Feuille d'exercices 23 : Applications linéaires

1 Linéarité - Noyau - image

Exercice 1. Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y, y-z) \end{array}$
2. $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array}$
3. $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u_n) & \mapsto & (u_0, u_1, u_2) \end{array}$
4. $f_4 : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ (u_n) & \mapsto & \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \end{array}$
   où E est l'ensemble des suites réelles convergentes.

Exercice 2. Montrer que les applications suivantes sont linéaires
1. $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P - XP' \end{array}$
2. $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+2y, 2x-y) \end{array}$
3. $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array}$ où $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Exercice 3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Soient E un K-e.v. de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$ où pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^p = f \circ f \circ ... \circ f$
.
Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

Exercice 4. Déterminer une base de l'image et une base du noyau de l'application linéaire suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y, y-x, 0) \end{array}$$

Exercice 5. Déterminer une base de l'image et une base du noyau des applications linéaires suivantes :
1. $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (x-y, y-z, z-x)$,
2. $f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z + i\bar{z}$.

Exercice 6. Montrer que l'application suivante est linéaire :

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P - (X+1)P' \end{array}.$$

Déterminer une base de son noyau et de son image.

Exercice 7. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$.
Montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par g.

Exercice 8. Soit E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Etablir l'équivalence :

$$g \circ f = 0 \iff \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$$

Exercice 9. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f^2 - 5f + 6Id_E = 0_E$.
1. Justifier que f est inversible et déterminer f^{-1}.
2. Montrer que $E = \operatorname{Ker}(f - 2Id_E) \oplus \operatorname{Ker}(f - 3Id_E)$.

Exercice 10. Soit E un K-espace vectoriel. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, montrer les équivalences suivantes :
1. $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f \circ f)$ si et seulement si $\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(f) = \{0\}$.
2. $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f \circ f)$ si et seulement si $\operatorname{Im}(f) + \operatorname{Ker}(f) = E$.

Exercice 11. On pose $E = \mathcal{C}^1(I, R)$ et $F = \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. Soit $a \in I$, on définit les applications :

$$D : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ f & \to & f' \end{array} \qquad P : \begin{array}{ccc} F & \to & E \\ f & \to & \left(x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt \right) \end{array}.$$

Déterminer le noyau et l'image de D et P. En déduire éventuellement l'injectivité et la surjectivité de ces applications.

Exercice 12. Soient E un K-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On définit $f : \begin{array}{ccc} F \times G & \to & E \\ (x,y) & \mapsto & x + y \end{array}$.
1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer son noyau et son image.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit injective, surjective, bijective.

2 Isomorphisme

Exercice 13. On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel usuelle. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccl} \phi: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x+2y, 4x-y, -2x+2y+3z) \end{array}$$

est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa réciproque.

Exercice 14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $a_1, \ldots, a_{n+1}$ des éléments deux à deux distincts de $\mathbb{K}$.

1. On considère l'application :
$$\begin{array}{rccl} \varphi & \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}^{n+1} \\ & P & \mapsto & (P(a_1), \ldots, P(a_{n+1})) \end{array}.$$
Montrer que φ est un isomorphisme.
2. On note $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$. Pour $k \in [\![1, n+1]\!]$, on pose $L_k = \varphi^{-1}(e_k)$.
Montrer que $(L_1, \ldots, L_{n+1})$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et donner l'expression de L_k en fonction de $a_1, \ldots, a_{n+1}$.
3. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$, déterminer les coordonnées de P dans la base $(L_1, \ldots, L_{n+1})$.

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_n[X],\ \exists! P \in \mathbb{R}_n[X],\ Q = \sum_{i=0}^{n} P^{(i)}\left(\frac{X}{2^i}\right).$$

Exercice 16. Donner une base de l'espace des suites à termes complexes vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n.$$

Exercice 17. Soit $p \in \mathbb{N}$, posons :

$$E = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(0) = 0\},\ E_p = \{P \in E,\ \deg P \leq p\},$$

$$F_p = \{P \in \mathbb{R}[X],\ \deg P < p\}.$$

1. Montrer que E, E_p et F_p sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$ et que E et F_1 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $\Delta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P(X+1) - P(X)$.
   (a) Préciser le degré de $\Delta(P)$ en fonction du degré de P.
   (b) Montrer que Δ est linéaire et préciser son noyau.
3. Montrer que Δ induit un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}[X]$.

3 Mode de définition d'une application linéaire

Exercice 18. Montrer qu'il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$f(1,0,0) = (0,1),\ f(1,1,0) = (1,0),\ f(1,1,1) = (1,1).$$

Déterminer f et calculer son noyau et son image.

