Feuille d'exercices 18 : analyse asymptotique

1 Relations de comparaison : cas des suites

Exercice 1. Trouver une suite simple équivalente à la suite :

1. $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$,
2. $x_n = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$,
3. $x_n = \ln(n+1) - \ln(n)$.

Exercice 2.
1. Soit (x_n) une suite réels strictement positifs telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = l$, avec $l < 1$.
   Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$
2. Soit $a > 0$, montrer que : $a^n = o(n!)$
3. Montrer que : $n! = o(n^n)$

Exercice 3. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} n \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^{1/n} - 1\right)$,
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$,
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n$,
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n}{n-x}\right)^n$,
6. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n^2+5n+4}{n^2-3n+7}\right)^n$.

2 Relations de comparaison : cas des fonctions

Exercice 4. Calculer les limites suivantes en se servant d'équivalents :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$,
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}(e^{\cos x} - e)$,
3. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln((\sin x)^2)}{(\frac{\pi}{2} - x)^2}$,
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} x \ln\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\right)$,
5. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \tan x \tan 2x$.

Exercice 5. Déterminer un équivalent simple de f au voisinage de 0 ($a > 0, b > 0$, $a \neq b$) :

1. $f(x) = \cos(\sin x)$,
2. $f(x) = \ln(\cos x)$,
3. $f(x) = a^x - b^x$,
4. $f(x) = \sqrt[4]{1+x^2} - \sqrt[4]{1-x^2}$,
5. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2+3x}} - \dfrac{1}{\sqrt{2-3x}}$,
6. $f(x) = \ln(\sin x)$.

Exercice 6. Calculer les limites suivantes en se servant d'équivalents :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \ln x \ln(1 + \ln(1+x))$,
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \ln x}{x^x - 1}$,
3. $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \tan x)^{1/\sin x}$,
4. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} (2x^2 - 3x + 1) \tan \pi x$,
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x+1} \ln\left(1 - \dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right)$,
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x \ln x}$.

3 Calcul de développements limités

Exercice 7. Calculer le développement limité de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 2.

Exercice 8. Calculer le développement limité des fonctions suivantes :
1. $f : x \mapsto \ln x$ à l'ordre 4 au voisinage de e,
2. $f : x \mapsto e^x$ à l'ordre 4 au voisinage de 1.

Exercice 9. Soit f une fonction admettant un développement limité en 0 à l'ordre n, soit P_n sa partie régulière d'ordre n au voisinage de 0.
Montrer que si f est paire (resp. impaire), alors P_n n'a que des termes de puissances paires (resp. impaires).

Exercice 10. Calculer le développement limité des fonctions suivantes :
1. $f : x \mapsto \mathrm{sh}\,(x) - \sin(x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0,
2. $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{\sqrt{1-x}}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0,
3. $f : x \mapsto \sin x$ à l'ordre 3 au voisinage de $\dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 11.
1. $f : x \mapsto (e^x - 1)^2$ à l'ordre 4 au voisinage de 0,
2. $f : x \mapsto \left((\mathrm{ch}\, x - \cos x)(\mathrm{sh}\, x - \sin x)\right)^2$ à l'ordre 11 au voisinage de 0.

Exercice 12. Calculer le développement limité des fonctions suivantes :
1. $f : x \mapsto e^x \arctan x$ à l'ordre 3 au voisinage de 0,
2. $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ à l'ordre 4 au voisinage de 1,
3. $f : x \mapsto \dfrac{(\sin x)^2}{x^2}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0,
4. $f : x \mapsto (\cos x)^3$ à l'ordre 6 au voisinage de 0,
5. $f : x \mapsto \cos x$ à l'ordre 4 au voisinage de $\frac{\pi}{3}$.

Exercice 13. Calculer le développement limité des fonctions suivantes :
1. $f : x \mapsto (\ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2})(\cos x - 1)$ à l'ordre 6 au voisinage de 0,
2. $f : x \mapsto (1 - \cos x)(e^x - 1)(x - \sin x)$ à l'ordre 6 au voisinage de 0.

Exercice 14. Calculer le développement limité des fonctions suivantes :
1. $f : x \mapsto e^{\sin x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0,
2. $f : x \mapsto \ln(1 + \cos x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0,
3. $f : x \mapsto e^{x\ln(1+x)}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.

Exercice 15. Calculer le développement limité des fonctions suivantes :
1. $f : x \mapsto (1+x)^{1/x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0,
2. $f : x \mapsto (\cos x)^{\sin x}$ à l'ordre 5 au voisinage de 0.

Exercice 16. Calculer le développement limité des fonctions suivantes :
1. $f : x \mapsto e^{\cos x}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0,
2. $f : x \mapsto \sin(2x - 4x^2) - 2\sin(x - x^2)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0,
3. $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.

Exercice 17. Calculer le développement limité des fonctions suivantes :
1. $f : x \mapsto \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{1+x}\right)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0,
2. $f : x \mapsto e^{\cos x}(1 + e^{-1/x^2})$ à l'ordre 5 au voisinage de 0,
3. $f : x \mapsto \ln(2 + x + \sqrt{1+x})$ à l'ordre 3 au voisinage de 0,
4. $f : x \mapsto e^{\sin x}$ à l'ordre 4 au voisinage de $\dfrac{\pi}{2}$,
5. $f : x \mapsto \ln(2\sin x)$ à l'ordre 3 au voisinage de $\dfrac{\pi}{6}$.

