B_{k-1}})P(B_k) \quad \text{par indépendance des tirages} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \end{aligned}$$

De plus, $P(X = 0) = P(\overline{B_1} \cap ... \cap \overline{B_N}) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^N$

Exercice 2.
On a $X(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On a :

$$\{X = k\} = \overline{\{X = 1\}} \cap ...\overline{\{X = k-1\}} \cap \{X = k\}.$$

Par la formule des probabilités composées, on a :

$$\begin{aligned} P(\{X = k\}) &= P(\overline{\{X = 1\}} \cap ...\overline{\{X = k-1\}} \cap \{X = k\}) \\ &= P(\overline{\{X = 1\}})P_{\overline{\{X=1\}}}(\overline{\{X = 2\}})...P_{\overline{\{X=1\}}\cap...\cap\overline{\{X=k-1\}}}(\{X = k\}) \\ &= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times ... \times \frac{n-k+1}{n-k} \times \frac{1}{n-k+1} \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Ainsi, $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P(X = k) = \dfrac{1}{n}$. Ainsi, X suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

Exercice 3.

1. Soit $i \in [\![1, 3]\!]$. On a n répétitions d'épreuves de Bernoulli (ayant pour succès : choisir le film i) indépendantes ayant la probabilité $\dfrac{1}{3}$ de réussite. X_i compte le nombre de succès. Ainsi, X_i suit une loi binomiale de paramètres $n, \dfrac{1}{3}$.
2. Y prend ses valeurs dans $\{1, 2, 3\}$.
   De plus, $\{Y = 1\} = \{X_1 = n\} \cup \{X_2 = n\} \cup \{X_3 = n\}$.
   Or, les événements $\{X_1 = n\}, \{X_2 = n\}, \{X_3 = n\}$ sont deux à deux incompatibles.
   Ainsi :
   $$P(Y = 1) = P(X_1 = n) + P(X_2 = n) + P(X_3 = n) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$
   De plus,
   $$\{Y = 2\} = (\{X_1 = 0\} \cap \{X_2 \neq 0\} \cap \{X_3 \neq 0\}) \cup (\{X_1 \neq 0\} \cap \{X_2 = 0\} \cap \{X_3 \neq 0\}) \cup (\{X_1 \neq 0\} \cap \{X_2 \neq 0\} \cap \{X_3 = 0\})$$
   Or, les événements $(\{X_1 = 0\} \cap \{X_2 \neq 0\} \cap \{X_3 \neq 0\})$, $(\{X_1 \neq 0\} \cap \{X_2 = 0\} \cap \{X_3 \neq 0\})$, $(\{X_1 \neq 0\} \cap \{X_2 \neq 0\} \cap \{X_3 = 0\})$ sont deux à deux incompatibles.
   Ainsi :
   $$\begin{aligned} P(Y = 2) = {} & P(\{X_1 = 0\} \cap \{X_2 \neq 0\} \cap \{X_3 \neq 0\}) + P(\{X_1 \neq 0\} \cap \{X_2 = 0\} \cap \{X_3 \neq 0\}) \\ & + P(\{X_1 \neq 0\} \cap \{X_2 \neq 0\} \cap \{X_3 = 0\}) \end{aligned}$$
   De plus, chaque film joue un rôle similaire, ainsi,
   $$P(\{X_1 = 0\} \cap \{X_2 \neq 0\} \cap \{X_3 \neq 0\}) = P(\{X_1 \neq 0\} \cap \{X_2 = 0\} \cap \{X_3 \neq 0\}) = P(\{X_1 \neq 0\} \cap \{X_2 \neq 0\} \cap \{X_3 = 0\})$$

Donc :

$$P(Y=2) = 3P\left(\{X_1=0\}\cap\{X_2\neq 0\}\cap\{X_3\neq 0\}\right)$$

De plus :

$$\{X_1=0\}\cap\{X_2\neq 0\}\cap\{X_3\neq 0\} = \{X_1=0\}\cap\{X_2\neq n\}\cap\{X_3\neq n\} = \{X_1=0\}\setminus\left(\{X_2=n\}\cup\{X_3=n\}\right).$$

De plus, $(\{X_2=n\}\cup\{X_3=n\})\subset\{X_1=0\}$. Ainsi,

$$P(\{X_1=0\}\cap\{X_2\neq 0\}\cap\{X_3\neq 0\}) = P\left(\{X_1=0\}\setminus(\{X_2=n\}\cup\{X_3=n\})\right) = P(X_1=0)-P(\{X_2=n\}\cup\{X_3=n\})$$

Enfin, $\{X_2=n\},\{X_3=n\}$ sont incompatibles donc

$$\begin{aligned}
P(\{X_1=0\}\cap\{X_2\neq 0\}\cap\{X_3\neq 0\}) &= P(X_1=0)-P(X_2=n)-P(X_3=n)\\
&= \binom{n}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \binom{n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n - \binom{n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n\\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n
\end{aligned}$$

Finalement,

$$P(Y=2) = 3\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
P(Y=3) &= 1-P(Y=1)-P(Y=2)\\
&= 1-3\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)\\
&= 1+3\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3\left(\frac{2}{3}\right)^n
\end{aligned}$$

2 Couples de variables aléatoires - Indépendance

Exercice 4.
Méthode 1 :
Notons Z la variable aléatoire égale au nombre de candidats ayant réussi à l'issue des 2 épreuves.
Notons U la variable aléatoire égale au nombre de candidats ayant réussi à l'issue de la première épreuve.
U compte le nombre de succès (réussir à la première épreuve) lors de n répétitions d'épreuve de Bernoulli indépendantes ayant la probabilité p de réussir. Ainsi, U suit une loi binomiale de paramètres n, p.
Notons V la variable aléatoire égale au nombre de candidats ayant réussi à la 2ème épreuve (et donc raté la première).
Soit $k\in[\![0,n]\!]$. Supposons $\{U=k\}$ réalisé. On a alors $n-k$ candidats qui passent la deuxième épreuve. On a alors $n-k$ répétitions d'épreuve de Bernoulli indépendantes ayant la probabilité p de réussir. Ainsi que la loi de V sachant $\{U=k\}$ est une loi binomiale de paramètre $n-k,p$.
On a $Z=U+V$ et Z prend ses valeurs dans $[\![0,n]\!]$. De plus, $(U=i)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est un système complet d'événements.
D'après la formule de probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
P(Z=j) &= \sum_{k=0}^{n} P(\{U+V=j\}\cap\{|U=k\})\\
&= \sum_{k=0}^{n} P(\{V=j-k\}\cap\{|U=k\})\\
&= \sum_{k=0}^{j} P(\{V=j-k\}\cap\{|U=k\}) \text{ car } \{V=j-k\}=\mathit{Emptyset} \text{ si } j-k<0\\
&= \sum_{k=0}^{j} P(\{V=j-k\}|\{U=k\})P(U=k)\\
&= \sum_{k=0}^{j} \binom{n-k}{j-k}p^{j-k}(1-p)^{n-k-(j-k)}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\
&= \sum_{k=0}^{j} \binom{n-k}{j-k}\binom{n}{k}p^j(1-p)^{2n-j-k}
\end{aligned}$$

Or,
$$\binom{n-k}{j-k}\binom{n}{k} = \frac{(n-k)!}{(n-j)!(j-k)!} \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{j!}{k!(j-k)!} \times \frac{n!}{j!(n-j)!} = \binom{j}{k}\binom{n}{j}$$
Ainsi,
$$\begin{aligned}
P(Z=j) &= \binom{n}{j} p^j (1-p)^{2n-2j} \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (1-p)^{j-k} \\
&= \binom{n}{j} p^j (1-p)^{2n-2j} (1+1-p)^j \\
&= \binom{n}{j} p^j (1-p)^{2n-2j} (2-p)^j \\
&= \binom{n}{j} ((1-p)^2)^{n-j} (p(2-p))^j \\
&= \binom{n}{j} (1-p(2-p))^{n-j} (p(2-p))^j
\end{aligned}$$

Ainsi, on trouve que Z suit une loi binomiale de paramètre n, $p(2-p)$.
Méthode 2 :
Notons R_1 réussir à l'issue de la 1ère tentative et R_2 réussir à l'issue de la 2ème tentative (et donc rater la 1ère).
$(R_1, \overline{R_1})$ est un système complet d'événements.
Ainsi, d'après le formule des probabilités totales, on a :
$$\begin{aligned}
P(R_1 \cup R_2) &= P(R_1 \cup R_2 | R_1) P(R_1) + P(R_1 \cup R_2 | \overline{R_1}) P(\overline{R_1}) \\
&= 1 \times P(R_1) + P(R_2) P(\overline{R_1}) \\
&= p + p(1-p) \\
&= p(2-p)
\end{aligned}$$
Ainsi, Z compte le nombre de succès (réussir à l'issue d'une des deux tentatives) lors de lors de n répétitions d'épreuves de Bernoulli indépendantes ayant la probabilités $P(R_1 \cup R_2) = p(2-p)$ de réussir.
Ainsi, Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $n, 2-p$.

