Chapitre 12 : Limites et continuité

Dans tout le chapitre I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

1 Limites de fonctions

1.1 Définitions

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et a un élément de I ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$).

- Si $a \in \mathbb{R}$, on dit que f vérifie la propriété P au voisinage de a ssi il existe $r > 0$ tel que f vérifie P sur $I \cap]a-r, a+r[$.
- Si $a = +\infty$, on dit que f vérifie la propriété P au voisinage de a ssi il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que f vérifie P sur $I \cap [A, +\infty[$.
- Si $a = -\infty$, on dit que f vérifie la propriété P au voisinage de a ssi il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que f vérifie P sur $I \cap]-\infty, A]$.

Remarque : $x \mapsto x^2 - x$ est positive au voisinage de $+\infty$: $\exists c \in \mathbb{R},\ \forall x \in [c, +\infty[,\ x^2 - x \geq 0$.

Définition : Limite en un point

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et a un réel, élément de I ou extrémité (finie) de I. On dit que :

- f admet une limite (finie) $l \in \mathbb{R}$ en a, notée $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$, ssi :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad |x-a| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon.$$

- f admet pour limite $+\infty$ en a, notée $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$, ssi :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad |x-a| \leq \eta \Longrightarrow f(x) \geq M$$

- f admet pour limite $-\infty$ en a, notée $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$, ssi :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad |x-a| \leq \eta \Longrightarrow f(x) \leq M$$

Remarque : Dans le cas où $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$, la définition signifie que la distance de $f(x)$ à l peut être rendue inférieure à tout nombre $\epsilon > 0$ donné, à condition que la distance de x à a soit assez petite.

Définition : Limite en $+\infty$

Soient $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que $+\infty$ est une extrémité de I. On dit que :

- f admet une limite (finie) $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$, notée $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} l$, ssi :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad x \geq A \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon.$$

- f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$, notée $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ssi :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad x \geq A \Longrightarrow f(x) \geq M$$

- f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$, notée $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, ssi :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad x \geq A \Longrightarrow f(x) \leq M$$

Remarque : Dans le cas où $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$, la définition signifie que la distance de $f(x)$ à l peut être rendue inférieure à tout nombre $\epsilon > 0$ donné, à condition que x soit assez grand.

Définition : Limite en $-\infty$

Soient $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que $-\infty$ est une extrémité de I. On dit que :

- f admet une limite (finie) $l \in \mathbb{R}$ en $-\infty$, notée $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} l$, si :
$$\forall \epsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\quad x \leq A \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon.$$
- f admet pour limite $+\infty$ en $-\infty$, notée $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$, si :
$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\quad x \leq A \Longrightarrow f(x) \geq M$$
- f admet pour limite $-\infty$ en $-\infty$, notée $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$, si :
$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\quad x \leq A \Longrightarrow f(x) \leq M$$

Proposition Unicité de la limite

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et a un élément ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$). Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l_1$ et $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l_2$ avec l_1 , $l_2 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ alors $l_1 = l_2$.

Démonstration. On fait la preuve dans le cas où a, l_1, l_2 sont des réels finis. Elle s'adapte facilement aux autres cas.
Raisonnons par l'absurde. Supposons $l_1 \neq l_2$.
Posons $\epsilon = \dfrac{|l_1 - l_2|}{3} > 0$.
Par définition de la limite en a :
$$\begin{aligned}&\text{il existe } \eta_1 > 0 \text{ tel que : } \forall x \in I, |x-a| \leq \eta_1 \Longrightarrow |f(x) - l_1| \leq \epsilon\\ &\text{il existe } \eta_2 > 0 \text{ tel que : } \forall x \in I, |x-a| \leq \eta_2 \Longrightarrow |f(x) - l_2| \leq \epsilon\end{aligned}$$
Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$.
Soit $x \in I$ tel que $|x - a| \leq \eta$. Alors :
$$|l_1 - l_2| = |(l_1 - f(x)) + (f(x) - l_2)| \leq |f(x) - l_1| + |f(x) - l_2| \leq 2\frac{|l_1 - l_2|}{3}$$
D'où $1 \leq \dfrac{2}{3}$ car $|l_1 - l_2| \neq 0$. Absurde.
Ainsi, $l_1 = l_2$. D'où le résultat. □

Remarque :

- La limite en a d'une fonction (si elle existe) étant unique, on la note $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.
- ⚠ Cette notation est réservée à des fonctions pour lesquelles on a montré a priori l'existence de la limite en a.
- La notion de limite est une notion « locale » c'est à dire qu'elle ne dépend que des propriétés de la fonction au voisinage de a.

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et a un élément ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$).

- Soit $l \in \mathbb{R}$. Alors, $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$ si et seulement si $|f(x) - l| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.
- En particulier, $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$ si et seulement si $|f(x)| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.

Proposition

Soient $f : I \to \mathbb{R}$, a un élément ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$) et $l \in \mathbb{R}$.
S'il existe $g : I \to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ et $|f(x) - l| \leq g(x)$ au voisinage de a alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.

Démonstration. Comme $|f(x) - l| \leq g(x)$ au voisinage de a, il existe $r > 0$ tel que : $\forall x \in I \cap]a - r, a + r[$, $|f(x) - l| \leq g(x)$.
Soit $\epsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que : $\forall x \in I,\ |x - a| \leq \eta \quad \Longrightarrow \quad |g(x)| \leq \epsilon$.
Posons : $\eta_0 = \min\left(\eta, \dfrac{r}{2}\right)$.
Soit $x \in I$ tel que : $|x - a| \leq \eta_0$. On a $|f(x) - l| \leq \epsilon$. D'où $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$. □

Proposition

Soient $f : I \to \mathbb{R}$, a un élément ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$) et $l \in \mathbb{R}$.
Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$ alors $|f(x)| \underset{x\to a}{\longrightarrow} |l|$.

Démonstration. Pour tout $x \in I$, $||f(x)|-|l|| \leq |f(x)-l|$. Or, on sait que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \iff \lim\limits_{x\to a} |f(x)-l| = 0$. Ainsi, on en déduit que $\lim\limits_{x\to a} |f(x)-l| = 0$ puis le résultat s'obtient directement en utilisant le corollaire précédent. □

1.2 Limites à droite et à gauche

Définition : Limites à droite et à gauche

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et a un élément ou une extrémité finie de I.

