Chapitre 13 : Dérivation

Dans tout le chapitre I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point

1 Nombre dérivé, fonction dérivée

1.1 Dérivabilité en un point, fonction dérivée

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est dérivable en a si et seulement si son taux d'accroissement en a :

$$\begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}$$

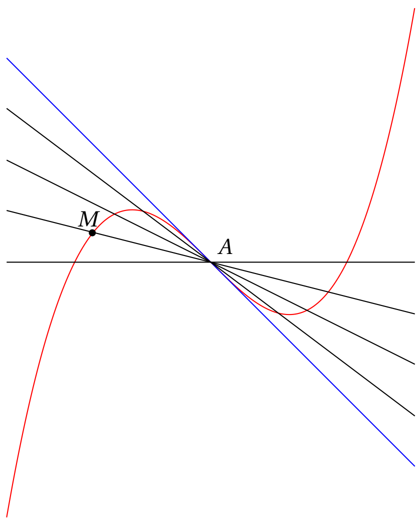
admet une limite finie en a. Cette limite, lorsqu'elle existe, est appelé nombre dérivée de f en a. Il est noté $f'(a)$ ou $D(f)(a)$.

Remarque : On a également : f est dérivable en a si et seulement si $h \mapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie en 0.

Exemple : ln est dérivable en 1 donc : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = \ln'(1) = 1$ et $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = \ln'(1) = 1$.

Interprétation géométrique.

Soit $a \in I$ et $x \in I$ tel que $x \neq a$. Le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est le coefficient directeur de la droite passant par $A(a, f(a))$ et $M(x, f(x))$.



Si est f est dérivable en a alors le coefficient directeur de la droite (AM) admet une limite finie quand x tend vers a. Ainsi, la droite (AM) admet une position limite lorsque M tend vers A appelé tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A. Son coefficient directeur est donc $f'(a)$, et son équation cartésienne est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Si le taux d'accroissement de f en a tend vers $\pm\infty$ lorsque x tend vers a, alors f n'est pas dérivable en a et la courbe représentative de f admet en $(a, f(a))$ une tangente verticale.

Remarque : La dérivabilité/dérivée étant définie à l'aide d'une limite en a, elle ne dépend que du comportement de f au voisinage de a.

Exemple :

- Soit $f : x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N})$.
  - Si $n = 0$: soit $a \in \mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{a\}$, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0$ donc f est dérivable en a de dérivée nulle.
  - Si $n \neq 0$: soit $a \in \mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{a\}$, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a^k x^{n-1-k}$ donc $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a^k a^{n-1-k} = na^{n-1}$, donc f est dérivable en a de dérivée na^{n-1}.

- Soit $f : x \mapsto \sqrt{x}$. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{a\}$, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$. Ainsi, $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$. La fonction racine carrée est donc dérivable en a, de dérivée $\frac{1}{2\sqrt{a}}$.
- La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0. En effet, pour tout $x \neq 0$, on a :

$$\frac{\sqrt{x}-0}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$$

Définition

On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I lorsque f est dérivable en tout point de I. On définit alors la fonction dérivée de f notée f', par : $f' : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array}$

1.2 Dérivabilité à gauche et à droite

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.
On dit que f est dérivable à droite (resp. à gauche) en a lorsque $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie à droite (resp. à gauche) en a. Cette limite, si elle existe, est alors notée $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$) et est appelée dérivée à droite (resp. à gauche) de la fonction f en a.

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$ qui n'est pas une extrémité. On a l'équivalence :

$$f \text{ est dérivable en } a \iff \begin{cases} f \text{ est dérivable à gauche en } a \\ f \text{ est dérivable à droite en } a \\ f'_g(a) = f'_d(a) \end{cases}$$

Dans ce cas, on a : $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

Démonstration. Soit $a \in I$, posons $\begin{array}{cccc} \tau_a(f) & I \setminus \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}$.
$\tau_a(f)$ admet une limite finie en a si et seulement si $\tau_a(f)$ admet une limite finie à droite et à gauche et que ces limites coïncident. □

Exemple : On a $\frac{|x|-|0|}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$. La fonction valeur absolue est donc dérivable à gauche et à droite en 0, de dérivées à gauche et à droite égales à -1 et 1. Elle n'est par contre pas dérivable en 0.

Définition

On dit qu'une fonction f définie sur I admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de a lorsque il existe $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$ et une fonction $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in I,\ f(x) = a_0 + (x-a)a_1 + (x-a)\epsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} \epsilon(x) = 0$$

Proposition : Développement limité à l'ordre 1

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.
f est dérivable en a si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a. Dans ce cas ce développement limité est alors :

$$\forall x \in I,\ f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\epsilon(x)$$

où $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ et $\lim_{x \to a} \epsilon(x) = 0$.

Remarque :

- Cet énoncé exprime le fait que $f(x) \approx f(a) + (x-a)f'(a)$ au voisinage de a.
- Cette approximation de f au voisinage de a par sa tangente en a sera beaucoup utilisée en analyse numérique (méthode de Newton pour la recherche de zéros d'une fonction, méthode de d'Euler pour résoudre par approximation des équations différentielles du premier ordre avec une condition initiale.)

Démonstration.

- Supposons f dérivable en a.

On pose alors $\begin{array}{llll} \epsilon : & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) & \text{si } x \neq a \\ 0 \quad \text{si x=a} \end{cases} \end{array}$.

Comme f est dérivable en a, on a $\lim\limits_{x \to a^-} \epsilon(x) = \lim\limits_{x \to a^+} \epsilon(x) = 0 = \epsilon(a)$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to a} \epsilon(x) = 0$.

De plus, Pour $x \in I \backslash \{a\}$, $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\epsilon(x)$, et cette égalité reste vraie quand $x = a$.

- Supposons que f admette un développement limité à l'ordre 1 en a. Alors, il existe $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ et $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lim\limits_{x \to a} \epsilon(x) = 0$ et tels que : $\forall x \in I,\ f(x) = a_0 + (x-a)a_1 + (x-a)\epsilon(x)$.

En évaluant cette égalité en a, on obtient $f(a) = a_0$. Ainsi : $\forall x \in I \backslash \{a\}$, on a $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = a_1 + \epsilon(x)$ donc $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = a_1 \in \mathbb{R}$. Ainsi f est dérivable en a et on a : $f'(a) = a_1$.

On a donc également prouvé l'unicité d'un tel développement.

