Corrigé de la feuille d'exercices 21

1 Propriétés de l'intégrale

Exercice 1. •

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} x|x|dx &= \int_{-1}^{0} x|x|dx + \int_{0}^{2} x|x|dx \\ &= -\int_{-1}^{0} x^2dx + \int_{0}^{2} x^2dx \\ &= \Big[-\frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{0} + \Big[\frac{x^3}{3}\Big]_{0}^{2} \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{8}{3} \\ &= \frac{7}{3}\end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x|x|dx &= \int_{-1}^{0} x|x|dx + \int_{0}^{1} |x|x|dx \\ &= -\int_{-1}^{0} x^2dx + \int_{0}^{1} x^2dx \\ &= \Big[-\frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{0} + \Big[\frac{x^3}{3}\Big]_{0}^{1} \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\ &= 0\end{aligned}$$

Exercice 2. Méthode 1 :
On sait que :

$$\begin{aligned}\frac{\cos t - 1}{t} &\underset{t\to 0}{\sim} \frac{-t^2}{2t} \\ &\underset{t\to 0}{\sim} \frac{-t}{2}\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\cos(t)-1}{t} = 0$. Ainsi, $t \mapsto \dfrac{\cos(t)-1}{t}$ est bornée au voisinage de 0.
Il existe donc $\eta > 0$ et $M \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ |t| \leq \eta \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{\cos(t)-1}{t}\right| \leq M.$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|3x| \leq \eta$.
Soit $t \in [x, 3x]$, on a $|t| \leq |3x| \leq \eta$. Ainsi : $\left|\dfrac{\cos(t)-1}{t}\right| \leq M$.
Ainsi :

$$\forall t \in [x, 3x],\ \left|\frac{\cos(t)-1}{t}\right| \leq M.$$

Donc comme $x \leq 3x$, on a par croissance de l'intégrale :

$$\left|\int_x^{3x} \frac{\cos(t)-1}{t}dt\right| \leq \int_x^{3x} \left|\frac{\cos(t)-1}{t}\right| \leq \int_x^{3x} M dt = 2xM.$$

Donc :

$$\left|\int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t}dt - \int_x^{3x} \frac{1}{t}dt\right| \leq 2xM.$$

Or, $\displaystyle\int_x^{3x} \frac{1}{t}dt = \ln(3x) - \ln(x) = \ln(3)$.
Ainsi :
$$\left|\int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t}dt - \ln(3)\right| \leq 2xM$$
Or, $\displaystyle\lim_{x\to 0} 2xM = 0$. Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t}dt = \ln(3)$.
De même, soit $x \in \mathbb{R}_-^*$ tel que $|3x| \leq \eta$.
Soit $t \in [3x, x]$, on a $|t| \leq |3x| \leq \eta$. Ainsi : $\left|\dfrac{\cos(t)-1}{t}\right| \leq M$.
Ainsi :
$$\forall t \in [3x, x],\ \left|\frac{\cos(t)-1}{t}\right| \leq M.$$
Donc comme $3x \leq x$, on a par croissance de l'intégrale :
$$\left|\int_{3x}^{x} \frac{\cos(t)-1}{t}dt\right| \leq \int_{3x}^{x} \left|\frac{\cos(t)-1}{t}\right| \leq \int_{3x}^{x} M dt = -2xM.$$
D'où :
$$\left|\int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t}dt - \int_x^{3x} \frac{1}{t}dt\right| = \left|-\left(\int_{3x}^{x} \frac{\cos(t)}{t}dt - \int_x^{3x} \frac{1}{t}dt\right)\right| \leq \left|\int_{3x}^{x} \frac{\cos(t)}{t}dt - \int_x^{3x} \frac{1}{t}dt\right| \leq -2xM.$$
Or, $\displaystyle\int_x^{3x} \frac{1}{t}dt = \ln(3x) - \ln(x) = \ln(3)$.
Ainsi :
$$\left|\int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t}dt - \ln(3)\right| \leq -2xM$$
Or, $\displaystyle\lim_{x\to 0}(-2xM) = 0$. Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t}dt = \ln(3)$.
Donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t}dt = \ln(3)$.
Méthode 2 :
Soit $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{3}\right]$. Par décroissance de la fonction cosinus sur $[x, 3x] \subset [0, \pi]$, on a :
$$\forall t \in [x, 3x],\ \cos(3x) \leq \cos(t) \leq \cos(x).$$
Ainsi :
$$\forall t \in [x, 3x],\ \frac{\cos(3x)}{t} \leq \frac{\cos(t)}{t} \leq \frac{\cos(x)}{t}.$$
Par croissance de l'intégrale (les bornes sont « dans le bon sens »), on obtient :
$$\cos(3x)\int_x^{3x} \frac{1}{t}dt \leq \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t}dt \leq \cos(x)\int_x^{3x} \frac{1}{t}dt.$$
Or, $\displaystyle\int_x^{3x} \frac{1}{t}dt = \ln\left(\frac{3x}{x}\right) = \ln(3)$.
Ainsi, on a :
$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right],\ \cos(3x)\ln(3) \leq \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t}dt \leq \cos(x)\ln(3).$$
Or, par continuité de la fonction cosinus en 0, on a : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(\cos(3x)\ln(3)) = \ln(3) = \lim_{x\to 0^+}(\cos(x)\ln(3)) = \ln(3)$.
Finalement, par encadrement, on obtient que : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t}dt = \ln(3)$.
Soit $x \in \left]-\dfrac{\pi}{3}, 0\right[$. Par croissance de la fonction cosinus sur $[3x, x] \subset [-\pi, 0]$, on a :
$$\forall t \in [3x, x],\ \cos(3x) \leq \cos(t) \leq \cos(x).$$
Ainsi :
$$\forall t \in [3x, x],\ \frac{\cos(3x)}{t} \geq \frac{\cos(t)}{t} \geq \frac{\cos(x)}{t}$$

($t < 0$).
Par croissance de l'intégrale (en intégrant avec les bornes « dans le bon sens »), on obtient :

$$\cos(x) \int_{3x}^{x} \frac{1}{t} dt \leq \int_{3x}^{x} \frac{\cos(t)}{t} dt \leq \cos(3x) \int_{3x}^{x} \frac{1}{t} dt.$$

D'où :

$$-\cos(x) \int_{x}^{3x} \frac{1}{t} dt \leq -\int_{x}^{3x} \frac{\cos(t)}{t} dt \leq -\cos(3x) \int_{x}^{3x} \frac{1}{t} dt.$$

Ainsi :

$$\cos(x) \int_{x}^{3x} \frac{1}{t} dt \geq \int_{x}^{3x} \frac{\cos(t)}{t} dt \geq \cos(3x) \int_{x}^{3x} \frac{1}{t} dt.$$

Or, $\displaystyle\int_{x}^{3x} \frac{1}{t} dt = \ln\left(\frac{3x}{x}\right) = \ln(3)$.
Ainsi, on a :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{3}, 0\right[,\ \cos(3x)\ln(3) \leq \int_{x}^{3x} \frac{\cos(t)}{t} dt \leq \cos(x)\ln(3).$$

Or, par continuité de la fonction cosinus en 0, on a : $\lim\limits_{x\to 0} (\cos(3x)\ln(3)) = \ln(3) = \lim\limits_{x\to 0} (\cos(x)\ln(3))$.

Finalement, par encadrement, on obtient que : $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \int_{x}^{3x} \frac{\cos(t)}{t} dt = \ln(3)$.

Ainsi : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_{x}^{3x} \frac{\cos(t)}{t} dt = \ln(3)$.

Exercice 3. • Soit $x > 1$.
On a alors $x < x^3$. De plus :

$$\forall t \in [x, x^3],\ 0 < \ln(x) \leq \ln(t) \leq \ln(x^3) = 3\ln(x).$$

Donc :

$$\forall t \in [x, x^3],\ 0 < \ln(x)^2 \leq \ln(t)^2 \leq 9\ln(x)^2$$

Finalement :

$$\forall t \in [x, x^3],\ \frac{1}{9\ln(x)^2} \leq \frac{1}{\ln(t)^2} \leq \frac{1}{\ln(x)^2}.$$

Par croissance de l'intégrale (les bornes sont « dans le bon sens »), on en déduit que :

$$\int_{x}^{x^3} \frac{1}{9\ln(x)^2} dt \leq \int_{x}^{x^3} \frac{1}{\ln(t)^2} dt \leq \int_{x}^{x^3} \frac{1}{\ln(x)^2} dt.$$

Donc :

$$\frac{x^3 - x}{9\ln(x)^2} \leq \int_{x}^{x^3} \frac{1}{\ln(t)^2} dt \leq \frac{x^3 - x}{\ln(x)^2}.$$

Or, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - x}{\ln(x)^2} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3}{\ln(x)^2} \times \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\right) = +\infty$ par croissances comparées.

Par minoration, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_{x}^{x^3} \frac{1}{\ln(t)^2} dt = +\infty$.

• Soit $x \in]0, 1]$. Par croissance de la fonction exponentielle, on a :

$$\forall t \in [x, 2x],\ e^x \leq e^t \leq e^{2x}.$$

Ainsi :

$$\forall t \in [x, 2x],\ \frac{e^x}{t} \leq \frac{e^t}{t} \leq \frac{e^{2x}}{t}.$$

Ainsi par croissance de l'intégrale (les bornes sont « dans le bon sens »), on a :

$$e^x \int_{x}^{2x} \frac{1}{t} dt \leq \int_{x}^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^{2x} \int_{x}^{2x} \frac{1}{t} dt.$$

Or, $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t}dt = \ln\left(\frac{2x}{x}\right) = \ln(2)$.
Donc :

$$e^x \ln(2) \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt \leq e^{2x}\ln(2).$$

Or, par continuité de l'exponentielle en 0, on a : $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{2x}\ln(2)\right) = \ln(2) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^x\ln(2)\right)$. Finalement, par encadrement, on obtient que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt = \ln(2)$.

On montre de même que $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \leq \int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt = \ln(2)$.

Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt = \ln(2)$

Exercice 4. Soit $\epsilon > 0$. Par définition de la limite de f en $+\infty$, il existe $A \geq 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x \geq A \quad\implies\quad |f(x) - l| \leq \epsilon$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $x \geq A$

$$\begin{aligned}
|F(x) - l| &= \left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt - l\right| \\
&= \left|\frac{1}{x}\int_0^x (f(t) - l)dt\right| \\
&= \left|\frac{1}{x}\int_0^A (f(t) - l)dt + \frac{1}{x}\int_A^x (f(t) - l)dt\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{x}\int_0^A (f(t) - l)dt\right| + \left|\frac{1}{x}\int_A^x (f(t) - l)dt\right|
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{x}\int_A^x (f(t) - l)dt\right| &\leq \left|\frac{1}{x}\int_A^x |f(t) - l|dt\right| \\
&\leq \frac{1}{|x|}\left|\int_A^x \epsilon dt\right| \\
&\leq \epsilon\frac{|x - A|}{|x|} \\
&\leq \epsilon\frac{x - A}{x} \qquad \text{car } x \geq A \text{ et } x > 0 \\
&\leq \epsilon\frac{x}{x} \\
&\leq \epsilon
\end{aligned}$$

De plus, $\left|\displaystyle\int_0^A (f(t) - l)dt\right|$ est une constante (ne dépend pas de x). Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left|\int_0^A (f(t) - l)dt\right|\frac{1}{|x|} = 0$.
Donc il existe $B \geq 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x \geq B \quad\implies\quad \left|\frac{1}{x}\int_0^A (f(t) - l)dt\right| \leq \epsilon.$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x \geq \max(A, B) \quad\implies\quad |F(x) - l| \leq 2\epsilon$$

Finalement, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = l$.

Exercice 5. f est continue sur le segment $[a, b]$ donc f est donc bornée et atteint ses bornes. Ainsi, il existe $t_1, t_2 \in [a, b]$ tels que :

$$\forall t \in [a, b],\ f(t_1) \leq f(t) \leq f(t_2).$$

Par croissance de l'intégrale, on a donc :

$$\int_a^b f(t_1)dt \leq \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b f(t_2)dt.$$

Ainsi :

$$(b-a)f(t_1) \leq \int_a^b f(t)dt \leq (b-a)f(t_2).$$

Donc :

$$f(t_1) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq f(t_2).$$

Ainsi, $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \in [f(t_1), f(t_2)]$ et f est continue sur $[a,b]$ donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [t_1, t_2] \subset [a,b]$ (ou $[t_2, t_1] \subset [a,b]$) tel que $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$.

Exercice 6. 1. • Si $\int_a^b g(t)dt = 0$ alors comme g est continue sur $[a,b]$ et de signe constant, on a $g = 0$. Le problème est alors immédiatement résolu puisque tout réel de $[a,b]$ convient.

• Sinon, on a $\int_a^b g(t)dt > 0$ (g est positive). De plus, f est continue sur le segment $[a,b]$ donc elle est bornée et atteint ses bornes. Ainsi, il existe $x_1, x_2 \in [a,b]$ tels que :

$$\forall t \in [a,b],\ f(x_1) \leq f(t) \leq f(x_2).$$

Ainsi, par positivité de la fonction g, on obtient :

$$\forall t \in [a,b],\ f(x_1)g(t) \leq f(t)g(t) \leq f(x_2)g(t)$$

Par croissance et linéarité de l'intégrale, on obtient :

$$f(x_1)\int_a^b g(t)dt \leq \int_a^b f(t)g(t)dt \leq f(x_2)\int_a^b g(t)dt$$

puis,

$$f(x_1) \leq \frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b g(t)dt} \leq f(x_2)$$

car $\int_a^b g(t)dt > 0$.

Donc $\frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b g(t)dt} \in [f(x_1), f(x_2)]$.

Or, f est continue sur $[a,b]$. Ainsi, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [x_1, x_2] \subset [a,b]$ (ou $[x_2, x_1] \subset [a,b]$) tel que $f(c) = \frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b g(t)dt}$ c'est à dire tel que $f(c)\int_a^b g(t)dt = \int_a^b f(t)g(t)dt$.

2. Notons I un voisinage de 0 où f est continue.

(a) Soit $x \in I \cap \mathbb{R}_+^*$. On applique la question précédente sur $[0,x]$ en posant $g : t \mapsto t$ qui est bien continue et positive sur $[0,x]$. Ainsi, il existe $c_x \in [0,x]$ tel que $\int_0^x tf(t)dt = f(c_x)\int_0^x tdt = \frac{f(c_x)}{2}x^2$. D'où :

$$\frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)dt = \frac{f(c_x)}{2}$$

Or, $0 \leq c_x \leq x$. Ainsi, par encadrement, on a $\lim_{x\to 0^+} c_x = 0$.

Par continuité de f en 0, on obtient $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(c_x)}{2} = \frac{f(0)}{2}$. Ainsi, $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)dt = \frac{f(0)}{2}$.

De même, soit $x \in I \cap \mathbb{R}_-^*$. $\int_0^x tf(t)dt = -\int_x^0 tf(t)dt = \int_x^0 (-t)f(t)dt =$. D'après la question précédente appliquée sur $[x, 0]$ avec la fonction $g : t \mapsto -t$ (continue positive sur $[x, 0]$), il existe $d_x \in [x, 0]$ tel que $\displaystyle\int_x^0 (-t)f(t)dt = f(d_x)\int_x^0 (-t)dt = \frac{f(d_x)}{2}x^2$. D'où :

$$\frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)dt = \frac{f(d_x)}{2}$$

Comme précédemment, on obtient : $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)dt = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(d_x)}{2} = \frac{f(0)}{2}$.

On peut donc conclure que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)dt = \frac{f(0)}{2}$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On applique la question précédente sur $[x, 2x]$ avec $g : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ qui est bien continue et positive sur $[x, 2x]$. Ainsi, il existe $c_x \in [x, 2x]$ tel que $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{f(t)}{t}dt = f(c_x)\int_x^{2x} \frac{1}{t}dt = f(c_x)(\ln(2x) - \ln(x)) = f(c_x)\ln(2)$. Or, $x \leq c_x \leq 2x$. Ainsi, par encadrement, on a $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} c_x = 0$.
De plus, par continuité de f, on obtient $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(c_x)\ln(2) = f(0)\ln(2)$.
Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t}dt = f(0)\ln(2)$.

Exercice 7. f est continue sur le segment $[0, 1]$ donc est bornée.
Posons $M = \displaystyle\sup_{x\in[0,1]}(f(x))$. On a alors :

$$\forall t \in [0, 1],\ |f(t)| \leq M.$$

Par croissance de l'intégrale (les bornes sont « dans le bon ordre »), on obtient :

$$\forall x \in [0, 1],\ |g(x)| \leq \int_0^x |f(t)|dt \leq \int_0^x M dt = xM$$

De nouveau par croissance de l'intégrale, on obtient :

$$\forall x \in [0, 1],\ |f(x)| \leq \int_0^x |g(t)|dt \leq \int_0^x Mt dt = \frac{M}{2}x^2 \leq \frac{M}{2}$$

Ainsi, $\dfrac{M}{2}$ majore $|f|$ donc par définition de la borne supérieure, on a : $M \leq \dfrac{M}{2}$ d'où $M = 0$.
Ainsi, $f = 0$ puis : $\forall x \in [0, 1],\ g(x) = 0$. Donc $g = 0$.

Exercice 8. Raisonnons par l'absurde. Supposons que f n'admet pas de point fixe sur $[0, 1]$. Considérons la fonction $\phi : t \mapsto f(t) - t$. ϕ est définie et continue sur $[0, 1]$.
Comme f n'admet pas de point fixe sur $[0, 1]$, ϕ ne s'annule pas sur $[0, 1]$. Or, ϕ est continue sur $[0, 1]$ donc ϕ garde un signe constant sur $[0, 1]$ (conséquence du théorème des valeurs intermédiaires).
Or, on a également :

$$\int_0^1 \phi(t)dt = \int_0^1 f(t)dt - \int_0^1 tdt = \int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{2} = 0$$

Or, ϕ est continue et garde un signe constant donc $\phi = 0$.
Contradiction avec le fait que ϕ ne s'annule pas sur $[0, 1]$.
Ainsi, l'hypothèse de départ est absurde et donc f admet au moins un point fixe sur $[0, 1]$.

Exercice 9.

- Supposons que f ne s'annule pas sur $[0, 1]$. Comme f est continue sur $[0, 1]$, on peut donc en déduire que f est de signe constant (conséquence du théorème des valeurs intermédiaires). Or, $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = 0$ donc $f = 0$ sur $[a, b]$. Absurde car on a supposé que f ne s'annulait pas.
  Ainsi, f s'annule au moins une fois sur $[0, 1]$.
- Supposons que f s'annule exactement une fois en x_0.
  - Si f ne change pas de signe en x_0, alors comme f est continue sur $[0, 1]$ alors f garde un signe constant Or, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0$ donc $f = 0$ sur $[a, b]$ Absurde car on a supposé que f s'annule exactement une fois et $a < b$ donc $[a, b]$ contient une infinité de réels.

- Si f change de signe en x_0. En effectuant un tableau de signe, on remarque que la fonction $g : x \mapsto (x - x_0)f(x)$ ne change pas de signe sur $[a, b]$. De plus, g est continue sur $[a, b]$ donc g garde un signe constant.
  Or, $\displaystyle\int_a^b g(x)dx = \int_a^b (x - x_0)f(x)dx = \int_a^b xf(x)dx - x_0 \int_a^b f(x)dx = 0.$
  Comme g est continue sur $[a, b]$ et de signe constant, on en déduit que $g = 0$ sur $[a, b]$.
  Ainsi : $\forall x \in [a, b]$, $(x - x_0)f(x) = 0$. Donc : $\forall x \in [a, b] \setminus \{x_0\}$, $f(x) = 0$. De plus, $f(x_0) = 0$. Ainsi, on a : $\forall x \in [a, b],\ f(x) = 0$. Absurde car on a supposé que f s'annule exactement une fois et $a < b$ donc $[a, b]$ contient une infinité de réels.