- Si a n'est pas l'extrémité inférieure de I. On dit que f admet une limite à gauche en a ssi $f_{|I\cap]-\infty,a[}$ admet une limite en a. Cette limite est alors notée : $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$.
- Si a n'est pas l'extrémité supérieure de I. On dit que f admet une limite à droite en a ssi $f_{|I\cap]a,+\infty[}$ admet une limite en a. Cette limite est alors notée : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$

Corollaire

Si $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$ distinct de ses extrémités. f admet une limite $l \in \mathbb{R}$ en a si et seulement si f admet une limite à gauche et à droite en a égale à l et si $l = f(a)$.

Démonstration.

- Supposons que f admette une limite $l \in \mathbb{R}$ en a. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que :
$$\forall x \in I,\ |x-a| \leq \eta \implies |f(x)-l| \leq \epsilon.$$
En particulier, on a : :
$$\forall x \in I\cap]-\infty,a[,\ |x-a| \leq \eta \implies |f(x)-l| \leq \epsilon$$
donc f admet l pour limite à gauche en a.
$$\forall x \in I\cap]a,+\infty[,\ |x-a| \leq \eta \implies |f(x)-l| \leq \epsilon$$
donc f admet l pour limite à droite en a.
Par l'absurde, supposons que $f(a) \neq l$. Posons $\epsilon = \dfrac{|f(a)-l|}{2}$. Or, par définition de la limite, il existe $\eta_0 > 0$ tel que : $\forall x \in I, |x-a| \leq \eta_0 \implies |f(x)-l| \leq \epsilon$.
En particulier, $|f(a)-l| \leq \dfrac{|f(a)-l|}{2}$. D'où $|f(a)-l| \leq 0$ donc$|f(a)-l| = 0$. Absurde.
Ainsi, $f(a) = l$ et les limites à droite et à gauche en a sont donc égales à $f(a)$.
- Réciproquement supposons que f admette une limite à droite et à gauche en a qui vaut l et que $l = f(a)$.
Soit $\epsilon > 0$. Il existe $\eta_1 > 0$ tel que : $\forall x \in I\cap]-\infty,a[, |x-a| \leq \eta_1 \implies |f(x)-f(a)| \leq \epsilon$.
Il existe $\eta_2 > 0$ tel que : $\forall x \in I\cap]a,+\infty[, |x-a| \leq \eta_1 \implies |f(x)-f(a)| \leq \epsilon$.
Posons, $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$.
Soit $x \in I$ tel que $|x-a| \leq \eta$.
  - si $x \in]-\infty,a[$ alors, $|f(x)-l| \leq \epsilon$ car $|x-a| \leq \eta \leq \eta_1$.
  - si $x \in]a,+\infty[$ alors, $|f(x)-l| \leq \epsilon$ car $|x-a| \leq \eta \leq \eta_2$.
  - si $x = a$ alors, $|f(x)-l| = 0 \leq \epsilon$

  Ainsi, on a :
$$\forall x \in I,\ |x-a| \leq \eta \implies |f(x)-f(a)| \leq \epsilon$$
donc f admet pour limite l en a.

□

Remarque : Il est insuffisant de vérifier si f admet une limite à droite et à gauche qui coïncident. Il faut également s'intéresser à la valeur de $f(a)$.

Exemple : Considérons f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

On a bien $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$. Par la proposition précédente, si f a une limite en 0, celle ci est nécessairement 0.
Posons $\epsilon = \dfrac{1}{2}$ et $a = 0$. Pour tout $\eta > 0$, on a $0 = |0-a| \leq \eta$, alors que $|f(0)-0| = 1 > \epsilon$.
f n'admet donc pas 0 comme limite et n'admet donc pas de limite en 0.

Définition

Soit a est un élément de I distinct de ses extrémités et $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$. On dit que f admet une limite $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ssi elle admet une limite à droite et une limite à gauche en a et que celles-ci coïncident.

Remarque :

- Soit $l \in \mathbb{R}$ et a un élément de I distinct de ses extrémités. Une fonction $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ admet donc l pour limite en a ssi :

$$(\text{cas } l \in \mathbb{R}) \qquad \forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I \setminus \{a\},\ \Big(|x-a| \leq \eta \implies |f(x) - l| \leq \epsilon\Big)$$

  On procède de même dans le cas où $l \in \{\pm\infty\}$.
- Il convient de repérer si f est définie ou non en a lorsqu'on prend la limite. Cette dernière définition s'applique uniquement lorsque f n'est pas définie en a.

Exemple :

- $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$. La fonction inverse n'admet donc pas de limite quand $x \to 0$.
- $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{|x|} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{|x|} = +\infty$. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{|x|}$ admet donc une limite en 0 qui vaut $+\infty$.
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{|x|}{x} = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $\dfrac{|x|}{x} = -1$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = -1$. La fonction $x \mapsto \frac{|x|}{x}$ n'admet donc pas de limite quand $x \to 0$
- Soit $n \in \mathbb{Z}$, pour tout $x \in]n-1, n[$, $\lfloor x \rfloor = n-1$ donc $\lim\limits_{x\to n^-} \lfloor x \rfloor = n-1$ et pour tout $x \in]n, n+1[$, $\lfloor x \rfloor = n$ donc $\lim\limits_{x\to n^+} \lfloor x \rfloor = n$ donc la fonction partie entière n'admet pas de limite en n.

1.3 Propriétés

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et a un point ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$). Si f admet une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.

Démonstration. Faisons la preuve dans le cas où a est fini (on procède de la même manière si $a = \pm\infty$) .
Notons l la limite de f en a. Posons $\epsilon = 1$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|x-a| \leq \eta \implies |f(x) - l| \leq 1$.
Ainsi, d'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$\forall x \in I \cap]a-\eta, a+\eta[,\ |f(x)| = |f(x) - l + l| \leq |f(x) - l| + |l| \leq 1 + |l|$$

Ainsi, f est bornée au voisinage de a. □

Proposition

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et a un point ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$) et $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Si f admet une limite l en a alors :

- Pour tout $M > l$, f est majorée par M au voisinage de a.
- Pour tout $m < l$, f est minorée par m au voisinage de a.

Démonstration. Faisons la preuve dans le cas où $l \in \mathbb{R}$ et $a = +\infty$.
Soit $M > l$. Posons $\epsilon = M - l$.
Par définition de la limite, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I,\ x \geq A \implies |f(x) - l| \leq \epsilon.$$

Soit $x \in I \cap [A, +\infty-$, on a : $f(x) \leq \epsilon + l = M$.
Ainsi, f est majorée par M.
On procède de même pour la minoration pour $m < l$. □

Corollaire

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et a un point ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$).
Si f tend vers $l \in \mathbb{R}^* \cup \{\pm\infty\}$ alors, l ne s'annule pas au voisinage de a.

