Corrigé de la feuille d'exercices 24

1 Généralités

Exercice 1. $C = (A \cup B) \setminus \{A \cap B\}$. Comme $A \cap B \subset A \cup B$, on a $P(C) = P(A \cup B) - P(A \cap B)$.
Donc $P(C) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$.

Exercice 2. L'univers est $\Omega = \{1, ..., 6\}^6$. On le munit de la probabilité uniforme P ce qui correspond au fait que les dés sont équilibrés.
Notons A l'événement ≪ toutes les faces exhibent un chiffre distinct. ≫
A est l'ensemble des 6-listes d'éléments distincts de $[\![1, 6]\!]$. Ainsi, $\text{Card}\,(A) = 6!$. On a $\text{Card}\,(\Omega) = 6^6$.
Ainsi, $P(A) = \dfrac{6!}{6^6} = \dfrac{5}{324}$.

Exercice 3.
L'univers Ω est : ≪ l'ensemble des parties de 4 chaussures parmi l'ensemble des 20 chaussures possibles ≫. On muni Ω de la probabilité uniforme car on choisit au hasard. On a $\text{Card}\,(\Omega) = \dbinom{20}{4}$.

1. Notons E_1 : ≪ Obtenir deux paires de chaussures ≫
   Pour réaliser E_1, on :
   - choisit deux paires parmi les 10 possibles : $\dbinom{10}{2}$ choix.
   - prend les 2 chaussures de chaque paire : $\dbinom{2}{2}\dbinom{2}{2}$ choix.

   On obtient ainsi : $\text{Card}\,(E_1) = \dbinom{10}{2} \times 1 \times 1$.

   Finalement, on obtient : $P(E_1) = \dfrac{\dbinom{10}{2}}{\dbinom{20}{4}} = \dfrac{3}{323}$.
2. Notons E_2 : ≪ Obtenir au moins une paire de chaussures ≫
   On commence par calculer $P(\overline{E_2})$.
   $\overline{E_2}$: ≪ n'obtenir aucune paire de chaussure ≫
   Pour réaliser $\overline{E_2}$:
   - on choisit 4 paires de chaussures : $\dbinom{10}{4}$ choix.
   - Pour chacune de ces paires, on choisit une chaussure parmi les 2 : $\dbinom{2}{1} \times \dbinom{2}{1} \times \dbinom{2}{1} \times \dbinom{2}{1}$.

     On obtient ainsi : $\text{Card}\,(\overline{E_2}) = 2^4\dbinom{10}{4}$. Ainsi, $P(\overline{E_2}) = \dfrac{\text{Card}\,(\overline{E_2})}{\text{Card}\,(\Omega)} = \dfrac{224}{323}$.

     On en déduit ainsi que $P(E_2) = 1 - P(\overline{E_2}) = \dfrac{99}{323}$.
3. Notons E_3 : ≪ Obtenir une et une seule paire de chaussures ≫
   On a $E_2 = E_1 \cup E_3$. Or, E_1 et E_3 sont incompatibles. Ainsi, $P(E_2) = P(E_1) + P(E_3)$.
   On obtient alors $P(E_3) = P(E_2) - P(E_1) = \dfrac{99}{323} - \dfrac{3}{323} = \dfrac{96}{323}$.

Exercice 4. Notons A : ≪ Obtenir des numéros de la même parité ≫,
B : ≪ Obtenir que des numéros pairs ≫,
C : ≪ Obtenir que des numéros impairs ≫.
B et C sont des événements incompatibles et on a $A = B \cup C$.

1. L'univers Ω est ici l'ensemble des parties à 2 éléments de $[\![1, 9]\!]$. On muni cet univers de la probabilité uniforme (car on tire au hasard).
   On a B : ≪ l'ensemble des parties à 2 éléments de $\{2, 4, 6, 8\}$ ≫
   C : ≪ l'ensemble des parties à 2 éléments de $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ ≫.
   Ainsi, on a : $\text{Card}\,(\Omega) = \dbinom{9}{2}$, $\text{Card}\,(B) = \dbinom{4}{2}$ et $\text{Card}\,(C) = \dbinom{5}{2}$.

On obtient alors : $P(B) = \dfrac{\text{Card}\,(B)}{\text{Card}\,(\Omega)} = \dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}} = \dfrac{6}{36}$ et $P(C) = \dfrac{\text{Card}\,(C)}{\text{Card}\,(\Omega)} = \dfrac{\binom{5}{2}}{\binom{9}{2}} = \dfrac{10}{36}$.

Finalement, on obtient : $P(A) = P(B) + P(C) = \dfrac{6+10}{36} = \dfrac{4}{9}$.

2. L'univers Ω est l'ensemble des 2-listes sans répétitions de $[\![1, 9]\!]$.
On a B : « l'ensemble des 2-listes sans répétitions de $\{2, 4, 6, 8\}$ »
C : « l'ensemble des 2-listes sans répétitions de $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ »
Ainsi, on a : $\text{Card}\,(\Omega) = 9 \times 8 = 72$, $\text{Card}\,(B) = 4 \times 3 = 12$ et $\text{Card}\,(C) = 5 \times 4 = 20$.
On obtient alors : $P(B) = \dfrac{\text{Card}\,(B)}{\text{Card}\,(\Omega)} = \dfrac{12}{72}$ et $P(C) = \dfrac{\text{Card}\,(C)}{\text{Card}\,(\Omega)} = \dfrac{20}{72}$.
Finalement, on obtient : $P(A) = P(B) + P(C) = \dfrac{20+12}{72} = \dfrac{4}{9}$.

3. L'univers Ω est l'ensemble des 2-listes de $[\![1, 9]\!]$.
On a B : « l'ensemble des 2-listes de $\{2, 4, 6, 8\}$ »
C : « l'ensemble des 2-listes de $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ »
Ainsi, on a : $\text{Card}\,(\Omega) = 9^2 = 81$, $\text{Card}\,(B) = 4^2 = 16$ et $\text{Card}\,(C) = 5^2 = 25$.
On obtient alors : $P(B) = \dfrac{\text{Card}\,(B)}{\text{Card}\,(\Omega)} = \dfrac{25}{81}$ et $P(C) = \dfrac{\text{Card}\,(C)}{\text{Card}\,(\Omega)} = \dfrac{16}{81}$.
Finalement, on obtient : $P(A) = P(B) + P(C) = \dfrac{25+16}{81} = \dfrac{41}{81}$.

