Chapitre 19 : Espaces vectoriels

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

1.1 Structure de $\mathbb{K}$ espace vectoriel

Définition

Soit E un ensemble muni :

- d'une addition notée $+$, c'est à dire une application :

$$\begin{array}{ccc} E\times E & \to & E \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$$

- d'une multiplication externe notée . , aussi appelée multiplication par un scalaire, c'est à dire une application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda,y) & \mapsto & \lambda.y \end{array}$$

On dit que $(E,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ssi :

- L'addition de E possède les propriétés suivantes :
  * $\forall (x,y,z)\in E^3,\ (x+y)+z = x+(y+z)$ (associativité)
    On pourra ainsi écrire $x+y+z$.
  * $\exists e\in E, \forall x\in E,\ x+e = e+x = x$.
    Un tel e est unique et on le note généralement 0_E.
  * $\forall x\in E, \exists x'\in E,\ x+x' = x'+x = 0_E$.
    Un tel x' est unique. On l'appelle opposé de x et on le note $-x$. On a ainsi : $x+(-x) = (-x)+x = 0_E$.
  * $\forall (x,y)\in E^2,\ x+y = y+x$ (commutativité).
- La multiplication par un scalaire vérifie :
  * $\forall (\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\ \forall x\in E,\ (\lambda+\mu).x = \lambda.x+\mu.x$.
  * $\forall \lambda\in\mathbb{K},\ \forall (x,y)\in E^2,\ \lambda.(x+y) = \lambda.x+\lambda.y$.
  * $\forall (\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\ \forall x\in E,\ \lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$.
  * $\forall x\in E,\ 1.x = x$.

Démonstration. Prouvons l'unicité de l'élément neutre et de l'opposé :

- Supposons qu'il existe $e,f\in E$ tels que : $\forall x\in E,\ x+e = e+x = x$ et : $\forall x\in E,\ x+f = f+x = x$.
  Alors $e = e+f$ (car f est élément neutre) et $e+f = f$ (car e est élément neutre) donc $e = f$ et on a unicité.
- Soit $x\in E$, supposons qu'il existe $y,z\in E$ tels que : $x+y = y+x = 0_E$ et $x+z = z+x = 0_E$.
  Alors $y+(x+z) = y+0_E = y$ et $y+(x+z) = (y+x)+z = 0_E+z = z$.

□

Remarque : Les éléments de E sont appelés vecteurs et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaire.

Proposition : Propriétés élémentaires

- Soit $(\lambda,x)\in\mathbb{K}\times E$, on a : $\lambda.x = 0_E \iff \lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E$.
- Soit $(\lambda,x)\in\mathbb{K}\times E$, on a : $(-\lambda).x = \lambda.(-x) = -(\lambda.x)$.

Démonstration. • Soit $x\in E$ et $\lambda\in\mathbb{K}$.

- Supposons $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$.
  On a : $0_{\mathbb{K}}.x = (0_{\mathbb{K}}+0_{\mathbb{K}}).x = 0_{\mathbb{K}}.x+0_{\mathbb{K}}.x$ par distributivité. Ainsi, en ajoutant l'opposé de $0_{\mathbb{K}}.x$, on obtient :
  $0_{\mathbb{K}}.x-0_{\mathbb{K}}.x = 0_{\mathbb{K}}.x+0_{\mathbb{K}}.x-0_{\mathbb{K}}.x$. Donc $0_E = 0_{\mathbb{K}}.x+0_E$. Ainsi $0_E = 0_{\mathbb{K}}.x$.

    - Supposons $x = 0_E$.
      On a : $\lambda.0_E = \lambda.(0_E + 0_E) = \lambda.0_E + \lambda.0_E$ par distributivité. En ajoutant l'opposé de $\lambda.0_E$, on obtient : $\lambda.0_E - \lambda.0_E = \lambda.0_E + \lambda.0_E - \lambda.0_E$. Donc $0_E = \lambda.0_E + 0_E$. Ainsi : $0_E = \lambda.0_E$.
- Soit $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$ tel que $\lambda.x = 0_E$.
  Supposons $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$ et montrons que $x = 0_E$.
  On a $x = 1.x = (\lambda^{-1}\lambda).x = \lambda^{-1}.(\lambda.x) = \lambda^{-1}.0_E = 0_E$.
- Soit $(\lambda, x) \in K \times E$, on a $(-\lambda).x + \lambda.x = (-\lambda + \lambda).x = 0_K.x = 0_E$ (par distributivité).
  Ainsi $-(\lambda.x) = (-\lambda).x$.
  Soit $(\lambda, x) \in K \times E$, on a $\lambda.(-x) + \lambda.x = \lambda.(-x + x) = \lambda.0_E = 0_E$.
  Ainsi $\lambda.(-x) = -(\lambda.x)$.

□

1.2 Espaces vectoriels de référence

1.2.1 Espace vectoriel $\mathbb{K}$

L'ensemble $\mathbb{K}$ muni de son addition et de sa multiplication est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
En particulier, $\mathbb{R}$-est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

$\mathbb{C}$ est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel si on le munit de son addition et de la multiplication externe : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda.x \end{array}$

1.2.2 Espace vectoriel $\mathbb{K}^n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on muni usuellement $\mathbb{K}^n$ des lois suivantes :

- l'addition telle que, pour $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{K}^n$:
$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_3 + y_3)$$
- la multiplication par un scalaire telle que, pour $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:
$$\lambda.(x_1, x_2, ..., x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$$

Proposition

Muni de ces lois, l'ensemble $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et le vecteur nul est $0_{\mathbb{K}^n} = (0, ..., 0)$.

Démonstration.

