Devoir surveillé n°4

samedi 18 janvier 2020
Durée : 4 heures

◇ Le candidat peut admettre le résultat d'une question et l'utiliser dans la suite à condition de l'écrire clairement sur sa copie.

◇ Si le candidat repère ce qu'il croit être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice 1

On considère l'équation différentielle $(E) : (1-x^2)y'' - xy' + y = x$.

1. (a) Résoudre l'équation $\mathrm{ch}\,(x) = 4$, pour $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Montrer que ch est une application bijective de $\mathbb{R}^+$ sur un intervalle J qu'on déterminera. Notons dans la suite $g : J \to \mathbb{R}^+$ l'application réciproque de ch $: \mathbb{R}^+ \to J$.
   (c) Montrer que g est dérivable et calculer la dérivée de g.
2. Résoudre l'équation (E) sur $]-1,1[$ en effectuant le changement de variable $t = \arcsin\,(x)$.
3. Résoudre l'équation (E) sur $]1,+\infty[$ en effectuant le changement de variable $t = g(x)$. *On pourra remarquer que* $x \mapsto \frac{-1}{2} x sh\,(x)$ *est solution de* (E).

Exercice 2

On définit pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ l'application

$$f_n : x \mapsto nx^{n+1} - (n+1)x^n.$$

1. Étudier la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+^*$, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists! x_n \in \mathbb{R}_+^*, \quad nx_n^{n+1} - (n+1)x_n^n = 1$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 + \frac{1}{n} \leq x_n \leq 1 + \frac{2}{n}$. En déduire que (x_n) converge.
4. Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite de terme général $f_n\left(1 + \frac{\beta}{n}\right)$ converge lorque n tend vers l'infini et préciser la limite.
5. Montrer que l'équation $(x-1)e^x = 1$ admet une unique solution qu'on notera $\alpha \in]1,2[$. *Attention ici, on ne cherchera pas à calculer* α.
6. Soit $0 < \epsilon < \alpha - 1$.
   (a) Déterminer les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\left(1 + \frac{\alpha-\epsilon}{n}\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\left(1 + \frac{\alpha+\epsilon}{n}\right)$.
   (b) Montrer que
   $$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, (n \geq n_0) \implies 1 + \frac{\alpha - \epsilon}{n} \leq x_n \leq 1 + \frac{\alpha+\epsilon}{n}.$$
7. Déterminer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} n(x_n - 1)$.

Exercice 3

On définit f, g et h par les expressions

$$f(x) = \frac{1}{2}\arctan\,(\mathrm{sh}\,(x)), g(x) = \arctan\left(\frac{\mathrm{sh}\,(x)}{1+\mathrm{ch}\,(x)}\right) \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{\mathrm{sh}\,(x)}{1+\mathrm{ch}\,(x)}.$$

1. Démontrer la relation fondamentale de la trigonométrie hyperbolique *(il s'agit d'une relation entre* ch^2 *et* sh^2*)*.
2. Étudier la fonciton h.
3. En déduire le tableau de variations de g sans dériver g.
4. Montrer que $f = g$.
5. (a) Calculer les valeurs de ch $\left(\frac{\ln(3)}{2}\right)$ et sh $\left(\frac{\ln(3)}{2}\right)$.
   (b) À l'aide de l'égalité $f = g$, calculer $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Problème 1

Partie I - Intégrales de Wallis.

On définit pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ le nombre réel

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)dt.$$

1. Déterminer les valeurs I_0, I_1 et I_2.
2. Montrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$.
4. Déterminer une expression de I_{2n+1}, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$.
5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.
6. Montrer que (I_n) est décroissante et strictement positive.
7. Déterminer la limite de la suite $\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
8. En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{2n}{\pi}} I_n = 1.$$

Partie II - Calcul de l'intégrale de Gauss

Dans cette partie, on définit f par l'expression $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$, pour tout nombre réel x.

1. Montrer que f est croissante.
2. Montrer que $\forall t \geq 1, \quad e^{-t^2} \leq e^{-t}$.
3. Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$.
4. Pour tout entier naturel n, on définit $J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad J_n = \sqrt{n} I_{2n+1}$.
5. Montrer que pour tout $n \geq 1$, pour tout $t \in [0, \sqrt{n}[$,

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n}$$

   On pourra étudier l'application $t \mapsto \ln(1+t) - t$.

6. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$\sqrt{n} I_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \sqrt{n} I_{2n-2}.$$

   On pourra penser au changement de variable $t = \sqrt{n}\tan(u)$.

7. Déterminer la valeur $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

FIN.