Exercice 5. L'univers Ω est l'ensemble des 32 cartes. Ainsi, $\text{Card}(\Omega) = 32$.

1.
   - $\{X=0\} \cap \{Y=0\}$: « tirer une carte qui n'est pas un roi ni une dame ».
     Ainsi, $\text{Card}(\{X=0\} \cap \{Y=0\}) = 32 - 4 - 4 = 24$. Donc : $P(\{X=0\} \cap \{Y=0\}) = \dfrac{24}{32} = \dfrac{3}{4}$.
   - De même, $\{X=1\} \cap \{Y=0\}$: « tirer un roi ».
     Ainsi, $\text{Card}(\{X=1\} \cap \{Y=0\}) = 4$. Donc, $P(\{X=1\} \cap \{Y=0\}) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$.
   - $\{X=0\} \cap \{Y=1\}$: « tirer une dame ».
     Ainsi, $\text{Card}(\{X=0\} \cap \{Y=1\}) = 4$. Donc $P(\{X=0\} \cap \{Y=1\}) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$.
   - $\{X=1\} \cap \{Y=1\}$: « tirer une carte qui est une dame et un roi ».
     Ainsi, $\text{Card}(\{X=1\} \cap \{Y=1\}) = 0$. Donc, $P(\{X=1\} \cap \{Y=1\}) = 0$.

   On a donc :

X \ Y	$y_1 = 0$	$y_2 = 1$
$x_1 = 0$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$
$x_2 = 1$	$\frac{1}{8}$	0

   - De même, $\{X=0\} \cap \{Z=0\}$: « tirer une carte qui n'est pas un roi ni un coeur ».
     Ainsi, $\text{Card}(\{X=0\} \cap \{Z=0\}) = 32 - 8 - 3 = 21$. Donc, $P(\{X=0\} \cap \{Z=0\}) = \dfrac{21}{32}$.
   - De même, $\{X=1\} \cap \{Z=0\}$: « tirer un roi qui n'est pas un coeur ».
     Ainsi, $\text{Card}(\{X=1\} \cap \{Z=0\}) = 3$. Donc, $P(\{X=1\} \cap \{Z=0\}) = \dfrac{3}{32}$.

- $\{X=0\}\cap\{Z=1\}$: « tirer un coeur qui n'est par un roi ».
  Ainsi, $\text{Card}\left(\{X=0\}\cap\{Z=1\}\right)=7$. Donc, $P(\{X=0\}\cap\{Z=1\})=\dfrac{7}{32}$.
- $\{X=1\}\cap\{Z=1\}$: « tirer le roi de coeur ».
  Ainsi, $\text{Card}\left(\{X=1\}\cap\{Z=1\}\right)=0$. Donc, $P(\{X=1\}\cap\{Z=1\})=1$.

On obtient :

$X \backslash Z$	$z_1=0$	$z_2=1$
$x_1=0$	$\frac{21}{32}$	$\frac{7}{32}$
$x_2=1$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

2. Commençons par déterminer les lois X, Y et Z.
On a :
$$P(X=0)=P\left(\{X=0\}\cap\{Y=0\}\right)+P\left(\{X=0\}\cap\{Y=1\}\right)=\frac{3}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}.$$
De même,
$$P(X=1)=P\left(\{X=1\}\cap\{Y=0\}\right)+P\left(\{X=1\}\cap\{Y=1\}\right)=\frac{1}{8}+0=\frac{1}{8}.$$
$$P(Y=0)=P\left(\{Y=0\}\cap\{X=0\}\right)+P\left(\{Y=0\}\cap\{X=1\}\right)=\frac{3}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}.$$
$$P(Y=1)=P\left(\{Y=1\}\cap\{X=0\}\right)+P\left(\{Y=1\}\cap\{X=1\}\right)=\frac{1}{8}+0=\frac{1}{8}.$$
De même,
$$P(Z=0)=P\left(\{Z=0\}\cap\{X=0\}\right)+P\left(\{Z=0\}\cap\{X=1\}\right)=\frac{21}{32}+\frac{3}{32}=\frac{21}{32}=\frac{3}{4}.$$
De même,
$$P(Z=1)=P\left(\{Z=1\}\cap\{X=0\}\right)+P\left(\{Z=1\}\cap\{X=1\}\right)=\frac{7}{32}+\frac{1}{32}=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}.$$
On vérifie alors que :
$$\forall x\in\{0,1\},\ \forall z\in\{0,1\},\ P(\{X=x)\cap\{Z=z\})=P(X=x)P(Z=z).$$
Ainsi, X et Z sont indépendantes.
En revanche, X et Y en sont pas indépendantes car par exemple, $P(\{X=1\}\cap\{Y=1\})\neq P(X=1)P(Y=1)$.

Exercice 6. 1. $P\left(\{X=-1\}\cap\{Y=-1\}\right)=P\left(\{U=-1\}\cap\{V=1\}\right)=P(U=-1)P(V=1)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{9}$ par indépendance entre U et V.
$P\left(\{X=-1\}\cap\{Y=1\}\right)=P\left(\{U=-1\}\cap\{V=-1\}\right)=P(U=-1)P(V=-1)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$ par indépendance entre U et V.
$P\left(\{X=1\}\cap\{Y=-1\}\right)=P\left(\{U=-1\}\cap\{V=1\}\right)=P(U=1)P(V=-1)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9}$ par indépendance entre U et V.
$P\left(\{X=1\}\cap\{Y=1\}\right)=P\left(\{U=-1\}\cap\{V=1\}\right)=P(U=1)P(V=1)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{9}$ par indépendance entre U et V.
Ainsi, on a :

$X \backslash Y$	$y_{-1}=-1$	$y_1=1$
$x_{-1}=-1$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
$x_1=1$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$

De plus :
$$P(X=1)=P(U=1)=\frac{2}{3}\quad\text{et}\quad P(X=-1)=1-P(X=1)=\frac{1}{3}.$$
$P(Y=1)=P(\{Y=1\}\cap\{X=-1\})+P(\{Y=1\}\cap\{X=-1\})=\dfrac{1}{9}+\dfrac{4}{9}=\dfrac{5}{9}$ et $P(Y=-1)=1-P(Y=1)=\dfrac{4}{9}$
On remarque alors que X et Y ne sont pas indépendantes car $P(\{X=-1\}\cap\{Y=-1\})\neq P(X=-1)P(Y=-1)$.

2. On a $P(X^2 = 1) = P(X = 1) + P(X = -1) = 1$, $P(Y^2 = 1) = P(Y = -1) + P(Y = 1) = 1$ et $P(\{X^2 = 1\} \cap \{Y^2 = 1\}) = 1$. Ainsi, X^2 et Y^2 sont indépendantes.

Exercice 7. 1. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note

$$\mathcal{P}(m) : \text{ « } \forall k \in [\![0, m+n]\!],\ \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}. \text{ »}$$

Montrons par récurrence que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(m)$ est vraie.

- Pour $m = 0$: Soit $k \in [\![0, n]\!]$, on a $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{0}{k-i} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} = \binom{n}{k}$.
  Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $m \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{P}(m)$ est vraie.
  Soit $k \in [\![0, m+1+n]\!]$.
  Par la formule de Pascal, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m+1}{k-i} &= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\left(\binom{m}{k-i} + \binom{m}{k-1-i}\right)\\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} + \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-1-i}\\ &= \binom{n+m}{k} + \binom{n+m}{k-1} = \binom{n+m+1}{k}\end{aligned}$$

  par hypothèse de récurrence.
  Ainsi, $\mathcal{P}(m+1)$ est vraie.
- On a donc prouvé que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(m)$ est vraie.

