Chapitre 9 : Systèmes linéaires

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n et p sont deux éléments de $\mathbb{N}^*$.

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition

- On appelle **équation linéaire à** p **inconnues** une équation de la forme $a_1x_1 + \cdots + a_px_p = b$, d'inconnues $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{K}$ et où $a_1, \ldots, a_p, b \in \mathbb{K}$.
- On appelle **système linéaire à** n **équations et** p **inconnues** tout système de la forme :

$$(\mathscr{S}) \left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{array} \right.$$

  Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, les $x_j \in \mathbb{K}$ sont les **inconnues** du système, les $a_{i,j}$ sont les **coefficients** du système, et les b_i forment le **second membre** du système. On appelle **solution de** $(\mathscr{S})$ tout p-uplet $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ vérifiant les n-équations de $(\mathscr{S})$.
- On appelle **système homogène** associé au système $(\mathscr{S})$ le système $(\mathscr{S}_0)$ obtenu en remplaçant les seconds membres $b_1, \ldots, b_n$ par des 0.

Remarque : Une équation linéaire à 2 inconnues de la forme $ax + by = c$ peut s'interpréter comme l'équation d'une droite dans $\mathbb{R}^2$ si $(a,b) \neq (0,0)$.
De même, une équation linéaire à 3 inconnues de la forme $ax + by + cz = d$ s'interprète comme l'équation d'un plan dans $\mathbb{R}^3$ si $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.

1.2 Ecriture matricielle du système

Définition

Une matrice de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un tableau à n lignes et p colonnes, d'éléments de $\mathbb{K}$, appelés coefficients de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Ses coefficients sont indexés par deux indices (i,j) où i est l'indice de ligne et j l'indice de colonne.
On note encore $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$.

Définition

Soit $\mathscr{S}$ le système linéaire introduit dans la première définition.

- On appelle **matrice du système** ($\mathscr{S}$) la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

à n lignes et p colonnes.

- On appelle **colonne des seconds membres de $\mathscr{S}$** la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

- On appelle **matrice augmentée** du système ($\mathscr{S}$) le tableau :

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} & b_n \end{array}\right).$$

Remarque :

- Il s'agit juste d'une réécriture du système sous la forme d'un tableau, sans les inconnues.
- La matrice augmentée du système homogène $\mathscr{S}_0$ associée à $\mathscr{S}$ se déduit de celle du système $\mathscr{S}$ en remplaçant la dernière colonne par des 0.

Exemple : Considérons le système $\left\{\begin{array}{l} -x+3y+2z=2 \\ 3x-2y+5z=4 \end{array}\right.$. Sa matrice augmentée est $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & 4 \end{array}\right)$.

1.3 Opérations élémentaires

Définition

On appelle **opération élémentaire** sur les lignes d'un système (ou d'une matrice) l'une des trois opérations suivantes :

- Multiplication d'une ligne L_i par un scalaire λ non nul ($\lambda \in \mathbb{K}^*$) ce que l'on note $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
- Échange des lignes L_i et L_j avec $i \neq j$ ce que l'on note $L_i \leftrightarrow L_j$;
- Ajout de $\beta \dot{L}_j$ à L_i avec $i \neq j$ ce que l'on note $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$ où $\beta \in \mathbb{K}$.

Exemple :

- Dans le système $\left\{\begin{array}{l} -x+3y+2z=2 \\ 3x-2y+5z=4 \end{array}\right.$, le résultat de $L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1$ est $\left\{\begin{array}{l} -x+3y+2z=2 \\ 7y+11z=10 \end{array}\right.$.
- Dans la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, le résultat de $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$ est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 9 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque :

- On précisera systématiquement et à chaque étape les opérations élémentaires qu'on a effectué pour passé d'un système linéaire à un autre.
- On réalise généralement une suite finie d'opérations élémentaires. L'ordre dans lequel on effectue ces opérations est essentiel.

