Chapitre 25 : Représentaiton matricielle des applications linéaires

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie.

Rappel :

Définition : Matrice colonne d'un vecteur

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Soit $x \in E$. Il existe un unique n-uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.
On appelle matrice du vecteur x dans la base $\mathscr{B}$ la matrice colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ notée $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(x)$ dont les coefficients sont les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$. On note

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors, l'application :

$$\Phi_{\mathscr{B}} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x & \longmapsto & \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(x) \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

Démonstration.

- $\Phi_{\mathscr{B}}$ est linéaire :

  Soient $x, y \in E$, il existe $(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

  Ainsi, $\lambda x + \mu y = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + \mu y_i) e_i$.

  D'où :

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\lambda x + \mu y) = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu y_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n + \mu y_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \lambda \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(x) + \mu \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(y)$$

- $\Phi_{\mathscr{B}}$ est injective :

  Soit $x \in E$ tel que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ alors par définition de $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(x)$, on a : $x = \sum_{i=1}^{n} 0 e_i = 0_E$. Donc $\mathrm{Ker}\, \Phi_{\mathscr{B}} = \{0_E\}$. D'où $\Phi_{\mathscr{B}}$ est injective.

- On a de plus, $\dim(E) = n = \dim(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$ donc $\Phi_{\mathscr{B}}$ est bijective.

Ainsi, $\Phi_{\mathscr{B}}$ est un isomorphisme. $\square$

1 Matrice et application linéaire

1.1 Matrice d'une application linéaire

Définition

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finies respectivement égales à p et n, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E, $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.
On appelle matrice de u dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, notée $\text{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ la matrice de$\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\text{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C},}(u) = (m_{i,j}) = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,j} & \dots & m_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{i,1} & \dots & m_{i,j} & \dots & m_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,j} & \dots & m_{n,p} \end{pmatrix} \quad \text{où } \forall j \in [\![1, p]\!], \quad u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} f_i.$$

Remarque :

- ⚠ à l'ordre des vecteurs dans une base.
- $\dim(E)$ = nombre de colonnes de la matrice, $\dim(F)$ = nombre de lignes de la matrice.
- Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{B}$ une base de E. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E.
  La matrice de u de la base $\mathscr{B}$ dans la (même) base $\mathscr{B}$ est appelée plus simplement matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ et notée $\text{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \text{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(u)$.

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. Alors

$$\text{mat}_B(Id_E) = I_n$$

Démonstration. On a $u(e_j) = e_j = \sum_{i=1}^{n} \delta_{i,j} e_i$.
Ainsi, $\text{mat}_{\mathscr{B}}(u) = (\delta_{i,j})_{i,j} = I_n$. □

Exemple : Soit $\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & e^{i\theta} z \end{array}$.
Soit $\mathscr{B} = (1, i)$ une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. Déterminer $\text{mat}_{\mathscr{B}}(u)$.
On a : $u(1) = e^{i\theta} = \cos(\theta) \times + i \sin(\theta)$.
$u(i) = i e^{i\theta} = -\sin(\theta) \times 1 + i \cos(\theta)$.
Ainsi, on obtient :

$$\text{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Remarque : La matrice représentative d'une application linéaire dépend des bases choisies.
Exemple : Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E, $\mathscr{B}_F = (e_1, \dots, e_r)$, $\mathscr{B}_G = (e_{r+1}, \dots, e_n)$ des bases respectives de F et G. Notons $\mathscr{B}_1 = (\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_{\mathscr{G}})$, base de E adaptée à $E = F \oplus G$.