Finalement, on a bien prouvé que f s'annule au moins deux fois sur $[a, b]$.

Exercice 10. Notons tout d'abord que l'hypothèse initiale donne par linéarité que pour toute fonction polynomiale P de degré inférieur ou égal à n :

$$\int_x^b P(t)f(t)dt = 0$$

Raisonnons par l'absurde. Supposons que f s'annule au plus de n fois sur $]a, b[$. Notons $x_1 < ... < x_p$ (avec $p \leq n$) les points où f s'annule en changeant de signe.
Posons $\phi : x \mapsto (x - x_1)...(x - x_p)f(x)$. En dressant le tableau de signe de la fonction ϕ, on remarque que ϕ est de signe constant sur $[a, b]$. De plus, ϕ est continue sur $[a, b]$.
Enfin, $\displaystyle\int_a^b \phi(t)dt = 0$ d'après la remarque faite au début de l'exercice car $(X - x_1)...(X - x_p)$ est un polynôme de degré $p \leq n$.
Ainsi, $\phi = 0$ sur $[a, b]$.
Donc : $\forall x \in [a, b]$, $(x - x_1)...(x - x_p)f(x) = 0$.
Ainsi : $\forall x \in [a, b] \setminus \{x_1, ..., x_p\}$, $f(x) = 0$.
Absurde car comme $a < b$, $[a, b] \setminus \{x_1, ..., x_p\}$ contient une infinité de valeurs et on a supposé que f s'annule au plus n fois.
Ainsi, f s'annule au moins $n + 1$ fois dans $]a, b[$.

Exercice 11. Le nombre réel $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ est soit positif soit négatif.

- Supposons $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \geq 0$, alors par hypothèse, on a $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^b |f(t)|dt$. Donc : $\displaystyle\int_a^b (|f(t)| - f(t))dt = 0$.
  Or ,$|f| - f$ est une fonction positive et continue sur $[a, b]$. Ainsi, $|f| - f = 0$ donc $f = |f|$.
  Ainsi, f est positive sur $[a, b]$ donc est de signe constant.
- Supposons $\displaystyle\int_a^b f(t)dt < 0$, alors par hypothèse $\displaystyle-\int_a^b f(t)dt = \int_a^b |f(t)|dt$. Donc : $\displaystyle\int_a^b (|f(t)| + f(t))dt = 0$.
  Or : $\forall x \in [a, b]$, $-|f(x)| \leq f(x)$. Donc $|f| + f$ est une fonction positive et continue sur $[a, b]$. Ainsi, on obtient : $|f| + f = 0$ donc $f = -|f|$.
  Ainsi, f est négative sur $[a, b]$ donc est de signe constant.

Finalement, on peut conclure que f est de signe contant sur $[a, b]$.

Exercice 12. On a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (f^2(x) - f(x))^2dx &= \int_0^1 (f^4(x) - 2f^3(x) + f^2(x))dx \\ &= \int_0^1 f^4(x)dx - 2\int_0^1 f^3(x)dx + \int_0^1 f^2(x)dx \\ &= 0\end{aligned}$$

car $\displaystyle\int_0^1 f^2 = \int_0^1 f^3 = \int_0^1 f^4$.
La fonction f étant continue sur $[0, 1]$, la fonction $\phi : x \to (f^2(x) - f(x))^2$ est continue sur $[0, 1]$. De plus, ϕ est continue sur $[0, 1]$, de signe constant (positive) et d'intégrale nulle, ainsi, $\phi = 0$.
Ainsi : $\forall x \in [0, 1]$, $f^2(x) = f(x)$.
D'où :

$$\forall x \in [0, 1],\ \Big(f(x) = 0 \text{ ou } f(x) = 1\Big) \quad (*).$$

Supposons f non constante sur $[0, 1]$, alors :
il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = 0$ et il existe $x_1 \in [0, 1]$ tel que $f(x_1) = 1$.

Comme f est continue sur $[0,1]$, il existe donc $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = \dfrac{1}{2}$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires, ce qui est impossible d'après $(*)$.
Ainsi :

$$\Big(\forall x \in [0,1],\ f(x) = 0\Big) \quad \text{ou} \quad \Big(\forall x \in [0,1],\ f(x) = 1\Big).$$

Les fonctions solutions sont donc la fonction constante égale à 0 sur $[0,1]$ et la fonction constante égale à 1 sur $[0,1]$.

2 Sommes de Riemann

Exercice 13. 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+(k/n)^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $f : x \to \dfrac{1}{1+x^2}$.
f est continue sur $[0,1]$ donc d'après le résultat sur les sommes de Riemann, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \Big[\arctan(t)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $g : x \to \dfrac{x}{1+x^2}$.
g est continue sur $[0,1]$ donc d'après le résultat sur les sommes de Riemann, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2} = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt = \left[\frac{\ln(1+t^2)}{2}\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}.$$

3.

$$\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \sin\left(\frac{(l+n)\pi}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \sin\left(\frac{l\pi}{n} + \pi\right)$$

Méthode 1 :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = -\frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \sin\left(\frac{l\pi}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $h : x \mapsto -\sin(\pi x)$.
h est continue sur $[0,1]$ donc d'après le résultat sur les sommes de Riemann, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \int_0^1 h(t)dt = \left[\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\right]_0^1 = -\frac{2}{\pi}.$$

Méthode 2 :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{\pi} \times \frac{(2\pi-\pi)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} s\left(\pi + \frac{k(2\pi-\pi)}{n}\right)$$

où $s : x \mapsto \sin(x)$.
s est continue sur $[\pi, 2\pi]$ donc d'après le résultat sur les sommes de Riemann, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{\pi} \int_\pi^{2\pi} s(t)dt = \frac{1}{\pi} \times \Big[-\cos(x)\Big]_\pi^{2\pi} = -\frac{2}{\pi}.$$

Exercice 14. 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 2^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $f : x \mapsto 2^x$.
f est continue sur $[0,1]$ donc d'après le résultat sur les sommes de Riemann, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 2^{\frac{k}{n}} = \int_0^1 2^x dx = \int_0^1 e^{x\ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)}(e^{\ln(2)} - 1) = \frac{1}{\ln(2)}(2-1) = \frac{1}{\ln(2)}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+2\frac{k}{n}}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$
où $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$.
f est continue sur $[0,1]$ donc d'après le résultat sur les sommes de Riemann, on obtient :
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+2x}}dx = \int_0^1 (1+2x)^{-1/2}dx = \Big[(1+2x)^{1/2}\Big]_0^1 = \sqrt{3}-1$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$
où $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.
f est continue sur $[0,1]$ donc d'après le résultat sur les sommes de Riemann, on obtient :
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$$
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}$.
On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\begin{aligned}
\ln(u_n) &= \ln\left(\frac{1}{n^2}\prod_{k=0}^{n-1}(n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}\right) \\
&= \ln\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}\prod_{k=0}^{n-1}(n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}\right) \\
&= \ln\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)
\end{aligned}$$
où $f : x \mapsto \ln(1+x^2)$.
f est continue sur $[0,1]$ donc d'après le résultat sur les sommes de Riemann, on obtient :
$$\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \int_0^1 \ln(1+t^2)dt$$
On effectue l'intégration par parties :
$$\begin{array}{lcl} u'(t) = 1, & \text{et} & v(t) = \ln(1+t^2) \\ u(t) = t & \text{et} & v'(t) = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{array}.$$
u et v sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. On a alors :
$$\int_0^1 \ln(1+t^2)dt = \Big[\ln(1+t^2)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2}dt = \ln 2 - 2\int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt = \ln(2)-2+2\Big[\arctan(t)\Big]_0^1 = \ln(2)-2+\frac{\pi}{2}.$$
Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \ln(2)-2+\frac{\pi}{2}$. Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \exp\left(\ln(2)-2+\frac{\pi}{2}\right) = 2e^{-2}e^{\frac{\pi}{2}}$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$.
On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\ln(u_n) &= \frac{1}{n}\left(\ln((2n)!) - \ln(n!) - \ln(n^n)\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{2n} \ln(k) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k) - n\ln(n)\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=n+1}^{2n} \ln(k) - n\ln(n)\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \ln(n+k) - n\ln(n)\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} (\ln(n+k) - \ln(n))\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n+k}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{k}{n}) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)
\end{aligned}$$

où $f : x \mapsto \ln(1+x)$.
f est continue sur $[0,1]$ donc d'après le résultat sur les sommes de Riemann, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \int_0^1 \ln(1+t)dt$$

On effectue l'intégration par parties :

$$\begin{array}{lll}
u'(t) = 1, & \text{et} & v(t) = \ln(1+t) \\
u(t) = t & \text{et} & v'(t) = \dfrac{1}{1+t}
\end{array}.$$

u et v sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. On a alors :

$$\int_0^1 \ln(1+t)dt = \Big[t\ln(1+t)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t}dt = \ln(2) - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt = \ln(2) - 1 + \Big[\ln(1+t)\Big]_0^1 = 2\ln(2) - 1.$$

Ainsi , $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = 2\ln(2) - 1$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^{2\ln(2)-1} = e^{2\ln(2)}e^{-1} = \left(e^{\ln(2)}\right)^2 e^{-1} = \dfrac{4}{e}$.

