Corrigé de la feuille d'exercices 14

1 Divisibilité dans $\mathbb{N}$

Exercice 1. Méthode 1 :
Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 7 divise $3^{2n} - 2^n$.

- Pour $n = 0$, 7 divise 0.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que 7 divise $3^{2n} - 2^n$.
  Alors, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $3^{2n} - 2^n = 7k$.
  On a alors :
  $$\begin{aligned} 3^{2(n+1)} - 2^{n+1} &= 3^{2n} \times 9 - 2 \times 2^n \\ &= (2^n + 7k) \times 9 - 2 \times 2^n \\ &= 2^n(9-2) + 9 \times 7k \\ &= 7(2^n + 9k) \end{aligned}$$
  et $2^n + 9k \in \mathbb{N}$.
  Donc 7 divise $3^{2(n+1)} - 2^{n+1}$.
- Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 7 divise $3^{2n} - 2^n$.

Méthode 2 :
Pour $n = 0$, 7 divise 0.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$,
$$3^{2n} - 2^n = 9^n - 2^n = 7 \times \sum_{k=0}^{n-1} 9^k 2^{n-1-k},$$
avec $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 9^k 2^{n-1-k} \in \mathbb{N}$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 7 divise $3^{2n} - 2^n$.

Exercice 2. 1.
- Pour $n = 2$, $2^{2^2} - 6 = 2^4 - 6 = 16 - 6 = 10$ qui est divisible par 10.
- Soit $n \geq 2$, supposons que $2^{2^n} - 6$ est divisible par 10.
  Ainsi, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $2^{2^n} - 6 = 10k$.
  On a alors :
  $$\begin{aligned} 2^{2^{n+1}} - 6 &= 2^{2^n \times 2} - 6 \\ &= (2^{2^n})^2 - 6 \\ &= (10k+6)^2 - 6 \\ &= 100k^2 + 120k + 36 - 6 \\ &= 100k^2 + 120k + 30 \\ &= 10 \times (10k^2 + 12k + 3) \end{aligned}$$
  et $10k^2 + 12k + 3 \in \mathbb{N}$.
  Ainsi, 10 divise $2^{2^{n+1}} - 6$.
- On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 10 divise 2^{2^n} est vraie.

2. **Méthode 1 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $2^{3n} - 1 = 8^n - 1^n = 7 \times \sum\limits_{k=0}^{n-1} 8^k$, avec $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 8^k \in \mathbb{N}$.

   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 7 divise $2^{3n} - 1$.
   Méthode 2 : On montre ce résultat par récurrence.
   - Pour $n = 0$, $2^0 - 1 = 0$ et 7 divise 0.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que 7 divise $2^{3n} - 1$.
  Ainsi, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $2^{3n} - 1 = 7k$.
  On a alors :

$$\begin{aligned} 2^{3(n+1)} - 1 &= 8 \times 2^{3n} - 1 \\ &= 8 \times (7k+1) - 1 \\ &= 7 \times 8k + 7 \\ &= 7(8k+1) \end{aligned}$$

  et $8k + 1 \in \mathbb{N}*$.
  La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.
- Ainsi, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 7 divise $2^{3n} - 1$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $2n^2 - n - 6 = (n+3)(2n-7) + 15$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{2n^2 - n - 6}{n+3} \in \mathbb{Z} &\iff 2n - 7 + \frac{15}{n+3} \in \mathbb{Z} \\ &\iff \frac{15}{n+3} \in \mathbb{Z} \\ &\iff n + 3 \text{ divise } 15 \end{aligned}$$

Or, $\mathcal{D}(15) = \{1, 3, 5, 15\}$.
Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{2n^2 - n - 6}{n+3} \in \mathbb{Z} &\iff n + 3 = 3 \text{ ou } n + 3 = 5 \text{ ou } n + 3 = 15 \\ &\iff n = 0 \text{ ou } n = 2 \text{ ou } n = 12 \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des entiers solutions est : $\{0, 2, 12\}$.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Par l'absurde, supposons que $\dfrac{21n-3}{4} \in \mathbb{Z}$ et $\dfrac{15n-2}{4} \in \mathbb{Z}$.
Posons $k_1 = \dfrac{21n-3}{4}$ et $k_2 = \dfrac{15n-2}{4}$.
On a alors, $21n-3 = 4k_1$ et $15n-2 = 4k_2$ d'où $1 = 4(k_2-k_1)+6n$. Ainsi, $1 = 2\left(2(k_2 - k_1) + 3n\right)$ et $(2(k_2 - k_1) + 3n) \in \mathbb{Z}$ donc 2 divise 1 Absurde.
Ainsi, ces deux quantités ne sont pas simultanément dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 5. 1. On sait que $10 = 9 + 1$. Soit $k \in \mathbb{N}$, par le binôme de Newton, on a :

$$10^k = (9+1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} 9^i = 3q_k + 1$$

où $q_k = 3 \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} 9^{i-1}$ si $k \geq 1$ et $q_0 = 0$.
Ainsi :

$$n = \sum_{k=0}^{p} a_k 10^k = \sum_{k=0}^{p} a_k(3q_k + 1) = 3\sum_{k=0}^{p} q_k a_k + \sum_{k=0}^{p} a_k.$$

D'où

$$\begin{aligned} 3|n &\iff 3|\left(3\sum_{k=0}^{p} q_k a_k + \sum_{k=0}^{p} a_k\right) \\ &\iff 3|\sum_{k=0}^{p} a_k \end{aligned}$$

L'entier n est donc multiple de 3 si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k$ est multiple de 3.

2. Soit $k \in \mathbb{N}$

$$10^k = (9+1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} 9^i = 9r_k + 1$$

où $r_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} 9^{i-1}$ si $k \geq 1$ et $r_0 = 0$.

Ainsi :

$$n = \sum_{k=0}^{p} a_k 10^k = \sum_{k=0}^{p} a_k(9r_k + 1) = 9\sum_{k=0}^{p} r_k a_k + \sum_{k=0}^{p} a_k.$$

D'où

$$\begin{aligned} 9|n &\iff 9|\left(9\sum_{k=0}^{p} r_k a_k + \sum_{k=0}^{p} a_k\right) \\ &\iff 9|\sum_{k=0}^{p} a_k \end{aligned}$$

L'entier n est donc multiple de 9 si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k$ est multiple de 9.

