Corrigé de la feuille d'exercices 13

1 Dérivabilité

Exercice 1. • Soit $x \in I \setminus \{0\}$, on a :

$$\frac{f(a+x)-f(a-x)}{2x} = \frac{1}{2}\frac{f(a+x)-f(a)}{x} + \frac{1}{2}\frac{f(a-x)-f(a)}{-x}$$

Or, f est dérivable en a.
Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(a+x)-f(a-x)}{2x} = \dfrac{f'(a)}{2} + \dfrac{f'(a)}{2} = f'(a)$.

• Soit $x \in I \setminus \{a\}$, on a :

$$\frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(a) + \frac{g(a)-g(x)}{x-a}f(a)$$

Or, f et g sont dérivables en a.
Ainsi, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{x-a} = f'(a)g(a) - g'(a)f(a)$.

• Soit $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a+h^2,\ a+h \in I$,

$$\frac{f(a+h^2)-f(a+h)}{h} = h\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2} - \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Or, f est dérivable en a, par opération sur les limites, on obtient :
$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h^2)-f(a+h)}{h} = 0 \times f'(a) - f'(a) = -f'(a)$.

Exercice 2. 1. On a : $\forall x > 0,\ \dfrac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0} = \dfrac{\sqrt{x^{n+1}+x^n}}{x}$. Ainsi, on a :

$$\forall x > 0,\ \frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0} = \sqrt{x^{n-1}+x^{n-2}}$$

Si $n=1$, on a : $\forall x > 0,\ \dfrac{f_1(x)-f_1(0)}{x-0} = \sqrt{1+\frac{1}{x}}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1+\frac{1}{x}} = +\infty$. Ainsi, f_1 n'est pas dérivable en 0.
Si $n=2$, on a : $\forall x > 0,\ \dfrac{f_2(x)-f_2(0)}{x-0} = \sqrt{1+x}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1+x} = 1$. Ainsi, f_2 est dérivable en 0 et $f_2'(0) = 1$.
Si $n>2$, on a : $\forall x > 0,\ \dfrac{f_2(x)-f_2(0)}{x-0} = \sqrt{x^{n-2}(1+x)}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^{n-2}(1+x)} = 0$. Ainsi, f_2 est dérivable en 0 et $f_2'(0) = 0$.

2. g n'est pas dérivable en 0. En effet, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \sin(\frac{1}{x}).$$

Or, $\sin(\dfrac{1}{x})$ n'admet pas de limite en 0. Posons $u : x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \dfrac{1}{2\pi n}$ et $y_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$. Les suites (x_n) et (y_n) convergent vers 0, mais on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u(x_n) = \sin(2\pi n) = 0 \quad \text{et} \quad u(y_n) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1.$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u(x_n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u(y_n) = 1$. Donc u n'admet pas de limite en 0.

3. h est dérivable en 0. En effet, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = x\sin(\frac{1}{x})$$

Or, $\lim\limits_{x\to 0} x\sin(\dfrac{1}{x}) = 0$ comme produit d'une fonction bornée avec une fonction qui tend vers 0. Ainsi, h est dérivable en 0 et on $h'(0) = 0$.

Exercice 3. 1. f est définie et dérivable sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$ en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus : $\forall x \in \left[\frac{\pi}{2},\pi\right[,\ f'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2(x)}\cos(x)$. Or : $\forall x \in \left[\frac{\pi}{2},\pi\right[,\ f'(x) \leq 0$ et $f'(x)$ ne s'annule qu'en $\dfrac{\pi}{2}$. Ainsi, f est strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$. De plus, f est continue sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$. f réalise donc une bijection de $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$ sur $f(\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[)$. Or, on sait que $\lim\limits_{x\to\pi} f(x) = +\infty$ et $f(\dfrac{\pi}{2}) = 1$. Ainsi, f réalise une bijection de $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$ sur $[1,+\infty[$.

2. f est bijective de $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$ sur $[1,+\infty[$. f est dérivable sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$ et on a :

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2},\pi\right[,\ f'(x) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[.$$

Ainsi, f^{-1} est dérivable sur $f\left(\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[\right) =]1,+\infty[$.
Soit $x \in]1,+\infty[$, on a :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = -\frac{\sin^2(f^{-1}(x))}{\cos(f^{-1}(x))}.$$

De plus, on sait que $f(f^{-1}(x)) = x$ donc $\dfrac{1}{\sin(f^{-1}(x))} = x$. Ainsi, $\sin^2(f^{-1}(x)) = \dfrac{1}{x^2}$.

On a alors $\cos^2(f^{-1}(x)) = \dfrac{x^2-1}{x}$. De plus, $f^{-1}(x) \in \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$ donc $\cos(f^{-1}(x)) > 0$. Ainsi, $\cos(f^{-1}(x)) = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2}}$.

Finalement, on a :

$$\forall x \in]1,+\infty[,\ (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2}}} = \frac{\sqrt{x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{x^2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice 4. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Raisonnons par double implication.
   - Supposons que f est paire. Alors, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(-x)$. En dérivant cette relation, on trouve : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -f'(-x)$ donc f' impaire.
   - Supposons désormais f' impaire. Ainsi, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(-x) = -f'(x)$. En intégrant cette relation, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_0^x f'(-t)dt = \int_0^x -f'(t)dt$. Donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ -f(-x) + f(0) = -f(x) + f(0)$.
     Puis : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$. f est donc paire.
2. Supposons f est impaire. Alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)$. En dérivant cette relation, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R},\ -f'(-x) = -f'(x)$. Donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(-x) = f'(x)$. Ainsi, f' est paire.
   La réciproque est fausse parce qu'on n'a pas nécessairement $f(0) = 0$. Posons par exemple $f : x \mapsto \sin x + 1$. On a $f' = \cos$ donc f' est paire mais f n'est pas impaire.
3. Supposons que f est périodique. Ainsi, il existe $T \in \mathbb{R}^*$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$.
   En dérivant cette relation, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)$. Ainsi, f' est aussi périodique.
   La réciproque est fausse. Posons par exemple $g : x \mapsto x + \cos x$. $g' = -\sin$ donc g' est périodique.
   En revanche, g n'est pas périodique.

Exercice 5. 1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $f\left(\dfrac{x}{2}\right) = f(f(f(x))) = (f \circ f)(f(x)) = \dfrac{f(x)}{2}$.

2. En dérivant la relation précédente, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{1}{2}f'(\dfrac{x}{2}) = \dfrac{1}{2}f'(x)$. Donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'\left(\dfrac{x}{2}\right) = f'(x)$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f'(x) = f'\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.
   - Pour $n = 0$, $f'\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = f'\left(\dfrac{x}{2^0}\right) = f'(x)$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $f'(x) = f'\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.
     D'après la question précédente, on a $f'\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = f'\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)$.
     D'où par hypothèse de récurrence : $f'(x) = f'\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)$
   - Ainsi, on a prouvé que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f'(x) = f'\left(\dfrac{x}{2^n}\right) \quad (**)$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{2^n} = 0$ et f' est continue en 0 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f'\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = f'(0)$.
Avec $(**)$, on a : $f'(x) = f'(0)$.
Ainsi, f' est constante.

