Corrigé de la feuille d'exercices 9

Exercice 1. •

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array}$$

•

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array}$$

Exercice 2. •

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & -5 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & -5 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{11}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 7L_1 \end{array}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{11}{2} \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow 2L_2$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2} L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2} L_2 \end{array}$$

•

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 1 & -3\\ -1 & 1 & 1 & -2\end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -4 & 3 & -5\\ 0 & 2 & 0 & -1\end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1\\ L_3 \to L_3 + L_1\end{matrix}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 0 & -1\\ 0 & -4 & 3 & -5\end{pmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & -4 & 3 & -5\end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 3 & -7\end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2\\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2\end{matrix}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{3}\end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -\frac{5}{6}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{3}\end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_3$$

•

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 7 & 2\\ 2 & 1 & -8 & 1\end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 6 & 3\\ 0 & -3 & -6 & -1\end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1\\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1\\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1\end{matrix}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0 & -5 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2\\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2\\ L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2\end{matrix}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0 & -5 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0 & -5 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_3\\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_3\end{matrix}$$

Exercice 3. 1.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5\\ x - y - z = 1\\ x + z = 3\end{cases} \iff \begin{cases} x + y + 2z = 5 & \\ y + z = 2 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1\\ -2y - 3z = -4 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + z = 3 & L_1 \leftarrow L_1 - L_2\\ y + z = 2 & \\ -z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + z = 3 & \\ y + z = 2 & \\ z = 0 & L_3 \leftarrow -L_3\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 3 & L_1 \leftarrow L_1 - L_3\\ y = 2 & L_2 \leftarrow L_2 - L_3\\ z = 0 & \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\{(3,2,0)\}$.

2.

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 2x + y + z = -1 \\ x + 11y - z = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 3y + z = 1 & \\ 7y - z = -3 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 14y - 2z = 4 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - 3y + z = 1 & \\ y - \frac{1}{7}z = -\frac{3}{7} & L_2 \leftarrow \frac{1}{7}L_2 \\ 14y - 2z = 4 & \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + \frac{4}{7}z = -\frac{2}{7} & L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2 \\ y - \frac{1}{7}z = -\frac{3}{7} & \\ 0 = 10 & L_3 \leftarrow L_3 + 14L_2 \end{cases}$$

Donc le système n'admet pas de solution.

3.

$$\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y - z = -1 & L_1 \leftarrow -L_1 \\ 2x + y + 2z = 0 & \\ x + 2y + 3z = 1 & \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y - z = -1 & \\ 3y + 4z = 2 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 3y + 4z = 2 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y - z = -1 & \\ y + \frac{4}{3}z = \frac{2}{3} & L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2 \\ 3y + 4z = 2 & \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + \frac{1}{3}z = -\frac{1}{3} & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ y + \frac{4}{3}z = \frac{2}{3} & \\ 0 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}z \\ y = \frac{2}{3} - \frac{4}{3}z \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions du système est : $\left\{ \left(\frac{-1-z}{3}, \frac{2-4z}{3}, z \right),\ z \in \mathbb{R} \right\}$.

Exercice 4. 1.

$$\begin{cases} 2x - 3y + 6z + 2t = 5 \\ y - 2z + t = 1 \\ z - 3t = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x - \frac{3}{2}y + 3z + t = \frac{5}{2} & L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ y + z - 2t = 1 & \\ z - 3t = 2 & \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + \frac{5}{2}t = 4 & L_1 \leftarrow L_1 + \frac{3}{2}L_2 \\ y - 2z + t = 1 & \\ z - 3t = 2 & \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + \frac{5}{2}t = 4 & \\ y - 5t = 5 & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \\ z - 3t = 2 & \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système est donc $\{(4 - \frac{5}{2}t, 5 + 5t, 2 + 3t, t), t \in \mathbb{R}\}$.

2.

$$\begin{cases} x-2y+z+\ \ t=1 \\ 2x+\ \ y-z \qquad =2 \\ 3x-\ \ y \qquad +\ \ t=3 \\ 4x-3y+z+2t=4 \end{cases} \iff \begin{cases} x-2y+\ \ z+\ \ t=1 & \\ \qquad 5y-3z-2t=0 & L_2\leftarrow L_2-2L_1 \\ \qquad 5y-3z-2t=0 & L_3\leftarrow L_3-3L_1 \\ \qquad 5y-3z-2t=0 & L_4\leftarrow L_4-4L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x\ -2y\ \ +z\ \ +t\ =1 & \\ \qquad y\ -\frac{3}{5}z\ -\frac{2}{5}t\ =0 & L_2\leftarrow \frac{1}{5}L_2 \\ \qquad 5y\ -3z\ -2t\ =0 & \\ \qquad 5y\ -3z\ -2t\ =0 & \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x\quad -\frac{1}{5}z\ +\frac{1}{5}t\ =1 & L_1\leftarrow L_1+2L_2 \\ \quad y\ -\frac{3}{5}z\ -\frac{2}{5}t\ =0 & \\ \qquad\qquad 0\ =0 & L_3\leftarrow L_3-5L_2 \\ \qquad\qquad 0\ =0 & L_4\leftarrow L_4-5L_2 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système est donc : $\{(1+\frac{1}{5}z-\frac{1}{5}t, \frac{3}{5}z+\frac{2}{5}t, z, t),\ (z,t)\in\mathbb{R}^2\}$.

Exercice 5. 1. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ ax+3y=b \end{cases} \iff \begin{cases} x+ \qquad 2y=1 & \\ \quad (3-2a)y=b-a & L_2\leftarrow L_2-aL_1 \end{cases}$$

- Si $3-2a\neq 0$, on a :

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ ax+3y=b \end{cases} \iff \begin{cases} x \qquad\quad =\frac{3-2b}{3-2a} & L_1\leftarrow L_1-\frac{2}{3-2a}L_2 \\ (3-2a)y=b-a & \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x\ =\frac{3-2b}{3-2a} & \\ y=\frac{b-a}{3-2a} & L_2\leftarrow \frac{1}{3-2a}L_2 \end{cases}$$

  On réalise l'intersection entre deux droites qui ne sont pas parallèles car le coefficient directeur de $x+2y=1$ vaut $-\dfrac{1}{2}$ et le coefficient directeur de $ax+3y=b$ vaut $-\dfrac{a}{3}\neq-\dfrac{1}{2}$.