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k(n-k)} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k(n-k)}{n^2}} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n} \times \left(1 - \frac{k}{n}\right)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)
\end{aligned}$$

où $f : x \mapsto \sqrt{x(1-x)}$.
f est continue sur $[0,1]$ donc d'après le résultat sur les sommes de Riemann, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k(n-k)} = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)}dx.$$

On effectue le changement de variable $x = \cos^2(t)$, on a : $dx = -2\cos(t)\sin(t)dt$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}dx &= -2\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{\cos^2(t)\sin^2(t)}\cos(t)\sin(t)dt \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(t)\sin(t)|\cos(t)\sin(t)dt \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin^2(t)dt \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2t)^2}{4}dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(4t)}{2}dt \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos(4t))dt \\
&= \frac{1}{4}\left[1 - \frac{\sin(4t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k(n-k)} = \frac{\pi}{8}.$$

Exercice 16. 1. $X^{2n} - 1$ est un polynôme unitaire de degré $2n$ et dont les racines sont les racines $(2n)$-ième de l'unité.
Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
X^{2n} - 1 &= (X-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)\left(X - e^{\frac{ip\pi}{n}}\right)\prod_{k=n+1}^{2n-1}\left(X - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) \\
&= (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)\prod_{l=1}^{n}\left(X - e^{\frac{i\pi}{n}(2n-l)}\right) \quad \text{en posant } l = 2n-k \text{ dans le deuxième produit} \\
&= (X^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)\prod_{l=1}^{n-1}\left(X - e^{\frac{-il\pi}{n}}\right) \\
&= (X^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)\left(X - e^{\frac{-ik\pi}{n}}\right) \\
&= (X^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X^2 - 2\cos(\frac{k\pi}{n})X + 1\right).
\end{aligned}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, Le discriminant du polynôme $X^2 - 2X\cos(t) + 1$ vaut $4\cos^2(t) - 4 = -4\sin^2(t) < 0$ sur $]0,\pi[$. Ainsi : $\forall t \in]0,\pi[,\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ x^2 - 2x\cos(t) + 1 > 0$.
Ainsi, la fonction $f_x : t \mapsto x^2 - 2x\cos(t) + 1$ est strictement positive sur $]0,\pi[$.
De plus, $f_x(0) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 > 0$ car $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. De même, $f_x(\pi) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 > 0$ car $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.
Ainsi, f_x est continue sur $[0,\pi]$ à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$. Ainsi, $\ln\circ f_x$ est continue sur $[0,\pi]$ par composition.
Comme $\ln\circ f_x$ est continue sur $[0,\pi]$, d'après le résultat sur les sommes de Riemann, on a :

$$I(x) = \int_0^{\pi} \ln(x^2 - 2x\cos t + 1)dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g_x\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

avec $g_x = \ln\circ f_x : t \mapsto \ln(x^2 - 2x\cos t + 1)$.

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
I(x) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n-1}(x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{n}+1)\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}\right)
\end{aligned}$$

- 1er cas $|x|<1$: On a :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}\right) = \frac{\pi}{n}(\ln(1-x^{2n})-\ln(1-x^2)).$$

  Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{2n}=0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(1-x^{2n})=0$. Puis, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}=0$.
  Ainsi, par produit, on obtient :

$$I(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}(\ln(1-x^{2n})-\ln(1-x^2)) = 0$$

- 2ème cas $|x|>1$:

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}\right) = \frac{\pi}{n}\ln(x^{2n}-1)-\frac{\pi}{n}\ln(x^2-1).$$

  On sait déjà que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\ln(x^2-1)=0$.
  Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{n}\ln(x^{2n}-1) &= \frac{\pi}{n}\left(\ln(x^{2n})+\ln(1-x^{-2n})\right)\\
&= \frac{\pi}{n}\left(\ln(|x|^{2n})+\ln(1-x^{-2n})\right)\\
&= 2\pi\ln(|x|)+\frac{\pi}{n}\ln\left(1-\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}\right)
\end{aligned}$$

  Or, $\left|\frac{1}{x}\right|<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\ln\left(1-\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}\right)=0.$

Ainsi, on obtient :

$$I(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}\right) = 2\pi\ln(|x|)$$

3 Calculs d'intégrales

Exercice 17. 1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(x)\cos(x)dx = \left[\frac{\sin^3(x)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}.$

2. On effectue l'intégration par parties :

$$\begin{array}{lll} u_1'(t)=e^{-t}, & \text{et} & v_1(t)=t^2+t+1\\ u_1(t)=-e^{-t} & \text{et} & v_1'(t)=2t+1\end{array}.$$

   u_1 et v_1 sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 (t^2+t+1)e^{-t} &= \Big[(t^2+t+1)(-e^{-t})\Big]_{-1}^1 + \int_{-1}^1(2t+1)e^{-t}dt\\
&= -3e^{-1}+e+\int_{-1}^1(2t+1)e^{-t}dt
\end{aligned}$$

   On effectue de nouveau une intégration par parties :

$$\begin{array}{lll} u_2'(t)=e^{-t}, & \text{et} & v_2(t)=2t+1\\ u_2(t)=-e^{-t} & \text{et} & v_2'(t)=2\end{array}.$$

u_2 et v_2 sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$. On a alors :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(t^2+t+1)e^{-t} &= -3e^{-1}+e+\Big[(2t+1)(-e^{-t})\Big]_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}2e^{-t}dt\\ &= -3e^{-1}+e-3e^{-1}-e+2[-e^{-t}]_{-1}^{1}\\ &= 2e-8e^{-1}\end{aligned}$$

3. On effectue l'intégration par parties :

$$\begin{array}{lll} u_1'(t)=1 & \text{et} & v_1(t)=(\ln(t))^2\\ u_1(t)=t & \text{et} & v_1'(t)=\dfrac{2\ln(t)}{t}\end{array}.$$

u_1 et v_1 sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $[1,2]$. On a alors :

$$\begin{aligned}\int_1^2(\ln t)^2 &= [t(\ln t)^2]_1^2-\int_1^2 2\ln t dt\\ &= 2(\ln(2))^2-2\int_1^2\ln t dt\end{aligned}$$

On effectue de nouveau une intégration par parties :

$$\begin{array}{lll} u_2'(t)=1, & \text{et} & v_2(t)=\ln(t)\\ u_2(t)=t & \text{et} & v_2'(t)=\dfrac{1}{t}\end{array}.$$

u_2 et v_2 sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $[1,2]$. On a alors :

$$\begin{aligned}\int_1^2(\ln t)^2 &= 2(\ln(2))^2-2\Big[t\ln(t)\Big]_1^2+2\int_1^2 1dt\\ &= 2(\ln(2))^2-4\ln(2)+2\end{aligned}$$

4. On effectue l'intégration par parties :

$$\begin{array}{lll} u'(t)=t^n & \text{et} & v(t)=\ln(t)\\ u(t)=\dfrac{t^{n+1}}{n+1} & \text{et} & v'(t)=\dfrac{1}{t}\end{array}.$$

u_1 et v_1 sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $[1,e]$. On a alors :

$$\begin{aligned}I_n &= \Big[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln(t)\Big]_1^e-\int_1^e\frac{t^{n+1}}{n+1}\times\frac{1}{t}dt\\ &= \frac{e^{n+1}}{n+1}-\int_1^e\frac{t^n}{n+1}dt\\ &= \frac{e^{n+1}}{n+1}-\Big[\frac{t^{n+1}}{(n+1)^2}\Big]_1^e\\ &= \frac{e^{n+1}}{n+1}-\frac{(e^{n+1}-1)}{(n+1)^2}\end{aligned}$$

5. On effectue un changement de variable $u=\dfrac{t}{2}$, on a $du=\dfrac{1}{2}dt$. Ainsi :

$$\int_0^2\frac{\arcsin\left(\frac{t}{2}\right)}{\sqrt{4-t^2}}dt=\int_0^1\frac{\arcsin u}{\sqrt{4-4u^2}}2du=\int_0^1\frac{\arcsin u}{\sqrt{1-u^2}}du=\Big[\frac{1}{2}(\arcsin u)^2\Big]_0^1=\frac{\pi^2}{8}.$$

6. On effectue le changement de variable $t=\sin u$, on a : $dt=\cos(u)du$. Ainsi :

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos u|\cos(u)|du=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos u)^2du=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(2u)+1}{2}du=\frac{1}{2}\Big[\frac{\sin(2u)}{2}+1\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

Exercice 18. 1. f_1 est continue sur $]-\infty,-2[$, $]-2,2[$ et $]2,+\infty[$. Elle admet des primitives sur chacun de ces trois intervalles.
De plus, une primitive de f_1 sur l'un de ces intervalles est : $t\mapsto\dfrac{-1}{2(t^2-4)}$.

2. On constate que $f_2 : x \mapsto \mathrm{Im}(e^{2x+ix})$.

   Or, une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto e^{(2+i)x}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{2+i}e^{(2+i)x} = \dfrac{(2-i)}{5}e^{(2+i)x}$. Ainsi, une primitive de f_2 sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \mathrm{Im}\left(\dfrac{(2-i)}{5}e^{(2+i)x}\right) = \dfrac{e^{2x}}{5}\mathrm{Im}\left((2-i)e^{ix}\right) = -\dfrac{1}{5}e^{2x}\cos x + \dfrac{2}{5}e^{2x}\sin x$.

3. Soit $a, x \in \mathbb{R}$, on effectue l'intégration par parties :

$$\begin{array}{lcl} u_1'(t) = \sin(t) & \text{et} & v_1(t) = t^2+1 \\ u_1(t) = -\cos(t) & \text{et} & v_1'(t) = 2t \end{array}.$$

   u_1 et v_1 sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned} \int_a^x (t^2-1)\sin(t) &= \Big[-(t^2+1)\cos(t)\Big]_a^x + \int_a^x 2t\cos(t)dt \\ &= -(x^2+1)\cos(x) \ + 2\int_a^x t\cos(t)dt + C_1 \end{aligned}$$

   avec $C_1 \in \mathbb{R}$.

   On effectue de nouveau une intégration par parties :

$$\begin{array}{lcl} u_2'(t) = \cos(t), & \text{et} & v_2(t) = t \\ u_2(t) = \sin(t) & \text{et} & v_2'(t) = 1 \end{array}.$$

   u_2 et v_2 sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned} \int_a^x (t^2-1)\sin(t) &= -(x^2+1)\cos(x) \ + 2\Big[t\sin(t)\Big]_a^x - 2\int_a^x \sin(t)dt + C_1 \\ &= -(x^2+1)\cos(x) \ + 2x\sin(x) + 2\Big[\cos(t)\Big]_a^x + C_2 \\ &= -(x^2+1)\cos(x) \ + 2x\sin(x) + 2cos(x) + C_3 \end{aligned}$$

   avec $C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

   Ainsi, une primitive de f_3 sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \cos x + 2x\sin x - x^2\cos x$.