2. Soit $k \in [\![0, n+m]\!]$.
On a, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}P(X_1 + X_2 = k) &= \sum_{i=0}^{k} P(X_1 + X_2 = k | X_1 = i) P(X_1 = i)\\ &= \sum_{i=0}^{k} P(X_2 = k - i | X_1 = i) P(X_1 = i)\\ &= \sum_{i=0}^{k} P(X_2 = k - i) P(X_1 = i) \quad \text{par indépendance entre } X_1 \text{ et } X_2\\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{k-i} p^{k-i}(1-p)^{m-k+i} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}\\ &= p^k (1-p)^{n+m-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{k-i}\binom{n}{i}\\ &= \binom{n+m}{k} p^k (1-p)^{n+m-k}\end{aligned}$$

par la question précédente.
Ainsi $X_1 + X_2$ suit la loi $\mathcal{B}(n+m, p)$.

Exercice 8. Méthode 1 :
Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

$$\begin{aligned}
P(U \leq k) &= P(\{X \leq k\} \cap \{Y \leq k\}) \\
&= P(X \leq k)P(Y \leq k) \quad \text{par indépendance entre } X \text{ et } Y \\
&= \frac{k}{n} \times \frac{k}{n}
\end{aligned}$$

Cette formule est aussi valable pour $k = 0$.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

$$P(U = k) = P(U \leq k) - P(U \leq k-1) = \frac{k^2}{n^2} - \frac{(k-1)^2}{n^2} = \frac{2k-1}{n^2}$$

De même, soit $k \in [\![1, n]\!]$.

$$\begin{aligned}
P(U \geq k) &= P(\{X \geq k\} \cap \{Y \geq k\}) \\
&= P(X \geq k)P(Y \geq k) \quad \text{par indépendance entre } X \text{ et } Y \\
&= \frac{(n-k+1)}{n} \times \frac{(n-k+1)}{n}
\end{aligned}$$

Cette formule est aussi valable pour $k = n + 1$.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

$$P(V = k) = P(V \geq k) - P(V \geq k-1) = \frac{(n-k+1)^2}{n^2} - \frac{(n-k)^2}{n^2} = \frac{2(n-k)+1}{n^2}$$

Méthode 2 :
Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

$$\begin{aligned}
P(U = i) &= P(\max(X, Y) = i) \\
&= P((\{X = i\} \cap \{Y \leq i\}) \cup (\{X < i\} \cap \{Y = i\})) \\
&= P(\{X = i\} \cap \{Y \leq i\}) + P(\{X < i\} \cap \{Y = i\}) \\
&= P(X = i)P(Y \leq i) + P(X < i)P(Y = i) \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\
&= \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^{i-1} \frac{1}{n} \\
&= \frac{i}{n^2} + \frac{i-1}{n^2} \\
&= \frac{2i-1}{n^2}
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
P(V = i) &= P(\min(X, Y) = i) \\
&= P((\{X = i\} \cap \{Y \geq i\}) \cup (\{X > i\} \cap \{Y = i\})) \\
&= P(\{X = i\} \cap \{Y \geq i\}) + P(\{X > i\} \cap \{Y = i\}) \\
&= P(X = i)P(Y \geq i) + P(X > i)P(Y = i) \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\
&= \frac{1}{n} \times \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \times \sum_{k=i+1}^{n} \frac{1}{n} \\
&= \frac{n-i+1}{n^2} + \frac{n-i}{n^2} \\
&= \frac{2(n-i)+1}{n^2}
\end{aligned}$$

Exercice 9. On a $S(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
Soit $k \in [\![0, 2n]\!]$.
$(\{X = p\})_{p \in [\![0,n]\!]}$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
P(S = k) &= \sum_{p=0}^{n} P(\{S = k\} \cap \{X = p\}) \\
&= \sum_{p=0}^{n} P(\{X + Y = k\} \cap \{X = p\}) \\
&= \sum_{p=0}^{n} P(\{Y = k - p\} \cap \{X = p\}) \\
&= \sum_{p=0}^{n} P(X = p)P(Y = k - p) \quad \text{par indépendance entre } X \text{ et } Y
\end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} 0 \leq p \leq n \\ 0 \leq k - p \leq n \end{cases} &\iff \begin{cases} 0 \leq p \leq n \\ k - n \leq p \leq k \end{cases} \\
&\iff \max(0, k - n) \leq p \leq \min(k, n)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$P(S = k) = \sum_{p=\max(0,k-n)}^{\min(k,n)} P(Y = k - p)P(X = p)$$

- Si $k \in [\![0, n]\!]$.
$$P(S = k) = \sum_{p=0}^{k} P(X = p)P(Y = k - p) = \sum_{p=0}^{k} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{k+1}{(n+1)^2}$$
- Si $k \in [\![n + 1, n]\!]$.
$$P(S = k) = \sum_{p=k-n}^{n} P(X = p)P(Y = k - p) = \sum_{p=k-n}^{n} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{2n - k + 1}{(n+1)^2}$$

Exercice 10.
Soit $i \in [\![2, n]\!]$.
X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = P(X_i = 1)$.
Pour tout $k, p \in \mathbb{N}$, notons $E_{k,p}$ « le numéro k est sorti au tirage p »On a :

$$\{X_i = 1\} = \bigcup_{k=0}^{N} \overline{E_{k,1}} \cap ... \cap \overline{E_{k,i-1}} \cap E_{k,i}$$

Or, les événements $\overline{E_{k,1}} \cap ... \cap \overline{E_{k,i-1}} \cap E_{k,i}$ pour $k \in [\![0, N]\!]$ sont deux à deux incompatibles.
Ainsi,

$$\begin{aligned}
P(X_i = 1) &= \sum_{k=0}^{N} P(\overline{E_{k,1}} \cap ... \cap \overline{E_{k,i-1}} \cap E_{k,i}) \\
&= \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{N}{N+1}\right)^{i-1} \times \frac{1}{N+1} \quad \text{par indépendance entre les tirages.} \\
&= \left(\frac{N}{N+1}\right)^{i-1}
\end{aligned}$$

Soit $i, j \geq 2$ tels que $i \neq j$.
Quitte à échanger i et j, on peut supposer $i < j$, (ce que l'on fait dans la suite).

On a :

$$\begin{aligned}\{X_i=1\}\cap\{X_j=1\} &= \left(\bigcup_{k=0}^{N}\overline{E_{k,1}}\cap ...\cap\overline{E_{k,i-1}}\cap E_{k,i}\right)\cap\left(\bigcup_{p=0}^{N}\overline{E_{p,1}}\cap ...\cap\overline{E_{p,j-1}}\cap E_{p,j}\right)\\ &= \bigcup_{k=0}^{N}\bigcup_{p=0}^{N}\left(\left(\overline{E_{k,1}}\cap\overline{E_{p,1}}\right)\cap ...\cap\left(\overline{E_{k,i-1}}\cap\overline{E_{p,i-1}}\right)\cap\left(E_{k,i}\cap\overline{E_{p,i}}\right)\cap\overline{E_{p,i+1}}\cap ...\cap\overline{E_{p,j-1}}\cap E_{p,j}\right)\end{aligned}$$