- Si $3-2a=0$, on a :

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ ax+3y=b \end{cases} \iff \begin{cases} x\ +2y\ =1 \\ \qquad 0\ =b-a \end{cases}$$

  La relation de compatibilité est $0=b-a$. Ainsi, le système admet au moins une solution si et seulement si $a=b$.
  - Si $b=a$ alors l'ensemble des solutions du système est : $\{(1-2y,y), y\in\mathbb{R}\}$. Les deux droites sont confondues. On obtient donc cette droite comme intersection.
  - Si $b\neq a$. Il n'y a aucune solution au système. Ce cas correspond à l'intersection entre deux droites parallèles mais non confondues.

2. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x+\ \ y+az=0 \\ x+ay+\ \ z=0 \\ ax+\ \ y+\ \ z=b \end{cases} \iff \begin{cases} x+ \qquad y+ \qquad\qquad az=0 & \\ \quad (a-1)y+ \qquad (1-a)z=0 & L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ \quad (1-a)y+(1-a)(1+a)z=b & L_3\leftarrow L_3-aL_1 \end{cases}$$

- Si $a-1\neq 0$, on a :

$$\begin{cases} x+\ \ y+az=0 \\ x+ay+\ \ z=0 \\ ax+\ \ y+\ \ z=b \end{cases} \iff \begin{cases} x+ \qquad y+ \qquad\qquad az=0 & \\ \qquad\quad y- \qquad\qquad z=0 & L_2\leftarrow \frac{1}{1-a}L_2 \\ \quad (1-a)y+(1-a)(1+a)z=b & \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x\ \ + \qquad (a+1)z=0 & L_1\leftarrow L_1-L_2 \\ \ \ y- \qquad\qquad z=0 & \\ \quad (1-a)(2+a)z=b & L_3\leftarrow L_3-(1-a)L_2 \end{cases}$$

- Si de plus, $2+a \neq 0$, on a :

$$\begin{cases} x+\ \ y+az=0 \\ x+ay+\ \ z=0 \\ ax+\ \ y+\ \ z=b \end{cases} \iff \begin{cases} x \quad +(a+1)z=0 \\ y- \qquad\quad z=0 \\ \qquad\qquad z=\dfrac{b}{(1-a)(2+a)} \qquad L_3 \leftarrow \frac{1}{(1-a)(2+a)}L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \quad = -\frac{(a+1)b}{(1-a)(2+a)} \qquad L_1 \leftarrow L_1-(a+1)L_3 \\ y \quad = \dfrac{b}{(1-a)(2+a)} \qquad L_2 \leftarrow L_2+L_3 \\ \quad z = \dfrac{b}{(1-a)(2+a)} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $\{(\frac{(a+1)b}{(1-a)(2+a)}, \dfrac{b}{(1-a)(2+a)}, \dfrac{b}{(1-a)(2+a)})\}$. L'intersection est un point.

- Si $2+a=0$, on a :

$$\begin{cases} x+\ \ y+az=0 \\ x-2y+\ \ z=0 \\ -2x+\ \ y+\ \ z=b \end{cases} \iff \begin{cases} x \quad -z\ =0 \\ \ \ y\ -z\ =0 \\ \qquad 0\ =b \end{cases}$$

La relation de compatibilité est $0=b$. Ainsi, le système admet au moins une solution si et seulement si $b=0$.

  - Si $b \neq 0$, le système admet aucune solution.
  - Sinon, l'ensemble des solutions du système est : $\{(z,z,z), z \in \mathbb{R}\}$. Ainsi, l'intersection des trois plans est une droite.

- Si $a-1=0$, on a :

$$\begin{cases} x+\ \ y+az=0 \\ x+ay+\ \ z=0 \\ ax+\ \ y+\ \ z=b \end{cases} \iff \begin{cases} x\ +y\ +z\ =0 \\ \qquad\quad 0\ =0 \\ \qquad\quad 0\ =b \end{cases}$$

Ainsi, la relation de compatibilité est $b=0$. Le système admet des solutions si et seulement si $b=0$.

- Si $b \neq 0$, le système n'admet aucune solution.
- Si $b=0$, on a :

$$\begin{cases} x+\ \ y+az=0 \\ x+ay+\ \ z=0 \\ ax+\ \ y+\ \ z=b \end{cases} \iff \{x+y+z=0$$

L'ensemble des solutions du système est ; $\{(-y-z,y,z),y,y \in \mathbb{R}\}$. L'ensemble des solutions est un plan.

Finalement, l'ensemble des solutions du système est :

- $\{(-\frac{(a+1)b}{(1-a)(2+a)}, \dfrac{b}{(1-a)(2+a)}, \dfrac{b}{(1-a)(2+a)})\}$ si $a \notin \{1,-2\}$
- $\emptyset$ si $a=-2$ et $b \neq 0$
- $\{(z,z,z), z \in \mathbb{R}\}$ si $a=-2$ et $b=0$
- $\emptyset$ si $a=1$ et $b \neq 0$
- $\{(-y-z,y,z), y,z \in \mathbb{R}\}$ si $a=1$ et $b=0$

Exercice 6. 1.

$$\begin{cases} 2x + \ \ y - 3z = a \\ 3x + 2y + \ \ z = a+3 \\ 7x + 4y - 5z = 2a+5 \end{cases} \iff \begin{cases} x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z = \frac{a}{2} & L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ 3x + 2y + \ \ z = a+3 \\ 7x + 4y - 5z = 2a+5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z = \frac{a}{2} \\ \frac{1}{2}y + \frac{11}{2}z = -\frac{1}{2}a + 3 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ \frac{1}{2}y + \frac{11}{2}z = -\frac{3}{2}a + 5 & L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z = \frac{a}{2} \\ y + 11z = -a + 6 & L_2 \leftarrow 2L_2 \\ \frac{1}{2}y + \frac{11}{2}z = -\frac{3}{2}a + 5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \quad -7z \ = a - 3 & L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2 \\ y + 11z = -a + 6 \\ 0 = -a + 2 & L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2 \end{cases}$$

On a une relation de compatibilité qui est $0 = -a + 2$.