4. f est continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$.

   Soit $x, a \in \mathbb{R}$. On cherche à calculer $\displaystyle\int_a^x t\arctan(t)dt$.

   on effectue l'intégration par parties :

$$\begin{array}{lcl} u'(t) = t & \text{et} & v(t) = \arctan(t) \\ u(t) = \dfrac{t^2}{2} & \text{et} & v'(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \end{array}.$$

   u et v sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned} \int_a^x t\arctan(t)dt &= \left[\frac{t^2}{2}\arctan(t)\right]_a^x - \frac{1}{2}\int_a^x \frac{t^2}{1+t^2}dt \\ &= \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\int_a^x \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt + C \\ &= \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{a^2}{2}\arctan(a) - \frac{1}{2}\Big[t - \arctan(t)\Big]_a^x \\ &= \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\Big[x - \arctan(x)\Big] + C' \end{aligned}$$

   où $C, C' \in \mathbb{R}$. Ainsi, $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}\arctan(x) - \dfrac{1}{2}\Big[x - \arctan(x)\Big]$ est une primitive de f_4 sur $\mathbb{R}$.

5. Soit $x \in \mathbb{R}$, linéarisons l'expression de f_5 :

$$\begin{aligned}
\sin^2(t)\cos^2(t) &= \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^2\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^2 \\
&= -\frac{1}{16}\left(e^{2it}-2+e^{-2it}\right)\left(e^{2it}+2+e^{-2it}\right) \\
&= -\frac{1}{16}\left(e^{4it}+2e^{2it}+1-2e^{2it}-4-2e^{-2it}+1+2e^{-2it}+e^{-4it}\right) \\
&= -\frac{1}{16}\left(e^{4it}+e^{-4it}-2\right) \\
&= -\frac{1}{16}\left(2\cos(4t)-2\right) \\
&= -\frac{1}{8}\cos(4t)+\frac{1}{8}
\end{aligned}$$

Ainsi, une primitive sur $\mathbb{R}$ de f_5 est $x \mapsto -\frac{1}{32}\sin(4x)+\frac{x}{8}$.

6. f est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$.
Commençons par linéariser $\sin^3$.
Soit $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\sin^3(t) &= \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^3 \\
&= \frac{e^{3it}-3e^{it}+3e^{-it}-e^{-3it}}{-8i} \\
&= -\left(\frac{2i\sin(3t)-6i\sin(t)}{8i}\right) \\
&= -\frac{\sin(3t)}{4}+\frac{3\sin(t)}{4}
\end{aligned}$$

Soient $a, x \in \mathbb{R}$, on effectue l'intégration par parties :

$$\begin{array}{lll}
u'(t) = -\dfrac{\sin(3t)}{4}+\dfrac{3\sin(t)}{4} & \text{et} & v(t) = t \\
u(t) = \dfrac{\cos(3t)}{12}-\dfrac{3\cos(t)}{12} & \text{et} & v'(t) = 1
\end{array}.$$

u et v sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\int_a^x t\sin^3(t)dt &= \int_a^x t\left(-\frac{\sin(3t)}{4}+\frac{3\sin(t)}{4}\right)dt \\
&= \left[t\left(\frac{\cos(3t)}{12}-\frac{3\cos(t)}{4}\right)\right]_a^x - \int_a^x \frac{\cos(3t)}{12}-\frac{3\cos(t)}{4}dt \\
&= x\left(\frac{\cos(3x)}{12}-\frac{3\cos(x)}{4}\right)-\left(\frac{\sin(3x)}{36}-\frac{3\sin(x)}{4}\right)+C
\end{aligned}$$

où $C \in \mathbb{R}$. Ainsi, $x \mapsto x\left(\frac{\cos(3x)}{12}-\frac{3\cos(x)}{4}\right)-\left(\frac{\sin(3x)}{36}-\frac{3\sin(x)}{4}\right)$ est une primitive de f_6 sur $\mathbb{R}$.

7. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$.
Soient $x, a \in \mathbb{R}_+^*$. On cherche à calculer $\int_a^x \frac{\ln(t)}{t+t(\ln t)^2}dt$.
On effectue le changement de variable $u = \ln(t)$ ce qui équivaut à $t = e^u$, on a $dt = e^u du$.
On obtient alors :

$$\int_a^x \frac{\ln(t)}{t+t(\ln t)^2}dt = \int_{ln(a)}^{\ln(x)} \frac{u}{1+u^2}du = \left[\frac{1}{2}\ln(1+u^2)\right]_{\ln(a)}^{\ln x} = \frac{1}{2}\ln(1+\ln^2(x))+C,$$

avec $C \in \mathbb{R}$.
Ainsi, $x \mapsto \frac{1}{2}\ln(1+\ln^2(x))$ est une primitive de f_7 sur $\mathbb{R}_+^*$.

8. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Soit $x, a \in \mathbb{R}_+^*$. On cherche à calculer $\displaystyle\int_a^x \frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}dt$.

   On effectue le changement de variable Posons $u = \sqrt{t}$ ce qui équivaut à $t = u^2$, on a $dt = 2udu$. On a alors :

$$\int_a^x \frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}dt = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{x}} \frac{2u}{u+u^3}du = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{x}} \frac{2}{1+u^2}du = \Big[2\arctan(u)\Big]_{\sqrt{a}}^{\sqrt{x}} = 2\arctan(\sqrt{x}) + C,$$

   avec $C \in \mathbb{R}$.

   Ainsi, $x \mapsto 2\arctan(\sqrt{x})$ est une primitive de f_8 sur $\mathbb{R}_+^*$.

9. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$). Ainsi, f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

   Soit $x, a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\int_a^x \frac{t+1}{t^2-t+1} &= \int_a^x \frac{\frac{1}{2}(2t-1)+\frac{3}{2}}{t^2-t+1}dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\int_a^x \frac{(2t-1)}{t^2-t+1}dt + \int_a^x \frac{3}{t^2-t+1}dt\right]\end{aligned}$$

   Or,

$$\int_a^x \frac{(2t-1)}{t^2-t+1}dt = \Big[\ln(t^2-t+1)\Big]_a^x = \ln(x^2-x+1) + C_1,$$

   $C_1 \in \mathbb{R}$.

   De plus,

$$\int_a^x \frac{3}{t^2-t+1}dt = 3\int_a^x \frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt = 4\int_a^x \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)^2+1}dt = 4\int_a^x \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dt$$

   On effectue le changement de variable $u = \dfrac{2}{\sqrt{3}}t - \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, on a $du = \dfrac{2}{\sqrt{3}}dt$

   On obtient alors :

$$\int_a^x \frac{3}{t^2-t+1}dt = 2\sqrt{3}\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}a-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{u^2+1}du = 2\sqrt{3}\Big[\arctan(u)\Big]_{\frac{2}{\sqrt{3}}a-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C_2,$$

   $C_2 \in \mathbb{R}$.

   Finalement,

$$\begin{aligned}\int_a^x \frac{t+1}{t^2-t+1} &= \frac{1}{2}\left(\ln(x^2-x+1) + 2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) + C \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C,\end{aligned}$$

   $C \in \mathbb{R}$.

   Ainsi, $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ est une primitive de f_9 sur $\mathbb{R}$.

4 Suites et intégrales

Exercice 19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall x \in [0,1],\ \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x} \leq 1.$$

Or : $\forall x \in [0,1]$, $x^n \geq 0$.

Ainsi, on a :

$$\forall x \in [0,1],\ \frac{x^n}{2} \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que :

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x^n dx \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx$$

donc finalement,

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

Par le théorème de convergence par encadrement, on obtient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exercice 20. 1. Soit f une fonction de classe $\mathbb{C}^1$ sur $[a,b]$.
f et $t \mapsto \sin(nt)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.
Par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\sin(nt)dt &= \left[-\frac{f(t)\cos(nt)}{n}\right]_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\cos(nt)dt \\ &= -\frac{f(b)\cos(nb)+f(a)\cos(na)}{n} + \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\cos(nt)dt\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\left|\int_a^b f(t)\sin(nt)dt\right| \leq \frac{|f(b)|+|f(a)|}{n} + \frac{1}{n}\int_a^b |f'(t)|dt \leq \frac{|f(b)|+|f(a)|+\int_a^b |f'(t)|dt}{n}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{|f(b)|+|f(a)|+\int_a^b |f'(t)|dt}{n}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_a^b f(t)\sin(nt)dt = 0$.

2. Soit f une fonction en escalier sur $[a,b]$. Il existe $(x_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f.
Pour tout $i \in [\![0,p-1]\!]$, on note y_i la valeur prise par f sur $]x_i,x_{i+1}[$. Ainsi, on a :

$$\int_a^b f(t)\sin(nt)dt = \sum_{i=0}^{p-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} y_i\sin(nt)dt$$

Or, pour tout $i \in [\![0,p-1]\!]$,

$$\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} y_i\sin(nt)dt\right| = \left|\frac{y_i}{n}\left(\cos(nx_i)-\cos(nx_{i+1})\right)\right| \leq \frac{|y_i|}{n}\left(|\cos(nx_i)|+|\cos(nx_{i+1})|\right) \leq \frac{2|y_i|}{n}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} y_i\sin(nt)dt = 0$.

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_a^b f(t)\sin(nt)dt = 0$ car $\displaystyle\int_a^b f(t)\sin(nt)dt$ est une somme finie (les bornes des la somme de dépendent pas de n) de termes qui tendent vers 0.

3. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$.
Il existe deux suites $(\phi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier sur $[a,b]$ telles que :

$$\forall p\in\mathbb{N},\ \phi_p \leq f \leq \psi_p \quad \text{et} \quad \int_a^b \phi_p(t) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)dt,\ \int_a^b \psi_p(t) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)dt.$$

Soit $n,p\in\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\sin(nt)dt\right| &= \left|\int_a^b (f(t)-\phi_p(t)+\phi_p(t))\sin(nt)dt\right| \\ &= \left|\int_a^b (f(t)-\phi_p(t))\sin(nt)dt + \int_a^b \phi_p(t)\sin(nt)dt\right| \\ &\leq \left|\int_a^b (f(t)-\phi_p(t))\sin(nt)dt\right| + \left|\int_a^b \phi_p(t)\sin(nt)dt\right| \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire} \\ &\leq \int_a^b |f(t)-\phi_p(t)||\sin(nt)|dt + \left|\int_a^b \phi_p(t)\sin(nt)dt\right| \\ &\leq \int_a^b |f(t)-\phi_p(t)|dt + \left|\int_a^b \phi_p(t)\sin(nt)dt\right| \\ &\leq \int_a^b (f(t)-\phi_p(t))dt + \left|\int_a^b \phi_p(t)\sin(nt)dt\right| \\ &\leq \int_a^b (\psi_p(t)-\phi_p(t))dt + \left|\int_a^b \phi_p(t)\sin(nt)dt\right|\end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$.
Or, $\int_a^b (\psi_p(t) - \phi_p(t))dt = \int_a^b \psi_p(t)dt - \int_a^b \phi_p(t))dt$. Ainsi, $\lim_{p\to+\infty} \int_a^b (\psi_p(t) - \phi_p(t))dt = 0$.
Ainsi, il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ p \geq p_0 \quad \Longrightarrow \quad \left| \int_a^b (\psi_p(t) - \phi_p(t))dt \right| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Ainsi, en particulier, on a :

$$\int_a^b (\psi_{p_0}(t) - \phi_{p_0}(t))dt \leq \frac{\epsilon}{2}$$

De plus, d'après la questions précédente, on sait que $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \phi_{p_0}(t)\sin(nt)dt = 0$.
Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \quad \Longrightarrow \quad \left| \int_a^b \phi_{p_0}(t)\sin(nt)dt \right| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Finalement, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \quad \Longrightarrow \quad \left| \int_a^b f(t)\sin(nt)dt \right| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)dt = 0$.

Exercice 21. 1. $u_0 = \int_0^1 e^x dx = e - 1$.
$u_1 = \int_0^1 (1-x)e^x dx$. On effectue l'intégration par parties :

$$\begin{array}{lll} u'(x) = e^x & \text{et} & v(x) = 1 - x \\ u(x) = e^x & \text{et} & v'(x) = -1 \end{array}.$$

u et v sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. On a alors : $u_1 = \Big[(1-x)e^x\Big]_0^1 + \int_0^1 e^x dx = -1 + e - 1 = e - 2$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue l'intégration par parties :

$$\begin{array}{lll} u'(x) = e^x & \text{et} & v(x) = (1-x)^n \\ u(x) = e^x & \text{et} & v'(x) = -n(1-x)^{n-1} \end{array}.$$

u et v sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. On a alors :

$$\begin{aligned} u_n &= \left[\frac{(1-x)^n}{n!}e^x\right] + \int_0^1 \frac{(1-x)^{n-1}}{(n-1)!}e^x dx \\ &= \frac{1}{n!} + u_{n-1} \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien montré que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_{n-1} - \frac{1}{n!}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
D'après la question précédente, $u_{n+1} = u_n - \frac{1}{(n+1)!} < u_n$. Ainsi, (u_n) est strictement décroissante.
De plus : $\forall t \in [0,1]$, $\frac{(1-t)^n}{n!}e^t \geq 0$.
Par positivité de l'intégrale, on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.
Ainsi, (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc converge vers un réel que l'on note l. On sait déjà par passage à la limite que $l \geq 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall t \in [0,1],\ 0 \leq \frac{(1-t)^n}{n!} \leq \frac{1}{n!}$$

Ainsi, par positivité de l'exponentielle, on obtient :

$$\forall t \in [0,1],\ 0 \leq \frac{(1-t)^n}{n!}e^t \leq \frac{1}{n!}e^t.$$

Ainsi, par croissance de l'intégrale : $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 e^t dt = \dfrac{1}{n!}(e-1)$.
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n!}(e-1) = 0$.
Ainsi, par théorème d'encadrement, on obtient : $l = 0$.

3. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$.

   - Pour $n = 0$, on a $u_0 = u_0$. Or, $\displaystyle\sum_{k=1}^{0} \frac{1}{k!} = 0$. Ainsi, la propriété est vraie pour $n = 0$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n = u_0 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$.
     D'après la question 1, $u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{(n+1)!}$.
     Ainsi, par hypothèse de récurrence :
     $$u_{n+1} = u_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(n+1)!} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!}$$
   - On peut donc conclure que : $\forall n \in, \ u_n = u_0 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$.

   Ainsi :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + u_0 - u_n$$
   On en déduit que :
   $$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + u_0 - \lim_{n\to+\infty} u_n = 1 + u_0 = e.$$

Exercice 22. 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme f continue sur un segment, cette fonction est bornée. Ainsi, il existe $M > 0$ tel que : $\forall t \in [0,1], \ |f(t)| \leq M$.
D'où : $\forall t \in [0,1], \ t^n|f(t)| \leq Mt^n$.
Or, on a :
$$|u_n| = \left|\int_0^1 t^n f(t)dt\right| \leq \int_0^1 t^n|f(t)|dt$$
Ainsi, par croissance de l'intégrale, on a :
$$|u_n| \leq \int_0^1 Mt^n = \frac{M}{n+1}.$$
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{M}{n+1} = 0$.
Ainsi, par majoration, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2. On effectue l'intégration par parties :
$$\begin{array}{lcl} u'(t) = t^n & \text{et} & v(t) = f(t) \\ u(t) = \dfrac{t^{n+1}}{n+1} & \text{et} & v'(t) = f'(t) \end{array}.$$
u et v sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. On a alors :
$$\begin{aligned} u_n &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} f(t)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} f'(t)dt \\ &= \frac{1}{n+1} f(1) - \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1} f'(t)dt \end{aligned}$$
Ainsi :
$$nu_n = \frac{n}{n+1} f'(1) - \frac{n}{n+1}\int_0^1 f'(t)t^{n+1}dt$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} f'(1) = f'(1)$.
De plus, f est de classe $\mathcal{C}^1$ donc f' est continue sur $[0,1]$.
Ainsi, en appliquant la question précédente à f', on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 f'(t)t^{n+1}dt = 0$.
Ainsi, $\dfrac{n}{n+1} \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 f'(t)t^{n+1}dt = 0$.
Donc finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = f'(1)$.
Ainsi : $nu_n \sim f'(1)$ si $f'(1) \neq 0$.
Ainsi, $u_n \sim \dfrac{f'(1)}{n}$.

Exercice 23. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On effectue sur $[a,b]$ le changement de variable $u = nt^2$ ce qui équivaut à $t = \dfrac{\sqrt{u}}{\sqrt{n}}$, on a $dt = \dfrac{du}{2\sqrt{n}\sqrt{u}}$. Ainsi :

$$\int_a^b \cos(nt^2)dt = \frac{1}{2\sqrt{n}} \int_{na^2}^{nb^2} \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du$$

On effectue l'intégration par parties :

$$\begin{array}{lcl} f'(u) = \cos(u) & \text{et} & g(u) = \dfrac{1}{\sqrt{u}} \\ f(u) = \sin(u) & \text{et} & g'(u) = \dfrac{-1}{2u^{3/2}} \end{array}.$$

f et g sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. On a alors :

$$\begin{aligned} \int_a^b \cos(nt^2)dt &= \frac{1}{2\sqrt{n}} \left[\frac{\sin u}{\sqrt{u}}\right]_{na^2}^{nb^2} + \frac{1}{4\sqrt{n}} \int_{na^2}^{nb^2} \frac{\sin u}{u^{3/2}} du \\ &= \frac{1}{2n}\left(\frac{\sin(nb^2)}{b} - \frac{\sin(na^2)}{a}\right) + \frac{1}{4\sqrt{n}} \int_{na^2}^{nb^2} \frac{\sin u}{u^{3/2}} du \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\left|\int_a^b \cos(nt^2)\right| \leq \left|\frac{1}{2n}\left(\frac{\sin(nb^2)}{b} - \frac{\sin(na^2)}{a}\right)\right| + \frac{1}{4\sqrt{n}} \left|\int_{na^2}^{nb^2} \frac{\sin u}{u^{3/2}} du\right|$$

On sait déjà que :

$$\left|\frac{1}{2n}\left(\frac{\sin(nb^2)}{b} - \frac{\sin(na^2)}{a}\right)\right| \leq \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)$$

De plus,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\sqrt{n}} \left|\int_{na^2}^{nb^2} \frac{\sin u}{u^{3/2}} du\right| &\leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \int_{na^2}^{nb^2} \frac{|\sin u|}{u^{3/2}} du \\ &\leq \frac{1}{4\sqrt{n}} \int_{na^2}^{nb^2} \frac{1}{u^{3/2}} du \\ &\leq -\frac{1}{2\sqrt{n}} \left[u^{-1/2}\right]_{na^2}^{nb^2} \\ &\leq \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\left|\int_a^b \cos(nt^2)\right| \leq \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right) + \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \leq \frac{a}{n}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a}{n} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^b \cos(nt^2), dt = 0$.

Exercice 24. • Etape 1 :
La fonction f est continue sur le segment $[a,b]$ donc f est bornée et atteint ses bornes. Ainsi, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = M$.