□

Corollaire

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.
Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Démonstration. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in I$. On sait que f admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de a. Ainsi, il existe $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to a} \epsilon(x) = 0$ et : $\forall x \in I,\ f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\epsilon(x)$.
En passant à la limite dans cette expression quand x tend vers a, on obtient : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, donc f est continue en a. □

Remarque : La réciproque est fausse : une fonction peut être continue en un point et non dérivable en ce point.
Par exemple, les fonctions valeur absolue ou racine carrée sont continues en 0 et non dérivable en 0.

Corollaire

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I, elle est continue sur I.

1.3 Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition : Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient

Soit f et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en $a \in I$:

- Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(\lambda f + \mu g)$ est dérivable en a et on a :
$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a).$$
- fg est dérivable en a et on a :
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$
- Si de plus, $g(a) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et on a :
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Démonstration.

- Soit $x \in I \backslash \{a\}$. Alors
$$\frac{(\lambda f + \mu g)(x) - (\lambda f + \mu g)(a)}{x-a} = \lambda \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \mu \frac{g(x)-g(a)}{x-a}.$$
Or, f et g sont dérivables. Ainsi, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{(\lambda f + \mu g)(x) - (\lambda f + \mu g)(a)}{x-a} = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$.
Donc $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a de dérivée $\lambda f'(a) + \mu g'(a)$.

- Soit $x \in I\backslash\{a\}$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} &= \frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}\\ &= \frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x)+f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\end{aligned}$$

  Or, g est dérivable donc continue. Ainsi, $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$. De plus, par dérivabilité de g et f en a, on obtient : $\lim_{x\to a}\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} = f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$.
  Ainsi fg est dérivable en a, de dérivée $f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$.

- Comme g est dérivable en a, elle y est continue. Ainsi, on a : $\lim_{x\to a} g(x) = g(a) \neq 0$. Donc g ne s'annule pas au voisinage de a. Ainsi, il existe $r>0$ tel que pour tout $x \in V = I\cap]a-r,a+r[$, $g(x)\neq 0$. Soit $x\in V\backslash\{a\}$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a} &= \frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{g(a)g(x)(x-a)}\\ &= \frac{f(x)g(a)-f(a)g(a)+f(a)g(a)-f(a)g(x)}{g(a)g(x)(x-a)}\\ &= \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\frac{g(a)}{g(x)g(a)}-\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\times\frac{f(a)}{g(x)g(a)}\end{aligned}$$

  Or, par continuité de g en a et par dérivabilité de f et g en a, on a $\lim_{x\to a}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a} = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.
  Donc $\frac{f}{g}$ est dérivable en a de dérivée $\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

□

Proposition : Dérivée d'une fonction composée

Soient I et J deux intervalles non vides et non réduits à un point. Soient $f: I\to\mathbb{R}$ et $g: J\to\mathbb{R}$ avec $f(I)\subset J$. Soit $a\in I$. Si f est dérivable en $a\in I$ et si g est dérivable en $b=f(a)$, alors $g\circ f$ est dérivable en a et on a :

$$(g\circ f)'(a) = f'(a)\times g'(f(a)).$$

Démonstration. Puisque g est dérivable en $b=f(a)$, g admet un développement limité à l'ordre 1 en a. Ainsi, il existe une fonction $\epsilon: J\to\mathbb{R}$ telle que $\lim_{y\to b} f(y)=0$ et :

$$\forall y\in J,\ g(y) = g(b)+g'(b)(y-b)+(y-b)\epsilon(y).$$

Ainsi :

$$\forall y\in J,\ g(y)-g\left(f(a)\right) = g'\left(f(a)\right)(y-f(a))+(y-f(a))\epsilon(y).$$

Or, pour tout $x\in I$, $f(x)\in J$. Donc :

$$\forall x\in I,\ g(f(x))-g\left(f(a)\right) = g'\left(f(a)\right)(f(x)-f(a))+(f(x)-f(a))\epsilon(f(x)).$$

D'où :

$$\forall x\in I\setminus\{a\},\ \frac{g(f(x))-g\left(f(a)\right)}{x-a} = g'\left(f(a)\right)\times\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\epsilon(f(x)).$$

Or, f est dérivable en a donc continue a, ainsi on a : $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. D'où, par composition des limites, $\lim_{x\to a}\epsilon\left(f(x)\right)=0$.
De plus, par dérivabilité de f en a, on a $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$. Donc d'après les opérations sur les limites, $x\mapsto\frac{g\circ f(x)-g\circ f(a)}{x-a}$ admet une limite finie en a qui vaut $f'(a)g'\left(f(a)\right)$. Donc $g\circ f$ est dérivable en a de dérivée $f'(a)g'\left(f(a)\right)$. □

Exemple : Si f est une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur I alors $\ln(|f|)$ est dérivable sur I et $\left(\ln(|f|)\right)' = \frac{f'}{f}$.
En effet, étudions la dérivabilité de $h: x\mapsto\ln(|x|)$ sur $\mathbb{R}^*$.
Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$, $h(x)=\ln(x)$ donc h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $h'(x)=\frac{1}{x}$.
Soit $x\in\mathbb{R}_-^*$, $h(x)=\ln(-x)$ donc h est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et pour tout $x\in\mathbb{R}_-^*$, $h'(x)=\frac{-1}{-x}=\frac{1}{x}$.
Par composition, on obtient le résultat.

Corollaire

Soient f et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. Alors :

- Pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $(\lambda f + \mu g)$ est dérivable sur I et on a :
$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$$
- fg est dérivable sur I et on a :
$$(fg)' = f'g + fg'$$
- Si de plus, g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et on a :
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Corollaire

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I et $g : J \to \mathbb{R}$ dérivable sur J où I et J sont deux intervalles non vides et non réduits à un point tels que $f(I) \subset J$. Alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = f'(g' \circ f)$.

Remarque : Là où il n'y a pas de problème, on justifie en une phrase la dérivabilité d'une fonction comme combinaison linéaire, produit, quotient (attention au dénominateur) et composée de fonctions qui le sont.

Théorème de dérivabilité de la fonction réciproque

Soient $a \in I$, $f : I \to J$ continue, bijective et dérivable en a.

$$f^{-1} : J \to I \text{ est dérivable en } b = f(a) \text{ si, et seulement si} f'(a) \neq 0$$

et dans ce cas :

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}$$

Démonstration. f est continue et strictement monotone sur un intervalle I donc est bijective de I sur $f(I)$.

