Développements limités

$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^x - x \in \mathbb{R}$

1) f dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x - 1$

Déf : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0 \iff x > 0$

Par croissances comparées $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x - x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$ d'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

valeurs de x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$e^{-n} > 0$ donc $e^{-n} + 1 \in [1, +\infty[$

or d'après ① f continue sur $[0, +\infty[$, strictement croissante sur $[0, +\infty[$

donc : $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow [1, +\infty[$ bijective

d'où $\exists! \, x_n \in \mathbb{R}^+$, $f(x_n) = 1 + e^{-n}$

or : $1 + e^{-n} \neq 1$ donc : $x_n \neq 0$

$f(x_n) = e^{x_n} - x_n = 1 + e^{-n}$ donc $e^{x_n} - 1 - x_n = e^{-n}$

3) a) $\exp \in \mathcal{C}^5$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall k \in [\![0, 5]\!]$, $\exp^{(k)} = \exp$

Déf : (Taylor-Lagrange)

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \underset{x \to 0}{o}(x^4)$$

b) $\frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc :

$$e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n} = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Par croissances comparées, $n^2 e^{-n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc : $e^{-n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

D'où : $e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n} - e^{-n} = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Donc : $e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n} - e^{-n} \sim \frac{1}{2n^2}$.

c) $\frac{1}{2n^2} > 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

Donc, à partir d'un certain rang,

$$e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n} - e^{-n} > 0$$

(ie) $e^{-n} + 1 < e^{1/n} - \frac{1}{n}$

D'où : $f(x_n) = 1 + e^{-n} < e^{1/n} - \frac{1}{n} = f\left(\frac{1}{n}\right)$

à partir d'un certain rang

Donc : à partir d'un certain rang,

$$0 < x_n < \frac{1}{n}$$

Par suite $x_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

4) On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $e^{x_n} - 1 - x_n = e^{-n}$

or $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc : $e^{x_n} - 1 - x_n = \frac{x_n^2}{2} + o(x_n^2)$

Par suite, $\left(\frac{x_n^2}{2} + o(x_n^2)\right)^{1/2} = e^{-\frac{n}{2}}$

Donc : $\frac{|x_n|}{\sqrt{2}}\left(1 + o(1)\right) = e^{-\frac{n}{2}}$

or : $x_n > 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

donc : $x_n \sim \sqrt{2}\, e^{-\frac{n}{2}}$

I Intégration

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

Cas n°1 : $n=0$

donc : $p_n = 1 \geq 1$

Cas n°2 : $n \geq 1$

2) Soit $x>0$,

$x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0

donc : (Taylor-Reste intégral)

$$\ln(1+x) = \ln(1) + x - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{+2}{(1+t)^3}\frac{(-t)^2}{2!}dt$$

$$= x - \int_0^x \frac{-1}{(1+t)^2}\frac{(-t)^1}{1!}dt$$

$$= x - \int_0^x \frac{t}{(1+t)^2}dt$$

Or : $x>0$ donc : $\forall t \in [0, x]$, $\frac{t}{(1+t)^2} \geq 0$

Par croissance de l'intégrale,

$$\ln(1+x) - x \leq 0$$

De plus $\forall t \in [0, x]$, $\frac{t}{(1+t)^2} \leq t$

D'où : $(0<x)$ $\int_0^x \frac{t}{(1+t)^2}dt \leq \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$

Donc : $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

D'après ②,

$\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\begin{cases} k>0 \\ \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} - \frac{k(n-k)}{2n^4} \leq \ln\left(1+\frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}\right) \leq \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} \end{cases}$

En sommant, on obtient

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} - \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^n \frac{k(n-k)}{n^2} \leq S_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}$$

car $S_n = \ln(p_n) = \sum_{k=1}^n \ln\left(1+\frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}\right)$

4) <u>Soit $n \in \mathbb{N}^*$</u>

<u>Soit $k \in [\![1, n]\!]$</u>,

$$\begin{cases} k \leq n \\ n-k \leq n \end{cases} \quad \text{et} \quad nk \geq 0$$

<u>Donc</u>, $k(n-k) \leq n^2$

$k \geq 0$ et $n-k \geq 0$ <u>donc</u>, $k(n-k) \geq 0$

<u>D'où</u> $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k(n-k)}{n^2} \in [0, n]$

<u>D'où</u> $\displaystyle 0 \leq \frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{k(n-k)}{n^2} \leq \frac{1}{2n}$

Par encadrement $\displaystyle \frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{k(n-k)}{n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