- Etape 2 :
  Soit $\epsilon > 0$ tel que $\epsilon \leq M$.
  Par continuité de f en c, il existe $\eta > 0$ tel que :
  $$\forall x \in [a,b],\ |x-c| \leq \eta \quad \Longrightarrow \quad |f(x)-f(c)| \leq \epsilon.$$
  Ainsi :
  $$\forall x \in [a,b],\ |x-c| \leq \eta \quad \Longrightarrow \quad M-\epsilon \leq f(x) \leq M+\epsilon.$$
  - Si $c \notin \{a,b\}$, on pose $\eta' = \min(\eta, c-a, b-c) > 0$. On a ainsi : $\eta' \leq \eta$ et $[c-\eta', c+\eta'] \subset [a,b]$.
    Soit $x \in [c-\eta', c+\eta']$, on a : $|x-c| \leq \eta' \leq \eta$. Ainsi :
    $$\forall x \in [c-\eta', c+\eta'],\ 0 \leq M-\epsilon \leq f(x) \leq M+\epsilon.$$
    Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
    $$\forall x \in [c-\eta', c+\eta'], (M-\epsilon)^n \leq f(x)^n.$$
    Ainsi :
    $$\begin{aligned}
    \int_a^b f(x)^n dx &= \int_a^{c-\eta'} f(x)^n dx + \int_{c-\eta'}^{c+\eta'} f(x)^n dx + \int_{c+\eta'}^b f(x)^n dx \\
    &\geq \int_{c-\eta'}^{c+\eta'} f(x)^n dx \quad \text{car } f \text{ est positive et par positivité de l'intégrale} \\
    &\geq \int_{c-\eta'}^{c+\eta'} (M-\epsilon)^n dx \quad \text{par croissance de l'intégrale} \\
    &\geq 2(M-\epsilon)^n \eta'
    \end{aligned}$$
  - Si $c = a$, on pose $\eta' = \min(\eta, b-a) > 0$. On a ainsi : $\eta' \leq \eta$ et $[c, c+\eta'] \subset [a,b]$.
    Soit $x \in [c, c+\eta']$, on a : $|x-c| \leq \eta' \leq \eta$. Ainsi :
    $$\forall x \in [c, c+\eta'],\ 0 \leq M-\epsilon \leq f(x) \leq M+\epsilon.$$
    Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
    $$\forall x \in [c, c+\eta'], (M-\epsilon)^n \leq f(x)^n.$$
    Ainsi :
    $$\begin{aligned}
    \int_a^b f(x)^n dx &= \int_a^{c+\eta'} f(x)^n dx + \int_{c+\eta'}^b f(x)^n dx \\
    &\geq \int_c^{c+\eta'} f(x)^n dx \quad \text{car } f \text{ est positive et par positivité de l'intégrale} \\
    &\geq \int_c^{c+\eta'} (M-\epsilon)^n dx \quad \text{par croissance de l'intégrale} \\
    &\geq (M-\epsilon)^n \eta'
    \end{aligned}$$
  - Si $c = b$, on pose $\eta' = \min(\eta, b-a) > 0$. On a ainsi : $\eta' \leq \eta$ et $[c-\eta', c] \subset [a,b]$.
    Soit $x \in [c-\eta', c]$, on a : $|x-c| \leq \eta' \leq \eta$. Ainsi :
    $$\forall x \in [c-\eta', c],\ 0 \leq M-\epsilon \leq f(x) \leq M+\epsilon.$$
    Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
    $$\forall x \in [c-\eta', c], (M-\epsilon)^n \leq f(x)^n.$$
    Ainsi :
    $$\begin{aligned}
    \int_a^b f(x)^n dx &= \int_a^{c-\eta'} f(x)^n dx + \int_{c-\eta'}^b f(x)^n dx \\
    &\geq \int_{c-\eta'}^c f(x)^n dx \quad \text{car } f \text{ est positive et par positivité de l'intégrale} \\
    &\geq \int_{c-\eta'}^c (M-\epsilon)^n dx \quad \text{par croissance de l'intégrale} \\
    &\geq (M-\epsilon)^n \eta'
    \end{aligned}$$

Ainsi, dans tous les cas, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (M-\epsilon)^n \eta' \leq \int_a^b f(x)^n dx$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (M-\epsilon)\left(\eta'\right)^{1/n} \leq I_n$$

- Etape 3 : On a : $\forall t \in [a,b],\ 0 \leq f(t) \leq M$.
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\forall t \in [a,b],\ 0 \leq f(t)^n \leq M^n$ Ainsi, par croissance de l'intégrale, on a :

  $$\int_a^b f(x)^n dx \leq \int_a^b M^n dx \leq M^n(b-a)$$

  Donc :

  $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n \leq M(b-a)^{1/n}$$

- Etape 4 : Conclusion : D'après les étapes 2 et 3, on a :

  $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (M-\epsilon)(\eta')^{1/n} \leq I_n \leq M(b-a)^{1/n}$$

  Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}(b-a)^{1/n} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln(b-a)} = 1$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}(M-\epsilon)(\eta')^{1/n} = M-\epsilon$ donc il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

  $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \geq n_1 \quad \Longrightarrow \quad |(M-\epsilon)(\eta')^{1/n} - (M-\epsilon)| \leq \epsilon.$$

  Donc :

  $$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_1 \quad \Longrightarrow \quad M-2\epsilon \leq (M-\epsilon)(\eta')^{1/n}.$$

  De même, $\lim\limits_{n\to+\infty}(\eta')^{1/n} = 1$. Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} M(b-a)^{1/n} = M$.
  Ainsi, il existe $n_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que

  $$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_1 \quad \Longrightarrow \quad |M(b-a)^{1/n} - M| \leq \epsilon.$$

  Donc :

  $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \geq n_1 \quad \Longrightarrow \quad M(b-a)^{1/n} \leq M+\epsilon$$

  Ainsi :

  $$\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq \max(n_1,n_2) \quad \Longrightarrow \quad M-2\epsilon \leq I_n \leq M+\epsilon \leq M+2\epsilon$$

  Ce qui prouve la convergence de I_n vers M.

5 Fonctions définies par une intégrale

Exercice 25. 1. Soit $x > 1$. On effectue l'intégration par parties :

$$\begin{array}{lll} u'(t) = \cos(t) & \text{et} & v(t) = \dfrac{1}{t} \\ u(t) = \sin(t) & \text{et} & v'(t) = \dfrac{-1}{t^2} \end{array}.$$

u et v sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $[x,2x]$. On a alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[\frac{\sin(t)}{t}\right]_n^{2x} + \int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt \\ &\leq \frac{\sin(2x)}{2x} - \frac{\sin(x)}{x} + \int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
|f(x)| &= \left|\frac{\sin(2x)}{2x} - \frac{\sin(x)}{x} + \int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2}dt\right| \\
&\leq \left|\frac{\sin(2x)}{2x}\right| + \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| + \left|\int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2}dt\right| \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire} \\
&\leq \left|\frac{\sin(2x)}{2x}\right| + \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| + \int_x^{2x} \left|\frac{\sin(t)}{t^2}\right| dt \quad (\text{on a bien } x \leq 2x) \\
&\leq \frac{1}{2x} + \frac{1}{x} + \int_x^{2x} \frac{1}{t^2}dt \\
&\leq \frac{1}{2x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x} \\
&\leq \frac{2}{x}
\end{aligned}$$

2. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$. Ainsi, d'après la question précédente, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
3. Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Par décroissance de la fonction cosinus sur $[x, 2x] \subset [0, \pi]$, on a :

   $$\forall t \in [x, 2x],\ \cos(2x) \leq \cos(t) \leq \cos(x).$$

   Ainsi :

   $$\forall t \in [x, 2x],\ \frac{\cos(2x)}{t} \leq \frac{\cos(t)}{t} \leq \frac{\cos(x)}{t}.$$

   Par croissance de l'intégrale (les bornes sont « dans le bon sens »), on obtient :

   $$\cos(2x)\int_x^{2x} \frac{1}{t}dt \leq \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t}dt \leq \cos(x)\int_x^{2x} \frac{1}{t}dt.$$

   Or, $\int_x^{2x} \frac{1}{t}dt = \ln\left(\frac{2x}{x}\right) = \ln(2)$.
   Ainsi, on a :

   $$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right],\ \cos(2x)\ln(2) \leq \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t}dt \leq \cos(x)\ln(2).$$

   Or, par continuité de la fonction cosinus en 0, on a : $\lim\limits_{x\to0^+} (\cos(2x)\ln(2)) = \ln(2) = \lim\limits_{x\to0^+} (\cos(x)\ln(2)) = \ln(2)$.

   Finalement, par encadrement, on obtient que : $\lim\limits_{x\to0^+} \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t}dt = \ln(2)$.
4. $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc admet des primitives. Notons G une primitive de $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t}$.

   $$\forall x \in R_+^*,\ f(x) = G(2x) - G(x).$$

   Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que composée de fonction dérivable (G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que primitive).
   De plus, on a :

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2\frac{\cos(2x)}{2x} - \frac{\cos(x)}{x} = \frac{\cos(2x) - \cos(x)}{x}.$$

Exercice 26. Soit $x \in [a, b]$. Par hypothèse, on a :

$$\forall x \in [a, b],\ \int_a^x f(t)dt = 0.$$

Posons $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$. F est une primitive de f. De plus, on a $F = 0$. Ainsi, en dérivant, on obtient : $\forall x \in [a, b],\ f(x) = 0$.

Exercice 27. Posons $F : x \mapsto e^{-kx}\int_0^x f(t)dt$.

$x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que primitive de f continue sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi, F est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\begin{aligned} F'(x) &= -ke^{-kx}\int_0^x f(t)dt + e^{-kx}f(x) \\ &= \left(f(x) - k\int_0^x f(t)dt\right)e^{-kx} \leq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, F est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et $F(0) = 0$.
Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ e^{-kx}\int_0^x f(t)dt \leq 0.$$

Or, l'exponentielle est positif, donc on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^x f(t) \leq 0.$$

Or, f est positive. Ainsi, par positivité de l'intégrale, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^x f(t)dt \geq 0.$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^x f(t)dt = 0.$$

En dérivant, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = 0.$$

Donc f est le fonction nulle.

