Corrigé de la feuille d'exercices 20

Exercice 1. 1. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Soit $a,b,c,d \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & (x,y,z) = au + bv + cw + dt \\ \iff & \begin{cases} a+b+c+2d = x \\ b+2c+2d = y \\ 2a+2b+2c+2d = z \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} a+b+c+2d = x \\ b+2c+2d = y \\ -2d = z-2x \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} a = x-y-z+c \\ b = -2x+y+z-2c \\ d = x - \dfrac{1}{2}z \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, il existe $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tel que $(x,y,z,t) = au+bv+cw+dt$. Donc (u,v,w,t) est bien une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} & au + bv + cw + dt = (0,0,0) \\ \iff & \begin{cases} a+b+c+2d = 0 \\ b+2c+2d = 0 \\ 2a+2b+2c+2d = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} a-c = 0 \\ b+2c = 0 \\ d = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} a = c \\ b = -2c \\ d = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc en prenant $c=1$, $a=1$, $b=-2$ et $d=0$, on a : $u-2v+w=0$ donc $w=-u+2v$.
Ainsi, $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}\,(u,v,w,t) = \mathrm{Vect}\,(u,v,t)$.
Donc : (u,v,t) est génératrice de $\mathbb{R}^3$.
Méthode 1 :
En reprenant les équivalences précédentes avec $c=0$, on a :

$$au + bv + dt = (0,0,0) \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

Ainsi, (u,v,t) est une une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
Ainsi, (u,v,t) est une base de $\mathbb{R}^3$.
Méthode 2 :
(u,v,t) est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ composée de 3 vecteurs. De plus, $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$. Ainsi, (u,v,t) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. On remarque tout d'abord que e_1 et e_2 sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$ non colinéaires. Ainsi, (e_1,e_2) est une famille libre de $\mathbb{R}^4$.
De plus, on sait que $((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$ constitue la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
Ainsi, d'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter cette famille libre en base à l'aide de vecteurs de la base canonique.
Etudions si la famille (e_1,e_2,f_3,f_4) est libre où $f_3 = (1,0,0,0)$ et $f_4 = (0,0,1,0)$.

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = (0,0,0,0) \\
\iff & \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ -2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, (e_1, e_2, f_3, f_4) est une famille libre de quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
Ainsi, cette famille constitue une base de $\mathbb{R}_4$.

Exercice 3. 1.

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ -x + 3y + z = 0\} \\
&= \{(x, y, x - 3y), x, y \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x(1,0,1) + y(0,1,-3), x, y \in \mathbb{R}\} \\
&= \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2)
\end{aligned}$$

où $e_1 = (1,0,1)$, $e_2 = (0,1,-3)$.
Ainsi, (e_1, e_2) est une famille génératrice de E_1.
De plus, e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires donc (e_1, e_2) est une famille libre.
Ainsi (e_1, e_2) est une base de E_1 donc $\dim(E_1) = 2$.

2.

$$\begin{aligned}
E_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0 \text{ et } x - 3y = 0\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z = -4y \text{ et } x = 3y\} \\
&= \{(3y, y, -4y), y \in \mathbb{R}\} \\
&= \{y(3,1,-4), y \in \mathbb{R}\} \\
&= \mathrm{Vect}\,(e_1)
\end{aligned}$$

où $e_1 = (3,1,-4)$.
Ainsi, (e_1) est une famille génératrice de E_2.
De plus, $e_1 \neq 0$ donc (e_1) est une famille libre.
Ainsi (e_1) est une base de E_2 donc $\dim(E_2) = 1$.

3.

$$\begin{aligned}
E_3 &= \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P(0) = 0\} \\
&= \{aX^2 + bX + c, a, b, c \in \mathbb{R}, c = 0\} \\
&= \{aX^2 + bX, a, b \in \mathbb{R}\} \\
&= \mathrm{Vect}\,(X^2, X)
\end{aligned}$$

Ainsi, (X, X^2) est une famille génératrice de E_3.
De plus, X et X^2 ne sont pas colinéaires. Donc la famille (X, X^2) est libre.
Ainsi, (X, X^2) est une base de E_3 donc $\dim(E_3) = 2$.