- Supposons f^{-1} dérivable en $b = f(a)$. On a : $\forall x \in I$, $f^{-1} \circ f(x) = x$. La dérivée d'une composée donne $\left(f^{-1}\right)'(f(a))f'(a) = 1$, ce qui impose $f'(a) \neq 0$.
- Supposons $f'(a) \neq 0$. Soit $y \in J \backslash \{b\}$.
Puisque $f^{-1} : J \to I$ est injective (car f^{-1} est bijective) et $y \neq b$, on a $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(b)$ donc $f^{-1}(y) \neq a$. Ainsi :
$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{1}{\dfrac{f\left(f^{-1}(y)\right) - f(a)}{f^{-1}(y) - a}}$$
La fonction f est bijective donc injective et continue. Ainsi, f est strictement monotone (cf. exercice 20 TD 14).
Ainsi, f est continue et strictement monotone sur l'intervalle I non vide et non réduit à un point, donc la fonction f^{-1} est continue sur l'intervalle $J = f(I)$. On a donc $\lim\limits_{y \to b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b) = a$ et f dérivable en a donc
$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ d'où par composition des limites, on a $\lim\limits_{y \to b} \dfrac{f\left(f^{-1}(y)\right) - f(a)}{f^{-1}(y) - a} = f'(a)$.
De plus, comme $f'(a) \neq 0$, on a : $\lim\limits_{y \to b} \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \dfrac{1}{f'(a)}$. Donc f^{-1} est dérivable en b et on a
$(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)} = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}$.

□

Exemple : C'est grâce à ce théorème que l'on prouve que arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et que pour tout $x \in]-1,1[$, $\arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Remarque : Soit $a \in I$ et $b = f(a)$, la tangente à la courbe représentative de f^{-1} en $(b, f^{-1}(b)) = (f(a), a)$ est symétrique à la tangente de la courbe représentative de f en $(a, f(a))$. Sa pente est l'inverse de celle de la courbe représentative de f en $(a, f(a))$, soit $\dfrac{1}{f'(a)}$.

Corollaire

Soit $f : I \to J$ une bijection dérivable. Alors :

$$f^{-1} : J \to I \text{ est dérivable sur } J \text{ si et seulement si } f' \text{ ne s'annule pas sur } I.$$

et dans ce cas : $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

2 Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

2.1 Définitions

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

- On pose $f^{(0)} = f$.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que la fonction $f^{(k)} : I \to \mathbb{R}$ existe et qu'elle est dérivable sur I. On note alors $f^{(k+1)}$ la dérivée de $f^{(k)}$, c'est à dire : $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$.

Si pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f^{(n)}$ existe, on dit alors que f est n fois dérivable sur I, et on appelle $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f sur I.
On dit que f est indéfiniment dérivable sur I lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est n-fois dérivable sur I.

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I lorsque f est n-fois dérivable sur I, et $f^{(n)}$ est continue sur I.
  On note $\mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$.
- On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.
  On note $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Remarque :

- Soit $n \geq 1$. f est de classe $\mathscr{C}^n$ si et seulement si f est dérivable et f' est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$.
- On sait que si une fonction est dérivable, elle est continue. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si f est $(n+1)$ fois dérivable, alors est de classe $\mathscr{C}^n$.
- Pour tout $p \leq n \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathscr{C}^n$ si et seulement si elle est p-fois dérivable et $f^{(p)}$ est de classe $\mathscr{C}^{n-p}$.
- $\mathscr{C}^0(I)$ est l'ensemble des fonctions continues sur I, et $\mathscr{C}^\infty(I)$ est l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur I
- On a la suite d'inclusions strictes : $\mathscr{C}^\infty(I) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathscr{C}^n(I) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathscr{C}^1(I) \subsetneq \mathscr{C}^0(I)$.

Remarque : Une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ est dérivable, mais la réciproque est fausse comme le montre l'exemple de la fonction
$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \cos \dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$
En effet, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit et composée de fonctions qui le sont.
Pour $x \neq 0$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = x \cos \frac{1}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

(produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0). Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
Mais f' n'est pas continue en 0 puisque : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = 2x \cos \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x}$ et f' n'admet pas de limite quand $x \to 0$.
En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $x_n = \dfrac{1}{2\pi n}$ et $y_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$. (x_n) et (y_n) convergent vers 0 alors que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(x_n) = \frac{1}{\pi n}$ et $f(y_n) = -1$. Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(y_n) = -1$ donc f n'admet pas de limite en 0 donc f n'est pas continue en 0. Ainsi, f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$.

Exemple : Soit $p \in \mathbb{N}$, on pose $f_p : x \mapsto x^p$.

Montrons que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que : $\begin{array}{l} \forall k \in [\![0,p]\!],\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_p^{(k)}(x) = \dfrac{p!}{(p-k)!}x^{p-k} \\ \forall k > p,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_p^{(k)}(x) = 0. \end{array}$.

Montrons par récurrence que pour tout $k \in [\![0,p]\!]$, f_p est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(k)}(x) = \dfrac{p!}{(p-k)!}x^{p-k}$.

- pour $k = 0$, f continue sur $\mathbb{R}$ donc f_p est de classe $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_p^{(0)}(x) = f_p(x) = x^p = \dfrac{p!}{p!}x^p$.
- Soit $k \in [\![0,p-1]\!]$, supposons que f_p est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_p^{(k)}(x) = \dfrac{p!}{(p-k)!}x^{p-k}$.

  Or, $f_p^{(k)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale $(p-k>0)$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_p^{(k+1)}(x) = \dfrac{p!}{(p-k)!}(p-k)x^{p-k-1} = \dfrac{p!}{(p-(k+1))!}x^{p-(k+1)}$. $f_p^{(k+1)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale. Donc f_p est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$.
- On a donc prouvé que pour tout $k \in [\![0,p]\!]$, f_p est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(k)}(x) = \dfrac{p!}{(p-k)!}x^{p-k}$.

  En particulier, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_p^{(p)}(x) = 1$ donc $f_p^{(p)}$ est indéfiniment dérivable et on a : $\forall k > p,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_p^{(k)}(x) = 0$.
  Ainsi, f_p est bien de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2.2 Opérations sur les fonctions $\mathscr{C}^k$

Proposition

Soient $n \in \mathbb{N}$, $f, g : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$ sur I (resp. n fois dérivables sur I) et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.
Alors $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I (resp. n fois dérivables sur I) et $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$.