3. On remarque que $10 = 11 - 1$. Soit $k \in \mathbb{N}$, par le binôme de Newton on a :

$$10^k = (11-1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} 11^i (-1)^{k-i} = 11s_k + (-1)^k$$

où $s_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} 11^{i-1}(-1)^{k-i}$ si $k \geq 2$, $s_0 = 0$ et $s_1 = 1$.

Ainsi :

$$n = \sum_{k=0}^{p} a_k 10^k = \sum_{k=0}^{p} a_k(11s_k + (-1)^k) = 11\sum_{k=0}^{p} s_k a_k + \sum_{k=0}^{p} (-1)^k a_k.$$

D'où

$$\begin{aligned} 11|n &\iff 11|\left(11\sum_{k=0}^{p} s_k a_k + \sum_{k=0}^{p} (-1)^k a_k\right) \\ &\iff 11|\sum_{k=0}^{p} (-1)^k a_k \end{aligned}$$

L'entier n est donc multiple de 11 si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^k a_k$ est multiple de 11.

Exercice 6. Soient $q_1, q_2, r_1, r_2 \in \mathbb{N}$ tels que : $\begin{cases} a = q_1(a-b) + r_1 \text{ avec } 0 \leq r_1 < a-b \\ b = q_2(a-b) + r_2 \text{ avec } 0 \leq r_2 < a-b \end{cases}$

D'où $a - b = (a-b)(q_1 - q_2) + r_1 - r_2$. Ainsi, $(a-b)(1 - q_1 + q_2) = r_1 - r_2$ donc $a - b$ divise $r_1 - r_2$. Donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $r_1 - r_2 = (a-b)k$ et $-(a-b) < r_1 - r_2 < a - b$ donc $-(a-b) < k(a-b) < a-b$. Or, $a - b \neq 0$. Donc $-1 < k < 1$. Ainsi, $k = 0$ donc $r_1 - r_2 = 0$. On en déduit donc que $(a-b) = (a-b)(q_1 - q_2)$. Or, $a \neq b$ donc $1 = q_1 - q_2$.

2 PGCD et PPCM

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \exists (q_1, q_2) \in \mathbb{N}^2, \begin{cases} 4373 = q_1 n + 8 \text{ et } 0 \leq 8 < n \\ 826 = q_2 n + 7 \text{ et } 0 \leq 7 < n \end{cases} &\iff \exists (q_1, q_2) \in \mathbb{N}^2, \begin{cases} 4368 = q_1 n \\ 819 = q_2 n \\ n > 8 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} n|4368 \\ n|819 \\ n > 8 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} n|\text{pgcd}\,(4368, 819) \\ n > 8 \end{cases} \end{aligned}$$

Or, $\text{pgcd}\,(4365, 819) = 9$.
En effet : $4365 = 5 \times 819 + 270$
$819 = 3 \times 270 + 9$
$270 = 9 \times 30 + 0$.
Ainsi, $\text{pgcd}\,(4365, 819) = 9$ d'après l'algorithme d'Euclide. Ainsi,

$$\exists (q_1, q_2) \in \mathbb{N}^2, \ \begin{cases} 4373 = q_1 n + 8 \text{ et } 0 \leq 8 < n \\ 826 = q_2 n + 7 \text{ et } 0 \leq 7 < n \end{cases} \iff n = 9$$

Ainsi l'unique solution du problème est 9.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \exists (q_1, q_2) \in \mathbb{N}^2, \ \begin{cases} 6381 = q_1 n + 8 \text{ et } 0 \leq 9 < n \\ 3954 = q_2 n + 7 \text{ et } 0 \leq 6 < n \end{cases} &\iff \exists (q_1, q_2) \in \mathbb{N}^2, \ \begin{cases} 6372 = q_1 n \\ 3948 = q_2 n \\ n > 9 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} n | 6372 \\ n | 3948 \\ n > 9 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} n | \text{pgcd}\,(6372, 3948) \\ n > 9 \end{cases} \end{aligned}$$

Or, $\text{pgcd}\,(4365, 3948) = 12$.
Ainsi,

$$\exists (q_1, q_2) \in \mathbb{N}^2, \ \begin{cases} 6381 = q_1 n + 8 \text{ et } 0 \leq 9 < n \\ 3954 = q_2 n + 7 \text{ et } 0 \leq 6 < n \end{cases} \iff n = 12$$

Ainsi l'unique solution du problème est 12.

Exercice 9. Pour calculer le pgcd de $a = 9100$ et $b = 1848$, on utilise l'algorithme d'Euclide.
On obtient :
$9100 = 1848 \times 4 + 1708$
$1848 = 1708 \times 1 + 140$
$1708 = 140 \times 12 + 28$
$140 = 28 \times 5 + 0$.
Ainsi, $\text{pgcd}\,(9100, 1848) = 28$.
On procède de même pour $a = n^3 + 2n$ et $b = n^4 + 3n^2 + 1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
$n^4 + 3n^2 + 1 = (n^3 + 2n) \times n + n^2 + 1$.
Or, $n^3 + 2n = n(n^2 + 2) \geq n^2 + 2 > n^2 + 1$. Ainsi, $n^2 + 1$ est bien le reste dans la division euclidienne de $n^4 + 3n^2 + 1$ par $n^3 + 2n$.
$n^3 + 2n = (n^2 + 1) \times n + n$ avec $n < 2n \leq n^2 + 1$.
1er cas : si $n = 1$
$n^2 + 1 = 2 = n \times 2 + 0$. Ainsi, le dernier reste non nul est $n = 1$. Donc $\text{pgcd}\,(n^4 + 3n^2 + 1, n^3 + 2n) = 1$.
2nd : si $n > 1$
$n^2 + 1 = n \times n + 1$ et $n = 1 \times n + 0$. Ainsi, dans ce cas aussi, on obtient : $\text{pgcd}\,(n^4 + 3n^2 + 1, n^3 + 2n) = 1$.

