Corrigé de la feuille d'exercices 23

1 Linéarité - Noyau - image

Exercice 1.
1. f_1 est linéaire. Soient $(x,y,z),(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$, soit $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned}
f_1(\lambda(x,y,z)+\mu(x',y',z')) &= f_1(\lambda x+\mu x', \lambda y+\mu y', \lambda z+\mu z')\\
&= (\lambda x+\mu x'-(\lambda y+\mu y'), \lambda y+\mu y'-(\lambda z+\mu z'))\\
&= (\lambda x+\mu x'-\lambda y-\mu y', \lambda y+\mu y'-\lambda z-\mu z')\\
&=\lambda(x-y,y-z)+\mu(x'-y',y'-z')\\
&= \lambda f_1(x,y,z)+\mu f_1(x',y',z')
\end{aligned}$$

   Ainsi, f_1 est linéaire.
2. f_2 n'est pas linéaire. $f_2(2,2)=4$ alors que $f_2(1,1)+f_2(1,1)=2$.
3. f_3 est linéaire.
   Soient $(u_n),(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, soient $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
f_3(\lambda(u_n)+\mu(v_n)) &= f_3((\lambda u_n+\mu v_n))\\
&= (\lambda u_0+\mu v_0, \lambda u_1+\mu v_1, \lambda u_2+\mu v_2)\\
&= \lambda(u_0,u_1,u_2)+\mu(v_0,v_1,v_2)\\
&= \lambda f_3((u_n))+\mu f_3((v_n))
\end{aligned}$$

   Ainsi, f_3 est linéaire.
4. f_4 est linéaire.
   Soient $(u_n),(v_n) \in E$, soient $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
f_4\lambda(u_n)+\mu(v_n)) &= f_4((\lambda u_n+\mu v_n))\\
&= \lim_{n\to+\infty}(\lambda u_n+\mu v_n)\\
&= \lambda \lim_{n\to+\infty} u_n+\mu \lim_{n\to+\infty} v_n\\
&= \lambda f_4((u_n))+\mu f_4((v_n))
\end{aligned}$$

   Ainsi, f_4 est linéaire.

Exercice 2.
1. Soient $P,Q \in \mathbb{R}[X]$, soient $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
f_1(\lambda P+\mu Q) &= \lambda P+\mu Q - X(\lambda P+\mu Q)'\\
&= \lambda P+\mu Q - X(\lambda P'+\mu Q')\\
&= \lambda(P-XP')+\mu(Q-XQ')\\
&= \lambda f_1(P)+\mu f_1(Q)
\end{aligned}$$

   Ainsi, f_1 est linéaire.
2. Soient $(x,y),(z,t) \in \mathbb{R}^2$, soient $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
f_2(\lambda(x,y)+\mu(z,t)) &= f_2(\lambda x+\mu z, \lambda y+\mu t)\\
&= (\lambda x+\mu z+2(\lambda y+\mu t), 2(\lambda x+\mu z)-\lambda y-\mu t)\\
&= (\lambda x+\mu z+2\lambda y+2\mu t, 2\lambda x+2\mu z-\lambda y-\mu t)\\
&= \lambda(x+2y,2x-y)+\mu(z+2t,2z-t)\\
&= \lambda f_2(x,y)+\mu f_2(z,t)
\end{aligned}$$

   Ainsi, f_2 est linéaire.
3. Soient $M,M' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, soient $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
f_3(\lambda M+\mu M') &= A(\lambda M+\mu M')-(\lambda M+\mu M')A\\
&= \lambda(AM-MA)+\mu(AM'-M'A)\\
&= \lambda f_3(M)+\mu F_3(M')
\end{aligned}$$

   Ainsi, f_3 est linéaire.

Exercice 3. Comme $f^{n-1} \neq 0$, il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$.
Montrons que la famille $(x_0, \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est libre :
Soit $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in K$ tel que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x_0) = 0$.
En composant par f^{n-1} on trouve $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^{n-1+i}(x_0) = 0 \quad (*)$.
Or, pour tout $i \geq 1$, $n-1+i \geq n$ donc $f^{n-1+i} = 0$.
Ainsi, l'égalité $(*)$ devient : $\lambda_0 f^{(n-1)}(x_0) = 0$. Or, $f^{(n-1)}(x_0) \neq 0$ donc $\lambda_0 = 0$.
Par suite en appliquant f^{n-2} on trouve $\lambda_1 = 0$ puis de proche en proche, $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$.
La famille $(x_0, \ldots, f^{n-1}(x_0)$ est donc libre. Elle est de plus composée de $n = \dim(E)$ vecteurs.
Il s'agit donc d'une base de E.

Exercice 4. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} & f_3(x,y) = 0 \\ \iff & \begin{cases} x - y = 0 \\ y - x = 0 \end{cases} \\ \iff & x = y \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = 0\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x = y\} \\ &= \{(x,x), x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,1), x \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{Vect}(e_1) \end{aligned}$$

où $e_1 = (1,1)$.
De plus, le vecteur e_1 est non nul. Ainsi, (e_1) est une base de $\operatorname{Ker} f_1$.
On a :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f_1 &= \{f(x,y),\ x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x-y, y-x, 0),\ x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,-1,0) + y(-1,1,0)\ ,\ x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{Vect}(e_2, e_3) \end{aligned}$$

avec $e_2 = (1,-1,0)$ et $e_3 = (-1,1,0)$.
Or, $e_3 = -e_2$.
Ainsi, $\operatorname{Im} f_1 = \operatorname{Vect}(e_2)$.
Enfin, e_2 est non nul, $(1,-1,0)$ est non nul. Donc (e_2) constitue donc une base de $\operatorname{Im} f_1$.

Exercice 5. 1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} & f_1(x,y,z) = 0 \\ \iff & \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \\ z - x = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x = y \\ z = y \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f_1(x,y,z) = 0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x = y, z = y\} \\ &= \{(y,y,y), y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(1,1,1), y \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{Vect}(e_0) \end{aligned}$$

avec $e_0 = (1,1,1)$. De plus, $(1,1,1)$ est non nul. Ainsi, (e_0) est une base de $\mathrm{Ker}\, f_1$.
De plus,

$$\begin{aligned}\mathrm{Im} f_1 &= \{(x-y, y-z, z-x) | x,y,z \in \mathbb{R}\}\\ &= \{x(1,0,-1) + y(-1,1,0) + z(0,-1,1)\ ,\ x,y,z \in \mathbb{R}\}\\ &= \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2, e_3)\end{aligned}$$

avec $e_1 = (1,0,-1), e_2(-1,1,0), e_3(0,-1,1)$.
De plus, soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} & \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0\\ \iff & \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0\\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0\\ -\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases}\\ \iff & \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0\\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0\\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}\\ \iff & \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0\\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}\\ \iff & \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_3\\ \lambda_2 = \lambda_3 \end{cases}\end{aligned}$$

En prenant $\lambda_3 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_1 = 1$, on obtient : $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ donc $e_3 = -e_1 - e_2$.
Ainsi, $\mathrm{Vect}\,(e_1, e_2, e_3)) = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2)$. De plus, e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires. Ainsi, (e_1, e_2) est libre. Elle constitue donc une base de $\mathrm{Im} f_1$.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f_2(z) = 0 \iff & \quad a + ib + i(a - ib) = 0\\ \iff & \quad a + b + i(a+b) = 0\\ \iff & \quad a + b = 0\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}\, f_2 &= \{z \in \mathbb{C},\ f_2(z) = 0\}\\ &= \{a + ib,\ a,b \in \mathbb{R}, a + b = 0\}\\ &= \{a(1-i), a \in \mathbb{R}\}\\ &= \mathrm{Vect}\,(1-i)\end{aligned}$$

De plus $1 - i \neq 0$ donc $(1-i)$ constitue une base de $\mathrm{Ker}\, f_2$.
On a également :

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f_2) &= \{z + i\overline{z}, z \in \mathbb{C}\}\\ &= \{a + ib + i(a - ib)\ ,\ a,b \in \mathbb{R}\}\\ &= \{a + ib + ia + b\ ,\ a,b \in \mathbb{R}\}\\ &= \{a(1+i) + b(1+i)\ ,\ a,b \in \mathbb{R}\}\\ &= \mathrm{Vect}\,(1+i, 1+i)\\ &= \mathrm{Vect}\,(1+i)\end{aligned}$$

De plus, $1 + i \neq 0$. Ainsi, $(1+i)$ est une base de $\mathrm{Im} f_2$

Exercice 6. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\phi(\lambda P + \mu Q) &= \lambda P + \mu Q - (X+1)(\lambda P + \mu Q)'\\ &= \lambda P + \mu Q - (X+1)(\lambda P' + \mu Q')\\ &= \lambda(P - (X+1)P') + \mu(Q - (X+1)Q')\\ &= \lambda\phi(P) + \mu\phi(Q)\end{aligned}$$

Ainsi, ϕ est linéaire.
Déterminons le noyau de ϕ.