- * Soit $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$, $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{K}^n$, on a :
$$\begin{aligned} x + (y + z) &= (x_1, ..., x_n) + \big((y_1, ..., y_n) + (z_1, ..., z_n)\big) \\ &= x + \big(y_1 + z_1, ..., y_n + z_n\big) \\ &= (x_1 + (y_1 + z_1), \ldots, x_n + (y_n + z_n)) \\ &= ((x_1 + y_1) + z_1, \ldots, (x_n + y_n) + z_n) \\ &= \big(x_1 + y_1, ..., x_n + y_n\big) + z \\ &= \big((x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n)\big) + (z_1, ..., z_n) \\ &= (x + y) + z \end{aligned}$$
    donc + est associative.
  * Soit $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{K}^n$, on a : $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) = (y_1 + x_1, \ldots, y_n + x_n) = y + x$ donc + est commutative.
  * Le n-uplet $0_{\mathbb{K}^n} = (0, ..., 0)$ est élément neutre puisque pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$, on a : $x + 0_{\mathbb{K}^n} = (x_1 + 0, ..., x_n + 0) = x$.
  * Pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$, on a : $(x_1, x_2, ..., x_n) + (-x_1, -x_2, ..., -x_n) = (0, ..., 0) = 0_{\mathbb{K}^n}$ et donc l'opposé de x est $-x = (-x_1, ..., -x_n)$.
- Pour tout $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{K}^n$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mu \in \mathbb{K}$, on a :
  * $\lambda.(\mu.x) = \lambda.(\mu x_1, \ldots, \mu x_n) = (\lambda\mu x_1, \ldots, \lambda\mu x_n) = (\lambda\mu).x$
  * $(\lambda + \mu).x = ((\lambda + \mu)x_1, \ldots, (\lambda + \mu)x_n) = (\lambda x_1 + \mu x_1, \ldots, \lambda x_n + \mu x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) + (\mu x_1, \ldots, \mu x_n) = \lambda.x + \mu.x$
  * $\lambda.(x + y) = (\lambda(x_1 + y_1), \ldots, \lambda(x_n + y_n)) = (\lambda x_1 + \lambda y_1, \ldots, \lambda x_n + \lambda y_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) + (\lambda y_1, \ldots, \lambda y_n) = \lambda.x + \lambda.y$
  * $1.x = (1x_1, ...1x_n) = x$.

□

1.2.3 Espace vectoriel $\mathscr{F}(\Omega,\mathbb{K})$

Soit Ω un ensemble non vide.
On muni usuellement $\mathscr{F}(\Omega,\mathbb{K})$ des lois suivantes :

- l'addition telle que, pour $f\in\mathscr{F}(\Omega,\mathbb{K})$ et $g\in\mathscr{F}(\Omega,\mathbb{K})$:

$$f+g:\begin{array}{ccc}\Omega & \to & \mathbb{K}\\ x & \mapsto & f(x)+g(x)\end{array}$$

- la multiplication par un scalaire telle que, pour $f\in\mathscr{F}(\Omega,\mathbb{K})$ et $\lambda\in\mathbb{K}$:

$$\lambda.f:\begin{array}{ccc}\Omega & \to & \mathbb{K}\\ x & \mapsto & \lambda\big(f(x)\big)\end{array}$$

Proposition

Muni de ces lois, $\mathscr{F}(\Omega,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et le vecteur nul est la fonction nulle.

Exemple : $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Les fonctions cos, exp, ..., sont des exemples de vecteurs de cet espace.

Démonstration.

- * Soit $(f,g,h)\in\mathscr{F}(\Omega,E)^3$. Soit $x\in\Omega$, on a :

$$\begin{aligned}(f+(g+h))(x)&=f(x)+(g+h)(x)\\&=f(x)+(g(x)+h(x))\\&=(f(x)+g(x))+h(x)\\&=(f+g)(x)+h(x)\\&=((f+g)+h)(x)\end{aligned}$$

  Ainsi, $f+(g+h)=(f+g)+h$ et $+$ est associative.
  * Soit $(f,g)\in\mathscr{F}(\Omega,E)$. Soit $x\in\Omega$, on a $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=g(x)+f(x)=(g+f)(x)$ donc $f+g=g+f$.
  * La fonction nulle :

$$0_{\mathscr{F}(\omega,E)}:\begin{array}{ccc}\Omega & \to & E\\ x & \mapsto & 0_E\end{array}$$

  est élément neutre puisque pour tout $f\in\mathscr{F}(\Omega,E)$ et pour tout $x\in\Omega$, on a $(f+0_{\mathscr{F}(\omega,E)})(x)=f(x)+0_E=f(x)$ donc $f+0_{\mathscr{F}(\omega,E)}=f$.
  * Soit $f\in\mathscr{F}(\Omega,E)$. La fonction $-f:\Omega\to E$, $x\mapsto -f(x)$ vérifie l'égalité $f+(-f)=0_{\mathscr{F}(\omega,E)}$.
  En effet : $\forall x\in\Omega,\ (f+(-f))(x)=f(x)-f(x)=0_E$.
- Soient $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$ et $f,g\in\mathscr{F}(\Omega,E)$
  * Soit $x\in\Omega$, on a $(\lambda.(\mu.f))(x)=\lambda.(\mu.f(x))=(\lambda\mu).f(x)=((\lambda\mu).f)(x)$ donc $\lambda.(\mu.f)=(\lambda\mu).f$.
  * Soit $x\in\Omega$, on a $((\lambda+\mu).f)(x)=\lambda.f(x)+\mu.f(x)=(\lambda.f+\mu.f)(x)$ donc $(\lambda+\mu).f=\lambda.f+\mu.f$.
  * Soit $x\in\Omega$, on a $(\lambda.(f+g))(x)=\lambda.(f(x)+g(x))=\lambda.f(x)+\lambda.g(x)=(\lambda.f+\lambda.g)(x)$ donc $\lambda.(f+g)=\lambda.f+\lambda.g$.
  * Soit $x\in\Omega$, $(1.f)(x)=1.f(x)=f(x)$, donc $1.f=f$.

□

Corollaire

$\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et le vecteur nul est la suite constante égale à 0.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
On muni usuellement $E\times F$ des lois suivantes :

- l'addition telle que, pour $(x,y)\in E\times F$ et $(x',y')\in E\times F$:

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$$

- la multiplication par un scalaire telle que, pour $(x,y)\in E\times F$ et $\lambda\in\mathbb{K}$

$$\lambda.(x,y)=(\lambda.x,\lambda.y)$$

Proposition

Muni de ces lois, $E\times F$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et le vecteur nul est $0_{E\times F}=(0_E,0_F)$.

Démonstration.

- * Soit $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (z_1, z_2) \in E \times F$, on a

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3)) &= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\ &= (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)) \\ &= ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3) \\ &= ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3)\end{aligned}$$

  donc + est associative.
  * Soit $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E \times F$, on a $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1)$ donc + est commutative.
  * Notons $0_{E\times F} = (0_E, 0_F)$. Soit $(x, y) \in E \times F$, on a $(x, y) + 0_{E\times F} = (x + 0_E, y + 0_F) = (x, y)$.
  * Soit $(x, y) \in E \times F$. On a alors $(x, y) + (-x, -y) = (x + (-x), y + (-y)) = (0_E, 0_F) = 0_{E\times F}$.
- Soient $(x, y), (x', y') \in E \times F$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. On a :
  * $\lambda.(\mu.(x, y)) = \lambda.(\mu x, \mu y) = (\lambda\mu x, \lambda\mu y) = (\lambda\mu).(x, y)$.
  * $(\lambda + \mu).(x, y) = ((\lambda + \mu)x, (\lambda + \mu)y) = (\lambda x, \lambda y) + (\mu x, \mu y) = \lambda.(x, y) + \mu.(x, y)$
  * $\lambda.((x, y) + (x', y')) = \lambda.(x + x', y + y') = (\lambda(x + x'), \lambda(y + y')) = (\lambda x, \lambda y) + (\lambda x', \lambda y') = \lambda.(x, y) + \lambda.(x', y')$
  * $1.(x, y) = (1.x, 1.y) = (x, y)$.