4.

$$\begin{aligned}
E_4 &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\,(M_1, M_2, M_3)
\end{aligned}$$

où $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Ainsi, (M_1, M_2, M_3) est une famille génératrice de E_4.
Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} & \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3 = 0 \\ \iff & \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, la famille (M_1, M_2, M_3) est libre.
Donc (M_1, M_2, M_3) est une base de E_4 donc $\dim(E_4) = 3$.

5. Notons $f_1 : x \mapsto x$ et $f_2 : x \mapsto e^x$. On a donc :

$$\begin{aligned} E_5 &= \{af_1 + bf_2 \mid a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}(f_1, f_2) \end{aligned}$$

Ainsi, (f_1, f_2) est une famille génératrice de E_5.
De plus, f_1 et f_2 ne sont pas colinéaires donc (f_1, f_2) est une famille libre de E_5.
Ainsi, (f_1, f_2) est une base de E_5 donc $\dim(E_5) = 2$.

Exercice 4. 1.

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - 2y + 3z = 0\} \\ &= \{(2y - 3z, y, z), y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(2, 1, 0) + z(-3, 0, 1), \mid y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}(e_1, e_2) \end{aligned}$$

où $e_1 = (2, 1, 0)$ et $e_2 = (-3, 0, 1)$.
Ainsi, (e_1, e_2) est une famille génératrice de E_1. De plus, e_1 et e_2 sont non colinéaires donc (e_1, e_2) est une famille libre.
Ainsi, (e_1, e_2) est une base de E_1 donc $\dim(E_1) = 2$.

2.

$$\begin{aligned} E_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = 2y = 3z\} \\ &= \{(2y, y, \frac{2}{3}y), y \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{y\left(2, 1, \frac{2}{3}\right), y \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \mathrm{Vect}(e_1) \end{aligned}$$

où $e_1 = \left(2, 1, \frac{2}{3}\right)$. Ainsi, (e_1) est une famille génératrice de E_2.
De plus, $e_1 \neq 0$ donc (e_1) est libre.
Ainsi, (e_1) est une base de E_2 donc $\dim(E_2) = 1$.

3. Soient $x, y, z, t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ z+t=0 \\ x+t=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ z+t=0 \\ -y+t=0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ z+t=0 \\ z+t=0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ z+t=0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x=-t \\ y=t \\ z=-t \end{cases}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} E_3 &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y=0, y+z=0, z+t=0, t+x=0\} \\ &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x=-t, y=t, z=-t\} \\ &= \{(-t,t,-t,t), t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{t(-1,1,-1,1), t \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}\,(e_1) \end{aligned}$$

où $e_1 = (-1,1,-1,1)$.
Ainsi, (e_1) est une famille génératrice de E_3.
De plus, $e_1 \neq 0$ donc (e_1) est libre.
Ainsi, (e_1) est une base de E_3 donc $\dim(E_3) = 1$.

4. **Méthode 1 :**
Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$

$$\begin{aligned} E_4 &= \{P \in \mathbb{R}_4[X],\ P(1)=0\} \\ &= \{aX^4+bX^3+cX^2+dX+e,\ a,b,c,d,e \in \mathbb{R},\ a+b+c+d+e=0\} \\ &= \{aX^4+bX^3+cX^2+dX-a-b-c-d, a,b,c,d \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a(X^4-1)+b(X^3-1)+c(X^2-1)+d(X-1), a,b,c,d \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}\,(X^4-1, X^3-1, X^2-1, X-1) \end{aligned}$$

Ainsi, $(X^4-1, X^3-1, X^2-1, X-1)$ est une famille génératrice de E_4.
De plus, $(X^4-1, X^3-1, X^2-1, X-1)$ est une famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés.
Donc $(X^4-1, X^3-1, X^2-1, X-1)$ est une famille libre.
Ainsi, $(X^4-1, X^3-1, X^2-1, X-1)$ est une base de E_4 donc $\dim(E_4) = 4$.
Méthode 2 :
Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$