$\text{Ker}\,\phi = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ \phi(P) = 0\}$.
Soit $P = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}_3[X]$.

$$\begin{aligned}
\phi(P) = 0 & \\
&\iff a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 = (X+1)(3a_3X^2 + 2a_2X + a_1) \\
&\iff a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 = 3a_3X^3 + (3a_3 + 2a_2)X^2 + (2a_2 + a_1)X + a_1 \\
&\iff \begin{cases} a_3 = 3a_3 \\ a_2 = 3a_3 + 2a_2 \\ a_1 = 2a_2 + a_1 \\ a_0 = a_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a_3 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_0 = a_1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\text{Ker}\,\phi &= \{a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0, a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R},\ a_3 = 0, a_2 = 0, a_0 = a_1\} \\
&= \{a_0(X+1), a_0 \in \mathbb{R}\} \\
&= \text{Vect}\,(X+1).
\end{aligned}$$

Or $X+1$ n'est pas le polynôme nul. Donc $(X+1)$ est une base de $\text{Ker}\,\phi$.
Déterminons l'image de ϕ :
Méthode 1 :
$(1, X, X^2, X^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\text{Im}\phi &= \text{Vect}\,(\phi(1), \phi(X), \phi(X^2), \phi(X^3)) \\
&= \text{Vect}\,(1, -1, -X^2 - 2X, -2X^3 - 3X^2) \\
&= \text{Vect}\,(1, X^2 + 2X, 2X^3 + 3X^2)
\end{aligned}$$

De plus, la famille $(1, X^2 + 2X, 2X^3 + 3X^2)$ est une famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés donc cette famille est libre et forme donc une base de $\text{Im}\phi$.
Méthode 2 :
On a :

$$\begin{aligned}
\text{Im}\phi &= \{P - (X+1)P', P \in \mathbb{R}_2[X]\} \\
&= \{a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 - (X+1)(3a_3X^2 + 2a_2X + a_1)\ ,\ a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{-2a_3X^3 - 3a_3X^2 - a_2X^2 + a_0 - 2a_2X - a_1\ ,\ a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{a_3(-2X^3 - 3X^2) + a_2(-X^2 - 2X) - a_1 + a_0\ ,\ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \text{Vect}\,(-X^3 - 3X^2, -X^2 - 2X, -1, 1) \\
&= \text{Vect}\,(-X^3 - 3X^2, -X^2 - 2X, 1)
\end{aligned}$$

De plus, la famille $(1, -X^2 - 2X, -2X^3 - 3X^2)$ est une famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés donc cette famille est libre et forme donc une base de $\text{Im}\phi$.

Exercice 7. Soit $x \in \text{Ker}\,(f)$. Montrons que $g(x) \in \text{Ker}\,(f)$.
On a : $f(g(x)) = g(f(x)) = g(0) = 0$ donc $g(x) \in \text{Ker}\,(f)$.
Ainsi, $\text{Ker}\,(f)$ est stable par g.
Soit $x \in \text{Im}(f)$. Montrons que $g(x) \in \text{Im}(f)$.
Comme $x \in \text{Im}(f)$, il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$ et $g(x) = g(f(y)) = f(g(y)) \in \text{Im}(f)$, donc $\text{Im}(f)$ est stable par g.

Exercice 8. Raisonnons par double implication.
Supposons que $g \circ f = 0$.
Soit $y \in \text{Im}f$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On a : $g(y) = g(f(x)) = 0$. Ainsi, $y \in \text{Ker}\,g$.
Finalement, $\text{Im}f \subset \text{Ker}\,g$.
Réciproquement, supposons que $\text{Im}f \subset \text{Ker}\,g$.
Soit $x \in E$. $f(x) \in \text{Im}f$ donc $f(x) \in \text{Ker}\,g$ donc $g(f(x)) = 0$. Ainsi, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 0$. D'où $g \circ f = 0$.

Exercice 9. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f^2 - 5f + 6Id_E = 0_E$.

1. On a $Id_E = \frac{1}{6}\left(-f^2+5f\right) = f\circ\frac{1}{6}\left(-f+5Id_E\right) = \frac{1}{6}\left(-f+5Id_E\right)\circ f$. Ainsi, $f : E\to E$ est bijective et $f^{-1} = \frac{1}{6}\left(-f+5Id_E\right)$
2. **Méthode 1 :**
Montrons que $E = \operatorname{Ker}(f-2Id_E)\oplus\operatorname{Ker}(f-3Id_E)$. par analyse synthèse.
Soit $x\in E$.
Analyse : Supposons qu'il existe $u\in\operatorname{Ker}(f-2Id_E)$ et $v\in\operatorname{Ker}(f-3Id_E)$ tel que $x=u+v$. Alors, $f(x) = f(u)+f(v)$. De plus, $f(u)=2u$ et $f(v)=3v$ donc $f(x)=2u+3v$. Ainsi, on obtient : $v=f(x)-2x$ et $u=3x-f(x)$. Ainsi, si la décomposition existe, celle-ci est unique.
Synthèse : Posons, $v=f(x)-2x$ et $u=3x-f(x)$. On a :
    - $x=u+v$.
    - $(f-3Id_E)(v) = f(v)-3v = f^2(x)-2f(x)-3f(x)+6x = f^2(x)-5f(x)+6Id_E(x) = 0_E$ par hypothèse.
    Ainsi, $v\in\operatorname{Ker}(f-3Id_E)$.
    - De même, $(f-2Id_E)(u) = f(u)-2u = 3f(x)-f^2(x)-6x+2f(x) = -f^2(x)+5f(x)-6Id_E(x) = 0_E$.
    Ainsi, $u\in\operatorname{Ker}(f-Id_E)$.

    Donc la décomposition existe.
Finalement, $E = \operatorname{Ker}(f-2Id_E)\oplus\operatorname{Ker}(f-3Id_E)$.

    Méthode 2 :
    - On commence par remarquer que $0_E = f^2-5f+6Id_E = (f-2Id_E)\circ(f-3Id_E) = (f-3Id_E)\circ(f-2Id_E)$.
    Ainsi, $\operatorname{Im}(f-3Id_E)\subset\operatorname{Ker}(f-2Id_E)$ et $\operatorname{Im}(f-2Id_E)\subset\operatorname{Ker}(f-3Id_E)$.
    Soit $x\in E$. On a : $(f-2Id_E)\circ(f-3Id_E)(x)=0$ donc $(f-3Id_E)(x)\in\operatorname{Ker}(f-2id_E)$.
    De même, $(f-3Id_E)\circ(f-2Id_E)(x)=0$ donc $(f-2Id_E)(x)\in\operatorname{Ker}(f-3id_E)$.
    Enfin, $x = -(f(x)-3x)+(f(x)-2x)\in\operatorname{Ker}(f-2id_E)+\operatorname{Ker}(f-3id_E)$.
    Ainsi $E\subset\operatorname{Ker}(f-2Id_E)+\operatorname{Ker}(f-3Id_E)$.
    D'où $E=\operatorname{Ker}(f-2Id_E)+\operatorname{Ker}(f-3Id_E)$.
    - Soit $x\in\operatorname{Ker}(f-2Id_E)\cap\operatorname{Ker}(f-3Id_E)$.
    On a $f(x)=2x$ et $f(x)=3x$ donc $x=0$.
    Ainsi, $\operatorname{Ker}(f-2Id_E)\cap\operatorname{Ker}(f-3Id_E)=\{0\}$.
    Finalement, on a bien : $E=\ker(f-2Id_E)\oplus\operatorname{Ker}(f-3Id_E)$.

Exercice 10. 1. Raisonnons par double implication.
    - Supposons $\operatorname{Ker}(f)=\operatorname{Ker}(f^2)$.
    Soit $y\in\operatorname{Im}(f)\cap\operatorname{Ker}(f)$.
    Comme $y\in\operatorname{Im}(f)$ donc il existe $x\in\mathbb{E}$ tel que $y=f(x)$ et $y\in\operatorname{Ker}(f)$ donc $0=f(y)=f(f(x))$.
    Ainsi $f^2(x)=0$ donc $x\in\operatorname{Ker}(f^2)=\operatorname{Ker}(f)$.
    Ainsi, $y=f(x)=0$.
    Donc $\operatorname{Im}(f)\cap\operatorname{Ker}(f)\subset\{0\}$. D'où $\operatorname{Im}f\cap\operatorname{Ker}f=\{0\}$.
    - Réciproquement, supposons $\operatorname{Im}(f)\cap\operatorname{Ker}(f)=\{0\}$.
    Soit $x\in\operatorname{Ker}(f)$, alors $f(x)=0$ donc $f^2(x)=f(f(x))=f(0)=0$ car $f\in\mathcal{L}(E)$.
    Ainsi, $x\in\operatorname{Ker}(f^2)$ et $\operatorname{Ker}(f)\subset\operatorname{Ker}(f^2)$.
    Soit $x\in\operatorname{Ker}(f^2)$. Alors $0=f^2(x)=f(f(x))$.
    Ainsi, $f(x)\in\operatorname{Im}(f)\cap\operatorname{Ker}(f)=\{0\}$.
    Donc $f(x)=0$.
    Ainsi, $x\in\operatorname{Ker}(f)$ et on a l'égalité.