Proposition

Si ($\mathscr{S}'$) se déduit de ($\mathscr{S}$) par une suite finie d'opérations élémentaires, alors ($\mathscr{S}$) se déduit de ($\mathscr{S}'$) par une suite finie d'opérations élémentaires.

Démonstration. Quitte à faire une récurrence sur le nombre d'opérations élémentaires, il suffit de prouver la propriété lorsque l'on passe de ($\mathscr{S}$) à ($\mathscr{S}'$) par une seule opération élémentaire.

- Si l'on passe de $(\mathscr{S})$ à $(\mathscr{S}')$ en effectuant $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on passe de $(\mathscr{S}')$ à $(\mathscr{S})$ en effectuant $L_i \leftarrow \dfrac{1}{\lambda} L_i$.
- Si l'on passe de $(\mathscr{S})$ à $(\mathscr{S}')$ en effectuant $L_i \leftrightarrow L_j$ avec $i \neq j \in [\![1,n]\!]$, on passe de $\mathscr{S}'$ à $\mathscr{S}$ en effectuant $L_i \leftrightarrow L_j$.
- Si l'on passe de $(\mathscr{S})$ à $(\mathscr{S}')$ en effectuant $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$ avec $i \neq j$ et $\beta \in \mathbb{K}$, on passe de $(\mathscr{S}')$ à $(\mathscr{S})$ en effectuant $L_i \leftarrow L_i - \beta L_j$.

$\square$

Définition

- On dit que deux systèmes $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'$ sont équivalents si l'on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.
- On dit que deux matrices A et A' sont équivalentes par lignes si elles se déduisent l'une de l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes. On le note $A \underset{L}{\sim} A'$.

Proposition

Deux systèmes équivalents ont même ensemble de solutions.

Démonstration. Soient (S), (S') deux systèmes équivalents.
Quitte à faire une récurrence sur le nombre d'opérations élémentaires, il suffit de prouver la propriété lorsque l'on passe de $(\mathscr{S})$ à $(\mathscr{S}')$ par une seule opération élémentaire (on appliquera ensuite ce résultat autant de fois que nécessaire pour passer de $\mathscr{S}$ à $\mathscr{S}'$).
Notons E l'ensemble des solutions de $(\mathscr{S})$ et E' celui de $(\mathscr{S}')$.
On a clairement $E \subset E'$.
Or, d'après la proposition précédente, on peut passer de $(\mathscr{S}')$ à $(\mathscr{S})$ en appliquant une opération élémentaire. On a donc aussi $E' \subset E$.
Donc $E = E'$. $\square$

On va donc utiliser les opérations élémentaires pour transformer un système $\mathscr{S}$ en un système $\mathscr{S}'$ plus simple à résoudre.

Proposition

Si l'on passe d'un système $\mathscr{S}$ à $\mathscr{S}'$ par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes, la matrice augmentée de $\mathscr{S}'$ s'obtient en effectuant la même suite d'opérations élémentaires sur la matrice augmentée de $\mathscr{S}$.

Remarque : Ce résultat justifie la présentation matricielle pour la résolution d'un système linéaire.

2 Echelonnement et algorithme du pivot de Gauss-Jordan

Définition

- Une matrice est dite **échelonnée par lignes** si elle vérifie les deux propriétés suivantes :
  1. Si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi ;
  2. À partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non nulle, le premier coefficient non nul à partir de la gauche est situé à droite (strictement) du premier coefficient non nul de la ligne précédente.

  On appelle **pivot** le premier coefficient non nul de chaque ligne non nulle.
- Une matrice échelonnée par lignes est dites **échelonnée réduite par lignes** si elle est nulle, ou si tous ses pivots sont égaux à 1 et sont les seuls éléments non nuls de leur colonne.
- Un système est dit **échelonné par lignes** (resp. **échelonné réduit par lignes**) si sa matrice des coefficients l'est.