- Si $a \neq 2$, le système n'admet aucune solution.
- Si $a = 2$, on a :

$$\begin{cases} 2x + \ \ y - 3z = a \\ 3x + 2y + \ \ z = a+3 \\ 7x + 4y - 5z = 2a+5 \end{cases} \iff \begin{cases} x \quad -7z = -1 \\ y + 11z = 4 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -1 - 7z \\ y = 4 - 11z \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions du système est $\{(-1 + 7z, 4 - 11z, z), z \in \mathbb{R}\}$

2.

$$(S) \quad \begin{cases} mx + \ \ y + \ \ z + t = 1 \\ x + my + \ \ z + t = m \\ x + \ \ y + mz + t = m+1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + my + \ \ z + t = m & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ mx + \ \ y + \ \ z + t = 1 \\ x + \ \ y + mz + t = m+1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + my + z + t = m \\ (1-m^2)y + (1-m)z + (1-m)t = 1 - m^2 & L_2 \leftarrow L_2 - mL_1 \\ (1-m)y + (m-1)z = 1 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + my + z + t = m \\ (1-m)y + (m-1)z = 1 & L_2 \leftrightarrow L_3 \\ (1-m^2)y + (1-m)z + (1-m)t = 1 - m^2 \end{cases}$$

- **Si** $m \neq 1$:

$$(S) \iff \begin{cases} x + my + z + t = m \\ y - z = \frac{1}{1-m} & L_2 \leftrightarrow \frac{L_2}{1-m} \\ (1-m^2)y + (1-m)z + (1-m)t = 1 - m^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + (1+m)z + t = -\frac{m^2}{1-m} & L_1 \leftarrow L_1 - mL_2 \\ y - z = \frac{1}{1-m} \\ (1-m)(2+m)z + (1-m)t = -m(1+m) & L_3 \leftarrow L_3 - (1-m^2)L_2 \end{cases}$$

- Si de plus $m \neq -2$, on a :

$$(S) \iff \begin{cases} x + (1+m)z + t = -\frac{m^2}{1-m} \\ y - z = \frac{1}{1-m} \\ z + \frac{1}{2+m}t = -\frac{m(1+m)}{(1-m)(2+m)} & L_3 \leftarrow \frac{L_3}{(1-m)(2+m)} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + \frac{1}{2+m}t = \frac{m}{(1-m)(2+m)} & L_1 \leftarrow L_1 - (1+m)L_3 \\ y + \frac{1}{2+m}t = \frac{2-m^2}{(1-m)(2+m))} & L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ z + \frac{1}{2+m}t = -\frac{m(1+m)}{(1-m)(2+m)} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{m}{(1-m)(2+m)} - \frac{1}{2+m}t \\ y = \frac{2-m^2}{(1-m)(2+m))} - \frac{1}{2+m}t \\ z = -\frac{m(1+m)}{(1-m)(2+m)} - \frac{1}{2+m}t \end{cases}$$

Ainsi, si $m \neq 1$ et $m \neq -2$, l'ensemble des solutions est

$$\left\{ \left(\frac{m}{(1-m)(2+m)} - \frac{1}{2+m}t, \frac{2-m^2}{(1-m)(2+m))} - \frac{1}{2+m}t, \frac{-m(1+m)}{(1-m)(2+m)} - \frac{1}{2+m}t \right), t \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Si $m = -2$, on a :

$$\begin{cases} mx + y + z + t = 1 \\ x + my + z + t = m \\ x + y + mz + t = m+1 \end{cases} \iff \begin{cases} x - z + t = -\frac{4}{3} \\ y - z = \frac{1}{3} \\ 3t = -2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - z + t = -\frac{4}{3} \\ y - z = \frac{1}{3} \\ t = -\frac{2}{3} & L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - z = -\frac{2}{3} & L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ y - z = \frac{1}{3} \\ t = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Ainsi, si $m = -2$, l'ensemble des solutions est

$$\left\{ \left(z - \frac{2}{3}, z + \frac{1}{3}, z, -\frac{2}{3} \right), z \in \mathbb{R} \right\}$$

- Si $m = 1$, on a :

$$\begin{cases} mx + y + z + t = 1 \\ x + my + z + t = m \\ x + y + mz + t = m+1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ 0 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Le système n'admet donc aucune solution.

Finalement, l'ensemble des solutions est :

- $\left\{ \left(\frac{m}{(1-m)(2+m)} - \frac{1}{2+m}t, \frac{2-m^2}{(1-m)(2+m))} - \frac{1}{2+m}t, \frac{-m(1+m)}{(1-m)(2+m)} - \frac{1}{2+m}t \right), t \in \mathbb{R} \right\}$ si $m \notin \{1, -2\}$,
- $\left\{ \left(z - \frac{2}{3}, z + \frac{1}{3}, z, -\frac{2}{3} \right), z \in \mathbb{R} \right\}$ si $m = -2$
- $\emptyset$ si $m = 1$

Exercice 7. 1.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = a \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + 2z = 3 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ y + 2z = a - 3 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - z = -2 & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ y + 2z = 3 \\ 0 = a - 6 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

On a donc une relation de compatibilité $0 = a - 6$.

- Si $a \neq 6$, le système est incompatible et il n'admet donc aucune solution.
- Sinon, $a = 6$, on a :

$$\begin{cases} x + \ \ y + \ \ z = 1 \\ x + 2y + 3z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = a \end{cases} \iff \begin{cases} x \quad -z = -2 \\ \quad y + 2z = 3 \\ \quad\quad 0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \quad = -2 + z \\ \quad y = 3 - 2z \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système est $\{(-2+z, 3-2z, z), z \in \mathbb{R}\}$.