4. Raisonnons par analyse-synthèse. Analyse : supposons qu'il existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f \circ f(x) = \dfrac{x}{2}$.
Alors, d'après les questions précédentes, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = a$. Alors, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$.
De plus, d'après la question 2, $f(0) = \dfrac{f(0)}{2}$. Donc $f(0) = 0$.
Ainsi, $b = 0$.
De plus, :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{f(x)}{2} = \frac{x}{2} = f(f(x)) = af(x) = a^2 x.$$
D'où $a^2 = \dfrac{1}{2}$. Donc $a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Synthèse : posons $f_1 : x \mapsto \dfrac{\sqrt{2}}{2}x$ et $f_2 : x \mapsto -\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$f_1 \circ f_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}x = \frac{x}{2}$$
et
$$f_2 \circ f_2(x) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) = \frac{x}{2}$$
Ainsi, f_1 et f_2 sont bien solutions.
L'ensemble des fonctions vérifiant la propriété de l'énoncé est donc $\{x \mapsto \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x\}$.

2 Dérivées n-ièmes et fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ ou $\mathcal{C}^\infty$

Exercice 6. φ est le produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Posons : $f : x \mapsto x^2 + 1$ et $g : x \mapsto e^{3x}$, on a alors :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2x, \quad f''(x) = 2 \quad \text{et } \forall k \geq 3,\ f^{(k)}(x) = 0$$
Par récurrence, on montre que : $\forall k \in \mathbb{N}$, on a $g^{(k)}(x) = 3^k e^{3x}$.
Soit $n \geq 2$, on utilise alors la formule de Leibniz.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\
&= \binom{n}{0} f^{(0)}(x) g^{(n)}(x) + \binom{n}{1} f'(x) g^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2} f''(x) g^{(n-2)}(x) + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\
&= (x^2+1)3^n e^{3x} + 2nx3^{n-1}e^{3x} + 2\frac{n(n-1)}{2}3^{n-2}e^{3x}
\end{aligned}$$
On remarque que la relation reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

Exercice 7. Calculons de deux façons différentes le terme dominant de $f^{(n)}$.
f est classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions qui le sont.
Soit $x \in \mathbb{R}$, par la formule de Leibniz, on a :
$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \frac{n!}{k!}(x+1)^k = n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 x^{n-k}(x+1)^k.$$
Ainsi, le terme de plus haut degré est $n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 x^n$.

Or le terme de plus haut degré dans $f(x)$ est x^{2n} dont la dérivée d'ordre n est $\dfrac{(2n)!}{n!}x^n$.

Ainsi, le terme coefficient dominant de $f^{(n)}(x)$ est $\dfrac{(2n)!}{n!}x^n$.

Finalement, on obtient : $n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \dfrac{(2n)!}{n!}$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} = \binom{2n}{n}$.

Exercice 8. f est le produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Posons $h : x \mapsto x^3+x^2+1$ et $g : x \mapsto e^{-x}$, on a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = 3x^2+2x \quad h''(x) = 6x+2 \quad h'''(x) = 6 \quad \text{ et } \forall k \geq 4,\ h^{(k)}(x) = 0$$

De même, on montre par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}$, on a $g^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x}$.
Soit $n \geq 3$, on utilise la formule de Leibniz.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\
&= \binom{n}{0} h^0(x) g^{(n)}(x) + \binom{n}{1} h'(x) g^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2} h''(x) g^{(n-2)}(x) + \binom{n}{3} h'''(x) g^{(n-3)}(x) + \sum_{k=4}^{n} \binom{n}{k} h^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\
&= (x^3+x^2+1)(-1)^n e^{-x} + n(3x^2+2x)(-1)^{n-1}e^{-x} + (6x+2)\frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-2}e^{-x} + 6\frac{n(n-1)(n-2)}{6}(-1)^{n-3}e^{-x} \\
&= (-1)^n e^{-x}\left(x^3 + (1-3n)x^2 + (3n^2-5n)x + 1 + n(n-1)(3-n)\right)
\end{aligned}$$

On remarque que la relation reste valable pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$.

Exercice 9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
On remarque que :

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_0(x) = e^{1/x}$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_0^{(1)}(x) = -\dfrac{1}{x^2}e^{1/x}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_1(x) = xe^{1/x}$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_1^{(2)}(x) = \dfrac{1}{x^3}e^{1/x}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_2(x) = x^2e^{1/x}$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_2^{(3)}(x) = -\dfrac{1}{x^4}e^{1/x}$.

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ f_n^{(n+1)}(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{x^{n+1}} x^{1/x}$.

- Pour $n = 0$, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_0^{(1)}(x) = \dfrac{-1}{x^2}e^{1/x}$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n^{(n+1)}(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}e^{1/x}$.
  On remarque : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) = x^{n+1}e^{1/x} = xf_n(x)$.
  D'après la formule de Leibniz, on a :
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}^{(n+2)}(x) = \sum_{k=0}^{n+2} \binom{n+2}{k} f_n^{(n+2-k)}(x) \times id^{(k)}(x)$$
  Or, on a : $\forall k \geq 2, \forall x \in \mathbb{R},\quad Id_{(k)}(x) = 0$.
  Donc on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}^{(n+2)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{1} \binom{n+2}{k} f_n^{n+2-k}(x) Id^{(k)}(x)$.
  Donc :
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}^{(n+2)}(x) = xf_n^{(n+2)}(x) + (n+2)f_n^{(n+1)}(x)$$
  Or, $f_n^{(n+2)}$ est la dérivée de $f_n^{(n+1)}$
  Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :
  $$\begin{aligned}
  f_n^{(n+2)}(x) &= -\frac{(-1)^{n+1}(n+2)}{x^{n+3}}e^{1/x} + \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}} \times \frac{-1}{x^2}e^{1/x} \\
  &= -(n+2)\frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+3}}e^{1/x} + \frac{(-1)^n}{x^{n+4}}e^{1/x}
  \end{aligned}$$
  D'où :
  $$\begin{aligned}
  f_{n+1}^{(n+2)}(x) &= x\left(-(n+2)\frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+3}}e^{1/x} + \frac{(-1)^n}{x^{n+4}}e^{1/x}\right) + (n+2)\frac{(-1)^{(n+1)}}{x^{n+2}}e^{1/x} \\
  &= -(n+2)\frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}e^{1/x} + \frac{(-1)^n}{x^{n+3}}e^{1/x} + (n+2)\frac{(-1)^{(n+1)}}{x^{n+2}}e^{1/x} \\
  &= \frac{(-1)^n}{x^{n+3}}e^{1/x} \\
  &= \frac{(-1)^{n+2}}{x^{n+3}}e^{1/x}
  \end{aligned}$$

- On a donc prouvé par récurrence que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ f_n^{(n+1)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}e^{1/x}.$$

Exercice 10. Posons $f: t\mapsto \ln t$ et $g: t\mapsto t^{n-1}$.
f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Commençons par prouver par récurrence que : $\forall k\in\mathbb{N}^*, \forall t\in\mathbb{R}_+^*,\ \ln^{(k)}(t)=\dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{t^k}$

- Pour $k=1$, on a :$\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\ \ln'(t)=\dfrac{1}{t}$ donc la formule est vraie pour $k=1$.
- Soit $k\in\mathbb{N}^*$, supposons que : $\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\ \ln^{(k)}(t)=\dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{t^k}$.
  Soit $t\in\mathbb{R}$, En dérivant l'égalité de l'hypothèse de récurrence, on obtient : $\ln^{(k+1)}(t)=(-1)^{k-1}(k-1)!\times\dfrac{-k}{t^{k+1}}$.
  Donc : $\ln^{(k+1)}(t)=\dfrac{(-1)^k k!}{t^{k+1}}$.
- On a donc prouvé par récurrence que : $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \forall t\in\mathbb{R}_+^*,\ \ln^{(k)}(t)=\dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{t^{k-1}}$.

