Chapitre 15 : Calcul matriciel

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n et p deux entiers naturels non nuls.

1 Ensemble de matrices

1.1 Définitions

Définition

- On appelle matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ tout tableau à n lignes et p colonnes d'éléments de $\mathbb{K}$:
$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,j} & \cdots & m_{1,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{i,1} & m_{i,2} & \cdots & m_{i,j} & \cdots & m_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \cdots & m_{n,j} & \cdots & m_{n,p} \end{pmatrix}$$
où les $m_{i,j}$ sont des éléments de $\mathbb{K}$. On écrit aussi $M = (m_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$.
S'il n'y a pas d'ambiguïté sur le nombre de lignes et le nombre de colonnes, on pourra noter plus simplement $M = \left(m_{i,j}\right)$.
Les $m_{i,j}$ sont appelés coefficients de la matrice.
- L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Remarque : Pour écrire l'élément générique $m_{i,j}$ on utilise deux indices. Le premier représente l'indice de ligne et le second l'indice de colonne.
Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

Définition

Deux matrices sont égales si et seulement si elles ont même taille et mêmes coefficients.

Définition

Soit M une matrice à n lignes et p colonnes.

- Si $p = 1$, on dit que M est une matrice colonne
- Si $n = 1$, on dit que M est une matrice ligne
- Si $n = p$, on dit que M est une matrice carrée et $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est simplement noté $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
- On appelle matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et on note I_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients diagonaux valent 1, les autres valant 0 :
$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$, son coefficient d'indice (i,j) est donné par le symbole de Kronecker $\delta_{i,j} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$. Ainsi, $I_n = (\delta_{i,j})_{i,j\in[\![1,n]\!]}$.
- On appelle matrice nulle de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et on note $0_{n,p}$ la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls.

Définition

Dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on définit la matrice :

$$\begin{array}{cc} & \hspace{3em} j^e \text{ colonne} \\ & \hspace{3em}\downarrow \\ E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ \vdots & & & 1 & \vdots \\ 0 & & & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \longleftarrow i^e \text{ ligne} \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

où l'unique coefficient non nul est égal à 1 et en position (i,j).

Remarque : On a : $E_{i,j} = (\delta_{k,i}\delta_{l,j})_{(k,l)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$.

1.2 Opérations dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition : Somme et multiplication par un scalaire

Soient $A = (a_{i,j}),\ B = (b_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit :

- la matrice somme $A + B = (s_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ s_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}.$$

- la matrice $\lambda.A = \lambda A = (r_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ r_{i,j} = \lambda a_{i,j}.$$

- On appelle combinaison linéaire de A et B toute matrice de la forme $\alpha A + \beta B$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$.

Remarque : L'addition de deux matrices de dimensions différentes n'est pas définie.
Exemple :

$$2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ -\dfrac{1}{2} & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$$

Proposition : Propriétés de l'addition

1. L'addition dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est associative : $\forall (A,B,C) \in \left(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})\right)^3,\ (A+B)+C = A+(B+C)$.
   La somme de trois matrices A, B, C pourra ainsi être notée $A+B+C$ sans parenthèses.
2. L'addition dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est commutative : $\forall (A,B) \in \left(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})\right)^2,\ A+B = B+A$.
3. L'addition dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ admet la matrice nulle $0_{n,p}$ comme élément neutre :
   $\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ 0_{n,p} + A = A + 0_{n,p} = A$.
4. Pour tout $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la matrice $-A = (-1).A$ est appelée opposée de A et vérifie $A + (-A) = (-A) + A = 0_{n,p}$.

Démonstration. Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B = (b_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C = (c_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Notons $A+B = (m_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B+C = (s_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A+(B+C) = (p_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $(A+B)+C = (q_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
  Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$:

$$\begin{aligned} p_{i,j} &= a_{i,j} + n_{i,j} \\ &= a_{i,j} + (b_{i,j} + c_{i,j}) \\ &= (a_{i,j} + b_{i,j}) + c_{i,j} \\ &= m_{i,j} + c_{i,j} \\ &= q_{i,j}. \end{aligned}$$

  Donc $A + (B+C) = (A+B) + C$.

- Notons $B+A=(n_{i,j})\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!]$:
$$m_{i,j}=a_{i,j}+b_{i,j}=b_{i,j}+a_{i,j}=r_{i,j}.$$
Donc $A+B=B+A$.
- Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!]$:
$$0+a_{i,j}=a_{i,j}+0=a_{i,j}.$$
Donc $0_{n,p}+A=A+0_{n,p}=A$.
- Notons $-A=(d_{i,j})$ et $A+(-A)=(r_{i,j})$.
Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!]$:
$$r_{i,j}=a_{i,j}+d_{i,j}=a_{i,j}-a_{i,j}=0.$$
Donc $A+(-A)=0_{n,p}$.
L'addition étant commutative, on a aussi : $(-A)+A=0_{n,p}$.

□

Proposition : Propriétés du produit par un scalaire

1. $\forall A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ 1.A=A$
2. $\forall\lambda\in\mathbb{K},\ \forall\,(A,B)\in\left(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\right)^2,\ \lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B.$
3. $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\ \forall A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ (\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A.$
4. $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\ \forall A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A.$

Démonstration. La preuve est analogue à la proposition précédente et laissée en exercice. □

Définition : Produit de deux matrices

Soient $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B=(b_{i,j})\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
On appelle produit des matrices A et B la matrice $A\times B=AB=(m_{i,j})\in\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ définie par :
$$\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!],\ m_{i,j}=\sum_{k=1}^{p}a_{i,k}b_{k,j}.$$

Remarque :
- Pour pouvoir effectuer le produit de A par B, il faut que le nombre de colonnes de A soit égale au nombre de lignes de B.
- Moyen mnémothechnique :
Pour calculer le coefficient $m_{i,j}$, on procèdera selon le schéma ci-dessous (où l'on a représenté en gras les coefficients de A et B utiles au calcul de $m_{i,j}$) :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & \mathbf{b_{1,j}} & \cdots & b_{1,q}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ b_{k,1} & \cdots & \mathbf{b_{k,j}} & \cdots & b_{k,q}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ b_{p,1} & \cdots & \mathbf{b_{p,j}} & \cdots & b_{p,q}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,p}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ \mathbf{a_{i,1}} & \cdots & \mathbf{a_{i,k}} & \cdots & \mathbf{a_{i,p}}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,k} & \cdots & a_{n,p}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,j} & \cdots & m_{1,q}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ m_{i,1} & \cdots & \mathbf{m_{i,j}} & \cdots & cmi,q\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,j} & \cdots & m_{n,q}\end{pmatrix}\end{array}$$

Il peut être pratique pour calculer le produit de deux matrices de les disposer ainsi.