Exercice 10. Par homogénéité du pgcd, on a : $\text{pgcd}\,(mn, (2m+1)n) = n\text{pgcd}\,(m, 2m+1)$.
Or, $\text{pgcd}\,(m, 2m+1) | m$ et $\text{pgcd}\,(m, 2m+1) | 2m+1$ ainsi $\text{pgcd}\,(m, 2m+1) | (2m+1-2m)$ donc $\text{pgcd}\,(m, 2m+1) | 1$.
Ainsi, $\text{pgcd}\,(m, 2m+1) = 1$.
Donc $\text{pgcd}\,(mn, (2m+1)n) = n$.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $a = n^2 + 3n$ et $b = n^2 + 5n + 6$

1. Notons $\delta = \text{pgcd}\,(n, n+2)$. Alors, δ divise $n + 2 - n = 2$. Ainsi, $\delta = 1$ ou $\delta = 2$.
   Si n est pair alors 2 divise n et 2 divise $n + 2$ donc 2 divise δ. Ainsi, $\delta = 2$.
   Si n est impair, 2 ne divise pas n donc 2 ne divise pas δ. Ainsi, $\delta = 1$.
2. On remarque que $a = n(n+3)$ et $b = (n+3)(n+2)$.
   Ainsi, par homogénéité du pgcd, on a : $\text{pgcd}\,(a, b) = \text{pgcd}\,(n(n+3), (n+3)(n+2)) = (n+3)\text{pgcd}\,(n, n+2)$.
   Donc d'après la question précédente, on a :
   - si n est pair, $\text{pgcd}\,(a, b) = 2(n+3)$
   - si n est impair, $\text{pgcd}\,(a, b) = n(n+3)$.

Exercice 12. Soient a, b deux entiers tels que $a \leq b$.
Notons $\delta = \text{pgcd}\,(a,b)$ (a et b étant non nuls, $\delta \neq 0$).
Par définition du PGCD, il existe $(a',b') \in \mathbb{N}^2$ tel que $a = \delta a'$ et $b = \delta b'$. De plus, comme $a \leq b$, on en déduit que $a' \leq b'$.
De plus, $\delta = \text{pgcd}\,(a,b) = \text{pgcd}\,(\delta a', \delta b') = \delta \text{pgcd}\,(a',b')$ par homogénéité du pgcd. Comme $\delta \neq 0$, on a $1 = \text{pgcd}\,(a',b')$.
Enfin, on sait également que $ab = \text{ppcm}\,(a,b) \times \text{pgcd}\,(a,b)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\text{ppcm}\,(a,b) = 21\text{pgcd}\,(a,b) &\iff \text{ppcm}\,(a,b) \times \text{pgcd}\,(a,b) = 21\text{pgcd}\,(a,b)^2 \quad (\text{car pgcd}\,(a,b) \neq 0) \\
&\iff ab = 21\text{pgcd}\,(a,b)^2 \\
&\iff \delta^2 a'b' = 21\delta^2 \\
&\iff a'b' = 21
\end{aligned}$$

Or, les diviseurs de 21 sont $\mathcal{D}(21) = \{1,3,7,21\}$.
Ainsi,

$$\text{ppcm}\,(a,b) = 21\text{pgcd}\,(a,b) \iff \quad \iff (a',b') = (1,21) \text{ ou } (a',b') = (3,7)$$

On obtient finalement que l'ensemble des couples solutions est $\{(\delta, 21\delta), \delta \in \mathbb{N}^*\} \cup \{(3\delta, 7\delta), \delta \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice 13. Soit $x, y \in \mathbb{N}^2$. On sait que $x|\text{ppcm}\,(x,y)$ et $y|\text{ppcm}\,(x,y)$.
Déterminons les diviseurs de 105.
On a $\mathcal{D}(105) = \{1,3,5,7,15,21,35,105\}$.
On a donc :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x+y = 56 \\ \text{ppcm}\,(x,y) = 105 \end{cases} &\iff \begin{cases} x,y \in \mathcal{D}(105) \\ x+y = 56 \end{cases} \\
&\iff (x,y) = (21,35) \text{ ou } (y,x) = (35,21)
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est :

$$\{(21,35),(35,21)\}.$$

3 Nombres premiers

Exercice 14. Soient $a, n \in \mathbb{N}^*$ et soit p un nombre premier. Supposons que $p|a^n$.
Si $a = 1$ alors, $a^n = 1$ et on obtient une contradiction avec le fait que p divise a^n car $p \geq 2$.
Ainsi, $a \neq 1$.
Considérons la décomposition de a en produit de nombres premiers : $a = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} q_i^{\alpha_i}$ où $r \in \mathbb{N}^*$, $q_1, ..., q_r$ des nombres premiers 2 à 2 distincts et $\alpha_1, ..., \alpha_r \in \mathbb{N}^*$.
On a alors : $a^n = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} q_i^{n\alpha_i}$. Par unicité de la décomposition en facteurs premiers, ceci est la décomposition de a^n.
Comme $p|a^n$, on en déduit qu'il existe $i_0 \in [\![1,r]\!]$ tel que $p = q_{i_0}$ et $\alpha_{i_0} \neq 0$. Donc $\alpha_{i_0} \geq 1$. Ainsi, $n\alpha_{i_0} \geq n$ donc finalement, on en déduit que $q_{i_0}^n | a^n$ c'est à dire $p^n|a^n$.

Exercice 15. On utilise la décomposition en éléments premiers.
On sait que $140 = 2^2 \times 5 \times 7$ et $28 = 2^2 \times 7$.
Soit $b \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\text{ppcm}\,(b,28) = 140 &\iff \exists \alpha_2, \alpha_5, \alpha_7 \in \mathbb{N}, b = 2^{\alpha_2} \times 5^{\alpha_5} \times 7^{\alpha_7} \text{ et} \\
&\qquad \max(2,\alpha_2) = 2,\ \max(0,\alpha_5) = 1,\ \max(1,\alpha_7) = 1 \\
&\iff \exists \alpha_2 \in \{0,1,2\}, \exists \alpha_7 \in \{0,1\}, b = 2^{\alpha_2} \times 5 \times 7^{\alpha_7} \\
&\iff b \in \{5,10,20,35,70,140\}
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est :

$$\{5,10,20,35,70,140\}.$$

Exercice 16. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Soit $k \in [\![2,n]\!]$, $n! + k$ est divisible par k donc n'est pas premier.
Ainsi, aucun des entiers compris entre $n! + 2$ et $n! + n$ n'est premier. Il y a donc entre deux nombres premiers des « trous » aussi grands que l'on veut.
La première occurrence de 5 entiers consécutifs non premiers est 24, 25, 26, 27, 28.