Démonstration. • Si f tend vers $+\infty$ en a alors f est minorée par 1 au voisinage de a donc en s'annule pas au voisinage de a.

- Si f tend vers $-\infty$ en a alors f est majorée par -1 au voisinage de a donc ne s'annule pas au voisinage de a.
- Si f tend vers $l \in \mathbb{R}^*$ alors $|f|$ tend vers $|l| \in \mathbb{R}_+^*$.
  De plus, $0 < \frac{|l|}{2} < |l|$ donc par la propriété précédente, $|f|$ est minorée par $\frac{|l|}{2}$ au voisinage de a donc f ne s'annule pas au voisinage de a.

□

Théorème : Caractérisation séquentielle de la limite

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, a un élément ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$) et $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
La fonction f admet pour limite l en a si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I qui tend vers a, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l.

Démonstration. On fait la preuve dans le cas $a \in \mathbb{R}$ et que l est fini, les autres preuves sont analogues.

- Supposons que $\lim_{x\to a} f(x) = l$. Soit $\epsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe $\eta > 0$ tel que :
  $$\forall x \in I,\ |x-a| \leq \eta \implies |f(x)-l| \leq \epsilon$$
  Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I convergeant vers a. Alors, par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies |u_n - a| \leq \eta$$
  Soit $n \geq N$, on a $|u_n - a| \leq \eta$ donc $|f(u_n) - l| \leq \epsilon$.
  On a donc prouvé que :
  $$\forall \epsilon, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \quad \implies \quad |f(u_n) - l| \leq \epsilon$$
  La suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend donc vers l.
- Pour montrer la réciproque, nous allons procéder par contraposition.
  Supposons que f ne tende pas vers l quand x tend vers a. Ainsi, il existe $\epsilon > 0$ tel que :
  $$\forall \eta > 0,\ \exists x \in I, |x-a| \leq \eta \text{ et } |f(x)-l| > \epsilon \qquad (*)$$
  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\eta_n = \frac{1}{n}$. D'après $(*)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in I$ tel que $|x_n - a| \leq \eta$ et $|f(x_n) - l| > \epsilon$. On construit ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - a| \leq \frac{1}{n}$ donc $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$. Mais : $\forall n \in \mathbb{N},\ |f(x_n) - l| > \epsilon$ donc $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers l.
  Par contraposée, on a l'implication souhaitée.

□

Méthode

Pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en a (finie ou infinie), on peut chercher deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tendent vers a et telles que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ont deux limites différentes.

1.4 Opérations sur les limites

Proposition

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ et a un élément ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$).
Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ et g est bornée au voisinage de a alors $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

Démonstration. On fait la preuve dans le cas a fini. Comme g est bornée au voisinage de a, il existe $r > 0$ et il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall x \in I \cap]a-r, a+r[,\ |g(x)| \leq M$$
Soit $\epsilon > 0$.
Par définition de la limite, il existe $\eta_1 > 0$ tel que :
$$\forall x \in I,\ |x-a| \leq \eta_1 \quad \implies \quad |f(x)| \leq \frac{\epsilon}{M}$$

Posons $\eta = \min\left(\eta_1, \frac{r}{2}\right) > 0$.
Soit $x \in I$ tel que $|x-a| \leq \eta$.
On a alors :

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)| &= |f(x)||g(x)| \\ &\leq \frac{\epsilon}{M} \times M \\ &\leq \epsilon\end{aligned}$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$. □

Exemple : $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ admet 0 comme limite en $+\infty$

Proposition

Soit a un élément ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$). Soient f, $g : I \to \mathbb{R}$ telles que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l' \in \mathbb{R}$. Alors :

- $\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) = l + l'$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} \lambda f(x) = \lambda l$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = ll'$.

Démonstration. preuve similaire à celle effectuée sur les suites. □

Proposition

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ et a un élément ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$). On suppose que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.

- Si g est minorée au voisinage de a alors $\lim\limits_{x\to a} (f(x)+g(x)) = +\infty$.
- Si g est minorée par un réel strictement positif au voisinage de a alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = +\infty$.

Démonstration. Preuve similaire à celle réalisée sur les suites. □

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et a un élément de I ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$).

- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l' \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{f}{g}$ est définie au voisinage de a et $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{l'}$.
- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ alors $\dfrac{1}{f}$ est définie au voisinage de a et $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.
- Si f est strictement positive au voisinage de a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ alors $\dfrac{1}{f}$ est définie au voisinage de a et $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

Démonstration. Preuve similaire à celle réalisée sur les suites. □

On déduit des propositions précédentes les opérations sur les limites :

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Soient $\lambda, l, l' \in \mathbb{R}$.
On considère, dans les tableaux suivants, deux fonctions f et g telles que les limites données aient un sens.

$\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(\mathbf{f(x)}+\mathbf{g(x)})$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = l'$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	forme indéterminée
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$	$-\infty$	forme indéterminée	$-\infty$

$\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(\lambda\mathbf{f(x)})$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$
$\lambda > 0$	λl	$+\infty$	$-\infty$
$\lambda < 0$	λl	$-\infty$	$+\infty$
$\lambda = 0$	0	0	0

$\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(\mathbf{f(x)}.\mathbf{g(x)})$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \neq 0$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = l' \neq 0$	$l.l'$	0	$+\infty$ si $l' > 0$ $-\infty$ si $l' < 0$	$-\infty$ si $l' > 0$ $+\infty$ si $l' < 0$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$	0	0	forme indéterminée	forme indéterminée
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$	$+\infty$ si $l > 0$ $-\infty$ si $l < 0$	forme indéterminée	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$	$-\infty$ si $l > 0$ $+\infty$ si $l < 0$	forme indéterminée	$-\infty$	$+\infty$

$\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\dfrac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{g(x)}}$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \neq 0$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = l' \neq 0$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$ si $l' > 0$ $-\infty$ si $l' < 0$	$-\infty$ si $l' > 0$ $+\infty$ si $l' < 0$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$	$\pm\infty(*)$	forme indéterminée	$\pm\infty(*)$	$\pm\infty(*)$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$	0	0	forme indéterminée	forme indéterminée
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$	0	0	forme indéterminée	forme indéterminée

$(*)$ La règle des signes donne le signe de la limite du quotient.

Proposition : Composition des limites

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. Soit a un élément ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$).
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y\to b} g(y) = c$, alors $g \circ f$ admet une limite en a et $\lim\limits_{x\to a}(g \circ f)(x) = c$.