Exercice 5. 1. L'univers Ω associé à cette expérience est : « l'ensemble des n-uplets d'éléments de $[\![1, M]\!]$.
Ω est muni de la probabilité uniforme. On a $\text{Card}\,(\Omega) = M^n$.
Notons A : « aucun jeton n'est tiré plus d'une fois »
Ainsi, A correspond à l'ensemble des n listes d'éléments distincts de $[\![1, M]\!]$.
On a donc $\text{Card}\,(A) = M(M-1)...(M-n+1)$.
On obtient ainsi : $P(A) = \dfrac{M(M-1)...(M-n+1)}{M^n} = \left(1 - \dfrac{1}{M}\right)...\left(1 - \dfrac{(n-1)}{M}\right)$.

2. Les jetons sont ici remplacés par les étudiants et les numéros par les 365 jours de l'année.
Notons B : « au moins deux élèves ont leur anniversaire le même jour ». On a $\overline{B}$: « aucun étudiant a son anniversaire le même jour qu'un autre ».
D'après la question précédente, $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{365}\right)...\left(1 - \dfrac{(n-1)}{365}\right)$.

Exercice 6. 1. L'univers Ω associé à cette expérience aléatoire est l'ensemble des parties à 3 boules parmi les 15 possibles. On munit Ω de la probabilité uniforme. On a $\text{Card}\,(\Omega) = \binom{15}{3} = 455$.

(a) Pour réaliser A, on choisit :

- la seule boule noire de l'urne : $\binom{1}{1} = 1$ choix.
- une boule blanche : $\binom{5}{1}$ choix
- une boule rouge : $\binom{9}{1}$ choix.

Ainsi, $\text{Card}\,(A) = 1 \times 5 \times 9 = 45$. On obtient finalement : $P(A) = \dfrac{45}{455} = \dfrac{9}{91}$.

(b) On décompose B en fonction du nombre de boules rouges. $B = B_1 \cup B_2$ où B_1 : « Piocher exactement une boule rouge, une boule noire », B_2 « Piocher exactement une boule noire et deux boules rouges ».
B_1 et B_2 sont incompatibles. Ainsi, $P(B) = P(B_1) + P(B_2)$.
Or, $B_1 = A$.
De plus, pour réaliser B_2, on choisit :

- la seule boule noire : $\binom{1}{1} = 1$ choix possible.
- deux boules rouges : $\binom{9}{2} = 36$ choix possibles.

Finalement, $P(B) = \dfrac{\text{Card}\,(B_1) + \text{Card}\,(B_2)}{\text{Card}\,(\Omega)} = \dfrac{45+36}{455} = \dfrac{81}{455}$.

(c) Il n'y a qu'une boule noire donc pour piocher 3 boules de la même couleur, les trois boules sont soit rouges ou blanches. Notons C_1 : « Piocher 3 boules blanches » et C_2 : « Piocher 3 boules rouges ».

Or, $P(C_1) = \dfrac{\text{Card}\,(C_1)}{\text{Card}\,(\Omega)} = \dfrac{\dbinom{5}{3}}{\binom{15}{3}} = \dfrac{10}{455}$ et $P(C_2) = \dfrac{\text{Card}\,(C_2)}{\text{Card}\,(\Omega)} = \dfrac{\binom{9}{3}}{\binom{15}{3}} = \dfrac{84}{455}$.

Or, C_1 et C_2 sont incompatibles donc $P(C) = P(C_1) + P(C_2) = \dfrac{10}{455} + \dfrac{84}{455} = \dfrac{94}{455}$.

2. L'univers Ω associé à cette expérience aléatoire est l'ensemble des 3-listes de boules de l'ensemble des 15 boules disponibles dans l'urne. On munit toujours Ω de la probabilité uniforme. On a $\text{Card}\,(\Omega) = 15^3 = 3375$.

(a) Pour réaliser A, on choisit :

- la seule boule noire : 1 choix.
- une boule blanche : 5 choix
- une boule rouge : 9 choix.
- un ordre pour ces trois boules : $3! = 6$ choix possibles.

Ainsi, $\text{Card}\,(A) = 1 \times 5 \times 9 \times 6 = 45 \times 6 = 270$. On obtient finalement : $P(A) = \dfrac{270}{3375} = \dfrac{2}{25}$.

(b) On reprend les notations de la question précédente.
On a toujours $B_1 = A$.
De plus, pour réaliser B_2, on choisit :

- la seule boule noire : 1 choix possible.
- deux boules rouges : 9^2 choix possibles.
- la position de la boule noire dans la 3-liste : 3 possibilités.

Finalement, $P(B) = \dfrac{\text{Card}\,(B_1) + \text{Card}\,(B_2)}{\text{Card}\,(\Omega)} = \dfrac{270 + 3 \times 81}{3375} = \dfrac{270 + 243}{3375} = \dfrac{513}{3375} = \dfrac{19}{125}$.

(c) On reprend les notations de la question précédente et on note C_3 : « Piocher 3 boules noires ».
On a : $P(C_1) = \dfrac{\text{Card}\,(C_1)}{\text{Card}\,(\Omega)} = \dfrac{5^3}{15^3} = \dfrac{125}{3375}$, $P(C_2) = \dfrac{\text{Card}\,(C_2)}{\text{Card}\,(\Omega)} = \dfrac{9^3}{15^3} = \dfrac{729}{3375}$ et $P(C_3) = \dfrac{1^3}{15^3} = \dfrac{1}{3375}$.
Or, C_1, C_2 et C_3 sont deux à deux incompatibles
donc $P(C) = P(C_1) + P(C_2) + P(C_3) = \dfrac{125 + 729 + 1}{3375} = \dfrac{855}{3375} = \dfrac{19}{75}$

Exercice 7. 1. (a) Pour réaliser A_k :

- On choisit le boule k : 1 possibilité
- On choisit les $p-1$ autres boules parmi celles ayant un numéro inférieur ou égal à $k-1$: $\dbinom{k-1}{p-1}$ possibilités.

Ainsi, on a $\text{Card}\,(A_k) = \dbinom{k-1}{p-1}$ donc $P(A_k) = \dfrac{\dbinom{k-1}{p-1}}{\dbinom{n}{p}}$.

(b) $(A_k)_{k \in [\![p,n]\!]}$ forme un système complet d'événements. Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} P(A_k) = \sum_{k=p}^{n} \frac{\dbinom{k-1}{p-1}}{\dbinom{n}{p}} = 1$.

Donc : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}$.