Finalement, l'ensemble des solutions est :
- $\emptyset$ si $a \neq 6$
- $\{(-2+z, 3-2z, z), z \in \mathbb{R}\}$ si $a = 6$

2.

$$\begin{cases} 3x + \ \ y - \ \ z = 1 \\ 5x + 2y - 2z = a \\ 4x + \ \ y - \ \ z = b \end{cases} \iff \begin{cases} x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z = \frac{1}{3} & L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1 \\ 5x + 2y - 2z = a \\ 4x + \ \ y - \ \ z = b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z = a - \frac{5}{3} & L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ -\frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z = b - \frac{4}{3} & L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z = \frac{1}{3} \\ y - \ \ z = 3a - 5 & L_2 \leftarrow 3L_2 \\ -\frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z = b - \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \quad = 2 - a & L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{3}L_2 \\ \quad y - z = 3a - 5 \\ \quad\quad 0 = a + b - 3 & L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{3}L_2 \end{cases}$$

On a une relation de compatibilité qui est $a + b - 3 = 0$.
- Si $a + b \neq 3$ alors le système n'admet aucune solution.
- Si $a + b = 3$, on a :

$$\begin{cases} 3x + \ \ y - \ \ z = 1 \\ 5x + 2y - 2z = a \\ 4x + \ \ y - \ \ z = b \end{cases} \iff \begin{cases} x \quad = 2 - a \\ \quad y - z = 3a - 5 \\ \quad\quad 0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \quad = 2 - a \\ \quad y = 3a - 5 + z \\ \quad 0 = 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système est : $\{(2-a, 3a-5+z, z), z \in \mathbb{R}\}$.

Finalement, l'ensemble des solutions est :
- $\emptyset$ si $a + b \neq 3$
- $\{(2-a, 3a-5+z, z), z \in \mathbb{R}\}$ si $a + b = 3 \neq 6$

3.

$$
(S_3)\quad \begin{cases} 2x+y+z+t=3\\ x+2y+z+t=1\\ x+y+2z+t=2\\ x+y+z+2t=4\\ 4x-3y+3z-4t=a\\ 2x+7y+7z+2t=b \end{cases}
\iff \begin{cases} x+2y+z+t=1 & L_1 \leftrightarrow L_2\\ 2x+y+z+t=3\\ x+y+2z+t=2\\ x+y+z+2t=4\\ 4x-3y+3z-4t=a\\ 2x+7y+7z+2t=b \end{cases}
$$

$$
\iff \begin{cases} x+2y+z+t=1\\ -3y-z-t=1 & L_2 \leftarrow L_2-2L_1\\ -y+z=1 & L_3 \leftarrow L_3-L_1\\ -y+t=3 & L_4 \leftarrow L_4-L_1\\ -11y-z-8t=a-4 & L_5 \leftarrow L_5-4L_1\\ 3y+5z=b-2 & L_6 \leftarrow L_6-2L_1 \end{cases}
$$

$$
\iff \begin{cases} x+2y+z+t=1\\ -y+z=1 & L_2 \leftrightarrow L_3\\ -3y-z-t=1\\ -y+t=3\\ -11y-z-8t=a-4\\ 3y+5z=b-2 \end{cases}
$$

$$
\iff \begin{cases} x+2y+z+t=1\\ y-z=-1 & L_2 \leftarrow -L_2\\ -3y-z-t=1\\ -y+t=3\\ -11y-z-8t=a-4\\ 3y+5z=b-2 \end{cases}
$$

$$
\iff \begin{cases} x+3z+t=3 & L_1 \leftarrow L_1-2L_2\\ y-z=-1\\ -4z-t=-2 & L_3 \leftarrow L_3+3L_2\\ -z+t=2 & L_4 \leftarrow L_4+L_2\\ -12z-8t=a-15 & L_5 \leftarrow L_5+11L_2\\ 8z=b+1 & L_6 \leftarrow L_6-3L_2 \end{cases}
$$

$$
\iff \begin{cases} x+3z+t=3\\ y-z=-1\\ -z+t=2 & L_3 \leftrightarrow L_4\\ -4z-t=-2\\ -12z-8t=a-15\\ 8z=b+1 \end{cases}
$$

$$
\iff \begin{cases} x+3z+t=3\\ y-z=-1\\ z-t=-2 & L_3 \leftarrow -L_3\\ -4z-t=-2\\ -12z-8t=a-15\\ 8z=b+1 \end{cases}
$$

$$
\iff \begin{cases} x+4t=9 & L_1 \leftarrow L_1-3L_3\\ y-t=-3 & L_2 \leftarrow L_2+L_3\\ z-t=-2\\ -5t=-10 & L_4 \leftarrow L_4+4L_3\\ -20t=a-39 & L_5 \leftarrow L_5+12L_3\\ 8t=b+17 & L_6 \leftarrow L_6-8L_3 \end{cases}
$$

On a donc :

$$(S_3) \iff \begin{cases} x \quad + \ 4t = 9 \\ \quad y \ - \quad t = -3 \\ \quad\quad z - \quad t = -2 \\ \quad\quad\quad t = 2 & L_4 \leftarrow -\frac{1}{5}L_4 \\ \quad - 20t = a - 39 \\ \quad\quad 8t = b + 17 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & = 1 & L_1 \leftarrow L_1 - 4L_4 \\ \quad y & = -1 & L_2 \leftarrow L_2 + L_4 \\ \quad\quad z & = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_4 \\ \quad\quad\quad t & = 2 \\ \quad\quad\quad 0 & = a + 1 & L_5 \leftarrow L_5 - 20L_4 \\ \quad\quad\quad 0 & = b + 1 & L_6 \leftarrow L_6 - 8L_4 \end{cases}$$

Ainsi, on a deux relations de compatibilité qui sont : $0 = a + 1$ et $0 = b + 1$.

Finalement, l'ensemble des solutions est :

- $\emptyset$ si $a \neq -1$ ou $b \neq -1$
- $\{(1, -1, 0, 2)\}$ si $a = -1$ et $b = -1$.

4.

$$(S_4) \begin{cases} x + \quad y + (2m-1)z = 1 \\ mx + \quad y + \quad\quad\quad z = 1 \\ x + my + \quad\quad\quad z = 3(m+1) \end{cases} \iff \begin{cases} x + \quad\quad y + \quad\quad (2m-1)z = 1 \\ \quad (1-m)y + (-2m^2+m+1)z = 1 - m & L_2 \leftarrow L_2 - mL_1 \\ \quad (m-1)y + \quad (-2m+2)z = 3m + 2 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

On remarque que $-2m^2 + m + 1 = (1-m)(2m+1)$.