2. On raisonne de nouveau par double implication.
    - Supposons $\operatorname{Im}(f)=\operatorname{Im}(f^2)$.
    Soit $x\in E$, alors $f(x)\in\operatorname{Im}(f)=\operatorname{Im}(f^2)$ donc il existe $y\in E$ tel que $f(x)=f^2(y)$.
    Ainsi, $f(x)-f(f(y))=0$ donc $f(x-f(y))=0$ car $f\in\mathcal{L}(E)$.
    Ainsi, $x-f(y)\in\operatorname{Ker}f$.
    De plus, on a $x=f(y)+x-f(y)$ avec $f(y)\in\operatorname{Im}(f)$ et $x-f(y)\in\operatorname{Ker}(f)$.
    D'où $E\subset\operatorname{Im}(f)+\operatorname{Ker}(f)$. Donc $E=\operatorname{Im}f+\operatorname{Ker}f$.
    - Réciproquement, supposons $E=\operatorname{Ker}(f)+\operatorname{Im}(f)$.
    Soit $y\in\operatorname{Im}(f^2)$, il existe $x\in E$ tel que $y=f^2(x)=f(f(x))\in\operatorname{Im}(f)$.
    Ainsi, $\operatorname{Im}(f^2)\subset\operatorname{Im}(f)$.
    Soit $y\in\operatorname{Im}(f)$, il existe $x\in E$ tel que $y=f(x)$. Comme $\operatorname{Im}(f)+\operatorname{Ker}(f)=E$, il existe $(a,b)\in\operatorname{Im}(f)\times\operatorname{Ker}(f)$ tel que $x=a+b$.
    Comme $a\in\operatorname{Im}(f)$, il existe $z\in E$ tel que $a=f(z)$.

Ainsi, on a : $x = f(z) + b$.
D'où $f(x) = f^2(z) + f(b) = f^2(z) \in \mathrm{Im}(f^2)$.
Ainsi, $y \in \mathrm{Im}(f^2)$ donc $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f^2)$.
On a donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.

Exercice 11. • Soit $f \in F$. $f' = 0$ si et seulement si f est constante.
Ainsi, $\mathrm{Ker}\, D = \{f \in F\ ,\ f \text{ est constante sur } I\}$.
$\mathrm{Im}D = \{f'\ ,\ f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})\}$.
On sait déjà que $\mathrm{Im}D \subset E$. Montrons l'égalité.
Soit $f \in E$, f étant continue sur I, f admet une primitive G sur I. Ainsi, G est dérivable et comme $G' = f \in E$, $G \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et $D(G) = f$.
Ainsi, $f \in \mathrm{Im}D$.
Donc $\mathrm{Im}D = E$.
Finalement, D est surjective mais n'est pas injective (Ker $D \neq \{0\}$.

- Soit $f \in E$. On sait déjà que $\{0\} \subset \mathrm{Ker}\, P$.
Soit $f \in \mathrm{Ker}\, P$. Alors, $P(f) = 0$ donc f admet une primitive $G : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ qui est nulle. Ainsi, $0 = G' = f$ donc $f = 0$.
Ainsi, $\mathrm{Ker}\, P = \{0\}$.
On sait déjà que $\mathrm{Im}P \subset \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), f(a) = 0\}$. Montrons l'égalité.
Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ tel que $f(a) = 0$. Alors, $f' \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ et on a : $\forall x \in I,\ f(x) = f(x) - f(a) = \displaystyle\int_a^x f'(t)dt$.
Donc $f = P(f')$. Ainsi, $f \in \mathrm{Im}P$.
D'où $\mathrm{Im}P = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), f(a) = 0\}$.
Finalement, P est injective mais n'est pas surjective.

Exercice 12. 1. Soient (x, y), $(x', y') \in F \times G$, soient $\lambda, \mu \in K$,

$$\begin{aligned} f(\lambda(x, y) + \mu(x', y')) &= f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') \\ &= \lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y' \\ &= \lambda(x + y) + \mu(x' + y') \\ &= \lambda f(x, y) + \mu f(x', y') \end{aligned}$$

Ainsi f est linéaire.

2. Soit $(x, y) \in \mathrm{Ker}\,(f)$, alors, $(x, y) \in F \times G$ et $f(x, y) = 0$ donc $x + y = 0$. Ainsi, $y = -x$. Ainsi, $x \in F \cap G$. Donc $\mathrm{Ker}\, f \subset \{(x, -x)|\ x \in F \cap G\}$.
Réciproquement, soit $x \in F \cap G$. $(x, -x) \in F \times G$ et $f(x, -x) = x - x = 0$. Ainsi, $(x, -x) \in \mathrm{Ker}\, f$.
Finalement, $\mathrm{Ker}\, f = \{(x, -x)\ ,\ x \in F \cap G\}$.
On a directement que $\mathrm{Im}f = \{x + y, (x, y) \in F \times G\} = F + G$.
3.
   - On sait que f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}\,(f) = \{(0, 0)\}$.
   Supposons f injective alors : $\forall x \in F \cap G,\ (x, -x) = (0, 0)$. Donc : $\forall x \in F \cap G,\ x = 0$.
   Ainsi, $F \cap G = \{0_E\}$.
   Réciproquement, si $F \cap G = \{0_E\}$, alors $\mathrm{Ker}\, f = \{(0_E, 0_E)\}$.
   Ainsi, $Kerf = \{(0_E, 0_E)\}$ si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.
   Ainsi, f est injective si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$ si et seulement si $F + G$ est directe.
   - f est surjective si et seulement si $imf = E$
   si et seulement si $F + G = E$.
   - Ainsi, f est bijective si et seulement si $F \oplus G = E$.

2 Isomorphisme

Exercice 13. Commençons par prouver que ϕ est une application linéaire.
Soient $(x,y,z),(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$, soient $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$.
On a :

$$\begin{aligned}\phi(\lambda(x,y,z)+\mu(x',y',z')) &= \phi(\lambda x+\mu x',\lambda y+\mu y',\lambda z+\mu z')\\ &= (\lambda x+\mu x'+2\lambda y+2\mu y',4\lambda x+4\mu x'-\lambda y-\mu y',-2\lambda x-2\mu x'+2\lambda y+2\lambda y'+3\lambda z+3\lambda z')\\ &= \lambda(x+2y,4x-y,-2x+2y+3z)+\mu(x'+2y',4x'-y',-2x'+2y'+3z')\\ &= \lambda\phi(x,y,z)+\mu\phi(x',y',z')\end{aligned}$$

Ainsi, ϕ est bien linéaire de E dans E.
Montrons que ϕ est bijective.
Soit $(u,v,w)\in\mathbb{R}^3$. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned}&\phi(x,y,z)=(u,v,w)\\ \Longleftrightarrow\quad &(x+2y,4x-y,-2x+2y+3z)=(u,v,w)\\ \Longleftrightarrow\quad &\begin{cases}x+2y=u\\ 4x-y=v\\ -2x+2y+3z=w\end{cases}\\ \Longleftrightarrow\quad &\begin{cases}x+2y=u\\ -9y=v-4u\\ 6y+3z=w+2u\end{cases}\\ \Longleftrightarrow\quad &\begin{cases}x+2y=u\\ y=\dfrac{1}{9}(4u-v)\\ 3z=-\dfrac{2}{3}(u-v)+w\end{cases}\\ \Longleftrightarrow\quad &\begin{cases}x=\dfrac{1}{9}(u+2v)\\ y=\dfrac{1}{9}(4u-v)\\ z=-\dfrac{2}{9}(u-v-9w)\end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $(u,v,w)\in\mathbb{R}^3$, il existe un unique $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\phi(x,y,z)=(u,v,w)$.
Donc ϕ est bijective.
Ainsi, ϕ est un automorphisme de E.
De plus : $\forall(u,v,w)\in\mathbb{R}^3,\ \phi^{-1}(u,v,w)=(\frac{1}{9}(u+2v),\frac{1}{9}(4u-v),-\frac{2}{9}(u-v-9w))$.
Remarque : si l'on souhaitait juste montrer que ϕ est un automorphisme sans déterminer sa réciproque, nous aurions remarqué que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ avec $\mathbb{R}^3$ de dimension finie. Ainsi, ϕ bijective si et seulement si ϕ est injective. Nous aurions dans ce cas plutôt prouvé que ϕ est injective en prouvant que $\operatorname{Ker}\phi=\{0\}$.