Exercice 17. Par l'absurde, supposons que l'ensemble des nombres premiers est fini : $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$.
Considérons alors l'entier $N = \left(\prod_{i=1}^{k} p_i\right) + 1$. Par la proposition précédente, N est divisible par un nombre premier.
Ainsi, il existe $l \in [\![1, k]\!]$ tel que p_l divise N. De plus, p_l divise le produit $\prod_{i=1}^{k} p_i$, donc p_l divise $N - \prod_{i=1}^{k} p_i$. Ainsi, $p_l | 1$.
Ce qui est impossible puisque $p_l \geq 2$.

Exercice 18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ sa décomposition en produit de facteurs premiers.

1. Soit $d \in \mathbb{N}^*$.
$$d | n \iff \exists (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r) \in [\![0, \alpha_1]\!] \times [\![0, \alpha_2]\!] \times ...[\![0, \alpha_r]\!],\ d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_r^{\beta_r}$$
Ainsi, pour former un diviseurs de n, pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, on choisit $\beta_k \in [\![0, \alpha_k]\!]$: donc on a $\alpha_k + 1$ possibilités.
Il y a donc $\prod_{k=1}^{r} (\alpha_k + 1)$ diviseurs de n.
2. <u>Réflexion :</u>
$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{(\beta_1,\beta_2,...,\beta_r) \in [\![0,\alpha_1]\!] \times [\![0,\alpha_2]\!] \times ...[\![0,\alpha_r]\!]} p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_r^{\beta_r} \\ &= \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} ... \sum_{\beta_r=0}^{\alpha_r} p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_r^{\beta_r} \\ &= \left(\sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} p_1^{\beta_1} \right) \times \left(\sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} p_2^{\beta_2} \right) \times ... \times \left(\sum_{\beta_r=0}^{\alpha_r} p_r^{\beta_r} \right) \end{aligned}$$
Or, pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, $p_k \neq 1$. Ainsi,
$$S(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \times \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \times ... \times \frac{p_r^{\alpha_r+1} - 1}{p_r - 1} = \prod_{k=1}^{r} \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}.$$
<u>Preuve :</u>
Montrons que :
$$\forall r \in \mathbb{N}^*,\ S\left(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}\right) = \prod_{k=1}^{r} \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}.$$
   - Pour $r = 1$, les diviseurs de $p_1^{\alpha_1}$ sont : $1, p_1, ..., p_1^{\alpha_1}$. Ainsi :
   $$S\left(p_1^{\alpha_1}\right) = \sum_{k=0}^{\alpha_1} p_1^k = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1}$$
   (somme des termes consécutifs d'une suite géométrique).
   La propriété est donc vérifiée pour $r = 1$.
   - Soit $r \in \mathbb{N}^*$, supposons que $S\left(p_1^{\alpha_1} ... p_r^{\alpha_r}\right) = \prod_{k=1}^{r} \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}$.
   Notons $d_1, ... d_N$ les diviseurs de $p_1^{\alpha_1} ... p_r^{\alpha_r}$.
   Ainsi l'ensemble des diviseurs de $p_1^{\alpha_1} ... p_r^{\alpha_r} p_{r+1}^{\alpha_{r+1}}$ est :
   $$\left\{ d_i p_{r+1}^k \mid i \in [\![1, N]\!], k \in [\![0, \alpha_{k+1}]\!] \right\}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
S(n) &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=0}^{\alpha_{r+1}} d_i p_{r+1}^k \\
&= \left(\sum_{i=1}^{N} d_i\right) \times \left(\sum_{k=0}^{\alpha_{r+1}} p_{r+1}^k\right) \\
&= S\left(p_1^{\alpha_1}...p_r^{\alpha_r}\right) \times \frac{p_{r+1}^{\alpha_{r+1}+1}-1}{p_{r+1}-1} \\
&= \left(\prod_{k=1}^{r} \frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}\right) \times \frac{p_{r+1}^{\alpha_{r+1}+1}-1}{p_{r+1}-1} \\
&= \prod_{k=1}^{r+1} \frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}
\end{aligned}$$

3. Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux.
   Soit $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ et $m = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_r^{\beta_s}$ leur décomposition respective en facteurs premiers avec $p_1, p_2, ..., p_r$, $q_1, q_2, ..., q_s$ deux à deux distincts. En effet, m et n sont premiers entre eux donc n'ont aucun facteur en commun.
   La décomposition de mn en facteurs premiers est donc : $mn = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r} q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_r^{\beta_s}$ (par unicité).
   D'après la question précédente :

$$S(mn) = \prod_{i=1}^{s} \frac{q_i^{\beta_i+1}-1}{q_i-1} \prod_{j=1}^{r} \frac{p_j^{\alpha_j+1}-1}{p_j-1} = S(m)S(n)$$

4 Dénombrement

Exercice 19. Posons $f : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathcal{P}(E) \\ x & \mapsto & \{x\} \end{array}$ et montrons que f est injective.
En effet, soient $x, y \in E$. Supposons que $\{x\} = \{y\}$. On a alors $x = y$.
Ainsi, f est injective.
Comme $\mathcal{P}(E)$ est fini, on en déduit que E est finie et on a : $\text{Card}\,(E) \leq \text{Card}\,(\mathcal{P})(E)$ car f est injective.

Exercice 20. Soient E et F deux ensembles, soit $f : E \to F$ une application.