Exemple : On considère les matrices A,B,C suivantes :
$$A=\begin{pmatrix}3&0\\1&-1\\0&2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2&1&-3&0\\4&0&0&0\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}2&5&1\end{pmatrix}$$

Calculer, s'ils sont définis, les produits deux à deux de ces matrices.
$$AB=\begin{pmatrix}6&3&-9&0\\-2&1&-3&0\\8&0&0&0\end{pmatrix}\qquad AC=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\qquad DA=\begin{pmatrix}11&-3\end{pmatrix}\qquad CD=\begin{pmatrix}2&5&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Proposition : Propriétés du produit matriciel

1. Le produit matriciel est associatif :

$$\forall\ (A,B,C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}),\ (AB)C = A(BC).$$

   Ainsi, le produit de trois matrices A, B et C pourra être noté ABC sans parenthèses.
2. Le produit matriciel est distributif par rapport à l'addition :

$$\forall\ (A,B,B') \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ A(B+B') = AB + AB',$$

   et

$$\forall\ (A,A',B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ (A+A')B = AB + A'B.$$

3. $\forall\ (A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda(A \times B) = (\lambda A) \times B = A \times (\lambda B).$
4. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a :

$$I_n \times A = A \ \text{ et } \ A \times I_p = A,$$
$$0_{n,n} \times A = 0_{n,p} \ \text{ et } \ A \times 0_{p,p} = 0_{n,p}$$

Démonstration. Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C = (c_{i,j}) \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$.

- Notons $BC = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$, $AB = (n_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, $A(BC) = (u_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$, $(AB)C = (s_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$.
  Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,r]\!]$:

$$\begin{aligned}
u_{i,j} &= \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} m_{k,j} \\
&= \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} \left(\sum_{l=1}^{q} b_{k,l} c_{l,j} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} a_{i,k} b_{k,l} c_{l,j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{i,j} &= \sum_{l=1}^{q} n_{i,l} c_{l,j} \\
&= \sum_{l=1}^{q} \left(\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,l} \right) c_{l,j} \\
&= \sum_{l=1}^{q} \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,l} c_{l,j} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} a_{i,k} b_{k,l} c_{l,j} \\
&= u_{i,j}
\end{aligned}$$

  Donc $A(BC) = (AB)C$.
- Soient $B' = (b'_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
  Notons $B + B' = (t_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $A(B+B') = (d_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, $AB + AB' = (v_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ et $AB' = (n'_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$.
  Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$:

$$\begin{aligned}
d_{i,j} &= \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} t_{k,j} \\
&= \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} (b_{k,j} + b'_{k,j}) \\
&= \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j} + \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b'_{k,j} \\
&= n_{i,j} + n'_{i,j} \\
&= v_{i,j}
\end{aligned}$$

  Donc $A(B+B') = AB + AB'$.
  On prouve de même que : $\forall A' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ (A+A')B = AB + A'B$.

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
Notons $\lambda.A = (x_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\lambda.B = (y_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(\lambda.A) \times B = (g_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, $A \times (\lambda.B) = (h_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda.(AB) = (w_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$.
Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$:

$$\begin{aligned} w_{i,j} &= \lambda n_{i,j} \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{p} (\lambda a_{i,k}) b_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{p} x_{i,k} b_{k,j} \\ &= g_{i,j}. \end{aligned}$$

Donc $\lambda.(AB) = (\lambda.A) \times B$.

$$\begin{aligned} w_{i,j} &= \lambda n_{i,j} \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} (\lambda b_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} y_{k,j} \\ &= h_{i,j}. \end{aligned}$$

Donc $\lambda.(AB) = A \times (\lambda.B)$.
- Notons $A \times I_p = (\alpha_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $I_n \times A = (\beta_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$:

$$\alpha_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} \delta_{k,j} = a_{i,j} \delta_{j,j} = a_{i,j}$$

puisque : $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\delta_{k,j} = 0$ si $k \neq j$ et $\delta_{j,j} = 1$. Donc $A \times I_p = A$.
Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$:

$$\beta_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k} a_{k,j} = \delta_{i,i} a_{i,j} = a_{i,j}$$

puisque : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\delta_{i,k} = 0$ si $k \neq i$ et $\delta_{i,i} = 1$.
Enfin, $0_{n,n} \times A = 0_{n,p}$ et $A \times 0_{p,p} = 0_{n,p}$ d'après la formule du produit matricielle. Tous les termes de $0_{n,n}$,$0_{p,p}$ sont nuls donc chaque terme de la somme est nul.

□

Proposition

- La produit matriciel n'est pas commutatif.
- $AB = 0 \not\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 0 \\ \text{ou} \\ B = 0 \end{array} \right.$ Il existe des matrices non nulles dont le produit est nul.
- $\left(A \neq 0 \text{ et } AB = AC \right) \quad \not\Longrightarrow \quad B = C.$

Démonstration. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Alors $AB = 0$ et $BA = A$ donc $AB \neq BA$.
- A et B sont non nulles mais pourtant $AB = 0$.
- On a $A \times 0 = AB$ et $A \neq 0$ pourtant $B \neq 0$.

□

1.3 Matrices et vecteurs colonnes

Proposition

Soit $\mathscr{S}$ un système linéaire à n équations et p inconnues. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice des coefficients associées à $\mathscr{S}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ la matrice colonne des seconds membres.

Un p-uplet $(x_1, ..., x_p) \in \mathbb{K}^p$ est solution de $\mathscr{S}$ si et seulement si le vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ est solution de l'équation matricielle $AX = B$.

Démonstration. □

Démonstration. Soit $x_1, ... x_p \in \mathbb{K}$. Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$. Notons $A = (a_{i,j})$. On a :

$$
\begin{aligned}
(x_1, ..., x_p) \text{ solution de } (\mathscr{S}) \quad & \text{si et seulement si} \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases} \\
& \text{si et seulement si :} \quad \forall i \in [\![1, n]\!], \ \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}x_k = b_i \\
& \text{si et seulement si} \quad AX = B.
\end{aligned}
$$

□

Proposition

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

Alors AX est une combinaison linéaire des colonnes de A. Plus précisément, si on note C_1, ..., C_p les colonnes de A, alors :

$$AX = \sum_{k=1}^{p} x_k C_k$$

Démonstration. Par définition du produit matriciel, on a :

$$AX = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1,k}x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{n,k}x_k \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{p} \begin{pmatrix} a_{1,k}x_k \\ \vdots \\ a_{n,k}x_k \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{p} x_k \begin{pmatrix} a_{1,k} \\ \vdots \\ a_{n,k} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{p} x_k C_k.$$

□

Remarque : De même, si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ alors XA est une combinaison linéaire des lignes de A. Plus précisément, si on note $L_1, ..., L_n$ les lignes de A, on a : $XA = \sum_{k=1}^{n} x_k L_k$.

Proposition

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, q]\!]$. Alors :

- La j-ème colonne de AB est le produit de A par la j-ème colonne de B.
- La i-ème ligne de AB est le produit de la i-ème ligne de A par B.

Démonstration. On montre le premier point. Celle du second est analogue.
Notons $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
Soit $(i, j) \in [\![1, m]\!] \times [\![1, q]\!]$.

La j-ème colonne de AB est la matrice colonne $C_j = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{p} a_{1,k} b_{k,j} \\ \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{p} a_{n,k} b_{k,j} \end{pmatrix}$.

