Feuille d'exercices 2 : Nombres complexes

1 Forme algébrique

Exercice 1. Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{(5-i)(3-2i)}{(1+i)} \qquad z_2 = (2-i)(1+3i)^2 \qquad z_3 = (i-1)^5$$

$$z_4 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^4 \qquad z_5 = \frac{(1+i)^5 - 1}{(1+i)^5 + 1} \qquad z_6 = (1+i)^{2014}$$

Exercice 2. Donner l'expression algébrique du conjugué de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = i(2-i)^2 \qquad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2+i}$$

Exercice 3. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Calculer : $\text{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \qquad \text{Im}\left(\frac{1}{z}\right)$

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{C}$: 1. $2z + 3\overline{z} = 1$ 2. $2z + 6\overline{z} = 3 + 2i$

Exercice 5. 1. Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$, déterminer la forme algébrique de :

$$z_1 = (2+i)e^{3i\theta} \qquad z_2 = (1-2i)e^{-i\theta} \qquad z_3 = \frac{e^{2i\theta}}{1-i}$$

2. Soit $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, déterminer la forme algébrique de :

$$z_4 = \frac{1 + i\tan\theta}{1 - i\tan\theta}, \ \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, déterminer la forme algébrique de :

$$z_5 = (1 + e^{i\theta})^n$$

2 Module

Exercice 6. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Montrer que $Z = \dfrac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R} \iff |z| = 1$

Exercice 7. Montrer que :

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{C}^3, \ |1+a| + |a+b| + |b+c| + |c| \geq 1$$

Exercice 8. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \neq 1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\left|\frac{1-z^n}{1-z}\right| \leq \frac{1-|z|^n}{1-|z|}.$$

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n des complexes tels que , pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $|a_k| \leq 1$ et $|b_k| \leq 1$. Montrer que :

$$\left|\prod_{k=1}^{n} a_k - \prod_{k=1}^{n} b_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k|$$

Exercice 10. (*) Soit $n \geq 2$ et soient $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$.
Montrer que $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ si et seulement si tous les z_k sont nuls, ou bien s'il existe $k_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $z_{k_0} \neq 0$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, z_k est de la forme $\lambda_k z_{k_0}$, où $\lambda_k \in \mathbb{R}^+$.

3 Trigonométrie - Linéarisation - Sommes

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos^2 x$, $\sin^4 x$ et $\cos^2 x \sin^3 x$.

Exercice 12. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin\theta$ et en déduire la valeur de $\sin\dfrac{\pi}{5}$ et $\cos(\dfrac{\pi}{10})$.

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer les sommes suivantes :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(a+kb) \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(a+kb) \qquad C_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(a+kb)$$

Exercice 14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes : $S_1 = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{2^k} \cos\left(\dfrac{k\pi}{3}\right)$ et $S_2 = \sum\limits_{k=0}^{n} \cos^k(x) \sin(kx)$

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer les sommes :

$$A_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (-1)^k \quad B_n = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} (-1)^k \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{\cos(ka)}{\cos(a)^k}$$

On pourra regarder $A_n + iB_n$ pour calculer A_n et B_n.

Exercice 16. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\cos(kx)}{\cos^k(x)} = 0$ où $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 17.
1. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \cos^2(kx)$.
2. En déduire que $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{9}\right) + \cos^2\left(\dfrac{2\pi}{9}\right) + \cos^2\left(\dfrac{3\pi}{9}\right) + \cos^2\left(\dfrac{4\pi}{9}\right)$ est un rationnel.

4 Forme trigonométrique

Exercice 18. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose $z = e^{i\theta}$, déterminer la forme trigonométrique de : $\overline{z},\ -z,\ iz,\ z^2,\ |z| + z$

Exercice 19.
1. Déterminer un argument de $1+i$.
2. Donner la forme cartésienne de $(1+i)^{2014}$.

Exercice 20. Déterminer le module et un argument de $1 + e^{i\theta}$ pour $\theta \in]-\pi, \pi[$ et pour $\theta \in]\pi, 2\pi[$

Exercice 21. Trouver les modules et arguments de

1. $z_1 = \dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$
2. $z_2 = -2i(2+2i)$
3. $z_3 = \dfrac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}$
4. $z_4 = 1 + i\tan\theta$ où $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
5. $z_5 = \dfrac{1+\cos\theta + i\sin\theta}{1-\cos\theta - i\sin\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$
6. $z_6 = (1+i)^n$ où $n \in \mathbb{Z}$

Exercice 22. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer la forme trigonométrique de :

$$z_1 = -\sin a + i\cos a \qquad z_2 = \sin a + i\cos a \qquad z_3 = -\cos a - i\sin a \qquad z_4 = \left(\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^{10}$$

Exercice 23. Déterminer tous les entiers naturels n tels que $z_n = \left(1+i\sqrt{3}\right)^n \in \mathbb{R}^+$

Exercice 24. On pose : $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 1 - i$ et $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$.
1. Déterminer la forme trigonométrique et la forme algébrique de z_3.
2. En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$

Exercice 25. Résoudre dans $\mathbb{C}$: 1. $z^5 = \overline{z}$ 2. $z^2 = -(\overline{z})^2$

Exercice 26. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$.