1. Supposons que E est fini.
   Posons $g : \begin{array}{ccc} E & \to & f(E) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$.
   On a directement que g est surjective. Or, E est fini donc $f(E)$ est fini et $\text{Card}\,(f(E)) \leq \text{Card}\,(E)$.
   On a alors :

$$\begin{array}{llll}
\text{Card}\,(f(E)) = \text{Card}\,(E) & \text{ssi} & g \text{ est bijective} & \\
& \text{ssi} & g \text{ est injective} & \text{car } q \text{ surjective} \\
& \text{ssi} & f \text{ est injective} &
\end{array}$$

2. On suppose E fini et f surjective, alors $F = f(E)$. Ainsi, d'après la question précédente, F est fini et $\text{Card}\,(F) \leq \text{Card}\,(E)$ avec égalité si et seulement si f est injective. Or, on a déjà supposé f surjective. Ainsi, on a égalité si et seulement si f est bijective.
3. On suppose que f est injective et $f(E)$ fini. Alors l'application $g : \begin{array}{ccc} E & \to & f(E) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ est injective car f l'est et surjective. Elle est donc bijective. Ainsi, comme $f(E)$ est fini, E est fini et $\text{Card}\,(E) = \text{Card}\,(f(E))$.

Exercice 21. **Méthode** 1 **:** $\mathcal{P}(E)$ est la réunion disjointe des $\{X \in \mathcal{P}(E), \text{Card}\,(X) = k\}$ pour $k \in [\![0, n]\!]$. Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{X \in \mathcal{P}[E)} \text{Card}\,(X) &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{X \in \mathcal{P}(E) \\ \text{Card}\,(X)=k}} \text{Card}\,(X) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{X \in \mathcal{P}(E) \\ \text{Card}\,(X)=k}} k \\
&= \sum_{k=0}^{n} k \left(\sum_{\substack{X \in \mathcal{P}(E) \\ \text{Card}\,(X)=k}} 1 \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\text{Card}\,(\{X \in \mathcal{P}(E), \text{Card}\,(X) = k\}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

Soit $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} = \frac{n!}{(n-1-(k-1))!(k-1)!} = n\frac{(n-1)!}{(n-1-(k-1))!(k-1)!} = n\binom{n-1}{k-1}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sum_{X \in \mathcal{P}[E)} \text{Card}\,(X) &= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} \\
&= n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \\
&= n\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \\
&= n2^{n-1}
\end{aligned}$$

d'après le binôme de Newton.

Méthode 2 :

Notons $S = \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \text{Card}\,(X)$. On remarque tout d'abord que : $\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & C_E^X \end{array}$ est bijective.

Ainsi, $S = \sum_{Y \in \mathcal{P}(E)} \text{Card}\,(Y) = \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \text{Card}\,(C_E^X)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
2S &= \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \text{Card}\,(X) + \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \text{Card}\,(C_E^X) \\
&= \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \big(\text{Card}\,(X) + \text{Card}\,(C_E^X)\big) \\
&= \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \text{Card}\,(X \cup C_E^X) \\
&= \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \text{Card}\,(E) \quad \text{car } X \cup C_E^X = E \text{ et } C \text{ et } C_E^X \text{ sont disjoints} \\
&= \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} n \\
&= 2^n n
\end{aligned}$$

Ainsi, $S = n2^{n-1}$.

Exercice 22. Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$.

- Notons $S_1 = \sum_{(X,Y)\in P(E)^2} \text{Card}\,(X \cap Y)$. On remarque tout d'abord que : $\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & C_E^X \end{array}$ est bijective.

  Donc $S_1 = \sum_{(X,Y)\in P(E)^2} \text{Card}\,(C_E^X \cap Y)$.

  De même, $S_1 = \sum_{(X,Y)\in P(E)^2} \text{Card}\,(X \cap C_E^Y)$.

  Enfin, $S_1 = \sum_{(X,Y)\in P(E)^2} \text{Card}\,(C_E^X \cap C_E^Y)$.

  Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
4S_1 &= \sum_{(X,Y)\in P(E)^2} \text{Card}\,(X\cap Y) + \sum_{(X,Y)\in P(E)^2} \text{Card}\,(C_E^X \cap Y) + \sum_{(X,Y)\in P(E)^2} \text{Card}\,(X \cap C_E^Y) + \sum_{(X,Y)\in P(E)^2} \text{Card}\,(C_E^X \cap C_E^Y) \\
&= \sum_{(X,Y)\in P(E)^2} \big(\text{Card}\,(X\cap Y) + \text{Card}\,(C_E^X\cap Y) + \text{Card}\,(X\cap C_E^Y) + \text{Card}\,(C_E^X \cap C_E^Y)\big)
\end{aligned}$$

  Or, $(X\cap Y)$, $(C_E^X \cap Y)$, $(X\cap C_E^Y)$, $(C_E^X\cap C_E^Y)$ sont disjoints et $(X\cap Y)\cup(C_E^X\cap Y)\cup(X\cap C_E^Y)\cup(C_E^X\cap C_E^Y) = Y \cup C_E^Y = E$.

  Ainsi,

$$4S_1 = \sum_{(X,Y)\in P(E)^2} \text{Card}\,(E) = \sum_{X\in P(E)} \sum_{Y\in P(E)} n = n\left(\sum_{X\in P(E)} 1\right)\left(\sum_{Y\in P(E)} 1\right) = n2^n \times 2^n$$

  Ainsi, $S_1 = n2^{2n-2}$.

- Notons $S_2 = \sum_{(X,Y)\in P(E)^2} \text{Card}\,(X\cup Y)$. On a : $S_2 = \sum_{(X,Y)\in P(E)^2} (\text{Card}\,(X) + \text{Card}\,(Y) - \text{Card}\,(X\cap Y))$.

  Ainsi, en utilisant le résultat de la question précédente et de l'exercice précédent, on a :

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{X\in P(E)} \sum_{Y\in P(E)} (\text{Card}\,(X) + \text{Card}\,(Y) - \text{Card}\,(X\cap Y)) \\
&= \left(\sum_{X\in P(E)} \sum_{Y\in P(E)} \text{Card}\,(X)\right) + \left(\sum_{X\in P(E)} \sum_{Y\in P(E)} \text{Card}\,(Y)\right) - \left(\sum_{X\in P(E)} \sum_{Y\in P(E)} \text{Card}\,(X\cap Y)\right) \\
&= \left(\sum_{X\in P(E)} \text{Card}\,(X)\right)\left(\sum_{Y\in P(E)} 1\right) + \left(\sum_{X\in P(E)} 1\right)\left(\sum_{Y\in P(E)} \text{Card}\,(Y)\right) - \left(\sum_{X\in P(E)} \sum_{Y\in P(E)} \text{Card}\,(X\cap Y)\right) \\
&= n2^{n-1}\times 2^n + n2^{n-1}\times 2^n - n2^{2n-2} \\
&= n2^{2n-1} + n2^{2n-1} - n2^{2n-2} = n2^{2n-2}(2+2-1) \\
&= 3n2^{2n-2}
\end{aligned}$$

Exercice 23. 1. Choisir une partir de E ne contenant ni a ni b revient à choisir une partie de $E \setminus \{a,b\}$.
Or, $\text{Card}\,(E\setminus\{a,b\}) = n-2$. Ainsi, il y a 2^{n-2} parties de $E\setminus\{a,b\}$ donc 2^{n-2} parties ne contenant ni a ni b.