Or, si $p=k$, on a $E_{k,i}\cap\overline{E_{p,i}}=Emptyset$.
Et si $p\neq k$, on a $E_{k,i}\cap\overline{E_{p,i}}=E_{k,i}$ Ainsi,

$$\{X_i=1\}\cap\{X_j=1\}=\bigcup_{k=0}^{N}\bigcup_{p\in[\![0,N]\!]\setminus\{k\}}\left(\left(\overline{E_{k,1}}\cap\overline{E_{p,1}}\right)\cap ...\cap\left(\overline{E_{k,i-1}}\cap\overline{E_{p,i-1}}\right)\cap E_{k,i}\cap\overline{E_{p,i+1}}\cap ...\cap\overline{E_{p,j-1}}\cap E_{p,j}\right)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}P(\{X_i=1\}\cap\{X_j=1\}) &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{p\in[\![0,N]\!]\setminus\{k\}}P\left(\overline{E_{k,1}}\cap\overline{E_{p,1}}\right)...P\left(\overline{E_{k,i-1}}\cap\overline{E_{p,i-1}}\right)\times P(E_{k,i})P(\overline{E_{p,i+1}})...P(\overline{E_{p,j-1}})P(E_{p,j})\\ &\qquad\text{Les différents tirages étant indépendants}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{p\in[\![0,N]\!]\setminus\{k\}}\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^{i-1}\times\frac{1}{N+1}\times\left(\frac{N}{N+1}\right)^{j-1-(i+1)+1}\frac{1}{N+1}\\ &= \left(\frac{N-1}{N+1}\right)^{i-1}\times\frac{1}{N+1}\times\left(\frac{N}{N+1}\right)^{j-1-(i+1)+1}\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{p\in[\![0,N]\!]\setminus\{k\}}1\\ &= N(N+1)\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^{i-1}\times\frac{1}{N+1}\times\left(\frac{N}{N+1}\right)^{j-i-1}\frac{1}{N+1}\\ &= \frac{(N-1)^{i-1}N^{j-i}}{(N+1)^{j-1}}\end{aligned}$$

Alors que

$$P(X_i=1)P(X_j=1)=\left(\frac{N}{N+1}\right)^{i-1}\left(\frac{N}{N+1}\right)^{j-1}$$

Ainsi, $P(X_i=1)P(X_j=1)\neq P(\{X_i=1\}\cap\{X_j=1\})$. Donc, X_i et X_j ne sont pas indépendantes.

Exercice 11.

1. Soit $i\in[\![1,n]\!]$.
   On a N répétitions d'épreuves de Bernoulli (avec pour succès « choisir le fournisseur i ») indépendantes ayant la probabilité $\frac{1}{n}$ de réussir. X_i compte ensuite le nombre succès. Ainsi, $X_i\hookrightarrow\mathcal{B}(N,\frac{1}{n})$.
2. Les variables ne sont pas indépendantes. En effet, $P(\{X_1=0\}\cap ...\cap\{X_n=0\})=0$ car chaque personnes choisit un fournisseur donc $X_1+...+X_n=N$.
   De plus, $P(X_1=0)...P(X_n=0)=\left(1-\frac{1}{n}\right)^N\neq 0$.

3 Espérance - Variance

Exercice 12.

1. Soit $k\in\mathbb{N}$, on a besoin de connaître le nombre de boules dans l'urne A pour calculer les probabilités de $P(X_{k+1}-X_k=1)$ et $P(X_{k+1}-X_k=-1)$.
   On a $X_k(\Omega)=[\![0,b]\!]$.
   Ainsi, par la formule des probabilités totales, on a :

$$P(X_{k+1}-X_k=1)=\sum_{j=0}^{b}P(X_{k+1}-X_k=1|X_k=j)P(X_k=j)=\sum_{j=0}^{b}\frac{b-j}{b}P(X_k=j)$$

et

$$P(X_{k+1}-X_k=-1)=\sum_{j=0}^{b}P(X_{k+1}-X_k=1|X_k=j)P(X_k=j)=\sum_{j=0}^{b}\frac{j}{b}P(X_k=j).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
E(X_{k+1}-X_k) &= P(X_{k+1}-X_k=1)-P(X_{k+1}-X_k=-1)\\
&= \sum_{j=0}^{b}\frac{b-j}{b}P(X_k=j)-\sum_{j=0}^{b}\frac{j}{b}P(X_k=j)\\
&= \sum_{j=0}^{b}\frac{b-2j}{b}P(X_k=j)\\
&= \sum_{j=0}^{b}P(X_k=j)-\frac{2}{b}\sum_{j=0}^{b}jP(X_k=j)=1-\frac{2}{b}E(X_k).
\end{aligned}$$

2. Par linéarité de l'espérance, on a $E(X_{k+1})-E(X_k)=1-\frac{2}{b}E(X_k)$ donc $E(X_{k+1})=\left(1-\frac{2}{b}\right)E(X_k)+1$.
3. La suite $(E(X_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.
   Soit $\alpha\in\mathbb{R}$.

$$\alpha=\left(1-\frac{2}{b}\right)\alpha+1 \quad\Longleftrightarrow\quad \alpha=\frac{b}{2}$$

Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on pose $v_k=E(X_k)-\alpha$.
Soit $k\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
v_{k+1} &= E(X_{k+1})-\alpha\\
&= \left(1-\frac{2}{b}\right)E(X_k)+1-\left(\left(1-\frac{2}{b}\right)\alpha+1\right)\\
&= \left(1-\frac{2}{b}\right)(E(X_k)-\alpha)\\
&= \left(1-\frac{2}{b}\right)v_k
\end{aligned}$$

Ainsi, $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\left(1-\frac{2}{b}\right)$.
De plus, $v_0=E(X_0)-\frac{b}{2}$.
Notons c le nombre de boule dans l'urne A initialement. On a alors $E(X_0)=c$. Ainsi, $v_0=c-\frac{b}{2}$.
Donc on a :

$$\forall k\in\mathbb{N},\ v_k=v_0\left(1-\frac{2}{b}\right)^k=\left(c-\frac{b}{2}\right)\left(1-\frac{2}{b}\right)^k.$$

D'où :

$$\forall k\in\mathbb{N},\ E(X_k)=\frac{b}{2}+\left(c-\frac{b}{2}\right)\left(1-\frac{2}{b}\right)^k$$

Or, $b\geq 2$ donc $\frac{2}{b}\in]0,1]$. Ainsi, $1-\frac{2}{b}\in[0,1[$.
Donc $\lim\limits_{k\to+\infty}E(X_k)=\frac{b}{2}$.

Exercice 13. 1. Montrons ce résultat par récurrence.

- Pour $n=0$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0$ et $\dfrac{0(0+1)(0+1)}{6} = 0$.
  Ainsi, le résultat est vraie pour $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2\\ &= \frac{n+1}{6}\left(n(2n+1)+6(n+1)\right)\\ &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}\end{aligned}$$

  Or, $(n+2)(2(n+1)+1) = (n+2)(2n+3) = 2n^2+7n+6$.
  Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$ ce qui prouve le résultat au rang $n+1$.
- Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. En reprenant l'exercice 8, on a : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P(U = k) = \dfrac{2k-1}{n^2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}E(U) &= \sum_{k=1}^{n} kP(U=k)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k(2k-1)}{n^2}\\ &= \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\\ &= \frac{2}{n^2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) - \frac{1}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2}\\ &= \frac{n+1}{n}\left(\frac{2n+1}{3}-\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{n+1}{n}\times\frac{4n+2-3}{6}\\ &= \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}\end{aligned}$$

Pour $E(V)$:
Méthode 1 : On peut procéder de même.
Méthode 2 : On a $X + Y = U + V$. Ainsi, $V = X + Y - U$. Donc par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(V) = E(X) + E(Y) - E(U) = \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} - \frac{(n+1)(4n-1)}{6n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$$

Exercice 14. 1. Au cours des k premières lectures, le nombre de pistes lues est majorée par n mais aussi par k. Ainsi, les valeurs exactes prises par X_k sont donc entre 1 et $\min(n, k)$.