Exercice 27. Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$, $\omega \in \mathbb{R}$ tel que chaque fonction s'écrive sous la forme $x \mapsto A\cos(x-\omega)$:

1. $x \mapsto \cos(x) + \sin(x)$ 2. $x \mapsto \cos(x) - \sqrt{3}\sin(x)$

5 Equations de second degré

Exercice 28. Déterminer les racines carrées de $1+i$. En déduire la valeur de :

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

Exercice 29. Déterminer les racines carrées de $1+6i$ et $24i-7$

Exercice 30. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $z^2 - 2\cos\theta z + 1 = 0$ où $\theta \in \mathbb{R}$
2. $(2+i)z^2 + (5-i)z + 2 - 2i = 0$
3. $z^{2n} - 2z^n \cos(n\theta) + 1 = 0$ où $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$
4. $z^2 - 2(2+i)z + 6 + 8i = 0$
5. $z^4 + (3-6i)z^2 - 2(4+3i) = 0$
6. $z^6 + (2i-1)z^3 - 1 - i = 0$

Exercice 31.
1. Soit l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $2z^3 - (3+4i)z^2 - (4-7i)z + 4 + 2i = 0$.
   (a) Montrer qu'elle a une racine z_0 réelle.
   (b) En déduire toutes les solutions de l'équation.
2. Soit l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $z^3 + (1-2i)z^2 + (1-i)z - 2i = 0$
   (a) Montrer qu'elle a une racine z_0 imaginaire pure.
   (b) En déduire toutes les solutions de l'équation.

Exercice 32. Résoudre de deux manières différentes l'équation $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ (dans l'une d'entre elles, on posera $Z = z + z^{-1}$).
En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 33. Résoudre $\begin{cases} xy = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$

Exercice 34. Déterminer tous les couples (x, y) de complexes vérifiant $\begin{cases} x + y = 1 + i \\ xy = 2 - i \end{cases}$

6 Racines n-ième

Exercice 35. Déterminer les racines sixièmes de : $\dfrac{-4}{1+i\sqrt{3}}$.

Exercice 36. Résoudre l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 37. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $z^3 = 4\sqrt{2}(1+i)$
2. $z^5 = -i$
3. $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n = e^{in\theta}$ (on suppose ici $\dfrac{n\theta}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$)
4. $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^n = 2\cos(n\theta)$
5. $(z+1)^n = (z-1)^n$
6. $4(z+i)^4 - (z+1)^4 = 0$ (on donnera les expressions algébriques des solutions de cette équation)

Exercice 38. On pose $z = e^{\frac{2i\pi}{7}}$, $u = z + z^2 + z^4$ et $v = z^3 + z^5 + z^6$.
1. Calculer $u + v$ puis u^2 en fonction de u.
2. En déduire la valeur de $\sin\left(\dfrac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\dfrac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\dfrac{8\pi}{7}\right)$.

Exercice 39. Montrer que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{11}\right) = \frac{1}{2}$$

On pourra considérer les solutions de $z^{11} = -1$.

Exercice 40. Soit $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ième de l'unité.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n} \omega^p$ où $p \in \mathbb{N}$.
2. Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (1+\omega^k)^n$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega \in \mathbb{U}_n$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\omega^k$.

Exercice 41. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $(z+1)^n = e^{2ina}$
2. En déduire la valeur de : $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$

7 Exponentielle complexe

Exercice 42. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

1. $e^z = 3$
2. $e^z = i$
3. $e^z = 3i$
4. $e^z = 1 + i\sqrt{3}$

8 Nombres complexes et géométrie plane

Exercice 43. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que le nombre complexe $\dfrac{2iz-1}{z+1}$ ait un module égal à 1.

Exercice 44.
1. (a) À quelle condition les points d'affixes a, b et c forment-ils un triangle équilatéral ?
   (b) À quelle condition les points d'affixes a, b et c forment-ils un triangle rectangle en A ?
2. Déterminer les nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que :
   (a) 1, z et z^2 forment un triangle rectangle.
   (b) z, $\dfrac{1}{z}$ et $-i$ sont alignés.
   (c) z, z^2 et z^4 sont alignés.

Exercice 45. Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que :

1. $|z+i| = |z-1|$
2. z, $\dfrac{1}{z}$ et $1+z$ aient le même module.
3. $\dfrac{z+1}{z-1} \in \mathbb{R}$

Exercice 46. Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On pose $a = \sqrt{3} - i$. On note A sont image.

1. Calculer les module et argument du nombre complexe a.
2. On considère la rotation r de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$. Soit f l'application qui, à l'affixe z de M, associe l'affixe z' de $M' = r(M)$. Exprimer $f(z)$ à l'aide de z.
3. On note $B = r(A)$. Déterminer l'affixe b de B sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
4. En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$

Exercice 47. Déterminer l'écriture complexe de chacune des transformations suivantes :

1. L'homothétie f de centre A d'affixe $4i$ et de rapport $-\dfrac{1}{3}$.
2. La rotation g de centre A d'affixe -2 et d'angle $\dfrac{3\pi}{4}$.
3. La translation h de vecteur d'affixe $4-2i$.

9 Fonctions à valeurs complexes

Exercice 48. Déterminer la dérivée n-ième de $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & e^x \sin(\sqrt{3}x) \end{array}$.

Exercice 49.
1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les dérivées $n^{\text{ièmes}}$ de cos et sin.

2. Calculer les dérivées $n^{\text{ièmes}}$ de $\cos^3$ et $\sin^3$.

Exercice 50. Soit $P = \{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ et $D = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < 1\}$.

1. Montrer que $z \mapsto \dfrac{z-i}{z+i}$ est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ dans une ensemble E que l'on précisera.
2. Montrer que $z \mapsto \dfrac{z-i}{z+i}$ est une bijection de P sur D.