Exercice 19. On pose $E = \mathbb{R}^3$, $F = \operatorname{Vect}(1,0,0)$ et $G = \operatorname{Vect}((1,1,0),(1,1,1))$.
Montrer qu'il existe une unique application $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que :

$$\forall u \in F,\ f(u) = 2u \text{ et } \forall v \in G,\ f(v) = -v.$$

Déterminer cette application linéaire.

4 Endomorphismes remarquables

Exercice 20. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit f un endomorphisme de E tel que :

$$\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{K}, f(x) = \lambda_x x.$$

1. Montrer que pour $(x,y) \in (E \setminus \{0\})^2$, $\lambda_x = \lambda_y$ (on pourra distinguer les cas (x,y) libre ou liée).
2. En déduire que f est une homothétie.

Exercice 21. Soit $E = \mathbb{R}^3$. On pose $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (1,1,0)$, $e_3 = (1,2,3)$, $F = \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$ et $G = \operatorname{Vect}(e_3)$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
2. Donner l'expression du projecteur p sur F parallèlement à G.
3. Donner l'expression du projecteur q sur G parallèlement à F.
4. Donner l'expression de la symétrie s par rapport à G et parallèlement à F.

Exercice 22. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soient p et q des projecteurs de E.

1. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Montrer que dans ce cas :

$$\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}p \oplus \mathrm{Im}q \text{ et } \mathrm{Ker}\,(p+q) = \mathrm{Ker}\,p \cap \mathrm{Ker}\,q.$$

Exercice 23. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soient p et q des projecteurs de E. Montrer que :

$$\begin{cases} p \circ q = p \\ q \circ p = q \end{cases} \iff \mathrm{Ker}\,p = \mathrm{Ker}\,q,$$

$$\begin{cases} p \circ q = q \\ q \circ p = p \end{cases} \iff \mathrm{Im}p = \mathrm{Im}q.$$

Exercice 24. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer qu'il existe $g \in GL(E)$ et p projecteur tel que $f = g \circ p$.

Exercice 25. On considère l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
À tout élément $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on associe l'élément $T(f) \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(f)(x) = f(-x).$$

Montrer que T est une symétrie de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et donner ses éléments caractéristiques.

5 Rang d'une application linéaire

Exercice 26. Déterminer le rang des applications linéaires suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (x-y+z+t, x+2z-t, x+y+3z-t) \end{array}.$$

Exercice 27. Déterminer le rang de l'application linéaire suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+2y-2z, x-3y+11z, -3x+4y-18z) \end{array}$$

Exercice 28 (Noyaux itérés)**.** Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note :

$$K_p = \ker f^p \text{ et } I_p = \mathrm{Im} f^p,$$

où $f^p = f \circ f \circ \cdots \circ f$.

1. Montrer que :
$$\forall p \in \mathbb{N},\ K_p \subset K_{p+1} \text{ et } I_{p+1} \subset I_p.$$
2. Montrer qu'il existe un plus petit entier naturel $r \leq n$ tel que $K_r = K_{r+1}$.
3. Montrer que :
$$I_r = I_{r+1}$$
4. Montrer que :
$$\forall p \in \mathbb{N},\ K_r = K_{r+p},\ I_r = I_{r+p}.$$
5. Montrer que :
$$E = K_r \oplus I_r$$

Exercice 29. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + 2u = 0$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im} u$.
2. Montrer que u induit un automorphisme de $\mathrm{Im} u$.

Exercice 30. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie n, $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$.
On suppose que $E = \mathrm{Ker}\,(f) + \mathrm{Ker}\,(g) = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$. Montrer que ces deux sommes sont directes.

Exercice 31. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}\,(f + g) \leq \mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(g)$
2. En déduire :
$$|\mathrm{rg}\, f - \mathrm{rg}\, g| \leq \mathrm{rg}\,(f + g) \leq \mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g.$$
Indication : On remarquera que $f = f + g - g$ et on utilisera la question précédente.

Exercice 32. Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension n, soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.
Montrer que :

$$\mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g - n \leq \mathrm{rg}\,(g \circ f) \leq \min(\mathrm{rg}\, f, \mathrm{rg}\, g).$$

Indication : Pour une des inégalités, on montrera et utilisera les inclusions : $Im(g \circ f) \subset Img$ et $Ker f \subset Ker(g \circ f)$. Pour la seconde, on appliquera le théorème du rang à $g_{|Imf}$.

Exercice 33. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

1. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Im} u = \mathrm{Ker}\, u$ si et seulement si n est pair.
2. Montrer qu'alors pour un tel $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe une base de E de la forme :
$$(e_1, e_2, \ldots, e_p, u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_p))$$
où $p = \mathrm{rg}\,(u)$.

Exercice 34. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, soient F et G des sous-espaces vectoriels de E.
Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Im} u = F$ et $\ker u = G$.