2. L'événement $X_k = 1$ correspond à la situation où la même piste a été lue les k fois.
On a donc :

$$P(X_k = 1) = \frac{1}{n^k},$$

par indépendance des différentes pistes lues (mode aléatoire).
L'événement $X_k = k$ est impossible si $k > n$ d'après la question 1. Si $k \le n$, il correspond à la lecture de pistes deux à deux distinctes. On a donc :

$$P(X_k = k) = \frac{n(n-1)...(n-(k-1))}{n^k} = \frac{n!}{(n-k)!n^k}.$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit $i \in [\![1, \min(n, k+1)]\!]$.
On sait que $(X_k = l)_{l \in [\![1,_min(n,k)]\!]}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(X_{k+1} = i) = \sum_{l=0}^{\min(n,k)} P(X_{k+1} = i | X_k = l) P(X_k = l)$$

Or, $P(X_{k+1} = i | X_k = l) = 0$ si $l < i - 1$ ou $l > i$.
Donc :

$$P(X_{k+1} = i) = P(X_{k+1} = i | X_k = i-1) P(X_k = i-1) + P(X_{k+1} = i | X_k = i) P(X_k = i).$$

De plus, l'événement $\{X_{k+1} = i | X_k = i\}$ signifie que la $(k+1)$-ème piste lue est l'une des i pistes lues dans les k premières lectures. On a donc $P(X_{k+1} = i | X_k = i) = \dfrac{i}{n}$.
L'événement $\{X_{k+1} = i | X_k = i-1\}$ signifie que la $(k+1)$-ème piste lue est l'une des $n - i + 1$ pistes non lues dans les k premières lectures. On a donc $P(X_{k+1} = i | X_k = i-1) = \dfrac{n-i+1}{n}$.
On obtient alors :

$$P(X_{k+1} = i) = \frac{i}{n} P(X_k = i) + \frac{n-i+1}{n} P(X_k = i-1).$$

4. On a, avec la question précédente et la question 2,

$$\begin{aligned}
E(X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{\min(n,k+1)} i P(X_{k+1} = i) &= \sum_{i=1}^{\min(n,k+1)} i \left(\frac{i}{n} P(X_k = i) + \frac{n-i+1}{n} P(X_k = i-1) \right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\min(n,k+1)} i^2 P(X_k = i) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\min(n,k+1)} i(n-i+1) P(X_k = i-1) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\min(n,k+1)} i^2 P(X_k = i) + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{\min(n,k+1)-1} (i+1)(n-i) P(X_k = i)
\end{aligned}$$

- Si $k + 1 \leq n$, on $\min(n, k+1) = k+1$ et $\min(n, k+1) - 1 = k = \min(k, n)$.
  Ainsi :

  $$E(X_{k+1}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k+1} i^2 P(X_k = i) + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{\min(n,k)} (i+1)(n-i) P(X_k = i)$$

  Or, $P(X_k = k+1) = 0$ et $P(X_k = 0 = 0$.
  Ainsi,

  $$\begin{aligned}
  E(X_{k+1}) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} i^2 P(X_k = i) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\min(n,k)} (i+1)(n-i) P(X_k = i) \\
  &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\min(n,k)} i^2 P(X_k = i) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\min(n,k)} (i+1)(n-i) P(X_k = i)
  \end{aligned}$$

- Si $n < k + 1$, on a $n \leq k$. Ainsi, $\min(n, k+1) = n = \min(n, k)$ et $\min(n, k+1) - 1 = n - 1$.
  Donc :

  $$E(X_{k+1}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\min(n,k)} i^2 P(X_k = i) + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)(n-i) P(X_k = i)$$

  Or, pour $i = n$, $n - i = 0$ et $P(X_k = 0) = 0$.
  Ainsi :

  $$\begin{aligned}
  E(X_{k+1}) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\min(n,k)} i^2 P(X_k = i) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (i+1)(n-i) P(X_k = i) \\
  &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\min(n,k)} i^2 P(X_k = i) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\min(n,k)} (i+1)(n-i) P(X_k = i)
  \end{aligned}$$

Ainsi, dans tous les cas, on a :

$$\begin{aligned}
E(X_{k+1}) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\min(n,k)} i^2P(X_k=i) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\min(n,k)} (i+1)(n-i)P(X_k=i) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\min(n,k)} (i^2+ni+n-i^2-i)P(X_k=i) \\
&= \frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{\min(n,k)} iP(X_k=i) + \sum_{i=1}^{\min(n,k)} P(X_k=i) \\
&= \frac{n-1}{n}E(X_k)+1.
\end{aligned}$$

La suite $(E(X_k))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est donc arithmético-géométrique.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\alpha = \frac{n-1}{n}\alpha + 1 \quad \iff \quad \alpha = n$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $v_k = E(X_k) - \alpha$.
Soit $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
v_{k+1} &= E(X_{k+1}) - \alpha \\
&= \frac{n-1}{n}E(X_k)+1-\left(\frac{n-1}{n}\alpha+1\right) \\
&= \frac{n-1}{n}(E(X_k)-\alpha) \\
&= \frac{n-1}{n}v_k
\end{aligned}$$

Ainsi, $(v_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $\frac{n-1}{n}$.
De plus, $v_1 = E(X_1) - n = 1-n$. En effet, on a $P(X_1=1)=1$. Donc $E(X_1)=1$.
Donc on a :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ v_k = v_1\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} = (1-n)\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}.$$

D'où :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ E(X_k) = n + (1-n)\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}$$

5. Comme $\frac{n-1}{n} \in]0,1[$, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} E(X_k) = n$.
   Ce résultat était prévisible : en un temps infini, on finira par écouter toutes les pistes du le lecteur mp3.
6. On a cette fois-ci :

$$\begin{aligned}
E(X_k) &\underset{n\to+\infty}{=} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}(1-n)+n = \left(1-\frac{k-1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)(1-n)+n \\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1-n-\frac{k-1}{n}+k-1+n+o(1) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} k+o(1)
\end{aligned}$$

   Ainsi $E(X_k) \underset{n\to+\infty}{\sim} k$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_k) = k$.
   Là encore, ce résultat était prévisible : si le nombre de pistes du lecteur mp3 est infini, il n'y a aucune chance d'avoir des répétitions de piste, on en écoutera donc k pistes différentes.

Exercice 15. 1. Numérotons les boules 1 et 2 et notons pour $k \in \{1,2\}$, on note U_k : ≪ mettre la k-ième boule dans l'urne U. ≫
On a alors :

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= P(U_1 \cap U_2) \\
&= P(U_1)P(U_2) \quad \text{par indépendance} \\
&= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P((U_1 \cap \overline{U_2}) \cup (\overline{U_1} \cap U_2)) \\ &= P(U_1 \cap \overline{U_2}) + P(\overline{U_1} \cap U_2) \quad \text{par incompatibilité} \\ &= P(U_1)P(\overline{U_2}) + P(\overline{U_1})P(U_2) \quad \text{par indépendance} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Enfin, $P(X=2) = 1 - P(X=0 - P(X=1) = \frac{1}{4}$.
On a : $Y = 1 = (X=0) \cup (X=2)$ et les événements $X=0$ et $X=2$ sont deux à deux incompatibles.
Ainsi : $P(Y=1) = P(X=0) + P(X=2) = \frac{1}{2}$.
On a alors : $(Y=0) = \overline{(Y=1)}$. Donc $P(Y=1) = 1 - P(Y=0) = \frac{1}{2}$.

2. On a : $P(\{X=1\} \cap \{Y=1\}) = 0$ car $\{X=1\} \cap \{Y=1\} = Emptyset$.
En revanche, $P(X=1)P(Y=1) = \frac{1}{4}$.
Ainsi, $P(X=1)P(Y=1) \neq P(\{X=1\} \cap \{Y=1\})$ donc X et Y ne sont pas indépendantes.
3. On a :

$$E(X) = 0 \times P(X=0) + 1 \times P(X=1) + 2 \times P(X=2) = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1$$

$$E(Y) = 0 \times P(Y=0) + 1 \times P(Y=1) = \frac{1}{2}.$$

Posons $Z = XY$. On a $Z(\Omega) = \{0,1,2\}$.
De plus, $(Z=2) = (X=2) \cap (Y=1) = (X=2)$.
Ainsi, $P(Z=2) = P(X=2) = \frac{1}{4}$.
De même, $(Z=1) = (X=1) \cap (Y=1) = Emptyset$.
Donc $P(Z=1) = 0$.
Enfin, $P(Z=0) = 1 - P(Z=1) - P(Z=2) = \frac{3}{4}$.
Ainsi,

$$E(Z) = 0 \times P(Z=0) + 1 \times P(Z=1) + 2 \times P(Z=2) = \frac{1}{2}$$

Ainsi, on a $E(Z) = E(X)E(Y)$.

Exercice 16.

1. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = P(X_i = 1)$ car X_i est à valeurs dans $\{0,1\}$. Ω est ici l'ensemble des parties à 2 éléments de l'ensemble des chaussures. Ω est muni de la probabilité uniforme. On a $\mathrm{Card}\,(\Omega) = \binom{2n}{2r}$.
Pour choisir la paire i, il faut :
   - choisir les 2 chaussures de la paire i : $\binom{2}{2}$ choix.
   - choisir $r-2$ chaussures parmi les $n-2$ restantes : $\binom{n-2}{r-2}$

   Ainsi, $\mathrm{Card}\,(\{X_i = 1\}) = \binom{2}{2}\binom{2n-2}{2r-2}$ donc

$$p = P(X_i = 1) = \frac{\binom{2}{2}\binom{2n-2}{2r-2}}{\binom{2n}{2r}} = \frac{(2n-2)!(2r)!(2n-2r)!}{(2r-2)!(2n-2r)!(2n)!} = \frac{2r(2r-1)}{2n(2n-1)} = \frac{r(2r-1)}{n(2n-1)}$$

   On sait alors qu'une variable de Bernoulli de paramètre $\frac{r(2r-1)}{n(2n-1)}$ a pour espérance $E(X_i) = \frac{r(2r-1)}{n(2n-1)}$.
2. On a $X = X_1 + ... + X_n$. Ainsi, $E(X) = E(X_1) + ... + E(X_n) = \frac{r(2r-1)}{2n-1}$ par linéarité de l'espérance.

Exercice 17. 1. Y_1 peut prendre la valeur 1 ou 0 et on a :

$$P(Y_1) = 1 = \frac{r}{N} \quad \text{et} \quad P(Y_1 = 0) = \frac{b}{N}.$$

Y_1 suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{r}{r+b}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Y_{n+1} suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(Y_n = 1)$.
Ainsi, on a $E(Y_{n+1}) = P(Y_{n+1} = 1)$.
Or, $(X_n = k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par la formule des probabilités totales, on a :

$$E(Y_{n+1}) = P(Y_{n+1} = 1) = \sum_{k=1}^{n} P(Y_{n+1} = 1|X_n = k)P(X_n = k)$$

De plus, sachant $X_n = k$, il y a avant le $n+1$-ième tirages $r + kc$ boules rouges dans l'urne et $N + nc$ boules au total. Ainsi, $P(Y_{n+1} = 1|X_n = k) = \frac{r + kc}{N + nc}$.
On a alors :

$$\begin{aligned} E(Y_{n+1}) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{r+kc}{N+nc} P(X_n = k) \\ &= \frac{r}{N+nc} \sum_{k=1}^{n} P(X_n = k) + \frac{c}{N+nc} \sum_{k=1}^{n} kP(X_n = k) \\ &= \frac{r + cE(X_n)}{N+nc}. \end{aligned}$$

3. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $\mathcal{P}(n)$: « Y_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{r}{N}$. » Montrons par récurrence totale que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
   - $\mathcal{P}(1)$ est vraie avec la question 1.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que : pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie.
   On sait déjà que Y_{n+1} suit une loi de Bernoulli (car à valeurs dans $\{0, 1\}$) de paramètre $P(Y_{n+1} = 1) = E(Y_{n+1})$.
   Par linéarité de l'espérance, on a $E(X_n) = E(Y_1) + \cdots + E(Y_n) = n\frac{r}{N}$ par hypothèse de récurrence.
   Ainsi, avec la question précédente, on a :
   $$E(Y_{n+1}) = \frac{r + cE(X_n)}{N + nc} = \frac{r + cn\frac{r}{N}}{N + nc} = \frac{rN + rcn}{N(N + nc)} = \frac{r}{N}$$
   donc on a $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.
   - En conclusion, on a prouvé que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

4. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.
Ainsi,par linéarité de l'espérance, on a :

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \sum_{k=1}^{n} E(Y_k) \\ &= \frac{nr}{N} \end{aligned}$$

Exercice 18.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
Considérons S_k la variable aléatoire égale à 1 si le k-ième saut est vers la droite et égale à 0 sinon.
Le nombre de saut vers la droite sur les n premiers sauts vaut $D_n = \sum_{k=1}^{n} S_k$.
Le nombre de saut vers la gauche effectué sur les n premiers sauts vaut donc $n - D_n$.
La position de la puce à l'instant n (i.e après n sauts) est : $X_n = D_n - (n - D_n) = 2D_n - n$.

Or, X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre p donc D_n suit une loi binomiale de paramètre n, p car les différents sauts sont indépendants.
Ainsi, $D_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et $X_n(\Omega) = \{2k - n, k \in [\![0, n]\!]\}$.
De plus :

$$\forall j \in [\![0, n]\!],\ P(X_n = 2j - n) = P(2D_n - n = 2j - n) = P(D_n = j) = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$$

On a alors : $E(X_n) = E(2D_n - n) = 2E(D_n) - n$ par linéarité de l'espérance.
De plus, $E(D_n) = np$ donc $E(X_n) = 2np - n = n(2p - 1)$.

Exercice 19. 1. Montrons ces résultats par récurrence.

- Pour $n = 0$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0$, $\dfrac{0(0+1)(0+1)}{6} = 0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0$ et $\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2 = 0$.
  Ainsi, le résultat est vraie pour $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n+1}{6}\left(n(2n+1) + 6(n+1)\right) \\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}
\end{aligned}$$

  Or, $(n+2)(2(n+1)+1) = (n+2)(2n+3) = 2n^2 + 7n + 6$.
  Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$.
  De plus,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \\
&= \frac{(n+1)^2}{2^2}\left(n^2 + 4(n+1)\right) \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{2^2} \\
&= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

  ce qui prouve le résultat au rang $n + 1$.

- Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

2. Considérons A_1 (resp. A_2) la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au 1er (resp. 2ème) tirage.
   Soit $k \in [\![2, n]\!]$.

$$\begin{aligned}
P(Y \leq k) &= P(\{A_1 \leq k\} \cap \{A_2 \leq k\}) \\
&= P(A_1 \leq k) P(A_2 \leq k | A_1 \leq k) \\
&= \frac{k}{n} \times \frac{k-1}{n-1}
\end{aligned}$$

$P(Y=2)=P(Y\leq 2)$ car $P(Y<2)=0$. Ainsi, $P(Y=2)=\dfrac{2}{n(n-1)}$.

Soit $k\in [\![3,n]\!]$,

$$\begin{aligned}P(Y=k)&=P(Y\leq k)-P(Y\leq k-1)\\&=\frac{k(k-1)}{n(n-1)}-\frac{(k-1)(k-2)}{n(n-1)}=\frac{2(k-1)}{n(n-1)}\end{aligned}$$

Cette formule reste donc valable pour $k=2$.

Ainsi : $\forall k\in [\![2,n]\!]$, $P(Y=k)=\dfrac{2(k-1)}{n(n-1)}$.

3.

$$\begin{aligned}E(Y)&=\sum_{i=2}^{n} iP(X=i)\\&=\sum_{i=2}^{n}\frac{2i(i-1)}{n(n-1)}\\&=\frac{2}{n(n-1)}\left(\sum_{i=2}^{n} i^2-\sum_{i=2}^{n} i\right)\\&=\frac{2}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n} i^2-\sum_{i=1}^{n} i\right)\\&=\frac{2}{n(n-1)}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}\right)\\&=\frac{n+1}{n-1}\left(\frac{2n+1}{3}-1\right)\\&=\frac{2(n-1)(n+1)}{3(n-1)}\\&=\frac{2(n+1)}{3}\end{aligned}$$

On a $V(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2$.