De plus, on a : $\forall k\in[\![0,n-1]\!],\ \forall t\in\mathbb{R},\ g^{(k)}(t)=\dfrac{(n-1)!}{(n-1-k)!}t^{n-1-k}$ et $g^{(n)}=0$.
Soit $t\in\mathbb{R}_+^*$, d'après la formule de Leibniz, on a alors :

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(t)&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\ln^{(k)}(t)g^{(n-k)}(t)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\ln^{(k)}(t)g^{(n-k)}(t)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{t^k}\frac{(n-1)!}{(k-1)!}t^{k-1}\\
&=\frac{(n-1)!}{t}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k-1}\\
&=-\frac{(n-1)!}{t}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k}\\
&=-\frac{(n-1)!}{t}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k}-1\right)\\
&=-\frac{(n-1)!}{t}((1-1)^n-1)=\frac{(n-1)!}{t}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall t\in\mathbb{R}_+^*,\ f^{(n)}(t)=\frac{(n-1)!}{t}$$

Exercice 11. Calculons dans un premier temps les dérivées n-ièmes de $f: x\mapsto e^{ix}$.
f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Et on a : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $f^{(n)}(x)=i^n e^{ix}=\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^n e^{ix}=e^{i\frac{n\pi}{2}}e^{ix}$ d'après la formule de Moivre. On obtient finalement que :

$$x\in\mathbb{R},\ f^{(n)}(x)=e^{i\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)}.$$

Ainsi, en prenant les parties réelles et imaginaires, on obtient : $\cos^{(n)}: x\mapsto\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$ et $\sin^{(n)}: x\mapsto\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

Exercice 12. 1. On commence par linéariser $\cos^3$ et $\sin^3$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f_1(x) = \cos^3 x &= \left(\frac{e^{ix} + \dfrac{e^{-ix}}{2}}{2} \right)^3 && \text{d'après la formule d'Euler} \\ &= \frac{e^{3ix} + e^{-3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix}}{8} && \text{d'après le binôme de Newton} \\ &= \frac{1}{4}\left(\cos(3x) + 3\cos(x)\right) \\ &= \frac{1}{4}\mathrm{Re}\left(e^{3ix} + 3e^{ix}\right) \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ f_1^{(n)}(x) = \dfrac{1}{4}\mathrm{Re}\left((3i)^n e^{3ix} + 3(i^n)e^{ix}\right)$. Or, $i^n = e^{in\frac{\pi}{2}}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f_1^{(n)}(x) &= \frac{1}{4}\mathrm{Re}\left(3^n e^{i(3x+n\frac{\pi}{2})} + 3e^{i(x+n\frac{\pi}{2})}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(3^n \cos\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right) + 3\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ f_1^{(n)}(x) = \frac{1}{4}\left(3^n \cos\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right) + 3\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

2. On remarque que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_2(x) = \mathrm{Im}(e^((1+i)x)$. On prouve alors par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \mathrm{Im}\left((1+i)^n e^{(1+i)x}\right)$. Or, $(1+i)^n = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = (\sqrt{2})^n e^{in\frac{\pi}{4}}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f_2^{(n)}(x) &= \mathrm{Im}\left((\sqrt{2})^n e^{in\frac{\pi}{4}} e^{(1+i)x}\right) \\ &= (\sqrt{2})^n e^x \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

   Finalement, on a prouvé que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_2^{(n)}(x) = (\sqrt{2})^n e^x \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)$$

3 Propriétés des fonctions dérivables

Exercice 13. Supposons que f ne soit pas constante (cas évident).
Il existe donc $a \neq 0$ tel que $f(a) \neq f(0)$.
Supposons par exemple $f(a) > f(0)$.
Posons $\epsilon = f(a) - f(0) > 0$.
Il existe $A > 0$ tel que : $\forall x \in [0, +\infty[,\ x \geq A \implies |f(x) - f(0)| \leq \epsilon$ Ainsi, pour tout $x \in [A, +\infty[$, $f(x) \leq f(0) + \epsilon = f(a)$.
La fonction f est continue sur le segment $[0, A]$ donc il existe $d \in [0, A]$ tel que : $\forall x \in [0, A]$, $f(x) \leq f(d)$.
Ainsi, on a :

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ f(x) \leq \max(f(a), f(d)) = f(x_0)$$

avec $x_0 = a$ ou $x_0 = d$.
De plus, $\max(f(a), f(d)) \geq f(a) > f(0)$ donc $\max(f(a), f(d)) \neq f(0)$. Ainsi, $x_0 \neq 0$.
Ainsi, f admet un maximum en x_0 qui est atteint en un point de $]0, +\infty[$ et f est dérivable en x_0 d'où $f'(x_0) = 0$.

Exercice 14. Posons : $\begin{array}{cccc} h & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^\lambda f(x) \end{array}$.
h est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ en tant que produit de fonctions qui le sont. De plus, $h(a) = h(b) = 0$. Ainsi, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$. Or, $h'(c) = \lambda c^{\lambda-1} f(c) + c^\lambda f'(c)$. De plus, $c \neq 0$. Ainsi, on obtient que $\lambda f(c) + cf'(c) = 0$. D'où $f'(c) = -\lambda \dfrac{f(c)}{c}$.

Exercice 15. 1. Pour tout $l \in [\![0, \min(k, n)]\!]$, on considère la propriété $\mathcal{P}(l)$: « $f^{(l)}$ admet au moins $k - l$ zéros dans I ».

- Pour $l = 0$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Ceci correspond à l'hypothèse faite sur f.

- Soit $l \in [\![0, \min(k,n)-1]\!]$, supposons $\mathcal{P}(l)$ vraie.
Ainsi, $f^{(l)}$ admet au moins $k-l$ zéros dans I. Soit $x_1 < ... < x_{k-l}$ tels que $f^{(l)}(x_1) = ... = f^{(l)}(x_{k-l}) = 0$.
f est n fois dérivable sur I et $l \leq n-1$ donc $f^{(l)}$ est dérivable sur I et donc aussi continue sur I.
Soit $i \in [\![1, k-l-1]\!]$, $f^{(l)}$ est continue sur $[x_i, x_{i+1}]$ et dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$. De plus, $f'(x_i) = f'(x_{i+1})$. D'après le théorème de Rolle il existe $y_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $f^{(l+1)}(y_i)$. De plus, les y_i sont 2 à 2 distincts pour $i \in [\![1, k-l-1]\!]$ car les intervalles $]x_i, x_{i+1}[$ sont 2 à 2 disjoints pour $i \in [\![1, k-l-1]\!]$. Ainsi, on a trouvé $k-(l+1)$ zéros de $f^{(l+1)}$. Donc $\mathcal{P}(l+1)$ est vraie.
- On a donc prouvé que pour tout $l \in [\![0, \min(k,n)]\!]$, $f^{(l)}$ admet au moins $k-l$ zéros dans I.

2. Il suffit d'appliquer la question précédente à $k = n+1$ et $l = n$ ce qui est possible car k et l vérifie bien $0 \leq l \leq k$ et $0 \leq l \leq n$.

Exercice 16. Soit $T \in \mathbb{R}^*$. Soit f une fonction dérivable et T-périodique.
On sait que : $\forall n \in \mathbb{Z},\ f(nT) = f((n+1)T)$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. f est continue sur $[nT, (n+1)T]$, dérivable sur $]nT, (n+1)T[$. Ainsi, d'après le théorème de Rolle, il existe $x_n \in]nT, (n+1)T[$ tel que $f'(x_n) = 0$.
Tous les x_n pour $n \in \mathbb{N}$ sont distincts car les intervalles $]nT, (n+1)T[$ pour $n \in \mathbb{N}$ sont disjoints. Ainsi, f' s'annule une infinité de fois.