Forme générale d'une matrice échelonnée par lignes E et d'une matrice échelonnée réduite par lignes R.

$$E = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \oplus & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \oplus & * & * & * & * & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \ddots & * & * & * & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \oplus & * & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & * & 0 & * & 0 & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & * & \vdots & * & * & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & * & * & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & 1 & * & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

où $\oplus$ sont des réels non nuls correspondant aux pivots et $*$ sont des réels quelconques.
E est échelonnée par lignes et R est échelonnée réduite par lignes.

Remarque : Un schéma en « escalier » illustre la notion de matrice échelonnée.

Exemple :

- La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée par lignes. Ses pivots sont 1, 2 et 7. Elle n'est pas échelonnée réduite.
- La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ n'est pas échelonnée par lignes.
- La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée réduite par lignes.

Proposition Algorithme du pivot de Gauss-Jordan

Toute matrice est équivalente par lignes à une unique matrice échelonnée réduite par lignes.

Démonstration. L'unicité est admise. Démontrons l'existence.
Soit $A_(a_{i,j})_{i\in[\![1,n]\!],[\![1,p]\!]}$ une matrice à n lignes et p colonnes.
Posons, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$:

$\mathscr{P}(j)$: « la matrice obtenue à partir de A en ne gardant que les j ères colonnes est équivalente par ligne à une matrice échelonnée réduite par lignes »

- Pour $j = 1$: notons $C_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ la 1ère colonne de A.
  - Si C_1 est nulle, il n'y a rien à faire. C_1 est déjà échelonnée réduite par lignes.
  - Sinon, il existe $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $c_k \neq 0$. On effectue alors $L_k \leftrightarrow L_1$.
    Ainsi :
    $$C_1 \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} c'_1 \\ \vdots \\ c'_n \end{pmatrix}$$
    avec $c'_1 \neq 0$. On a $c'_1 = a_k$, $c'_k = a_1$ et $\forall l \in [\![1,n]\!] \setminus \{k\}$, $c'_l = a_l$.
    Puis on effectue : $L_1 \leftarrow \dfrac{1}{c'_1} L_1$ et on obtient :
    $$C_1 \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 \\ c'_2 \\ \vdots \\ c'_n \end{pmatrix}$$
    Enfin, on effectue $\forall i \in [\![2,n]\!]$, $L_i \leftarrow L_i - c'_i L_1$. Ainsi :
    $$C_1 \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Or, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée réduite par lignes.

Ainsi, $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

- Soit $j \in [\![1, p-1]\!]$. Supposons $\mathscr{P}(j)$ vraie.
  Notons A_j (resp.A_{j+1}) la matrice obtenue à partir de A en ne conservant que les j (resp. $j+1$) premières colonnes.
  Par hypothèse de récurrence, il existe une suite finie d'opérations élémentaires qui transforme A_j en R_j matrice échelonnée réduite par lignes (à n lignes et j colonnes).
  On effectue cette même suite d'opérations élémentaires sur A_{j+1}.
  On obtient :

$$A_{j+1} \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{c|c} & c_1 \\ R_j & \vdots \\ & c_n \end{array}\right)$$

  Notons i_0 l'indice de la ligne du dernier pivot de R_j.

  - si $i_0 = n$ alors $\left(\begin{array}{c|c} & c_1 \\ R_j & \vdots \\ & c_n \end{array}\right)$ est échelonnée réduite par lignes
  - si : $\forall i \in [\![i_0+1, n]\!],\ c_i = 0$ alors $\left(\begin{array}{c|c} & c_1 \\ R_j & \vdots \\ & c_n \end{array}\right)$ est échelonnée par lignes
  - sinon, il existe $k \in [\![i_0+1, n]\!]$ tel que $c_k \neq 0$.