$\square$

Remarque : En particulier, si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, E^n est aussi un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1.2.4 Espaces vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ muni de l'addition matricielle et de la multiplication par un scalaire est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et le vecteur nul $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$ est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ c'est à dire $0_{n,p}$.

1.2.5 Espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$

$\mathbb{K}[X]$ muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et le vecteur nul $0_{\mathbb{K}[X]}$ est le polynôme nul.

1.3 Sous-espaces vectoriels

Définition

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $p \in \mathbb{N}^*$. On dit que $x \in E$ est combinaison linéaire des vecteurs $x_1, ..., x_p$ s'il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$.

Exemple : Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, ch et sh sont combinaisons linéaires de $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$.

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E ssi

- F est non vide.
- $\forall (x, y) \in F^2,\ x + y \in F$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in F,\ \lambda.x \in F$

Exemple : Si E est un $\mathbb{K}$-e.v., alors $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E (appelés sous-espaces vectoriels triviaux de E).
Le sous-ensemble $\mathbb{R}_+$ de $\mathbb{R}$ constitue un contre-exemple. En effet, $\mathbb{R}_+$ n'est pas stable par multiplication par un scalaire de $\mathbb{R}$.
Remarque : Tout sous-espace vectoriel F de E contient le vecteur nul 0_E : en effet, puisque $F \neq \emptyset$, il existe $x_0 \in F$.
D'où $0_E = 0 \cdot x_0 \in F$.
En particulier, si $0_E \notin F$, F ne peut pas être un s.e.v.

Structure induite
Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E alors, on peut le munir des lois induites :

$$\begin{array}{ccc} F\times F & \to & F \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times F & \to & F \\ (\lambda,x) & \mapsto & \lambda.x \end{array}$$

Proposition

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-e.v. et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F muni des lois induites est lui-même un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

Démonstration.
- L'ensemble F est muni d'une addition et d'une loi externe.
- * L'addition reste évidemment associative et commutative car ceci est vraie dans E contenant F.
  * Comme $0_E \in F$ et pour tout $x \in F \subset E$, on a $x+0_E = 0_E + x = x$ donc l'addition de F possède bien un élément neutre et $0_F = 0_E$.
  * Soit $x \in F$. Alors $-x = (-1).x \in F$, donc tout élément de F admet un opposé qui est bien dans F.
- Les dernières propriétés, qui sont vraies lorsque x et y appartiennent à E, sont à fortiori vraies lorsque x et y appartiennent à F.

□

Méthode

- Pour montrer qu'un ensemble E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on montrera systématiquement qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de l'un des exemples de référence vus dans la sous-partie précédente.
- Pour montrer que F est non vide, on montrera que $0_E \in F$.

Proposition Caractérisation

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Un ensemble $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si
- F est non vide
- $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall(x,y) \in F^2,\ \lambda.x+\mu.y \in F$

Remarque : On montre par récurrence que si $x_1,\dots x_n \in F$ et $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in K$ alors $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in F$.

Démonstration.
- Supposons que F est un sous-espace vectoriel de E.
  F est non vide.
  Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(x,y) \in F^2$.
  Par définition $\lambda.x \in F$ et $\mu.y \in F$ puis $\lambda.x+\mu.y \in F$.
- Réciproquement, Supposons que F est non vide et que : $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall(x,y) \in F^2,\ \lambda.x+\mu.y \in F$.
  Soit $(x,y) \in F$. En prenant $\lambda = \mu = 1$, on obtient $x+y \in F$.
  Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$. Puis, en prenant $\mu = 0$ et $y = 0_E$, on obtient : $\lambda.x = \lambda.x + 0.0_E \in F$.
  Donc F est un sous-espace vectoriel de E.

□

Exemple : Une droite D passant par $(0,0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
Une droite D ou un plan P passant par $(0,0,0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exemples déjà rencontrés

- L'ensemble des matrices diagonales, triangulaires supérieures (ou inférieures), symétriques, antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$. $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$ espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$.
- L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de n équations à p inconnues à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.
- Les ensembles $\mathscr{C}^k(I,\mathbb{K})$, $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{K})$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{F}(I,\mathbb{K})$.
- L'ensemble des solutions, sur un intervalle I, d'une équation différentielle linéaire homogène est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I,\mathbb{K})$.

1.4 Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie

Proposition Intersection de sous-espaces vectoriels

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille non vide de sous-espaces vectoriels de E. Alors $\bigcap\limits_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. Pour tout $i \in I$, $0_E \in F_i$, donc $0_E \in \bigcap\limits_{i\in I} F_i$ et $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.

Soient $(x,y) \in \left(\bigcap\limits_{i\in I} F_i\right)^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$.

Soit $i \in I$, $(x,y) \in F_i^2$, on a : $\lambda.x+\mu.y \in F_i$. Ainsi $\lambda.x+\mu.y \in \bigcap\limits_{i\in I} F_i$.

Ainsi $\bigcap\limits_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E. □

Définition

Soit $(E,+,\cdot)$ un e.v. et X une partie de E. On appelle sous-espace vectoriel engendré par X et on note $\mathrm{Vect}(X)$, l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels contenant X :

$$\mathrm{Vect}(X) = \bigcap_{\substack{F \text{ s.e.v.} \\ X\subset F}} F.$$

Remarque : ⚠ la réunion de sous-espaces vectoriels n'est pas, en général, un sous-espace vectoriel.
Dans $E = \mathbb{R}^2$, si F_1 est l'axe des abscisses et F_2 l'axe des ordonnées, $(1,0)$ et $(0,1)$ sont dans $F_1\cup F_2$, mais pas $(1,0)+(0,1) = (1,1)$.

$\mathrm{Vect}(X)$ le plus petit des sous-espaces vectoriels de E au sens de l'inclusion contenant X.