Démonstration. Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère : $\mathscr{P}(n)$: « Si f et g sont $\mathscr{C}^n$, alors $\lambda f + \mu g$ est $\mathscr{C}^n$ et $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$ ».
Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

- La continuité est conservée par combinaison linéaire $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Supposons f et g de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. Alors f et g sont $\mathscr{C}^n$, donc par hypothèse de récurrence, $\lambda f + \mu g$ est $\mathscr{C}^n$ et $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$. Comme $f^{(n)}$ et $g^{(n)}$ sont $\mathscr{C}^1$ (car f et g $\mathscr{C}^{n+1}$), $(\lambda f + \mu g)^{(n)}$ est dérivable (comme combinaison linéaire de fonctions qui le sont) de dérivée $(\lambda f + \mu g)^{(n+1)} = \lambda f^{(n+1)} + \mu g^{(n+1)}$ qui est continue. Ainsi $\lambda f + \mu g$ est $\mathscr{C}^{n+1}$ et on a $\mathscr{P}(n+1)$.
- Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

$\square$

Proposition : Formule de Leibniz

Soient $n \in \mathbb{N}$, f, $g : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$ sur I (resp. n-fois dérivable). Alors fg est de classe $\mathscr{C}^n$ (resp. n fois dérivable) sur I et on a

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Démonstration. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété : $\mathscr{P}(n)$: « Si f et g sont $\mathscr{C}^n$ sur I, alors fg est $\mathscr{C}^n$ sur I et $(fg)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ ».

Montrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Supposons f et g continues sur I. Alors, fg est continue sur I et $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} f^{(k)} g^{(0-k)} = \binom{0}{0} f^{(0)} g^{(0)} = fg = (fg)^{(0)}$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Supposons f et g de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. Alors f et g sont $\mathscr{C}^n$, donc par hypothèse de récurrence fg est $\mathscr{C}^n$ et $(fg)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$. Pour $k \in [\![0,n]\!]$, $f^{(k)}$ est $\mathscr{C}^{n+1-k}$ donc $\mathscr{C}^1$ $(n+1-k \geq 1)$ donc

dérivable et $g^{(n-k)}$ est $\mathscr{C}^{k+1}$ donc $\mathscr{C}^1$ donc dérivable. Ainsi $(fg)^{(n)}$ est dérivable comme produit et combinaison linéaire de fonctions qui le sont. On a alors

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} = ((fg)^{(n)})' &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n+1-k)}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} f^{(l)} g^{(n-l+1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \qquad \text{par changement d'indice} l = k+1 \\
&= \sum_{l=1}^{n} \binom{n}{l-1} f^{(l)} g^{(n-l+1)} + \binom{n}{n} f^{(n+1)} g^{(0)} + \binom{n}{0} f^{(0)} g^{[n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= \binom{n}{n} f^{(n+1)} g^{(0)} + \binom{n}{0} f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= f^{(n+1)} g + f g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \qquad \text{par la relation de Pascal} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}
\end{aligned}$$

Pour tout $k \in [\![0, n+1]\!]$, $f^{(k)}$ est $\mathscr{C}^{n+1-k}$ donc continue, $g^{(n+1-k)}$ est $\mathscr{C}^k$ donc continue. Ainsi $(fg)^{(n+1)}$ est continue comme produit et combinaison linéaire de fonctions qui le sont. Ainsi fg est $\mathscr{C}^{n+1}$ et on a prouvé que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

- En conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$.

□

Proposition

Soient $n \in \mathbb{N}$ et I et J deux intervalles non vides et non réduits à un point. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ respectivement sur I et J (resp. n-fois dérivables) telles que $f(I) \subset J$. Alors $(g \circ f)$ est de classe $\mathscr{C}^n$ (resp. n-fois dérivable) sur I.

Démonstration. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{P}(n)$: « Pour toutes fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$ respectivement sur I et J avec $f(I) \subset J$, $g \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I ».

- Supposons f et g de classe $\mathscr{C}^0$ respectivement sur I et J. Alors, $g \circ f$ est continue sur I d'après le chapitre précédent. Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie.
  Supposons $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ respectivement sur I et J telles que $f(I) \subset J$. On a alors g et f de classe $\mathscr{C}^1$ (car $n+1 \geq 1$) donc g et f sont dérivables, et $g \circ f$ est dérivable (comme composée de fonctions qui le sont). On a $(g \circ f)' = f'(g' \circ f)$. Comme f est $\mathscr{C}^{n+1}$, f' est $\mathscr{C}^n$. Comme g est $\mathscr{C}^{n+1}$, g' est $\mathscr{C}^n$ et f est $\mathscr{C}^n$ (car $\mathscr{C}^{n+1}$) donc par hypothèse de récurrence, $g' \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^n$. Enfin $(g \circ f)'$ est de classe $\mathscr{C}^n$ comme produit de fonctions qui le sont (d'après la proposition précédente). D'où $g \circ f$ est $\mathscr{C}^{n+1}$ et donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

□

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient f et $g : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$ (resp. n-fois dérivable). Si g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g}$ est classe $\mathscr{C}^n$ (resp. n-fois dérivable) sur I.

Démonstration. $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et g est de classe $\mathscr{C}^n$ et ne s'annule pas sur I. Ainsi, par composition, $\dfrac{1}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I. De plus, f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I donc par produit, $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I. □

Méthode

Quand il n'y a pas de problème, on justifie en une phrase le caractère n-fois dérivable, $\mathscr{C}^n$ ou $\mathscr{C}^\infty$ d'une fonction comme combinaison linéaire, produit, composée et quotient (attention au dénominateur) de fonctions qui le sont.

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : I \to J$ une bijection de classe $\mathscr{C}^n$. Alors f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^n$ sur J si et seulement si f' ne s'annule pas sur I.

Démonstration. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathscr{P}(n)$: « Si $f : I \to J$ est bijective, de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et telle que f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^n$ sur J ».

- Pour $n = 1$, soit $f : I \to J$ est bijective, de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et telle que f' ne s'annule pas sur I. Comme f est bijective, dérivable et f' ne s'annule pas sur I, f^{-1} est dérivable par le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque et on a $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ avec f' continue et ne s'annulant pas sur I, et f^{-1} continue (car dérivable), donc $(f^{-1})'$ et continue comme quotient et composée de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas. Ainsi f^{-1} est $\mathscr{C}^1$ et $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathscr{P}(n)$. Soit $f : I \to J$ est bijective, de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I et telle que f' ne s'annule pas sur I. Comme f est bijective, dérivable et f' ne s'annule pas sur I, f^{-1} est dérivable par le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque et on a $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$. Or, f est de classe $\mathscr{C}^n$ donc par hypothèse de récurrence, f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^n$ sur J. De plus, f' est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I donc par composition $f' \circ f^{-1}$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur J. De plus, f' ne s'annule pas sur I donc $f' \circ f^{-1}$ ne s'annule pas sur J. Ainsi, par quotient, $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$ est de classe $\mathscr{C}^n$ donc f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur J. Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie
- En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

$\square$

Exemple :

- La fonction arctan est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions arcsin et arccos sont $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