Exercice 17. Posons $h : x \mapsto f(x) - x$.
$h(-1) = h(0) = h(1) = 0$. De plus, h est continue sur $[-1, 0]$ et sur $[0, 1]$. h est dérivable sur $]-1, 0[$ et sur $]0, 1[$. Ainsi, d'après le théorème de Rolle appliquée sur $]-1, 0[$ et $]0, 1[$, il existe $\alpha \in]-1, 0[$ et $\beta \in]0, 1[$ tels que $h'(\alpha) = 0$ et $h'(\beta) = 0$. De plus, h' est continue sur $[\alpha, \beta]$, dérivable sur $]\alpha, \beta[$. Ainsi, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]\alpha, \beta[\subset]-1, 1[$ tel que $h''(c) = 0$. Or, $0 = h''(c) = f''(c)$. ce qui permet de conclure.

Exercice 18.

1. Si $M = 0$ alors on a :$\forall x \in [a, b],\ f''(x) = 0$. Donc en intégrant deux fois, on obtient qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = Ax + B$ donc f est affine.
2. Soit $x \in]a, b[$, posons $h : t \mapsto \dfrac{(x-a)(x-b)}{2} f(t) - \dfrac{(t-a)(t-b)}{2} f(x)$.
On commence par remarquer que $f(a) = \dfrac{(x-a)(x-b)}{2} f(a) = 0$, $f(b) = \dfrac{(x-a)(x-b)}{2} f(b) = 0$ et $f(x) = 0$.
Or, h est continue sur $[a, x]$ et $[x, b]$ et dérivable sur $]a, x[$ et $]x, b[$. Ainsi, d'après le théorème de Rolle appliqué sur $]a, x[$ et $]x, b[$, il existe $\alpha_x \in]a, x[$ et $\beta_x \in]x, b[$ tels que $h'(\alpha_x) = 0$ et $h'(\beta_x) = 0$.
De plus, h' est continue sur $[\alpha_x, \beta_x]$ et dérivable sur $]\alpha_x, \beta_x[$ donc d'après le théorème de Rolle,
il existe $\gamma_x \in]\alpha_x, \beta_x[\subset]a, b[$ tel que $h''(c_x) = 0$.
Or, $h''(c_x) = \dfrac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c_x) - f(x)$. D'où $\dfrac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c_x) = f(x)$.
Si $x = a$, ou $x = b$, pour tout $c \in]a, b[$, on a $f(a) = f(b) = 0 = \dfrac{(x-a)(x-b)}{2} f(c)$.
3. f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ donc f'' est continue sur le segment $[a, b]$ donc bornée. Ainsi, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in [a, b],\ |f''(x)| \leq M$.
Soit $x \in [a, b]$. D'après la question précédente, il existe $c_x \in]a, b[$ tel que : $f(x) = \dfrac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c_x)$.
On a donc :
$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c_x) \right| \\ &= \frac{|x-a||x-b|}{2} |f''(c_x)| \\ &\leq \frac{(x-a)(b-x)}{2} M \text{ car } a \leq x \leq b \end{aligned}$$
Ainsi, on a prouvé que :
$$\forall x \in [a, b],\ |f(x)| \leq \frac{(x-a)(b-x)}{2} M$$
On a donc également :
$$\forall x \in]a, b],\ \frac{|f(x)|}{x-a} \leq \frac{(b-x)}{2} M \leq \frac{b-a}{2} M$$
Donc :
$$\forall x \in]a, b],\ \left| \frac{f(x)}{x-a} \right| \leq \frac{b-a}{2} M$$
Comme f est dérivable , le membre de gauche tend vers $|f'(a)|$ lorsque x tend vers a. Ainsi, en passant à la limite, on obtient :
$$|f'(a)| \leq \frac{M}{2}(b-a)$$

Exercice 19. 1. On commence par remarquer que : $\forall x \in [0,1]$, $\dfrac{1}{x} + a - 1 \in [a, +\infty[$. Ainsi, g est bien définie et est continue sur $]0,1[$ en tant que composée de fonctions qui le sont.

De plus, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$. D'où par composition, $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = f(a) = g(0)$. Ainsi, g est continue en 0. Finalement : $\forall x \in]0,1[$, $\dfrac{1}{x} + a - 1 \in]a, +\infty[$, donc g est dérivable sur $]0,1[$ en tant que composée de fonctions qui le sont.

2. D'après la question précédente, g est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ et $g(0) = f(a) = g(1)$. D'après le théorème de Rolle, il existe $x_0 \in]0,1[$ tel que $g'(x_0) = 0$.

Posons $c = \dfrac{1}{x_0} + a - 1$. On a $c > a$. De plus, $0 = g'(x_0) = \dfrac{-1}{x_0^2} \times f'\left(\dfrac{1}{x_0} + a - 1\right)$ d'où $f'(c) = f'\left(\dfrac{1}{x_0} + a - 1\right) = 0$ ce qui permet de conclure.

Exercice 20 (Règle de l'Hôpital). 1. Posons $h : x \mapsto f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$.

h est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ en tant que combinaison linéaire de fonctions qui le sont.

De plus, $h(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b)$ et $h(b) = -f(b)g(a) + g(b)f(a) = h(a)$. Donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $h'(c) = 0$. On a alors : $f'(c)(g(b) - g(a)) - g'(c)(f(b) - f(a)) = 0$ donc $f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a)) = 0$.

2. Supposons que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$. Soit $x \in]x_0, x_0 + \alpha[$. f est continue sur $[x, x_0]$ et dérivable sur $]x, x_0[$ donc d'après la question précédente, il existe $c_x \in]x, x_0[$ tel que $f'(c_x)(g(x) - g(x_0)) = g'(c_x)(f(x) - f(x_0))$.

Montrons que $g(x) \neq g(x_0)$.

Par l'absurde, si $g(x) = g(x_0)$ alors d'après le théorème de Rolle (g est continue sur $[x_0, x]$ et dérivable sur $]x_0, x[$), il existe $\gamma_x \in]x_0, x[$ tel que $g'(\gamma_x) = 0$. Absurde au vu de l'hypothèse sur g.

Ainsi, $g(x) \neq g(x_0)$ et g' ne s'annule.

D'où $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$. Or, $c_x \in [x_0, x]$. Ainsi, par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x \to x_0} c_x = x_0$. D'où par composition, $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = l$. Donc $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = l$.

On procède de même pour montrer que $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = l$.

Ainsi, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = l$.

3.
- Posons $f : x \mapsto x - \sin(x)$ et $g : x \mapsto x^3$.
  f et g sont dérivables sur $]-2\pi, 2\pi[$ et pour tout $x \in]-2\pi, 2\pi[\setminus\{0\}$, $f'(x) = 1 - \cos(x)$ et $g'(x) = 3x^2 \neq 0$.
  De plus, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1 - \cos(x)}{3x^2} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$.
  Ainsi, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x - \sin(x)}{x^3} = \dfrac{1}{6}$.
- Posons $f : x \mapsto \ln(1+x) - x$ et $g : x \mapsto x^2$.
  f et g dérivable sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ et pour tout $x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\setminus\{0\}$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{1+x}$ et $g'(x) = 2x \neq 0$.
  De plus, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x}{(1+x) \times 2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-1}{2(1+x)} = -\dfrac{1}{2}$.
  Ainsi, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$.

Exercice 21.
- f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions qui le sont. De plus, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ par croissance comparée.
  On peut donc prolonger f en 0 en posant $f(0) = 0$. On note toujours f le prolongement.
- On sait d"jà que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par composition. De plus, f est désormais continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = 2x \ln x + x$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = 0$ par croissance comparée. Donc d'après le théorème de la limite de la dérivée, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, et $f'(0) = 0$ par le théorème précédent.