- Soit p le projecteur sur F parallèlement à G.
  On a : $\forall j \in [\![1, r]\!]$, $p(e_j) = e_j = \sum_{i=1}^{r} \delta_{i,j} e_i + \sum_{i=r+1}^{n} 0 e_i$.
  Et : $\forall j \in [\![r+1, n]\!]$, $p(e_j) = 0$.
  Ainsi :
  $$\text{mat}_{\mathscr{B}_1}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}.$$
- Soit s la symétrie par rapport à F dans la direction de G.
  De le même manière, on obtient : On a : $\forall j \in [\![1, r]\!]$, $p(e_j) = e_j = \sum_{i=1}^{r} \delta_{i,j} e_i + \sum_{i=r+1}^{n} 0 e_i$.
  Et : $\forall j \in [\![r+1, n]\!]$, $p(e_j) = -e_j = \sum_{i=1}^{n} 0 e_i + \sum_{i=r+1}^{n} (-\delta_{i,j}) e_i$.
  Ainsi :
  $$\text{mat}_{\mathscr{B}_1}(s) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & -I_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Proposition

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finies respectivement égales à p et n, $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{C}$ une base de F et $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

Soit $x \in E$. Notons $X = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(x)$, $Y = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(u(x))$ et $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$. Alors :

$$Y = AX$$

Démonstration. Notons $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_p)$, $\mathscr{C} = (f_1,\dots,f_n)$, $\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = A = (a_{i,j})$.
Il existe un unique $(x_1,\dots,x_p) \in \mathbb{K}^p$, $(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $x = \sum_{i=1}^{p} x_j e_j$ et $u(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i f_i$.
On a

$$\begin{cases} u(x) = u\left(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j u(e_j) = \sum_{j=1}^{p} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j\right) f_i & \text{par définition de } \mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) \\ u(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i f_i. \end{cases}$$

Par unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base, on en déduit que : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j$. Ainsi, $Y = AX$. □

1.2 Opérations sur les matrices de deux applications linéaires

Proposition : Matrice d'une combinaison linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finies respectivement p et n, munis respectivement des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$. Soit $(u,v) \in \mathscr{L}(E,F)^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, $\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\lambda u + \mu v) = \lambda \mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}'}(u) + \mu \mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}'}(v)$.

Démonstration. Notons $\mathscr{B} = (e_1,...,e_p)$ et $\mathscr{C} = (f_1,...,f_p)$.
Notons $\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = A = (a_{i,j})$, $\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(v) = B = (b_{i,j})$ et $\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\lambda u + \mu v) = C = (c_{i,j})$.
Soit $j \in [\![1,p]\!]$, on a :

$$\begin{cases} (\lambda u + \mu v)(e_j) = \lambda u(e_i) + \mu v(e_i) = \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i\right) + \mu\left(\sum_{i=1}^{n} b_{i,j} f_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j}) f_i & \text{par définition de } \mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u), \mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(v) \\ (\lambda u + muv)(e_j) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,j} f_i \quad \text{par définition de } \mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\lambda u + \mu v). \end{cases}$$

Par unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base, on en déduit que : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $c_{i,j} = \lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j}$.
Ainsi : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $c_{i,j} = \lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j}$.
Ainsi, $C = \lambda A + \mu B$. □

Proposition

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces de dimensions finies respectivement égales à p et n, munis respectivement des bases $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$. Alors l'application : $\begin{array}{cccc} \Phi_{\mathscr{B},\mathscr{C}} & \mathscr{L}(E,F) & \to & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ & u & \mapsto & \mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) \end{array}$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
En particulier : $\forall (u,v) \in \mathscr{L}(E,F)^2$, $u = v; \iff \mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(v)$.

Démonstration.

- Soient $u, v \in \mathscr{L}(E,F)$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,
  $\Phi_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\lambda u + \mu v) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\lambda u + \mu v) = \lambda \mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) + \mu \mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(v) = \lambda \Phi_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) + \mu \Phi_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(v)$.
  Ainsi, $\Phi_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ est linéaire.
- Injectivité :
  Notons $\mathscr{B} = (e_1,...,e_p)$.
  Soit $u \in \mathrm{Ker}\,\Phi_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$. On a alors $0_{n,p} = \Phi_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$. Par définition, on a : $\forall j \in [\![1,p]\!]$, $u(e_j) = 0$.
  Ainsi, u coïncide sur une base avec l'application nulle : donc u est l'application nulle. On a donc : $\mathrm{Ker}\,\Phi_{\mathscr{B},\mathscr{C}} = \{0_{\mathscr{L}(E,F)}\}$.
  Ainsi, $\Phi_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ est injective.