Exercice 14.
1. - Montrons que ϕ est linéaire :
     Soient $P,Q\in\mathbb{K}_n[X]$, soient $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$. On a :

     $$\begin{aligned}\phi(\lambda P+\mu Q) &= ((\lambda P+\mu Q)(a_1),...,(\lambda P+\mu Q)(a_{n+1}))\\ &= \lambda(P(a_1),...,P(a_{n+1}))+\mu(Q(a_1),...,Q(a_{n+1}))\\ &= \lambda\phi(P)+\mu\phi(Q)\end{aligned}$$

   - Montrons que $\operatorname{Ker}\phi=\{0\}$.
     Soit $P\in\operatorname{Ker}\phi$ alors $P\in\mathbb{K}_{n-1}[X]$. De plus, $\phi(P)=0$. Donc : $\forall i\in[\![1,n+1]\!]$, $P(a_i)=0$. Or, les $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont deux à deux distincts. Ainsi, P admet au moins $n+1$ racines distinctes. Or, $\deg(P)\leq n$. Donc, $P=0$.
     Ainsi, $\operatorname{Ker}\phi\subset\{0\}$.
     Donc, $\operatorname{Ker}\phi=\{0\}$.
     Ainsi, ϕ est injective.
   - De plus, $\dim(\mathbb{K}_n[X])=n+1=\dim(\mathbb{K}^{n+1})$ donc ϕ est bijective.

   Ainsi, ϕ est un isomorphisme.
2. $\phi\in GL(E)$ donc $\phi^{-1}\in GL(E)$.
   Or, l'image d'une base par un isomorphisme est encore une base. Ainsi, $(L_1,...,L_{n+1})$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$, on a $\phi^{-1}(e_k) = L_k$ donc $\phi(L_k) = e_k$.
Ainsi, on a :

$$L_k(a_k) = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1, n+1]\!] \setminus \{k\},\ L_k(a_i) = 0.$$

On sait que $L_k \in \mathbb{K}_n[X]$ donc L_k est un polynôme de degré au plus n.
De plus, $L_k(a_k) \neq 0$ donc L_k n'est pas le polynôme nul.
Par ailleurs, les a_i avec $i \in [\![1, n]\!] \setminus \{k\}$ sont racines de L_k et sont deux à deux distincts donc L_k admet n racines distinctes. Donc $\deg(L_k) \geq n$ (P est non nul).
Ainsi, L_k est de degré exactement n, L_k est scindé sur $\mathbb{K}$ et il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $L_k = \lambda \displaystyle\prod_{i \in [\![1, n+1]\!] \setminus \{k\}} (X - a_i)$.

Enfin, comme $1 = L_k(a_k) = \lambda \displaystyle\prod_{i \in [\![1, n+1]\!] \setminus \{k\}} (a_k - a_i)$.

On obtient : $\lambda = \dfrac{1}{\displaystyle\prod_{i \in [\![1, n+1]\!] \setminus \{k\}} (a_k - a_i)}$ (le dénominateur est bien non nul car les a_i sont deux à deux distincts.

Finalement :

$$L_k = \frac{\displaystyle\prod_{i \in [\![1, n+1]\!] \setminus \{k\}} (X - a_i)}{\displaystyle\prod_{i \in [\![1, n+1]\!] \setminus \{k\}} (a_k - a_i)}$$

3. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$.

Comme $(L_1, ..., L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, il existe un unique $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k L_k$.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

En évaluant en a_i, on obtient : $P(a_i) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k L_k(a_i) = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \delta_{k,i} = \lambda_i$.

Ainsi : $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} P(a_k) L_k$.

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons l'application :

$$\begin{array}{rccl} \phi : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & P & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P^{(i)}\left(\frac{X}{2^i}\right) \end{array}$$

Montrons que ϕ est bien définie, linéaire et bijective.
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
Soit $i \in [\![0, n]\!]$, par propriété sur le degré d'une composition :

$$\deg\left(P^{(i)}\left(\frac{X}{2^i}\right)\right) = \deg(P^{(i)}) \times \deg\left(\frac{X}{2^i}\right) = \deg(P^{(i)}) \times 1 = \deg(P^{(i)}) = \left\{\begin{array}{ll} \deg(P) - i \leq n & \text{si } \deg(P) \geq i \\ -\infty & \text{si } \deg(P) < i \end{array}\right. .$$

Dans tous les cas, $\deg\left(P^{(i)}\left(\frac{X}{2^i}\right)\right) \leq n$. Ainsi, $\left(P^{(i)}\left(\frac{X}{2^i}\right)\right) \in \mathbb{K}_n[X]$. Ainsi, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} P^{(i)}\left(\frac{X}{2^i}\right) \in \mathbb{K}_n[X]$.

Donc ϕ est bien définie.
Montrons que ϕ est linéaire.
Soient $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, .

$$\begin{aligned} \phi(\lambda P + \mu Q) &= \sum_{i=0}^{n} (\lambda P + \mu Q)^{(i)}\left(\frac{X}{2^i}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \left(\lambda P^{(i)}\left(\frac{X}{2^i}\right) + \mu Q^{(i)}\left(\frac{X}{2^i}\right)\right) \\ &= \lambda \sum_{i=0}^{n} P^{(i)}\left(\frac{X}{2^i}\right) + \mu \sum_{i=0}^{n} Q^{(i)}\left(\frac{X}{2^i}\right) \\ &= \lambda\phi(P) + \mu\phi(Q) \end{aligned}$$

Ainsi, ϕ est linéaire et même un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.
Montrons que $\operatorname{Ker} \phi = \{0\}$.

Soit $P \in \operatorname{Ker} \phi$. Alors, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} P^{(i)}\left(\frac{X}{2^i}\right) = 0$.
Montrons par l'absurde que $P = 0$.
Supposons $P \neq 0$. On note $p = \deg(P) \in \mathbb{N}$.
Alors, $0 = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P^{(i)}\left(\frac{X}{2^i}\right) = \sum_{i=0}^{p} P^{(i)}\left(\frac{X}{2^i}\right)$.
Or : $\forall i \in [\![0, p]\!]$, $\deg\left(P^{(i)}\left(\frac{X}{2^i}\right)\right) = p - i$.
Ainsi, $\deg\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{p} P^{(i)}\left(\frac{X}{2^i}\right)\right) = p$ (Les degrés de chacun des termes sont deux à deux distincts).
Absurde car ce polynôme est le polynôme nul.
Finalement, $P = 0$. Ainsi, $\operatorname{Ker} \phi \subset \{0\}$. Puis $\operatorname{Ker} \phi = \{0\}$.
Ainsi, ϕ est linéaire, injective de $\mathbb{K}_n[X]$ dans $\mathbb{K}_n[X]$ de dimension finie $n+1$. Ainsi, ϕ est bijective.
Donc, pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique P tel que $Q = \phi(P)$ ce qui prouve le résultat.

Exercice 16. Notons $\mathcal{S}$ l'espace des suites vérifiant la relation linéaire.
Montrons que $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel.
Soient (u_n) , $(v_n) \in \mathcal{S}$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}(\alpha u_{n+3} + \beta v_{n+3}) &= \alpha(2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n) + \beta(2v_{n+2} + v_{n+1} - 2v_n) \\ &= 2(\alpha u_{n+2} + \beta v_{n+2}) + (\alpha u_{n+1} + \beta v_{n+1}) - 2(\alpha u_n + \beta v_n)\end{aligned}$$

Ainsi, $(\alpha u_n + \beta v_n) \in \mathcal{S}$ donc $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
► Déterminons désormais la dimension de $\mathcal{S}$.
Considérons pour cela l'application !

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \to & \mathbb{K}^3 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_0, u_1, u_2) \end{array}$$

- ϕ est linéaire
- ϕ est bijective. En effet , une suite u vérifiant la relation de récurrence de l'énoncé est uniquement déterminé par la donnée de ces premiers termes $(u_0, u_1, u_3) \in \mathbb{K}^2$.

Ainsi, ϕ est un isomorphisme et on peut affirmer que $\dim(\mathcal{S}) = \dim(\mathbb{K}^3) = 3$.
Par analogie avec les suites récurrentes d'ordre 2, On pose $P = X^3 - 2X^2 - X + 2$. Cherchons les racines de P.
On remarque que 1 est racine évidente de $X^3 - 2X^2 - X + 2$ et donc $X^3 - 2X^2 - X + 2 = (X-1)(X^2 - X - 2)$.
Finalement, $X^3 - 2X^2 - X + 2 = (X-1)(X+1)(X-2)$.
De plus, cherchons désormais des suites non nulles de $\mathcal{S}$ sous le forme $(u_n) = (r^n)$.
Soit $r \in \mathbb{C}^*$.

$$\begin{aligned}(r^n) \in \mathcal{S} &\iff \forall n \in \mathbb{N}, r^{n+3} = 2r^{n+2} + r^{n+1} - 2r^n \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, r^n(r^3 - 2r^2 - r + 2) = 0 \\ &\iff P(r) = 0\end{aligned}$$

Ainsi, les suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des éléments de $\mathcal{S}$.
Montrons que $((1)_{n\in\mathbb{N}}, ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}, (2^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est libre.
Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1(1)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda_2((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda_3(2^n)_{n\in\mathbb{N}} = 0$.
Cette relation se réécrit : $\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda_1 + \lambda_2(-1)^n + \lambda_3 2^n = 0$.
On a donc : $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \end{cases}$.
D'où $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$.
Donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
Ainsi, $((1)_{n\in\mathbb{N}}, ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}, (2^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est libre et composée de 3 vecteurs.
Elle constitue donc une base de $\mathcal{S}$.