$$\begin{aligned} E_4 &= \{P \in \mathbb{R}_4[X],\ P(1)=0\} \\ &= \{P \in \mathbb{R}_4[X],\ (X-1)|P\} \\ &= \{P \in \mathbb{R}_4[X],\ \exists Q \in \mathbb{R}_3[X], P=(X-1)Q\} \text{ car } P \in \mathbb{R}_4[X] \\ &= \{P \in \mathbb{R}_4[X],\ \exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4,\ P=(X-1)(aX^3+bX^2+cX+d)\} \\ &= \{P \in \mathbb{R}_4[X],\ \exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4,\ P=aX^3(X-1)+bX^2(X-1)+cX(X-1)+d(X-1)\} \\ &= \{aX^3(X-1)+bX^2(X-1)+cX(X-1)+d(X-1),\ a,b,c,d \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}\,(X^3(X-1), X^2(X-1), X(X-1), X-1) \end{aligned}$$

Ainsi, $(X^3(X-1), X^2(X-1), X(X-1), X-1)$ est une famille génératrice de E_4.
De plus, $(X^3(X-1), X^2(X-1), X(X-1), X-1)$ est une famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés.
Donc $(X^3(X-1), X^2(X-1), X(X-1), X-1)$ est une famille libre.
Ainsi, $(X^3(X-1), X^2(X-1), X(X-1), X-1)$ est une base de E_4 donc $\dim(E_4) = 4$.

Exercice 5. Soit $x, y, z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+iy-z=0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x+y+z=0 \\ (-1+i)y-2z=0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x=-\dfrac{(1+i)}{2}y \\ z=\dfrac{(-1+i)}{2}y \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3, x+y+z=0 \text{ et } x+iy-z=0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3, x=-\frac{(1+i)}{2}y \text{ et } z=\frac{(-1+i)}{2}y\} \\ &= \left\{\left(-\frac{(1+i)}{2}y, y, \frac{(-1+i)}{2}y\right), y \in \mathbb{C}\right\} \\ &= \left\{y\left(-\frac{(1+i)}{2}, 1, \frac{(-1+i)}{2}\right), y \in \mathbb{C}\right\} \\ &= \operatorname{Vect}(e_1) \end{aligned}$$

où $e_1 = \left(-\dfrac{(1+i)}{2}, 1, \dfrac{(-1+i)}{2}\right)$.
Ainsi, (e_1) est une famille génératrice de F.
De plus, $e_1 \neq 0$ donc (e_1) est une famille génératrice de F. Donc (e_1) est une famille libre de F.
Ainsi, (e_1) est une base de F donc $\dim(F) = 1$.

Exercice 6. • **Dimension de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$:**

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_n(\mathbb{K}) &= \left\{(m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) | \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i \neq j \implies m_{i,j}=0\right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} m_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & m_{n,n} \end{pmatrix} | \forall i \in [\![1,n]\!],\ m_{i,i} \in \mathbb{K} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} E_{i,i} | \forall i \in [\![1,n]\!],\ m_{i,i} \in \mathbb{K} \right\} \end{aligned}$$

Posons $\mathcal{F} = (E_{i,i})_{1 \leq i \leq n}$.
Ainsi, $\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = \operatorname{Vect}(\mathcal{F})$.
Donc $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$.
De plus, cette famille est libre en tant que sous-famille d'une famille libre (sous famille de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Ainsi, la famille $\mathcal{F}$ est libre.
$\mathcal{F}$ est donc une base de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$.
Il nous reste à compter le nombre d'éléments de cette famille :

$$\dim(\mathcal{D}_n(\mathbb{K})) = n$$

- **Dimension de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$:**

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) &= \left\{(m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) | \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i > j \implies m_{i,j} = 0\right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & m_{n,n} \end{pmatrix} | \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \text{ tel que } i \leq j,\ m_{i,j} \in \mathbb{K} \right\} \\
&= \left\{ \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} m_{i,j} E_{i,j} | \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \text{ tel que } i \leq j,\ m_{i,j} \in \mathbb{K} \right\}
\end{aligned}$$