- Si $m \neq 1$, on a :

$$(S_4) \iff \begin{cases} x + \quad\quad y + \quad (2m-1)z = 1 \\ \quad\quad\quad y + \quad (2m+1)z = 1 & L_2 \leftarrow \frac{1}{1-m}L_2 \\ \quad (m-1)y + (-2m+2)z = 3m + 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \ - \quad\quad\quad\quad 2z = 0 & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \quad y + \quad\quad (2m+1)z = 1 \\ \quad (-2m^2 - m + 3)z = 2m + 3 & L_3 \leftarrow L_3 - (m-1)L_2 \end{cases}$$

On a $-2m^2 - m + 3 = -(2m+3)(m-1)$.

- Si de plus, $m \neq -\dfrac{3}{2}$, on a :

$$(S_4) \iff \begin{cases} x \ - \quad\quad 2z = 0 \\ \quad y + (2m+1)z = 1 \\ \quad\quad\quad z = \frac{1}{1-m} & L_3 \leftarrow -\frac{1}{(2m+3)(m-1)}L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \ = \frac{2}{1-m} & L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \\ \quad y \ = -\frac{3m}{1-m} & L_2 \leftarrow L_2 - (2m+1)L_3 \\ \quad\quad z = \frac{1}{1-m} \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est :

$$\{(-\frac{2}{m-1}, -\frac{3m}{1-m}, \frac{1}{1-m})\}$$

- Si $m = -\frac{3}{2}$, on a :

$$(S_4) \iff \begin{cases} x \quad -2z = 0 \\ \quad y \ -2z = 1 \\ \quad\quad\quad 0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \quad = 2z \\ \quad y \quad = 1 + 2z \\ \quad\quad 0 = 0 \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions du système est :

$$\{(2z, 1+2z, z), z \in \mathbb{R}\}$$

- Enfin, si $m = 1$:

$$(S_4) \iff \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 5 \end{cases}$$

Le système est incompatible.

Finalement, l'ensemble des solutions est :

- $\emptyset$ si $m = 1$
- $\{(2z, 1+2z, z), z \in \mathbb{R}\}$ si $m = -\dfrac{3}{2}$
- $\{(-\dfrac{2}{m-1}, -\dfrac{3m}{1-m}, \dfrac{1}{1-m})\}$ si $m \notin \{1, -\frac{3}{2}\}$.

5.

$$(S_5) \begin{cases} x - my + m^2 z = m \\ mx - m^2 y + mz = 1 \\ mx + y - m^3 z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x - my + m^2 z = m & \\ m(1-m^2)z = 1 - m^2 & L_2 \leftarrow L_2 - mL_1 \\ (1+m^2)y - 2m^3 z = 1 - m^2 & L_3 \leftarrow L_3 - mL_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - my + m^2 z = m & \\ (1+m^2)y - 2m^3 z = 1 - m^2 & L_2 \leftrightarrow L_3 \\ m(1-m^2)z = 1 - m^2 & \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - my + m^2 z = m & \\ y - \frac{2m^3}{1+m^2} z = \frac{1-m^2}{1+m^2} & L_2 \leftrightarrow \frac{1}{1+m^2} L_2 \\ m(1-m^2)z = 1 - m^2 & \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + \frac{m^2(1-m^2)}{1+m^2} z = \frac{2m}{1+m^2} & L_1 \leftarrow L_1 + mL_2 \\ y - \frac{2m^3}{1+m^2} z = \frac{1-m^2}{1+m^2} & \\ m(1-m^2)z = 1 - m^2 & \end{cases}$$

- Si $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, 1\}$, on a :

$$(S_5) \iff \begin{cases} x + \frac{m^2(1-m^2)}{1+m^2} z = \frac{2m}{1+m^2} & \\ y - \frac{2m^3}{1+m^2} z = \frac{1-m^2}{1+m^2} & \\ z = \frac{1}{m} & L_3 \leftarrow \frac{1}{m(1-m^2)} L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = m & L_1 \leftarrow L_1 - \frac{m^2(1-m^2)}{1+m^2} L_3 \\ y = 1 & L_2 \leftarrow L_2 + \frac{2m^3}{1+m^2} L_3 \\ z = \frac{1}{m} & \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions est : $\{(m, 1, \frac{1}{m})\}$

- Si $m = 0$, on a :

$$(S_5) \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Le système n'admet donc aucune solution.

- Si $m = 1$, on a :

$$(S_5) \iff \begin{cases} x = 1 \\ y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 \\ y = z \\ 0 = 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est :

$$\{(1, z, z), z \in \mathbb{R}\}$$

- Si $m=-1$, on a :

$$(S_5) \iff \begin{cases} x & = -1 \\ \quad y + z & = 0 \\ \quad\quad 0 & = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x & = -1 \\ \quad y & = -z \\ \quad 0 & = 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est :

$$\{(-1,-z,z), z \in \mathbb{R}\}$$

Finalement, l'ensemble des solutions est :
- $\{(m,1,\frac{1}{m})\}$ si $m \in \mathbb{R} \setminus \{0,-1,1\}$
- $\emptyset$ si $m=0$.
- $\{(1,z,z), z \in \mathbb{R}\}$ si $m=1$
- $\{(-1,-z,z), z \in \mathbb{R}\}$ si $m=-1$

Exercice 8. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq b$.

$$\begin{cases} x + ay + z + bt = 1 \\ ax + a^2y + bz + b^2t = c \\ a^2x + a^3y + b^2z + b^3t = c^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x + ay + z + bt = 1 & \\ (b-a)z + b(b-a)t = c-a & L_2 \leftarrow L_2 - aL_1 \\ (b^2-a^2)z + b(b^2-a^2)t = c^2-a^2 & L3 \leftarrow L_3 - a^2L_1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x + ay + z + bt = 1 & \\ z + bt = \frac{c-a}{b-a} & L_2 \leftarrow \frac{1}{b-a}L_2 \\ (b^2-a^2)z + b(b^2-a^2)t = c^2-a^2 & \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x + ay = \frac{b-c}{b-a} & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ z + bt = \frac{c-a}{b-a} & \\ 0 = (c-a)(c-b) & L_3 \leftarrow L_3 - (b^2-a^2)L_2 \end{cases}$$

La relation de compatibilité est $0=(c-a)(c-b)$.