Exercice 17. 1. • $0 \in E$ donc $E \neq \emptyset$.
Soient $P, Q \in E$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
$(\lambda P + \mu Q)(0) = \lambda P(0) + \mu Q(0) = \lambda 0 + \mu 0 = 0$.
Donc $\lambda P + \mu Q \in E$.
Ainsi, E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

- $E_p = E \cap \mathbb{R}_p[X]$. Or, E et $\mathbb{R}_p[X]$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$.
  Donc E_p est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
- $F_p = \mathbb{R}_{p-1}[X]$ si $p \neq 0$ et $F_p = \{0\}$ si $p = 0$.
  Donc F_p est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
- Montrons que E et F_1 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.
  Soit $P \in E \cap F_1$.
  Alors $P(0) = 0$ et $\deg(P) < 1$ donc P est constant. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P = \lambda$.
  Et comme $P(0) = 0$, $\lambda = 0$ donc $P = 0$.
  Ainsi, $E \cap F_1 = \{0\}$.
  Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, posons $Q = P - P(0)$.
  Alors $Q(0) = P(0) - P(0) = 0$ donc $Q \in E$.
  Et $P = Q + P(0)$. Or, $\deg(P(0)) \leq 0 < 1$ donc $P(0) \in F_1$.
  Ainsi, $P \in E + F_1$.
  Donc $\mathbb{R}[X] \subset E + F_1$. D'où $\mathbb{R}[X] = E + F_1$
  Ainsi, $\mathbb{R}[X] = E \oplus F_1$.

2. - Si P est constant, $\Delta(P) = 0$.
   - Si P n'est pas constant, posons $n = \deg(P)$.
     Alors, $\deg(P(X+1)) = n$ donc $\deg(\Delta(P)) \leq n$.
     Posons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$ et $\Delta(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k (X+1)^k - \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.
     Donc le terme en X^n de $\Delta(P)$ est $a_n X^n - a_n X^n = 0$ donc $\deg(\Delta(P)) \leq n-1$.
     Le terme en X^{n-1} de $\Delta(P)$ est $(na_n + a_{n-1})X^{n-1} - a_{n-1}X^{n-1} = na_n X^n$ avec $na_n \neq 0$.
     Donc $\deg(\Delta(P)) = n-1$ si $n \geq 1$.
   - Dans tous les cas : $\deg(\Delta(P)) = \begin{cases} \deg(P) - 1 & \text{si } \deg(P) \geq 1 \\ -\infty & \text{si } \deg(P) \leq 0 \end{cases}$

   (a) - Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
   $$\begin{aligned} \Delta(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X) \\ &= \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1) - \lambda P(X) - \mu Q(X) \\ &= \lambda(P(X+1) - P(X)) + \mu(Q(X+1) - Q(X)) \\ &= \lambda \Delta(P) + \mu \Delta(Q) \end{aligned}$$
   Donc $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$.
   - Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
   $$\begin{aligned} P \in \operatorname{Ker} \Delta &\iff \Delta(P) = 0 \\ &\iff \deg(\Delta(P)) = -\infty \\ &\iff \deg(P) \leq 0 \\ &\iff \deg(P) < 1 \\ &\iff P \in F_1 \end{aligned}$$
   Ainsi, $\operatorname{Ker} \Delta = F_1$

3. Posons $\tilde{\Delta} : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & \Delta(P) \end{array}$.
   - Comme Δ est linéaire, $\tilde{\Delta}$ est linéaire.
   - On a $\operatorname{Ker} \tilde{\Delta} = \operatorname{Ker} \Delta \cap E = F_1 \cap E = \{0\}$ car E et F_1 sont supplémentaires.
     Ainsi, $\tilde{\Delta}$ est injective.
   - Soit $p \in \mathbb{N}$, posons $\Delta_p : \begin{array}{ccc} E_p & \to & F_p \\ P & \mapsto & \Delta(P) \end{array}$.
     - Δ_p est bien définie car $\deg(\Delta(P)) \leq \deg(P) - 1$.
       Donc si $P \in E_p$, $\deg(\Delta(P)) \leq p - 1 < p$.
       Ainsi, $\Delta(P) \in F_p$.
     - Δ_p est linéaire car Δ l'est.
     - $\operatorname{Ker} \Delta_p = \operatorname{Ker} \Delta \cap E_p = F_1 \cap E \cap \mathbb{R}_p[X] = \{0\}$.
       Donc Δ_p est injectif.

- Si $p \neq 0$:

$$\begin{aligned} E_p &= \left\{ \sum_{k=0}^{p} a_p X^k, a_0 = 0, a_1, ..., a_p \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^{p} a_p X^k, a_1, ..., a_p \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \operatorname{Vect}(X, X^2, ..., X^p) \end{aligned}$$

  Or, $(X, ..., X^p)$ est une famille libre car il s'agit d'une famille de polynômes non nuls de degrés échelonnées donc $\dim(E_p) = p = \dim(F_p)$.
  Si $p = 0$, on a $F_p = E_p = \{0\}$ donc $\dim(F_p) = \dim(E_p)$.
- Ainsi, Δ_p est un isomorphisme.

Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$, alors, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $Q \in F_p$.
Donc il existe $P \in E_p$ tel que $Q = \Delta_p(P)$. Or, $P \in E_p$ donc $P \in E$.
Ainsi, $Q = \tilde{\Delta}(P)$ donc $\tilde{\Delta}$ est bijective.
Ainsi, Δ induit un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}[X]$.

3 Mode de définition d'une application linéaire

Exercice 18. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} & a(1,0,0) + b(1,1,0) + c(1,1,1) = (x, y, z) \\ \iff & \begin{cases} a + b + c = x \\ b + c = y \\ c = z \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} a = x - y \\ b = y - z \\ c = z \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\exists! (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) = a(1,0,0) + b(1,1,0) + c(1,1,1)$. Ainsi, $((1,0,0), (1,1,0), (1,1,1))$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
Comme une application linéaire est entièrement déterminé par l'image d'une base, il existe un unique $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant les hypothèses de l'énoncé.
Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$(x, y, z) = (x - y)(1,0,0) + (y - z)(1,1,0) + z(1,1,1)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (x - y)f(1,0,0) + (y - z)f(1,1,0) + zf(1,1,1) \\ &= (x - y)(0,1) + (y - z)(1,0) + z(1,1) \\ &= (y, x - y + z) \end{aligned}$$

Donc : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (y, x - y + z)$

Exercice 19. Commençons par montrer que $E = F \oplus G$.
Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} & a(1,0,0) + b(1,1,0) + c(1,1,1) = (x,y,z) \\ \iff & \begin{cases} a+b+c = x \\ b+c = y \\ c = z \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} a = x-y \\ b = y-z \\ c = z \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, tout élément de $\mathbb{R}^3$ s'écrit de manière unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G.
Ainsi, $F \oplus G = E$.
Comme une application linéaire est entièrement définie par ses restriction à deux espaces supplémentaires, il existe une unique $f \in \mathcal{L}(R^3)$ vérifiant les hypothèses de l'énoncé.
Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$(x,y,z) = (x-y)(1,0,0) + (y-z)(1,1,0) + z(1,1,1)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (x-y)f(1,0,0) + (y-z)f(1,1,0) + zf(1,1,1) \\ &= 2(x-y)(1,0,0) - (y-z)(1,1,0) - z(1,1,1) \\ &= (2x-3y, -y, -z) \end{aligned}$$

Donc : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = (2x-3y, -y, -z)$

4 Endomorphismes remarquables

Exercice 20.

1. Soit $(x, y) \in (E \setminus \{0\})^2$.
   - Si (x, y) est libre. On a : $\lambda_{x+y}(x+y) = f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$,
     Donc :
     $$(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0.$$
     Comme la famille (x, y) est libre, on obtient : $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$.
   - Si (x, y) est liée.
     Il existe $\mu \in K$ tel que $y = \mu x$ (car $x \neq 0$).
     Alors $\lambda_y y = f(y) = f(\mu x) = \mu f(x) = \mu \lambda_x x = \lambda_x y$. D'où $(\lambda_y - \lambda_x)y = 0$ et comme $y \neq 0$, $\lambda_y - \lambda_x = 0$ puis $\lambda_x = \lambda_y$.

   Dans tous les cas $\lambda_x = \lambda_y$.
2. On a vu à la question précédente que : $\forall x, y \in E \setminus \{0\}$, $\lambda_x = \lambda_y$.
   Ainsi, il existe λ tel que : $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $f(x) = \lambda x$.
   De plus $f(0) = 0 = \lambda 0$.
   Donc : $\forall x \in E, f(x) = \lambda x$ et f est une homothétie.