- Surjectivité : Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Notons $\mathcal{C} = (f_1, ..., f_p)$. Il existe une unique application linéaire de $\mathcal{L}(E,F)$ telle que : $\forall j \in [\![1,p]\!],\ u(e_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} f_i$. On alors : $\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = A$. D'où la surjectivité de $\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$.

□

Corollaire

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n. Alors, $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie et

$$\dim(\mathcal{L}(E,F)) = np = \dim(E)\dim(F)$$

Démonstration. Avec l'isomorphisme précédent, $\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np$. □

Proposition : Matrice d'une composée

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finies respectives p, q, n et munis respectivement des bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(v \circ u) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(v) \times \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u).$$

Démonstration. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$, $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_q)$ et $\mathcal{B}'' = (e''_1, \dots, e''_n)$.
Notons $\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(v) = B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(v \circ u) = C = (c_{i,j}) = \mathcal{M}_{n,p}$.
Soit $j \in [\![1,p]\!]$, on a : $(v \circ u)(e_j) = v(u(e_j))$.
Par définition de $\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$, on a :

$$u(e_j) = \sum_{k=1}^{q} a_{k,j} e'_k$$

Ainsi :

$$(v \circ u)(e_j) = v\left(\sum_{k=1}^{q} a_{k,j} e'_k\right) = \sum_{k=1}^{q} a_{k,j} v(e'_k)$$

par linéarité de v. De plus, par définition de $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(v)$, on a :

$$\forall k \in [\![1,q]\!],\ v(e'_k) = \sum_{i=1}^{n} b_{i,k} e''_i.$$

D'où :

$$(v \circ u)(e_j) = \sum_{k=1}^{q} a_{k,j} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{i,k} e''_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{q} a_{k,j} b_{i,k}\right) e''_j i$$

De plus, par définition de $\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(v \circ u)$, on a :

$$(v \circ u)(e_j) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,j} e''_i$$

Ainsi, par unicité des coordonnées, on a : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} b_{i,k} a_{k,j}$.

Donc :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} b_{i,k} a_{k,j}.$$

Par définition du produit matricielle , $B \times A = C$. □

Proposition

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de <u>même dimension n</u> munis respectivement des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$

u est un isomorphisme si et seulement si $\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ est inversible.

On a alors $\left(\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)\right)^{-1} = \mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\left(u^{-1}\right)$.

Démonstration. • Supposons u bijective. On a $u^{-1} \circ u = Id_E$. On a alors :

$$\text{mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}\left(u^{-1}\right).\text{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = \text{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(Id_E) = I_n$$

ce qui prouve que $\text{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ est inversible, d'inverse $\text{mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}\left(u^{-1}\right)$.

- Notons $A = \text{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ et supposons A inversible. Soit v l'unique application linéaire de $\mathscr{L}(F,E)$ telle que $\text{mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(v) = A^{-1}$ (v existe et est unique car $\Phi_{\mathscr{C},\mathscr{B}}$ est bijective). Comme $AA^{-1} = I_n$, $\text{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)\text{mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(v) = \text{mat}_{\mathscr{C}}(Id_F)$ i.e. $\text{mat}_{\mathscr{C}}(u \circ v) = \text{mat}_{\mathscr{C}}(Id_F)$. Ainsi $u \circ v = Id_F$. De même, $v \circ u = Id_E$, donc u et v sont bijective, réciproques l'une de l'autre. u est donc un isomorphisme.

□

Exemple : Remarque :

- pour prouver que u est un isomorphisme, on aurait aussi pu remarquer que : $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = \dim \mathbb{R}^3$ et prouver l'injectivité de u :
  Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$\begin{aligned} u(P) = 0 &\iff P(0) = P(1) = P(2) \\ &\iff P = 0 \text{ car } \deg(P) \leq 2 \text{ et } P \text{ admet au moins 3 racines distinctes} \end{aligned}$$

  Ainsi, u est injective.
- Pour prouver que u est un isomorphisme et déterminer u^{-1}, on aurait pu résoudre un système : Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, soit $P = aX^2 + bX + c$, on a :

$$u(P) = (x,y,z) \iff \ldots$$

  x, y, z sont les paramètres et a, b, c les inconnues.

