Chapitre 1 : Logique et raisonnement

1 Rudiments de logique

Donner une définition c'est nommer un objet ou un type d'objet. Attention définir quelquechose ne garantit pas son existence. Une proposition est un énoncé qui est soit vrai soit faux, les deux cas s'excluant mutuellement.

1.1 Connecteurs logiques

Définition

Soient P et Q deux propositions.

- non P, appelée négation de P, est une proposition qui est vraie lorsque P est fausse et fausse lorsque P est vraie;
- P et Q est une proposition qui est vraie lorsque P et Q sont toutes les deux vraies, fausse dans tous les autres cas;
- P ou Q est une proposition qui est vraie lorsque l'une au moins des propositions P ou Q est vraie, fausse dans l'unique cas où P et Q sont fausses.

Remarque :

- Le ou mathématique est dit inclusif : $\big(P \text{ ou } Q\big)$ est entre autre vraie si les deux propositions P et Q sont vraies. Ce n'est pas toujours le cas en langage courant : « Un être humain est un homme ou une femme ».
- Les propositions non $(a = b)$ et non $(x \in E)$ sont abrégées en $a \neq b$ et $x \notin E$.
- On peut étudier les valeurs de vérité d'une proposition grâce à un tableau appelé table de vérité (V pour Vrai et F pour Faux) .

P	Q	non P	P et Q	P ou Q
V	V	F	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	F

Définition : Implication

Soient P et Q deux propositions.
On note $P \Longrightarrow Q$ la proposition $\big((\text{non } P) \text{ ou } Q\big)$.
Le connecteur $\Longrightarrow$ est appelé implication et $P \Longrightarrow Q$ se lit « P implique Q »

P	Q	non P	$P \Longrightarrow Q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Remarque :

- Si P est fausse, la proposition $P \Longrightarrow Q$ est vraie
- Si $P \Longrightarrow Q$ est vraie et si P est vraie, alors Q est vraie.
- En français, l'implication $P \Longrightarrow Q$ est vraie est traduite par « Si P est vraie alors Q est vraie ».
- Lorsque $P \Longrightarrow Q$ est vraie, on dit que :
  - Q est une condition nécessaire de P ou que « pour que P soit vraie, il faut que Q soit vraie »
  - P est une condition suffisante de Q ou que « pour que Q soit vraie, il suffit que P soit vraie »

  ⚠Le connecteur $\Longrightarrow$ n'est pas un raccourci typographique de « donc ».
  En effet, lorsque l'on écrit $P \Longrightarrow Q$ est vraie, on ne sait pas à priori si P est vraie ou non ni si Q est vraie ou non. En revanche, quand on écrit : « On a P donc Q » cela signifie : « je sais que P est vraie, j'en déduis que Q est également vraie ».

Définition : Equivalence

Soient P et Q deux propositions.
On note $P \Longleftrightarrow Q$ la proposition $\left(P \Longrightarrow Q \text{ et } Q \Longrightarrow P\right)$.
Le connecteur $\Longleftrightarrow$ est appelé équivalence et la proposition $P \Longleftrightarrow Q$ se lit « P équivaut à Q ».

P	Q	$P \Longrightarrow Q$	$Q \Longrightarrow P$	$P \Longleftrightarrow Q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Remarque :

- $P \Longleftrightarrow Q$ est vraie si et seulement si P et Q sont soit simultanément vraies soit simultanément fausses.
  Ainsi, $P \Longleftrightarrow Q$ est vraie si P et Q ont même valeur de vérité et fausse sinon.
- En français, l'équivalence se traduit par : « si et seulement si », « il faut et il suffit ».
- Lorsque $P \Longleftrightarrow Q$ est vraie, on dit que P est une condition nécessaire et suffisante de Q.

Proposition : Distributivité

Soient P, Q et R trois propositions.

- $\left((P \text{ et } Q) \text{ ou } R\right)$ est équivalente à $\left((P \text{ ou } R) \text{ et } (Q \text{ ou } R)\right)$.
- $\left((P \text{ ou } Q) \text{ et } R\right)$ est équivalente à $\left((P \text{ et } R) \text{ ou } (Q \text{ et } R)\right)$.

Proposition : Négation des connecteurs logiques

Soient P et Q deux propositions.