La j-ème colonne de B est la matrice colonne $B_j = \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ \vdots \\ b_{p,j} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

Le produit $A \times B_j$ est donc bien défini et $A \times B_j = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{p} a_{1,k} b_{k,j} \\ \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{p} a_{n,k} b_{k,j} \end{pmatrix} = C_j$.

D'où le résultat. □

1.4 Matrices carrées

Matrices carrées particulières

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est muni de deux opérations : l'addition et la multiplication.
(Ces opérations sont encore appelées lois de compositions internes car : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A + B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $A \times B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

Rappelons que :

- l'addition est associative, commutative, et admet un élément neutre qui est la matrice nulle $0_n = 0_{n,n}$;
- le produit matriciel est associatif, distributif par rapport à l'addition, et admet pour élément neutre I_n

Le produit matriciel n'est en revanche pas commutatif.

Définition

Soit $A=(a_{i,j})\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée, on dit qu'elle est :

- diagonale si : $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ i\neq j \quad\Longrightarrow\quad a_{i,j}=0.$

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n}\end{pmatrix}$$

- triangulaire supérieure si : $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ j<i \quad\Longrightarrow\quad a_{i,j}=0$:

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1,n}\\ 0 & \ddots & & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n}\end{pmatrix}$$

- triangulaire inférieure si : $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ i<j \quad\Longrightarrow\quad a_{i,j}=0$:

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & 0\\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n,n}\end{pmatrix}$$

On note respectivement $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$, $\mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$ et $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, triangulaires inférieures, et diagonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque : Soit $B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
$B\in\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $\left(B\in\mathscr{T}_n^+ \text{ et } B\in\mathscr{T}_n^-\right)$.

Proposition

- $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$, $\mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$ et $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ sont stables par combinaisons linéaires et produits c'est à dire :

$$\text{Pour } \mathscr{D}_n(\mathbb{K}):\ \forall(A,B)\in\mathscr{D}_n(\mathbb{K}),\ \forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\ \lambda.A+\mu.B\in\mathscr{D}_n(\mathbb{K}) \text{ et } AB\in\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$$

$$\text{Pour } \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K}):\ \forall(A,B)\in\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K}),\ \forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\ \lambda.A+\mu.B\in\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K}) \text{ et } AB\in\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$$

$$\text{Pour } \mathscr{T}_n^-(\mathbb{K}):\ \forall(A,B)\in\mathscr{T}_n^-(\mathbb{K}),\ \forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\ \lambda.A+\mu.B\in\mathscr{T}_n^-(\mathbb{K}) \text{ et } AB\in\mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$$

- Soit $A=(a_{i,j})\in T_n^+(\mathbb{K})$, $B=(b_{i,j})\in T_n^+(\mathbb{K})$ (resp. $A,B\in T_n^-(\mathbb{K})$, resp. $A,B\in D_n(\mathbb{K})$).
En posant $AB=(c_{i,j})$, on a :

$$\forall i\in[\![1,n]\!],\ c_{i,i}=a_{i,i}b_{i,i}.$$

Démonstration.

- Faisons la preuve pour $T_n^+(\mathbb{K})$.
Soient $A=(a_{i,j})\in T_n^+(\mathbb{K})$, $B=(b_{i,j})\in T_n^+(\mathbb{K})$. Soient $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$.
Posons $\lambda.A+\mu.B=(c_{i,j})$ et $AB=(d_{i,j})$.
Soient $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$. Supposons que $j<i$, on a :

$$c_{i,j}=\lambda a_{i,j}+\mu b_{i,j}=\lambda\times 0+\mu\times 0=0.$$

donc $\lambda.A+\mu.B\in T_n^+(\mathbb{K})$.
De même, soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$. Supposons que $j<i$, on a :

$$d_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,j}=\sum_{k=1}^{i-1}a_{i,k}b_{k,j}+\sum_{k=i}^{n}a_{i,k}b_{k,j}$$

Or, si $k \in [\![1, i-1]\!]$, $k < i$ donc $a_{i,k} = 0$.
Et si $k \in [\![i, n]\!]$, $j < i \leq k$ donc $b_{k,j} = 0$.
Ainsi, on a :

$$d_{i,j} = \sum_{k=1}^{i-1} 0 \times b_{k,j} + \sum_{k=i}^{n} a_{i,k} \times 0 = 0.$$

Donc $AB \in T_n^+(\mathbb{K})$.
On montre de même le résultat sur les triangulaires inférieures.
Enfin, puisqu'une matrice est diagonale si et seulement si elle est triangulaire supérieure et triangulaire inférieure, le résultat en découle directement pour les matrices diagonales.

- Faisons la preuve pour $T_n^+(\mathbb{K})$ et utilisons les mêmes notations.
  Soit $i \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$d_{i,i} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{i,k} b_{k,i} + a_{i,i} b_{i,i} + \sum_{k=i+1}^{n} a_{i,k} b_{k,i}.$$

  Or, si $k \in [\![1, i-1]\!]$, $k < i$ donc $a_{i,k} = 0$.
  Et si $k \in [\![i+1, n]\!]$, $i < k$ donc $b_{k,i} = 0$.
  D'où :

$$d_{i,i} = a_{i,i} b_{i,i}$$

  ce qui termine la preuve.
  On prouve de même le résultat sur les triangulaire inférieure. De plus, une matrice diagonale est triangulaire supérieure, on peut donc en déduire directement le résultat sur les matrices diagonales.

□

Définition

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit A^k par récurrence en posant :

$$\begin{cases} A^0 = I_n \\ \forall k \in \mathbb{N},\ A^{k+1} = A^k \times A = A \times A^k \end{cases}$$

Proposition : Puissances d'une matrice diagonale ou triangulaire

Si $A \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ (resp. $\mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$, resp. $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$), alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ (resp. $\mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$, resp. $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$).
De plus si $d_1, \ldots, d_n$ sont les coefficients diagonaux de A, on a

$$A^k = \begin{pmatrix} d_1^k & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & d_n^k \end{pmatrix} \text{,resp. } A^k = \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ * & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & d_n^k \end{pmatrix} \text{,resp. } A^k = \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n^k \end{pmatrix}$$

où $*$ désigne un élément de $\mathbb{K}$.

Démonstration. Faisons la preuve pour T_n^+.
Soit $A \in T_n^+(\mathbb{K})$, notons $d_1, ..., d_n$ ses coefficients diagonaux. On montre par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k \in T_n^+$ et que

$$A^k = \begin{pmatrix} d_1^k & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & d_n^k \end{pmatrix}.$$

- Pour $k = 0$, on a $A^0 = I_n$ donc $A^0 \in T_n^+(\mathbb{K})$.
  De plus, $I_n = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1^0 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & d_n^0 \end{pmatrix}$.
  Ainsi, la propriété est vraie.

- Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que $A^k \in T_n^+(\mathbb{K})$ et que $A^k = \begin{pmatrix} d_1^k & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & d_n^k \end{pmatrix}$.
  $A^{k+1} = A^k \times A$. Or, $A^k \in T_n^+(\mathbb{K})$ et $A \in T_n^+(\mathbb{K})$ donc d'après une propriété précédente (stabilité de $T_n^+(\mathbb{K})$), on a $A^{k+1} \in T_n^+(\mathbb{K})$.
  De plus, d'après une propriété précédente, on a :
  $$A^{k+1} = \begin{pmatrix} d_1^k \times d_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & d_n^k \times d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1^{k+1} & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & d_n^{k+1} \end{pmatrix}$$
  donc la propriété est vraie.
- On a donc prouvé que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k \in T_n^+(\mathbb{K})$ et que :
  $$A^k = \begin{pmatrix} d_1^k & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & d_n^k \end{pmatrix}.$$

□

Proposition

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $AB = BA$ (on dit que A et B commutent). Alors : $\forall k \in \mathbb{N},\ AB^k = B^k A$. (c'est à dire que A commute avec toutes les puissances de B).

Démonstration. On raisonne par récurrence :

- Pour $k = 0$, on a $AB^0 = AI_n = A = I_n A = B^0 A$ donc la propriété est vraie.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $AB^k = B^k A$.
  On a : $AB^{k+1} = AB^k B = B^k AB$ par hypothèse de récurrence.
  De plus, comme A et B commutent, on a : $AB^{k+1} = B^k BA = B^{k+1} A$. Donc la propriété est vraie.
- On a donc : $\forall k \in \mathbb{N},\ AB^k = B^k A$.

□

Proposition : Formule du binôme de Newton

Soient $A, B \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$. On suppose que A et B commutent, c'est à dire que $AB = BA$. Alors :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ (A+B)^k = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} A^l B^{k-l}$$

Démonstration. La preuve est analogue à celle réalisée sur $\mathbb{C}$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère la propriété suivante :

$$\mathscr{P}(k) : \text{« } (A+B)^k = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} A^l B^{k-l}. \text{ »}$$

- Pour $k = 0$: On a $(A+B)^0 = I_n$ et $\sum_{l=0}^{0} \binom{0}{l} A^l B^{0-l} = \binom{0}{0} A^0 B^0 = I_n$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathscr{P}(k)$ est vraie. Alors :

$$\begin{aligned}
(A+B)^{k+1} &= (A+B)(A+B)^k \\
&= (A+B)\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}A^lB^{k-l} \qquad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= A\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}A^lB^{k-l} + B\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}A^lB^{k-l} \\
&= \sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}A^{l+1}B^{k-l} + \sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}BA^lB^{k-l} \\
&= \sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}A^{l+1}B^{k-l} + \sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}A^lB^{k+1-l} \text{ car } A \text{ et } B \text{ commutent} \\
&= \sum_{m=1}^{k+1}\binom{k}{m-1}A^mB^{k+1-m} + \sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}A^lB^{k+1-l} \qquad \text{(par changement d'indice) m=l+1} \\
&= \left(\sum_{m=1}^{k}\binom{k}{m-1}A^mB^{k+1-m}\right) + \binom{k}{k}A^{k+1}B^0 + \binom{k}{0}A^0B^{k+1} + \left(\sum_{l=1}^{k}\binom{k}{l}A^lB^{k+1-l}\right) \\
&= A^{k+1}B^0 + A^0B^{k+1} + \sum_{l=1}^{k}\left(\binom{k}{l-1}+\binom{k}{l}\right)A^lB^{k+1-l} \\
&= A^{k+1} + B^{k+1} + \sum_{l=1}^{k}\binom{k+1}{l}A^lB^{k+1-l} \qquad \text{(par la relation de Pascal)} \\
&= \sum_{l=0}^{k+1}\binom{k+1}{l}A^lB^{k+1-l}.
\end{aligned}$$

  Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

- On a donc prouvé par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $(A+B)^k = \displaystyle\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}A^lB^{k-l}$.

□

Proposition : Formule de Bernoulli

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A et B commutent. Alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ A^k - B^k = (A-B)\sum_{l=0}^{k-1}A^lB^{k-1-l}.$$

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
(A-B)\sum_{l=0}^{k-1}A^lB^{k-1-l} &= A\sum_{l=0}^{k-1}A^lB^{k-1-l} - B\sum_{l=0}^{k-1}A^lB^{k-1-l} \\
&= \sum_{l=0}^{k-1}A^{l+1}B^{k-1-l} - \sum_{l=0}^{k-1}BA^lB^{k-1-l} \\
&= \sum_{l=0}^{k-1}A^{l+1}B^{k-1-l} - \sum_{l=0}^{k-1}A^lB^{k-l} \quad \text{car } A \text{ et } B \text{ commutent} \\
&= \sum_{l=0}^{k-1}(A^{l+1}B^{k-1-l} - A^lB^{k-l}) \quad \text{par télescopage} \\
&= A^kB^0 - A^0B^k \\
&= A^k - B^k
\end{aligned}$$

□

Méthode : calcul des puissances d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour calculer les puissances successives de A, on peut :

- procéder par récurrence : on calcule les premières puissances de A puis on conjecture l'expression de A^k en fonction de k et enfin on démontre cette formule par récurrence.
- utiliser le binôme de Newton : on décompose A sous la forme $A = D + N$ avec D et N qui commutent. On a alors : $A^k = (D+N)^k = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} N^l D^{k-l}$.
  On choisit souvent D diagonale et N telle qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $N^r = 0_n$. On dit alors que N est nilpotente.

Remarque : On a ici utilisé le fait que : pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure stricte ou triangulaire inférieure stricte, il existe $r \leq n$ tel que $A^r = 0_n$.

2 Opérations élémentaires et pivot de Gauss

2.1 Opérations sur les lignes

Définition : Matrices d'opérations élémentaires

- On appelle matrice de transvection toute matrice carrée $T_{i,j}(\lambda)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme suivante :

$$T_{i,j}(\mu)=I_n+\mu E_{i,j}=\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & & j^e\text{ colonne} & \\ & & & \downarrow & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \ddots & \mu & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \longleftarrow i^e\text{ ligne}\\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

  où $\mu\in\mathbb{K}$ et $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ avec $i\neq j$.

- On appelle matrice de transposition toute matrice carrée $P_{i,j}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme suivante :

$$P_{i,j}=I_n-E_{i,i}-E_{j,j}+E_{i,j}+E_{j,i}=\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccccccc} & & & i^e\text{ colonne} & & & & j^e\text{ colonne} & & & \\ & & & \downarrow & & & & \downarrow & & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & 0\\ 0 & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & & & \\ \cdot & & & 0 & 1 & & & 0 & & & \cdot\\ \cdot & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \cdot\\ \cdot & & & 0 & & & 1 & 0 & & & \cdot\\ & & & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & & & \ddots & 0\\ 0 & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \longleftarrow i^e\text{ ligne}\\ \\ \\ \\ \longleftarrow j^e\text{ ligne}\\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

  où $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ avec $i\neq j$.

- On appelle matrice de dilatation toute matrice carrée $D_i(\lambda)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme suivante :

$$D_i(\lambda)=I_n+(\lambda-1)E_{i,i}=\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & i^e\text{ colonne} & & \\ & & \downarrow & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \lambda & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \longleftarrow i^e\text{ ligne}\\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

  où $\lambda\in\mathbb{K}^*$ et $i\in[\![1,n]\!]$.