Exercice 22.
- f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
- f est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$ si et seulement si $1 = c$.
  Ainsi, il faut que $c = 1$ pour que f soit continue. On suppose cette condition satisfaite dans la suite.
- On a :
  $$\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ f'(x) = e^x \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = 2ax + b.$$

f est continue sur $\mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = b$. Ainsi, d'après le théorème de la limite de la dérivée, si $b = 1$ alors f sera $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = 1$.
On suppose cette condition satisfaite.

- On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ f''(x) = e^x \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f''(x) = 2a.$$

f' est continue sur $\mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a $\lim\limits_{x\to 0^-} f''(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f''(x) = 2a$. Ainsi, d'après le théorème de la limite de la dérivée, si $2a = 1$ alors f' sera $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc f sera de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $f''(0) = 1$. On suppose cette condition satisfaite.

On peut donc conclure que si $a = \dfrac{1}{2}$, $b = 1$ et $c = 1$ alors f est de classe $\mathcal{C}^2$.
En revanche, quelque soit les valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ f'''(x) = e^x \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'''(x) = 0.$$

Or, $\lim\limits_{x\to 0^-} f'''(x) = 1$ alors que $\lim\limits_{x\to 0^+} f'''(x) = 0$ ainsi, il n'existe aucune valeur de a, b et c telle que la fonction soit $\mathcal{C}^3$.

Exercice 23. On a $\lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{1}{x^2} = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to -\infty} e^X = 0$ donc par composition, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.
Ainsi, f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
On note encore f le prolongement.
f est alors continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus, on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \dfrac{2}{x^3} e^{-1/x^2} = 2\dfrac{\left(\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}}{e^{1/x^2}}$.
Or, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{X^{3/2}}{e^X} = 0$ par croissances comparées. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$ donc d'après le théorème de la limite de la dérivée, f est dérivable en 0 et on a $f'(0) = 0$.

Exercice 24.

- Résolvons $xy' - (1+x)y = -x^2$ sur $I_1 = \mathbb{R}_+^*$ et $I_2 = \mathbb{R}_-^*$.
  Soit $k \in \{1, 2\}$.
  - Sur I_k, (E) équivaut à $y' - \dfrac{(1+x)}{x} y = -x$.
  - On résout (E_0) $\quad y' - \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) y = 0$ sur I_k.
    Une primitive sur I_k de $x \mapsto \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ est $x \mapsto x + \ln(|x|)$,
    donc les solutions sur I_k de (E_0) sont : $\begin{array}{ccc} I_k & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{x+\ln|x|} = \lambda |x| e^x \end{array}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
    Comme x ne change pas de change de signe sur I_k, quitte à changer λ en $-\lambda$, on peut conclure que les solutions sur I_k de (E_0) sont $\begin{array}{ccc} I_k & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda x e^x \end{array}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
  - La fonction $\begin{array}{ccc} I_k & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$ est solution particulière de $y' - \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) y = -x$.
  - Ainsi, les solutions de $y' - \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) y$ sur I_k sont :

$$\begin{array}{ccc} I_k & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x + \lambda x e^x \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Il reste à étudier s'il existe une solution sur $\mathbb{R}$.

$$y \text{ solution sur } \mathbb{R} \text{ de } (E) \iff \begin{cases} \exists \lambda_1 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ y(x) = x + \lambda_1 x e^x \\ \exists \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y(x) = x + \lambda_2 x e^x \\ y(0) = 0 \\ y \text{ est continue et dérivable en } 0 \end{cases}$$

Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $\begin{array}{cccc} y: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} x + \lambda_1 x e^x & \text{si } x < 0 \\ x + \lambda_2 x e^x & \text{si } x > 0 \\ 0 \quad \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$.

Continuité en 0 :
On a $\lim\limits_{x\to 0^-} y(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x+\lambda_1 x e^x) = 0 = y(0)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} y(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x+\lambda_2 x e^x) = 0 = y(0)$.
Ainsi, y est continue en 0. (aucune condition sur λ_1 ou λ_2).
Dérivabilité en 0 :
y est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. De plus : $\forall x\in\mathbb{R}_-^*,\ f'(x) = 1+\lambda_1 e^x(1+x)$ donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = 1+\lambda_1$.
De même, on a : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = 1+\lambda_2 e^x(1+x)$ donc $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x) = 1+\lambda_2$.
Si $\lambda_1=\lambda_2$, f' tend vers $1+\lambda_1$ lorsque x tend vers 0 donc d'après le théorème de la limite de la dérivée, f est dérivable en 0 et on a $f'(0) = 1+\lambda_1$.
Finalement, l'équation (E) admet pour solutions sur $\mathbb{R}$ les fonctions :

$$y:\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & x+\lambda x e^x\end{array}\quad,\lambda\in\mathbb{R}$$

Exercice 25. • Commençons par résoudre $xy'-2y=(x-1)(x+1)^3$ sur $I_1=\mathbb{R}_-^*$ et $I_2=\mathbb{R}_+^*$.
Soit $k\in\{1,2\}$.

- On sait que : $\forall x\in I_k$, $x\neq 0$. Ainsi, sur cet intervalle (E) équivaut à $y'-\dfrac{2}{x}y=\dfrac{(x-1)(x+1)^3}{x}$.
- On résout $y'-\dfrac{2}{x}y=0$ sur I_k.
  Une primitive sur I_k de $x\mapsto -\dfrac{2}{x}$ est $x\mapsto -2\ln|x|$,
  donc les solutions sur I_k de $y'-\dfrac{2}{x}y=0$ sont $\begin{array}{ccc}I_k & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \lambda e^{2\ln|x|}=\lambda|x|^2=\lambda x^2\end{array}\quad,\lambda\in\mathbb{R}$.
- D'après la méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière de $y'-\dfrac{2}{x}y=\dfrac{(x-1)(x+1)^3}{x}$ de la forme $y:\begin{array}{ccc}I_k & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \lambda(x)x^2\end{array}$ où λ est dérivable.

$$\begin{aligned}
y'-\frac{2}{x}y=\frac{(x-1)(x+1)^3}{x} &\iff \forall x\in I_k, \lambda'(x)x^2=\frac{(x-1)(x+1)^3}{x}\\
&\iff \forall x\in I_k,\ \lambda'(x)=\frac{(x-1)(x+1)^3}{x^3}\\
&\iff \forall x\in I_k,\ \lambda'(x)=\frac{(x-1)(x^3+3x^2+3x+1)}{x^3}\\
&\iff \forall x\in I_k,\ \lambda'(x)=\frac{x^4+2x^3-2x-1}{x^3}\\
&\iff \forall x\in I_k,\ \lambda'(x)=x+2-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}
\end{aligned}$$

  Or, $x\mapsto \dfrac{x^2}{2}+2x+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{2x^2}$ est une primitive de $x\mapsto x+2-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^3}$.
  Donc $\begin{array}{ccc}I_k & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \dfrac{x^4}{2}+2x^3+2x+\dfrac{1}{2}\end{array}$ est solution particulière de $y'-\dfrac{2}{x}y=\dfrac{(x-1)(x+1)^3}{x}$.
- Ainsi, les solutions de $y'-\dfrac{2}{x}y=\dfrac{(x-1)(x+1)^3}{x}$ sur I_k sont :

$$\begin{array}{ccc}I_k & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \lambda x^2+\dfrac{x^4}{2}+2x^3+2x+\dfrac{1}{2}\end{array}\quad,\lambda\in\mathbb{R}.$$

- Il reste à étudier s'il existe une solution sur $\mathbb{R}$.

$$y \text{ solution sur } \mathbb{R} \text{ de } (E) \iff \begin{cases}\exists\lambda_1\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R}_-^*,\ y(x)=\lambda_1x^2+\dfrac{x^4}{2}+2x^3+2x+\dfrac{1}{2}\\ \exists\lambda_2\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ y(x)=\lambda_2x^2+\dfrac{x^4}{2}+2x^3+2x+\dfrac{1}{2}\\ y(0)=\dfrac{1}{2}\\ y \text{ est continue et dérivable en } 0\end{cases}$$

Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $y: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \lambda_1 x^2 + \dfrac{x^4}{2} + 2x^3 + 2x + \dfrac{1}{2} & \text{si } x < 0 \\ \lambda_2 x^2 + \dfrac{x^4}{2} + 2x^3 + 2x + \dfrac{1}{2} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{1}{2} \quad \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$.