Ainsi, l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ est non vide si et seulement si $c=0$ ou $c=b$
si et seulement si $c \in \{a,b\}$.

Exercice 9. On a :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2a_1 \\ x_2 + x_3 = 2a_2 \\ \quad\vdots \\ x_{n-1} + x_n = 2a_{n-1} \\ x_1 + x_n = 2a_n \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 = 2a_1 & \\ x_2 + x_3 = 2a_2 & \\ \quad\vdots & \\ x_{n-1} + x_n = 2a_{n-1} & \\ x_n - x_2 = 2a_n - 2a_1 & L_n \leftarrow L_n - L_1 \end{cases}$$

On effectue successivement et pour tout $k \in [\![2,n-1]\!]$: $L_n \leftarrow L_n + (-1)^k L_k$ et : $\forall p \in [\![1,k-1]\!],\ L_p \leftarrow L_p + (-1)^{k-p}L_k$.
On a alors :

- Si n est pair :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2=2a_1 \\ x_2+x_3=2a_2 \\ \quad\vdots \\ x_{n-1}+x_n=2a_{n-1} \\ x_1+x_n=2a_n \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x_1+x_n=2a_1+2\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1}a_k(-1)^{k-1} \\ x_2-x_n=2a_2+2\displaystyle\sum_{k=3}^{n-1}a_k(-1)^{k-2} \\ \quad\vdots \\ x_{n-1}+x_n=2a_{n-1} \\ 0=2a_n-2a_1+2\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1}(-1)^k a_k \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x_1+x_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}a_k \\ x_2-x_n=\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1}a_k(-1)^{k-2} \\ \quad\vdots \\ x_{n-1}+x_n=2a_{n-1} \\ 0=2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k \end{array}\right.$$

Ainsi :

- si $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k a_k \neq 0$, le système est incompatible et il n'admet donc aucune solution.
- si $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k a_k = 0$, l'ensemble des solutions du système est : $\{(\alpha_1-x_n,\alpha_2+x_n,\cdots,\alpha_{n-1}-x_n,x_n),x_n\in\mathbb{R}\}$ où $\alpha_j=2\sum\limits_{k=j}^{n-1}a_k(-1)^{k-j}$ pour tout $j\in[\![1,n-1]\!]$.

- Si n est impair,

$$\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2=2a_1 \\ x_2+x_3=2a_2 \\ \quad\vdots \\ x_{n-1}+x_n=2a_{n-1} \\ x_n+x_1=2a_n \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x_1-x_n=2a_1+2\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1}a_k(-1)^{k-1} \\ x_2+x_n=2a_2+2\displaystyle\sum_{k=3}^{n-1}a_k(-1)^{k-2} \\ \quad\vdots \\ x_{n-1}+x_n=2a_{n-1} \\ 2x_n=2a_n-2a_1+2\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1}(-1)^k a_k \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x_1-x_n=2\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}a_k(-1)^{k-1} \\ x_2+x_n=2\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1}a_k(-1)^{k-2} \\ \quad\vdots \\ x_{n-1}+x_n=2a_{n-1} \\ 2x_n=2a_n+2\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k a_k \end{array}\right.$$

On effectue ensuite : $L_n \leftarrow \dfrac{1}{2} L_n$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2a_1 \\ x_2 + x_3 = 2a_2 \\ \quad \vdots \\ x_{n-1} + x_n = 2a_{n-1} \\ x_n + x_1 = 2a_n \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - x_n = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k (-1)^{k-1} \\ x_2 + x_n = 2\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} a_k (-1)^{k-2} \\ \quad \vdots \\ x_{n-1} + x_n = 2a_{n-1} \\ x_n = a_n + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k a_k \end{cases}$$

Puis, on effectue : $\forall j \in [\![1, n-1]\!]$, $L_j \leftarrow L_j + (-1)^{n-j} L_n$. Or, $(-1)^{n-j} = (-1)^{-j+1}$ car n est impair. On obtient ainsi :

$$\begin{cases} x_1+x_2=2a_1 \\ x_2+x_3=2a_2 \\ \quad\vdots \\ x_{n-1}+x_n=2a_{n-1} \\ x_n+x_1=2a_n \end{cases} \iff \begin{cases} x_1=2\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}a_k(-1)^{k-1}\right)+\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k a_k\right)+a_n \\ x_2=2\left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1}a_k(-1)^{k-2}\right)+\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1} a_k\right)-a_n \\ \quad\vdots \\ x_j=2\left(\displaystyle\sum_{k=j}^{n-1}a_k(-1)^{k-j}\right)+\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{j-1}(-1)^{k-j+1} a_k\right)+(-1)^{n-j}a_n \\ \quad\vdots \\ x_{n-1}=2a_{n-1}+\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-n+2}a_k\right)-a_n \\ x_n=a_n+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k a_k \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1=\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}a_k(-1)^{k-1}\right)+a_n \\ x_2=\left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1}a_k(-1)^{k-2}\right)-\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{2-1}(-1)^{k-2} a_k\right)-a_n \\ \quad\vdots \\ x_j=\left(\displaystyle\sum_{k=j}^{n-1}a_k(-1)^{k-j}\right)-\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{j-1}(-1)^{k-j} a_k\right)+(-1)^{n-j}a_n \\ \quad\vdots \\ x_{n-1}=\left(\displaystyle\sum_{k=n-1}^{n-1}a_k(-1)^{k-(n-1)}\right)-\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n-2}(-1)^{k-(n-1)}a_k\right)-a_n \\ x_n=\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k a_k\right)+a_n \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1=\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k(-1)^{k-1}\right) \\ x_2=\left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n}a_k(-1)^{k-2}\right)-\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{2-1}(-1)^{k-2} a_k\right) \\ \quad\vdots \\ x_j=\left(\displaystyle\sum_{k=j}^{n}a_k(-1)^{k-j}\right)-\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{j-1}(-1)^{k-j} a_k\right) \\ \quad\vdots \\ x_{n-1}=\left(\displaystyle\sum_{k=n-1}^{n}a_k(-1)^{k-(n-1)}\right)-\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n-2}(-1)^{k-(n-1)}a_k\right) \\ x_n=a_n-\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-n} a_k\right) \end{cases}$$

l'ensemble des solutions du système est : $\{(\gamma_1-\beta_1,\gamma_2-\beta_2,\cdots,\gamma_n-\beta_n)\}$ où pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, $\beta_j=\sum\limits_{k=1}^{j-1}a_k(-1)^{k-j}$ et $\gamma_j=\sum\limits_{k=j}^{n}a_k(-1)^{k-j}$.