- non $(P$ ou $Q)$ est équivalente à $\left((\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)\right)$.
- non $(P$ et $Q)$ est équivalente à $\left((\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)\right)$
- non (non P) est équivalente à P
- non $\left(P \Longrightarrow Q\right)$ est équivalente à $\left(P \text{ et } (\text{non } Q)\right)$

Démonstration. Ces résultats peuvent se prouver via les tables de vérité. □

Définition

Soient P et Q deux propositions.

- On appelle **réciproque** de l'implication $P \Longrightarrow Q$, l'implication $Q \Longrightarrow P$.
- On appelle **contraposée** de l'implication $\left(P \Longrightarrow Q\right)$, l'implication $\left(\text{non } Q \Longrightarrow \text{non } P\right)$

Remarque : ⚠ Attention à ne pas confondre contraposée et réciproque.

Exemple : Soit $x \in \mathbb{R}$, considérons l'implication : $x > 0 \implies x \geq -1$.

Sa réciproque est : $x \geq -1 \implies x > 0$

Sa contraposée est : $x < -1 \implies x \leq 0$

Proposition : Contraposition

Soient P et Q deux propositions. L'implication $P \Longrightarrow Q$ et sa contraposée sont équivalentes.

Remarque : Cette proposition sera la base d'une méthode de raisonnement.

1.2 Quantificateurs

Définition

Soit $P(x)$ une proposition dépendant d'un élément x d'un ensemble E.

- la proposition $\forall x \in E, P(x)$, qui se lit « pour tout x appartenant à E, on a $P(x)$ », est vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour tout élément x de E.
- la proposition $\exists x \in E,\ P(x)$, qui se lit « il existe x appartenant à E tel que $P(x)$ », est vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour au moins un élément x de E.
- la proposition $\exists! x \in E,\ P(x)$, qui se lit « il existe un unique x appartenant à E tel que $P(x)$ », est vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour un unique élément x de E.

Remarque :

- L'ordre des quantificateurs a une importance :
  Exemple : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}_+, x^2 = y^2$
  $\exists y \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}, x^2 = y^2$
  On peut toujours intervertir deux quantificateurs de même nature. En revanche, dans le cas général, on ne peut pas intervertir deux quantificateurs de nature différente.
  $\forall x \in E, \exists y \in F, P(x,y)$ signifie que pour tout élément x de E, il existe au moins un élément y de F qui dépend de x (à priori) tel que ...
  $\exists y \in F, \forall x \in E, P(x,y)$ signifie qu'il existe un élément y de F, le même pour tous les x de E, tel que ...
- Les quantificateurs ne peuvent pas être utilisés comme abréviations sur une copie. Ainsi, il ne faut pas mélanger les quantificateurs et le langage français.
- Dans la proposition $\forall x \in E,\ P(x)$ (resp. $\exists x \in E,\ P(x)$), la variable x est dite muette. Cette expression a exactement le même sens que $\forall y \in E,\ P(y)$ (resp. $\exists y \in E,\ P(y)$).
- La proposition $(\forall x \in \emptyset,\ P(x))$ est toujours vraie. Alors que la proposition $(\exists x \in \emptyset,\ P(x))$ est toujours fausse.

Méthode : montrer un énoncé commençant par $\forall$

Pour montrer un énoncé du type $\forall x \in E, P(x)$, on fixe un élément quelconque x de E et on démontre que $P(x)$ est vraie. La rédaction est donc la suivante :
Soit $x \in E$.
$\left.\begin{array}{c} \dots \end{array}\right\}$ preuve de $P(x)$.

Exemple : Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+x+1 \end{array} \right.$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.
On a $x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.
or : $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ et $\frac{3}{4} > 0$.
donc : $f(x) > 0$ par somme.

Remarque : Pour montrer que la proposition $\Big(\forall x \in E, P(x)\Big)$ est fausse, il suffit de trouver un $x \in E$, tel que $P(x)$ est fausse. On appelle ceci un raisonnement par contre exemple.

Méthode : Montrer un énoncé commençant par $\exists$ et unicité

- Pour montrer un énoncé du type $\exists x \in E,\ P(x)$, il faut construire un $x \in E$ pour lequel $P(x)$ est vraie.
  On recherche au brouillon un x adapté. Puis on rédige ainsi :
  Posons $x =$ ....
  $x \in E$ car ...
  $\left.\begin{array}{c} \dots \end{array}\right\}$ preuve de $P(x)$.
- Pour montrer qu'un objet x vérifiant $P(x)$ est unique, on se donne x et y vérifiant la propriété, et on montre que $x = y$. La rédaction est alors :
  Soient $x,\ y \in E$.
  Supposons que $P(x)$ et $P(y)$ sont vraies.
  $\left.\begin{array}{c} \dots \end{array}\right\}$ preuve que $x = y$.