Calculons $E(Y^2)$:

$$\begin{aligned}E(Y^2)&=\sum_{i=2}^{n} i^2P(Y=i)\qquad\text{par le théorème de transfert}\\&=\sum_{i=2}^{n} i^2\times\frac{2(i-1)}{n(n-1)}\\&=\frac{2}{n(n-1)}\left(\sum_{i=2}^{n} i^3-\sum_{i=2}^{n} i^2\right)\\&=\frac{2}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n} i^3-\sum_{i=1}^{n} i^2\right)\\&=\frac{2}{n(n-1)}\left(\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\\&=\frac{(n+1)}{(n-1)}\times\left(\frac{n(n+1)}{2}-\frac{2n+1}{3}\right)\\&=\frac{(n+1)}{(n-1)}\times\frac{3n(n+1)-2(2n+1)}{6}\\&=\frac{(n+1)}{(n-1)}\times\frac{3n^2-n-2}{6}\\&=\frac{(n+1)(n-1)(3n+2)}{6(n-1)}\\&=\frac{(n+1)(3n+2)}{6}\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$\mathbb{V}(Y) = \frac{(n+1)(3n+2)}{6} - \frac{2^2(n+1)^2}{3^2} = \frac{(n+1)}{18} \times (3(3n+2) - 8(n+1)) = \frac{(n+1)(n-2)}{18}$$

4. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

$$\begin{aligned} P(X \geq k) &= P(\{A_1 \geq k\} \cap \{A_2 \geq k\}) \\ &= P(A_1 \geq k) P(A_2 \geq k | A_1 \geq k) \\ &= \frac{n-k+1}{n} \times \frac{n-k}{n-1} \end{aligned}$$

$P(X = n-1) = P(X \geq n-1)$ car $P(X > n-1) = 0$. Ainsi, $P(X = n-1) = \dfrac{2}{n(n-1)}$.
Soit $k \in [\![1, n-2]\!]$,

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(X \geq k) - P(X \geq k+1) \\ &= \frac{n-k+1}{n} \times \frac{n-k}{n-1} - \frac{n-k}{n} \times \frac{n-k-1}{n-1} \\ &= \frac{2(n-k)}{n(n-1)} \end{aligned}$$

Cette formule reste valable pour $k = n-1$.
Ainsi : $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $P(X = k) = \dfrac{2(n-k)}{n(n-1)}$.

5. On pose $Z = n+1-X$. On a $Z(\Omega) = Y(\Omega) = [\![2, n]\!]$.
Soit $k \in [\![2, n]\!]$,

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= P(n+1-X = k) = P(X = n-k+1) \\ &= \frac{2(n-(n-k+1)}{n(n-1)} \\ &= \frac{2(k-1)}{n(n-1)} \\ &= P(Y = k) \end{aligned}$$

Ainsi, $n+1-X$ et Y suivent la même loi. Ils ont donc même espérance et même variance.
De plus, on a : $\mathbb{V}(n+1-X) = (-1)^2 \mathbb{V}(X)$.
Ainsi, $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y)$.
$E(Y) = E(Z) = E(n+1-X) = n+1-E(X)$. Ainsi, $E(X) = n+1-E(Y) = n+1-\dfrac{2}{3}(n+1) = \dfrac{1}{3}(n+1)$.

Exercice 20. 1. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note F_i l'événement : « Obtenir face au i-ème lancer. »

- $X_2(\Omega) = \{0, 1\}$.
  On a :

$$P(X_2 = 0) = P(F_2 \cap F_1) \cup (\overline{F_1} \cap \overline{F_2})) = P(F_2 \cap F_1) + P(\overline{F_2} \cap \overline{F_1}) = P(F_1)P(F_2) + P(\overline{F_1})P(\overline{F_2}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

  car les événements $F_1 \cap F_2$, $\overline{F_1} \cap F\overline{F_2}$ sont incompatibles et les deux tirages sont indépendants.
  On a de même :

$$P(X_2 = 1) = P((F_1 \cap \overline{F_2}) \cup (\overline{F_1} \cap F_2)) = P(F_1 \cap \overline{F_2}) + P(\overline{F_1} \cap F_2) = P(F_1)P(\overline{F_2}) + P(\overline{F_1})P(F_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

  X_2 suit donc la loi uniforme sur $\{0, 1\}$.
  On a :

$$E(X_2) = 0 \times P(X_2 = 0) + 1 \times P(X_2 = 1) = \frac{1}{2}.$$

$$V(X_2) = E(X_2^2) - E(X_2)^2 = 0^2 P(X_2 = 0) + 1^2 P(X_2 = 1) - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

- On a $X_3(\Omega) = \{0,1,2\}$.
On a :

$$\begin{aligned}
P(X_3 = 2) &= P((\overline{F_1} \cap F_2 \cap \overline{F_3}) \cup (F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3)) \\
&= P(\overline{F_1} \cap F_2 \cap \overline{F_3}) + P(F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3) \\
&= P(\overline{F_1})P(F_2)P(\overline{F_3})) + P(F_1)P(\overline{F_2})P(F_3) \\
&= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
P(X_3 = 0) &= P((F_1 \cap F_2 \cap F_3) \cup (\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3})) \\
&= P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) + P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3}) \\
&= P(F_1)P(F_2)P(F_3) + P(\overline{F_1})P(\overline{F_2})P(\overline{F_3}) \\
&= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Enfin, $P(X_3 = 1) = 1 - P(X_3 = 0) - P(X_3 = 2) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.
Par suite,

$$E(X_3) = 0 \times P(X_3 = 0) + 1 \times P(X_3 = 1) + 2 \times P(X_3 = 2) = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1.$$

Et :

$$V(X_3) = E(X_3^2) - E(X_3)^2 = 0^1 P(X_3 = 0) + 1^2 P(X_3 = 1) + 2^2 P(X_3 = 2) - 1 = \frac{1}{2} + \frac{4}{4} - 1 = \frac{1}{2}.$$

2. Soit $n \geq 2$, X_n représente le gain à la suite de $n-1$ parties. Ce gain est donc entre 0 et $n-1$. Ainsi, $X_n(\Omega) = [\![0, n-1]\!]$.
On a :

$$\begin{aligned}
P(X_n = 0) &= P((F_1 \cap \dots \cap F_n) \cup (\overline{F_1} \cap \dots \overline{F_n})) \\
&= P(F_1 \cap \dots \cap F_n) + P(\overline{F_1} \cap \dots \cap \overline{F_n}) \quad \text{par incompatibilité} \\
&= P(F_1) \dots P(F_n) + P(\overline{F_1}) \dots P(\overline{F_n}) \quad \text{par indépendance des différents tirages} \\
&= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} \\
&= \frac{1}{2^{n-1}}.
\end{aligned}$$

De même, $X_n = n-1$ est réalisé si et seulement si on a $n-1$ changements. 2 cas de figure possible alors : commencer par pile ou commencer par Face. On obtient alors :

$$P(X_n = n-1) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

3. $(X_n = l)_{l \in [\![0, n-1]\!]}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par la formule des probabilités totales, on a :

$$P(X_{n+1} = k) = \sum_{l=0}^{n-1} P(X_{n+1} = k | X_n = l) P(X_n = l)$$

On a $P(X_{n+1} = k | X_n = k) = \frac{1}{2}$ (puisqu'il faut faire au $(n+1)$-ième jet le même résultat que le jet précédent).
$P(X_{n+1} = k | X_n = k-1) = \frac{1}{2}$ (puisqu'il faut faire au $(n+1)$-ième jet le résultat opposé au jet précédent).
Si $l \in [\![1, n-1]\!] \backslash \{k, k-1\}$, $P(X_{n+1} = k | X_n = l) = 0$.
Ainsi, l'égalité devient :

$$P(X_{n+1} = k) = P(X_{n+1} = k | X_n = k-1) P(X_n = k-1) + P(X_{n+1} = k | X_n = k) P(X_n = k).$$

4. (a) On a $Q_n(1) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} P(X_n = k) = 1$ (puisque $(\{X_n = k\})_{\{} k \in [\![0, n-1]\!]\}$ forme un système complet d'événements).

On a : $\forall s \in \mathbb{R}$, $Q_n'(s) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kP(X_n = k)s^{k-1}$, donc :

$$Q_n'(1) = \sum_{k=1}^{n-1} kP(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n-1} kP(X_n = k) = E(X_n).$$

De plus : $\forall s \in \mathbb{R},\ Q_n''(s) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} k(k-1)P(X_n = k)s^{k-1}$.

Ainsi :

$$Q_n''(1) = \sum_{k=2}^{n-1} k(k-1)P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n-1} k(k-1)P(X_n = k) = E(X_n(X_n - 1))$$

(par le théorème de transfert).