- On appelle matrice d'opération élémentaire une matrice de l'un des trois types précédents (dilatation, transvection, transposition).

Proposition

Soit $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ avec $i\neq j$, et soit $\mu\in\mathbb{K}$, $T_{i,j}(\mu)A$ est la matrice obtenue en appliquant à A l'opération $L_i\leftarrow L_i+\lambda L_j$.
- Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ avec $i\neq j$, $P_{i,j}A$ est la matrice obtenue en appliquant à A l'opération $L_i\leftrightarrow L_j$.
- Soit $i\in[\![1,n]\!]$ et soit $\lambda\in\mathbb{K}^*$, $D_i(\lambda)A$ est la matrice obtenue en appliquant à A l'opération $L_i\leftarrow\lambda L_i$.

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soient $i, j \in [\![1,n]\!]$.
Posons $E_{i,j} = (e_{k,l}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $E_{i,j}A = (u_{k,l}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On a : $\forall k,l \in [\![1,n]\!],\ e_{k,l} = \delta_{k,i}\delta_{l,j}$.
Commençons par prouver que : $\forall (k,l) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ u_{k,l} = \delta_{k,i}a_{j,l}$.
Soit $(k,l) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on a :

$$\begin{aligned} u_{k,l} &= \sum_{r=1}^{n} e_{k,r}a_{r,l} \\ &= \sum_{r=1}^{n} \delta_{k,i}\delta_{r,j}a_{r,l} \\ &= \delta_{k,i}\sum_{r=1}^{n} \delta_{r,j}a_{r,l} \\ &= \delta_{k,i}a_{j,l} \end{aligned}$$

- Supposons $i \neq j$. Soit $\mu \in \mathbb{K}$.
  Posons $T_{i,j}(\mu)A = (s_{k,l}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
  On sait que $T_{i,j}(\mu) = I_n + \mu E_{i,j}$ donc $T_{i,j}(\mu)A = A + \mu E_{i,j}A$.
  Soit $(k,l) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on a :

$$\begin{aligned} s_{k,l} &= a_{k,l} + \mu u_{k,l} \\ &= a_{k,l} + \mu\delta_{k,i}a_{j,l} \end{aligned}$$

  - Si $k \neq i$, on a : $\forall l \in [\![1,p]\!],\ s_{k,l} = a_{k,l}$.
  - Si $k = i$, on a : $\forall l \in [\![1,p]\!],\ s_{i,l} = a_{i,l} + \mu a_{j,l}$.
- Supposons $i \neq j$. Posons $P_{i,j}A = (r_{k,l}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
  On sait que $P_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$ donc $P_{i,j}A = A - E_{i,i}A - E_{j,j}A + E_{i,j}A + E_{j,i}A$.
  Soit $(k,l) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on a :

$$r_{k,l} = a_{k,l} - \delta_{k,i}a_{i,l} - \delta_{k,j}a_{j,l} + \delta_{k,i}a_{j,l} + \delta_{k,j}a_{i,l}$$

  - Si $k \neq i$ et $k \neq j$, on a : $\forall l \in [\![1,p]\!],\ r_{k,l} = a_{k,l}$.
  - Si $k = i$, on a : $\forall l \in [\![1,p]\!],\ r_{i,l} = a_{i,l} - a_{i,l} + a_{j,l} = a_{j,l}$.
  - Si $k = j$, on a : $\forall l \in [\![1,p]\!],\ r_{j,l} = a_{j,l} - a_{j,l} + a_{i,l} = a_{i,l}$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Posons $D_i(\lambda)A = (v_{k,l}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
  On sait que $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$ donc $D_i(\lambda)A = A + (\lambda - 1)E_{i,i}A$.
  Soit $(k,l) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on a :

$$r_{k,l} = a_{k,l} - \delta_{k,i}a_{i,l} - \delta_{k,j}a_{j,l} + \delta_{k,i}a_{j,l} + \delta_{k,j}a_{i,l}$$

  - Si $k \neq i$, on a : $\forall l \in [\![1,p]\!],\ v_{k,l} = a_{k,l}$.
  - Si $k = i$, on a : $\forall l \in [\![1,p]\!],\ v_{i,l} = a_{i,l} + (\lambda - 1)a_{i,l} = \lambda a_{i,l}$.

□

Théorème traduction matricielle de l'algorithme de Gauss Jordan

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe une matrice $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, produit de matrices d'opérations élémentaires, et une unique matrice échelonnée réduite par lignes R, telles que $A = ER$.

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On sait que A est équivalente par lignes à une unique matrice échelonnée réduite par lignes R. Donc $R \underset{L}{\sim} A$. Ainsi, il est possible de passer de R à A par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes de R. D'après la propriété précédente, chaque opération élémentaire sur les lignes de R se traduit par un produit à gauche par un matrice d'opération élémentaire. Notons $E_1, \ldots, E_q$ les matrices d'opérations élémentaires permettant de passer de R à A. On a alors $E_q \ldots E_2E_1R = A$. En posant $E = E_q \ldots E_1$, on obtient : $E \times R = A$ où E est bien le produit de matrice d'opérations élémentaires. □

2.2 Opérations élémentaires sur les colonnes

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note $C_1, \ldots, C_p$ ses colonnes.
Tout comme pour les lignes, on appelle **opération élémentaire** sur les colonnes de A l'une des trois opérations suivantes :

- Multiplication d'une colonne C_i par un scalaire λ non nul ce que l'on note $C_i \leftarrow \lambda C_i$.
- Échange des colonnes C_i et C_j avec $i \neq j$ ce que l'on note $C_i \leftrightarrow C_j$.
- Ajout de $\beta \times C_j$ à C_i avec $i \neq j$ ce que l'on note $C_i \leftarrow C_i + \beta C_j$ où $\beta \in \mathbb{K}$.

Définition

On dit que deux matrices A et B sont équivalentes par colonnes si elles se déduisent l'une de l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les colonnes. On note $A \underset{C}{\sim} B$

Définition

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est échelonnée réduite par colonnes si elle vérifie les propriétés suivantes :

- Si une colonne est nulle, toutes les colonnes suivantes le sont aussi;
- À partir de la deuxième colonne, dans chaque colonne non nulle, le premier coefficient non nul à partir du haut est situé en-dessous (strictement) du premier coefficient non nul de la colonne précédente.
- Les pivots valent tous 1 et sont les seuls éléments non-nuls de leur ligne.

Remarque : En adaptant l'algorithme du pivot de Gauss-Jordan, on montre que toute matrice est équivalente par colonnes à une unique matrice échelonnée réduite par colonnes.

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Soit $\mu \in \mathbb{K}$ et soit $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$ avec $i \neq j$, $AT_{i,j}(\mu)$ est la matrice obtenue en appliquant à A l'opération $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$.
- Soit $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$ avec $i \neq j$, $AP_{i,j}$ est la matrice obtenue en appliquant à A l'opération $C_i \leftrightarrow C_j$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et soit $i \in [\![1, p]\!]$, $AD_i(\lambda)$ est la matrice obtenue en appliquant à A l'opération $C_i \leftarrow \lambda C_i$.