En effet :

- $X \subset \bigcap\limits_{X\subset F,\ F \text{ s.e.v.}} F$.
- $\bigcap\limits_{X\subset F,\ F \text{ s.e.v.}} F$ est bien un sous-espace vectoriel de E par la propriété précédente ;
- c'est bien le plus petit au sens de l'inclusion. Soit G s.e.v. de E tel que $X \subset G$, on a $\bigcap\limits_{\substack{F \text{ s.e.v.} \\ X\subset F}} F \subset G$.

Proposition

1. F est un sous-espace vectoriel si et seulement si $F = \mathrm{Vect}(F)$;
2. Si $X \subset Y$, alors $\mathrm{Vect}(X) \subset \mathrm{Vect}(Y)$.

Démonstration.

- Supposons que F est un sous-espace vectoriel. On a $F \subset \mathrm{Vect}(F)$ par définition de F. De plus, $\mathrm{Vect}(F)$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant donc comme F est lui même un sous-espace vectoriel contenant F, on a $\mathrm{Vect}(F) \subset F$.
  Donc $F = \mathrm{Vect}(F)$.
  Réciproquement supposons que $F = \mathrm{Vect}(F)$. Alors F est un sous-espace vectoriel.
- Supposons $X \subset Y$. On a $X \subset Y \subset \mathrm{Vect}(Y)$.
  Ainsi, $\mathrm{Vect}(Y)$ est un sous-espace vectoriel contenant X. Donc contient le plus petit sous-espace vectoriel contenant X.
  Ainsi : $\mathrm{Vect}(X) \subset \mathrm{Vect}(Y)$.

□

Proposition

Soit $(E,+,\cdot)$ un e.v. et X une partie non vide de E. Alors :

$$\mathrm{Vect}(X) = \{y \in E \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists x_1,\dots,x_n \in X, \exists \lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{K} \text{ tel que } y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\}$$

Démonstration. Notons $\mathscr{C} = \{y \in E \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists x_1,\dots,x_n \in X, \exists \lambda_1, \lambda_n \in \mathbb{K} \text{ tel que } y = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\}$.

Montrons que $Vect(X) = \mathscr{C}$ par double inclusion.

$\supset$ Soit $y \in \mathscr{C}$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_1, ..., x_n \in X$, il existe $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$. Or, Vect$(X)$ est un sous-espace vectoriel contenant X donc $x_1, ..., x_n \in \mathrm{Vect}(X)$ puis $y \in \mathrm{Vect}(X)$.

$\subset$ Montrons que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de E contenant X.

- Soit $x \in X$. On a $x = 1.x$ donc x est une combinaison linéaire de vecteurs de X. Ainsi $x \in \mathscr{C}$ et on a bien $X \subset \mathscr{C}$.
- On a déjà que $\mathscr{C} \neq \emptyset$ car $X \subset \mathscr{C}$.
  Soient $u, v \in \mathscr{C}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_1, ..., x_n \in X$, il existe $\lambda_1, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que $u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ et il existe $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $y_1, ..., y_p \in X$, il existe $\mu_1, \mu_p \in \mathbb{K}$ tel que $v = \sum_{k=1}^{p} \mu_k y_k$ $\alpha u + \beta v = \alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \beta \sum_{i=1}^{p} \mu_i y_i \in \mathscr{C}$.

Ainsi $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de E contenant X. Comme Vect(X) est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant X, on obtient $\mathrm{Vect}(X) \subset \mathscr{C}$.

□

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs de E.
On appelle sous espace engendré par la famille $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ le sous-espace vectoriel engendré par la partie $\{e_1, ..., e_n\}$.
On note simplement Vect$(e_1, ..., e_n)$.

On a ainsi :

$$\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_n) = \{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k | \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}.$$

Soit $x \in E$:

$$x \in \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_n) \iff \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

Vocabulaire :

- Si $x \in E \backslash \{0\}$, $\mathrm{Vect}(x) = \{\lambda.x;\ \lambda \in \mathbb{K}\}$. On l'appelle droite vectorielle de E engendré par x (par analogie avec les droites du plan ou de l'espace).
- Si x et $y \in E$ non colinéaires, $\mathrm{Vect}(x, y) = \{\lambda.x + \mu.y;\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\}$ est appelé plan vectoriel engendré par x et y.

Exemple :

- Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$: $\mathrm{Vect}(1) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Vect}(i) = i\mathbb{R}$ $\mathrm{Vect}(1, i) = \mathbb{C}$.
- Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$,$\mathrm{Vect}(1) = \mathbb{C}$.
- Dans $\mathbb{K}[X]$, $\mathrm{Vect}(1, X, ..., X^n) = \{\lambda_0 + \lambda_1 X + ... + \lambda_n X^n; (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}\} = \mathbb{K}_n[x]$.

Méthode

Lorsque l'on décrit une partie F d'un espace vectoriel E comme l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs, alors F est le sous-espace vectoriel engendré par cette famille, et donc F est un sous-espace vectoriel de E.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$, considérons $F = \{(x - 2y, 2x + y, 3x - 2y); (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence.
On peut écrire :

$$F = \{x(1,2,3) + y(-2,1,-2),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Ainsi, $F = \mathrm{Vect}(u, v)$ avec $u = (1,2,3)$ et $v = (-2,1,-2)$.

1.5 Somme de sous-espaces vectoriels

Définition

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, on appelle somme de F et G et on note $F + G$ l'ensemble :

$$F + G = \{x + y,\ (x, y) \in F \times G\}.$$

Proposition

$F+G=\text{Vect}(F\cup G)$.
Ainsi, $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. • • Si $x\in F$, on écrit $x=x+0$ avec $0\in G$, donc $x\in F+G$ et $F\subset F+G$. On montre de même que $G\subset F+G$. Ainsi, $F\cup G\subset F+G$.

- Comme $0\in F$ et $0\in G$, $0=0+0\in F+G$ donc $F+G\neq\emptyset$.

- Soient $(x,y)\in(F+G)^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$. Il existe $(e,f)\in F^2$ et $(g,h)\in G^2$ tels que $x=e+g$ et $y=f+h$.
Alors $\lambda.x+\mu.y=\lambda.(e+g)+\mu.(f+h)=(\lambda.e+\mu.f)+(\lambda.g+\mu.h)$, avec $\lambda.e+\mu.f\in F$ et $\lambda.g+\mu.h\in G$ car F et G sont des espaces vectoriels. Ainsi $\lambda.x+\mu.y\in F+G$.