Posons $\mathcal{F} = (E_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$.
Ainsi, $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) = \text{Vect}\,(\mathcal{F})$.
Donc $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.
Pour prouver le caractère libre de cette famille, on peut utiliser le même argument que pour la famille de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$.
On peut aussi le prouver à la main :
Soit $(\mu_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}
& \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \mu_{i,j} E_{i,j} = 0 \\
\iff \quad & \begin{pmatrix} \mu_{1,1} & \mu_{1,2} & \cdots & \mu_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_{n,n} \end{pmatrix} = 0 \\
\iff \quad & \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \text{ tel que } i < j,\ \mu_{i,j} = 0
\end{aligned}$$

Ainsi, la famille $\mathcal{F}$ est libre.
$\mathcal{F}$ est donc une base de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.
Il nous reste à compter le nombre d'éléments de cette famille :

$$\begin{aligned}
\dim\left(T_n^+(\mathbb{K})\right) &= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 1 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} 1 \\
&= \sum_{i=1}^{n} (n - i + 1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \\
&= \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

- **Dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$:**

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) &= \left\{(m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) | \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ m_{i,j} = m_{j,i}\right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,n} \\ m_{1,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & m_{n-1,n} \\ m_{1,n} & \cdots & m_{n-1,n} & m_{n,n} \end{pmatrix} | \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \text{ tel que } i \leq j,\ m_{i,j} \in \mathbb{K} \right\} \\
&= \left\{ \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} E_{i,i} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_{i,j} (E_{i,j} + E_{j,i}) | \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \text{ tel que } i \leq j,\ m_{i,j} \in \mathbb{K} \right\}
\end{aligned}$$

Posons $\mathcal{F} = (E_{i,i})_{i \in [\![1,n]\!]}$ et $\mathcal{G} = (E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n}$.
Ainsi, $S_n(\mathbb{K}) = \text{Vect}\,(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$.

Donc $\mathcal{L} = \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est une famille génératrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.
Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ et $(\mu_{i,j})_{1\leq i<j\leq n}$ deux familles d'éléments de $\mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \lambda_i E_{i,i} + \sum_{1\leq i<j\leq n} \mu_{i,j}(E_{i,j} + E_{j,i}) = 0 \\
\iff &\begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_{1,2} & \cdots & \mu_{1,n} \\ \mu_{1,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mu_{n-1,n} \\ \mu_{1,n} & \cdots & \mu_{n,n-1} & \lambda_{n,n} \end{pmatrix} = 0 \\
\iff &\forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i = 0 \text{ et } \forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2 \text{ tel que } i < j,\ \mu_{i,j} = 0
\end{aligned}$$

Ainsi, la famille $\mathcal{L}$ est libre.
$\mathcal{L}$ est donc une base de $S_n(\mathbb{K})$.
Il nous reste à compter le nombre d'éléments de cette famille :

$$\begin{aligned}
\dim(S_n(\mathbb{K})) &= \sum_{i=1}^{n} 1 + \sum_{1\leq i<j\leq n} 1 \\
&= n + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} 1 \\
&= n + \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \\
&= n + \sum_{k=1}^{n-1} k \\
&= n + \frac{n(n-1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

- **Dimension de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$:**
  Méthode 1 :
  On sait que $A_n(\mathbb{K}) \oplus S_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Ainsi, $\dim(A_n(\mathbb{K})) + \dim(S_n(\mathbb{K})) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = n^2$.
  Ainsi, $\dim(A_n(\mathbb{K})) = n^2 - \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.
  Méthode 2 :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) &= \left\{(m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) | \forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ m_{i,j} = -m_{j,i}\right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & m_{1,2} & \cdots & m_{1,n} \\ -m_{1,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & m_{n-1,n} \\ -m_{1,n} & \cdots & -m_{n-1,n} & 0 \end{pmatrix} | \forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2 \text{ tel que } i < j,\ m_{i,j} \in \mathbb{K} \right\} \\
&= \left\{ \sum_{1\leq i<j\leq n} m_{i,j}(E_{i,j} - E_{j,i}) | \forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2 \text{ tel que } i < j,\ m_{i,j} \in \mathbb{K} \right\}
\end{aligned}$$

