Nom et prénom : Note : /20

Préparation n°2

8 novembre 2019

Exercice 1. 1. Développer $(k+1)^3 - k^3$ pour $k \in \mathbb{N}$.

2. Calculer de deux manières différentes
$$\sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)^3 - k^3\right],$$
pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire une expression explicite de $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2$.

Exercice 2. Donner une expression simple de
$$\sum_{k=1}^{n} (z + w^k)^n,$$
où $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$ et $w = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Exercice 3. Résoudre l'équation différenteille $y' - \frac{1}{2} sin(2x) y = \frac{\arctan(x)}{1+x^2} \exp(-\sin(x)^2)$.

Exercice 4. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $xy' + xy = x$.

Exercice 5. Soit $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et 1-périodique. Soit y une solution de $(E) : y' - ay = 0$.
1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $y(1) = y(-1)$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \int_x^{x+1} a(t)dt = \int_0^1 a(t)dt$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que y soit 1-périodique.
4. Si y est solution de l'équation $y' - ay = a$, peut-on affirmer que y est 1-périodique ?