Remarque : Ici, $T_{i,j}(\mu), P_{i,j}, D_i(\lambda) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

Théorème

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe une matrice $E' \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, produit de matrices d'opérations élémentaires et une unique matrice échelonnée réduite par colonnes R' tels que $A = R' \times E'$.

3 Matrices carrées inversibles

3.1 Définition et caractérisation

Définition

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = BA = I_n.$$

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est appelé groupe linéaire (d'ordre n) et noté $GL_n(\mathbb{K})$.

Proposition

Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ alors la matrice B telle que $AB = BA = I_n$ est unique.
Cette unique matrice B est appelée inverse de A et notée A^{-1}.

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et soient $B, B' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $AB = I_n = BA$ et $AB' = I_n = B'A$. Alors, on a $B'(AB) = B'$ et $B'(AB) = (B'A)B = B$. Donc $B = B'$. □

Remarque : Si A est inversible. Alors : $AC = AD \implies C = D$.
En effet, supposons que $AC = AD$ alors $A^{-1}(AC) = A^{-1}(AD)$. D'où $(A^{-1}A)C = (A^{-1}A)D$ donc $I_nC = I_nD$. Ainsi, $C = D$.
Exemple : I_n est inversible, et $I_n^{-1} = I_n$.
0_n n'est pas inversible.

Proposition

La matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i \neq 0$.

Dans ce cas, $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$.

Démonstration. On raisonne par double implication.

- Supposons que : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i \neq 0$.
  Posons $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$.
  On a : $D \times M = I_n$ et $M \times D = I_n$. Donc M est inversible et $D^{-1} = M$.
- Pour prouver la réciproque, raisonnons par contraposée. Supposons qu'il existe $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $\lambda_k = 0$. Alors, la k^{eme} ligne de de D est nulle donc pour tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la k^{eme} ligne de $D \times B$ est nulle. Donc pour tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $DB \neq I_n$. Donc D est non inversible.

□

Remarque : Cette méthode pour calculer A^{-1} sera assez souvent employé.

Proposition

- Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.
- Si $(A,B) \in GL_n(\mathbb{K})^2$ alors AB est inversible et on a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Démonstration.
- On a $A^{-1} \times A = A \times A^{-1} = I_n$, donc A^{-1} est inversible, d'inverse A.
- On a $(AB) \times (B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I_n$ et $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^1 B = I_n$, donc AB est inversible, d'inverse $B^{-1}A^{-1}$.

□

Remarque : L'ensemble $GL_n(\mathbb{K})$ est donc stable pour le produit matriciel (mais pas pour la somme!).
$I_n \in GL_n(\mathbb{K})$ et $-I_n \in GL_n(\mathbb{K})$ mais $I_n - I_n = 0_n \notin GL_n(\mathbb{K})$.

Proposition

Toutes les matrices d'opérations élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont inversibles. Plus précisément, pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}$, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$, on a :

$$(D_i(\lambda))^{-1} = D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad (P_{i,j})^{-1} = P_{i,j}, \quad \text{et } \left(T_{i,j}(\mu)\right)^{-1} = T_{i,j}(-\mu)$$

Démonstration. Il suffit de vérifier en calculant le produit matriciel. On utilisera le résultat de l'exercice 2.
Soient $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$ et $\mu \in \mathbb{K}$, on a :
$T_{i,j}(\mu) \times T_{i,j}(-\mu) = (I_n + \mu E_{i,j})(I_n - \mu E_{i,j}) = I_n + \mu E_{i,j} - \mu E_{i,j} - \mu^2 E_{i,j}E_{i,j} = I_n - \mu^2 \delta_{j,i} E_{i,j} = I_n$ car $i \neq j$ donc $\delta_{i,j} = 0$. □

Remarque : Tout produit de matrices d'opérations élémentaires est inversible. Or, nous avons vu que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe une matrice E produit de matrices d'opérations élémentaires, et une unique matrice échelonnée réduite par lignes R telles que $A = ER$. La matrice E est donc inversible.

Théorème Caractérisation de l'inversibilité

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A est inversible.
2. Le système $AX = 0_{n,1}$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ n'a que la solution nulle.
3. $A \underset{L}{\sim} I_n$.
4. Pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution.
5. Pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet au moins une solution.

Démonstration. On va prouver tout d'abord que : (1) $\implies$ (2) $\implies$ (3) $\implies$ (1).

- (1) $\implies$ (2) : $X = 0$ est solution. De plus, soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = 0$. Alors $A^{-1}(AX) = 0$, et puisque $A^{-1}A = I_n$, donc $I_nX = 0$ d'où $X = 0$.
  Ainsi, $AX = 0$ n'a que la solution nulle.
- (2) $\implies$ (3) : Il existe une matrice $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, produit de matrices d'opérations élémentaires, et une unique matrice échelonnée réduite par lignes R, telles que $A = E \times R$. Si $R \neq I_n$, alors, le nombre de de pivots de R est strictement inférieur à n. Ainsi, le rang r de A est strictement inférieur à n. Alors d'après le cours sur les systèmes linéaires, le système $AX = 0$ admet $n - r > 0$ inconnues paramètres et donc une infinité de solutions . Ce qui par hypothèse est absurde. Ainsi, $R = I_n$ et $A \underset{L}{\sim} I_n$.
- (3) $\implies$ (1) Supposons $A \underset{L}{\sim} I_n$. Alors, il existe E produit de matrices d'opérations élémentaires donc inversible telle que $A = EI_n = E$. Ainsi $A = E$ est inversible.

Montrons désormais que : (1) $\implies$ (4) $\implies$ (5) $\implies$ (3).

- (1) $\implies$ (4) Supposons A inversible. Soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$,

$$\begin{aligned} AX = B &\implies A^{-1}(AX) = A^{-1}B \\ &\implies (A^{-1}A)X = A^{-1}B \\ &\implies I_nX = A^{-1}B \\ &\implies X = A^{-1}B \end{aligned}$$

  Ainsi, le système $AX = B$ admet une unique solution.
- (4) $\implies$ (5) Immédiat.
- (5) $\implies$ (3) Il existe une unique matrice échelonnée réduite par lignes R et une matrice E un produit de matrices d'opérations élémentaires (donc inversible) tels que $A = ER$.

  Si $R \neq I_n$, le nombre de pivots est strictement inférieur à n donc la dernière ligne de R est nulle. On pose $C = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B = EC$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on a :

$$\begin{aligned} AX = B &\implies ERX = EC \\ &\implies RX = C \end{aligned}$$

  car E est inversible.
  Or ce système est incompatible puisque sa dernière équation est $0 = 1$. Il n'admet donc pas de solutions... absurde Ainsi $R = I_n$ et $A \underset{L}{\sim} I_n$.

□

Remarque : Le deuxième point traduit l'injectivité de $X \mapsto AX$ (car $AX = AX' \leftrightarrow A(X - X') = 0$), le cinquième point sa surjectivité et le quatrième point sa bijectivité.