2. Pour tout $k \in [\![p,n]\!]$, on note A_k : « Le maximum des boules piochées est k ».
E : « Piocher au p ième tirage un numéro supérieur au $p-1$ précédents. »
On a $E \cap A_k$: « La p-ième boule a le plus grand numéro et ce numéro vaut k ».
Pour réaliser $E \cap A_k$, on choisit :

- la 1-ère boule dans $[\![1, k-1]\!]$: $k-1$ possibilités
- la 2-ème boule dans $[\![1, k-1]\!]$ et différente de la 1ère : $k-2$ possibilités
- $\vdots$
- la $p-1$-ème boule : $k-p+1$ possibilités
- la p-ième boule vaut k : 1 possibilité

Ainsi, on a : $\text{Card}\,(E \cap A_k) = \dfrac{(k-1)!}{(k-p)!}$.

D'où : $P(E \cap A_k) = \dfrac{\dfrac{(k-1)!}{(k-p)!}}{\dfrac{n!}{(n-p)!}} = \dfrac{(n-p)!(k-1)!}{(k-p)!n!}$.

De plus, $(A_k)_{k \in [\![p,n]\!]}$ forme un système complet d'événements.
Donc on a :

$$\begin{aligned}
P(E) &= \sum_{k=p}^{n} P(E \cap A_k) \\
&= \sum_{k=p}^{n} \frac{(n-p)!(k-1)!}{(k-p)!n!} \\
&= \frac{(n-p)!}{n!} \sum_{k=p}^{n} \frac{(k-1)!}{(k-p)!} \\
&= \frac{(n-p)!(p-1)!}{n!} \sum_{k=p}^{n} \frac{(k-1)!}{(k-p)!(p-1)!} \\
&= \frac{(n-p)!(p-1)!}{n!} \sum_{k=p}^{n} \binom{k-1}{p-1} \\
&= \frac{(n-p)!(p-1)!}{n!} \times \binom{n}{p} \\
&= \frac{(n-p)!(p-1)!}{n!} \times \frac{n!}{p!(n-p)!} \\
&= \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

2 Formules fondamentales

2.1 Formule des probabilités composées

Exercice 8. Pour $i \in \{1, 2\}$, on note N_i, l'événement : « Piocher une boule noire au i-ème tirage ».
On obtient :

$$P(N_1 \cap N_2) = P(N_1)P_{N_1}(N_2) = \frac{2}{6} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{7}$$

car avant le second tirage, l'urne contient 4 boules blanches et 3 boules noires.

Exercice 9. Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, notons B_i l'événement « on pioche une boule blanche au i-ième tirage »
On a $N = B_1 \cap B_2 \cap \overline{B_3}$.

$$P(N) = P(B_1)P(B_2|B_1)P(\overline{B}_3|B_1 \cap B_2) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{5}.$$

Exercice 10.
Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note A_k « La porte s'ouvre exactement à la k-ième tentative ».
On a $A_k = \overline{A_1} \cap ... \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k$.
Par la formule des probabilités composées, on a :

$$\begin{aligned}
P(A_k) &= P(\overline{A_1} \cap ... \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k) \\
&= P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2})...P_{\overline{A_1} \cap ... \cap \overline{A_{k-1}}}(A_k) \\
&= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times ... \times \frac{n-k+2}{n-k} \times \frac{1}{n-k+1} \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Cette probabilité ne dépend donc pas de k.
Remarque : cela était prévisible car cela revient à tirer au sort le numéro de la tentative à laquelle la porte s'ouvre. Or, il y a n clés donc n tentatives possibles. Ainsi, pour une tentative donnée, la probabilité que la porte s'ouvre à cette tentative vaut $\dfrac{1}{n}$.

Exercice 11. 1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'événement : « Trouver la nourriture à l'étape k exactement. »
On a $P(A_1) = \frac{1}{3}$.
Soit $k \geq 2$.
On a : $A_k = \overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k$ Par la formule des probabilités composées, on a :

$$\begin{aligned} P(A_k) &= P(\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k) \\ &= P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1}) \ldots P(A_k|\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}}) \end{aligned}$$

Comme le rat n'a aucun souvenir des étapes précédentes, il a à chaque étape deux chances sur trois d'avoir une décharge électrique. Ainsi :

$$\forall p \in [\![1, k-2]\!],\ P(\overline{A_{p+1}}|\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_p}) = \frac{2}{3}$$

Et :

$$P(A_k|\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}}) = \frac{1}{3}$$

Donc :

$$\begin{aligned} P(A_k) &= \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{2^{k-1}}{3^k}. \end{aligned}$$

(cette formule reste valable pour $k = 1$).

2. On a toujours $P(A_1) = \frac{1}{3}$.
Soit $k \geq 2$. On reprend le calcul précédent.
Comme le rat se souvient de l'expérience précédente, on a :

$$\forall p \in [\![1, k-2]\!],\ P(\overline{A_{p+1}}|\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_p}) = \frac{1}{2}$$

(puisque l'un des couloirs est éliminé).
Et :

$$P(A_k|\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}}) = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, on obtient alors :

$$\begin{aligned} P(A_k) &= P(\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_k) \\ &= P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1}) \ldots P(A_k|\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}}) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \cdots \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2^{k-2} \times 3}. \end{aligned}$$

3. Comme le rat se souvient des deux expériences précédentes, il réussit en au plus 3 essais.
On a donc :

$$P(A_1) = \frac{1}{3}$$

$$P(A_2) = P(A_2|\overline{A_1})P(\overline{A_1}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P(A_3) = P(A_3|\overline{A_1} \cap \overline{A_2})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})P(\overline{A_1}) = 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Et :

$$\forall k > 3,\ P(A_k) = 0.$$

2.2 Formule des probabilités totales

Exercice 12. On définit les événements suivants :

- C_1 : « le composant est produit par la machine M_1 »
- C_2 : « le composant est produit par la machine M_2 »
- C_3 : « le composant est produit par la machine M_3 »

- D : « le composant est défectueux ».

Les données de l'exercice permettent d'écrire :

$$P(C_1)=\frac{50}{100},\quad P(C_2)=\frac{30}{100},\quad P(C_3)=\frac{20}{100},\quad P_{C_1}(D)=\frac{2}{100},\quad P_{C_2}(D)=\frac{3}{100},\quad P_{C_3}(D)=\frac{5}{100}$$

1. (C_1,C_2,C_3) forme une système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on obtient :

$$\begin{aligned}P(D)&=P_{C_1}(D)P(C_1)+P_{C_2}(D)P(C_2)+P_{C_3}(D)P(C_3)\\&=\frac{2}{100}\times\frac{50}{100}+\frac{3}{100}\times\frac{30}{100}+\frac{5}{100}\times\frac{20}{100}\\&=\frac{10+9+10}{1000}\\&=\frac{29}{1000}\end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned}P(D\cap C_1)&=P(C_1)\times P_{C_1}(D)\\&=\frac{50}{100}\times\frac{2}{100}\\&=\frac{10}{1000}=\frac{1}{100}\end{aligned}$$

Remarque : $P(C_1)\times P(D)\neq P(D\cap C_1)$. Ainsi, les événements D et C_1 ne sont pas indépendants.

