Concours blanc

Première épreuve
lundi 29 juin 2020
Durée : 3 heures

$\diamond$ Le candidat peut admettre le résultat d'une question et l'utiliser dans la suite à condition de l'écrire clairement sur sa copie.

$\diamond$ Si le candidat repère ce qu'il croit être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Dérivation

1. Montrer que $\forall x > 0, \frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$.
2. Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ continue. Montrer que f admet au moins un point fixe.
3. Donner les dérivées successives de cos et sin.
4. Rappeler (sans démonstration) la formule de Leibniz.

Polynômes

1. Déterminer les racines de $X^2 + (3 + i)X + 2 + 2i$.
2. Quels sont les facteurs irreductibles dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme $(X^2 - 1)(X - i)(X + i)$.
3. Développer l'expression $P \circ Q$, où $P = 1 + X + X^2$ et $Q = X + 2$.
4. Soit $x \in \mathbb{C}$. Montrer que pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$, x est une racine d'ordre deux de A si et seulement si $A(x) = A'(x) = 0$ et $A''(x) \neq 0$.
5. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $(P')^2 = P$.

Espaces vectoriels

1. Montrer que $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ 2x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 2xy + 2xz - 4yz = 0\}$ est un espace vectoriel dont on calculera la dimension.
2. Donner la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (on explicitera tous les vecteurs de cette base en faisant attention à l'ordre).
3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, tels que $F + G = E$. Notons F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F. Montrer que $E = F' \oplus G$.

Applications linéaires et géométrie dans l'espace

Soit $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{K}^3$. Soit $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ la famille des vecteurs définis par

$$b_1 = (1, 0, \sqrt{3}) \quad b_2 = (0, 2, 0) \quad b_3 = (-\sqrt{3}, 0, 1)$$

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{K}^3$ et déterminer la matrice de passage $P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}$.
2. Soit s l'application linéaire canoniquement associée à $P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}$. Déterminer la matrice représentative de s dans la base (e_1, e_3, e_2).
3. Montrer que s est la composée d'une rotation et d'une homothétie dont on donnera les caractéristiques.
4. Calculer $P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}^{-1}$.
5. Soit u la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}\,(e_1, e_3)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\,(e_2)$. Déterminer la matrice représentative de u dans la base $\mathcal{C}$ puis dans la base $\mathcal{B}$.
6. On considère $A(1, 2, 3)$. Calculer la distance de A au plan $\mathcal{P}$ passant par O et dirigé par $\mathrm{Vect}\,(e_1, e_3)$.

FIN.