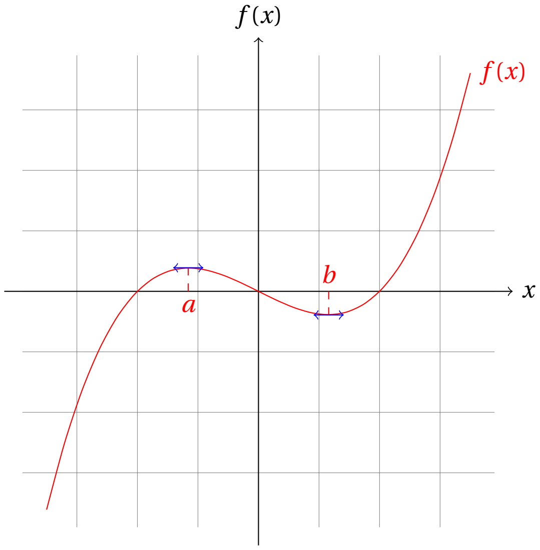
3 Propriétés des fonctions dérivables

3.1 Extremum local

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.

- On dit que f admet une maximum local en a, si et seulement si il existe un réel $r > 0$ tel que la fonction $f_{|I \cap]a-\eta, a+\eta[}$ admette un maximum en a, i.e :
$$\forall x \in I \cap]a-r, a+r[,\ f(x) \leq f(a)$$
- On dit que f admet une minimum local en a, si et seulement si il existe un réel $r > 0$ tel que la fonction $f_{|I \cap]a-r, a+r[}$ admette un minimum en a, i.e :
$$\forall x \in I \cap]a-r, a+r[,\ f(a) \leq f(x)$$
- On dit que f admet un extremum local en a, si et seulement si f admet un maximum local en a ou un minimum local en a.



f admet ici des extrema locaux (et non globaux) en a et b.

Remarque :

- On utilise parfois la locution « maximum global » à la place de maximum. De même, pour le minimum.
- Un extremum global est évidemment un extremum local.

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si :

- $a \in I$ et a n'est pas une extrémité de I,
- la fonction f est dérivable en a,
- la fonction f admet un extremum local en a,

alors $f'(a) = 0$.

Démonstration. Quitte à changer f en $-f$, on suppose que f admet un maximum local en a. Ainsi, il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall x \in]a-r, a+r[\cap I,\ f(x) \leq f(a).$$

Comme a n'est pas une extrémité de I et I est un intervalle, il existe $v > 0$ tel que $[a-v, a+v] \subset I$. Posons $\delta = \min(r, v) > 0$.
Ainsi : $\forall x \in]a-\delta, a+\delta[,\ f(x) \leq f(a)$.
Pour tout $x \in [a-\delta, a[$, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$ (car $f(x)-f(a) \leq 0$ et $x-a < 0$), donc comme f est dérivable en a, en passant à la limite, on obtient $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$.
D'où $f'(a) = f'_g(a) \geq 0$.
De même, pour tout $x \in]a, a+\delta]$, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$ (car $f(x)-f(a) \leq 0$ et $x-a > 0$), donc en passant à la limite, on obtient : $f'(a) = f'_d(a) \leq 0$.
Ainsi, $f'(a) = 0$. □

Remarque :

- L'hypothèse a n'est pas une extrémité de I est essentielle . Contre-exemple la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(t) = t$ est dérivable sur $[0,1]$ et admet 1 pour maximum, atteint en $x = 1$; mais $f'(1) \neq 0$.
- La condition $f'(a) = 0$ n'implique pas qu'il y ait un extremum local en a.
  Par exemple, la fonction $f : x \mapsto x^3$ satisfait $f'(0) = 0$, mais f n'admet pas d'extremum local en 0. La proposition précédente fournit donc une condition nécessaire d'existence d'extremum local en un point intérieur, mais celle-ci n'est pas suffisante.

3.2 Théorème de Rolle

Théorème de Rolle

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b)$.
Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$

Démonstration. f est continue sur le segment $[a,b]$ donc est bornée et atteint ses bornes . Ainsi, il existe $(\alpha,\beta)\in[a,b]^2$ tel que

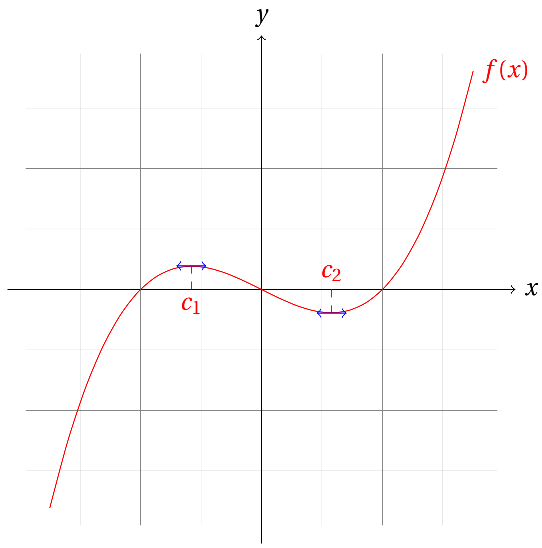
$$\forall x\in[a,b],\ f(\alpha)\leq f(x)\leq f(\beta)$$

- Si $\alpha\in\{a,b\}$ et $\beta\in\{a,b\}$. Comme $f(a)=f(b)$, $f(\alpha)=f(\beta)$, on a : $\forall x\in[a,b],\ f(\alpha)\leq f(x)\leq f(\beta)=f(\alpha)$ donc : $\forall x\in[a,b],\ f(x)=f(\alpha)$. f est alors constante, et en tout $c\in]a,b[$, on a $f'(c)=0$.
- Sinon $\alpha\in]a,b[$ ou $\beta\in]a,b[$.
  - Si $\alpha\in]a,b[$. Alors, f admet un extremum (local) en $\alpha\in]a,b[$, f est dérivable en α et α n'est pas une extrémité de $[a,b]$ donc $f'(\alpha)=0$ d'après la proposition précédente.
  - Si $\beta\in]a,b[$, on procède de même : f admet alors un extremum local en $\beta\in]a,b[$, f est dérivable en β et β n'est pas une extrémité de $[a,b]$ donc $f'(\beta)=0$.

□

Remarque :

- Le théorème de Rolle fournit l'existence d'un c tel que $f'(c)=0$ mais en aucun cas l'unicité.



