Devoir surveillé n°2

samedi 12 octobre 2019
Durée : 4 heures

◇ Le candidat peut admettre le résultat d'une question et l'utiliser dans la suite à condition de l'écrire clairement sur sa copie.

◇ Si le candidat repère ce qu'il croit être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice 1

Déterminer l'ensemble de validité et montrer l'égalité

$$\arcsin(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}\binom{j}{i}3^j \times 4^i.$$

Exercice 3

Montrer que

$$\forall n \geq 2, \sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right).$$

On pourra remarquer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, 1-\frac{1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$.

Problème 1

Par analogie avec les fonctions circulaires trigonométriques, dans ce problème, on s'intéresse à la notion de tangente dans le cadre des fonctions hyperboliques.

1. **Définition et premières propriétés de la tangente hyperbolique**
   (a) Déterminer le domaine de définition I de $x \mapsto \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$ et étudier la parité de cette application.
   Dans la suite, on appelle fonction tangente hyperbolique la fonction notée th et définie par l'expression
   $$th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)},$$
   pour tout nombre réel $x \in I$.
   (b) Justifier que th est dérivable sur I et donner une expression de th'.
   (c) Déterminer $\lim_{x\to+\infty}\operatorname{th}(x)$ et $\lim_{x\to-\infty}\operatorname{th}(x)$.
   (d) Justifier que th réalise une bijection de I vers un intervalle J que l'on précisera. On note argth la fonction réciproque de th $: I \to J$.
   (e) Montrer que argth est dérivable sur J et déterminer une expression de $\operatorname{argth}'(x)$ uniquement en fonction de $x \in J$.
   On pourra commencer par exprimer th' en fonction de th.
2. En résolvant une équation, déterminer une expression de argth.
3. Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\operatorname{sh}(2^k x)},$$
   (a) Montrer que :
   $$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{1}{\operatorname{sh}(y)} - \frac{1}{\operatorname{th}\left(\frac{y}{2}\right)} + \frac{1}{\operatorname{th}(y)} = 0.$$
   (b) En déduire une expression « simple » de u_n, pour tout nombre entier $n \in \mathbb{N}$.

(c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on précisera.

Problème 2

On s'intéresse l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$(*) \qquad \text{pour tous réels } x \text{ et } y \text{ tels que } xy \neq 1,\ f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = f(x) + f(y)$$

1. Soit f une fonction constante. À quelle condition f vérifie $(*)$?
2. Montrer que si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifie $(*)$ alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf vérifie $(*)$.
3. **Cas de la fonction arctan**
   (a) Soit $(x,y) \in]-1,1[^2$.
      i. Justifier que $|\arctan x + \arctan y| < \dfrac{\pi}{2}$.
      ii. Donner une expression simplifiée de : $\tan(\arctan x + \arctan y)$.
      iii. En déduire une expression de $\arctan x + \arctan y$.
   (b) Calculer la limite en $+\infty$ des deux fonctions

   $$g : x \mapsto \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) \qquad \text{et} \qquad h : x \mapsto 2\arctan x.$$

   En déduire que la fonction arctan ne vérifie pas $(*)$.
4. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $(*)$.
   (a) Montrer que $f(0) = 0$.
   (b) Montrer que pour tous réels x, y tels que $xy \neq 1$, $f'(y) = \dfrac{(1+x^2)}{(1-xy)^2} \times f'\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$.
   (c) Montrer qu'il existe un réel k tel que, pour tout réel y, $f'(y) = \dfrac{k}{1+y^2}$.
   (d) Déduire des questions précédentes l'expression de f.
5. Conclure

Problème 3

1. On pose :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} k,$$

   et

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \sum_{k=S_{n-1}+1}^{S_n} (2k-1).$$

   (a) Donner, sans la redémontrer, l'expression de S_n en fonction de n.
   (b) Montrer que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = n^3.$$

   (c) Montrer que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2.$$

   On ne cherchera pas à calculer $\sum_{k=1}^{n} k^3$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite telle que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0 \text{ et } \sum_{k=1}^{n} u_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)^2.$$

   Montrer que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n.$$

FIN.