1.3 Matrice d'une famille de vecteurs - Matrice de passage

Définition : Matrice d'une famille de vecteurs

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_p)$, une famille de vecteurs de E.
On appelle matrice de la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ dans la base $\mathscr{B}$ et on note $\text{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \text{mat}_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots, u_p)$ la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}$ dont la j-ème colonne est $\text{mat}_{\mathscr{B}}(u_j)$.

$$\text{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = (m_{i,j}) = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \ldots & m_{1,j} & \ldots & m_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{i,1} & \ldots & m_{i,j} & \ldots & m_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \ldots & m_{n,j} & \ldots & m_{n,p} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \forall j \in [\![1,p]\!],\ u_j = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} e_i.$$

Proposition

Soit $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

$$\text{mat}_{\mathscr{B}}\mathscr{B} = I_n$$

Démonstration. Soit $j \in [\![1,p]\!]$, on a $e_j = \sum_{i=1}^{p} \delta_{i,j} e_i$.
Donc $\text{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = (\delta_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]} = I_n$. □

Exemple : Considérons $E = \mathbb{K}^3$ et $\mathscr{B}$ sa base canonique.
Soit $x_1 = (1,2,3)$, $x_2 = (2,0,1)$ vecteurs de E.
On a :

$$\text{mat}_{\mathscr{B}}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque : Soient E, F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimension finie respectivement n, p. Soit $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E et $\mathscr{C}$ une base de F. Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$, on a :

$$\text{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = \text{mat}_{\mathscr{C}}(u(e_1), ..., u(e_p)).$$

Corollaire

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B}$ une base E et $(u_1,\dots,u_n)\in E^n$.

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_n) \text{ est inversible si et seulement si } (u_1,\dots,u_n) \text{ est une base de } E.$$

Démonstration. Notons $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$. Il existe un unique endomorphisme $u\in\mathscr{L}(E)$ tel que : $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $u(e_k)=u_k$. On a alors $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_n)=\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u)$, d'où :

$$\begin{aligned}\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_n) \text{ inversible } &\Leftrightarrow \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) \text{ est inversible}\\ &\Leftrightarrow u \text{ est bijectif}\\ &\Leftrightarrow (u(e_1),\dots,u(e_n))=(u_1,\dots,u_n) \text{ est une base de } E.\end{aligned}$$

□

Définition

Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E, on appelle matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ et on note $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ la matrice $\mathrm{mat}_B(B')$.

Remarque : Il est fréquent d'utiliser l'appellation d' « ancienne base » pour la base $\mathscr{B}$ et de « nouvelle base »pour la base $\mathscr{B}'$.
Exemple : Posons $E=\mathbb{R}_2[X]$ et notons $\mathscr{B}$ la base canonique de E. On montre facilement que la famille $\mathscr{B}'=(X+1,3X-2,X^2+X)$ est aussi une base de E. On a :

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&3&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ deux bases de E.

- $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}=\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(Id_E)$.
- $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}}=I_n$.
- $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est inversible et $\left(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\right)^{-1}=P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$

Démonstration.
- Posons $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ et $\mathscr{B}'=(e'_1,\dots,e'_n)$. On a :
  $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(Id_E)=\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(Id_E(e'_1),\dots,Id_E(e'_n))=\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(e'_1,\dots e'_n)=\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')=P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$.
- $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}}=\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(Id_E)=I_n$.
- $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}=\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(Id_E)\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(Id_E)=\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(Id_E)=I_n$. Ainsi, $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est inversible et $\left(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\right)^{-1}=P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$.
  Remarque, on le savait déjà car $\mathscr{B}'$ est une base de E donc par une proposition précédente, $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$ est inversible.

□

Remarque : ⚠ Si $\mathscr{B}\neq\mathscr{B}'$, $\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(Id_E)\neq I_n$.