Proposition

Une matrice triangulaire supérieure T est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

Démonstration. Raisonnons par double implication.

- Supposons que tous les coefficients diagonaux de T soient non nuls.
  on a donc n pivots. Ainsi, le système $TX = 0$ admet une unique solution donc T est inversible.
- Supposons que T ait un coefficient diagonal nul. Notons i le plus petit entier de $[\![1,n]\!]$ tel que $t_{i,i} = 0$. En appliquant l'algorithme de Gauss-Jordan, les $i-1$ premiers pivots seront sur la diagonale de la réduite associée à T, mais le i-ème sera en position $k > i$. Il y aura alors au plus $i-1+(n-k+1) = n+i-k$ pivots, donc au plus $n-1$ pivots. La matrice échelonnée par lignes équivalentes par lignes à T n'est donc pas I_n et T n'est pas inversible.

□

Remarque : En particulier, on retrouve le fait qu'une matrice diagonale D est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

a. La matrice A est inversible.
b. Il existe $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $A'A = I_n$. (On dit que A est inversible à gauche).
c. Il existe $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AA' = I_n$.(On dit que A est inversible à droite).

Dans ce cas, $A' = A^{-1}$.

Démonstration.

- Les implications a. $\Longrightarrow$ b. et a. $\Longrightarrow$ c. sont évidentes.
- Supposons b. $0_{n,1}$ est solution de $AX = 0_{n,1}$.
  Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Supposons que $AX = 0$. Alors, $A'AX = 0$. D'où $I_nX = 0$. Donc $X = 0$. Ainsi, A est inversible.
  On a alors : $(A'A)A^{-1} = I_nA^{-1} = A^{-1}$ donc $A'(AA^{-1}) = A^{-1}$ donc $A'I_n = A^{-1}$ d'où $A' = A^{-1}$.
- Supposons c. D'après le point précédent, A' est inversible et $A = (A')^{-1}$. donc A est inversible et $A^{-1} = ((A')^{-1})^{-1} = A'$.

□

Remarque : Pour montrer qu'une matrice A est inversible, il suffit de trouver une matrice B telle que $A \times B = I_n$ (resp. $B \times A = I_n$). Il est inutile de vérifier que $B \times A = I_n$ (resp. $A \times B = I_n$).

3.2 Méthodes pratiques de calcul de l'inverse

3.2.1 Calcul de l'inverse par la méthode de Gauss-Jordan

Calcul de l'inverse par la méthode du pivot de Gauss-Jordan

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
S'il est possible de ramener à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes la matrice A à la matrice identité, alors $A \underset{L}{\sim} I_n$ et A est inversible.
On sait alors qu'il existe des matrices élémentaires E_1, ..., E_r telles que $E_r...E_1A = I_n$.
D'où $A^{-1} = \tilde{E} = E_r...E_1 = E_r...E_1I_n$.
L'algorithme de calcul de l'inverse de A consiste donc à appliquer conjointement à A et I_n les opérations élémentaires sur les lignes de l'algorithme de Gauss-Jordan qui ramènent A à I_n. A cette fin, on considère $(A|I_n)$ et on lui applique l'algorithme de Gauss-Jordan. A la fin du calcul, on obtient la matrice $(I_n|A^{-1})$.

Remarque : Cet algorithme permet également, pour une matrice non-inversible A, d'obtenir un couple $(\tilde{E}, R)$ tel que $\tilde{E}A = R$. Il suffit pour cela d'appliquer l'algorithme de Gauss-Jordan à la matrice $(A|I_n)$. Par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de $(A|I_n)$, on obtient la matrice $(R|\tilde{E})$.

Exemple :

$$
\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftrightarrow L_1 \\
&\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \\
&\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{5} L_2 \\
&\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\
&\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow -L_3 \\
&\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{5} L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + \frac{4}{5} L_3 \end{array}
\end{aligned}
$$

Ainsi, $A \underset{L}{\sim} I_3$ donc A est inversible et on a $A^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 0 & 10 & -5 \end{pmatrix}$.

3.2.2 Calcul de l'inverse d'une matrice par résolution d'un système linéaire

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a équivalence entre les deux assertions suivantes :

A est inversible si et seulement si pour tout $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe un unique $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que $AX = Y$.

Dans ce cas, l'unique solution de l'équation $AX = Y$ est $X = A^{-1}Y$.

Méthode

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ vecteur colonne de paramètres, on résout le système (S) associé à l'équation matricielle $AX = Y$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

- On échelonne (S) par l'algorithme de Gauss-Jordan. Deux cas se présentent :
  - si (S) n'admet pas une unique solution, A n'est pas inversible.
  - si (S) admet une unique solution, A est inversible. De plus,
    - L'unique solution de (S) s'exprime en fonction des paramètres $y_1, \ldots, y_n$. On a : $X = A^{-1}Y$.
    - On détermine A^{-1} par identification.

Exemple : En utilisant cette nouvelle méthode retrouver l'inverse de la matrice précédente.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned}
AX = Y \quad & \Longrightarrow \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = y_1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = y_2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = y_3 \end{cases} \\
& \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = y_2 \qquad L_2 \leftrightarrow L_1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = y_1 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = y_3 \end{cases} \\
& \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = y_2 \\ 5x_2 - 4x_3 = y_1 - 3y_2 \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ -x_3 = -2y_2 + y_3 \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases} \\
& \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = y_2 \\ x_2 - \frac{4}{5}x_3 = \frac{1}{5}y_1 - \frac{3}{5}y_2 \qquad L_2 \leftarrow \frac{1}{5}L_2 \\ -x_3 = -2y_2 + y_3 \end{cases} \\
& \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + \frac{1}{5}x_3 = \frac{1}{5}y_1 + \frac{2}{5}y_2 L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ x_2 - \frac{4}{5}x_3 = \frac{1}{5}y_1 - \frac{3}{5}y_2 \\ -x_3 = -2y_2 + y_3 \end{cases} \\
& \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + \frac{1}{5}x_3 = \frac{1}{5}y_1 + \frac{2}{5}y_2 \\ x_2 - \frac{4}{5}x_3 = \frac{1}{5}y_1 - \frac{3}{5}y_2 \\ x_3 = 2y_2 - y_3 \qquad L_3 \leftarrow -L_3 \end{cases} \\
& \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}y_1 + \frac{1}{5}y_3 L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{5}L_3 \\ x_2 = \frac{1}{5}y_1 + y_2 - \frac{4}{5}y_3 \qquad L_2 \leftarrow L_2 + \frac{4}{5}L_3 \\ x_3 = 2y_2 - y_3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, le système admet une unique solution donc A est inversible et on a $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 0 & 10 & -5 \end{pmatrix}$.

Exemple :

1.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad L_3 \leftrightarrow L_2$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad L_2 \leftrightarrow -L_2$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{array}$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \quad L_3 \leftrightarrow -L_3$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array}$$

Ainsi, $P \underset{L}{\sim} I_3$ donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = P^{-1}(AP) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   Ainsi, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$
3. On a $A = PDP^{-1}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$. Ce résultat se prouve par récurrence :
   - Pour $n = 1$, on a $A^1 = A = PDP^{-1} = PD^1P^{-1}$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $A^n = PD^nP^{-1}$.
     On a : $A^{n+1} = A^n A = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PA^{n+1}P^{-1}$.
   - Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = PD^nP^{-1}$.