Démonstration. Faisons la preuve dans le cas où a, b, c sont finis. Soit $\epsilon > 0$. Par définition de la limite de g, il existe $v > 0$ tel que

$$\forall y \in J,\ |y - b| \leq v \implies |g(y) - c| \leq \epsilon$$

Maintenant par définition de la limite de f, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in I,\ |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - b| \leq v$$

Soit $x \in I$ tel que $|x - a| \leq \eta$ alors $|f(x) - b| \leq v$ donc $|g(f(x)) - c| \leq \epsilon$ ce qui permet de conclure. $\square$

1.5 Passage à la limite dans les inégalités larges

Proposition Passage à la limite des inégalités larges

Soient $f, g : I \to R$. Soit a un élément ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$).
Si :

- $f \leq g$ au voisinage de a
- f et g ont des limites finies en a

alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Démonstration. Notons l et l' les limites respectives de f et g.
On fait la preuve dans le cas où $a = -\infty$.
Par l'absurde, supposons $l' < l$.
On pose alors $\epsilon = \frac{l-l'}{3} > 0$. Par définition de la limite, il existe $A_1 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I,\ x \leq A_1 \implies |f(x) - l| \leq \epsilon$$

il existe $A_2 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I,\ |x \leq A_2 \implies |g(x) - l'| \leq \epsilon$$

De plus, il existe $A_3 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I \cap]-\infty, A_3]$, $f(x) \leq g(x)$. Posons $A = \min(A_1, A_2, A_3)$. Soit $x \in I$ tel que $x < A$, on a :

$$\begin{array}{l} l - \epsilon \leq f(x) \leq l + \epsilon \\ l' - \epsilon \leq g(x) \leq l' + \epsilon \\ f(x) \leq g(x) \end{array}.$$

Ainsi, $l - \epsilon \leq f(x) \leq g(x) \leq l' + \epsilon$. On a donc $l - l' \leq 2\epsilon = \dfrac{2}{3}(l - l')$. D'où $1 \leq \dfrac{2}{3}$ Absurde.
Ainsi, $l \leq l'$. □

Remarque : Comme pour les suites, les inégalités deviennent larges par passage à la limite.

2 Théorèmes d'existence de limites

2.1 Existence et inégalités

Théorème d'encadrement (limite finie)

Soient f, g et $h : I \to \mathbb{R}$ et a un élément ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$). Si :

- $f \leq g \leq h$ voisinage de a
- les fonctions f et h ont la même limite finie l en a.

alors, g admet une limite en a et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$.

Démonstration. On fait la preuve dans le cas où a est fini.
Soit $\epsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe $\eta_1 > 0$ tel que :

$$\forall x \in I,\ |x - a| \leq \eta_1 \implies |f(x) - l| \leq \epsilon$$

et il existe $\eta_2 > 0$ tel que :

$$\forall x \in I,\ |x - a| \leq \eta_2 \implies |h(x) - l| \leq \epsilon$$

De plus, il existe $\eta_3 > 0$ tel que : $\forall x \in I \cap]a - \eta_3, a + \eta_3[$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.
Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2, \dfrac{\eta_3}{2})$.
Soit $x \in I$ tel que $|x - a| \leq \eta$, on a :

$$\begin{array}{l} l - \epsilon \leq f(x) \leq l + \epsilon \\ l - \epsilon \leq h(x) \leq l + \epsilon \\ f(x) \leq g(x) \leq h(x) \end{array}.$$

Ainsi, $l - \epsilon \leq f(x) \leq g(x) \leq h(x) \leq l + \epsilon$. On a donc $|g(x) - l| \leq \epsilon$.
Ainsi, on a bien montré que g admet une limite en a et que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$. □

Théorème de minoration (limite $+\infty$) ou majoration (limite $-\infty$)

Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$, a un élément ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$).

1. Si $\begin{cases} f(x) \leq g(x) \text{ au voisinage de } a \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \end{cases}$, alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.
2. Si $\begin{cases} f(x) \leq g(x) \text{ au voisinage de } a \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty \end{cases}$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Démonstration. La preuve est similaire à celle réalisée sur les suites. □

2.2 Fonctions monotones

Théorème de la limite monotone

Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tels que $a < b$ et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$.

- Si f est croissante, on a :
  - Si f est majorée, alors f admet une limite finie en b et $\lim_{x\to b} f(x) = \sup_{x\in]a,b[} f(x)$.

    sinon $\lim_{x\to b} f(x) = +\infty$.
  - Si f est minorée, alors f admet une limite finie en a et $\lim_{x\to a} f(x) = \inf_{x\in]a,b[} f(x)$

    sinon $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.
- Si f est décroissante, on a :
  - Si f est minorée, alors f admet une limite finie en b et $\lim_{x\to b} f(x) = \inf_{x\in]a,b[} f(x)$

    sinon $\lim_{x\to b} f(x) = -\infty$.
  - Si f est majorée, alors f admet une limite finie en a et $\lim_{x\to a} f(x) = \sup_{x\in]a,b[} f(x)$

    sinon $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$.

Démonstration. (Non exigible) Nous allons faire la preuve dans le cas où f est croissante pour la limite en b, les autres points se montrent de même.

* Supposons f majorée. Alors, l'ensemble $E = \{f(x),\ x \in]a, b[\}$ est majoré. Il est non vide car $a < b$, donc il admet une borne supérieure que l'on note $l \in \mathbb{R}$.
  Soit $\epsilon > 0$. Par caractérisation de la borne supérieure, il existe $y_0 \in E$ tel que $l - \epsilon < y_0$. Comme $y_0 \in E$, il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $y_0 = f(x_0)$. Pour tout $x \in [x_0, b[$, on a alors $l - \epsilon \leq f(x_0) \leq f(x)$ (car f est croissante) et $f(x) \leq l$ (car $f(x) \in E$).
  Donc :$\forall x \in [x_0, b[,\ l - \epsilon \leq f(x) \leq l$. D'où : $\forall x \in [x_0, b[,\ |f(x) - l| \leq \epsilon$. Ainsi, en posant $\eta = b - x_0$, on a que :
  $\forall x \in]a, b[,\ |x - b| \leq \eta \implies |f(x) - l| \leq \epsilon$. On a donc montré que $\lim_{x\to b} f(x) = l$.
* Supposons f non majorée. Soit $A > 0$. Comme A ne majore pas f, il existe $x_A \in]a, b[$ tel que $f(x_A) > A$. Pour tout $x \in [x_A, b[$, on a alors $A \leq f(x_A) \leq f(x)$ (car f est croissante). On a donc montré que $\lim_{x\to b} f(x) = +\infty$.