Posons $\mathcal{G} = (E_{i,j} - E_{j,i})_{1\leq i<j\leq n}$.
Ainsi, $A_n(\mathbb{K}) = \text{Vect}(\mathcal{G})$.
$\mathcal{G}$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Soit $(\mu_{i,j})_{1\leq i<j\leq n}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} & \sum_{1\leq i<j\leq n} \mu_{i,j}(E_{i,j}-E_{j,i}) = 0 \\ \iff & \begin{pmatrix} 0 & \mu_{1,2} & \cdots & \mu_{1,n} \\ -\mu_{1,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & m_{n-1,n} \\ -\mu_{1,n} & \cdots & -\mu_{n-1,n} & 0 \end{pmatrix} = 0 \\ \iff & \forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2 \text{ tel que } i<j,\ \mu_{i,j}=0 \end{aligned}$$

Ainsi, la famille $\mathcal{G}$ est libre.
$\mathcal{G}$ est donc une base de $A_n(\mathbb{K})$.
Il nous reste à compter le nombre d'éléments de cette famille :

$$\begin{aligned} \dim(A_n(\mathbb{K})) &= \sum_{1\leq i<j\leq n} 1 \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} 1 \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}(n-i) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

Exercice 7. 1. • A divise le polynôme nul. Ainsi,le polynôme nul appartient à F donc F est non vide.

• Soient $(P,Q)\in F^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.
Alors il existe $P_1, Q_1 \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = AP_1$ et $Q = AQ_1$.
Ainsi $\lambda P + \mu Q = \lambda AP_1 + \mu AQ_1 = A(\lambda P_1 + \mu Q_2)$ donc $A|\lambda P+\mu Q$ d'où $\lambda P + \mu Q \in F$.

Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. • Si $A = 0$, $F = \{0\}$ et $\mathbb{R}_n[X]$ est un supplémentaire de F.
   • Si $A = \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Alors, tout polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ est divisible par A donc $F = \mathbb{R}_n[X]$. Ainsi, $\{0\}$ est un supplémentaire de F.
   • Si A est non constante. On pose $p = \deg(A)$ et $H = \mathbb{R}_{p-1}[X]$.
   Montrons que H est un supplémentaire de F.
     • Soit $P \in H \cap F$.
     Montrons par l'absurde que $P = 0$.
     Supposons $P \neq 0$.
     Comme $P \in F$, $A|P$ donc il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = AQ$. De plus, $P \neq 0$ donc $Q \neq 0$. Ainsi, $\deg(Q)\in\mathbb{N}$.
     Ainsi, $\deg(P) = \deg(AQ) = \deg(A) + \deg(Q) \geq \deg(A) \geq p$.
     De plus, $P \in H$ donc $P \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ d'où $\deg(P) \leq p-1$.
     Absurde.
     Ainsi, $P = 0$.
     Donc la somme $F + H$ est directe.
     • Montrons que $\mathbb{R}_n[X] = F + H$.
     On a $F + H \subset \mathbb{R}_n[X]$.
     Réciproquement, soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, en effectuant la division euclidienne de P par $A \neq 0$, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = AQ + R$ avec $\deg(R) \leq \deg(A) - 1$.
     Ainsi, $AQ \in F$ et $R \in H$ donc $P \in F + H$.
     Ainsi,$\mathbb{R}_n[X] = F + H$.

   H est donc un supplémentaire de F.
   Une base de H est $(1,\ldots,X^{p-1})$ (base canonique).

3. Supposons A non constant.
H est de dimension p et $F\oplus H = \mathbb{R}_n[X]$ donc $\dim(F) = n+1-\dim(H) = n+1-p$.

De plus, pour tout $i \in [\![0, n-p]\!]$, $A|AX^i$. Donc pour tout $i \in [\![0, n-p]\!]$, $AX^i \in F$.
La famille $(A, AX, \dots, AX^{n-p})$ est donc une famille de F.
De plus, $(A, AX, \dots, AX^{n-p})$ est une famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés donc cette famille est libre.
De plus, $(A, AX, \dots, AX^{n-p})$ est composée de $n-p+1$ vecteurs et $\dim(F) = n-p+1$. Ainsi, cette famille est une base de F.
$G = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(a) = 0\} = \{P \in \mathbb{R}_n[X], (X-a)|P\}$.
En prenant $A = X - a$, on obtient que $((X-a), \dots, (X-a)X^{n-1})$ est une base de G.