3. Par définition des probabilités conditionnelles :

$$\begin{aligned}P_D(C_1)&=\frac{P(D\cap C_1)}{P(D)}\\&=\frac{\frac{1}{100}}{\frac{29}{1000}}\\&=\frac{10}{29}\end{aligned}$$

On aurait également utiliser la formule de Bayes : $P_D(C_1)=\dfrac{P_{C_1}(D)P(C_1)}{P(D)}$.

Exercice 13. 1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Déterminons une relation de récurrence entre p_{n-1} et p_n.
$(M_{n-1},\overline{M_{n-1}})$ forme un système complet d'événements.
On applique la formule des probabilités totales :

$$P(M_n)=P(M_n|M_{n-1})P(M_{n-1})+P(M_n|\overline{M}_{n-1})P(\overline{M}_{n-1})$$

Or, on sait que $P(M_n|M_{n-1})=a$ et $P(\overline{M}_n|\overline{M}_{n-1})=b$. d'où $P(M_n|\overline{M}_{n-1})=1-b$.
On obtient donc :

$$p_n=ap_{n-1}+(1-b)(1-p_{n-1})=(a+b-1)p_{n-1}+1-b$$

La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite arithmético-géométrique.
Soit $\alpha\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\alpha=(a+b-1)\alpha+1-b\quad&\Longleftrightarrow\quad(a+b-2)\alpha=b-1\\&\Longleftrightarrow\quad\alpha=\frac{b-1}{a+b-2}=\frac{1-b}{2-a-b}\qquad\text{car } 2-a-b\neq 0\end{aligned}$$

Posons $\alpha=\dfrac{b-1}{a+b-2}$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $v_n=p_n-\alpha$.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}v_n&=p_n-\alpha\\&=(a+b-1)p_{n-1}+1-b-((a+b-1)\alpha+1-b)\\&=(a+b-1)(p_{n-1}-\alpha)\\&=(a+b-1)v_{n-1}\end{aligned}$$

Ainsi, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $a+b-1$.
De plus, $v_0 = p_0 - \dfrac{b-1}{a+b-2} = 1 - \dfrac{b-1}{a+b-2} = \dfrac{a-1}{a+b-2} = \dfrac{1-a}{2-a-b}$.
Donc on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0(a+b-1)^n = \frac{1-a}{2-a-b}(a+b-1)^n.$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \frac{1-b}{2-a-b} + \frac{1-a}{2-a-b}(a+b-1)^n$$

2. Comme $a+b-1 \in]-1,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(a+b-1)^n = 0$. La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{1-b}{2-a-b}$.

Exercice 14.
Pour $k \in [\![0,2]\!]$, on note A_k : « on transfère k boules blanches de l'urne B dans l'urne A »

1. On a $P(A_0) = \dfrac{\binom{8}{2}}{\binom{12}{2}} = \dfrac{44}{33}$, $P(A_1) = \dfrac{\binom{8}{1}\binom{4}{1}}{\binom{12}{2}} = \dfrac{16}{33}$ et $P(A_2) = \dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{12}{2}} = \dfrac{1}{11}$.
De plus, on note B l'événement « on pioche une boule blanche de l'urne A ».
$P(B|A_0) = \dfrac{6}{13}$, $P(B|A_1) = \dfrac{7}{13}$ et $P(B|A_2) = \dfrac{8}{13}$.
Or, (A_0, A_1, A_2) forme un système complet d'événements. Ainsi, par la formule des probabilités totales, on a :

$$P(B) = P(B|A_0)P(A_0) + P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) = \frac{220}{429}.$$

2. C : « l'une au moins des boules transférées est blanche ».
On a : $C = A_1 \cup A_2$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
P(C|B) = P(A_1 \cup A_2|B) &= P(A_1|B) + P(A_2|B) \text{ car } A_1 \text{ et } A_2 \text{ sont incompatibles}\\
&= \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)} + \frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B)}\\
&= \frac{\frac{16}{33}\times\frac{7}{13}}{\frac{220}{429}} + \frac{\frac{1}{11}\times\frac{8}{13}}{\frac{220}{429}}\\
&= \frac{28}{55} + \frac{6}{55}\\
&= \frac{34}{55}
\end{aligned}$$

.

Exercice 15. 1. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note A_i : « la boule tirée au r-ième tirage est la boule numéro i ».
$(A_1, ..., A_n)$ forme un système complet d'événements. Ainsi, la formule des probabilités totales nous donne :

$$P(E_r) = \sum_{i=1}^{r} P(E_r|A_i)P(A_i)$$

Soit $i \in [\![1,r]\!]$. $P(A_i) = \dfrac{1}{n}$.
De plus, sachant A_i réalisée, E_r est réalisé si au cours des $r-1$ premiers tirages, on pioche des nombres compris entre i et n. Or, à un tirage donné, la probabilité de piocher une boule ayant un numéro compris entre i et n vaut $\dfrac{n-i+1}{n}$.
De plus, les différents tirages sont indépendants. Ainsi, on obtient : $P(E_r|A_i) = \left(\dfrac{n-i+1}{n}\right)^{r-1}$.
Finalement, on trouve :

$$P(E_r) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n-i+1}{n}\right)^{r-1} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j}{n}\right)^{r-1} = \frac{1}{n^r}\sum_{j=1}^{n} j^{r-1}$$

2. Pour $r = 2$, on a :

$$P(E_r) = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$P(E_r) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j}{n}\right)^{r-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right)$$

où $f : x \to x^{r-1}$.
Donc d'après le résultat sur les sommes de Riemann, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} P(E_r) = \int_0^1 t^{r-1}dt = \left[\frac{t^r}{r}\right]_0^1 = \frac{1}{r}.$$

On peut vérifier que cette limite est valable pour $r = 2$ à l'aide de la question précédente.