Exercice 10. Commençons par déterminer l'intersection des trois plans proposés.
Soit $M(x,y,z)$ un point du plan. M appartient à ces trois plans si et seulement si (x,y,z) est solution du système

$$\begin{cases} (1-a)x - 2y + z = 0 \\ 3x - (1+a)y - 2z = 0 \\ 3x - 2y - (1+a)z = 0 \end{cases}$$

Or,

$$\begin{cases} (1-a)x - 2y + z = 0 \\ 3x - (1+a)y - 2z = 0 \\ 3x - 2y - (1+a)z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x - (1+a)y - 2z = 0 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ (1-a)x - 2y + z = 0 \\ 3x - 2y - (1+a)z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - \frac{(1+a)}{3}y - \frac{2}{3}z = 0 & L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1 \\ (1-a)x - 2y + z = 0 \\ 3x - 2y - (1+a)z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - \frac{(1+a)}{3}y - \frac{2}{3}z = 0 \\ -\frac{a^2+5}{3}y + \frac{5-2a}{3}z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - (1-a)L_1 \\ (a-1)y - (a-1)z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

Envisageons plusieurs cas :

- si $a = 1$, on a :

$$\begin{cases} (1-a)x - 2y + z = 0 \\ 3x - (1+a)y - 2z = 0 \\ 3x - 2y - (1+a)z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z = 0 \\ -2y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z = 0 \\ y - \frac{1}{2}z = 0 & L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - z = 0 & L_1 \leftarrow L_1 + \frac{2}{3}L_2 \\ y - \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}$$

  L'intersection des trois plans est l'ensemble des points de coordonnées $(z, \dfrac{z}{2}, z)$ avec $z \in \mathbb{R}$. Il s'agit donc de la droite passant par les points $O(0,0,0)$ et $A(1, \frac{1}{2}, 1)$.

- Si $a \neq 1$,

$$\begin{cases} (1-a)x - 2y + z = 0 \\ 3x - (1+a)y - 2z = 0 \\ 3x - 2y - (1+a)z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - \frac{(1+a)}{3}y - \frac{2}{3}z = 0 \\ (a-1)y - (a-1)z = 0 & L_2 \leftrightarrow L_3 \\ -\frac{a^2+5}{3}y + \frac{5-2a}{3}z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - \frac{(1+a)}{3}y - \frac{2}{3}z = 0 \\ y - z = 0 & L_2 \leftarrow \frac{1}{a-1}L_2 \\ -\frac{a^2+5}{3}y + \frac{5-2a}{3}z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - \frac{(3+a)}{3}z = 0 & L_1 \leftarrow L_1 + \frac{(1+a)}{3}L_2 \\ y - z = 0 \\ -\frac{a(a+2)}{3}z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + \frac{a^2+5}{3}L_2 \end{cases}$$

  Reste à distinguer trois sous cas :

  - Si $a \notin \{-2, 0\}$ le système admet pour unique solution $(0,0,0)$.
  - Si $a = 0$, alors l'intersection des trois plans est alors l'ensemble des points de coordonnées (z,z,z) avec $z \in \mathbb{R}$. Il s'agit d'une droite passant par les points $O(0,0,0)$ et $B(1,1,1)$
  - Si $a = -2$, alors, l'intersection des trois plans est alors l'ensemble des points de coordonnées $(\frac{z}{3}, z, z)$ avec $z \in \mathbb{R}$. Il s'agit d'une droite passant par les points $O(0,0,0)$ et $C(\frac{1}{3}, 1, 1)$.

On peut donc conclure que (P_1), (P_2) et (P_3) contiennent une même droite si et seulement si $a \in \{-2, 0, 1\}$.

Exercice 11. Pour déterminer le rang, on cherche la matrice réduite échelonnée par lignes équivalente par lignes à notre matrice de départ. On trouve :

- $rg(A) = 2$, 2 inconnues principales et 1 inconnue secondaire
- $rg(B) = 4$, 4 inconnues principales et 0 inconnue secondaire
- $rg(C) = 3$, 3 inconnues principales et 2 inconnues secondaires

Exercice 12. Appliquons la méthode de Gauss.

$$\left\{\begin{array}{rrr}(2-m)x+ & 2y+ & 2z=0\\ 2x+ & (5-m)y+ & 4z=0\\ 2x+ & 4y+ & (5-m)z=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrl}2x+ & 4y+ & (5-m)z=0 & L_1\leftrightarrow L_3\\ 2x+ & (5-m)y+ & 4z=0 & \\ (2-m)x+ & 2y+ & 2z=0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrl}x+ & 2y+ & \frac{(5-m)}{2}z=0 & L_1\leftarrow \frac{1}{2}L_1\\ 2x+ & (5-m)y+ & 4z=0 & \\ (2-m)x+ & 2y+ & 2z=0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrl}x+ & 2y+ & \frac{(5-m)}{2}z=0 & \\ & (1-m)y+ & (m-1)z=0 & L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ & 2(m-1)y+ & \frac{-(m-1)(m-6)}{2}z=0 & L_3\leftarrow L_3-(2-m)L_1\end{array}\right.$$