Exercice 18. 1. Montrer que $\text{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective. On note f sa réciproque.
2. Justifier que f admet un développement limité à l'ordre 4 en 0.
3. Déterminer ce DL.
Après l'avoir justifié, on pourra utiliser l'imparité de f et la composition des développements limités avec la relation $f(sh(x)) = x$.

Exercice 19. Calculer le développement limité des fonctions suivantes :
1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+e^x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0,
2. $f : x \mapsto \dfrac{e^x - 1 - x}{\ln(1+x)}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Exercice 20. Calculer le développement limité des fonctions suivantes :
1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0,
2. $f : x \mapsto (1+\arctan x)^{\frac{x}{(\sin x)^2}}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0,
3. $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt[3]{1-x^2}}{\cos x}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.

Exercice 21.
1. En utilisant la dérivée de la fonction tangente, obtenir de proche en proche un développement limité de tan à l'ordre 6 au voisinage de 0.
2. Retrouver le résultat précédent en utilisant cette fois le fait que $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$.

Exercice 22. Calculer le développement limité de $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\, dt$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.

Exercice 23. Calculer le développement limité de $g : x \mapsto \displaystyle\int_{x^3}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$ à l'ordre 13 au voisinage de 0.

Exercice 24. Calculer le développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 de :

$$f : x \mapsto \ln\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right).$$

4 Applications des développements limités

Exercice 25. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right), \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\text{sh}\, x - 2\text{sh}\,(2x) + \text{sh}\,(3x)}{\ln(1+x+2x^2)+\sqrt{1-2x}-1-x^2}.$$

Exercice 26. Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$,
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/(\sin x)^2}$,
3. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1-x+\ln x}$,
4. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\ln(x+\sqrt{x^2-1})}{\left(\ln\frac{x+1}{x-1}\right)^2}$,
5. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(e - \left(1+\tfrac{1}{x}\right)^x\right)^{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}}$.

Exercice 27. 1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x-\sin x)}{\sqrt{1+x^2}-1}$,
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$,
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right)$.

Exercice 28. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = x + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.
2. Justifier que f est prolongeable par continuité et que ce prolongement est dérivable en 0.
3. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et qu'elle n'est pas deux fois dérivable en 0.

Exercice 29. Soit $f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\},\ x \mapsto \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$.
Montrer que f admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 30. Etudier la tangente en 0 et la position relative de la courbe par rapport à sa tangente pour la fonction :

$$x \mapsto \ln(x^2 + 2x + 2)$$

Exercice 31. On considère la fonction définie par $f : x \mapsto \frac{1}{x}(e^{\sin x} - 1)$.

1. Justifier que f est prolongeable par continuité et que ce prolongement est dérivable en 0.
   On notera toujours f la fonction prolongée.
2. Etudier la tangente en 0 et la position relative de la courbe par rapport à sa tangente.

Exercice 32. Etudier les éventuelles asymptotes à la courbe représentative de la fonction :

$$x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}.$$

Exercice 33. Rechercher si la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2}{x-1} e^{1/x}$ admet des asymptotes et déterminer (si il y a existence) la position relative des asymptotes par rapport à la courbe représentative de la fonction

Exercice 34. Rechercher si la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto (x^2 - 1)\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ admet des asymptotes et déterminer (si il y a existence) la position relative des asymptotes par rapport à la courbe représentative de la fonction

Exercice 35. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$.

1. Donner le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0.
   En déduire la tangente T_0 à la courbe représentative de f en 0 et leurs positions relatives.
2. Montrer que $f(x) \underset{+\infty}{=} x + 1 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. En déduire la branche infinie de $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

Exercice 36.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x - \ln x = n$ admet une unique solution dans $[1, +\infty[$ que l'on note u_n.
2. Montrer que :
$$u_n = n + \ln n + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Exercice 37.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution dans $\left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$ que l'on notera x_n.
   On définit ainsi une suite $(x_n)_{n \geq 0}$.
2. Montrer que :
$$x_n \sim n\pi$$
3. Montrer que :
$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)$$
4. Montrer que :
$$x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \sim -\frac{1}{n\pi}$$
5. Montrer que :
$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 38.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^3 + nx = 1$ admet une unique solution que l'on notera x_n.
2. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \, 0 \leq x_n \leq \frac{1}{n}.$$
   En déduire la limite de (x_n).
3. Montrer que
$$x_n = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$
4. Montrer que
$$x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Exercice 39.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\tan x \dfrac{\operatorname{ch} x}{shx} = 1$ admet une unique solution dans $]n\pi, (n+1)\pi[$ notée x_n.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n - n\pi = \arctan\left(\dfrac{\operatorname{sh} x_n}{\operatorname{ch} x_n}\right)$.
3. En déduire $l = \lim\limits_{n \to +\infty} (x_n - n\pi)$ et trouver un équivalent simple de $(x_n - n\pi - l)$.