Exercice 16. 1. Soit $n \in \mathbb{N}$, (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n + b_n + c_n = 1.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, par la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} a_{n+1} = P(A_{n+1}) &= P(A_{n+1}|A_n)P(A_n) + P(A_{n+1}|B_n)P(B_n) + P(A_{n+1}|C_n)P(C_n) \\ &= \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6}b_n + \frac{1}{6}c_n. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} b_{n+1} = P(B_{n+1}) &= P(B_{n+1}|A_n)P(A_n) + P(B_{n+1}|B_n)P(B_n) + P(B_{n+1}|C_n)P(C_n) \\ &= \frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{6}c_n. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} c_{n+1} = P(C_{n+1}) &= P(C_{n+1}|A_n)P(A_n) + P(C_{n+1}|B_n)P(B_n) + P(C_{n+1}|C_n)P(C_n) \\ &= \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{6}b_n + \frac{2}{3}c_n. \end{aligned}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} a_{n+1} - b_{n+1} &= \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6}b_n + \frac{1}{6}c_n - \left(\frac{1}{6}a_n + \frac{1}{6}b_n + \frac{2}{3}c_n\right) \\ &= \frac{1}{2}(a_n - b_n) \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} a_{n+1} - c_{n+1} &= \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6}b_n + \frac{1}{6}c_n - \left(\frac{1}{6}a_n + \frac{1}{6}b_n + \frac{2}{3}c_n\right) \\ &= \frac{1}{2}(a_n - c_n) \end{aligned}$$

4. D'après la question précédente, on sait que les suite $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n - c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont géométriques de raison $\frac{1}{2}$.
De plus, sait que $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_n - b_n = \dfrac{1}{2^n}$ et $a_n - c_n = \dfrac{1}{2^n}$.
De plus d'après la question 1 : $a_n + b_n + c_n = 1$.
Or,

$$\left\{\begin{array}{l} a_n - b_n = \dfrac{1}{2^n} \\ a_n - c_n = \dfrac{1}{2^n} \\ a_n + b_n + c_n = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} b_n = a_n - \dfrac{1}{2^n} \\ c_n = a_n - \dfrac{1}{2^n} \\ 3a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} + 1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} b_n = \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right) \\ c_n = \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right) \\ a_n = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2^{n-1}} + 1\right) \end{array}\right.$$

Ainsi, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{n-1}} + 1\right) \qquad b_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \qquad c_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

Exercice 17.

1. Notons I_2 : « l'espèce a totalement disparu à l'issue de la deuxième génération »
   Pour $k \in [\![0,3]\!]$, on note E_k :« la deuxième génération se compose de k individus ».
   On a ainsi : $P(E_0) = \frac{1}{8}$, $P(E_1) = \frac{3}{8}$, $P(E_2) = \frac{3}{8}$ et $P(E_3) = \frac{1}{8}$.
   De plus, sachant E_k réalisé, l'espèce disparait totalement à l'issue de la deuxième génération si et seulement si chacun de ces k individus n'a aucun descendant.
   Pour un individu donné, la probabilité de n'avoir aucun descendant est de $\frac{1}{8}$.
   De plus, le nombre de descendant est indépendant d'un individu à l'autre.
   Ainsi, $P(I_2|E_k) = \left(\frac{1}{8}\right)^k = x_1^k$.
   (E_0, E_1, E_2, E_3) forme un système complet d'événements. Ainsi, d'après la formule des probabilités totales, on trouve :

$$\begin{aligned}
x_2 = P(I_2) &= P(E_0)P(I_2|E_0) + P(E_1)P(I_2|E_1) + P(E_2)P(I_2|E_2) + P(E_3)P(I_2|E_3) \\
&= \frac{1}{8} \times 1 + \frac{3}{8}x_1 + \frac{3}{8}x_1^2 + \frac{1}{8}x_1^3 \\
&= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{8} + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}\right)^3 \\
&= \frac{729}{4096}
\end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, notons I_n :« l'espèce disparait totalement à l'issue de la n-ième génération ».
   On discute en fonction du nombre d'individus à la deuxième génération.
   Soit $k \in [\![0,2]\!]$. Sachant E_k réalisée, la probabilité que l'espèce ait totalement disparue à l'issue de la $(n+1)$-ième génération est la probabilité que les lignées de chacun de ces k individus disparaissent à l'issue de n générations.
   Au départ, l'espèce se compose d'un seul individu. Ainsi, la probabilité que tous les descendants d'un individu disparaissent à l'issue de n générations est x_n.
   Par indépendance, on obtient : $P(I_{n+1}|E_k) = x_n^k$.
   Par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
x_2 = P(I_2) &= P(E_0)P(I_2|E_0) + P(E_1)P(I_2|E_1) + P(E_2)P(I_2|E_2) + P(E_3)P(I_2|E_3) \\
&= \frac{1}{8} \times 1 + \frac{3}{8}x_n + \frac{3}{8}x_n^2 + \frac{1}{8}x_n^3
\end{aligned}$$

3. Posons $\begin{array}{rccl} f: & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{8} + \frac{3}{8}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{8}x^3 = \frac{1}{8}(1+x)^3 \end{array}$.
   Déterminons les points fixes de f : soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f(x) = x \quad &\iff \quad \frac{1}{8} + \frac{3}{8}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{8}x^3 = x \\
&\iff \quad \frac{1}{8} - \frac{5}{8}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{8}x^3 = 0
\end{aligned}$$

   On remarque que 1 est racine évidente du polynôme $\frac{1}{8} - \frac{5}{8}X + \frac{3}{8}X^2 + \frac{1}{8}X^3$.
   On a alors : $\frac{1}{8} - \frac{5}{8}X + \frac{3}{8}X^2 + \frac{1}{8}X^3 = \frac{1}{8}(X-1)(X^2 - 4X - 1)$.
   Ainsi, on a :

$$f(x) = x \quad \iff \quad x = 1 \text{ ou } x = -2 + \sqrt{5} \text{ ou } x = -2 \pm \sqrt{5}$$

   On a : $\begin{array}{c|ccccc} x & 0 & & -2+\sqrt{5} & & 1 \\ \hline & & & & & 1 \\ & & & -2+\sqrt{5} & \nearrow & \\ f & \frac{1}{8} & \nearrow & & & \end{array}$
   $x_1 \in [0, -2+\sqrt{5}]$ et $[0, -2+\sqrt{5}]$ est stable par f. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in [0, -2+\sqrt{5}]$.
   De plus, f est croissante sur $[0, -2+\sqrt{5}]$,ainsi, (x_n) est monotone.

$x_2 = \dfrac{729}{1096} < \dfrac{1}{8} = x_1$. Ainsi, (x_n) est croissante.
De plus (x_n) est majorée donc (x_n) converge par le théorème de la limite monotone. Notons l sa limite. On a $l \in [0, -2+\sqrt{5}]$ car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in [0, -2+\sqrt{5}]$ et par passage à la limite dans les inégalités.
De plus, f est continue sur $[0, -2+\sqrt{5}]$. Ainsi, $f(l) = l$ donc $l = -2+\sqrt{5}$. Ainsi la probabilité que l'espèce disparaisse est de $-2+\sqrt{5} \simeq 24\%$. L'espèce ne disparait pas de façon certaine.