□

Remarque : Ne pas hésiter à faire un dessin pour savoir s'il faut montrer que la fonction est majorée ou minorée pour la limite considérée.

Exemple : On considère la fonction $x \mapsto F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$. Montrons qu'elle a une limite finie en $+\infty$.

D'une part, F est croissante comme primitive d'une fonction positive $x \mapsto e^{-t^2}$. Il suffit d'établir qu'elle est majorée. On a : $\forall t \geq 1,\ \exp(-t^2) \leq \exp(-t)$.
Soit $x \geq 1$, on a :

$$F(x) = \int_0^1 e^{-t^2} dt + \int_1^x e^{-t^2} dt \leq \int_0^1 e^{-t^2} dt + \int_1^x e^{-t} dt = \int_0^1 e^{-t^2} dt + e^{-1} - e^{-x} \leq \int_0^1 e^{-t^2} dt + e^{-1}.$$

Ainsi, F est croissante, majorée par $\int_0^1 e^{-t^2} dt + e^{-1}$: elle admet donc une limite en $+\infty$.

Corollaire

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction monotone et $a \in I$ tel que a ne soit pas une borne de I. Alors, f admet des limites finies à gauche et à droite en a et on a :

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x\to a^+} f(x) \quad \text{(si } f \text{ croissante)}$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x\to a^-} f(x) \quad \text{(si } f \text{ décroissante).}$$

Démonstration. Montrons le résultat dans le cas f croissante et notons c et d les bornes de I. $f_{|]c,a[} :]c, a[\to \mathbb{R}$ est croissante, et pour $x \in]c, a[,\ f(x) \leq f(a)$, donc cette fonction est majorée. Elle admet donc une limite quand x tend vers a. De plus pour tout $x \in]c, a[,\ f(x) \leq f(a)$, donc en passant à la limite x tend vers a, $\lim_{x\to a^-} f(x) \leq f(a)$.
De même, en considérant $f_{|]a,d[}$, on montre que $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existe et est supérieure ou égale à $f(a)$. □

Remarque : Attention, les deux inégalités peuvent être strictes (penser à la fonction partie entière).
On pourra cependant établir sa continuité en a en prouvant que $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, l'existence des limites étant assurées par la monotonie de f.

3 Continuité

3.1 Continuité en un point

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.
On dit que f est continue en a si et seulement si f admet une limite finie l en a. On a alors $l = f(a)$.
Autrement dit, f est continue en a si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \epsilon$$

Dans le cas contraire, on dit que f est discontinue en a.

Démonstration. Montrons que si f a une limite finie l en $a \in I$, alors $l = f(a)$.
Soit $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in I,\ |x-a| \leq \eta \quad \implies \quad |f(x) - l| \leq \epsilon.$$

Comme $a \in [a-\eta, a+\eta] \cap I$, on a $|f(a) - l| \leq \epsilon$.
Ainsi : $\forall \epsilon > 0,\ |f(a) - l| \leq \epsilon$.
Supposons $l \neq f(a)$.
Posons $\epsilon = \dfrac{|f(a)-l|}{2}$, on obtient : $|f(a) - l| \leq \dfrac{|f(a)-l|}{2}$ d'où $1 \leq \dfrac{1}{2}$. Absurde. Donc $l = f(a)$. □

Remarque :

- Si f admet une limite en $a \in I$ alors cette limite est finie.
  On fait la preuve dans le cas a fini.
  Par l'absurde.
  - Supposons que f tend vers $+\infty$ en a. Alors, il existe $\eta > 0$ tel que : $\forall x \in I$ tel que $|x-a| \leq \eta$, $f(x) \geq f(a)+1$. Pour $x = a$, on obtiendrait : $f(a) \geq f(a)+1$. Absurde.
  - Supposons que f tend vers $-\infty$ en a. Alors, il existe $\eta > 0$ tel que : $\forall x \in I$ tel que $|x-a| \leq \eta$, $f(x) \leq f(a)-1$. Pour $x = a$, on obtiendrait : $f(a) \leq f(a)-1$. Absurde.

  Ainsi, f tend vers une valeur finie.
- Géométriquement, une fonction est continue si est seulement si son graphe se trace « sans lever le crayon ».
- Pour parler de continuité en a, il faut que f soit définie en a.

Exemple : La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 2. En effet : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |\sqrt{x} - \sqrt{2}| = \dfrac{|x-2|}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} \leq |x-2|$.
Soit $\epsilon > 0$, posons $\eta = \epsilon > 0$, soit $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $|x-2| \leq \epsilon$. Alors $|\sqrt{x} - \sqrt{2}| \leq \epsilon$.

Définition : Continuité à gauche et à droite

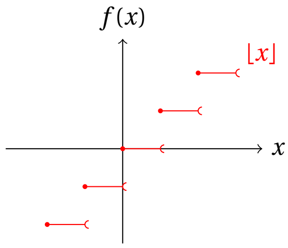
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et a un élément de I qui n'est pas une extrémité. On dit que :

- f est continue à gauche en a si et seulement si $f_{|I\cap]-\infty,a]}$ est continue en a.
- f est continue à droite en a si et seulement si $f_{|I\cap[a,+\infty[}$ est continue en a.

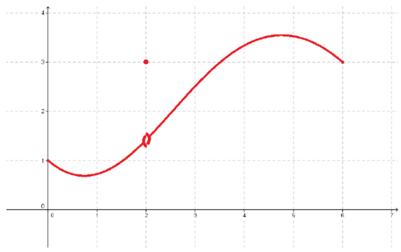
Remarque : Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et a un élément de I qui n'est pas une extrémité. $f_{|I\cap]-\infty,a]}$ est continue en a si et seulement si f admet une limite à gauche qui vaut $f(a)$.
$f_{|I\cap[a,+\infty[}$ est continue en a si et seulement si f admet une limite à droite qui vaut $f(a)$.

Exemple :

- La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$ mais elle n'est continue à gauche qu'aux points de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.



- La fonction f suivante admet une limite à droite égale à la limite à gauche en $x = 2$, mais elle n'est pas continue en $x = 2$ (ni même à gauche ou à droite) puisque cette limite n'est pas égale à $f(2)$.



Proposition

Toute fonction continue en un point a est bornée au voisinage de a.

Démonstration. C'est une conséquence d'une propriété vue sur les limites. □

Proposition

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et a un élément de I distinct de ses extrémités. On a l'équivalence :
f est continue en a si et seulement si f est continue à droite et à gauche en a.