$F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.
Ainsi,$F+G$ est un sous-espace vectoriel contenant $F\cup G$ donc $\text{Vect}(F\cup G)\subset F+G$

- Réciproquement, soit $z\in F+G$, il existe $(x,y)\in F\times G$ tel que $z=x+y$. Alors $x\in F\subset F\cup G\subset\text{Vect}(F\cup G)$, $y\in G\subset F\cup G\subset\text{Vect}(F\cup G)$. Puisque $\text{Vect}(F\cup G)$ est un s.e.v., on en déduit que $z\in\text{Vect}(F\cup G)$ et donc que $F+G\subset\text{Vect}(F\cup G)$.

□

Exemple :

- Dans $E=\mathbb{R}^2$, si $F=\{(x,0)\,;\,x\in\mathbb{R}\}$ et $G=\{(0,y)\,;\,y\in\mathbb{R}\}$, $F+G=\mathbb{R}^2$.
- Si $(v_1,\dots,v_m)$ et $(w_1,\dots,w_n)$ sont deux familles de vecteurs de E, alors :

$$\text{Vect}(v_1,\dots,v_m)+\text{Vect}(w_1,\dots,w_n)=\text{Vect}(v_1,\dots,v_m,w_1,\dots,w_n)$$

En effet, soit $z\in E$, on a :

$$\begin{aligned} z\in\text{Vect}(v_1,\dots v_m)+\text{Vect}(w_1,\dots w_n) &\Leftrightarrow \exists(x,y)\in\text{Vect}(v_1,\dots,v_m)\times\text{Vect}(w_1,\dots,w_n),\ z=x+y\\ &\Leftrightarrow \exists\lambda_1,\cdots,\lambda_m,\mu_1,\cdots\mu_n\in\mathbb{K}, z=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\cdot v_i+\sum_{j=1}^{n}\mu_j\cdot w_j\\ &\Leftrightarrow z\in\text{Vect}(v_1,\dots,v_m,w_1,\dots,w_n)\end{aligned}$$

Définition

Soit E un$\mathbb{K}$-espace vectoriel et F,G deux sous-espaces vectoriels de E.
On dit que la somme $F+G$ est directe si et seulement si pour tout $z\in F+G$, la décomposition $z=x+y$, avec $x\in F$ et $y\in G$, est unique. On note alors $F\oplus G$.

Proposition : Caractérisation des sommes directes

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
La somme $F+G$ est directe si et seulement si $F\cap G=\{0_E\}$.

Démonstration. • Supposons que la somme $F+G$ est directe.

- On a $0\in F$ et $0\in G$ donc $0\in F\cap G$ et $\{0\}\subset F\cap G$.
- Soit $x\in F\cap G$. Alors x s'écrit $x+0$ avec $x\in F$ et $0\in G$, mais aussi $0+x$, avec $0\in F$ et $x\in G$. Par unicité de l'écriture, $x=0$. Ainsi $F\cap G\subset\{0\}$.

Donc $F\cap G=\{0\}$.

- Réciproquement, supposons $F\cap G=\{0\}$.
Soit $z\in F+G$. Supposons qu'il existe (x,y), $(x',y')\in F\times G$ tels que $z=x+y$ et $z=x'+y'$. Alors $x+y=x'+y'$ donc $x-x'=y'-y$, avec $x-x'\in F$ (car x et $x'\in F$) et $y'-y\in G$ (car y et $y'\in G$). Ainsi $x-x'=y'-y\in F\cap G=\{0\}$, donc $x-x'=y'-y=0$ et $x=x'$, $y=y'$. On a donc unicité de l'écriture de z comme somme d'un élément de F et d'un élément de G, donc la somme est directe.

□

Remarque : Tout sous-espace vectoriel contient 0_E donc l'inclusion, $\{0_E\}\subset F\cap G$ est toujours vraie (on dit que c'est une inclusion triviale). On ne montre donc que l'inclusion $F\cap G\subset\{0\}$.

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si la somme $F+G$ est directe et $F+G=E$. On le note $F\oplus G=E$.

Proposition

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $E=F\oplus G$
- On a $E=F+G$ et $F\cap G=\{0\}$
- $\forall x\in E, \exists!(y,z)\in F\times G, x=y+z$.

Démonstration.
- (1) $\iff$ (2) avec une proposition précédente.
- Supposons (1).
  Soit $x\in E$. Comme $E=F+G$, il existe $(y,z)\in F\times G$ tel que $x=y+z$. De plus, comme la comme est directe, cette décomposition est unique. Ce qui prouve (3).
  Réciproquement, supposons (3).
  - Montrons que $E=F+G$.
    On sait déjà que $F+G\subset E$.
    Soit $x\in E$, par hypothèse, il existe $(y,z)\in F\times G$ tel que $x=y+z$. Ainsi, $x\in F+G$.
    Donc $E=F+G$.
  - De plus, l'unicité dans (3) assure que la somme $F+G$ est directe.
  - Ainsi, $E=F\oplus G$.

$\square$

Remarque :

- Pour montrer que $F\oplus G=E$, ne pas oublier de vérifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
- L'inclusion $F+G\subset E$ est triviale, on ne montrera donc que l'autre inclusion quand on voudra montrer $F+G=E$.

Exemple :

1. Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré $n\in\mathbb{N}^*$.
   Montrer que $P.\mathbb{K}[X]\oplus\mathbb{K}_{n-1}[X]=\mathbb{K}[X]$, où $P\mathbb{K}[X]=\{PQ, Q\in\mathbb{K}[X]\}$.
   - Soit $Q\in P.\mathbb{K}[X]\cap\mathbb{K}_{n-1}[X]$. Si $Q\neq 0$, alors, comme $Q\in P.\mathbb{K}[X]$, il existe $R\in\mathbb{K}[X]\setminus\{0\}$ tel que $Q=PR$.
     Ainsi, $\deg(Q)=\deg(P)+\deg(R)\geq\deg(P)=n$ et $\deg(Q)\leq n-1$. Absurde.
     Ainsi, $Q=0$ donc la somme $P.\mathbb{K}[X]+\mathbb{K}_{n-1}[X]$ est directe.
   - De plus, soit $S\in\mathbb{K}[X]$, par le théorème de division euclidienne ($P\neq 0$), il existe $Q\in\mathbb{K}[X]$ et $R\in\mathbb{K}_{n-1}[X]$ tels que $S=PQ+R$. Ainsi, $S\in P.\mathbb{K}[X]+\mathbb{K}_{n-1}[X]$ d'où $\mathbb{K}[X]\subset P.\mathbb{K}[X]+\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

