Feuille d'exercices 14 : Arithmétique et dénombrement

1 Divisibilité dans $\mathbb{N}$

Exercice 1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

Exercice 2. Montrer que :
1. Pour tout $n \geq 2$, $2^{2^n} - 6$ est divisible par 10.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{3n} - 1$ est multiple de 7.

Exercice 3. Déterminer les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ pour lesquelles $\dfrac{2n^2 - n - 6}{n+3} \in \mathbb{Z}$.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\dfrac{21n-3}{4}$ et $\dfrac{15n-2}{4}$ ne sont pas simultanément dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 5. On considère un entier naturel n dont l'écriture décimale est :

$$n = a_p 10^p + \cdots + a_1 10^1 + a_0 10^0.$$

1. Montrer que n est multiple de 3 si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k$ est multiple de 3.
2. Montrer que n est multiple de 9 si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k$ est multiple de 9.
3. Montrer que n est multiple de 11 si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^k a_k$ est multiple de 11.

Exercice 6. On divise deux entiers a et b, tels que $a > b$, par leur différence $a - b$. Comparer les quotients et les restes obtenus.

2 PGCD et PPCM

Exercice 7. Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que si on divise 4373 et 826 par n, on obtient respectivement 8 et 7 pour restes.

Exercice 8. Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que si on divise 6381 et 3954 par n, on obtient respectivement 9 et 6 pour restes.

Exercice 9. Calculer le pgcd de $a = 9100$ et $b = 1848$, puis de $a = n^3 + 2n$ et $b = n^4 + 3n^2 + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 10. Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer :

$$\text{pgcd}\,(mn, (2m+1)n).$$

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $a = n^2 + 3n \quad$ et $\quad b = n^2 + 5n + 6$
1. Déterminer $\text{pgcd}\,(n, n+2)$.
2. Déterminer $\text{pgcd}\,(a, b)$.

Exercice 12. Déterminer les entiers naturels non nuls a, b tels que $a \leq b$ et :

$$\text{ppcm}\,(a, b) = 21\text{pgcd}\,(a, b)$$

Exercice 13. Déterminer les couples $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $x + y = 56$ et $x \vee y = 105$.

3 Nombres premiers

Exercice 14. Soient $a, n \in \mathbb{N}^*$, soit p un nombre premier. Montrer que $p | a^n \Rightarrow p^n | a^n$.

Exercice 15. Déterminer les entiers naturels non nuls b tels que $\text{ppcm}\,(28, b) = 140$.

Exercice 16. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Montrer qu'aucun des entiers successifs de $n! + 2$ à $n! + n$ n'est premier.
Comment obtenir n entiers consécutifs non premiers ?
Donner cinq entiers naturels consécutifs non premiers les plus petits possibles.

Exercice 17. Démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Exercice 18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ sa décomposition en produit de facteurs premiers.
1. Calculer le nombre de diviseurs positifs de n.
2. Calculer la somme $S(n)$ des diviseurs positifs de n.
3. Montrer que si m et n sont premiers entre eux, alors $S(mn) = S(m)S(n)$.

4 Dénombrement

Exercice 19. Soit E un ensemble. Montrer que si $\mathcal{P}(E)$ est fini, alors E est fini.

Exercice 20. Soient E et F deux ensembles, soit $f : E \to F$ une application.
1. Montrer que si E est fini, alors $f(E)$ est fini et $\text{Card}\,(f(E)) \leq \text{Card}\,(E)$ avec égalité si et seulement si f est injective.
2. Montrer que si E est fini et si f est surjective, alors F est fini et $\text{Card}\,(F) \leq \text{Card}\,(E)$ avec égalité si et seulement si f est bijective.
3. Montrer que si f est injective et si $f(E)$ est fini alors E est fini et $\text{Card}\,(E) = \text{Card}\,(f(E))$.

Exercice 21. Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$. Montrer que :

$$\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \text{Card}\,(X) = n 2^{n-1}$$

On pourra effectuer le changement de variable $Y = C_E^X$ ou remarquer que $\mathcal{P}(E) = \bigcup_{k=0}^{n} \{X \in \mathcal{P}(E), \text{Card}\,(X) = k\}$.

Exercice 22. Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$. Calculer :

$$\sum_{(X,Y) \in \mathbb{P}(E)^2} \text{Card}\,(X \cap Y) \text{ et } \sum_{(X,Y) \in \mathbb{P}(E)^2} \text{Card}\,(X \cup Y).$$

Exercice 23. Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 2$. Soient $a, b \in E$ tels que $a \neq b$.
1. Quel est le nombre de parties de E ne contenant ni a ni b ?
2. Quel est le nombre de parties de E contenant a ?