    Posons $R_j = \begin{pmatrix} & N_j & \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

    On effectue alors : $L_k \leftrightarrow L_{i_0+1}$.
    Ainsi :

$$A_{j+1} \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} & & & c'_1 \\ & N_j & & \vdots \\ & & & c'_{i_0} \\ 0 & \cdots & 0 & c'_{i_0+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_n \end{array}\right)$$

    avec $c'_{i_0+1} \neq 0$. On a $c'_{i_0+1} = c_k$, $c'_k = c_{i_0+1}$ et $\forall l \in [\![1, n]\!] \setminus \{i_0+1, k\},\ c'_l = c_l$.
    R_j est inchangée car au delà strictement de la i_0-ème ligne, toutes ses lignes sont nulles.
    Puis on effectue : $L_{i_0+1} \leftarrow \dfrac{1}{c'_{i_0+1}} L'_{i_0+1}$.
    Ainsi :

$$A_{j+1} \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} & & & c'_1 \\ & N_j & & \vdots \\ & & & c'_{i_0} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & c'_{i_0+2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c'_n \end{array}\right)$$

    Enfin, on effectue : $\forall i \in [\![1, n]\!] \setminus \{i_{0+1}\},\ L_i \leftarrow L_i - c'_i L_{i_0+1}$. N_j est inchangée car dans la ligne i_0+1, les j premiers coefficients sont nuls.

Ainsi :

$$A_{j+1} \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & N_j & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Cette dernière matrice est bien échelonnée réduite par lignes.

Ainsi, $\mathscr{P}(j+1)$ est vraie.

- On a donc prouvé par récurrence que pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, $\mathscr{P}(j)$ est vraie.

En particulier, $\mathscr{P}(p)$ est vraie ce qui donne le résultat souhaité. □

Exemple :

-

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array}$$

-

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array}$$

3 Ensemble des solutions d'un système linéaire

Définition

Un système est dit compatible s'il admet au moins une solution et sera dit incompatible dans le cas contraire.

Exemple :

- Résoudre un système de deux équations à deux inconnues $\left\{\begin{array}{l} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{array}\right.$ avec $(a,b) \neq (0,0)$ et $(a',b)' \neq (0,0)$ peut être interprété géométriquement comme la recherche de l'intersection de deux droites D_1 et D_2 du plan. L'ensemble des solutions d'un tel système est soit une droite (lorsque D_1 et D_2 sont confondues), soit un point (lorsque D_1 et D_2 sont sécantes) ou soit l'ensemble vide (si D_1 et D_2 sont parallèles).

- De même, on peut interpréter géométriquement un système de deux équations à trois inconnues $\left\{\begin{array}{l} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{array}\right.$ avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ et $(a',b',c') \neq (0,0,0)$ comme l'intersection de deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ de l'espace. L'ensemble des solutions d'un tel système est soit vide (si les deux plans sont parallèles non confondus), soit une droite (si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont non parallèles non confondus), soit un plan (si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont confondus). Le système est donc incompatible dans le premier cas, compatible dans les deux cas suivants.

Soit (S) un système linéaire de n équations à p inconnues de matrice augmentée $(A|B)$.
Il existe une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes qui transforme A en une matrice échelonnée réduite par lignes A'.

La même suite d'opérations élémentaires transforme B en une colonne $B' = \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$ donc transforme la matrice augmentée $(A|B)$ en $(A'|B')$ et le système (S'), de matrice augmentée $(A'|B')$ est équivalent à (S).

Notons r le nombre de pivots de la matrice A' et (k, j_k) la position des pivots dans la matrice A' avec $k \in [\![1, r]\!]$.

Définition

Avec les notations précédentes, les x_{j_k} avec $k \in [\![1, r]\!]$ sont appelés inconnues principales de (S) (ou de (S')). Les autres inconnues sont appelées inconnues secondaires ou paramètres.

Exemple : La matrice associée au système $\begin{cases} x + y + z = 7 \\ \quad\quad -3z = -2 \end{cases}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$
Cette dernière est échelonnée par lignes. On peut donc dire que x et z sont des inconnues principales et y est une inconnue secondaire.
Remarque : Avec les notations précédentes, les $n - r$ dernières équations de (S') sont :

$$\begin{cases} 0 = b'_{r+1} \\ \vdots \\ 0 = b'_n \end{cases}$$

Ces équations ne font plus intervenir les inconnues et ne sont pas toujours vérifiées.
Elles expriment les conditions portant sur le second membre pour qu'il existe des solutions.