   Ainsi : $\mathbb{K}[X]=P.\mathbb{K}[X]\oplus\mathbb{K}_{n-1}[X]$.
   Remarque : L'existence et l'unicité de la division euclidienne justifie également l'existence et unicité de la décomposition.
2. Les deux sous-espaces vectoriels $F=\{(x,0), x\in\mathbb{R}\}$ et $G=\{(0,y), y\in\mathbb{R}\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.
   On a déjà prouvé que $F+G=\mathbb{R}^2$. De plus, $F\cap G=\{(0,0)\}$.
   Les deux sous-espaces vectoriels $F=\{(x,0), x\in\mathbb{R}\}$ et $G=\mathrm{Vect}((1,1))$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.
   On remarque que $F=\mathrm{Vect}((1,0))$.
   On souhaite donc montrer que $\mathrm{Vect}((1,0))\oplus\mathrm{Vect}((1,1))=\mathbb{R}^2$.
   Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ soient $a,b\in\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} & (x,y)=a\cdot(1,0)+b\cdot(1,1) \\ \iff & \begin{cases} a+b=x \\ b=y \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} a=x-y \\ b=y \end{cases} \end{aligned}$$

   Ce système admet une unique solution : $b=y$ et $a=x-y$, donc $\mathbb{R}^2=\mathrm{Vect}((1,0))\oplus\mathrm{Vect}((1,1))$.

Remarque : Comme on le voit dans le dernier exemple, un sous-espace vectoriel a en général plusieurs supplémentaires dans E. On parle donc d'**un** supplémentaire et non du supplémentaire.

2 Familles finies de vecteurs

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2.1 Famille libre-famille liée

Définition

Soit $x_1,...,x_n$ des éléments de E.
On dit que $(x_1,\dots,x_n)$ est une famille libre de E si et seulement si :

$$\forall \lambda_1,...,\lambda_n \in \mathbb{K},\quad \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \implies (\forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i = 0)\right)$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille $(x_1,\dots,x_n)$ est liée.
Si $(x_1,\dots,x_n)$ est libre, on dit que les vecteurs $x_1,\dots,x_n$ sont linéairement indépendants.

Exemple :

1. Toute famille $(x_1,...,x_n)$ contenant le vecteur nul est liée : en effet, si $x_j = 0$, alors, en prenant $\lambda_i = 0$ pour $i \neq j$ et $\lambda_j = 1$, on a : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$.
2. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, la famille $(1,i)$ est libre, puisque : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a+ib=0 \implies a=b=0$.
   En revanche, dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, la famille $(1,i)$ est liée puisque $i.1+(-1).i=0$.
3. La famille $(1,X,...,X^n)$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$.
   Soient $\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X^i = 0$ alors on a : $\forall i [\![1,n]\!]$, $\lambda_i = 0$.

Cas particuliers :

- Une famille à un vecteur (x) est libre si et seulement si $x \neq 0$:
  - si $x=0$, $1.x=0$ mais $1\neq 0$ donc la famille est liée.
  - si $x \neq 0$, alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda.x = 0 \implies \lambda = 0$ par propriété d'un espace vectoriel.

- Une famille à deux vecteurs (x,y) est libre si et seulement si x et y ne sont pas colinéaires.
  Rappel : Deux éléments x et y sont colinéaires, si : $\exists \lambda \in \mathbb{K},\ y=\lambda x$ ou $x=0$.
  On procède par contraposée pour les deux implications et on prouve que : (x,y) est liée ssi x et y sont colinéaires.
  - Supposons x et y colinéaires :
    - Dans le cas où il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $y=\lambda.x$. Alors $\lambda.x+(-1).y=0$ avec $-1\neq 0$ donc la famille est liée.
    - dans le cas où $x=0$ alors $1.x+0.y=0$ et la famille (x,y) est liée.
  - Réciproquement, Supposons (x,y) liée. Alors, il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $\lambda x + \mu y = 0$.
    - Si $\mu \neq 0$, alors, $y = -\frac{\lambda}{\mu}x$
    - Sinon $\mu = 0$ et donc $\lambda \neq 0$ car $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$. De plus, $\lambda.x+\mu.y=0$ donc $\lambda.x=0$ puis $x=0$ car $\lambda\neq 0$.

    Donc x et y sont colinéaires.
- Une famille de trois vecteurs (x,y,z) est libre si et seulement si ces vecteurs ne sont pas coplanaires.

Proposition : Unicité de la décomposition

Soit $(x_1,...,x_n)$ une famille libre d'éléments de E

$$\forall (\lambda_1,...,\lambda_n),(\mu_1,...,\mu_n) \in \mathbb{K}^n,\ \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\right) \implies \left(\forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i = \mu_i\right)$$

Démonstration. Soient $(\lambda_1,...,\lambda_n),(\mu_1,...,\mu_n) \in \mathbb{K}^n$. Supposons $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$.

On a : $\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) x_i = 0$.
Or, la famille $(x_1,...x_n)$ est libre.
Donc : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i - \mu_i = 0$.
Ainsi : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i = \mu_i$. □

Définition

On dit que la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ est de degrés échelonnés ssi $\deg(P_0) < \cdots < \deg(P_n)$.

Proposition

Toute famille finie de polynômes non nuls à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de degrés échelonnées est libre.

Démonstration. Pour tout $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$, on note $\mathrm{dom}(P)$ le coefficient dominant de P.
Soit $(P_0, ..., P_n)$ une famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés.
Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k = 0.$$

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, notons $d_k = \deg(P_k)$. En identifiant les coefficients en X^{d_n}, on obtient $\lambda_n \mathrm{dom}(P_n) = 0$.
Donc $\lambda_n = 0$ car $\mathrm{dom}(P_n) \neq 0$.
On obtient alors : $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k P_k = 0$.
Par récurrence descendante, on obtient : $\lambda_{n-1} = \lambda_{n-2} = \cdots = \lambda_0 = 0$.
Donc $(P_0, \ldots, P_n)$ est libre. □

Proposition

Soit $(x_1, ..., x_n)$ une famille d'éléments de E. Soit $p \leq n$.

- Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée, l'un des vecteurs x_i s'exprime comme combinaison linéaire des autres.
- Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre alors $(x_1, ..., x_p)$ est libre.
- Si $(x_1, ..., x_p)$ est liée alors $(x_1, ..., x_n)$ est liée.

Démonstration.