1.4 Formules de changement de base

Proposition : Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.
Soit $x\in E$. Notons $X=\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $X'=\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(x)$. On a :

$$X=P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}X'$$

Démonstration. On a $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}X'=\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(Id_E)\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(x)=\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(Id_E(x))=\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(x)=X$. □

Proposition : Effet d'un changement de base sur la matrice d'une application linéaire

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n. Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux bases de F. Soit $u\in\mathscr{L}(E,F)$. En notant $P=P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$, $Q=P_{\mathscr{C},\mathscr{C}'}$, $A=\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ et $A'=\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u)$, on a :

$$A'=Q^{-1}AP$$

Démonstration. On a $Q^{-1} = P_{\mathscr{C}',\mathscr{C}}$.
Ainsi : $Q^{-1}AP = P_{\mathscr{C}',\mathscr{C}}\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \mathrm{mat}_{\mathscr{C},\mathscr{C}'}(Id_F)\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(Id_E) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(Id_F \circ u \circ Id_E) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u) = A'$. □

Corollaire : Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. En notant $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$, $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u)$ et $A' = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(u)$, on a :

$$A = P^{-1}AP$$

Remarque : $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(u)$ et $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u)$ représentent le même endomorphisme dans des bases différentes. On dit que ces matrices sont semblables. (Il s'agit d'une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.)

2 Noyau, image et rang d'une matrice

2.1 Définitions

Définition

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle application linéaire canoniquement associée à A l'unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ est A.

Remarque : Notons $\mathscr{B}_p$ et $\mathscr{B}_n$ les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$. Soit $x \in \mathbb{K}^p$. On sait que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_n}(u(x)) = A \times \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_p}(x)$.
Ainsi, l'application linéaire canoniquement associée à $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \to & \mathbb{K}^n \\ (x_1, \dots, x_p) & \mapsto & (y_1, \dots, y_n) \end{array}$$

où $(y_1, \dots, y_n)$ est l'unique n- uplet tel que : $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.
En pratique, on identifie souvent $\mathbb{K}^p$ avec $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$ avec $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Avec cette convention, l'application canoniquement associée s'écrit : $X \mapsto AX$.
Vocabulaire :
Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on parle aussi d'endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associée à A.

Exemple : L'application linéaire canoniquement associée à la matrice $I_n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est $Id_{\mathbb{K}^n}$.

Définition

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

- On appelle noyau de A et on note $Ker\, A$ le sous-ensemble de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ défini par :

$$\mathrm{Ker}\, A = \{X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})\ ,\ AX = 0\}$$

- On appelle image de A en note $\mathrm{Im} A$ le sous-ensemble de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ défini par :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im} A &= \{Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})\ ,\ \exists X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}), Y = AX\} \\ &= \{AX\ ,\ X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})\} \end{aligned}$$

Remarque :

- $\mathrm{Ker}\, A$ et $\mathrm{Im} A$ s'interprète en termes de systèmes linéaires :
  - $\mathrm{Ker}\, A$ correspond à l'ensemble des solutions du système linéaire homogène associé à A.
  - $\mathrm{Im} A$ correspond à l'ensemble des seconds membres tel que le système linéaire associé à A admette des solutions.
- Posons $v : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & AX \end{array}$. v est linéaire. De plus, on a : $\mathrm{Ker}\, v = \mathrm{Ker}\, A$ et $\mathrm{Im} v = \mathrm{Im} A$. En particulier,$\mathrm{Ker}\, A$ et $\mathrm{Im} A$ sont des sous-espaces vectoriels.
- En notant u_A l'application canoniquement associée à A et en identifiant les matrices colonne de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$, $\mathrm{Ker}\, A$ s'identifie à $\mathrm{Ker}\, u_A$ et $\mathrm{Im} A$ s'identifie à $\mathrm{Im}\, u_A$.

Proposition

En notant C_1, ..., C_p les colonnes de A, on a :

$$\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_p)$$

Démonstration. Posons $v: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & AX \end{array}$ v est linéaire et $\operatorname{Im} v = \operatorname{Im} A$.

De plus, $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ Donc

$$\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} v = \operatorname{Vect}\left(A\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, A\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, A\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_p)$$

□

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle rang de A le rang de la famille $(C_1, \dots, C_p)$ des colonnes de A. On note :

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(C_1, \dots, C_p)$$

Remarque : On a ainsi $\operatorname{rg}(A) = \dim \operatorname{Im} A$.