Définition

Avec les notations précédentes, les équations : $\forall k \in [\![r+1, n]\!],\ b'_k = 0$ sont appelées relations de compatibilité.

Remarque : Le système est incompatible si ces relations ne sont pas vérifiées.
Si celles-ci sont vérifiées alors chaque choix des paramètres définit une unique solution. Ainsi, le système sera compatible si et seulement si les relations de compatibilités sont vérifiées.

Définition

Avec les notations précédentes, l'entier r (c'est à dire le nombre de pivots de l'unique matrice échelonnée réduite par lignes équivalentes pas lignes à A) est appelé rang du système (S).

Exemple : Reprenons la matrice de l'exemple précédente : $\begin{cases} x + y + z = 7 \\ \quad\quad -3z = -2 \end{cases}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$
Cette matrice est de rang 2.
Remarque : Avec les notations précédentes, si (S) est de rang r, on a :

- $r \leq n$ et $r \leq p$.
- Le nombre de relation de compatibilité est égal à $n - r$.
- Le nombre de paramètres (ou d'inconnues secondaires) est égal à $p - r$.

Exemple :

1.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + 2z = 5 & \\ y + z = 2 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -2y - 3z = -4 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x + z = 3 & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ y + z = 2 & \\ -z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x + z = 3 & \\ y + z = 2 & \\ z = 0 & L_3 \leftarrow -L_3 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = 3 & L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ y = 2 & L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ z = 0 & \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\{(3,2,0)\}$.

2.

$$\begin{cases} x-\ \ 3y+z=1 \\ 2x+\ \ \ y+z=-1 \\ x+11y-z=5 \end{cases} \iff \begin{cases} x-\ \ 3y+\ \ z=1 \\ \ \ \ \ 7y-\ \ z=-3 & L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ \ \ 14y-2z=4 & L_3 \leftarrow L_3-L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x-\ \ 3y+\ \ z=1 \\ \ \ \ \ y-\frac{1}{7}z=-\frac{3}{7} & L_2 \leftarrow \frac{1}{7}L_2 \\ 14y-\ 2z=4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \quad +\frac{4}{7}z \ =-\frac{2}{7} & L_1 \leftarrow L_1+3L_2 \\ \quad y \ -\frac{1}{7}z \ =-\frac{3}{7} \\ \qquad\quad 0 \ = 10 & L_3 \leftarrow L_3+14L_2 \end{cases}$$

Donc le système n'admet pas de solution.

3.

$$\begin{cases} -x+\ \ y+\ \ z=1 \\ 2x+\ \ y+2z=0 \\ x+2y+3z=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x-\ \ y-\ \ z=-1 & L_1 \leftarrow -L_1 \\ 2x+\ \ y+2z=0 \\ x+2y+3z=1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x-\ \ y-\ \ z=-1 \\ \ \ 3y+4z=2 & L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ \ \ 3y+4z=2 & L_3 \leftarrow L_3-L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x-\ \ y-\ \ z=-1 \\ \ \ \ y+\frac{4}{3}z=\frac{2}{3} & L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2 \\ \ \ 3y+\ 4z=2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \quad +\frac{1}{3}z \ =-\frac{1}{3} & L_1 \leftarrow L_1+L_2 \\ \quad y \ +\frac{4}{3}z \ =\frac{2}{3} \\ \qquad\quad 0 \ =0 & L_3 \leftarrow L_3-3L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}z \\ y=\frac{2}{3}-\frac{4}{3}z \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions du système est : $\left\{\left(\dfrac{-1-z}{3},\dfrac{2-4z}{3},z\right),\ z\in\mathbb{R}\right\}$.