5) <u>Soit $n \in \mathbb{N}^*$</u>,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}\left(1 - \frac{k}{n}\right)}$$

on reconnaît une somme de Riemann sur $[0, 1]$ de $x \mapsto \sqrt{x(1-x)}$ <u>d'où</u>,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\, dx$$

6) $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \,/\, y^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4} \right\}$

a) <u>Soit $(x, y) \in D$</u>

<u>Donc</u> : $\begin{cases} y^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4} \\ x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$

<u>donc</u> : $y \geq 0$ et $x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 \leq \frac{1}{4}$

<u>d'où</u> : $x(x-1) + y^2 \leq 0$

<u>Donc</u>, $0 \leq y^2 \leq x(1-x)$

<u>or</u> : $y \geq 0$ et $x(1-x) \geq 0$

<u>Donc</u> : $0 \leq y \leq \sqrt{x(1-x)}$

$x(1-x) \geq 0$

Valeur de x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
Signe de x	$-$	$+$	$+$	
Signe $(1-x)$	$+$	$+$	$-$	

$\underbrace{\quad}_{x \geq 0 \text{ et } 1-x \geq 0}$

Donc : $x \in [0, 1]$

Finalement $\begin{cases} x \in [0, 1] \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, $x \in [0,1]$ et $0 \leq y \leq f(x)$

donc : $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^+$

$0 \leq y \leq f(x)$ d'où $y^2 \leq f(x)^2 = x(1-x) = x - x^2$

Donc : $x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 \leq \frac{1}{4}$

D'où $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$ (ie) $(x,y) \in D$

5) D est ~~un~~ demi disque centré en $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

Donc : $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,dx = \frac{\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi}{8}$

7) Par encadrement puisque

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} - \frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{k(n-k)}{n^2} \longrightarrow \frac{\pi}{8} \\ \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} \longrightarrow \frac{\pi}{8} \end{cases}$$

on a (d'après 5) $S_n \longrightarrow \frac{\pi}{8}$

Par continuité de exp en $\frac{\pi}{8}$, $e^{S_n} = P_n \longrightarrow e^{\frac{\pi}{8}}$

Probabilités

1) $X_0=0$ et $X_0=1$ forment un système complet d'événements donc,

$$\mathbb{P}(X_1=1) = \mathbb{P}(X_1=1 \mid X_0=0)\,\mathbb{P}(X_0=0) + \mathbb{P}(X_1=1 \mid X_0=1)\,\mathbb{P}(X_0=1)$$

$$= \frac{1}{2}(1-p+p) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(X_1=0) = 1-\mathbb{P}(X_1=1) = \frac{1}{2}$$

Donc : $X_1 \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=0 \mid X_n=0) = p$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=0 \mid X_n=1) = 1-p$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=1 \mid X_0=0) = 1-p$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=1 \mid X_0=1) = p$$

D'où : $M_n = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=0) = \mathbb{P}(X_{n+1}=0 \mid X_n=0)\,\mathbb{P}(X_n=0) + \mathbb{P}(X_{n+1}=0 \mid X_n=1)\,\mathbb{P}(X_n=1)$$

$$= p\,\mathbb{P}(X_n=0) + (1-p)\,\mathbb{P}(X_n=1)$$

De même $\mathbb{P}(X_{n+1}=1) = p\,\mathbb{P}(X_n=1) + (1-p)\,\mathbb{P}(X_n=0)$

d'où : $\gamma_{n+1} = M_n \gamma_n$.

4) on a montré que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\gamma_{n+1} = M\gamma_n$

Donc : $\gamma_1 = M\gamma_0$; $\gamma_2 = M\gamma_1 = M(M\gamma_0) = M^2\gamma_0$

on montre par récurrence sur $\mathbb{N}$ que,

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\gamma_n = M^n \gamma_0$

Puisque $M^0 = I_2$, on a $\gamma_0 = M^0 \gamma_0$

5) a) Soit $A = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$AP = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = I_2$

Donc : $P \in GL_2(\mathbb{R})$ et $P^{-1} = A = \frac{+1}{2}\begin{pmatrix} +1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}P$

b) $P^{-1}MP = \frac{1}{2}PMP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}P$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1+2p & 1-2p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2+4p \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2p-1 \end{pmatrix} = D$

c) on a $M^0 = I_2 = PD^0P^{-1}$

par récurrence sur $\mathbb{N}$,

$M^{n+1} = MM^n = (PDP^{-1})(PD^nP^{-1})$

$= PD^{n+1}P^{-1}$ pour $n \in \mathbb{N}$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$