- Comme $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée, il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i . xi = 0$.
  Comme $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$, il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\lambda_k \neq 0$. On a alors $x_k = -\frac{1}{\lambda_k} \sum_{i [\![1,n]\!] \setminus \{k\}} \lambda_i x_i$. Ainsi, x_k est combinaison linéaire de $(x_1, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_n)$.
- Supposons $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille libre .
  Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0$.
  Pour tout $j \in [\![p+1, n]\!]$, on pose $\lambda_j = 0$. On a ainsi : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$.
  Or $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre donc : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = 0$. Ainsi : $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\lambda_i = 0$.
- Ce résultat est la contraposée du point précédent.

□

Exemple : La famille $(1, \sin, \cos, \sin^2, \cos^2)$ est-elle libre dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?
Etant donné que $\cos^2 + \sin^2 = 1$, on a : $(-1).1 + 1.\cos^2 + 1.\sin^2 = 0$, ce qui entraine que la famille $(1, \sin^2, \cos^2)$ est liée. On en déduit que la famille donnée est liée.

Proposition

Soient $(x_1, x_2, ..., x_n)$ une famille libre d'éléments de E et $x \in E$. On a :

$$(x_1, ..., x_n, x) \text{ est liée} \iff x \in \mathrm{Vect}(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Démonstration.

- Supposons que $x \in \mathrm{Vect}(x_1, x_2, ..., x_n)$. Alors, il existe $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$.
  On a alors : $1.x + \sum_{i=1}^{n} (-\lambda_i) x_i = 0$. Donc la famille $(x_1, x_1, ..., x_n, x)$ est liée.

- Supposons que la famille $(x_1,...,x_n,x)$ est liée.
  Alors, il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_n,\alpha)\in\mathbb{K}^n\setminus\{(0,\dots,0,0)\}$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i+\alpha x=0$.
  Montrons par l'absurde que $\alpha\neq 0$.
  Supposons que $\alpha=0$, alors $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i=0$ donc : $\forall i\in[\![1,n]\!],\ \lambda_i=0$ car $(x_1,\dots,x_n)$ est libre. Absurde.
  Ainsi $\alpha\neq 0$. On a alors $x=-\dfrac{1}{\alpha}\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$. Donc $x\in\mathrm{Vect}(x_1,x_2,...,x_n)$.

□

2.2 Famille génératrice

Définition

Une famille $(e_1,e_2,...,e_n)$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dite génératrice de E si et seulement si $\mathrm{Vect}(e_1,e_2,...,e_n)=E$.

Autrement dit, $(e_1,...,e_n)$ est génératrice de E si et seulement si : $\forall x\in E,\ \exists\lambda_1,...,\lambda_n\in\mathbb{K},\ x=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i e_i$.

Exemple :

1. La famille $(1,i)$ est une famille génératrice de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$ espace vectoriel.
2. La famille (1) est une famille génératrice de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{C}$ espace vectoriel.
3. Soit $n\in\mathbb{N}$, alors $(1,X,...,X^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$ puisque pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à n, il existe $\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_n\in\mathbb{K}$ tel que $P=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i X^i$.

Proposition

Soit $(x_1,...,x_n)$ une famille d'éléments de E. Soit $p\leq n$.
Si $(x_1,...,x_p)$ est génératrice de E alors $(x_1,...,x_n)$ est génératrice de E.

Démonstration. Supposons $(x_1,...,x_p)$ génératrice de E. Alors, on a : $E=\mathrm{Vect}(x_1,...,x_p)$.
De plus : $\mathrm{Vect}(x_1,...,x_p)\subset\mathrm{Vect}(x_1,...,x_n)$.
Ainsi : $E\subset\mathrm{Vect}(x_1,...,x_n)\subset E$.
Donc $\mathrm{Vect}(x_1,...,x_n)=E$. Donc $(x_1,...,x_n)$ est génératrice de E. □

2.3 Bases

Définition

Une famille d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une base de E si la famille est libre et génératrice de E.

Théorème

Une famille $\mathscr{F}=(e_1,...,e_n)$ d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E est une base de E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathscr{F}$.

Démonstration.

- Supposons que $\mathscr{F}$ est une base de E.
  Soit $x\in E$. Comme $\mathscr{F}$ est génératrice de E, il existe $\lambda_1,...,\lambda_n\in\mathbb{K}$ tel que $x=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i e_i$. De plus, $\mathscr{F}$ est libre donc cette décomposition est unique.
- Supposons que tout vecteur de E s'écrive de manière unique comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathscr{F}$.
  On sait que : $\forall x\in E,\ \exists\lambda_1,...,\lambda_n\in\mathbb{K},x=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i e_i$. Ainsi, $(e_1,...,e_n)$ est génératrice.
  Montrons que $\mathscr{F}$ est libre.
  Soient $\lambda_1,...,\lambda_n\in\mathbb{K}$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i e_i=0$.
  Alors : $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i e_i=\sum\limits_{i=1}^{n}0e_i$. Par unicité de la décomposition de 0 comme combinaison linéaire des vecteurs $e_1,...,e_n$, on a : $\forall i\in[\![1,n]\!],\ \lambda_i=0$.
  Donc $\mathscr{F}$ est libre.

□

Base canonique de $\mathbb{K}^n$
Dans $\mathbb{K}^n$, on pose :

$$e_1=(1,0,0,\dots,0)\quad,\quad e_2=(0,1,0,\dots,0),\quad \dots\quad,\quad e_i=(0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ i^{\text{ième}}\text{ position}}}{1},0,\dots,0)\quad,\quad\dots\quad,\quad e_n=(0,0,\dots,0,1)$$

$(e_1,\dots,e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$, dite base canonique de $\mathbb{K}^n$.
Soit $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$. Soit $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} & x=\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\\ \iff\ & (x_1,\dots,x_n)=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\\ \iff\ & \forall i\in[\![1,n]\!],\ \lambda_i=x_i\end{aligned}$$

Ainsi, tout élément de $\mathbb{K}^n$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $e_1,\dots,e_n$.
Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $n,p\in\mathbb{N}^*$
Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, pour $(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$, on note $E_{i,j}$ la matrice élémentaire d'indice (i,j), i.e la matrice n'ayant que des 0, sauf un 1 en position (i,j).
La famille $(E_{i,j})_{1\leq i\leq n,1\leq j\leq p}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, dite base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Soit $M=(m_{i,j})\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $\lambda_{1,1},\dots,\lambda_{n,p}\in\mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} & M=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^p \lambda_{i,j}E_{i,j}\\ \iff\ & \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,p}\\ \vdots & & \vdots\\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,p}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \cdots & \lambda_{1,p}\\ \vdots & & \vdots\\ \lambda_{n,1} & \cdots & \lambda_{n,p}\end{pmatrix}\\ \iff\ & \forall (i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!],\ \lambda_{i,j}=m_{i,j}\end{aligned}$$

