Feuille d'exercices 1 : Logique et raisonnement

1 Logique et quantificateurs

Exercice 1. Soient P, Q, R trois propositions. Montrer que :

$$(P \implies (Q \implies R)) \text{ est équivalente à } ((P \text{ et } Q) \implies R).$$

$$((P \text{ ou } Q) \implies R)) \text{ est équivalente à } ((P \implies R) \text{ et } (Q \implies R)).$$

Exercice 2. Pour chacune des propositions suivantes, étudier si elle est vraie ou fausse :
1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $x + y^2 = 0$,
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$, $x + y^2 = 0$,
3. $\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $x + y^2 = 0$,
4. $\exists x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$, $x + y^2 = 0$,
5. $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exists x \in \mathbb{R}$, $x + y^2 = 0$,

Exercice 3. Traduire en terme de quantificateurs les phrases suivantes :
1. Tous les réels ont un carré positif.
2. L'équation $x^3 + x + 1 = 0$ admet une unique solution réelle.
3. L'équation $x^2 + x + 1 = 0$ n'admet aucune solution réelle.
4. Il existe un seul réel x tel que $\ln(x) = 1$.

Exercice 4.
1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Traduire les phrases suivantes en termes mathématiques puis les nier.
   (a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
   (c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire les phrases suivantes en termes mathématiques puis les nier.
   (a) f est croissante.
   (b) f est bornée.
   (c) f est constante.
   (d) f est la fonction nulle.
   (e) f ne s'annule jamais.
   (f) f n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distincts .
   (g) f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$;
   (h) f n'est pas inférieure à g.

2 Raisonnements

Exercice 5. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n^2+1} \notin \mathbb{N}$$

Exercice 6. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$ et $c \leq d$.
Montrer que si $a + c = b + d$, alors $a = b$ et $c = d$.

Exercice 7.
1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, n est pair si et seulement si n^2 est pair.
2. En déduire que $\sqrt{2}$ est un irrationnel.
   (on pourra raisonner par l'absurde et supposer qu'il existe $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ avec $\dfrac{p}{q}$ irréductible.).

Exercice 8. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R},\ ax + be^x = 0) \iff a = b = 0.$$

Exercice 9. Montrer que :

$$\exists! x \in \mathbb{R}^+,\ x + \sqrt{x} - 2 = 0$$

Exercice 10. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x = \sqrt{2+x}$

Exercice 11. Montrer que : $\exists x \in \mathbb{R},\ e^x + e^{-x} = \dfrac{5}{2}$.

Exercice 12. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x) \times f(y) - f(xy) = x + y$$

1. Analyse : supposons qu'il existe f solution du problème.
   (a) Montrer que $f(0) = 1$.
   (b) En déduire l'expression de $f(x)$.
2. Synthèse
3. Conclure

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \forall y \in \mathbb{R}\ ,\ \forall z \in \mathbb{R}\ ,\ (x \neq y \text{ et } x \neq z) \Rightarrow \left(\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{f(x) - f(z)}{x - z} \right).$$

Montrer qu'il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$.

Exercice 14. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que $\max(x^2, (x-2)^2) \geq 1$

Exercice 15. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1 + u_n}{2}}$.
Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 1$.

Exercice 16. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2^n > n$

Exercice 17. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 6$ et pour tout entier $n \geq 2$, $u_n = 6u_{n-1} - 9u_{n-2}$.
Montrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n+1) \times 3^n$.

Exercice 18. On définit la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \left(\dfrac{5}{3}\right)^n$.

Exercice 19. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 0 \\ u_2 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n(n-1)$

Exercice 20. Soit (u_n) la suite vérifiant :

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \begin{cases} 2u_{\frac{n}{2}} + 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ u_n + 1 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n$.

Exercice 21. Soit $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}.$$