Exercice 24. On considère les ensembles $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
1. Combien existe-t-il d'applications de E dans F ?
2. Combien existe-t-il d'applications f de E dans F telles que $f(2) = 1$?
3. Combien existe-t-il d'applications f de E dans F telles que $f(1) \neq f(3)$?
4. Combien existe-t-il d'applications injectives, surjectives, bijectives de E dans F ?
5. Combien existe-t-il d'applications strictement croissantes de E dans F ?

Exercice 25. Une urne contient 15 boules numérotées de 1 à 15. Les boules numérotées de 1 à 5 sont blanches, les boules numérotées de 6 à 15 sont noires.
1. On tire simultanément cinq boules de l'urne.
   (a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   (b) Combien de tirages donnent 2 boules blanches et 3 boules noires ?
2. On tire successivement 5 boules de l'urne sans remise.
   (a) En tenant compte de l'ordre, combien y a-t-il de tirages possibles ?
   (b) Combien de tirages donnent 2 boules blanches et 3 boules noires dans un ordre quelconque ?

Exercice 26.
1. Combien de menus différents peut-on composer avec 4 entrées, 3 plats et 2 desserts ? Pour constituer un menu, on choisit une entrée, un plat et un dessert.
2. Dans une finale de course à pied et sachant qu'il y a 8 coureurs au départ, combien y a-t-il de podiums possibles ? Un podium est représenté pas une personne ayant la médaille d'or, une la médaille d'argent et une dernière la médaille de bronze.
3. On considère 3 urnes numérotées de 1 à 3, et 5 boules numérotées de 1 à 5. On range au hasard ces boules dans les trois urnes. Combien y a-t-il de manières différentes de les ranger ?
4. Sur une étagère, on range au hasard les n tomes d'une encyclopédie.
   (a) Combien y a-t-il de manières de les ranger ?
   (b) Parmi ces rangements, combien permettent de retrouver les tomes 1 et 2 côte à côte et dans cet ordre ?
5. (a) Combien y a-t-il de mots de 3 lettres avec au moins un e ?
   (b) Combien y a-t-il de mots de 3 lettres avec au plus un e ?
6. Combien y a-t-il d'anagrammes (ayant un sens ou non) des mots :

   (a) MATHS (b) MOTO (c) TARATATA

Exercice 27. Soient $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $2 \leq k \leq n$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.
1. On tire simultanément k boules de l'urne.
   (a) Combien y a-t-il de tirages au total ?
   (b) Soit $p \in [\![k, n]\!]$. Combien y a-t-il de tirages pour lesquels p est le plus grand numéro tiré ?
2. On tire successivement et sans remise k boules de l'urne.
   (a) En tenant compte de l'ordre, combien y a-t-il de tirages possibles ?
   (b) Combien y a-t-il de tirages commençant par la boule 1 ?
3. On tire successivement et avec remise k boules de l'urne.
   (a) En tenant compte de l'ordre, combien y a-t-il de tirages possibles ?
   (b) Combien y a-t-il de tirages durant lesquels deux numéros exactement sont apparus ?

Exercice 28. Soit E une partie de $\mathbb{N}$ de cardinal $n \geq 2$ contenant a entiers pairs et $n - a$ entiers impairs avec $a \geq 1$. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq n - a$.
1. Quel est le nombre de parties de E de cardinal p contenant un et un seul entier pair ?
2. Quel est le nombre de parties de E de cardinal p contenant au moins un entier pair.

Exercice 29. Soit E un ensemble fini de cardinal n.
1. Déterminer le nombre de couples $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $X \subset Y$.
2. Déterminer le nombre de couples $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $X \cap Y = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre de couples $(X, Y, Z) \in \mathcal{P}(E)^3$ tels que $X \subset Y \subset Z$.

Exercice 30. Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

Exercice 31. (difficile)
Soit $N \in \mathbb{N}^*$, on dit qu'une famille $(E_k)_{1 \leq k \leq N}$ d'ensembles non vides réalise une partition d'un ensemble E si et seulement si $E = \bigcup_{k=1}^{N} E_k$ et les $(E_k)_{1 \leq k \leq N}$ sont deux à deux disjoints.
Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Quel est le nombre de partitions de E en deux parties ? En trois parties ?