Proposition

Soit (S) un système linéaire à n équations, p inconnues et de rang r.

- Si $n=p=r$ alors le système est dit de Cramer. Il admet une unique solution.
- Si $p>r$ et $n=r$ alors le système admet une infinité de solutions.
- Si $p=r$ et $r<n$ alors le système admet une unique ou aucune solution.
- Si $p>r$ et $n>r$ alors le système admet aucune ou une infinité de solutions.

Démonstration.

- Si $n=r=p$: le système n'a aucune relation de compatibilité donc l'ensemble des solutions est non vide. De plus, il n'admet aucune inconnues secondaires.
  Le système admet donc une unique solution.
- Si $p>r$ et $n=r$: le système n'admet aucune relation de compatibilité donc l'ensemble des solutions est non vide. De plus, le système admet $p-r>0$ inconnues secondaires.
  Ainsi il admet une infinité de solutions. On exprime ces solutions en fonction des inconnues secondaires.
- Si $p=r$ et $r<n$: le système admet $n-r$ relations de compatibilité et aucune inconnue secondaire. Ainsi :
  - si ces relations ne sont pas vérifiées, le système n'admet aucune solution.
  - si ces relations sont vérifiées, le système admet une unique solution (0 inconnues secondaires).
- Si $r<n$ et $r<n$. Le système admet $n-r$ relations de compatibilité et $p-r$ inconnues secondaires. Ainsi :
  - si ces relations ne sont pas vérifiées, le système n'admet aucune solution.
  - si ces relations sont vérifiées, le système admet une infinité de solutions.

□

Exemple :

1.

$$\begin{cases}2x+\ \ y-3z=a\\3x+2y+\ \ z=a+3\\7x+4y-5z=2a+5\end{cases}\iff\begin{cases}x+\frac12y-\frac32z=\frac a2 & L_1\leftarrow\frac12L_1\\3x+2y+\ \ z=a+3\\7x+4y-5z=2a+5\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x+\frac12y-\ \frac32z=\frac a2\\ \frac12y+\frac{11}{2}z=-\frac12a+3 & L_2\leftarrow L_2-3L_1\\ \frac12y+\frac{11}{2}z=-\frac32a+5 & L_3\leftarrow L_3-7L_1\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x+\frac12y-\ \frac32z=\frac a2\\ y+11z=-a+6 & L_2\leftarrow 2L_2\\ \frac12y+\frac{11}{2}z=-\frac32a+5\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x\qquad -7z=a-3 & L_1\leftarrow L_1-\frac12L_2\\ \quad y\ +11z=-a+6\\ \qquad\quad 0=-a+2 & L_3\leftarrow L_3-\frac12L_2\end{cases}$$

On a une relation de compatibilité qui est $0=-a+2$.

- Si $a\neq 2$, le système n'admet aucune solution.
- Si $a=2$, on a :

$$\begin{cases}2x+\ \ y-3z=a\\3x+2y+\ \ z=a+3\\7x+4y-5z=2a+5\end{cases}\iff\begin{cases}x\qquad -7z=-1\\ \quad y\ +11z=4\\ \qquad\quad 0=0\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x=-1-7z\\ y=4-11z\\ 0=0\end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions du système est $\{(-1+7z,4-11z,z),z\in\mathbb{R}\}$

2.

$$(S)\ \begin{cases}mx+\ \ y+\ \ z+t=1\\ x+my+\ \ z+t=m\\ x+\ \ y+mz+t=m+1\end{cases}\iff\begin{cases}x+my+\ \ z+t=m & L_1\leftrightarrow L_2\\ mx+\ \ y+\ \ z+t=1\\ x+\ \ y+mz+t=m+1\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x+\qquad my+\qquad z+\qquad t=m\\ (1-m^2)y+(1-m)z+(1-m)t=1-m^2 & L_2\leftarrow L_2-mL_1\\ (1-m)y+(m-1)z\qquad\quad =1 & L_3\leftarrow L_3-L_1\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x+\qquad my+\qquad z+\qquad t=m\\ (1-m)y+(m-1)z\qquad\quad =1 & L_2\leftrightarrow L_3\\ (1-m^2)y+(1-m)z+(1-m)t=1-m^2\end{cases}$$