Exercice 8. 1. On remarque tout d'abord que nous avons quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$ avec $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$. Ainsi, cette famille est nécessairement liée.
Soit $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4 \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = (0,0,0)\\
\iff\ &\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \end{cases}\\
\iff\ &\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases}\\
\iff\ &\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 - \lambda_4 \\ \lambda_3 = -\lambda_4 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc en prenant $\lambda_2 = 1$, $\lambda_4 = 0$ et$\lambda_1 = 1$ et $\lambda_3 = 0$, on a : $x_1 + x_2 = 0$. Ainsi, $x_2 = -x_1$.
En prenant $\lambda_2 = 0$, $\lambda_4 = 1$ et $\lambda_1 = -1$, $\lambda_3 = -1$, on a : $-x_1 - x_3 + x_4 = 0$. Ainsi, $x_4 = x_1 + x_3$.
Donc $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathrm{Vect}(x_1, x_3)$.
Ainsi, (x_1, x_3) est génératrice de $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, x_3, x_4)$.
De plus, x_1 et x_3 ne sont pas colinéaires. Donc (x_1, x_3) est libre.
Donc (x_1, x_3) est une base de $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, x_3, x_4)$.
Ainsi, $\mathrm{rg}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2$.

2. Soit $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4 \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = (0,0,0,0)\\
\iff\ &\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \end{cases}\\
\iff\ &\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_2 - 2\lambda_3 - 2\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \end{cases}\\
\iff\ &\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases}\\
\iff\ &\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases}\\
\iff\ &\begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_3 + \lambda_4 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 - \lambda_4 \end{cases}
\end{aligned}$$

En prenant $\lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = 0$ et $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$, on a : $-x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Ainsi, $x_3 = x_1 + x_2$.
En prenant $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 1$ et $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, on a : $x_1 - x_2 + x_4 = 0$. Ainsi, $x_4 = x_2 - x_1$.
Donc $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathrm{Vect}(x_1, x_2)$.
Ainsi, (x_1, x_2) est une famille génératrice de $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, x_3, x_4)$.
De plus, x_1 et x_2 ne sont pas colinéaires. Donc (x_1, x_2) est libre.
Donc (x_1, x_2) est une base de $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, x_3, x_4)$.
Ainsi, $\mathrm{rg}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2$.

3. Soit $\lambda_1,\, \lambda_2,\, \lambda_3,\, \lambda_4 \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = (0,0,0,0) \\
\iff & \begin{cases} \lambda_1 + 7\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 + 7\lambda_3 = 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} \lambda_1 + 7\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -12\lambda_2 - 6\lambda_3 = 0 \\ 22\lambda_2 - 8\lambda_3 = 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} \lambda_1 + 7\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 11\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, (x_1, x_2, x_3) est une famille libre donc $\operatorname{rg}(x_1, x_2, x_3) = 3$.

Exercice 9. 1. Soit $\lambda_1,\, \lambda_2,\, \lambda_3,\, \lambda_4 \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = (0,0,0,0) \\
\iff & \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, (x_1, x_2, x_3, x_4) est une famille libre donc $\operatorname{rg}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4$.

2. Soit $\lambda_1,\, \lambda_2,\, \lambda_3,\, \lambda_4 \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = (0,0,0,0) \\
\iff & \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} \lambda_1 = -2\lambda_4 \\ \lambda_2 = -\lambda_4 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

En prenant $\lambda_4 = 1$ et $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 0$, on a : $-2x_1 - x_2 + x_4 = 0$. Ainsi, $x_4 = 2x_1 + x_2$. Donc $\operatorname{Vect}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \operatorname{Vect}(x_1, x_2, x_3)$.

Ainsi, (x_1, x_2, x_3) est une famille génératrice de $\mathrm{Vect}\,(x_1, x_2, x_3, x_4)$.
De plus, en reprenant les équivalences précédentes avec $\lambda_4 = 0$, on obtient :

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{array} \right.$$

Donc (x_1, x_2, x_3) est libre.
Donc (x_1, x_2, x_3) est une base de $\mathrm{Vect}\,(x_1, x_2, x_3, x_4)$.
Ainsi, $\mathrm{rg}\,(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3$.