2. **Méthode 1 :**
   Il y a 2^n partie de E.
   Choisir une partie de E qui ne contient pas a revient à choisir une partie de $E\setminus\{a\}$. Or, $\text{Card}\,(E\setminus\{a\}) = n-1$.
   Ainsi, il y a 2^{n-1} parties qui en contiennent pas a.
   Notons E_1 l'ensemble des parties de E qui contiennent a et E_2 l'ensemble des parties qui ne contiennent pas a.
   On a : $E = E_1 \cup E_2$ et cette union est disjointe. Ainsi, $\text{Card}\,(E) = \text{Card}\,(E_1) + \text{Card}\,(E_2)$. Donc, il y a $2^n - 2^{n-1}$ parties qui contiennent a.
   Méthode 2 :
   Pour construire une partie X de E qui contient a, on décompose : $X = \{a\}\cup X'$ où $X' \in \mathcal{P}(E\setminus\{a\})$.
   - On choisit l'élément a de E : 1 choix.
   - On choisit une partie X' de $\mathcal{P}(E\setminus\{a\})$: 2^{n-1} possibilité.

   Donc au total : 2^{n-1} possibilités.

Exercice 24. 1. On a : $\text{Card}\,(\mathcal{F}(E,F)) = 5^4 = 625$.

2. Seule la valeur en 2 est imposée, il y a donc 3 possibilités pour $f(1)$, 3 possibilités pour $f(3)$ et 3 possibilités pour $f(4)$. Soit au total $5^3 = 125$ possibilités.

3. On a 5 possibilités pour $f(1)$, 5 possibilités pour $f(2)$, 5 possibilités pour $f(4)$. En revanche, $f(3) \in F \setminus \{f(1)\}$. Ainsi, une fois $f(1)$ choisi, on a 4 possibilités pour $f(1)$.
   Soit au total $4 \times 5^3 = 4 \times 125 = 500$ possibilités.
4. On a $\mathrm{Card}\,(E) \neq \mathrm{Card}\,(F)$, donc il n'existe pas d'application bijective de E dans F.
   Plus précisément, $\mathrm{Card}\,(E) < \mathrm{Card}\,(F)$ donc il n'existe aucune application surjective de E dans F.
   Interessons-nous au nombre d'injections de E dans F. D'après le cours, il y a $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ applications injectives de E dans F.
5. Si f est strictement croissante, alors $f(1)$ vaut 1 ou 2.
   - Si $f(1) = 2$ alors on a pour tout $k \in [\![2, 4]\!]$, $f(k) = k + 1$. Donc, il n'y a une seule application strictement croissante telle que $f(1) = 2$.
   - Si $f(1) = 1$, il y a trois positions possible pour une incrémentation de 1 et une application telle que : $\forall i \in [\![1, 4]\!]$, $f(i) = i$.

   Ainsi, il y a 5 applications strictement croissante de E dans F.

Exercice 25. 1. (a) On tire simultanément cinq boules parmi les 15, il y a donc $\binom{5}{15}$ tirages possibles (pas d'ordre).
   (b) On choisit simultanément :
   - 2 boules blanches parmi les 5 : $\binom{5}{2}$
   - 2 boules noires parmi les 10 : $\binom{10}{3}$

   Soit au total : $\binom{5}{2}\binom{10}{3}$ tirages correspondants.

2. (a) On choisit successivement et sans remise 5 boules parmi les 15 (ordre pris en compte et pas de répétition possible).
   Ainsi, il y $\dfrac{15!}{10!}$ tirages possibles.
   (b)
   - On commence par choisir 2 boules blanches parmi les 5 : $\binom{5}{2}$ possibilités
   - et 3 boules noires parmi les 10 : $\binom{10}{3}$ possibilités.
   - Il reste à ordonner ces différentes boules : 5 ! possibilités.

   Soit au total : $\binom{5}{2} \times \binom{10}{3} \times 5! = 120$ tirages.

Exercice 26. 1. Pour constituer un menu : on choisit :
   - une entrée : 4 possibilités
   - un plat : 3 possibilités
   - un dessert : 2 possibilités

   Soit au total, il y a donc $4 \times 3 \times 2 = 24$ menus possibles.
2. Un podium correspond à une 3-liste d'éléments distincts de l'ensemble des coureurs (pas de répétitions et l'ordre pris en compte). Ainsi, il y a $\dfrac{8!}{5!} = 8 \times 7 \times 6 = 336$ podiums possibles.
3. Un rangement correspond à une 5-liste $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$, où pour tout $k \in [\![1, 5]\!]$, $\alpha_k \in \{1, 2, 3\}$ désigne l'urne dans laquelle on a rangé la boule k. Ainsi, le nombre de rangement de ces 5 boules vaut 3^5.
4. (a) Un rangement des ces tomes correspond à une permutation de ces n tomes (bijection de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$). Il y en a $n!$.
   (b) Pour ranger les tomes 1 et 2 côte à côte et dans cet ordre :
   - on place le tome 1 à une position $k \in [\![1, n-1]\!]$, toutes sauf la dernière pour placer le tome 2 à sa droite.
   - On place le tome 2 : 1 possibilité
   - On place ensuite les $n - 2$ tomes restants dans les $n - 2$ places restantes : $(n - 2)!$ possibilités (nombre de façons de permuter ces $n - 2$ objets).