Démonstration. Conséquence du résultat sur les limites.
f est continue en a si et seulement si f tend vers $f(a)$ lorsque x tend vers a si et seulement si f admet une limite à droite et à gauche qui valent $f(a)$. □

Proposition : Continuité et limites de suites

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue en $a \in I$. Alors pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I convergeant vers a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Démonstration. C'est une conséquence directe de la caractérisation séquentielle de la limite. □

Théorème

Soient $f : I \to I$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $u_0 \in I$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation $u_{n+1} = f(u_n)$. Si :

- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente,
- sa limite l appartient à I,
- la fonction f est continue en l,

alors, l est un point fixe de f, i.e $f(l) = l$.

Démonstration. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in I$. Alors, par extraction, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$. De plus, par continuité de f en l : $u_{n+1} = f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\to} f(l)$.
Par unicité de la limite, $f(l) = l$. □

Proposition : Opérations

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en un point $a \in I$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Alors les fonctions $|f|$, $\lambda f + \mu g$ et fg sont continues en a.
Si de plus, g ne s'annule pas en a, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue en a.

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue en $a \in I$ et $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue en $f(a) \in J$ telles que $f(I) \subset J$. Alors, la fonction $g \circ f$ est continue en a.

Définition : Prolongement par continuité

Soit $a \in I$ et $f : I \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$. On dit que f est prolongeable par continuité en a si et seulement si il existe une fonction $g : I \to \mathbb{R}$ telle que $g|_{I\backslash\{a\}} = f$ et g continue en a.

Théorème

Soit $a \in I$ et $f : I \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction.
f est prolongeable par continuité en a si et seulement si f admet une limite finie l en a. Dans ce cas un tel prolongement est unique et est défini par : $g : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq a \\ l \text{ sinon} \end{cases} \end{array}$. g est appelé le prolongement par continuité de f en a.

Démonstration. • Si f est prolongeable par continuité en a alors il existe $g : I \to \mathbb{R}$ continue en a prolongeant f sur I. De plus,g est continue en a donc $g(x) \underset{x\to a}{\to} g(a)$. Donc :

$$g|_{I\backslash\{a\}}(x) \underset{x\to a}{\to} g(a)$$

Or : $forall x \in I \setminus \{a\}$, $g(x) = f(x)$. Ainsi,

$$f(x) \underset{x\to a}{\to} g(a).$$

Ainsi, f admet une limite finie en a et on a : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = g(a)$.
Ceci prouve également l'unicité d'un tel du prolongement, s'il existe.

• Si f admet une limite finie l en a. Posons : $g : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq a \\ l \text{ sinon} \end{cases} \end{array}$.

On a bien $g|_{I\backslash\{a\}} = f$. Montrons que g est continue en a.
Soit $\epsilon > 0$. Par définition, il existe $\eta > 0$ tel que : $\forall x \in I \setminus \{a\}$, $|x - a| \leq \eta \implies |f(x) - l| \leq \epsilon$.
Par conséquent :

$$\forall x \in I \setminus \{a\},\ |x - a| \leq \eta \implies |g(x) - l| \leq \epsilon.$$

Or, $g(a) = l$, donc :

$$\forall x \in I \setminus \{a\},\ |x - a| \leq \eta \implies |g(x) - g(a)| \leq \epsilon.$$

Or, $|g(a) - g(a)| = 0 \leq \epsilon$. Ainsi :

$$\forall x \in I, |x - a| \leq \eta \implies |g(x) - g(a)| \leq \epsilon$$

$\square$

Exemple : Soit $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$. f est définie sur $\mathbb{R}^*$, mais $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ (taux d'accroissement).

Ainsi, la fonction $\tilde{f} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{\sin x}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}$ est continue en 0 : c'est le prolongement par continuité de f en 0.

3.2 Continuité sur un intervalle I

Définition

On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur I si et seulement si elle est continue en tout point de I.
On note $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction continue sur I est de classe $\mathscr{C}^0$ sur I.

Proposition : Opérations sur les fonctions continues

Soient f et g deux fonctions continues sur I et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.
Alors, les fonctions $|f|$, $\lambda f+\mu g$, fg sont continues sur I.
Si, de plus, g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I.

Proposition

Soient $f : I\to\mathbb{R}$ continue sur I et $g : J\to\mathbb{R}$ continue sur J avec $f(I)\subset J$. Alors, la fonction $g\circ f$ est continue sur I.

Démonstration. Il suffit d'appliquer à chaque point de I les énoncés ponctuels vus dans la partie précédente. □

Exemple : Si $f, g : I\to\mathbb{R}$ sont continues sur I, alors $u : x\mapsto \max(f(x),g(x))$ et $v : x\mapsto \min(f(x),g(x))$ sont continues sur I : il suffit de noter que :

$$u=\frac{|f-g|+g+f}{2}\quad \text{et } v=\frac{f+g-|f-g|}{2}.$$

Ces fonctions sont alors continues comme composées et combinaisons linéaires de fonctions continues.

Remarque : Hors point à problème, on justifie en une ligne la continuité de f comme combinaison linéaire, produit, quotient, composée de fonctions qui le sont, les fonctions usuelles étant continues sur leurs domaines de définition.

3.3 Image d'un intervalle par une fonction continue

Théorème : Théorème des valeurs intermédiaires

Soient $f : I\to\mathbb{R}$ une fonction continue et $(a,b)\in I^2$ tels que $a<b$. Alors, pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$], il existe $c\in[a,b]$ tel que $f(c)=y$.

Démonstration. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer que $f(a)\le f(b)$. Soit $y\in[f(a),f(b)]$.

Posons $g : x\mapsto f(x)-y$. La fonction g est continue sur $[a,b]$ et $g(a)=f(a)-y\le 0$ et $g(b)=f(b)-y\ge 0$. Ainsi, $g(a)$ et $g(b)$ sont de signes contraires.
On cherche à prouver qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que $g(c)=0$.

On pose :

$$a_0=a,\ b_0=b$$
$$\forall n\in\mathbb{N},\ (a_{n+1},b_{n+1})=\begin{cases}\left(a_n,\frac{a_n+b_n}{2}\right) & \text{si } g(a_n)g\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)\le 0\\ \left(\frac{a_n+b_n}{2},b_n\right) & \text{sinon}\end{cases}$$

Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N},\ a\le a_n\le b_n\le b$ et $b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^n}$, $g(a_n)g(b_n)\le 0$.