Exercice 21.

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} & a(1,0,0) + b(1,1,0) + c(1,2,3) = (x,y,z) \\ \iff & \begin{cases} a+b+c = x \\ b+2c = y \\ 3c = z \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} a = x-y+\frac{1}{3}z \\ b = y-\frac{2}{3}z \\ c = \frac{1}{3}z \end{cases} \end{aligned}$$

   Ainsi, tout élément de $\mathbb{R}^3$ s'écrit de manière unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G.
   Ainsi, $F \oplus G = E$.

2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on sait

$$(x,y,z) = \left(x - y + \frac{1}{3}z\right)(1,0,0) + \left(y - \frac{2}{3}z\right)(1,1,0) + \frac{1}{3}z(1,2,3)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} p(x,y,z) &= \left(x - y + \frac{1}{3}z\right)p(1,0,0) + \left(y - \frac{2}{3}z\right)p(1,1,0) + \frac{1}{3}zp(1,2,3) \\ &= \left(x - y + \frac{1}{3}z\right)(1,0,0) + \left(y - \frac{2}{3}z\right)(1,1,0) \\ &= \left(x - \frac{1}{3}z, y - \frac{2}{3}z, 0\right) \end{aligned}$$

Donc : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ p(x,y,z) = \left(x - \frac{1}{3}z, y - \frac{2}{3}z, 0\right)$.

3. On a $q = Id_{\mathbb{R}^3} - p$ donc : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ q(x,y,z) = \left(\frac{1}{3}z, \frac{2}{3}z, z\right)$.

4. On a $s(1,0,0) = (1,0,0)$, $s(1,1,0) = (1,1,0)$ et $s(1,2,3) = -(1,2,3)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} s(x,y,z) &= \left(x - y + \frac{1}{3}z\right)s(1,0,0) + \left(y - \frac{2}{3}z\right)s(1,1,0) + \frac{1}{3}zs(1,2,3) \\ &= \left(x - y + \frac{1}{3}z\right)(1,0,0) + \left(y - \frac{2}{3}z\right)(1,1,0) - \frac{1}{3}z(1,2,3) \\ &= \left(-x + \frac{2}{3}z, -y + \frac{4}{3}z, z\right) \end{aligned}$$

Donc : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ s(x,y,z) = \left(-x + \frac{2}{3}z, -y + \frac{4}{3}z, z\right))$.

Exercice 22. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soient p et q des projecteurs de E.

1. On a :

$$\begin{aligned} p + q \text{ est un projecteur} &\iff (p+q) \circ (p+q) = p + q \\ &\iff p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + q \\ &\iff p \circ q + q \circ p = 0 \end{aligned}$$

- Supposons $p + q$ projecteur.
  Alors, $p \circ q + q \circ p = 0$. En composant à gauche et à droite par q, on obtient :

  $$q \circ (p \circ q) + q \circ (q \circ p) = 0 \text{ et } (p \circ q) \circ q + (q \circ p) \circ q = 0.$$

  donc

  $$q \circ p \circ q + q \circ p = 0 \text{ et } p \circ q + q \circ p \circ q = 0.$$

  D'où $p \circ q = -q \circ p \circ q = q \circ p$. En reportant dans l'égalité $p \circ q + q \circ p = 0$, on obtient : $2p \circ q = 0$.
  Ainsi, $p \circ q = q \circ p = 0$.
- Réciproquement, supposons que $p \circ q = q \circ p = 0$.
  Alors $p \circ q + q \circ p = 0$ donc $p + q$ est un projecteur.

2. Supposons que les conditions de la question précédente sont vérifiées.
On montre $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$ par double inclusion :

- Soit $y \in \mathrm{Im}(p+q)$, il existe $x \in E$ tel que $y = (p+q)(x) = p(x) + q(x)$. Ainsi $y \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$.
  Ainsi, $\mathrm{Im}(p+q) \subset \mathrm{Im}p + \mathrm{Im}q$.
- Soit $y \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$, il existe $(y_1, y_2) \in \mathrm{Im}p \times \mathrm{Im}q$ tels que $y = y_1 + y_2$.
  Comme $p + q$ est un projecteur, $y \in \mathrm{Im}(p+q)$ si et seulement si $(p+q)(y) = y$.
  On a : $(p+q)(y) = (p+q)(y_1) + (p+q)(y_2) = p(y_1) + q(y_1) + p(y_2) + q(y_2)$.
  Or, $y_1 \in \mathrm{Im}p$ donc $p(y_1) = y_1$. Puis, $q(y_1) = q(p(y_1)) = (q \circ p)(y_1) = 0$.
  De même, $y_2 \in \mathrm{Im}q$ donc $q(y_2) = y_2$. Puis $p(y_2) = p(q(y_2)) = (p \circ q)(y_2) = 0$.
  Ainsi, $(p+q)(y) = y_1 + y_2 = y$. Donc $y \in \mathrm{Im}(p+q)$.
  Ainsi, $\mathrm{Im}p + \mathrm{Im}q \subset \mathrm{Im}(p+q)$.

On a donc prouvé que $\text{Im}(p+q) = \text{Im}p + \text{Im}q$.
Justifions que cette somme est directe.
Soit $x \in \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)$.
On a :

$$\begin{aligned} 0 = (p \circ q)(x) &= p(q(x)) \\ &= p(x) \quad \text{car } x \in \text{Im}q \\ &= x \quad \text{car } x \in \text{Im}q \end{aligned}$$

Ainsi, $\text{Im}p \cap \text{Im}q = \{0\}$.
Donc, on a bien prouvé que $\text{Im}(p+q) = \text{Im}p \oplus \text{Im}q$.
Montrons $\text{Ker}\,(p+q) = \text{Ker}\,(p) \cap \text{Ker}\,(q)$ par double inclusion :

- Soit $x \in \text{Ker}\,(p) \cap \text{Ker}\,(q)$, alors $p(x) = q(x) = 0$ donc $(p+q)(x) = p(x) + q(x) = 0$.
  Ainsi, $x \in \text{Ker}\,(p+q)$.
  Donc $\text{Ker}\,(p) \cap \text{Ker}\,(q) \subset \text{Ker}\,(p+q)$.
- Soit $x \in \text{Ker}\,(p+q)$, alors $(p+q)(x) = p(x) + q(x) = 0$. En composant à gauche par p, on obtient :

$$0 = (p \circ p)(x) + (p \circ q)(x) = p(x) \quad \text{car } p \circ q = 0$$

  Donc $x \in \text{Ker}\,(p)$.
  De même, en composant à gauche par q, on obtient que $x \in \text{Ker}\,(q)$.
  Ainsi, $\text{Ker}\,(p+q) \subset \text{Ker}\,(p) \cap \text{Ker}\,(q)$.
  Finalement, on a bien prouvé que $\text{Ker}\,(p+q) = \text{Ker}\,(p) \cap \text{Ker}\,(q)$.

Exercice 23.
- On procède par double implication
  - Supposons $\text{Ker}\,p = \text{Ker}\,q$.
    On a $E = \text{Im}p \oplus \text{Ker}\,p$ et $E = \text{Im}q \oplus \text{Ker}\,q$ car p et q sont des projecteurs.
    Soit $x \in \text{Ker}\,q$. On a $(p \circ q)(x) = p(q(x)) = p(0) = 0$ et $p(x) = 0$ car $\text{Ker}\,q = \text{Ker}\,p$ et $x \in \text{Ker}\,q$ donc $x \in \text{Ker}\,p$.
    Ainsi, $p \circ q(x) = p(x)$.
    Soit $x \in \text{Im}q$. On a $q(x) = x$ donc $(p \circ q)(x) = p(q(x)) = p(x)$.
    Ainsi, $p \circ q$ et $p \in \mathcal{L}(E)$ et coïncident sur deux espaces supplémentaires donc ces applications sont égales.
    Par symétrie entre p et q, on obtient de même, $q \circ p = q$.
  - Réciproquement, supposons que $p \circ q = p$ et que $q \circ p = q$.
    Soit $x \in \text{Ker}\,p$. On a $q(x) = (q \circ p)(x) = q(p(x)) = q(0_E) = 0_E$. Ainsi, $x \in \ker q$.
    Donc, $\text{Ker}\,p \subset \text{Ker}\,q$.
    Par symétrie, on obtient l'autre inclusion.
    On a donc bien $\text{Ker}\,p = \ker q$.
- Montrons de même la deuxième équivalence :
  - Supposons $\text{Im}p = \text{Im}q$.
    On a $E = \text{Im}p \oplus \text{Ker}\,p$ et $E = \text{Im}q \oplus \text{Ker}\,q$ car p et q sont des projecteurs.
    Soit $x \in \text{Ker}\,q$. On a $q(x) = 0$ et $(p \circ q)(x) = p(q(x)) = p(0) = 0$. Ainsi, $p \circ q(x) = q(x)$.
    Soit $x \in \text{Im}q$. On a $q(x) = x$ et $(p \circ q)(x) = p(q(x)) = p(x) = x$ car $x \in \text{Im}q = \text{Im}p$ et p et q sont des projecteurs.
    Ainsi $(p \circ q)(x) = q(x)$.
    Donc, $p \circ q$ et $q \in \mathcal{L}(E)$ et coïncident sur deux espaces supplémentaires donc ces applications sont égales.
    Par symétrie entre p et q, on obtient de même que $q \circ p = p$.
  - Réciproquement, supposons que $p \circ q = q$ et que $q \circ p = p$.
    Soit $x \in \text{Im}p$. On a $p(x) = x$ donc $(q \circ p)(x) = q(p(x)) = q(x)$. Or, $q \circ p = p$. Ainsi, $x = p(x) = q(x)$. Ainsi, $\text{Im}p \subset \text{Im}q$.
    Par symétrie, on obtient l'autre inclusion.
    On a donc bien $\text{Im}p = \text{Im}q$.