   Soit au total : $(n - 1) \times (n - 2)! = (n - 1)!$ rangements.
5. (a) Il y a 26^3 mots de trois lettres (26 lettres dans l'alphabet) (nombre de 3 listes d'éléments de l'alphabet) et 25^3 mots de 3 lettres ne contenant pas de e (25 possibilités pour chaque lettre). Par passage au complémentaire on obtient :$26^3 - 25^3$ mots de 3 lettres avec au moins un e.
   (b) Un mot de 3 lettres avec au plus un e a aucun e ou exactement un e (ces deux sous ensembles sont disjoints).

- Il y a 25^3 mots de 3 lettres sans e.
- Pour former un mot de 3 lettres avec exactement un e :
  - trois position pour la place du e : le mot s'écrit sous la forme e$\alpha\beta$ ou αeβ ou $\alpha\beta$e avec α, β deux lettres différentes de e.
  - Et $25^2 \times 1$ possibilités de mots avec un e à une place fixée.

  Soit au total : 3×25^2 mots contenant exactement un e.

Finalement, on obtient : $25^3 + 3 \times 25^2 = 17500$ mots de 3 lettres avec au plus un e.

6. (a) Un anagramme de MATHS peut être vu comme une permutation de ses 5 lettres qui sont bien toutes distinctes. Il y a donc 5! anagrammes de MATHS.

   (b) Les lettres ne jouent pas ici toutes le même rôle, puisque , permuter les deux O donne le même mot. Pour former une anagramme de MOTO, on choisit successivement :
   - 2 positions parmi les 4 possibles pour placer les deux O, soit $\binom{4}{2} = 6$.
   - 1 position parmi les 2 restantes pour placer le M, soit $\binom{2}{1} = 2$.
   - 1 position pour le T qui ne peut aller que sur la seule place restante, soit 1 possibilité.

   Par conséquent, il y a $6 \times 2 = 12$ anagrammes de MOTO.
   On peut évidemment retrouver ce résultat en commençant par placer le M ou le T.

   (c) On procède comme précédemment : Pour former une anagramme de TARATATA, on choisit successivement :
   - 4 position parmi les 8 possibles pour placer les quatre A, soit $\binom{8}{4}$.
   - 3 positions parmi les 5 restantes pour placer les trois T, soit $\binom{5}{3}$.
   - 1 position pour le R qui ne peut aller que sur la seule place restante, soit 1 possibilité.

   Par conséquent, il y a $\binom{8}{4} \times \binom{5}{3} = 280$ anagrammes de TARATATA.

Exercice 27. Soient $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $2 \leq k \leq n$.

1. (a) On tire simultanément k boules dans une urne qui en contient n (pas d'ordre et pas de répétitions). Il y a donc $\binom{n}{k}$ tirages possibles.

   (b) Soit $p \in [\![k, n]\!]$. La boule p étant fixée, on choisit les $k-1$ autres boules parmi les boules numérotées de 1 à $p-1$. Il y a $\binom{p-1}{k-1}$ possibilités pour ce choix : d'où $\binom{p-1}{k-1}$ tirages.

2. (a) On tire successivement et sans remise k boules dans un ensemble de n boules. Un tel tirage peut donc être représenté par une k-liste d'éléments distincts de l'ensemble des n boules. Il y a donc $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ tirages possibles.

   (b) Méthode 1 :
   - on a pioche la boule 1 en premier,
   - il y a $n-1$ possibilités pour la deuxième,
   - $n-2$ pour la troisième,
   - ...,
   - $n-(k+1)$ pour la $k-$ième.

   Au total, il y a ainsi $\dfrac{(n-1)!}{(n-k)!}$ tirages possibles.
   Méthode 2 :
   Une fois que l'on a pioché la boule 1 en premier, il reste $k-1$ tirages à effectuer dans un ensemble de $n-1$ boules (car pas de remise). Donc il y a : $\dfrac{(n-1)!}{(n-1-(k-1))!} = \dfrac{(n-1)!}{(n-k)!}$ possibilités.

3. (a) On tire successivement et avec remise k boules dans une urne qui en contient n. Un tel tirage correspond à une k-liste d'un ensemble à n éléments. Il y a donc n^k tirages possibles (ordre pris en compte et répétitions possibles).

   (b) - On commence par choisir deux numéros i et j entre 1 et n : $\binom{n}{2}$ possibilités.

- On compte le nombres de tirages où les numéros seuls les i et j apparaissent et où ces deux numéros apparaissent.
  Pour chacun des k tirages, on choisit une boule parmi les deux numéros i ou j : 2^k possibilité. Il faut exclure les deux séries de tirages qui ne donnent que des i ou que des j.
  Il y a donc $2^k - 2$ tirages où les numéros seuls les i et j apparaissent et où ces deux numéros apparaissent.

Soit au total : $\binom{n}{2}(2^k - 2) = n(n-1)(2^{k-1} - 1)$ tirages au total où deux numéros exactement apparaissent.

Exercice 28. Notons A l'ensemble des entiers pairs de E et B l'ensemble des entiers impairs.

1. Pour définir une partie de E de cardinal p contenant un et un seul entier pair :
   - on choisit un élément de A : $\binom{a}{1}$ possibilités.
   - on choisit $p-1$ élément de B : $\binom{n-a}{p-1}$ possibilités.

   D'où au total $a\binom{n-a}{p-1}$ possibilités.
2. On note $E_p = \{X \in \mathcal{P}(E), \mathrm{Card}\,(X) = p\}$.
   Notons C l'ensemble des parties de E_p contenant au moins un entier pair. $E_p \setminus C$ est l'ensemble des parties de E_p ne contenant aucune entier pair. Donc $E_p \setminus C$ est l'ensemble des parties de B de cardinal p.
   Or, $\mathrm{Card}\,(C) = \mathrm{Card}\,(E_p) - \mathrm{Card}\,(E_p \setminus C)$ et $\mathrm{Card}\,(E_p \setminus C) = \binom{n-a}{p}$ donc $\mathrm{Card}\,(C) = \binom{n}{p} - \binom{n-a}{p}$.

Exercice 29. Soit E un ensemble fini de cardinal n.