Exercice 18. 1. Soit $n \in llbracket 1, N-1]\!]$, D'après l'énoncé, on sait que $P(I_{n+1}|I_n) = 1-p$. En effet, cela correspond à la probabilité de ne pas bruiter le signal lors du passage dans le $n+1$-ième canal.
Et on a $P(I_{n+1}|\overline{I_n}) = p$ car cela correspond à la probabilité de bruiter le signal lors du passage dans le $n+1$-ième canal.
$(I_n, \overline{I_n})$ forme un système complet d'événements. Ainsi, par la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} p_{n+1} = P(I_{n+1}) &= P(I_{n+1}|I_n)P(I_n) + P(I_{n+1}|\overline{I_n})P(\overline{I_n}) \\ &= (1-p)p_n + p(1-p_n) \\ &= p + (1-2p)p_n \end{aligned}$$

2. D'après la question précédente, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \alpha = (1-2p)\alpha + p \quad &\Longleftrightarrow \quad 2p\alpha = p \\ &\Longleftrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2} \quad \text{car } p \neq 0 \end{aligned}$$

Posons $\alpha = \dfrac{1}{2}$.
Pour tout $n \in [\![1, N]\!]$, on pose $v_n = p_n - \alpha$.
Soit $n \in [\![1, N-1]\!]$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= p_{n+1} - \alpha \\ &= (1-2p)p_n + p - (1-2p)\alpha + p) \\ &= (1-2p)(p_n - \alpha) \\ &= (1-2p)v_n \end{aligned}$$

Ainsi, $(v_n)_{n\in[\![1,N]\!]}$ est géométrique de raison $1-2p$.
De plus, $v_1 = p_1 - \dfrac{1}{2} = 1 - p - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} - p$.
Donc on a :

$$\forall n \in [\![1, N]\!],\ v_n = v_1(1-2p)^{n-1} = \frac{1}{2}(1-2p)^n.$$

D'où :

$$\forall n \in [\![1, N]\!],\ p_n = \frac{1}{2}(1-2p)^n + \frac{1}{2}$$

On a donc : $p_N = \dfrac{1}{2}(1-2p)^N + \dfrac{1}{2}$.
Comme $p \in]0,1[$, on a : $1-2p \in]-1,1[$. Ainsi, $\lim\limits_{N\to+\infty} p_N = \dfrac{1}{2}$.

2.3 Formule de Bayes

Exercice 19.
Notons T l'événement « le test est positif », et M « la personne est malade »On cherche à calculer $P(M|T)$. Par la formule de Bayes, on a

$$P(M|T) = \frac{P(T|M)P(M)}{P(T|M)P(M) + P(T|\overline{M})P(\overline{M})} = \frac{\frac{99}{100} \times \frac{1}{1000}}{\frac{99}{100} \times \frac{1}{1000} + \frac{2}{1000}\frac{999}{1000}} = \frac{990}{2988} = \frac{495}{1494}.$$

Exercice 20. Notons P_1, P_2 et P_3 les portes avec P_1 la porte choisie par le candidat.
Pour tout $i \in \{1,2,3\}$, on note V_i l'événement « la voiture est derrière la porte i » et O_i l'événement « le présentateur a ouvert la porte i ».
On a $P(O_2|V_1) = P(O_3|V_1) = \dfrac{1}{2}$, $P(O_2|V_2) = P(O_3|V_3) = 0$ et $P(O_2|V_3) = P(O_3|V_2) = 1$.
Ainsi, la probabilité que la voiture soit derrière la porte 3 sachant que le présentateur a ouvert la porte 2 est

$$P(V_3|O_2) = \frac{P(O_2|V_3)P(V_3)}{\sum\limits_{i=1}^{3} P(O_2|V_i)P(V_i)} = \frac{1 \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}.$$

Le candidat doit donc changer son choix.

Exercice 21.

1. Notons G_0 : ≪ la gain du joueur est nul ≫.
Pour tout $k \in [\![0,2]\!]$, on note A_k : ≪ on obtient k pile lors du premier lancer ≫.
On a : $P(A_0) = \dfrac{1}{4}$ (on obtient (F,F)), $P(A_1) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$ (on obtient (P,F) ou (F,P), $P(A_2) = \dfrac{1}{4}$ (on obtient (P,P)) par indépendance des lancers de chacune des pièces.
(A_0, A_1, A_2) forme un système complet d'événements. Ainsi, par la formule des probabilités totales, on a :

$$P(G_0) = P(G_0|A_0)P(A_0) + P(G_0|A_1)P(A_1) + P(G_0|A_2)P(A_2)$$

Or, $P(G_0|A_0) = 1$, $P(G_0|A_1) = \dfrac{1}{4}$ (il faut alors obtenir deux faces lors du second lancer),
$P(G_0|A_2) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4}$ (il faut obtenir deux faces lors des deux lancers des deux pièces).
Ainsi :

$$P(G_0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{16} \times \frac{1}{4} = \frac{16+8+1}{64} = \frac{25}{64}$$

2. Notons G_1 : ≪ Obtenir un seul pile à la seconde étape ≫
D'après la formule de Bayes, on a donc :

$$P(A_2|G_1) = \frac{P(G_1|A_2)P(A_2)}{P(G_1|A_0)P(A_0) + P(G_1|A_1)P(A_1) + P(G_1|A_2)P(A_2)}$$

Or, $P(G_1|A_2) = \dfrac{4}{4^2} = \dfrac{1}{4}$. En effet, on obtient $((P,F),(F,F))$ ou $((F,P),(F,F))$ ou $((F,F),(P,F))$ ou $((F,F),(F,P))$.
On a également $P(G_1|A_0) = 0$ puis $P(G_1|A_1) = \dfrac{1}{2}$. En effet, il nous faut obtenir (P,F) ou (F,P).
On obtient ainsi :

$$P(A_2|G_1) = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{4} \times 0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{5}{16}} = \frac{1}{5}$$

3 Indépendance

Exercice 22. L'univers Ω associée à cette expérience aléatoire est $[\![1,6]\!]^2$. On le munit de la probabilité uniforme.
On a : $A = \{2,4,6\} \times [\![1,6]\!]$ et $B = [\![1,6]\!] \times \{3\}$.
Ainsi, on trouve $\operatorname{Card} A = 3 \times 6 = 18$ et donc $P(A) = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$, $\operatorname{Card} B = 6$ et donc $P(B) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.
De plus, $A \cap B = \{(2,3),(4,3),(6,3)\}$, on obtient :

$$P(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = P(A)P(B)$$

Les événements A et B sont indépendants.