Exemple : Montrer que : $\exists ! x \in \mathbb{R}_+^*,\ x^2 = 1$.
Remarque : Lorsque l'on écrit : « il existe $x \in E$ tel que $P(x)$ » . « il existe » signifie ici « il en existe et j'en prends un que je nomme x ». Je pourrai ainsi utiliser la notation x dans le reste du problème.
En revanche, lorsque l'on écrit « $\exists x \in E,\ P(x)$ », x est une variable muette. Ainsi, x n'est pas une notation que l'on peut utiliser dans le reste du problème.

⚠ La proposition $(\exists x \in E,\ P(x))$ et $(\exists x \in E,\ Q(x))$ n'implique pas en général $\exists x \in E,\ (P(x)$ et $Q(x))$.
En effet, la variable x étant dans les deux cas muette, rien ne dit que les deux x de $(\exists x \in E,\ P(x))$ et $(\exists x \in E,\ Q(x))$ se réfèrent au même élément de E.
Si l'on souhaite déduire des informations de la proposition $(\exists x \in E,\ P(x))$ et $(\exists x \in E,\ Q(x))$, on commencerait par écrire :
Il existe $x_1 \in E$ tel que $P(x_1)$ et il existe $x_2 \in E$ tel que $Q(x_2)$.

Proposition : Négation des quantificateurs

Soit $P(x)$ une proposition dépendant d'un élément x d'un ensemble E.

- non $\Big(\forall x \in E,\ P(x)\Big)$ est équivalente à $\Big(\exists x \in E,\ \text{non } P(x)\Big)$.
- non $\Big(\exists x \in E,\ P(x)\Big)$ est équivalente à $\Big(\forall x \in E,\ \text{non } P(x)\Big)$.

Exemple : Nier les propositions suivantes :
$P_1 : \exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x - 3 = 0$

$P_2 : \forall x \geq 1,\ x^2 \geq 0$

$P_3 : \exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}, \dfrac{1}{x^2+1} \leq M$.

$P_4 : \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \big(|x-1| < \alpha \implies |\sqrt{x} - 1| < \epsilon\big)$.

2 Méthodes de raisonnement

2.1 Raisonnement par l'absurde

Méthode : Raisonnement par l'absurde

Pour montrer qu'une proposition P est vraie, on peut supposer son contraire (non P) et arriver à une absurdité.

Exemple : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\sqrt{n^2+1} \notin \mathbb{N}$.

2.2 Démonstration d'une implication

Soient P et Q deux propositions.
Trois types de raisonnement peuvent être mis en œuvre pour démontrer une implication.

Méthode directe

Pour montrer directement l'implication $P \Longrightarrow Q$, on suppose que P est vraie et on démontre que Q vraie.
On écrit :
Supposons P vraie.
$\left.\begin{array}{l} \dots \end{array}\right\}$ preuve de Q.

Exemple : Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que : $x \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad x^2 \geq 1$.

Raisonnement par contraposée

L'implication $P \Longrightarrow Q$ est équivalente à sa contraposée $\Big(\text{non } Q \Longrightarrow \text{non } P\Big)$.
Ainsi, pour montrer que l'implication $P \Longrightarrow Q$ est vraie, on peut prouver que $\Big(\text{non } Q \Longrightarrow \text{non } P\Big)$ est vraie.

Exemple : Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que : $x \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad x^2 \geq 1$.

Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer par l'absurde l'implication $P \Longrightarrow Q$, on suppose que P est vraie et que Q est fausse. On montre alors que ceci conduit à une contradiction.

Exemple : Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que : $x \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad x^2 \geq 1$.

2.3 Démonstration d'une équivalence

Raisonnement par double implication

Pour montrer que $P \Longleftrightarrow Q$, on procède souvent par double implication. On montre alors séparément que $P \Longrightarrow Q$ et que $Q \Longrightarrow P$

Exemple : Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que n est pair si et seulement si n^2 est pair.