Exercice 24. Analyse du problème :
Supposons qu'il existe p un projecteur et g un automorphisme de E tels que $f = g \circ p$.
Un projecteur est déterminé par son image et son noyau.
Soit $x \in \text{Ker}\,f$ alors $f(x) = 0$ donc $(g \circ p)(x) = 0$. Ainsi, $g(p(x)) = 0$ donc $p(x) \in \text{Ker}\,g$. Or, g est bijectif donc injectif. Ainsi, $\text{Ker}\,g = \{0\}$. Ainsi, $p(x) = 0$ donc $x \in \text{Ker}\,p$.
Réciproquement, soit $x \in \ker p$. On a $p(x) = 0$ donc $f(x) = g(p(x)) = g(0) = 0$. Ainsi, $\text{Ker}\,f \subset \text{Ker}\,p$.
Finalement, $\text{Ker}\,f = \text{Ker}\,p$.

On va donc créer une projection sur un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ par rapport à $\operatorname{Ker} f$.
Résolution :
Soit $(e_1, ..., e_k)$ une base de $\operatorname{Ker} f$. On la complète en une base $(e_1, ..., e_n)$ de E et on notera $F = \operatorname{Vect}(e_{k+1}, ..., e_n)$.
Ainsi, on a $F \oplus \operatorname{Ker} f = E$.
On a que $\begin{array}{rccc} \tilde{f}: & F & \to & \operatorname{Im} f \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$ est un isomorphisme de F dans $\operatorname{Im} f$. En effet :

- Soit $y \in \operatorname{Im} f$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
  Or, $F \oplus \ker f = E$. Donc il existe $(a, b) \in F \times \operatorname{Ker} f$ tel que $x = a + b$.
  Ainsi, $f(x) = f(a) + f(b) = f(a) = \tilde{f}(a)$ car $a \in F$.
  Finalement $y = \tilde{f}(a)$ avec $a \in F$.
  Ainsi $\tilde{f} : F \to \operatorname{Im} f$ est surjectif.
- De plus, $\operatorname{Ker} \tilde{f} = F \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$.

Finalement, $\tilde{f} : F \to \operatorname{Im} u$ est bien un isomorphisme.
Ainsi, $(f(e_{k+1}), ..., f(e_n))$ forme une base de $\operatorname{Im} f$.
Pour tout $i \in [\![k+1, n]\!]$, on pose $\epsilon_i = f(e_i)$.
On complète cette base $(\epsilon_{k+1}, ..., \epsilon_n)$ de $\operatorname{Im} f$ pour former une base de E. Soit $(\epsilon_1, ..., \epsilon_n)$ cette nouvelle base de E.
Posons $G = \operatorname{Vect}(\epsilon_1, ..., \epsilon_k)$.
On a $G \oplus \operatorname{Im} f = E$.
Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ l'unique application linéaire vérifiant :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ g(e_i) = \epsilon_i$$

g est bien définie (par l'image d'une base).
g transforme une base de E en une base de E donc g est bijective.
Ainsi, g est un automorphisme de E.
Soit p la projection sur F parallèlement à $\operatorname{Ker} f$ (ces espaces sont bien supplémentaires).
Pour prouver que $f = g \circ p$, il suffit de prouver que ces applications coïncident sur une base de E. Or :

$$\forall i \in [\![k+1, n]\!],\ p(e_i) = e_i \quad \text{car } e_i \in F$$

Donc : $\forall i \in [\![k+1, n]\!], (g \circ p)(e_i) = g(p(e_i)) = g(e_i) = \epsilon_i = f(e_i)$ par définition de ϵ_i.
De plus,

$$\forall i \in [\![1, k]\!],\ p(e_i) = 0$$

Donc : $\forall i \in [\![1, k]\!], (g \circ p)(e_i) = g(0) = 0 = f(e_i)$ car $e_i \in \operatorname{Ker} f$.
Ainsi, les endomorphisme f et $g \circ p$ coïncident sur une base de E donc $f = g \circ p$.
Nous avons donc prouvé qu'il existe g un automorphisme de E et p projecteur de E tels que $f = g \circ p$.

Exercice 25.
- Montrons que T est linéaire.
  Soient $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
  $\forall x \in \mathbb{R},\ T(\lambda f + \mu g)(x) = (\lambda f + \mu g)(-x) = \lambda f(-x) + \mu g(-x) = T(f)(x) + T(g)(x)$.
  Ainsi $T(\lambda f + \mu g) = \lambda T(f) + \mu T(g)$.
  Donc T est bien linéaire.
- On a : $\forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ T(f) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
  Ainsi, T est un endomorphisme de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a :

  $$\forall x \in \mathbb{R}, (T \circ T)(f)(x) = T(T(f))(x) = T(f)(-x) = f(-(-x)) = f(x).$$

  Donc $T \circ T = Id_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$ et T est la symétrie par rapport à $\mathcal{P} = \operatorname{Ker}(T - Id_E)$ parallèlement à $\mathcal{I} = \operatorname{Ker}(T + Id_E)$.
- Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

  $$\begin{aligned} f \in \mathcal{P} &\iff T(f) = f \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ T(f)(x) = f(x) \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x) \\ &\iff f \text{ est paire.} \end{aligned}$$

  De même

  $$\begin{aligned} f \in \mathcal{I} &\iff T(f) = -f \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ T(f)(x) = -f(x) \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x) \\ &\iff f \text{ est impaire.} \end{aligned}$$

Ainsi, T est la symétrie par rapport à $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{I}$.

Remarque : on retrouve de cette manière que $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$ où $\mathcal{P}$ (resp $\mathcal{I}$) désigne l'ensemble des fonctions paires (resp. impaires) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

5 Rang d'une application linéaire

Exercice 26. Commençons par déterminer $\text{Im} f$.

Méthode 1 :

Notons (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

On a :

$$\text{Im} f = \text{Vect}\,(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) = \text{Vect}\,(f_1, f_2, f_3, f_4)$$

où $f_1 = (1,1,1), f_2 = (-1,0,1), f_3 = (1,2,3), f_4 = (1,-1,-1))$.

Méthode 2 :

$$\begin{aligned}\text{Im} f &= \{(x-y+z+t, x+2z-t, x+y+3z-t), x,y,z,t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,1,1) + y(-1,0,1) + z(1,2,3) + t(1,-1,-1), x,y,z,t \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}\,(f_1, f_2, f_3, f_4)\end{aligned}$$

où $f_1 = (1,1,1), f_2 = (-1,0,1), f_3 = (1,2,3), f_4 = (1,-1,-1))$.

Il nous reste à déterminer le rang de la famille (f_1, f_2, f_3, f_4).

(On sait déjà que $\text{Im} f \subset \mathbb{R}^3$ ainsi $\text{rg}\,(f_1, f_2, f_3, f_4) \leq 3$)

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} & \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0_{\mathbb{R}^3} \\ \iff & \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 - \lambda_4 = 0 \end{array}\right. \\ \iff & \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_3 - 2\lambda_4 = 0 \end{array}\right. \\ \iff & \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_4 = 0 \end{array}\right. \\ \iff & \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = -2\lambda_3 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 \\ \lambda_4 = 0 \end{array}\right. \end{aligned}$$

En prenant $\lambda_3 = 1$ et $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_4 = 0$, on obtient $-2f_1 - f_2 + f_3 = 0$ donc $f_3 = 2f_1 - f_2$.

$\text{Vect}\,(f_1, f_2, f_3, f_4) = \text{Vect}\,(f_1, f_2, f_4)$.

De plus, en reprenant les équivalences précédentes avec $\lambda_3 = 0$, on obtient que (f_1, f_2, f_4) est une famille libre.

Elle forme donc une base de $\text{Im} f$.

Ainsi, $\text{rg}\,(f) = 3$.

Remarque : $\text{Im} f \subset \mathbb{R}^3$ et ces deux espaces ont même dimension. Ainsi, $\text{Im} f = \mathbb{R}^3$ et f est surjective.