1. Notons $E_1 = \{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2 \mid X \subset Y\}$.
   Pour former un couple de E_1, on effectue le dénombrement suivant :
   - choix $Y \in \mathcal{P}(E)$ de cardinal $k \in [\![0,n]\!]$: $\binom{n}{k}$ possibilités.
   - choix de $X \in \mathcal{P}(Y)$: 2^k possibilités.

   Soit au total :
   $$\mathrm{Card}\,(E_1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n$$
   d'après le binôme de Newton.
2. Notons $E_2 = \{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2 \mid X \cap Y = \emptyset\}$.
   On remarque tout d'abord que $E_2 = \{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2 \mid X \subset C_E^Y\}$.
   Pour former un couple de E_2, on effectue le dénombrement suivant :
   - choix $Y \in \mathcal{P}(E)$ de cardinal $k \in [\![0,n]\!]$: $\binom{n}{k}$ possibilités.
   - choix de $X \in \mathcal{P}(C_E^Y)$: on a $\mathrm{Card}\,(C_E^Y) = \mathrm{Card}\,(E) - \mathrm{Card}\,(Y) = n-k$ donc 2^{n-k} possibilités.

   Soit au total :
   $$\mathrm{Card}\,(E_2) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} = 3^n$$
   d'après le binôme de Newton.
3. Notons $E_3 = \{(X,Y,Z) \in \mathcal{P}(E)^3 \mid X \subset Y \subset Z\}$.
   Pour former un triplet de E_2, on effectue le dénombrement suivant :
   - choix de $Z \in \mathcal{P}(E)$ de cardinal $k \in [\![0,n]\!]$: $\binom{n}{k}$ possibilités.
   - choix du couple $(X,Y) \in \mathcal{P}(Z)^2$ tel que $X \subset Y$: 3^k possibilités d'après la question 1

   Soit au total :
   $$\mathrm{Card}\,(E_3) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k = 4^n$$
   d'après le binôme de Newton.

Exercice 30. Une application strictement croissante est injective.
Ainsi, si $p > n$, il n'y a aucune application strictement croissante de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.
Supposons désormais $p \leq n$.
Pour construire une application de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$:

- On commence par choisir $f(\llbracket 1,p \rrbracket)$ qui est une partie de $\llbracket 1,n \rrbracket$ à p éléments : $\binom{n}{p}$ possibilités.
- A chacun de cet ensemble $f(\llbracket 1,p \rrbracket)$ correspond une seule application strictement croissante (celle qui vérifie $f(1) < f(2) < ... < f(p)$) : 1 possibilités

Soit au total $\binom{n}{p}$ applications strictement croissantes de $\llbracket 1,p \rrbracket$ dans $\llbracket 1,n \rrbracket$.

Exercice 31. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

- Nombre de partition en deux parties.
  Les partitions en deux éléments sont de la forme $\{A, C_E^A\}$ où $A \in \mathcal{P}(E) \setminus \{E, \emptyset\}$.
  Commençons par dénombrer l'ensemble : $E_1 = \{(A, C_E^A) \mid A \in \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset, E\}\}$.
  Pour définir un couple $(A, C_E^A) \in \mathcal{P}(E)^2$, il suffit de choisir $A \in \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset, E\}$: $2^n - 2$ possibilités.
  Ainsi, $\mathrm{Card}\,(E_1) = 2^n - 2$.
  Notons $E_2 = \{\{A, C_E^A\} \mid A \in \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset, E\}\}$. On a $\mathrm{Card}\,(E_2) = \dfrac{\mathrm{Card}\,(E_1)}{2!}$.
  En effet, il nous faut diviser par le nombre de permutations que l'on peut effectuer au sein de notre couple.
  Ainsi, $\mathrm{Card}\,(E_2) = 2^{n-1} - 1$ et il y a $2^{n-1} - 1$ partitions de E en deux parties.
- Nombre de partition en trois parties.
  Les partitions en trois éléments sont de la forme $\{A, B, C_{C_E^A}^B\}$ où $A \in \mathcal{P}(E) \setminus \{E, \emptyset\}$ et $B \in \mathcal{P}(C_E^A) \setminus \{C_E^A, \emptyset\}$.
  Commençons par dénombrer l'ensemble : $F_1 = \{(A, B, C_E^A) \mid A \in \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset, E\}, B \in \mathcal{P}(C_E^A) \setminus \{C_E^A, \emptyset\}\}$.
  Pour former un triplet, on effectue le dénombrement suivant :
  - choix de $A \in \mathcal{P}(E)$ de cardinal $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$: $\binom{n}{k}$ possibilités.
  - choix de $B \in \mathcal{P}(C_E^A) \setminus \{C_E^A, \emptyset\}$: on a $\mathrm{Card}\,(C_E^A) = \mathrm{Card}\,(E) - \mathrm{Card}\,(A) = n - k$. Ainsi on a : $2^{n-k} - 2$ choix possibles pour B.
  - Une fois A et B fixées, $C_{C_E^A}^B$ est entièrement déterminé : 1 possibilité

  Soit au total :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Card}\,(F_1) &= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (2^{n-k} - 2) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2^{n-k} - 2) \right) - (2^n - 2) - (2^0 - 2) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} \right) - 2 \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \right) - 2^n + 3 \\
&= 3^n - 2 \times 2^n - 2^n + 3 \quad \text{d'après le binôme de Newton} \\
&= 3^n - 3 \times 2^n + 3
\end{aligned}$$

  Notons $F_2 = \{\{A, B, C_E^A\} \mid A \in \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset, E\}, B \in \mathcal{P}(C_E^A) \setminus \{C_E^A, \emptyset\}\}$. On a $\mathrm{Card}\,(F_2) = \dfrac{\mathrm{Card}\,(F_1)}{3!}$. En effet, il nous faut diviser par le nombre de permutations que l'on peut effectuer au sein de notre triplet.
  Ainsi, $\mathrm{Card}\,(F_2) = \dfrac{3^n - 3 \times 2^n + 3}{6} = \dfrac{1}{2}3^{n-1} - 2^{n-1} + \dfrac{1}{2}$ et il y a $\dfrac{1}{2}3^{n-1} - 2^{n-1} + \dfrac{1}{2}$ partitions de E en trois parties.