Exercice 10. 1. La famille $(3, X^2+1, X^5-3X^2+2)$ est une famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés. Ainsi, cette famille est libre. Ainsi, $\mathrm{rg}\,(3, X^2+1, X^5-3X^2+2) = 3$.

2. Montrons que la famille $(X^k(X-1)^{n-k})_{k\in[\![0,n]\!]}$ est libre.
Soit $\lambda_0, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels sur $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k (X-1)^{n-k} = 0$.
En évaluant en 1, on obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k 0^{n-k} = 0$ d'où $\lambda_n = 0$.
On a alors : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k X^k (X-1)^{n-k} = 0$ d'où $(X-1)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k X^k (X-1)^{n-1-k} = 0$.
Or, un produit de polynômes est nul si et seulement si un des polynômes est nul.
Or, $X-1$ n'est pas le polynôme nul. Ainsi, on obtient : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k X^k (X-1)^{n-1-k} = 0$.
En évaluant de nouveau en 1, on obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k 0^{n-1-k} = 0$ d'où $\lambda_{n-1} = 0$.
Par récurrence descendante, on obtient donc $\lambda_n = \lambda_{n-1} = ... = \lambda_0 = 0$.
Ainsi, la famille $(X^k(X-1)^{n-k})_{k\in[\![0,n]\!]}$ est libre donc $\mathrm{rg}\,((X^k(X-1)^{n-k})_{k[|0,n|]}) = n+1$.
Remarque : on a une famille de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est libre. Or, $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$.
Ainsi, $(X^k(X-1)^{n-k})_{k\in[\![0,n]\!]}$ est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Soit $i \in\in [\![0,n]\!]$, on a : $\forall k \in [\![0,n]\!],\ L_i(a_k) = \delta_{i,k}$ où $\delta_{i,k} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{array} \right.$
Montrons que la famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est libre.
Soit $\lambda_0, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels sur $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i = 0$.
Soit $k \in [\![0,n]\!]$, en évaluant la relation en a_k, on obtient : $0 = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(a_k) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \delta_{i,k} = \lambda_k$.
Ainsi : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\lambda_k = 0$.
Donc la famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est libre.
Ainsi, $\mathrm{rg}\,(L_0, ..., L_n) = n+1$.
Remarque : on a une famille de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est libre. Or, $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$. Ainsi, $(L_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 11. $\mathcal{F} \subset \mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$ donc $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F}) \subset \mathrm{Vect}\,(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}')$. Ainsi, $\dim\,(\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})) \leq \dim\,(\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'))$.
D'où $\mathrm{rg}\,(\mathcal{F}) \leq \mathrm{rg}\,(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}')$.
De même, $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$ donc $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F}') \subset \mathrm{Vect}\,(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}')$. Ainsi, $\dim\,(\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F}')) \leq \dim\,(\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'))$.
D'où $\mathrm{rg}\,(\mathcal{F}') \leq \mathrm{rg}\,(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}')$. Ainsi :

$$\max(\mathrm{rg}\,(\mathcal{F}), \mathrm{rg}\,(\mathcal{F}')) \leq \mathrm{rg}\,(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}').$$

De plus, $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}') = \mathrm{Vect}\,(\mathcal{F}) + \mathrm{Vect}\,(\mathcal{F}')$.
Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}\,(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}') &= \dim\,(\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}')) \\ &= \dim\,(\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F}) + \mathrm{Vect}\,(\mathcal{F}')) \\ &= \dim\,(\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})) + \dim\,(\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F}')) - \dim\,(\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F}) \cap \mathrm{Vect}\,(\mathcal{F}')) \\ &\leq \dim\,(\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})) + \dim\,(\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F}')) \\ &\leq \mathrm{rg}\,(\mathcal{F}) + \mathrm{rg}\,(\mathcal{F}'). \end{aligned}$$

On a donc prouvé que :

$$\max(\mathrm{rg}\,(\mathcal{F}), \mathrm{rg}\,(\mathcal{F}')) \leq \mathrm{rg}\,(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}') \leq \mathrm{rg}\,(\mathcal{F}) + \mathrm{rg}\,(\mathcal{F}')$$

Exercice 12. Posons $G = \text{Vect}\,(X^2)$.
$(1, X+1, X^2, X^3 - X^2)$ est une famille de polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$.
De plus, $(1, X+1, X^2, X^3 - X^2)$ est une famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés. Ainsi, il s'agit d'une famille libre.
Or, cette famille comprend 4 polynômes et $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$.
Ainsi, $(1, X+1, X^2, X^3 - X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
Ainsi, $\text{Vect}\,(1, X+1, X^3 - X^2)$ et $\text{Vect}\,(X^2)$ sont supplémentaires.