<u>Continuité en 0 :</u>
On a $\lim\limits_{x\to 0^-} y(x) = \dfrac{1}{2} = y(0)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} y(x) = \dfrac{1}{2} = y(0)$.
Ainsi, y est continue en 0 (aucune condition sur λ_1 ou λ_2).
<u>Dérivabilité en 0 :</u>
y est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. De plus : $\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ f'(x) = 2\lambda_1 x + 2x^3 + 6x^2 + 2$ donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = 2$.
De même, on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = 2\lambda_2 x + 2x^3 + 6x^2 + 2$ donc $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x) = 2$.
f' tend vers 2 lorsque x tend vers 0 donc d'après le théorème de la limite de la dérivée, f est dérivable en 0 et on a $f'(0) = 2$.
Finalement, l'équation (E) admet pour solutions sur $\mathbb{R}$ les fonctions :

$$y: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \lambda_1 x^2 + \dfrac{x^4}{2} + 2x^3 + 2x + \dfrac{1}{2} & \text{si } x < 0 \\ \lambda_2 x^2 + \dfrac{x^4}{2} + 2x^3 + 2x + \dfrac{1}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{array}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Exercice 26. • Résolvons $(E) \quad xy' - 2y = x^4$ sur $I_1 = \mathbb{R}_-^*$ et $I_2 = \mathbb{R}_+^*$.
Soit $k \in \{1, 2\}$.

- On sait que : $\forall x \in I_k,\ x \neq 0$. Ainsi, sur cet intervalle (E) équivaut à $y' - \dfrac{2}{x} y = x^3$.
- On résout $(E_0) \quad y' - \dfrac{2}{x} y = 0$ sur I_k.
  Une primitive sur I_k de $x \mapsto \dfrac{2}{x}$ est $x \mapsto 2\ln|x|$,
  donc les solutions sur I_k de (E_0) sont $\begin{array}{ccc} I_k & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{2\ln|x|} = \lambda|x|^2 = \lambda x^2 \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}$.
- D'après la méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière de $y' - \dfrac{2}{x} y = x^3$ de la forme $y: \begin{array}{ccc} I_k & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda(x)x^2 \end{array}$ où λ est dérivable.

$$\begin{aligned} y' - \frac{2}{x} y = x^3 &\iff \forall x \in I_k, \lambda'(x)x^2 = x^3 \\ &\iff \forall x \in I_k,\ \lambda'(x) = x \end{aligned}$$

  Or, $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ est une primitive de $x \mapsto x$.
  Donc $\begin{array}{ccc} I_k & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^4}{2} \end{array}$ est solution particulière de $y' - \dfrac{2}{x} y = x^3$.
- Ainsi, les solutions de $xy' - 2y = x^4$ sur I_k sont :

$$\begin{array}{ccc} I_k & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^4}{2} + \lambda x^2 \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Il reste à étudier s'il existe une solution sur $\mathbb{R}$.

$$y \text{ solution sur } \mathbb{R} \text{ de } (E) \iff \begin{cases} \exists \lambda_1 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ y(x) = \lambda_1 x^2 + \dfrac{x^4}{2} \\ \exists \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y(x) = \lambda_2 x^2 + \dfrac{x^4}{2} \\ y(0) = 0 \\ y \text{ est continue et dérivable en } 0 \end{cases}$$

Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et
$$\begin{array}{rrcl} y: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \lambda_1 x^2 + \dfrac{x^4}{2} & \text{si } x < 0 \\ \lambda_2 x^2 + \dfrac{x^4}{2} & \text{si } x > 0 \\ 0 \quad \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}.$$

<u>Continuité en 0 :</u>
On a $\lim\limits_{x\to 0^-} y(x) = 0 = y(0)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} y(x) = 0 = y(0)$.
Ainsi, y est continue en 0. (aucune condition sur λ_1 ou λ_2).
<u>Dérivabilité en 0 :</u>
y est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. De plus : $\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ f'(x) = 2\lambda_1 x + 2x^3$ donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = 0$.
De même, on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = 2\lambda_2 x + 2x^3$ donc $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x) = 0$.
f' tend vers 0 lorsque x tend vers 0 donc d'après le théorème de la limite de la dérivée, f est dérivable en 0 et on a $f'(0) = 0$.
Finalement, l'équation (E) admet pour solutions sur $\mathbb{R}$ les fonctions :

$$\begin{array}{rrcl} y: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \lambda_1 x^2 + \dfrac{x^4}{2} & \text{si } x < 0 \\ \lambda_2 x^2 + \dfrac{x^4}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{array}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Exercice 27. • Posons $I_1 =]-\infty, 0[$, $I_2 =]0, 1[$ et $I_3 =]1, +\infty[$.
Soit $k \in \{1, 2, 3\}$.Ainsi, $x(x-1)y' + (2x-1)y = 1$ est équivalente sur I_k à $y' + \dfrac{(2x-1)}{x(x-1)}y = \dfrac{1}{x(x-1)}$.

- On résout $y' + \dfrac{(2x-1)}{x(x-1)}y = 0$ sur I_k.

  Une primitive sur $]0, 1[$ de $x \mapsto \dfrac{(2x-1)}{x(x-1)}$ est $x \mapsto \ln|x(x-1)|$.

  Les solutions de $y' + \dfrac{(2x-1)}{x(x-1)}y = 0$ sont :

$$\begin{array}{rcl} I_k & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-\ln|x(1-x)|} = \dfrac{\lambda}{|x(1-x)|} \end{array}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

  Comme $x \mapsto x(1-x)$ garde un signe constant sur I_k et quitte à remplacer λ en $-\lambda$, les solutions sur I_k de (E) sont :

$$\begin{array}{rcl} I_k & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\lambda}{x(1-x)} \end{array}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

- D'après la méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière de $y' + \dfrac{(2x-1)}{x(x-1)}y = \dfrac{1}{x(x-1)}$ de la forme $\begin{array}{rrcl} y: & I_k & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{\lambda(x)}{x(1-x)} \end{array}$ où λ est dérivable.

$$\begin{aligned} y' + \frac{(2x-1)}{x(x-1)}y = \frac{1}{x(x-1)} &\iff \forall x \in I_k, \frac{\lambda'(x)}{x(1-x)} = \frac{1}{x(x-1)} \\ &\iff \forall x \in I_k,\ \lambda'(x) = -1 \end{aligned}$$

  Or, $x \mapsto -x$ est une primitive sur I_k de $x \mapsto -1$.
  Donc $\begin{array}{rcl} I_k & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\dfrac{x}{x(1-x)} = \dfrac{1}{x-1} \end{array}$ est solution particulière sur I_k de $y' + \dfrac{(2x-1)}{x(x-1)}y = \dfrac{1}{x(x-1)}$.