- Pour $n=0$, $a_0=a\le b=b_0$ et on a $b_0-a_0=b-a=\dfrac{b-a}{2^0}$, $g(a_0)g(b_0)=g(a)g(b)\le 0$.
- Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $a\le a_n\le b_n\le b$ et $b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^n}$, $g(a_n)g(b_n)\le 0$.
  - Si $g(a_n)g\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)\le 0$, on pose $(a_{n+1},b_{n+1})=\left(a_n,\frac{a_n+b_n}{2}\right)$. Ainsi, on a $g(a_{n+1})g(b_{n+1})\le 0$.
    De plus $b_{n+1}-a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}-a_n=\dfrac{b_n-a_n}{2}=\dfrac{b-a}{2^{n+1}}$.
    Enfin, d'après l'hypothèse de récurrence, $a\le a_n\le\dfrac{a_n+b_n}{2}\le b_n\le b$ donc $a\le a_{n+1}\le b_{n+1}\le b$.
  - sinon, on a $g(a_n)g\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)>0$, on pose alors $(a_{n+1},b_{n+1})=\left(\frac{a_n+b_n}{2},b_n\right)$.
    Ainsi, on a $b_{n+1}-a_{n+1}=b_n-\dfrac{a_n+b_n}{2}=\dfrac{b_n-a_n}{2}=\dfrac{b-a}{2^{n+1}}$.
    De plus, d'après l'hypothèse de récurrence, $a\le a_n\le\dfrac{a_n+b_n}{2}\le b_n\le b$ donc $a\le a_{n+1}\le b_{n+1}\le b$.
    Enfin, on a $g(a_{n+1})g(b_{n+1})=g\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)g(b_n)=\dfrac{g(a_n)g\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)^2g(b_n)}{g(a_n)g\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)}$.
    Or, $g(a_n)g(b_n)\le 0$ donc le numérateur est négatif. Le dénominateur est quant à lui strictement positif.
    Ainsi,$g(a_{n+1})g(b_{n+1})\le 0$.

- Ainsi, ces propriétés sont vraies pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrons désormais que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

- Soit $n \in \mathbb{N}$:
  - Si $g(a_n)g\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \leq 0$, on a : $a_{n+1} - a_n = 0$ et $b_{n+1} - b_n = \dfrac{a_n+b_n}{2} - b_n = \dfrac{a_n - b_n}{2} \geq 0$.
  - Sinon, on a : $a_{n+1} - a_n = \dfrac{a_n+b_n}{2} - a_n = \dfrac{b_n - a_n}{2} \geq 0$ et $b_{n+1} - b_n = b_n - b_n = 0$.

  Dans tous les cas $a_{n+1} - a_n \geq 0$ et $b_{n+1} - b_n \leq 0$. Ainsi, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- De plus, $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \left(\dfrac{b-a}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ donc $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Ainsi, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes donc converge vers la même limite que l'on note c.
Comme : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a \leq a_n \leq b_n \leq b$, on a par passage à la limite dans les inégalités, $c \in [a, b]$.
Comme g est continue sur $[a, b]$, $(g(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $g(c)$ et $(g(b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $g(c)$.
De plus : $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(a_n)g(b_n) \leq 0$. D'où en passant à la limite cette inégalité $g(c)^2 \leq 0$.
Ainsi $g(c) = 0$ et le théorème est démontré. □

Remarque :

- On peut montrer que l'on a le même genre d'énoncé dans le cas où a et b sont des extrémités de I qui ne sont pas dans I. Les valeurs $f(a)$ et $f(b)$ sont alors remplacés par $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x)$.
- Ce théorème permet de montrer théoriquement l'existence d'au moins une solution à des équations.

Recherche d'un zéro par dichotomie :
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a < b$ et $f \in \mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ telle que $f(a)f(b) \leq 0$.
On pose :

$$a_0 = a,\ b_0 = b$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ (a_{n+1}, b_{n+1}) = \begin{cases} \left(a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right) & \text{si } f(a_n)f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \leq 0 \\ \left(\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f admet au moins un zéro dans $[a_n, b_n]$ et $\dfrac{a_n+b_n}{2}$ fournit une approximation d'un zéro de f à la précision $\dfrac{b-a}{2^{n+1}}$ près.

Corollaire

Si I est un intervalle et si f est continue sur I, alors $f(I)$ est un intervalle.

Démonstration. On souhaite prouver que :

$$\forall u, v \in f(I),\ [u, v] \subset f(I).$$

i.e :

$$\forall u, v \in f(I),\ \forall y \in [u, v], y \in f(I).$$

ce qui s'écrit encore :

$$\forall u, v \in f(I),\ \forall y \in [u, v], \exists c \in I, y = f(c).$$

Soit $(u, v) \in f(I)^2$, il existe $(a, b) \in I^2$ tel que $u = f(a)$ et $v = f(b)$.
Soit y compris entre $f(a)$ et $f(b)$ Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe c compris entre a et b tel que $f(c) = y$.
Or, I est un intervalle donc $c \in I$. Ainsi $y \in f(I)$ et donc $[u, v] \subset f(I)$, ce qui prouve que $f(I)$ est un intervalle. □

Remarque : Notons que l'intervalle d'arrivée $f(I)$ n'est pas toujours de même nature que l'intervalle de départ I.
Exemple :

$$f(x) = \sin(x) \quad \text{et} \quad f(]-\pi, \pi[) = [-1, 1];$$
$$g(x) = x^2 \quad \text{et} \quad g(]-1, 1[) = [0, 1[.$$

Proposition (Admis)

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.
Autrement dit, si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$ avec $a < b$, alors il existe $(c, d) \in [a, b]^2$ tel que :

$$\forall x \in [a, b],\ f(c) \leq f(x) \leq f(d).$$

Remarque : On dit que f admet un maximum en d et que f admet un minimum en c.

Lemme

Si f est monotone sur un intervalle I et si $f(I)$ est un intervalle alors f est continue sur I.

Démonstration. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer f croissante.
Soit a un élément de I distinct de ses extrémités.
Montrons que f est continue en a.
Comme f est croissante, on sait que :

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x\to a^+} f(x)$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que f n'est pas continue. Alors, une de ces inégalités est stricte.
Supposons par exemple : $f(a) < \lim_{x\to a^+} f(x)$.
Soit $y \in]f(a), \lim_{x\to a^+} f(x)[$.