Exemple : Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$. Déterminer $\operatorname{rg}(A)$.

On a $C_1 = C_1$ et $C_3 = 2C_1$. Donc $\operatorname{Vect}(C_1, C_2, C_3, C_4) = \operatorname{Vect}(C_1, C_4)$. De plus, C_1 et C_4 ne sont pas colinéaires donc (C_1, C_4) est libre. Ainsi, $\operatorname{rg}(A) = 2$.

Proposition

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels de dimensions finies respectivement égales à p et n. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases respectives de E et F. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Notons $A = \operatorname{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$. On a : $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(u)$.

Démonstration. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$, $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ et $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de A.
On sait que

$$\phi: \begin{array}{ccc} F & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x & \to & \operatorname{mat}_{\mathcal{C}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Ainsi,

$$\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(\phi \circ u) \quad \text{car } \phi \text{ est un isomorphisme}$$

Or, $(e_1, \dots e_p)$ est une base de E donc une famille génératrice de E.
Ainsi, $\operatorname{Im}(\phi \circ u) = \operatorname{Vect}(\phi(u(e_1)), \dots, \phi(u(e_p)))$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(\phi \circ u) &= \dim(\phi(u(e_1)), \dots, \phi(u(e_p))) \\ &= \operatorname{rg}(\operatorname{mat}_{\mathcal{C}}(u(e_1)), \dots, \operatorname{mat}_{\mathcal{C}}(u(e_p))) \\ &= \operatorname{rg}(C_1, \dots, C_p) \\ &= \operatorname{rg} A \end{aligned}$$

□

Corollaire

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, le rang d'une matrice A est égal au rang de l'application u canoniquement associée à A.

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- $\mathrm{rg}(A) \leq \min(n, p)$
- Théorème du rang : $p = \dim(\mathrm{Ker}\, A) + \mathrm{rg}(A)$

Démonstration. On connait ces résultats pour u_A. De plus, $\mathrm{rg}(u_A) = \mathrm{rg}(A)$ et en utilisant l'identification entre $\mathrm{Ker}\, A$ et $\mathrm{Ker}\, u_A$, on en déduit le résultat pour A. □

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a les équivalences suivantes :

$$A \text{ inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Ker}(A) = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}(A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \quad \Leftrightarrow \quad rg(A) = n.$$

Démonstration. A est inversible si et seulement si son application canoniquement associée $u_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ est bijective si et seulement si u_A est injective ($\mathrm{Ker}\, A = \{0\}$, via l'identification entre $\mathrm{Ker}\, u_A$ et $\mathrm{Ker}\, A$) si et seulement si u_A est surjective ($\mathrm{Im}(A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, via l'identification entre $\mathrm{Im}\, u_A$ et $\mathrm{Im}\, A$) ssi $\mathrm{rg}(A) = n$. □

2.2 Calcul du rang

Proposition

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $P \in GL_p(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_n(\mathbb{K})$.

$$\mathrm{rg}(QA) = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(AP)$$

Démonstration. Notons u, v et w les applications linéaires canoniquement associées à A, P et Q. Notons $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_n$ les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$. Alors $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}^p,\mathcal{B}^n}(u)$, $P = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}^p}(v)$ et $Q = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}^n}(w)$. Ainsi, $AP = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}^p,\mathcal{B}^n}(u)\mathrm{mat}_{\mathcal{B}^p}(v) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}^p,\mathcal{B}^n}(u \circ v)$. Ainsi, $u \circ v$ est canoniquement associée à AP, De même, on obtient que $w \circ u$ est canoniquement associée à QA. Comme P et Q sont inversibles, v et w sont des isomorphismes. On a alors vu dans un chapitre précédent que $\mathrm{rg}(u \circ v) = \mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(w \circ u)$, donc $\mathrm{rg}(AP) = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(QA)$. □

Corollaire

Si $A \underset{L}{\sim} B$ ou $A \underset{C}{\sim} B$, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$.
Ainsi, le rang d'une matrice est invariant lorsque l'on effectue des opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes.