Raisonnement par équivalence

Pour montrer que $P \Longleftrightarrow Q$, on peut aussi chercher à passer de P à Q par une succession d'équivalences, en s'assurant qu'à chaque étape, l'équivalence est bien conservée.
Cette méthode est particulièrement adaptée à la résolution d'équations ou d'inéquations.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x = \sqrt{6+x}$.

2.4 Raisonnement par analyse-synthèse

Méthode : Raisonnement par analyse-synthèse

Pour déterminer l'ensemble des objets vérifiant une propriété P, on peut raisonner en deux temps.
Analyse : on suppose qu'une solution du problème existe et on essaie de déterminer des renseignements sur cette solution.
Synthèse : on examine toutes les hypothétiques solutions trouvées dans la première partie et on détermine si elles vérifient bien la propriété souhaitée.

Remarque :

- Ce mode de raisonnement peut permettre de montrer existence et unicité d'une solution : si la phase d'analyse donne un seul x, elle montre l'unicité (sous réserve d'existence). Dans la phase de synthèse, on vérifie que x convient donc on montre l'existence.
- Dans la phase d'analyse, on détermine des conditions nécessaires pour que x soit solution du problème. La phase de synthèse donne quant à elle des conditions suffisantes.

2.5 Raisonnement par disjonction des cas

Proposition

Soient P, Q et R trois propositions. Si l'implication $P \Rightarrow R$ et l'implication $Q \Rightarrow R$ sont vraies alors l'implication $\left(P \text{ ou } Q\right) \Rightarrow R$ est vraie aussi.

Démonstration. Cet énoncé se démontre en utilisant les tableas de vérité. □

Méthode : Raisonnement par disjonction des cas

Pour montrer qu'une proposition est vraie il est parfois utile de se placer dans différents cas particuliers plus simples. Si tous les cas traités forment une proposition vraie et que dans tous les cas on aboutit à un même proposition alors (par définition de l'implication) cette dernière proposition devient vraie.

Soient P, Q et R trois propositions. On sait que P ou Q ou R est vraie. Pour démontrer que la proposition T est vraie, il suffit de montrer le système d'implications suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} P \Rightarrow T \\ Q \Rightarrow T \\ R \Rightarrow T \end{array}\right. .$$

Exemple : On fixe un entier naturel $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\frac{n(n+1)}{2}$ est encore un entier naturel.

Deux cas sont possibles n est pair ou bien impair.
Cas n°1 : n est pair. Alors $n/2$ est un entier et $n+1$ est aussi un entier. Par produit, $\frac{n(n+1)}{2}$ est encore un entier naturel.
Cas n°2 : n est impair. Alors $n+1$ est un nombre pair et donc $(n+1)/2$ est un nobre entier et à nouveau par produit, $\frac{n(n+1)}{2}$ est encore un entier naturel.

Dans tous les cas $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$. Donc $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$ est vraie.

2.6 Raisonnement par récurrence

Théorème : Principe de récurrence simple

Soit $P(n)$ une proposition dépendant de $n \in \mathbb{N}$.
Si :

- $P(0)$ est vraie,
- $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Longrightarrow P(n+1)$;

alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Remarque :

- La première propriété est l'initialisation, la seconde l'hérédité.
- On peut de même montrer qu'une propriété est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, on initialise alors avec $P(n_0)$ et l'hérédité devient : $\forall n \geq n_0,\ P(n) \Longrightarrow P(n+1)$.

Exemple : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2^n > n$.

Théorème : Principe de récurrence d'ordre p

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $P(n)$ une proposition dépendant de $n \in \mathbb{N}$.
Si :

- $P(0), P(1), \ldots P(p-1)$ sont vraies,
- $\forall n \in \mathbb{N},\ (P(n)$ et ... et $P(n+p-1)) \Longrightarrow P(n+p)$;

alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Remarque : ⚠ Attention de ne pas oublier d'initialiser la récurrence pour p entiers consécutifs !

Exemple : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 6 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n \end{cases}$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (n+1)3^n$.

Théorème : Principe de récurrence « forte »

Soit $P(n)$ une proposition dépendant de $n \in \mathbb{N}$.
Si :

- $P(0)$ est vraie,
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \Big(\forall k \in [\![0, n]\!], P(k)\Big) \Longrightarrow P(n+1)$;

alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Remarque : L'hérédité peut se lire « Supposons la propriété vraie jusqu'au rang n. »