- Comme a n'est pas l'extrémité supérieure de I, il existe $u \in I \cap]a, +\infty[$.
  On a alors : $\lim_{x\to a^+} f(x) \leq f(u)$.
  En effet : $\forall z \in]a, u],\ f(z) \leq f(u)$.
  En faisant tendre z vers a, on obtient le résultat.
  On a alors : $y \in [f(a), f(u)]$ avec $f(a), f(u) \in f(I)$. Donc $y \in f(I)$ car $f(I)$ est un intervalle.
  Donc $y \in f(I) \cap]f(a), \lim_{x\to a^+} f(x)[$. D'où $]f(a), \lim_{x\to a^+} f(x)[\subset f(I) \cap]f(a), \lim_{x\to a^+} f(x)[$.
- Soit $t \in I$.
  - Si $t \leq a$ alors $f(t) \leq f(a)$ car f est croissante.
  - Si $t > a$, alors $f(t) \geq \lim_{x\to a^+} f(x)$.
    En effet, on a : $\forall z \in]a, t],\ f(z) \leq f(t)$.
    En passant à la limite lorsque z tend vers a, on obtient le résultat souhaité.

  D'où , $f(I) \cap]f(a), \lim_{x\to a^+} f(x)[= \emptyset$.

Absurde car $]f(a), \lim_{x\to a^+} f(x)[\neq \emptyset$ et $]f(a), \lim_{x\to a^+} f(x)[\subset f(I) \cap]f(a), \lim_{x\to a^+} f(x)[$.
Donc $f(a) = \lim_{x\to a^+} f(x)$. De même on prouve que l'on a : $f(a) = \lim_{x\to a^-} f(x)$.
f est donc continue en a.
Si a est une extrémité de I on procède de même en ne conservant qu'une des deux inégalités.
Ainsi, f est continue sur I. □

Théorème

Toute fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$. Sa réciproque est continue et strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$, et de même monotonie que f.

Démonstration. Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer f strictement croissante.

- Comme f est continue sur un intervalle I, on a déjà prouvé que $f(I)$ est un intervalle.
- Bijectivité :
  On sait que $f : I \to f(I)$ est surjective car par définition, pour tout $y \in f(I)$, il existe $x \in I$ tel que $y = f(x)$.
  De plus, f est strictement croissante. Soit $(x_1, x_2) \in I^2$:
  - si $x_1 < x_2$, on a $f(x_1) < f(x_2)$ par stricte croissance de f ;
  - si $x_1 > x_2$, on a $f(x_1) > f(x_2)$.

  Ainsi : $\forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$.
  Ainsi, par contraposée : $\forall x_1, x_2 \in I,\ f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$ donc f est injective.
  f réalise donc une bijection de I sur $f(I)$. On note $f^{-1} : f(I) \to I$ sa bijection réciproque.
- Monotonie de f^{-1} : Soient $y, y' \in f(I)$, supposons $y < y'$.
  Par l'absurde, supposons que $f^{-1}(y) \geq f^{-1}(y')$, on aurait par croissance de f, $f(f^{-1}(y)) \geq f(f^{-1}(y'))$ donc $y \geq y'$. Absurde.
  Ainsi, on a $f \circ f^{-1}(y) < f \circ f^{-1}(y')$.
  Donc f^{-1} est strictement croissante (donc strictement monotone et de même monotonie que f).
- Continuité de f^{-1}. f^{-1} est monotone sur l'intervalle $f(I)$. De plus, $f^{-1}(f(I)) = I$ qui est un intervalle. Donc d'après le lemme, f^{-1} est continue sur $f(I)$.

□

4 Extension aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Définition

Soient $f : I \to \mathbb{C}$ et a un élément ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$).

- On dit que f admet une limite $l \in \mathbb{C}$ en a ssi :

$$\begin{array}{ll} \text{Cas } \ a \in \mathbb{C} : & \forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leq \eta \implies |f(x) - l| \leq \epsilon. \\ \text{Cas } \ a = +\infty : & \forall \epsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \geq A \implies |f(x) - l| \leq \epsilon. \\ \text{Cas } \ a = -\infty \ : & \forall \epsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \leq A \implies |f(x) - l| \leq \epsilon \end{array}$$

- On dit que f est continue en $a \in I$ ssi f admet une limite finie l en a. On a alors $l = f(a)$.
  On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

Remarque : ⚠ I est toujours un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition

On dit que $f : I \to \mathbb{C}$ est bornée au voisinage de a si,

$$\exists M \in \mathbb{R}, \exists r > 0,\ \forall x \in I \cap]a-r, a+r[,\ |f(x)| \leq M.$$

Proposition

Toute fonction $f : I \to \mathbb{C}$ admettant une limite finie en a (un élément de I ou une extrémité de I, éventuellement $\pm\infty$) est bornée au voisinage de a.

Proposition : Opérations sur les limites

Soit a un élément ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$). Soient $f, g : I \to \mathbb{C}$ telles que $\lim_{x\to a} f(a) = l \in \mathbb{C}$ et $\lim_{x\to a} g(x) = l' \in \mathbb{C}$. Alors :

- Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, $\lim_{x\to a} (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda l + \mu l'$.
- $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = ll'$.
- Si $l' \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ est définie au voisinage de a et $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{l'}$.

Proposition : Opérations sur les fonctions continues en a

Soient $f, g : I \to \mathbb{C}$ deux fonctions continues en un point $a \in I$.

- Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, $\lambda f + \mu g$ est continue en a.
- fg est continue en a.
- Si de plus, g ne s'annule pas en a, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue en a.

Proposition : Opérations sur les fonctions continues sur I

Soient $f, g : I \to \mathbb{C}$ deux fonctions continues sur I.

- Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, $\lambda f + \mu g$ est continue sur I.
- fg est continue sur I.
- Si de plus, g ne s'annule pas en a, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I.

Proposition

Soient $f : I \to \mathbb{C}$ et a un élément ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$).
f admet une limite (finie) en a si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ admettent des limites finies en a, et on a alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \mathrm{Re}(f(x)) + i \lim_{x\to a} \mathrm{Im}(f(x)).$$

Démonstration. Preuve similaire à celle réalisée sur les suites. □

Corollaire

Soient $f : I \to \mathbb{C}$, a un élément de I ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$) et $l \in \mathbb{C}$.
Si $\lim_{x\to a} f(x) = l$ alors $\lim_{x\to a} \overline{f(x)} = \overline{l}$.

Corollaire

Soit $f : I \to \mathbb{C}$. On a l'équivalence :
f est continue sur I si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues sur I.

Ce qui reste valable :	**Ce qui n'est plus valable :**
Unicité de la limite	Monotonie
Toute fonction admettant une limite finie en a est bornée au voisinage de a	Majorant/minorant
Opérations sur les fonctions admettant une limite finie en a	Limites infinies
Opérations sur les fonctions continues en a ou sur I	Passage à la limite dans les inégalités larges
	Théorème d'encadrement (limite finie)
	Théorème de minoration et de majoration
	Théorème de la limite monotone
	Théorème des valeurs intermédiaires
	Maximum/minimum