Exercice 23. 1. La probabilité de tirer une boule blanche dépend de la composition de l'urne.
Pour $k \in \{0,1,2,3\}$, notons U_k l'événement ≪ L'urne contient k boules noires ≫.
On a $P(U_0) = P(U_3) = \frac{1}{8}$ (probabilité de faire trois fois pile ou trois fois face de suite) et $P(U_1) = P(U_2) = \frac{3}{8}$ (probabilité de faire un pile et deux faces ou l'inverse).
Or, (U_0, U_1, U_2, U_3) forme un système complet d'événements. Ainsi, , la formule des probabilités totales donne

$$\begin{aligned}
P(B_1) &= P(B_1|U_0)P(U_0) + P(B_1|U_1)P(U_1) + P(B_1|U_2)P(U_2) + P(B_1|U_3)P(U_3) \\
&= 1 \times \frac{1}{8} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} + 0 \times \frac{1}{8} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

De même, $P(B_2) = \frac{1}{2}$ puisque la composition de l'urne est la même (on tire avec remise).

Toujours avec la formule des probabilités totales, on a ensuite :

$$\begin{aligned}
P(B_1 \cap B_2) &= P(B_1 \cap B_2|U_0)P(U_0) + P(B_1 \cap B_2|U_1)P(U_1) + P(B_1 \cap B_2|U_2)P(U_2) + P(B_1 \cap B_2|U_3)P(U_3) \\
&= P(B_1|U_0)P(B_2|U_0)P(U_0) + P(B_1|U_1)P(B_2|U_1)P(U_1) + P(B_1|U_2)P(B_2|U_2)P(U_2) \\
&\qquad + P(B_1|U_3)P(B_2|U_3)P(U_3) \\
&\qquad \text{(par indépendance des tirages pour une composition d'urne fixée)} \\
&= 1^2 \times \frac{1}{8} + \frac{2^2}{3^2} \times \frac{3}{8} + \frac{1^2}{3^2} \times \frac{3}{8} + 0^2 \times \frac{1}{8} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Comme $P(B_1 \cap B_2) \neq P(B_1)P(B_2)$, les événement B_1 et B_2 ne sont pas indépendants.
Les événements $B_1, \dots, B_n$ ne sont donc pas deux à deux indépendants.

2. On a $B^n = B_1 \cap \dots \cap B_n$. Cependant, les événements ne sont pas mutuellement indépendants (sinon ils le seraient deux à deux) donc on ne peut pas utiliser ceci pour calculer $P(B^n)$. Là encore, on utilise la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(B^n) &= P(B^n|U_0)P(U_0) + P(B^n|U_1)P(U_1) + P(B^n|U_2)P(U_2) + P(B^n|U_3)P(U_3) \\
&= 1 \times \frac{1}{8} + \frac{2^n}{3^n} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{3^n} \times \frac{3}{8} + 0 \times \frac{1}{8} \\
&= \frac{3^{n-1} + 2^n + 1}{3^{n-1} \times 8}.
\end{aligned}$$

3. On cherche la probabilité $P(U_0|\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3})$. D'après la formule de Bayes, on a :

$$P(U_0|B^3) = \frac{P(B^3|U_0)P(U_0)}{P(B^3)} = 1 \times 4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

4. On cherche la probabilité $P(B_4|B^3)$.

$$P(B_4|B^3) = \frac{P(B_4 \cap B^3)}{P(B^3)} = \frac{P(B^4)}{P(B^3)} = \frac{\frac{1 + 2^4 + 3^3}{3^3 \times 8}}{\frac{1 + 2^3 + 3^2}{3^2 \times 8}} = \frac{44}{3 \times 18} = \frac{44}{54} = \frac{22}{27}.$$

Exercice 24. 1. On a : $A = \{2, 4, 6\} \times [\![1, 6]\!]$, $B = [\![1, 6]\!] \times \{1, 3, 5\}$, $C = (\{2, 4, 6\} \times \{1, 3, 5\}) \cup (\{1, 3, 5\} \times \{2, 4, 6\})$

$$P(A) = \frac{3 \times 6}{36} = \frac{1}{2} \quad P(B) = \frac{3 \times 6}{36} = \frac{1}{2} \quad P(C) = \frac{3 \times 3 + 3 \times 3}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$A \cap B = A \cap C = B \cap C = \{2, 4, 6\} \times \{1, 3, 5\}$, ainsi :

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = P(A)P(B) = P(A)P(C) = P(B)P(C)$$

Donc les événements A, B et C sont deux à deux indépendants.

2. Les événements A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants. En effet, $A \cap B \cap C = A \cap B$. Ainsi,

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}.$$

Exercice 25. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note P_i : « Obtenir pile au i-ème lancer ».
Les événements $P_1, \dots, P_n$ sont mutuellement indépendants, donc $P_1, \dots, P_{n-1}, \overline{P_n}$ aussi. Ainsi

$$P(P_1 \cap \dots \cap P_{n-1} \cap \overline{P_n}) = P(P_1) \dots P(P_{n-1})P(\overline{P_n}) = \frac{1}{3^{n-1}} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3^n}.$$

Exercice 26. 1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note A_k « la somme des dés est égales à 6 au k-ième tirage »,
B_k « la somme des dés est égales à 7 au k-ième tirage »,
C_k « la sommes des dés est différente de 6 et 7 au k-ième tirage ».
Soit $k \in \mathbb{N}$, au k-ième tirage, A_k est réalisé si l'on obtient : $(1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3)$,
B_k est réalisé si l'on obtient : $(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)$.
Ainsi, $P(A_k) = \dfrac{5}{36}$, $P(B_k) = \dfrac{6}{36}$.