Ainsi :

$$\mathbb{V}(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2 = E(X_n(X_n-1)) + E(X_n) - E(X_n)^2 = Q''(1) + Q'(1) - (Q_n'(1))^2 = Q_n''(1) + Q_n'(1) - Q_n'(1)^2.$$

(b) Soit $s \in \mathbb{R}$. On a, par les questions 2 et 3,

$$\begin{aligned}
Q_{n+1}(s) &= \sum_{k=0}^{n} P(X_{n+1} = k)s^k \\
&= P(X_{n+1} = 0)s^0 + P(X_{n+1} = n)s^n + \sum_{k=1}^{n-1} P(X_{n+1} = k)s^k \\
&= \frac{1}{2^n} + \frac{s^n}{2^n} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(P(X_n = k) + P(X_n = k-1))s^k \\
&= \frac{1}{2}P(X_n = 0) + \frac{1}{2}P(X_n = n-1)s^n + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} P(X_n = k)s^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-2} P(X_n = k)s^{k+1} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k)s^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k)s^{k+1} \\
&= \frac{(1+s)}{2}Q_n(s)
\end{aligned}$$

(c) Soit $s \in \mathbb{R}$. On remarque alors que $(Q_n(s))_{n \in \geq 2}$ est géométrique.

Ainsi : $\forall n \geq 2,\ Q_n(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-2} Q_2(s)$, avec $Q_2(s) = P(X_2 = 0) + P(X_2 = 1)s = \dfrac{1+s}{2}$ par la question 1.

Ainsi : $\forall s \in \mathbb{R}$, $\forall n \geq 2$, $Q_n(s) = \left(\dfrac{1+s}{2}\right)^{n-1}$.

(d) Soit $s \in \mathbb{R}$. On a :

$$Q_n'(s) = \frac{n-1}{2}\left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-2} \qquad \text{et} \qquad Q_n''(s) = \frac{(n-1)(n-2)}{4}\left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-3}.$$

On a alors :

$$E(X_n) = Q_n'(1) = \frac{n-1}{2}.$$

Et :

$$\mathbb{V}(X_n) = Q_n''(1) + Q_n'(1) - Q_n'(1)^2 = \frac{(n-1)(n-2)}{4} + \frac{n-1}{2} - \frac{(n-1)^2}{4} = \frac{n-1}{4}(n-2+2-n+1) = \frac{n-1}{4}.$$

Exercice 21. 1. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note X_i la variable de Bernoulli de paramètre p qui vaut 1 si l'action monte le jour i, 0 sinon.

On a $S = \prod_{i=1}^{n} \alpha^{X_i}\beta^{1-X_i}$.

Comme $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes $\alpha^{X_1}\beta^{1-X_1}, \dots, \alpha^{X_n}\beta^{1-X_n}$ le sont également, et

$$E(S) = \prod_{i=1}^{n} E(\alpha^{X_i}\beta^{1-X_i})$$

Or, $E(\alpha^{X_i}\beta^{1-X_i}) = \alpha^1\beta^0 P(X_1 = 1) + \alpha^0\beta^1 P(X_1 = 0) = \alpha p + \beta(1-p)$.

Ainsi :

$$E(S) = \prod_{i=1}^{n}(\alpha p + \beta(1-p)) = (\alpha p + \beta(1-p))^n$$

De même,

$$E(S^2) = \prod_{i=1}^{n} E(\alpha^{2X_i}\beta^{2-2X_i}) = \prod_{i=1}^{n}(\alpha^2 p + \beta^2(1-p)) = (\alpha^2 p + \beta^2(1-p))^n$$

donc $\mathbb{V}(S) = (\alpha^2 p + \beta^2(1-p))^n - (\alpha p + \beta(1-p))^{2n}$.

2. Si $\beta = \dfrac{1}{\alpha}$, on a :

$$E(S) = \left(\alpha p + \frac{1}{\alpha}(1-p)\right)^n$$

.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
E(S) = 1 \quad &\iff \quad \left(\alpha p + \frac{1}{\alpha}(1-p)\right)^n \\
&\iff \quad \alpha p + \frac{1-p}{\alpha} = 1 \quad \text{car } \alpha p + \frac{1-p}{\alpha} \in \mathbb{R}_+^* \\
&\iff \left(\alpha - \alpha^{-1}\right) + \alpha^{-1} = 1 \\
&\iff \quad p = \frac{1-\alpha^{-1}}{\alpha - \alpha^{-1}}
\end{aligned}$$

Ainsi, p doit être égal à $\dfrac{1-\alpha^{-1}}{\alpha-\alpha^{-1}}$.

3. On a :

$$\begin{aligned}
E(S) = 1 \quad &\iff \quad ((1+h)p + (1-h)(1-p))^n \\
&\iff \quad (1+h)p + (1-h)(1-p) = 1 \quad \text{car } (1+h)p + (1-h)(1-p) \in \mathbb{R}_+^* \\
&\iff \quad (1+h-1+h)p + 1 - h = 1 \\
&\iff \quad p = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi, p doit être égal à $\dfrac{1}{2}$.

On a alors :

$$\mathbb{V}(S) = \frac{1}{2^n}((1+h)^2 + (1-h)^2)^n - \frac{1}{2^{2n}}(1+h+1-h)^{2n} = \frac{1}{2^n}(2+2h^2)^n - 1 = (1+h^2)^n - 1.$$

Exercice 22. 1. X (resp. Y) compte le nombre de pièces défectueuses lors de 100 (resp. 400) répétitions d'épreuves de Bernoulli (ayant pour succès être défectueuse) indépendantes de paramètre 0.05 (resp. 0.1).

Ainsi, $X \hookrightarrow \mathcal{B}(100, 0.05)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(400, 0.1)$

2. On a $E(Z) = E(X) + E(Y) = 100 \times 0.05 + 400 \times 0.1 = 40 + 5 = 45$. De plus, comme X et Y sont indépendantes

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(Z) &= \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) \\
&= 100 \times 0.05 \times (1-0.05) + 400 \times 0.1 \times (1-0.1) \\
&= 5 \times 0.95 + 40 \times 0.9 \\
&= 40.75
\end{aligned}$$

3. Soit $c \in \mathbb{R}$.
$$P(Z \geq c) = P(Z - E(Z) \geq c - E(Z))$$
On suppose désormais $c > E(Z)$.
Alors : $\{Z - E(Z) \geq c - E(Z)\} \subset \{|Z - E(Z)| \geq c - E(Z)\}$ Ainsi,
$$P(Z \geq c) = P(Z - E(Z) \geq c - E(Z)) \leq P(|Z - E(Z)| \geq c - E(Z)) \leq \frac{\mathbb{V}(Z)}{(c - E(Z))^2}$$
d'après l'inégalité de Bienaymé Tchebychev.
Il reste à choisi c tel que $\dfrac{\mathbb{V}(Z)}{(c - E(Z))^2} \leq 0.05$.
Or,
$$\begin{aligned}
& \frac{\mathbb{V}(Z)}{(c - E(Z))^2} \leq 0.05 \\
\iff \quad & \frac{\mathbb{V}(Z)}{0.05} \leq (c - E(Z))^2 \\
\iff \quad & \sqrt{\frac{\mathbb{V}(Z)}{0.05}} \leq |c - E(Z)| \\
\iff \quad & \sqrt{\frac{\mathbb{V}(Z)}{0.05}} \leq c - E(Z) \qquad \text{car } c > E(Z) \\
\iff \quad & E(Z) + \sqrt{\frac{\mathbb{V}(Z)}{0.05}} \leq c \\
\iff \quad & 45 + \sqrt{\frac{40.75}{0.05}} \leq c
\end{aligned}$$
En prenant $c \geq 74$, la condition est vérifiée.

Exercice 23. 1. Montrons ce résultat par récurrence.

- Pour $n = 0$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0$ et $\dfrac{0(0+1)(0+1)}{6} = 0$.
  Ainsi, le résultat est vraie pour $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, on a :
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n+1}{6}\left(n(2n+1) + 6(n+1)\right) \\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}
\end{aligned}$$
  Or, $(n+2)(2(n+1)+1) = (n+2)(2n+3) = 2n^2 + 7n + 6$.
  Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$ ce qui prouve le résultat au rang $n+1$.
- Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. On sait déjà que $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$.

Et on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} - \frac{(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{n+1}{12}(4n+2-3n-3) \\
&= \frac{n^2-1}{12}.
\end{aligned}$$