Ainsi, tout élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $E_{1,1},\dots,E_{n,p}$.
Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$, $n\in\mathbb{N}$
Dans $\mathbb{K}_n[X]$, $(1,X,\dots,X^n)$ est une base (dite base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$).
Soit $P=\sum\limits_{k=0}^n a_kX^k$, soient $\lambda_0,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} & P=\sum_{k=0}^n \lambda_kX^k\\ \iff\ & \sum_{k=0}^n a_kX^k=\sum_{k=0}^n\lambda_kX^k\\ \iff\ & \forall k\in[\![0,n]\!],\ \lambda_k=a_k\end{aligned}$$

Ainsi, tout élément de $\mathbb{K}_n[X]$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $1,X,\dots,X^n$.
Remarque : On peut maintenant dire qu'une droite vectorielle est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel possédant une base formée d'un seul vecteur.

Définition

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $B=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E.

- On appelle coordonnées de x en base B l'unique n-uplet $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ tel que $x=\sum\limits_{i=1}^n\lambda_ie_i$.
- On appelle matrice colonne de x en base B et on note $\mathrm{mat}_B(x)$ le vecteur colonne $\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$ des coordonnées de x en base B.

2.4 Bases et sommes directes

Proposition : Concaténation de familles

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Soient $(f_1,\dots,f_p)\in F^p$ et $(g_1,\dots,g_q)\in G^q$ des familles de vecteurs de F et G.
Si $(f_1,\dots,f_p)$ et $(g_1,\dots,g_q)$ sont des bases respectivement de F et G et si F et G sont supplémentaires dans E alors $(f_1,\dots,f_p,g_1,\dots,g_q)$ est une base de E, appelée base adaptée à la somme directe $E=F\oplus G$.

Démonstration. Supposons que $(f_1,\dots,f_p)$, $(g_1,\dots,g_q)$ sont des bases respectivement de F et G et que F et G sont supplémentaires dans E.

- Montrons que $(f_1,...,f_p,g_1,...g_q)$ est libre.
  Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_p\in\mathbb{K}$ et $\mu_1,\dots,\mu_q\in\mathbb{K}$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i f_i+\sum\limits_{j=1}^{q}\mu_j g_j=0$.
  On a donc $\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i f_i=-\sum\limits_{j=1}^{q}\mu_j g_j$, avec $\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i f_i\in F$ et $\sum\limits_{j=1}^{q}\mu_j g_j\in G$. Or, F et G sont supplémentaires dans E donc la somme $F+G$ est directe. Ainsi : $F\cap G=\{0\}$. D'où $\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i f_i=0$ et $\sum\limits_{j=1}^{q}\mu_j g_j=0$.
  Ainsi : $\forall i\in[\![1,p]\!]$, $\lambda_i=0$ (car $(f_1,\dots,f_p)$ est libre) et : $\forall j\in[\![1,q]\!]$, $\mu_j=0$ (car $(g_1,\dots,g_q)$ est libre).
  Ainsi, $(f_1,...,f_p,g_1,...,g_q)$ est libre.
- Montrons que $(f_1,\dots,f_p,g_1,\dots,g_q)$ est génératrice de E.
  On a $F=\mathrm{Vect}(e_1,\dots e_p)$ et $G=\mathrm{Vect}(f_1,\dots,f_q)$.
  D'où :
  $$E=F+G=\mathrm{Vect}(e_1,\dots e_p)+\mathrm{Vect}(f_1,\dots,f_q)=\mathrm{Vect}(e_1,\dots e_p,f_1,\dots,f_q).$$
  Donc $(e_1,\dots e_p,f_1,\dots,f_q)$ est une famille génératrice de E.

On a donc prouvé que $(f_1,...,f_p,g_1,...,g_q)$ est libre et génératrice de E, il s'agit donc d'une base de E. □

Exemple : Soients
$$F=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\mid x_1+x_2+x_3=0\}\qquad\text{et}\qquad G=\mathrm{Vect}((1,1,1)).$$

- Le vecteur $e_3=(1,1,1)$ engendre G et est non nul. Donc (e_3) est une base de G.
- On a montré que $F=\mathrm{Vect}(e_1,e_2)$ avec $e_1=(1,0,-1),e_2=(0,1,-1)$. Donc (e_1,e_2) est une famille génératrice de F. Or, il s'agit d'une famille de deux vecteurs non colinéaires, donc cette famille est libre. Ainsi (e_1,e_2) est une base de F.
- On a montré que $\mathbb{R}^3=F\oplus G$. On déduit de la propriété précédente que (e_1,e_2,e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Proposition

Soit $(e_1,\dots,e_n)\in E^n$ une famille libre d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de E. Soit $k\in[\![1,n]\!]$. Posons $F=\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k)$ et $G=\mathrm{Vect}(e_{k+1},\dots,e_n)$. Alors F et G sont en somme directe.

Démonstration. Soit $x\in F\cap G$. Comme $x\in F$, il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_k\in\mathbb{K}$ tels que : $x=\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i e_i$. De plus, $x\in G$ donc il existe $\mu_{k+1},\dots,\mu_n\in\mathbb{K}$ tels que : $x=\sum\limits_{i=k+1}^{n}\mu_i e_i$. On a alors $\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i e_i-\sum\limits_{i=k+1}^{n}\mu_i e_i=0$. Comme la famille $(e_1,\dots,e_n)$ est libre, on en déduit que :
$\forall i\in[\![1,k]\!]$, $\lambda_i=0$ et : $\forall i\in[\![k+1,n]\!]$, $\mu_i=0$. Alors $x=\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i e_i=0$.
Ainsi $F\cap G=\{0\}$ et la somme $F+G$ est directe. □

Remarque : Si $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E, alors $F=\mathrm{Vect}(e_1,....,e_k)$ et $G=\mathrm{Vect}(e_{k+1},...,e_n)$ sont supplémentaires dans E.

Démonstration. Supposons que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E. Alors $(e_1,\dots,e_n)$ est une famille libre de E. Donc d'après la proposition précédente, la somme $F+G$ est directe.
De plus : $(e_1,...,e_n)$est génératrice de E. Donc $E=\mathrm{Vect}(e_1,...,e_n)=\mathrm{Vect}(e_1,...,e_k)+\mathrm{Vect}(e_{k+1},...,e_n)=F+G$.
Ainsi F et G sont supplémentaires dans E. □