Nom et prénom : Note : /20

QCM n°1

30 mars 2020

Vrai/Faux

- Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F+G=F\cap G$. On a alors $F=G$. **Réponse :** Vrai.
- $\text{Vect}(\emptyset)=\emptyset$.**Réponse :** L'ensemble vide n'est pas un esapec vectoriel.
- Soient A et B deux parties de E. Alors $\text{Vect}(A\cup B)=\text{Vect}(A)+\text{Vect}(B)$. **Réponse :** Vrai.
- Tout élément du sous-espace vectoriel engendré par des vecteurs $x_1,\cdots,x_n$ est une combinaison linéaire de ces vecteurs. **Réponse :** Vrai.
- Tout élément du sous-espace vectoriel engendré par des vecteurs $x_1,\cdots,x_n$ est une combinaison linéaire de deux de ces vecteurs. **Réponse :** Faux.
- Si G et H sont supplémentaires dans E et F est un sous-espace vectoriel de E, alors $G\cap F$ et $H\cap F$ sont supplémentaires dans F. **Réponse :** Faux. Dans $\mathbb{R}^2$. Si l'on considère la base canonique $e_1=(1,0)$ et $e_2=(0,1)$, on a $\text{Vect}(e_1)\oplus\text{Vect}(e_2)=\mathbb{R}^2$. Pour autant, si $F=\text{Vect}(e_1+e_2)$ alors $G\cap F=H\cap F\{0\}$ et donc $G\cap F+H\cap F\neq G$.
- Soit $N>0$. L'ensemble des suites N-périodiques est de dimension finie. **Réponse :** Vrai. La dimension est N. Pour définir une suite N-périodique, il suffit de connaître N termes consécutifs (par exemple les termes en $0,1,\cdots,N-1$).
- L'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^0$ périodiques et nulles en 0 est de dimension finie. **Réponse :** Faux.
- De toute famille génératrice d'un espace de dimension finie, on peut extraire une base. **Réponse :** Vrai.
- Tout vecteur d'un esapce vectoriel de dimension finie peut-être complété en une base. **Réponse :** Vrai.
- Si $(f_1,\cdots,f_n)$ est une base de F et $(g_1,\cdots,g_q)$ est une base de G alors $\{f_1,\cdots,f_n\}\cap\{g_1,\cdots,g_q\}$ est une base de $F\cap G$. **Réponse :** Faux. Autant, $\{f_1,\cdots,f_n\}\cup\{g_1,\cdots,g_q\}$ contient une base de $F\cap G$, autant il est tout à fait possible que $F\cap G=\text{Vect}(f_1)$ et $\{f_1,\cdots,f_n\}\cap\{g_1,\cdots,g_q\}=\emptyset$. Prenons $f_1=(1,0)$ et $g_1=(2,0)$. Alors $F=\text{Vect}(f_1)=\text{Vect}(g_1)=G=F\cap G$ et $\{f_1\}\cap\{g_1\}=\emptyset$.
- Soit F un sous-espace vectoriel d'un esapce vectoriel de dimension finie E. Alors $E=F$ si et seulement si $\dim(E)=\dim(F)$.**Réponse :** Vrai.

QCM

- Soit $\mathcal{P}$ l'espace vectoriel des polynômes dont la fonction polynômiale associée est paire. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des supplémentaires de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}[X]$?
  1. L'espace des polynômes impaires $\mathcal{I}$. **Réponse :** vrai.
  2. $\{P(X)+X^2 \;\; / \;\; P\in\mathcal{I}\}$. **Réponse :** Faux. On peut écrire par exemple $2X^2+2X=2(X+X^2)+0=(2X+X^2)+X^2$. Il n'y a donc pas unicité dans l'écriture d'un polynôme sous la forme d'une somme de $\{P(X)+X^2 \;\; / \;\; P\in\mathcal{I}\}$ avec $\mathcal{P}$.
  3. $\{P\in\mathbb{R}[X],P(1)=0\}$. **Réponse :** Faux. De même, on peut écrire, $X^2-1=(X-1)(X+1)+0=0+X^2-1$.
  4. $\text{Vect}(X^3)$. **Réponse :** Faux. De même, $X^4=X^3\times X+0=0+X^4$.
- Les sous-espaces vectoriels $\{f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R}),f(1)=0\}$ et $\{f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}),f'=f\}$ sont
  1. complémentaires dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. **Réponse :** Faux. Attention, les ensembles ont un point en commun il ne peuvent donc pas être complémentaires.
  2. supplémentaires dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ **Réponse :** Vrai.
  3. en somme directe. **Réponse :** Vrai.
  4. de somme égale à $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. **Réponse :** Vrai.
- Déterminer parmi les ensembles suivants ceux qui sont des sous-espaces vetoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
  1. l'ensemble des suites positives à partir d'un certain rang. **Réponse :** Faux. Stabilité par combinaison linéaire pose problème.
  2. l'ensemble des suites bornées. **Réponse :** Vrai.
  3. l'ensemble des suites monotones. **Réponse :** Faux. La multiplication par un scalaire pose problème.
  4. l'ensemble des suites somme d'une suite croissante et d'une suite décroissante. **Réponse :** Vrai.
  5. l'ensemble des suites convergentes. **Réponse :** Vrai.
  6. l'ensemble des suites périodiques. **Réponse :** Vrai. Si (u_n) est p-périodique et (v_n) est $q-périodique$ alors (u_n+v_n) est pq-périodique.

- La dimension de l'espace vectoriel $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\; / \;\; x^2+y^2+2z^2+2xz+2yz=0\}$ est
  1. 1
  2. 2
  3. 3
  4. 4

  Réponse : 1. On peut montrer que $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\; / \;\; x^2+y^2+2z^2+2xz+2yz=0\} = \text{Vect}\left((-1,-1,1)\right)$.
- La dimension de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est
  1. n^2
  2. $\frac{n(n+1)}{2}$
  3. n
  4. $\frac{n(n-1)}{2}$

  Réponse : n.
- La dimension de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est
  1. n^2
  2. $\frac{n(n+1)}{2}$
  3. n
  4. $\frac{n(n-1)}{2}$

  Réponse : $\frac{n(n+1)}{2}$.
- La dimension de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ est
  1. n^2
  2. $\frac{n(n+1)}{2}$
  3. n
  4. $\frac{n(n-1)}{2}$

  Réponse : $\frac{n(n-1)}{2}$.
- La dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est
  1. n^2
  2. $\frac{n(n+1)}{2}$
  3. n
  4. $\frac{n(n-1)}{2}$

  Réponse : $\frac{n(n+1)}{2}$.
- La dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ est
  1. $n-1$
  2. n
  3. $n+1$
  4. n^2

  Réponse : $n+1$.