1er cas : $m = 1$
On a :

$$\left\{\begin{array}{rrr}(2-m)x+ & 2y+ & 2z=0\\ 2x+ & (5-m)y+ & 4z=0\\ 2x+ & 4y+ & (5-m)z=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrl}x & +2y & +2z & =0\\ & & 0 & =0\\ & & 0 & =0\end{array}\right.$$

le rang vaut donc 1.
Supposons désormais $m \neq 1$, on a :

$$\left\{\begin{array}{rrr}(2-m)x+ & 2y+ & 2z=0\\ 2x+ & (5-m)y+ & 4z=0\\ 2x+ & 4y+ & (5-m)z=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrl}x+ & 2y+ & \frac{(5-m)}{2}z=0 & \\ & y- & z=0 & L_2\leftarrow \frac{1}{1-m}L_2\\ & 2(m-1)y+ & \frac{-(m-1)(m-6)}{2}z=0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrl}x+2y+ & \frac{(5-m)}{2}z=0 & L_1\leftarrow L_1-2L_2\\ y- & z=0 & \\ & \frac{(m-1)(10-m)}{2}z=0 & L_3\leftarrow L_3-2(m-1)L_2\end{array}\right.$$

2ème cas : $m = 10$
Le système échelonné se réduit à :

$$\left\{\begin{array}{rrr}(2-m)x+ & 2y+ & 2z=0\\ 2x+ & (5-m)y+ & 4z=0\\ 2x+ & 4y+ & (5-m)z=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrl}x & +2y & -2z & =0\\ & y & -z & =0\\ & & 0 & =0\end{array}\right.$$

le rang vaut donc 2.
3ème cas : $m \neq 10$ **et** $m \neq 1$
On a :

$$\left\{\begin{array}{rrr}(2-m)x+ & 2y+ & 2z=0\\ 2x+ & (5-m)y+ & 4z=0\\ 2x+ & 4y+ & (5-m)z=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrll}x & +2y & +\frac{(5-m)}{2}z & =0 & \\ & y & -z & =0 & \\ & & z & =0 & L_3\leftarrow \frac{2}{(m-1)(10-m)}L_3\end{array}\right.$$

le rang vaut donc 3.

Exercice 13. 1.

$$\begin{cases} x+\ \ y+\ \ z=0\\ 2x+\ \ y+2z=0\\ x+2y+\ \ z\end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z=0 & \\ -y \quad\ =0 & L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ y \quad\ =0 & L_3\leftarrow L_3-L_1\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+z=0\\ y \quad\ =0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \ \ +z=0 & L_1\leftarrow L_1-L_2\\ y \quad\ =0\end{cases}$$

Ainsi, ce système admet une infinité de solutions : $\{(-z,0,z), z\in\mathbb{R}\}$.

2. On vérifie que $\begin{cases}1+1+1=3\\2+1+2=5\\1+2+1=4\end{cases}$ Ainsi, $(1,1,1)$ est solution de (S).

L'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ est donc $\{(1-z,1,1+z), z\in\mathbb{R}\}$.

Exercice 14. 1. On a $\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0}$, donc $a\neq 0$ ou $b\neq 0$.

- Si $a\neq 0$, on a :

$$\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{c}{a}\\ b & d\end{pmatrix} \quad L_1\leftarrow \tfrac{1}{a}L_1$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{c}{a}\\ 0 & d-b\frac{c}{a}\end{pmatrix} \quad L_2\leftarrow L_2-bL_1$$

Si $d=b\frac{c}{a}$, on obtient $\overrightarrow{v}=\frac{c}{a}\overrightarrow{u}$ exclu ! Ainsi $d-b\frac{c}{a}\neq 0$, On obtient donc :

$$\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{c}{a}\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad L_2\leftarrow \tfrac{a}{ad-bc}L_2$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad L_1\leftarrow L_1-\tfrac{c}{a}L_2$$

On obtient bien la forme échelonnée réduite de A.

- Si $b\neq 0$, on commence par intervertir L_1 et L_2 et on raisonne de même.

2. Soit $\overrightarrow{w}(e,f)\in E$. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On a :

$$\overrightarrow{w}=x\overrightarrow{u}+y\overrightarrow{v} \iff \begin{cases} ax+cy=e\\ bx+dy=f\end{cases}.$$

Ce système a pour matrice A, donc est de rang 2. Comme il a 2 équations et 2 inconnues, il est de Cramer. Il admet donc une unique solution.

Exercice 15. Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on note $u_i=(a_{1,i},\dots,a_{n,i})$. Soit $\lambda_1,...,\lambda_n\in\mathbb{K}$,

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i=(0,\dots,0) \iff \begin{cases} a_{1,1}\lambda_1+\cdots+a_{1,n}\lambda_n=0\\ \vdots\\ a_{n,1}\lambda_1+\cdots+a_{n,n}\lambda_n=0\end{cases}.$$

Par hypothèse, ce système homogène (de n équations et n inconnues) n'admet que $(0,\dots,0)$ comme solution. Notant r son rang, on ne peut pas avoir $r<n$ (sinon le système aurait une infinité de solutions) donc $r=n$.
Soit $v=(v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{K}^n$.
Soit $(\mu_1,\dots,\mu_n)\in\mathbb{K}^n$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n}\mu_i u_i=v \iff \begin{cases} a_{1,1}\mu_1+\cdots+a_{1,n}\mu_n=v_1\\ \vdots\\ a_{n,1}\mu_1+\cdots+a_{n,n}\mu_n=v_n\end{cases}.$$

Ce nouveau système a même matrice que le système précédent. Ainsi, il est de rang n, donc de Cramer, et admet donc une unique solution.

Exercice 16.

1. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note $u_i = (a_{1,i}, \dots, a_{n,i})$. Soit $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$. On a :

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = (0, \dots, 0) \iff \begin{cases} a_{1,1}\lambda_1 + \dots + a_{1,p}\lambda_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n,1}\lambda_1 + \dots + a_{n,p}\lambda_p = 0 \end{cases}.$$

   Ce système est homogène et a p inconnues pour n équations, avec $p > n$. Il admet donc une infinité de solutions. Donc une solution non nulle. Ainsi, il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \setminus \{(0, ..., 0)\}$ tel que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = (0, \dots, 0)$.

2. Comme $(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \setminus \{(0, ..., 0)\}$ il existe $k \in [\![1, p]\!]$ tel que $\lambda_k \neq 0$. Ainsi $u_k = \sum_{i \in [\![1,p]\!] \setminus \{k\}} -\frac{\lambda_i}{\lambda_k} u_i$, donc u_k est combinaison linéaire des autres vecteurs.