Exercice 28. 1. Soit $x \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^1 \min(x,t)f(t)dt \\ &= \int_0^x \min(x,t)f(t)dt + \int_x^1 \min(x,t)f(t)dt \\ &= \int_0^x tf(t)dt + \int_x^1 xf(t)dt \\ &= \int_0^x tf(t)dt + x\int_x^1 f(t)dt \\ &= \int_0^x tf(t)dt - x\int_1^x f(t)dt \end{aligned}$$

Or, f est continue et $t \mapsto tf(t)$ sont continues. Ainsi, F est la combinaison linéaire et produit de fonctions dérivables ($x \mapsto \int_0^x tf(t)dt$ et $x \mapsto \int_1^x f(t)dt$ sont des primitives de fonctions continues sur $[0, 1]$ donc dérivables sur $[0, 1]$). Ainsi F est dérivable sur $[0, 1]$. De plus, on a :

$$\forall x \in [0,1],\ F'(x) = xf(x) - xf(x) - \int_1^x f(t)dt = -\int_1^x f(t)dt.$$

Or, f est continue sur $[0, 1]$. Ainsi, F' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ en tant que primitive de fonction continue.
Finalement, F est de classe $\mathcal{C}^2$.

2. D'après les calculs de la question précédente, on a :

$$\forall x \in [0,1],\ F'(x) = \int_x^1 f(t)dt.$$

Soit $x \in [0, 1]$, d'après le théorème fondamental de l'analyse :

$$F(x) - F(0) = \int_0^x F'(u)du$$

D'où

$$F(x) = \int_0^x \int_u^1 f(t)dtdu$$

6 Applications des formules de Taylor

Exercice 29. Posons $g : x \mapsto \ln(1+x)$. g est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $x \in \mathbb{R}_+$.
De plus, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, g'(x) = \frac{1}{1+x}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, g''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, g^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

Ainsi, on a $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$, $g''(0) = -1$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Par la formule de Taylor avec reste intégrale, on a :

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \sum_{k=0}^{2} \frac{x^k}{k!} g^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} g^{(3)}(t)dt. \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{(1+t)^3} dt \end{aligned}$$

Or, on a :

$$\forall t \in [0,x],\ 0 \leq \frac{1}{(1+x)^3} \leq \frac{1}{(1+t)^3} \leq 1$$

Par croissance de l'intégrale, on a :

$$0 \leq \int_0^x \frac{(x-t)^2}{(1+t)^3} dt \leq \int_0^x (x-t)^2 dt = \frac{x^3}{3}$$

D'où :

$$0 \leq \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^3}{3}$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Exercice 30. Posons $g : x \mapsto \cos(x)$. g est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
De plus, on a :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], g'(x) = -\sin(x)$$
$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], g''(x) = -\cos(x)$$
$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], g^{(3)}(x) = \sin(x)$$
$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], g^{(4)}(x) = \cos(x)$$

Ainsi, on a $g(0) = 1$, $g'(0) = 0$, $g''(0) = -1$ et $g^{(3)}(0) = 0$.
Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Par la formule de Taylor avec reste intégrale, on a :

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \sum_{k=0}^{3} \frac{x^k}{k!} g^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} g^{(4)}(t)dt. \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6} \cos(t)dt \end{aligned}$$

Or, on a :

$$\forall t \in [0,x],\ 0 \leq \cos(x) \leq \cos(t) \leq 1$$

Par croissance de l'intégrale, on a :

$$0 \leq \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6} \cos(t)dt \leq \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6} dt = \frac{x^4}{24}$$

D'où :

$$0 \leq \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^4}{24}$$

Donc :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

Exercice 31. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, comme exp est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.
D'après la formule de Taylor avec reste intégrale, on a :

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt.$$

- Si $x \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $t \in [0, x]$, $e^t \leq e^x \leq e^{|x|}$
- Si $x \in \mathbb{R}_-$. Pour tout $t \in [x, 0]$, $e^t \leq e^0 = 1 \leq e^{|x|}$ car $|x| \geq 0$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $t \in [0, x]$ (ou $[x, 0]$), on a $e^t \leq e^{|x|}$.

$$\begin{aligned}
\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| &\leq \left| \int_0^x e^t \frac{|x-t|^n}{n!} dt \right| \\
&\leq \left| \int_0^x e^{|x|} \frac{|x-t|^n}{n!} dt \right| \\
&\leq e^{|x|} \left| \int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!} dt \right| \\
&\leq e^{|x|} \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt \right| \\
&\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|} \\
&\leq \frac{|x^{n+1}| e^{|x|}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

Exercice 32.

- cos est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
  On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$.
  En effet, posons $h : x \mapsto e^{ix}$. h est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $h^{(n)}(x) = i^n e^{ix} = e^{in\frac{\pi}{2} + ix}$. Or, $\cos = \mathrm{Re}(h)$ d'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\cos^{(n)} = \mathrm{Re}(h^{(n)})$ ce qui permet de conclure.
  Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\cos^{(n)}(0) = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^{n/2} & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$.
  Soit $n \in \mathbb{N}$, Soit $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, on a :

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= \sum_{p=0}^{2n} \frac{\cos^{(p)}(0) x^p}{p!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \cos^{(2n+1)}(t) dt \\
&= \sum_{\substack{p \in [\![0, 2n]\!] \\ p \text{ pair}}} \frac{\cos^{(p)}(0) x^p}{p!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \cos^{(2n+1)}(t) dt \\
&= \sum_{\substack{p \in [\![0, 2n]\!] \\ p \text{ pair}}} \frac{(-1)^{p/2} x^p}{p!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \cos\left(t + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right) dt \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \cos\left(t + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right) dt
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\left|\cos(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\right| &= \left|\int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}\cos\left(t+(2n+1)\frac{\pi}{2}\right)dt\right| \\
&\leq \left|\int_0^x \frac{|x-t|^{2n}}{(2n)!}dt\right| \\
&\leq \left|\int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}dt\right| \\
&\leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}
\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}=0$, par croissances comparées. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\cos(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\right)=0$ donc $\cos(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$.

- sin est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
  On a : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\sin^{(n)}(x)=\sin(x+n\frac{\pi}{2})$.
  En effet, posons $h : x\mapsto e^{ix}$. h est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $h^{(n)}(x)=i^n e^{ix}=e^{in\frac{\pi}{2}+ix}$. Or, $\sin=\operatorname{Im}(h)$ d'où : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\sin^{(n)}=\operatorname{Im}(h^{(n)})$ ce qui permet de conclure.
  Ainsi : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\sin^{(n)}(0)=\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0 & \text{si } n \text{ pair}\\ (-1)^{(n-1)/2} & \text{si } n \text{ impair.}\end{cases}$.
  Soit $n\in\mathbb{N}$, Soit $x\in\mathbb{R}$, en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, on a :

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= \sum_{p=0}^{2n+1}\frac{\sin^{(p)}(0)x^p}{p!}+\int_0^x\frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin^{(2n+2)}(t)dt \\
&= \sum_{\substack{p\in[\![0,2n+1]\!]\\ p \text{ impair}}}\frac{\sin^{(p)}(0)x^p}{p!}+\int_0^x\frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin^{(2n+2)}(t)dt \\
&= \sum_{\substack{p\in[\![0,2n+1]\!]\\ p \text{ impair}}}\frac{(-1)^{(p-1)/2}x^p}{p!}+\int_0^x\frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin\left(t+(2n+2)\frac{\pi}{2}\right)dt \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\int_0^x\frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin\left(t+(2n+2)\frac{\pi}{2}\right)dt
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\left|\sin(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right| &= \left|\int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\left(t+(2n+2)\frac{\pi}{2}\right)dt\right| \\
&\leq \left|\int_0^x \frac{|x-t|^{2n+1}}{(2n+1)!}dt\right| \\
&\leq \left|\int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}dt\right| \\
&\leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}
\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}=0$, par croissances comparées. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sin(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)=0$ donc $\sin(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

Exercice 33. Soit $x\in[-a,a]$. On souhaite relier $f'(x)$ avec $f(a)$ et $f(-a)$. On va appliquer la formule de Taylor avec reste intégral entre x et a et entre x et $-a$.
On sait que f est $\mathcal{C}^2$ sur $[-a,a]$, on l'applique la formule de Taylor à l'ordre 1 :

$$f(a)=f(x)+(a-x)f'(x)+\int_x^a(a-t)f''(t)dt \text{ et } f(-a)=f(x)+(-a-x)f'(x)+\int_x^{-a}(-a-t)f''(t)dt.$$

En retranchant ces deux formules, il vient :

$$f(a) - f'(-a) = 2af'(x) + \int_x^a (a-t)f''(t)dt - \int_x^{-a} (-a-t)f''(t)dt.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} |2af'(x)| &= \left| f(a) - f'(-a) - \int_x^a (a-t)f''(t)dt + \int_x^{-a} (-a-t)f''(t)dt \right| \\ &\leq |f(a) - f(-a)| + \int_x^a |a-t||f''(t)|dt + \int_{-a}^x |-a-t||f''(t)|dt \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire (les bornes sont « dans le bon sens »)} \end{aligned}$$

De plus, f'' est continue sur le segment $[-a, a]$ (car f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-a, a]$) donc f'' est bornée sur $[-a, a]$. Posons $M = \sup_{t \in [-a,a]} (|f''(t)|)$.

On a donc :

$$\forall t \in [-a, a],\ |f''(t)| \leq M$$

Ainsi, par croissance de l'intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned} |2af'(x)| &\leq |f(a) - f(-a)| + \int_x^a |a-t|Mdt + \int_{-a}^x |-a-t|Mdt \\ &\leq |f(a) - f(-a)| + \int_x^a (a-t)Mdt + \int_{-a}^x (a+t)Mdt \\ &\leq |f(a) - f(-a)| + M\frac{(a-x)^2}{2} + M\frac{(a+x)^2}{2} \\ &\leq |f(a) - f(-a)| + M(a^2 + x^2) \end{aligned}$$

En divisant par $2a > 0$, on obtient :

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2a}|f(a) - f(-a)| + \frac{a^2 + x^2}{2a} \sup_{t \in [-a,a]} (|f''(t)|)$$