$= \frac{1}{2}PD^nP$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2p-1)^n \end{pmatrix}P$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & (2p-1)^n \\ 1 & -(2p-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+(2p-1)^n & 1-(2p-1)^n \\ 1-(2p-1)^n & 1+(2p-1)^n \end{pmatrix}$

6) $X_0 \sim \mathcal{B}(q)$

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\gamma_n = \Pi^n \gamma_0$$

Donc : $\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}\left(q + q(2p-1)^n + (1-q) - (1-q)(2p-1)^n\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + (2p-1)^n(2q-1)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - (1-2q)(2p-1)^n\right)$$

D'où : $\begin{cases} X_n \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2} - \frac{1-2q}{2}(2p-1)^n\right) \\ \mathbb{E}[X_n] = \frac{1}{2} - \frac{1-2q}{2}(2p-1)^n \end{cases}$

Séries

1) $\ell > 1$.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow \ell$ et $\ell > 1$

Soit $R = \frac{\ell+1}{2}$. Puisque $\ell > 1$, $R \in]1, \ell[$

Donc : $R < \ell$ et $R > 1$

Donc, $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0) \Rightarrow \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} > R\right)$

~~Dém~~ : Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$

$u_{n+1} \geq R u_n$ donc : $u_n \leq \frac{1}{R} u_{n+1} = R^{-1} u_{n+1}$

$u_{n_0} \leq R^{-1} u_{n_0+1}$

$\leq R^{-1}\left(R^{-1} u_{n_0+2}\right) = R^{-2} u_{n_0+2}$

$\leq \dots$

$\leq R^{-n+n_0} u_n$ Donc : $R^n u_{n_0} \leq R^{n_0} u_n$

or : $u_{n_0} > 0$ d'où, $R^n \leq \frac{R^{n_0}}{u_{n_0}} u_n$

Donc, $R^n = O(u_n)$ et $\begin{cases} u_n \geq 0 \\ R^n \geq 0 \end{cases}$

$R > 1$ donc $\sum R^n$ diverge

donc : $\sum u_n$ diverge

2) $\ell < 1$. Comme à la question précédente,

$\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow \ell < 1$. En notant $R = \frac{\ell+1}{2}$, $R \in]\ell, 1[$

donc : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0) \Rightarrow \left(u_n \leq R^{n-n_0} u_{n_0}\right)$

Donc, $u_n = O(R^n)$

or : (u_n) est positive et R^n est le terme général d'une série géométrique qui converge donc $\sum u_n$ converge

3) on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$

a) Soit $n \in \mathbb{N}$

$w_n = v_{n+1} - v_n$

$= \ln((n+1)^a) + \ln(u_{n+1}) - \ln(n^a) - \ln(u_n)$

$= \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^a\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$

$= a\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

$= \frac{a}{n} + \frac{a^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$= O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

5) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} w_k = v_{n+1} - v_1 = v_{n+1} = \ln(n^a u_n)$

Donc : $\forall n \geq 2$, $v_n = \sum_{k=1}^{n-1} w_k > w_1 = v_2 - v_1 = \ln(2^a u_2)$

$w_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc (Riemann) $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge

donc : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \in \mathbb{R}$

D'où : $\exp(v_n)$ converge vers $d > 0$ car $d = e^\ell > 0$

D'où : $\exp(v_n) = n^a u_n \sim d$

(ie) $u_n \sim \frac{d}{n^a}$

c) Par le critère de Riemann,

$a > 1 \Rightarrow \sum u_n$ converge

$a < 1 \Rightarrow \sum u_n$ diverge

4) a) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \times \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \times \frac{1}{n+1}$

$= \frac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \times \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$0 < 1$ donc d'après ② $\sum u_n$ converge

b) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$u_n = \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k)}{n^n}$

$\cancel{\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2n+2} \times \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}}$ $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+2}{(n+1)^{n+1}} \, n^n$

D'où : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2(n+1)}{n+1}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$

$$= 2\exp\left(-n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)$$

$$= 2\exp\left(-n\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \sim \frac{2}{e} < 1$$

Donc : $\sum u_n$ converge

c) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+3}{n+2} \times \frac{1}{\frac{n+2}{n+1}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{n+2}{n+3} = 1 - \dfrac{1}{n+3} = 1 - \dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \\ \dfrac{n+2}{n+1} = 1 + \dfrac{1}{n+1} = 1 + \dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \end{cases}$$

D'où :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1+\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}$$

Donc :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1-\frac{1}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{0}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

or : $0 < 1$ donc : $\sum u_n$ diverge

(on peut remarquer que $u_n \not\to 0$
donc $\sum u_n$ diverge grossièrement)