(A_k, B_k, C_k) est un système complet d'événement, ainsi, $P(C_k) = 1 - P(A_k) - P(B_k) = \dfrac{25}{36}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note G_1^n : « le joueur 1 gagne au n ième coup ».
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$P(G_1^n) = P(C_1 \cap ... \cap C_{n-1} \cap A_n)$.
Or, les événements $C_1, ..., C_{n-1}, A_n$ sont indépendants.
Ainsi,

$$P(G_1^n) = P(C_1)...P(C_{n-1})P(A_n) = \left(\frac{25}{36}\right)^{n-1} \frac{5}{36}$$

2. $p_n = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} G_1^k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(G_1^k)$ car les événements $G_1^1, ..., G_1^n$ sont deux à deux incompatibles. Ainsi,

$$p_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{25}{36}\right)^{k-1} \frac{5}{36} = \frac{5}{36} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{25}{36}\right)^{k} = \frac{5}{36} \frac{1 - \left(\frac{25}{36}\right)^n}{1 - \left(\frac{25}{36}\right)} = \frac{5}{11}\left(1 - \left(\frac{25}{36}\right)^n\right)$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note G_2^n : « le joueur 2 gagne au n ième coup ».
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$P(G_2^n) = P(C_1 \cap ... \cap C_{n-1} \cap B_n)$.
Or, les événements $C_1, ..., C_{n-1}, B_n$ sont indépendants.
Ainsi,

$$P(G_2^n) = P(C_1)...P(C_{n-1})P(B_n) = \left(\frac{25}{36}\right)^{n-1} \frac{6}{36}$$

On obtient alors : $q_n = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} G_2^k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(G_2^k)$ car les événements $G_2^1, ..., G_2^n$ sont deux à deux incompatibles.
Ainsi,

$$q_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{25}{36}\right)^{k-1} \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{25}{36}\right)^{k} = \frac{1}{6} \frac{1 - \left(\frac{25}{36}\right)^n}{1 - \left(\frac{25}{36}\right)} = \frac{6}{11}\left(1 - \left(\frac{25}{36}\right)^n\right)$$

4. Comme $0 \leq \dfrac{25}{36} < 1$. Ainsi, $\lim_{n \to +\infty} \left(\dfrac{25}{36}\right)^n = 0$. Donc $\lim_{n \to +\infty} p_n = \dfrac{5}{11}$ et $\lim_{n \to +\infty} q_n = \dfrac{6}{11}$.
On remarque que $\lim_{n \to +\infty} (p_n + q_n) = 1$. Si l'on réalise un très grand nombre de lancers, l'un des deux joueurs gagne.

Exercice 27. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note :
A_k : « le joueur A gagne au k-ième lancer »
B_k : « le joueur B gagne au k-ième lancer »
I_k : « Obtenir 1 ou 2 au k-ième lancer »
S_k : « Obtenir 3,4 ou 5 au k-ième lancer »

1. On remarque tout d'abord que comme le joueur A démarre et que A et B lance les dés successivement, A lance les dés lors des tirages impairs et B lance les dés lors des tirages pairs.
Ainsi, A ne peut gagner que lors d'un lancer impair et B ne peut gagner que lors d'un lancer pair.
Commençons par déterminer les probabilités pour le joueur A.
   - Si n est pair, on a : $P(A_n) = 0$.
   - Si n est impair : $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$, on a :$A_{2k+1} = \overline{I_1} \cap \overline{S_2} \cap \cdots \cap ... \cap \overline{I_{2k-1}} \cap \overline{S_{2k}} \cap I_{2k+1}$.

Or, ces événements sont mutuellement indépendants (par indépendance des différents lancers. Ainsi,

$$\begin{aligned} P(A_n) = P(A_{2k+1}) &= P\left(\overline{I_1} \cap \overline{S_2} \cap \cdots \cap ... \cap \overline{I_{2k-1}} \cap \overline{S_{2k}} \cap I_{2k+1}\right) \\ &= P\overline{I_1})P(\overline{S_2})...P(\overline{I_{2k-1}})P(\overline{S_{2k}})P(I_{2k+1}) \\ &= \Big(\prod_{i=0}^{k-1} P(\overline{I_{2i+1}})\Big)\Big(\prod_{j=1}^{k} P(\overline{S_{2j}})\Big)P(I_{2p+1}) \\ &= \frac{2}{6}\prod_{i=0}^{k-1}\left(\frac{4}{6}\right)\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{3}{6}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} \end{aligned}$$

Déterminer les probabilités pour le joueur B.

- Si n est impair, on a : $P(B_n) = 0$.
- Si n est pair : $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, on a :$B_{2k} = \overline{I_1} \cap \overline{S_2} \cap \cdots \cap ... \cap \overline{I_{2k-1}} \cap \overline{S_{2k-2}} \cap \overline{I_{2k-1}} \cap S_{2k}$.
  Or, ces événements sont mutuellement indépendants (par indépendance des différents lancers. Ainsi,

$$\begin{aligned} P(B_n) = P(B_{2k}) &= P\left(\overline{I_1} \cap \overline{S_2} \cap \cdots \cap ... \cap \overline{S_{2k-2}} \cap \overline{I_{2k-1}} \cap S_{2k}\right) \\ &= P\overline{I_1})P(\overline{S_2})...P(\overline{S_{2k-2}})P(\overline{I_{2k-1}})P(S_{2k}) \\ &= \Big(\prod_{i=0}^{k-1} P(\overline{I_{2i+1}})\Big)\Big(\prod_{j=1}^{k-1} P(\overline{S_{2j}})\Big)P(S_{2p}) \\ &= \frac{3}{6}\prod_{i=0}^{k-1}\left(\frac{4}{6}\right)\prod_{j=1}^{k-1}\left(\frac{3}{6}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{k} \end{aligned}$$

2. Notons C_n : « A gagne en moins de n lancers. »
   D_n : « B gagne en moins de n lancers ».
   Soit $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} 1 \leq 2p+1 \leq n \quad &\iff \quad 0 \leq p \leq \frac{n-1}{2} \\ &\iff \quad 0 \leq p \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \quad \text{car } p \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
P(C_n) &= \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \\
&= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} P(A_{2p+1}) \\
&= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \left(\frac{1}{3}\right)^{p+1} \\
&= \frac{1}{3} \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \left(\frac{1}{3}\right)^{p} \\
&= \frac{1}{3} \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1}}{1 - \frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1}\right)
\end{aligned}$$

De même, pour B :
Soit $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
1 \leq 2p \leq n &\iff \frac{1}{2} \leq p \leq \frac{n}{2} \\
&\iff 1 \leq p \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \qquad \text{car } p \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
P(D_n) &= \sum_{k=1}^{n} P(B_k) \\
&= \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} P(B_{2p}) \\
&= \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\frac{1}{3}\right)^{p} \\
&= \frac{1}{3} \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{1 - \frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\right)
\end{aligned}$$

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} P(C_n) = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} P(D_n) = \dfrac{1}{2}$.
Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} (P(C_n) + P(D_n)) = 1$. Ainsi, en un temps infini, un des deux joueurs finit par gagner.