- **Si** $m\neq 1$:

$$(S)\iff\begin{cases}x+\qquad my+\qquad z+\qquad t=m\\ y-\qquad z\qquad =\frac{1}{1-m} & L_2\leftrightarrow\frac{L_2}{1-m}\\ (1-m^2)y+(1-m)z+(1-m)t=1-m^2\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x\ +\qquad (1+m)z+\qquad t=-\frac{m^2}{1-m} & L_1\leftarrow L_1-mL_2\\ y-\qquad z\qquad =\frac{1}{1-m}\\ (1-m)(2+m)z+(1-m)t=-m(1+m) & L_3\leftarrow L_3-(1-m^2)L_2\end{cases}$$

  - Si de plus $m\neq -2$, on a :

$$(S)\iff\begin{cases}x\ +(1+m)z+\qquad t=-\frac{m^2}{1-m}\\ y-\qquad z\qquad =\frac{1}{1-m}\\ z+\frac{1}{2+m}t=-\frac{m(1+m)}{(1-m)(2+m)} & L_3\leftarrow\frac{L_3}{(1-m)(2+m)}\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x\ \ +\frac{1}{2+m}t=\frac{m}{(1-m)(2+m)} & L_1\leftarrow L_1-(1+m)L_3\\ y\ +\frac{1}{2+m}t=\frac{2-m^2}{(1-m)(2+m))} & L_2\leftarrow L_2+L_3\\ z+\frac{1}{2+m}t=-\frac{m(1+m)}{(1-m)(2+m)}\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x=\frac{m}{(1-m)(2+m)}-\frac{1}{2+m}t\\ y=\frac{2-m^2}{(1-m)(2+m))}-\frac{1}{2+m}t\\ z=-\frac{m(1+m)}{(1-m)(2+m)}-\frac{1}{2+m}t\end{cases}$$

Ainsi, si $m \neq 1$ et $m \neq -2$, l'ensemble des solutions est

$$\left\{\left(\frac{m}{(1-m)(2+m)}-\frac{1}{2+m}t, \frac{2-m^2}{(1-m)(2+m))}-\frac{1}{2+m}t, \frac{-m(1+m)}{(1-m)(2+m)}-\frac{1}{2+m}t\right), t \in \mathbb{R}\right\}.$$

- Si $m=-2$, on a :

$$\begin{cases} mx+ & y+ & z+t=1 \\ x+my+ & z+t=m \\ x+ & y+mz+t=m+1 \end{cases} \iff \begin{cases} x & -z+ & t=-\frac{4}{3} \\ y-z & & =\frac{1}{3} \\ & & 3t=-2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & -z+t=-\frac{4}{3} \\ y-z & =\frac{1}{3} \\ & t=-\frac{2}{3} \quad L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & -z & =-\frac{2}{3} \quad L_1 \leftarrow L_1-L_3 \\ y-z & =\frac{1}{3} \\ & t=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

Ainsi, si $m=-2$, l'ensemble des solutions est

$$\left\{\left(z-\frac{2}{3}, z+\frac{1}{3}, z, -\frac{2}{3}\right), z \in \mathbb{R}\right\}$$

- Si $m=1$, on a :

$$\begin{cases} mx+ & y+ & z+t=1 \\ x+my+ & z+t=m \\ x+ & y+mz+t=m+1 \end{cases} \iff \begin{cases} x & +y & +z & +t & =1 \\ & & & 0 & =1 \\ & & & 0 & =0 \end{cases}$$

Le système n'admet donc aucune solution.