- Ainsi, les solutions de $y' + \dfrac{(2x-1)}{x(x-1)}y = \dfrac{1}{x(x-1)}$ sur I_k sont :

$$\begin{array}{rcl} I_k & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\lambda - x}{x(1-x)} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Il reste à étudier s'il existe une solution sur $\mathbb{R}$.

$$y \text{ solution sur } \mathbb{R} \text{ de } (E) \iff \begin{cases} \exists \lambda_1 \in \mathbb{R}, \forall x \in]-\infty, 0[,\ y(x) = \dfrac{\lambda_2 - x}{x(1-x)} \\ \exists \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall x \in]0, 1[,\ y(x) = \dfrac{\lambda_1 - x}{x(1-x)} \\ \exists \lambda_3 \in \mathbb{R}, \forall x \in]1, +\infty[,\ y(x) = \dfrac{\lambda_3 - x}{x(1-x)} \\ y(0) = -1 \\ y(1) = 1 \\ y \text{ est continue et dérivable en 0 et en 1} \end{cases}$$

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ et $\begin{array}{rrcl} y : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{\lambda_1 - x}{x(1-x)} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\lambda_2 - x}{x(1-x)} & \text{si } x \in]0, 1[\\ \dfrac{\lambda_3 - x}{x(1-x)} & \text{si } x > 1 \\ -1 \quad \text{si } x = 01 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{array}$.

Continuité en 0 :
On a $\lim\limits_{x \to 0} \lambda_1 - x = \lambda_1$ et $\lim\limits_{x \to 0} x(1-x) = 0$.
Si $\lambda_1 \neq 0$ alors $\lim\limits_{x \to 0^-} y(x) = \pm\infty$.
Si $\lambda_1 = 0$, on a : $\forall x \in]-\infty, 0[,\ y(x) = -\dfrac{1}{1-x}$ donc $\lim\limits_{x \to 0^-} y(x) = -1 = y(0)$.
De même, $\lim\limits_{x \to 0^+} y(x) = \begin{cases} -1 = y(0) & \text{si } \lambda_2 = 0 \\ \pm\infty & \text{si } \lambda_2 \neq 0 \end{cases}$.
Ainsi, y est continue en 0 si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$
On considère désormais que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Continuité en 1 :
On a $\lim\limits_{x \to 1^-} y(x) = -\infty$. Ainsi, y n'est pas continue en 1.

Finalement, l'équation (E) n'admet donc aucune solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 28. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $f = \ln$. f est continue sur $[k, k+1]$, dérivable sur $]k, k+1[$.
Et : $\forall t \in]k, k+1[,\ f'(t) = \dfrac{1}{t}$. Ainsi : $\forall t \in]k, k+1[,\ \dfrac{1}{k+1} \leq f'(t) \leq \dfrac{1}{k}$. Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\frac{1}{k+1} \leq f(k+1) - f(k) \leq \frac{1}{k}$$

D'où :

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}.$$

Exercice 29. 1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On commence par remarquer que :

$$\left(\frac{1+x}{x}\right)^x \leq e \leq \left(\frac{1+x}{x}\right)^{x+1} \iff x \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) \leq 1 \leq (x+1)\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)$$

ln est continue sur $[x, x+1]$, dérivable sur $]x, x+1[$. Et : $\forall t \in]x, x+1[,\ \ln'(t) = \dfrac{1}{t}$.
Ainsi : $\forall t \in]x, x+1[,\ \dfrac{1}{x+1} \leq \ln'(t) \leq \dfrac{1}{x}$.
Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a : $\dfrac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \dfrac{1}{x}$.
Donc :

$$\frac{1}{x+1} \leq \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$$

Ainsi, on a : $x \ln\left(\dfrac{1+x}{x}\right) \leq 1 \leq (x+1)\ln\left(\dfrac{1+x}{x}\right)$ donc par équivalence, on obtient que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \left(\frac{1+x}{x}\right)^x \leq e \leq \left(\frac{1+x}{x}\right)^{x+1}$$

2. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{(n+1)^n}{n!} \leq e^n \leq \dfrac{(n+1)^{n+1}}{n!}$.
   - Pour $n = 1$, $2 \leq e \leq 4$ donc la propriété est vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\dfrac{(n+1)^n}{n!} \leq e^n \leq \dfrac{(n+1)^{n+1}}{n!}$. (1)
     En utilisant la question précédente pour $x = n+1$, on a :
     $$\left(\frac{2+n}{n+1}\right)^{n+1} \leq e \leq \left(\frac{2+n}{n+1}\right)^{n+2} \qquad (2)$$
     Ainsi, en multipliant (1) et (2), on obtient :
     $$\frac{(2+n)^{n+1}}{(n+1)n!} \leq e^{n+1} \leq \frac{(2+n)^{n+2}}{(n+1)n!}$$
     Donc :
     $$\frac{(2+n)^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^{n+1} \leq \frac{(2+n)^{n+2}}{(n+1)!}$$
     ce qui prouve la propriété au rang $n+1$.
   - Ainsi, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{(n+1)^n}{n!} \leq e^n \leq \dfrac{(n+1)^{n+1}}{n!}$.

Exercice 30. 1. Soit $x \in]0, +\infty[$. On pose : $f : t \mapsto \ln(1+t)$. f est continue sur $[0, x]$, dérivable sur $]0, x[$. Et on a : $\forall t \in]0, x[,\ f'(t) = \dfrac{1}{1+t}$. Ainsi : $\forall t \in]0, x[,\ \dfrac{1}{1+x} \leq f'(t) \leq 1$. Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a :
$$\frac{x}{x+1} \leq f(x) - f(0) \leq x$$
D'où :
$$\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$$
car $f(0) = \ln(1) = 0$.
Soit $x \in]-1, 0[$. On pose toujours : $f : t \mapsto \ln(1+t)$. f est continue sur $[x, 0]$, dérivable sur $]x, 0[$. Et on a : $\forall t \in]x, 0[,\ f'(t) = \dfrac{1}{1+t}$. Ainsi : $\forall t \in]x, 0[,\ 1 \leq f'(t) \leq \dfrac{1}{1+x}$.
Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a :
$$(0-x) \leq f(0) - f(x) \leq \frac{(0-x)}{x+1}$$
D'où :
$$-x \leq -\ln(1+x) \leq \frac{-x}{x+1}$$
En multipliant par -1 et en changeant le sens des inégalités, on obtient le résultat souhaité.
Si $x = 0$, le résultat est immédiat car tous les termes sont nuls.

2. Soit $(x, y) \in [0, 1[^2$ tels que $x < y$. arcsin est continue sur $[x, y]$, dérivable sur $]x, y[$.
Et : $\forall t \in]x, y[,\ \arcsin'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Ainsi : $\forall t \in]x, y[,\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \leq \arcsin'(t) \leq \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$. Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a :
$$\frac{y-x}{\sqrt{1-x^2}} \leq \arcsin(y) - \arcsin(x) \leq \frac{y-x}{\sqrt{1-y^2}}$$

Exercice 31. Par définition de la limite, il existe $A > 0$ tel que :
$$\forall x \geq A,\ |f'(x) - l| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$
Soit $x > A$. Posons $g : t \mapsto f(t) - lt$. g est continue sur $[A, x]$, dérivable sur $]A, x[$. De plus : $\forall t \in]x, A[,\ |g'(t)| = |f'(t) - l| \leq \dfrac{\epsilon}{2}$. Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis on a :
$$|g(x) - g(A)| \leq \frac{\epsilon}{2}|x - A|.$$
Ainsi :
$$|f(x) - lx - f(A) + lA| \leq \frac{\epsilon}{2}(x - A).$$

Ainsi :
$$|f(x)-lx| \leq |f(x)-lx-f(A)+lA|+|f(A)-lA| \leq \frac{\epsilon}{2}(x-A)+|f(A)-lA|.$$
On a alors :
$$\left|\frac{f(x)}{x}-l\right|| = \left|\frac{f(x)-lx}{x}\right| \leq \frac{\epsilon}{2}\frac{(x-A)}{x}+\frac{|f(A)-lA|}{x}$$
Ainsi :
$$\forall x > A,\ \left|\frac{f(x)}{x}-l\right|| \leq \frac{\epsilon}{2}+\frac{|f(A)-lA|}{x}.$$
Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|f(A)-A|}{x}=0$ donc il existe $B\geq 0$ tel que :
$$\forall x \geq B,\ \frac{|f(A)-A|}{x} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$
Soit $x\geq \max(A,B)$, on a alors :
$$\left|\frac{f(x)}{x}-l\right| \leq \epsilon.$$
Ainsi, par définition de la limite $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=l$.

