Concours blanc

Seconde épreuve
mercredi 01 juillet 2020
Durée : 3 heures

◇ Le candidat peut admettre le résultat d'une question et l'utiliser dans la suite à condition de l'écrire clairement sur sa copie.

◇ Si le candidat repère ce qu'il croit être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Développements limités

On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par l'expression $f(x) = e^x - x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Étudier la fonction f.
2. Montrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique nombre réel $x_n > 0$ tel que $e^{x_n} - x_n - 1 = e^{-n}$.
3. On souhaite montrer que $x_n \to 0$.
   (a) Donner (en le démontrant) le développement limité de exp en 0 à l'ordre 4 en 0.
   (b) Déterminer un équivalent de $e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n} - e^{-n}$.
   (c) Montrer que $x_n = O(1/n)$.
4. En déduire un équivalent de x_n.

Intégration

L'objectif de cet exercice est de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}\right)$. On définit $p_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}\right)$, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, p_n \geq 1$. On définit dans la suite $s_n = \ln(p_n)$ pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que $\forall x > 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x$.
3. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire les inégalités
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} - \frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{k(n-k)}{n^2} \leq s_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}.$$
4. Montrer que $\frac{1}{2n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k(n-k)}{n^2} \to 0$.
5. Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} \to \int_0^1 \sqrt{x(1-x)}dx$.
6. On définit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \ / \ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\}$.
   (a) Montrer que $\{(x, y) \ / \ x \in [0, 1] \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\} = D$, où $f : x \mapsto \sqrt{x(1-x)}$.
   (b) En déduire l'égalité $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}dx = \frac{\pi}{8}$. *On rappelle que l'aire d'un disque de rayon r est πr^2.*
7. Conclure.

Probabilités

Une particule peut se trouver dans deux états distincts notés 0 et 1. À chaque étape, la particule peut

- rester dans son état avec une probabilité $p \in]0, 1[$.
- changer d'état avec une probabilité $1 - p$.

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire qui donne l'état de la particule à l'étape n.

1. Dans cette question uniquement, on suppose que X_0 suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. Déterminer la loi de X_1.
   Dans la suite aucune hypothèse n'est faite sur X_0. On définit $M_n = (\mathbb{P}(X_{n+1} = i-1 | X_n = j-1))_{i,j} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\gamma_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \end{pmatrix}$, pour tout entier naturel n.
2. Montrer que (M_n) est une suite constante de matrices. Dans la suite , on notera $M = M_0$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \gamma_{n+1} = M\gamma_n$.
4. En déduire que $\gamma_n = M^n \gamma_0$, pour tout entier naturel n.
5. On écrit sous forme exponentielle $p + i(1-p) = re^{i\theta}$. On introduit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

(b) Déterminer une exression explicite de $P^{-1}MP = D$.
(c) Calculer toutes les puissances de M.

6. On suppose dans cette question uniquement que X_0 suit une loi de Bernoulli de paramètre $q \in]0,1[$. Déterminer la loi et l'espérance de X_n, pour tout entier naturel n.

Séries

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to l \in \mathbb{R}$.

1. On suppose dans cette question que $l > 1$. Montrer que $\sum u_n$ diverge. *On pourra montrer que* $r^n = O(u_n)$ *pour un certain* $r > 1$ *à déterminer.*
2. On suppose danc cette question que $l < 1$. Montrer que $\sum u_n$ converge.
3. On suppose dans cette question que

$$\exists a \in \mathbb{R}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}.$$

   (a) On définit $v_n = \ln(n^a u_n)$ et $w_n = v_{n+1} - v_n$. Montrer que $w_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
   (b) En déduire qu'il existe $\lambda > 0, u_n \sim \frac{\lambda}{n^a}$.
   (c) Déterminer la nature de $\sum u_n$ selon la valeur de a.
4. Étudier la nature de la série de terme général $\sum u_n$ lorsque
   (a) $u_n = \frac{\ln(n)}{n!}$.
   (b) $u_n = \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k)}{n^n}$.
   (c) $u_n = \frac{n+2}{n+1}$.

FIN.