3.3 Egalité des accroissement finis et applications

Théorème : Egalité des accroissements finis

Soient a et b deux réels avec $a<b$ et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Démonstration. Posons $\begin{array}{rccl} g: & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x \end{array}$.

g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

De plus, on a $g(a)=f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}a=\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}$ et $g(b)=f(b)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}b=\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}=f(a)$. Par le théorème de Rolle appliqué à g, il existe $c\in]a,b[$ tel que $g'(c)=0$. Alors $f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$, donc $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$, puis $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$. □

Remarque : Ce théorème est une généralisation du théorème de Rolle : si $f(a)=f(b)$, on obtient $f'(c)=0$.

Interprétation géométrique :

Le théorème des accroissements finis signifie que si f est une fonction continue sur le segment $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, alors il existe (au moins) une tangente à son graphe qui soit parallèle à la corde (AB), où $A(a,f(a))$ et $B(b,f(b))$ (même coefficient directeur).

Interprétation cinématique :

Considérons un point mobile se déplaçant sur un axe et supposons que la position soit une fonction dérivable du temps. Ce théorème nous dit qu'il existe un instant c où la vitesse instantanée $f'(c)$ est égale à la vitesse moyenne sur le trajet $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Fonctions monotones

Proposition

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

1. f est constante sur $[a, b]$ si et seulement si f' est nulle sur $]a, b[$.
2. f est croissante (resp. décroissante) sur $[a, b]$ si et seulement si f' est positive (resp. négative) sur $]a, b[$.

Démonstration.

1. - Supposons f constante sur $[a, b]$.
   Soit $x_0 \in]a, b[$. Soit $x \in [a, b] \setminus \{x_0\}$, on a $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$ donc $f'(x_0) = 0$. Ainsi, $f' = 0$ sur $]a, b[$.
   - Supposons que $f' = 0$ sur $]a, b[$, et soit $x, y \in [a, b]$:
     - si $x = y$ alors $f(x) = f(y)$
     - si $x \neq y$, quitte à échanger x et y, on peut supposer $x < y$. f étant continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$ car dérivable sur $]a, b[$ donc d'après l'égalité des accroissements finis, il existe $c \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) = 0$. Donc $f(x) = f(y)$.

   Ainsi, f est constante sur $[a, b]$.
2. Quitte à considérer $-f$, on suppose que f est croissante.
   - Soit $x_0 \in]a, b[$. Soit $x \in]x_0, b[$, on a $f(x) - f(x_0) \geq 0$ car f croissante et $x - x_0 > 0$ donc $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$. En faisant tendre x vers x_0 et comme f est dérivable en x_0, on obtient : $f'(x_0) = f'_g(x_0) \geq 0$.
   - Supposons $f' \geq 0$ sur $]a, b[$. Soit $(x, y) \in [a, b]^2$.
     - Si $x = y$ alors $f(x) = f(y)$
     - Si $x < y$: f est continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$ car dérivable sur $]a, b[$ donc par l'égalité des accroissements finis, il existe $c \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) \geq 0$ car $f'(c) \geq 0$ et $y - x > 0$. Ainsi $f(y) \geq f(x)$
     - Si $y < x$: en intervertissant le rôle de x et y dans le cas précédent, on obtient le résultat.

   donc f est croissante.

□

Remarque :

- Si f' est strictement positive (resp. f' strictement négative) sur $]a, b[$, le raisonnement précédent montre qu'alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur $[a, b]$.
- La réciproque est cependant fausse (les inégalités deviennent larges en passant à la limite : une fonction f strictement croissante sur $[a, b]$ ne satisfait pas nécessairement $f' > 0$ sur $]a, b[$, comme le montre la fonction $f(x) = x^3$ (strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et telle que $f'(0) = 0$). On a en revanche le résultat suivant utile en pratique.

Proposition

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
Si f' est strictement positive (resp. strictement négative), sauf éventuellement en un nombre fini de points de $]a, b[$ où f' s'annule, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante).

Démonstration. On sait déjà que f est croissante.
Par l'absurde, si f n'est pas strictement croissante, alors il existe $c, d \in [a, b]$ tels que $c < d$ et $f(c) \geq f(d)$. Or, f est croissante sur $[a, b]$ donc $f(c) \leq f(d)$ d'où $f(c) = f(d)$. Comme f est croissante, on a donc $f_{|[c,d]}$ constante d'où f' est nulle sur le segment $[c, d]$. Contradiction avec l'hypothèse de départ. Ainsi, f est strictement croissante. □

3.4 Théorème de la limite de la dérivée

Théorème de la limite de la dérivée

Soit $a \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et f dérivable sur $I \setminus \{a\}$. Si f' tend vers l (réel ou infinie) lorsque x tend vers a alors $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ tend vers l lorsque x tend vers a.
En particulier si l est réel, f est dérivable en a et $f'(a) = l$.

Démonstration. Soit $x \in I$ tel que $x > a$, on a f continue sur $[a,x]$, dérivable sur $]a,x[$, donc par l'égalité des accroissements finis, il existe $c_x \in]a,x[$ tel que $f(x)-f(a) = (x-a)f'(c_x)$. Alors $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x)$. Or, $a < c_x < x$, donc $c_x \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} a$ par le théorème d'encadrement. Ainsi, par composition des limites, $\lim\limits_{x\to a^+} f'(c_x) = l$. Donc $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$.

On montre de même que $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$.

Ainsi, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tend vers l lorsque x tend vers a. □

Remarque :

- Si $l = \pm\infty$, f n'est pas dérivable en a, et $\mathscr{C}_f$ admet une tangente verticale en a.
- Si l est fini, on aura f dérivable en a et $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = f'(a)$ donc f' est continue en a. Ainsi, f est de classe $\mathscr{C}^1$ en a.

Méthode

Pour déterminer si une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable sur $I\backslash\{a\}$, est effectivement dérivable en a, on peut :

- soit étudier le taux d'accroissement en a.
- soit utiliser le théorème de la limite de la dérivée, sans oublier de prouver la continuité de f en a.

Exemple :21
Soit $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^2 \ln x$. Montrons que f se prolonge en une fonction qui est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

- f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions qui le sont. De plus, $\lim\limits_{c\to 0} f(x) = 0$ par croissance comparée. On peut donc prolonger f en 0 en posant $f(0) = 0$. On note toujours f le prolongement.
- f est désormais continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = 2x\ln x + x$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$ par croissance comparée. Donc d'après le théorème de la limite de la dérivée, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, et $f'(0) = 0$ par le théorème précédent.

3.5 Méthode de Newton

Voir cours informatique

3.6 Inégalité des accroissement finis et application aux suites récurrentes

Proposition : Inégalité des accroissements finis

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

1. S'il existe $(m,M) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in]a,b[$, $m \leq f'(x) \leq M$, alors $m(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq M(b-a)$.
2. S'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x \in]a,b[$, $|f'(x)| \leq M$, alors $|f(b)-f(a)| \leq M(b-a)$.