Exercice 32. 1. Posons $f : x \mapsto 2+\frac{1}{2}\sin x$.
$u_0\in\mathbb{R}$ donc $u_1\in\left[\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right]$ car sin à valeurs dans $[-1,1]$. De plus, $\left[\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right]$ est stable par f car sin à valeurs dans $[-1,1]$.
Posons $g : x\mapsto f(x)-x$. $g\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{3}{2}\geq 0$ et $g\left(\frac{5}{2}\right)=f\left(\frac{5}{2}\right)-\frac{5}{2}\leq 0$. De plus, g est continue sur $\left[\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c\in\left[\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right]$ tel que $g(c)=0$. Donc $f(c)=c$.
Ainsi, f admet au moins un point fixe dans $\left[\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right]$.
Enfin, f est dérivable sur $\left[\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right]$ et on a :
$$\forall x\in\left[\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right],\ |f'(x)|=|\frac{1}{2}\cos(x)\leq\frac{1}{2}.$$
Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis, f est $\frac{1}{2}$ lipschitzienne donc contractante.
Ainsi, le point fixe de f sur $\left[\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right]$ est unique et la suite (u_n) converge vers c.

2. Posons $f : x\mapsto\cos(x)$.
$u_0\in\mathbb{R}$ donc $u_1\in[-1,1]$ car cos à valeurs dans $[-1,1]$. De plus, $[-1,1]$ est stable par f car cos à valeurs dans $[-1,1]$.
Posons $g : x\mapsto f(x)-x$. $g(-1)=f(-1)+1\geq 0$ et $g(1)=f(1)-1\leq 0$. De plus, g est continue sur $[-1,1]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c\in[-1,1]$ tel que $g(c)=0$. Donc $f(c)=c$. Ainsi, f admet au moins un point fixe dans $[-1,1]$.
Enfin, f est dérivable sur $[-1,1]$ et pour tout $x\in[-1,1]$, $|f'(x)|=|-\sin(x)|\leq\sin(1)$. Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis, f est $\sin(1)<1$ lipschitzienne donc contractante.
Ainsi, le point fixe de f sur $[-1,1]$ est unique et la suite (u_n) converge vers c.

Exercice 33. Posons $f : x\mapsto e^{-x}$.
f est décroissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $\forall x\in\left[\frac{1}{e},1\right]$, $f(-1)\leq f(x)\leq f(0)$ donc : $\forall x\in\left[\frac{1}{e},1\right]$, $e^{-1}\leq f(x)\leq 1$. Ainsi, $f(x)\in\left[\frac{1}{e},1\right]$. Donc $\left[\frac{1}{e},1\right]$ est stable par f. De plus, $u_0\in\left[\frac{1}{e},1\right]$. Ainsi, par récurrence, on a : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\in\left[\frac{1}{e},1\right]$.
Posons $g : x\mapsto f(x)-x$. $g\left(\frac{1}{e}\right)=f\left(\frac{1}{e}\right)-\frac{1}{e}\geq 0$ et $g(1)=f(1)-1\leq 0$. De plus, g est continue sur $\left[\frac{1}{e},1\right]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c\in\left[\frac{1}{e},1\right]$ tel que $g(c)=0$. Donc $f(c)=c$. Ainsi, f admet au

moins un point fixe dans $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$.
De plus, f est dérivable sur $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ et : $\forall x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]$, $|f'(x)| = |-e^{-x}| = e^{-x} \leq e^{-1/e}$.
Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis, on en déduit que f est $e^{-1/e}$-lipschitzienne donc contractante.
Ainsi, le point fixe de f dans $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ est unique et (u_n) converge vers ce point fixe.
De plus toujours d'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\forall (x, y) \in \left[\frac{1}{e}, 1\right],\ |f(x) - f(y)| \leq e^{-1/e}|x - y|.$$

Ainsi, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - l| \leq e^{-1/e}|u_n - l|$.
Par récurrence, on obtient donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - l| \leq e^{-n/e}|u_0 - l|$. Or, $u_0 = 1$ et $l \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]$. Ainsi, $|u_0 - l| \leq (1 - \frac{1}{e})$.
Ainsi, il suffit de calculer u_N pour $N \in \mathbb{N}$ tel que $e^{-N/e}(1 - \frac{1}{e}) \leq 10^{-3}$. Or,

$$\begin{aligned} e^{-N/e}(1 - \frac{1}{e}) \leq 10^{-3} \quad &\Longleftrightarrow \quad e^{-N/e} \leq \frac{1}{10^3(1 - e^{-1})} \\ &\Longleftrightarrow \quad -\frac{N}{e} \leq \ln\left(\frac{1}{10^3(1 - e^{-1})}\right) \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{N}{e} \geq \ln\left(10^3(1 - e^{-1})\right) \\ &\Longleftrightarrow \quad N \geq e\ln\left(10^3(1 - e^{-1})\right) \end{aligned}$$

$N = \left\lfloor e\ln\left(10^3(1 - e^{-1})\right)\right\rfloor + 1$ convient donc.

Exercice 34.

1. Soit $x > 0$, $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ d'où $1 - \frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Ainsi : $\forall x > 0$, $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{3}{2}$.
   Donc : $\forall x > 0$, $f(x) > 0$.
   L'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ est donc stable par f et $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ (preuve par récurrence, voir cours sur les suites).
2. Soit $n \geq 2$, on a $u_n = f(u_{n-1})$ et comme $n - 1 \geq 1$, $u_{n-1} = f(u_{n-2})$. Or, $u_{n-2} \in \mathbb{R}_+^*$.
   Ainsi, $f(u_{n-2}) \in \left[1 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$. Ainsi, $\frac{1}{u_{n-1}} \in \left[\frac{2}{3}, 2\right] \subset [0, \pi]$ donc $\sin\left(\frac{1}{u_{n-1}}\right) \geq 0$.
   D'où $1 \leq 1 + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{u_{n-1}}\right) \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Donc $u_n \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$.
3. Posons $g : x \mapsto f(x) - x$. $g\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2} \leq 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \geq 0$. De plus, g est continue sur $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$ tel que $g(c) = 0$. Donc $f(c) = c$. Ainsi, f admet au moins un point fixe dans $\left[1, \frac{3}{2}\right]$.
   De plus, on a : $\forall x \in [1, \frac{3}{2}]$, $|f'(x)| = \frac{1}{2} \times \left|-\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right|$.
   Ainsi, on a : $\forall x \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$, $|f'(x) = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{x^2}\right| \times \left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq \frac{1}{2}$. Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finie, f est contractante. Ainsi, f admet un unique point fixe sur $\left[1, \frac{3}{2}\right]$.
4. D'après la question précédente, on a prouvé que f est $\frac{1}{2}$ lipschitzienne donc contractante. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l'unique point fixe de f.