Exercice 13.

- soit $(\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned}
\lambda a + \mu b + \gamma c = (0,0,0,0) \quad &\iff \quad \begin{cases} \mu + 2\gamma = 0 \\ \lambda + 3\mu + \gamma = 0 \\ -\lambda - 3\gamma = 0 \\ 2\lambda + 2\mu + 4\gamma = 0 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} \lambda + 3\mu + \gamma = 0 \\ \mu + 2\gamma = 0 \\ 3\mu - 2\gamma = 0 \\ -4\mu + 2\gamma = 0 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} \lambda + 3\mu + \gamma = 0 \\ \mu + 2\gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

  Ainsi, (a, b, c) est une famille libre.
  De plus, (a, b, c) est une famille génératrice de F donc (a, b, c) est une base de F. Ainsi, $\dim(F) = 3$.
- (d, e) est une famille génératrice de G.
  De plus, d et e ne sont pas colinéaires. Ainsi, (d, e) est une famille libre.
  Donc (d, e) est une base de G. Donc $\dim(G) = 2$.
- $F + G = \text{Vect}\,(a, b, c) + Vec(d, e) = \text{Vect}\,(a, b, c, d, e)$.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c + \lambda_4 d + \lambda_5 e = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_2 + 2\lambda_3 - \lambda_5 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_5 = 0 \\ -\lambda_1 - 3\lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 + \lambda_4 + 3\lambda_5 = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_5 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 - \lambda_5 = 0 \\ -\lambda_1 - 3\lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 + \lambda_4 + 3\lambda_5 = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_5 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 - \lambda_5 = 0 \\ 3\lambda_2 - 2\lambda_3 + 2\lambda_4 + \lambda_5 = 0 \\ -4\lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_5 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 - \lambda_5 = 0 \\ -8\lambda_3 + 2\lambda_4 + 4\lambda_5 = 0 \\ 10\lambda_3 + \lambda_4 - 3\lambda_5 = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_5 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 - \lambda_5 = 0 \\ -4\lambda_3 + \lambda_4 + 2\lambda_5 = 0 \\ \frac{7}{2}\lambda_4 + 2\lambda_5 = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{31}{14}\lambda_5 \\ \lambda_2 = \frac{2}{7}\lambda_5 \\ \lambda_3 = \frac{5}{14}\lambda_5 \\ \lambda_4 = -\frac{4}{7}\lambda_5 \end{cases}
\end{aligned}$$

En prenant $\lambda_5 = 1$ et $\lambda_1 = -\frac{31}{14}$, $\lambda_2 = \frac{2}{7}$, $\lambda_3 = \frac{5}{14}$, $\lambda_4 = -\frac{4}{7}$, on a : $-\frac{31}{14}a + \frac{2}{7}b + \frac{5}{14}c - \frac{4}{7}d + e = 0$. Ainsi, $e = \frac{31}{14}a - \frac{2}{7}b - \frac{5}{14}c + \frac{4}{7}d$.
Donc $F + G = \mathrm{Vect}\,(a, b, c, d)$.
Ainsi, (a, b, c, d) est une famille génératrice de $F + G$.
De plus, en reprenant les équivalences précédentes avec $\lambda_5 = 0$, on a :

$$\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c + \lambda_4 d = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

Ainsi, (a, b, c, d) est une famille libre.
Donc (a, b, c, d) est une base de $F + G$ donc $\dim\,(F + G) = 4$.

- D'après la formule de Grassman, on a :

$$\dim\,(F \cap G) = \dim\,(F) + \dim\,(G) - \dim\,(F + G).$$

Ainsi : $\dim\,(F \cap G) = 3 + 2 - 4 = 1$.