   Or, $D^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -(-1)^n & -(-1)^n & 2(-1)^n \end{pmatrix}$ d'où $A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -(-1)^n & 1-(-1)^n & -1+2(-1)^n \\ -(-1)^n & -(-1)^n & 2(-1)^n \end{pmatrix}$

3.2.3 Cas d'une matrice 2 × 2

Proposition

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.
Dans ce cas, $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Démonstration. Posons $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
on a $AB = (ad - bc)I_2$.

- Si $ad - bc \neq 0$ alors, on a :
$$A\left(\frac{1}{ad-bd}B\right) = I_2.$$
  Donc A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}B$.
- Si $ad - bc = 0$ alors $AB = 0_2$.
  Raisonnons par l'absurde.
  Supposons que A est inversible, alors, on aurait : $A^{-1}(AB) = A^{-1}0_2 = 0_2$ D'où $B = 0$ donc $a = b = c = d = 0$ donc $A = 0$.
  Absurde.
  Donc A n'est pas inversible.

□

4 Transposition

Définition

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle transposée de A et on note ${}^tA = (a'_{i,j})$ (ou A^T) la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par :
$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!], a'_{i,j} = a_{j,i}.$$
Autrement dit, ${}^tA$ est obtenue à partir de A par échange des lignes et des colonnes :
$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & & & a_{2,p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad ; \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1,p} & a_{2,p} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Exemple :

- La transposée d'une matrice colonne est une matrice ligne (et réciproquement).

- Calculer la transposée de $A=\begin{pmatrix}3&5\\1&-4\\0&2\end{pmatrix}$. $A^T=\begin{pmatrix}3&1&0\\5&-4&2\end{pmatrix}$

Proposition Opérations et transposition

- $\forall A\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ {}^t({}^tA)=A$.
- $\forall A\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall B\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall\lambda,\mu\in\mathbb{K},\ {}^t(\lambda.A+\mu.B)=\lambda.{}^tA+\mu.{}^tB$. On dit que la transposition est linéaire.
- $\forall A\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall B\in\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ {}^t(AB)={}^tB\,{}^tA$.

Démonstration. • immédiat

- Soient $A=(a_{i,j})\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ B=(b_{i,j})\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soient $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$.
  Notons $\lambda.A+\mu.B=(c_{i,j})$, ${}^t(\lambda.A+\mu.B)=(c'_{i,j})$, $\lambda.{}^tA+\mu.{}^tB=(s_{i,j})$.
  Soit $(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,n]\!]$.
  $$c'_{i,j}=c_{j,i}=\lambda a_{j,i}+\mu b_{j,i}=s_{i,j}$$
  Donc ${}^t(\lambda.A+\mu.B)=\lambda.{}^tA+\mu.{}^tB$.
- Soit $A=(a_{i,j})\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B=(b_{i,j})\in\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
  Notons $AB=(d_{i,j})\in\mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, ${}^t(AB)=(d'_{i,j})\in\mathscr{M}_{q,n}(\mathbb{K})$, ${}^tA=(a'_{i,j})\in\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, ${}^tB=(b'_{i,j})\in\mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{K})$,
  ${}^tB\,{}^tA=(u_{i,j})\in\mathscr{M}_{q,n}(\mathbb{K})$.
  Soit $(i,j)\in[\![1,q]\!]\times[\![1,n]\!]$, on a :
  $$u_{i,j}=\sum_{k=1}^{p}b'_{i,k}a'_{k,j}=\sum_{k=1}^{p}b_{k,i}a_{j,k}=\sum_{k=1}^{p}a_{j,k}b_{k,i}=d_{j,i}=d'_{i,j}.$$
  Donc ${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA$.

□

Définition

Une matrice $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite :

- symétrique si et seulement si ${}^tA=A$.
- antisymétrique si et seulement si ${}^tA=-A$.

On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathscr{A}\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques).

Exemple : La matrice $A=\begin{pmatrix}1&0&4\\0&2&-1\\4&-1&5\end{pmatrix}$ est symétrique, la matrice $B=\begin{pmatrix}0&2&-1\\-2&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$ est antisymétrique.
Remarque : La diagonale d'une matrice antisymétrique est toujours nulle.
En effet, soit $A=(a_{i,j})\in\mathscr{A}\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$.
Soit $i\in[\![1,n]\!]$, $a_{i,i}=-a_{i,i}$ donc $a_{i,i}=0$.

Proposition

$\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ sont stables par combinaison linéaires mais ils ne le sont pas par produit. C'est à dire :

$$\text{Pour } \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) :\ \forall(A,B)\in\mathscr{S}_n(\mathbb{K}),\ \forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\ \lambda.A+\mu.B\in\int_n(\mathbb{K}) \text{ et } AB\in\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$$

$$\text{Pour } \mathscr{A}\mathscr{S}_n(\mathbb{K}) :\ \forall(A,B)\in\mathscr{A}\mathscr{S}_n(\mathbb{K}),\ \forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\ \lambda.A+\mu.B\in\mathscr{A}\mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \text{ et } AB\in\mathscr{A}\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$$

Démonstration. Soient $A,B\in\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$. Soient $\lambda\in\mathbb{K}$, on a : ${}^t(\lambda.A+\mu.B)=\lambda.{}^tA+\mu.{}^tB=\lambda.A+\mu.B$.
Donc $\lambda.A+\mu.B$ est symétrique.
On procède de même pour $\mathscr{A}\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$. □

Exemple :

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}\notin\mathscr{S}_n(\mathbb{K}).$$

Proposition

Si $A\in GL_n(\mathbb{K})$, alors ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1}={}^t(A^{-1})$

Démonstration. Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. On a $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$. En appliquant la transposée, on obtient : ${}^t(AA^{-1}) = {}^tI_n = {}^t(AA^{-1})$. Donc : ${}^t(A^{-1}){}^tA = I_n = {}^tA{}^t(A^{-1})$. Ainsi, ${}^tA$ est inversible et ${}^t(A^{-1})$ est l'inverse de ${}^tA$. □

Remarque :

- On a donc A est inversible si et seulement si ${}^tA$ est inversible.
  Une des implications est la proposition précédente.
  Réciproquement, si ${}^tA$ est inversible alors ${}^t({}^tA)$ est inversible donc A est inversible.
- On a vu qu'une matrice triangulaire supérieure est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.
  Grâce à la transposition, on peut en déduire qu'une matrice triangulaire inférieure est inversible si et seulement si tous ses coefficient diagonaux sont non nuls.
  En effet, soit $A \in T_n^-(\mathbb{K})$.
  A est inversible si et seulement si ${}^tA$ est inversible. Or, ${}^tA \in T_n^+(\mathbb{K})$. Donc ${}^tA$ est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.
  Or les coefficients diagonaux de A et de ${}^tA$ sont identiques.