Finalement, l'ensemble des solutions est :

- $\left\{\left(\frac{m}{(1-m)(2+m)}-\frac{1}{2+m}t, \frac{2-m^2}{(1-m)(2+m))}-\frac{1}{2+m}t, \frac{-m(1+m)}{(1-m)(2+m)}-\frac{1}{2+m}t\right), t \in \mathbb{R}\right\}$ si $m \notin \{1,-2\}$,
- $\left\{\left(z-\frac{2}{3}, z+\frac{1}{3}, z, -\frac{2}{3}\right), z \in \mathbb{R}\right\}$ si $m=-2$
- $\emptyset$ si $m=1$

Corollaire

Soit (S) un système linéaire homogène.
Alors (S) admet une unique solution ou une infinité de solutions.
Plus précisément, si (S) a n équations, p inconnues et est de rang r, alors on a :

- si $r<p$ alors (S) admet une infinité de solutions.
- Si $r=p$ alors (S) admet une unique solution.

Proposition

Soit $(\mathscr{S})$ un système linéaire compatible. Si $z \in \mathbb{K}^p$ est une solution particulière de $(\mathscr{S})$ et si E_0 désigne l'ensemble des solutions du système homogène associé à (S) alors l'ensemble (E) des solutions de (S) est :

$$E=\{z+y_0, y_0 \in E_0\}$$

Démonstration. On considère le système $\mathscr{S}: \begin{cases} a_{1,1}x_1+\cdots+a_{1,p}x_p=b_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1+\cdots+a_{n,p}x_p=b_n \end{cases}$ et $z=(z_1,\ldots,z_p) \in \mathbb{K}^p$ une solution particulière de $(\mathscr{S})$.

Soit $y=(y_1,\dots,y_p)\in\mathbb{K}^p$.
Alors :

$$\begin{aligned}
y\in E \quad &\iff \quad \begin{cases} a_{1,1}y_1+\dots+a_{1,p}y_p=b_1\\ \vdots\\ a_{n,1}y_1+\dots+a_{n,p}y_p=b_n\end{cases}\\
&\iff \quad \begin{cases} a_{1,1}y_1+\dots+a_{1,p}y_p=a_{1,1}z_1+\dots+a_{1,p}z_p\\ \vdots\\ a_{n,1}y_1+\dots+a_{n,p}y_p=a_{n,1}z_1+\dots+a_{n,p}z_p\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} a_{1,1}(y_1-z_1)+\dots+a_{1,p}(y_p-z_p)=b_1\\ \vdots\\ a_{n,1}(y_1-z_1)+\dots+a_{n,p}(y_p-z_p)=b_n\end{cases}\\
&\iff y-z\in E_0\\
&\iff \exists y_0\in E_0,\ y-z=y_0\\
&\iff \exists y_0\in E_0,\ y=z+y_0
\end{aligned}$$

Ce qui permet de prouver l'égalité des ensembles. □

Exemple :

1.

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x+\ \ y+\ \ z=0\\ 2x+\ \ y+2z=0\\ x+2y+\ \ z\end{cases} \quad &\iff \quad \begin{cases} x+y+z=0\\ \quad -y\quad\ =0 & L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ \quad\ \ y\quad\ =0 & L_3\leftarrow L_3-L_1\end{cases}\\
&\iff \quad \begin{cases} x+y+z=0\\ \quad y\quad\ =0\end{cases}\\
&\iff \quad \begin{cases} x\quad +z=0 & L_1\leftarrow L_1-L_2\\ \ \ y\quad\ =0\end{cases}
\end{aligned}$$

   Ainsi, ce système admet une infinité de solutions : $\{(-z,0,z),z\in\mathbb{R}\}$.

2. On vérifie que $\begin{cases}1+1+1=3\\2+1+2=5\\1+2+1=4\end{cases}$ Ainsi, $(1,1,1)$ est solution de (S).

   L'ensemble des solutions de $(\mathscr{S})$ est donc $\{(1-z,1,1+z),z\in\mathbb{R}\}$.