Démonstration. Si $A \underset{L}{\sim} B$, il existe E produit de matrices d'opérations élémentaires telle que $B = EA$. De plus, E est inversible, donc $rg(B) = rg(A)$. Le résultat se montre de même si $A \underset{C}{\sim} B$. □

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, le rang de A est le nombre de pivots non nuls dans l'unique matrice réduite échelonnée par lignes équivalente par lignes à A.

Démonstration. Notons R l'unique matrice échelonnée réduit équivalente par lignes à A. On a $A \underset{L}{\sim} R$. Par la proposition précédente, on a $rg(A) = rg(R)$. Notons r le nombre de pivots (non nuls). Ainsi :

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ & & & 0 & & & & 1 & * & \cdots & * & & * & \cdots & * \\ \vdots & & & & & & & & & & & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & & & & & & & & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & 0 & & & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

où $*$ désigne un coefficient nul ou pas. Par permutations des colonnes de R, on obtient la matrice :

$$R' = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

avec $R' \underset{C}{\sim} R$.
Enfin, en annulant les coefficients sur les $p - r$ dernières colonnes à l'aide d'opérations élémentaires sur les colonnes, on obtient :

$$J_r = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

avec $J_r \underset{C}{\sim} R'$.
Ainsi, on a $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(R) = \operatorname{rg}(R') = \operatorname{rg}(J_r) = r$. En effet si on note $C_1, \ldots, C_p$ les colonnes de J_r, on a :

$$rg(J_r) = \dim Vect(C_1, \ldots, C_p) = \dim Vect(C_1, \ldots, C_r) = r$$

où $(C_1, ..., C_r)$ est libre. □

Corollaire

Le rang d'un système linéaire est égal au rang de sa matrice.

Démonstration. Par définition, le rang d'un système linéaire (S) de matrice associée A est égal au nombre de pivots de l'unique matrice échelonnée réduite par lignes équivalente par lignes à A. □

Proposition : Rang de la transposée

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}({}^tA)$.

Démonstration. Notons R l'unique matrice échelonnée réduite par lignes équivalente par lignes à A. Comme $A \underset{L}{\sim} R$, $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(R)$. De plus, il existe E produit de matrices d'opérations élémentaires donc inversible tel que $A = ER$. Alors ${}^tA = {}^tR\,{}^tE$. Or $E \in GL_n(\mathbb{K})$ donc ${}^tE$ est inversible, on a ainsi $\operatorname{rg}({}^tA) = \operatorname{rg}({}^tR)$.
Notons $r = \operatorname{rg} R$. Par définition le rang de ${}^tR$ est égal au rang de la famille des colonnes de ${}^tR$ et donc au rang de la famille $(L_1, ..., L_n)$ des vecteurs lignes de R.
Or, les $n - r$ dernières lignes de R sont nulles (r pivots dans R). Ainsi,

$$\operatorname{Vect}(L_1, ..., L_n) = \operatorname{Vect}(L_1, ..., L_r)$$

Ainsi, $(L_1, ..., L_r)$ est une famille génératrice de $\operatorname{Vect}(L_1, ..., L_n)$.
Ainsi, $\operatorname{rg}({}^tR) = \dim(\operatorname{Vect}(L_1, ..., L_n)) = \dim(\operatorname{Vect}(L_1, ..., L_r)) \leq r = \operatorname{rg}(R)$.
On a donc : $\operatorname{rg}({}^tR) \leq \operatorname{rg}(R)$. Ainsi : $\operatorname{rg}({}^tA) \leq \operatorname{rg}(A)$. Or ceci vaut pour toute matrice A, donc on a aussi $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}({}^t({}^tA)) \leq \operatorname{rg}({}^tA)$ puis $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}({}^tA)$. □

Corollaire

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Si on note $L_1, \ldots, L_n$ les lignes de A, on a :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(L_1, \ldots, L_n).$$

Démonstration. Les lignes de A sont les colonnes de ${}^t A$, le résultat vient donc directement de $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^t A)$. □