Démonstration. Par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b)-f(a) = (b-a)f'(c)$. Comme $b-a > 0$ et comme $m \leq f'(c) \leq M$, on a le résultat.
Le cas particulier se déduit du résultat précédent en prenant $m = -M$. □

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $k \geq 0$. On dit que f est k-lipschitzienne (ou lipschitzienne de rapport k) sur I si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in I^2,\ |f(x)-f(y)| \leq k|x-y|.$$

Remarque : Toute fonction lipschitzienne est continue.
Soit f une fonction k-lipschitzienne.
Soit $a \in I$. Soit $\epsilon > 0$.
Posons $\eta = \dfrac{\epsilon}{k}$. Soit $x \in I$ tel que $|x-a| \leq \eta$.
Alors, $|f(x)-f(a)| \leq k|x-a| \leq k\eta \leq \epsilon$.
Ainsi, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
Ainsi, f est continue en a.

Proposition : Inégalité des accroissements finis

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est dérivable sur I et si $|f'|$ est majorée par M sur I alors f est M lipschitzienne sur I.

Démonstration. Soit $(x, y) \in I^2$. Si $x = y$, on a $|f(x) - f(y)| = 0 \leq M|x - y|$. Sinon, on suppose $x < y$ quitte à échanger x et y. Alors f est continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$ (car dérivable sur I et I intervalle) et : $\forall t \in]x, y[, |f'(t)| \leq M$, par l'inégalité des accroissements finis, $|f(y) - f(x)| \leq M|y - x[$. Ainsi f est M-lipschitzienne sur I □

Exemple : Si f est $\mathscr{C}^1$ sur un segment $[a, b]$, alors f est lipschitzienne. En effet f' est continue sur le segment $[a, b]$ donc y est bornée.

Méthode : application aux inégalités

Il est fréquent en analyse d'avoir à étudier des inégalités. Parmi les techniques usuelles, auxquelles on doit spontanément penser, citons :

- L'étude des variations de fonctions
- le théorème des accroissements finis.

Exemple : Les fonctions sinus et cosinus sont 1-lipschitziennes sur $\mathbb{R}$. En effet pour le sinus par exemple, on a $|\sin'| = |\cos| \leq 1$. Par la proposition précédente, on a :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \ |\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|.$$

En particulier pour $y = 0$, on retrouve l'inégalité classique $|sin(x)| \leq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exemple : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $f = \ln$. f est continue sur $[k, k+1]$, dérivable sur $]k, k+1[$. Et pour tout $t \in]k, k+1[$, $f'(t) = \dfrac{1}{t}$.

Ainsi, pour tout $t \in]k, k+1[$, $\dfrac{1}{k+1} \leq f'(t) \leq \dfrac{1}{k}$. Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\frac{1}{k+1} \leq f(k+1) - f(k) \leq \frac{1}{k}$$

D'où :

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}.$$

Application aux suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Nous avons déjà rencontré de telles suites au chapitre 14 et nous avons vu que si une telle suite converge vers un réel $l \in I$ et si f est continue sur I alors l est un point fixe de f. La difficulté est alors de prouver que la suite converge effectivement.

Définition

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite contractante si elle est k-lipschitzienne, avec $0 \leq k < 1$.

Proposition

Soit $f : I \to I$ une fonction contractante. Si f admet un point fixe l, alors l est unique et toute suite définie par récurrence par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l.
Plus précisément, si f est k-lipschitzienne avec $0 \leq k < 1$ alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n - l| \leq k^n |u_0 - l|$$

Démonstration. Supposons avoir un deuxième point fixe $l_1 \neq l \in I$. Alors $|f(l) - f(l_1)| \leq k|l_1 - l|$ i.e. $|l - l_1| \leq k|l - l_1|$ i.e. $1 \leq k$ (car $|l - l_1| > 0$)... absurde ! Ainsi l est l'unique point fixe de f.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Une telle suite est bien définie car $u_0 \in I$ et I est stable par f.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $\mathscr{P}(n)$: « $|u_n - l| \leq k^n |u_0 - l|$ ».
Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

- $k^0 |u_0 - l| = |u_0 - l| =$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
  Alors $|u_{n+1} - l| = |f(u_n) - f(l)| \leq k|u_n - l| \leq k \times k^n |u_0 - l| = k^{n+1} |u_0 - l|$ et $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

- En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Comme $k \in]0,1[$, $(k^n|u_0 - l|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. $\square$

Remarque :

- Si $I = [a,b]$ avec $a < b$ et $f : I \to I$ contractante alors f est continue de $[a,b]$ dans $[a,b]$ donc admet au moins un point fixe (Conséquence du théorème des valeurs intermédiaires).
- Pour montrer que f est contractante, on applique souvent l'inégalité des accroissement finis en montrant qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que : $\forall x \in I, |f'(x)[\leq k$
- u_n fournit une approximation du point fixe de f à une certaine précision. Si $I = [a,b]$, la démonstration précédente donne :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - l| \leq k^n|u_0 - l| \leq k^n|b-a|$$
Ainsi, u_n constitue une estimation du point fixe l de f avec une précision au moins égale à $k^n|b-a|$.

Exemple :

1. Posons $f : x \mapsto 2 + \frac{1}{2}\sin x$. $u_0 \in \mathbb{R}$ donc $u_1 \in \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$ car sin à valeurs dans $[-1,1]$. De plus, $\left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$ est stable par f car sin à valeurs dans $[-1,1]$.
De plus, $f : \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right] \to \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$ est continue sur $\left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$. Ainsi, D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction g définie par $g : x \mapsto f(x) - x$, on prouve que f admet (au moins) un point fixe dans $\left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$ que l'on note l.
Enfin, f est dérivable sur $\left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$ et on a :
$$\forall x \in \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right],\ |f'(x)| = |\frac{1}{2}\cos(x) \leq \frac{1}{2}.$$
Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis, f est $\frac{1}{2}$ lipschitzienne donc contractante.
Ainsi, le point fixe de f sur $\left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$ est unique et la suite (u_n) converge vers l.
2. Posons $f : x \mapsto \cos(x)$. $u_0 \in \mathbb{R}$ donc $u_1 \in [-1,1]$ car cos à valeurs dans $[-1,1]$. De plus, $[-1,1]$ est stable par f car cos à valeurs dans $[-1,1]$.
De plus, $f : [-1,1] \to [-1,1]$ est continue sur $[-1,1]$. Ainsi, D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction g définie par $g : x \mapsto f(x) - x$, on prouve que f admet au moins un point fixe dans $[-1,1]$ que l'on note l.
Enfin, f est dérivable sur $[-1,1]$ et pour tout $x \in [-1,1]$, $|f'(x)| = |-\sin(x)| \leq \sin(1)$. Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis, f est $\sin(1) < 1$ lipschitzienne donc contractante.
Ainsi, le point fixe de f sur $[-1,1]$ est unique et la suite (u_n) converge ver l.

4 Extension aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

On suppose toujours que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à point.

Définition

- On dit que $f : I \to \mathbb{C}$ est dérivable en $a \in I$ lorsque son taux d'accroissement en a :
$$\begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array}$$
admet une limite (finie) quand x tend vers a. On appelle alors dérivée de f en a et on note $f'(a)$ cette limite.
- On dit que f est dérivable sur I lorsque f est dérivable en tout point de I.

Rappel : Soit $f : I \to \mathbb{C}$.
On définit les fonctions $\mathrm{Re}(f) : I \to \mathbb{R}$ et $\mathrm{Im}(f) : I \to \mathbb{R}$ par :
$\forall x \in I$, $\mathrm{Re}(f)(x) = \mathrm{Re}(f(x))$ et $(\mathrm{Im}(f)(x) = \mathrm{Im}(f(x))$.

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ et $a \in I$. f est dérivable en a si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivables en a, et on a alors :
$$f'(a) = \mathrm{Re}(f)'(a) + i\mathrm{Im}(f)'(a).$$

Remarque : Si f est dérivable en a, on peut encore écrire $\mathrm{Re}(f') = \left(\mathrm{Re}(f)\right)'$ et $\mathrm{Im}(f') = \left(\mathrm{Im}(f)\right)'$

Démonstration. C'est une conséquence des résultats établis sur les limites.
$x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite finie en a si et seulement si $x \mapsto \mathrm{Re}\left(\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$ et $x \mapsto \mathrm{Im}\left(\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$ admettent des limites finies en a si et seulement si $x \mapsto \dfrac{\mathrm{Re}(f)(x)-\mathrm{Re}(f)(a)}{x-a}$ et $x \mapsto \dfrac{\mathrm{Im}(f)(x)-\mathrm{Im}(f)(a)}{x-a}$ ont des limites finies en a.
Et on a alors :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{Re(f)(x)-Re(f)(a)}{x-a} + i \lim_{x\to a} \frac{Im(f)(x)-Im(f)(a)}{x-a}.$$

D'où le résultat. □

Exemple : Posons $f : x \mapsto \cos(x)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x) = \mathrm{Re}(e^{ix})$. Posons $u : x \mapsto e^{ix}$. Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \mathrm{Re}(u^{(n)}(x))$. Or, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \ u^{(n)}(x) = i^n e^{ix}$. D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \mathrm{Re}\left(i^n e^{ix}\right).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \mathrm{Re}\left(e^{in\frac{\pi}{2}} e^{ix}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(e^{i\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)}\right) \\ &= \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Remarque :

- Le théorème de Rolle (et des accroissement finis) est faux pour les fonction à valeurs complexes : la fonction $\begin{array}{cccc} f & [0,2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & e^{it} \end{array}$ est continue sur $[0,2\pi]$, dérivable sur $]0,2\pi[$, on a bien $f(2\pi) = f(0) = 1$. Cependant pour tout $t \in]0,2\pi[$, $f'(t) \neq 0$ car $|f'(t)| = 1$.
- On conserve cependant l'inégalité des accroissements finis pour les fonctions à valeurs complexes.

Proposition : Inégalité des accroissements finis

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle qu'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x \in]a,b[$, $|f'(x)| \leq M$. Alors, on a l'inégalité : $|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$.

Démonstration. Notons θ un argument de $f(b)-f(a)$, de sorte que $f(b)-f(a) = |f(b)-f(a)|e^{i\theta}$. Ainsi, $e^{-i\theta}(f(b)-f(a)) = |f(b)-f(a)|$.
On pose $\begin{array}{cccc} g : & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \mathrm{Re}(e^{-i\theta} f(x)) \end{array}$.
g est dérivable sur $]a,b[$ (car partie réelle d'une fonction qui l'est). Soit $x \in]a,b[$,

$$|g'(x)| = |\mathrm{Re}(e^{-i\theta} f'(x))| \leq |e^{-i\theta} f'(x)| = |f'(x)| \leq M.$$

D'après l'inégalité des accroissements finis (cas réel), g est M-lipschitzienne. Ainsi $|g(b)-g(a)| \leq M|b-a|$. Or,

$$|g(b)-g(a)| = |\mathrm{Re}(e^{-i\theta}(f(b)-f(a)))| = |\mathrm{Re}(|f(b)-f(a)|)| = |f(b)-f(a)|.$$

Ainsi, on a bien $|f(b)-f(a)| \leq M|b-a|$. □

Corollaire

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur I. S'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq M$ alors, f est M-lipschitzienne sur I.

Exemple : $t \mapsto e^{it}$ est 1-lipschitzienne.

Proposition

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
f est constante sur $[a,b]$ si et seulement si f' est nulle sur $]a,b[$.

Démonstration. $\Rightarrow$ Si f est constante, son taux d'accroissement en tout point de I est nul, et donc f est dérivable sur $]a,b[$ et f' est nulle.

$\Leftarrow$ Si f a une dérivée nulle sur $]a,b[$. Soient $x,y \in \mathbb{R}$.

- Si $x = y$ alors $f(x) = f(y)$
- Si $x \neq y$, quitte à échanger x et y , on peut supposer $x < y$. On a f continue sur $[x,y]$, dérivable sur $]x,y[$ et : $\forall t \in]x,y[, |f'(t)| = 0$ donc $|f(x) - f(y)| \leq 0$ donc $f(x) = f(y)$.

Ainsi, f est constante.

□

Pour résumer ce qui est vrai ou non pour une fonction à valeurs complexes :

Ce qu'on garde :	**Ce qu'on ne garde pas :**
Développement limité à l'ordre 1	Dérivabilité de la fonction réciproque
Dérivable $\Rightarrow$ continu	Annulation aux extrema locaux
Opérations sur les dérivées	Théorème de Rolle
Dérivées d'ordre supérieur, fonctions $\mathscr{C}^k$	Egalité des accroissements finis
Opérations sur les fonctions $\mathscr{C}^k$	Lien monotonie/signe de la dérivée
Inégalité des accroissements finis	Théorème de la limite de la dérivée
Dérivée bornée $\Rightarrow$ f lipschitzienne	
Dérivée nulle $\Rightarrow$ f constante	