Exercice 27. Commençons par déterminer $\text{Im} f$.

Méthode 1 :

Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On a :

$$\text{Im} f = \text{Vect}\,(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \text{Vect}\,(f_1, f_2, f_3)$$

où $f_1 = (2,1,-3), f_2 = (2,-3,4), f_3 = (-2,11,-18))$.

Méthode 2 :

$$\begin{aligned}\text{Im} f &= \{(2x+2y-2z, x-3y+11z, -3x+4y-18z), x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(2,1,-1) + y(2,-3,4) + z(-2,11,-18), x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}\,(f_1, f_2, f_3)\end{aligned}$$

où $f_1 = (2, 1, -3), f_2 = (2, -3, 4), f_3 = (-2, 11, -18))$.
Il nous reste à déterminer le rang de la famille (f_1, f_2, f_3).
Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \\
\iff & \begin{cases} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - 3\lambda_2 + 11\lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_1 + 4\lambda_2 - 18\lambda_3 = 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -4\lambda_2 + 12\lambda_3 = 0 \\ 7\lambda_2 - 21\lambda_3 = 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \\
& \begin{cases} \lambda_1 = -2\lambda_3 \\ \lambda_2 = 3\lambda_3 \end{cases}
\end{aligned}$$

En prenant $\lambda_3 = 1$ et $\lambda_1 = -2$, $\imath ambda_2 = 3$, on obtient :$-2f_1 + 3f_2 + f_3 = 0$ donc $f_3 = 2f_1 - 3f_2$. Ainsi, $\text{Vect}\,(f_1, f_2, f_3) = \text{Vect}\,(f_1, f_2)$.
e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires donc (f_1, f_2) est libre.
Elle forme donc une base de $\text{Im}g$. Ainsi, $\text{rg}\,(f) = 2$.

Exercice 28 (Noyaux itérés)**.**

1. soit $p \in \mathbb{N}$.
   Soit $x \in K_p$. Alors, $f^p(x) = 0$ donc $f^{p+1}(x) = f(f^p(x)) = f(0) = 0$ et $x \in K_{p+1}$.
   Ainsi, $K_p \subset K_{p+1}$.
   Soit $y \in I_{p+1}$, il existe $x \in E$ tel que $y = f^{p+1}(x) = f^p\,(f(x))$ avec $f(x) \in E$.
   Ainsi, $y \in I_p$ donc $I_{p+1} \subset I_p$.
2. Raisonnons par l'absurde et supposons que : $\forall r \in [\![0, n]\!]$, $K_r \neq K_{r+1}$. Alors, on aurait :
   $$K_0 \subsetneq K_1 \subsetneq ...K_n \subsetneq K_{n+1}.$$
   Donc
   $$\dim K_0 < \dim K_1 < ... < \dim K_p < ... < \dim K_n < \dim K_{n+1}$$
   Montrons par récurrence que : $\forall l \in [\![0, n+1]\!],\ \dim(K_l) \geq l$.
   - Pour $l = 0$, on a $K_0 = \{x \in E, x = 0\} = \{0\}$. Ainsi, $\dim(K_0) = 0$ donc la propriété est vraie.
   - Soit $l \in [\![0, n]\!]$, supposons que $\dim(K_l) \geq l$.
     On a : $\dim(K_{l+1}) > \dim(K_l)$ donc $\dim(K_{l+1}) > l$.
     Or, $\dim(K_{l+1}), l \in \mathbb{N}$ donc $\dim(K_{l+1}) \geq l + 1$.
   - On a donc prouvé par récurrence que :$\forall l \in [\![1, n+1]\!]$, $\dim(K_l) \geq l$.

   En particulier, on aurait $\dim K_{n+1} \geq n + 1$. Or, $K_{n+1} \subset E$ donc $\dim K_{n+1} \leq n$. Ainsi, $n + 1 \leq n$. Absurde.
   L'ensemble
   $$\{p \in \mathbb{N} | p \leq n \text{ et } K_p = K_{p+1}\}$$
   est non vide.
   Il admet donc un plus petit élément que l'on note r.
3. On sait déjà que $I_{r+1} \subset I_r$. De plus, par le théorème du rang :
   $$\dim I_{r+1} = \dim E - \dim K_{r+1} = \dim E - \dim K_r = \dim I_r.$$
   Ainsi, $I_{r+1} = I_r$.
4. Montrons par récurrence que : $\forall p \in \mathbb{N},\ K_{p+r} = K_r$.
   - La propriété est immédiatement vraie pour $p = 0$.
   - Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que $K_{p+r} = K_r$.
     On sait déjà que $K_{r+p} \subset K_{r+p+1}$ par le 1.
     Soit $x \in K_{r+p+1}$, alors $f^{r+p+1}(x) = 0$. Ainsi, $f^{r+1}(f^p(x)) = 0$. Donc $f^p(x) \in K_{r+1}$.
     Or, $K_{r+1} = K_r$ donc $f^p(x) \in K_r$.
     Ainsi, $f^r(f^p(x)) = 0$ donc $f^{r+p}(x)$.
     Finalement, $x \in K_{r+p}$.
     On a donc prouvé que $K_{r+p+1} = K_{r+p} = K_r$

- On a donc prouvé que : $\forall p \in \mathbb{N},\ K_{r+p} = K_r$.

Soit $p \in \mathbb{N}$.
Soit $y \in I_{r+p}$, il existe $x \in E$ tel que $y = f^{r+p}(x) = f^r(f^p(x))$ avec $f^p(x) \in E$.
Ainsi, $y \in I_r$.
Donc : $\forall p \in \mathbb{N}$, $I_{p+r} \subset I_p$.
De plus, par le théorème du rang, on a :

$$dim I_{p+r} = \dim E - \dim K_{p+r} = \dim E - \dim K_r = \dim I_r.$$

Ainsi, par égalité des dimensions, $I_{p+r} = I_r$.

5. On sait déjà par le théorème du rang que $\dim K_r + \dim I_r = \dim E$. Montrons que $K_r \cap I_r = \{0\}$.
Soit $x \in K_r \cap I_r$. Comme $x \in I_r$, il existe $a \in E$ tel que $x = f^r(a)$. De plus, $0 = f^r(x) = f^{2r}(a)$. Ainsi, $a \in K_{2r} = K_r$ d'après la question précédente.
Donc $x = f^r(a) = 0$.
Ainsi, la somme est directe.
Finalement, on a bien prouvé que K_r et I_r sont supplémentaires.

Exercice 29. 1. Par le théorème du rang, on a $\dim(\mathrm{Ker}\, u) + \dim(\mathrm{Im} u) = \dim E$.
Il suffit donc de prouver que la somme est directe.
Soit $y \in \mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Im} u$.
Alors $u(y) = 0$. De plus, comme $y \in \mathrm{Im} u$, il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$.
De plus, $u^2(x) = u(u(x)) = u(0) = 0$ et $u^3(x) = u(0) = 0$.
Or, $u^3(x) + 2u(x) = 0$ donc $2u(x) = 0$.
D'où $y = 0$.
Ainsi, $\mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Im} u = \{0\}$.
Donc $\mathrm{Ker}\,(u) \oplus \mathrm{Im} u = E$.

2. Posons : $\begin{array}{rccc} \tilde{u}: & \mathrm{Im} u & \to & \mathrm{Im} u \\ & x & \mapsto & u(x) \end{array}$.

   - $\tilde{u}$ est bien définie car : $\forall x \in \mathrm{Im} u$, $u(x) \in \mathrm{Im} u$.
   - $\tilde{u}$ est linéaire car u l'est.
   - On a $\mathrm{Ker}\, \tilde{u} = \mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Im} u = \{0\}$ car $\mathrm{Im} u$ et $\mathrm{Ker}\, u$ sont supplémentaires.
   Ainsi, u est injective.
   - Soi $y \in \mathrm{Im} u$, il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$.
   De plus, $\mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im} u = E$ donc il existe $(a, b) \in \mathrm{Ker}\, u \times \mathrm{Im} u$ tel que $x = a + b$.
   On a alors $u(x) = u(a) + u(b) = u(b)$.
   Ainsi, $y = u(b)$ avec $b \in \mathrm{Im} u$.
   Donc $y = \tilde{u}(b)$.
   Ainsi, $\tilde{u}$ est surjective.
   - Finalement, $\tilde{u}$ est bien un automorphisme de $\mathrm{Im} u$.

Exercice 30. On a $E = \mathrm{Ker}\,(f) + \mathrm{Ker}\,(g) = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.
Ainsi $n = \dim(\mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Ker}\, g) = \dim(\mathrm{Ker}\, f) + \dim(\mathrm{Ker}\, g) - \dim(\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g)$, d'après la formule de Grassmann.
De même, $n = \dim(\mathrm{Im} f + \mathrm{Im} g) = \dim(\mathrm{Im} f) + \dim(\mathrm{Im} g) - \dim(\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Im} g)$, toujours d'après la formule de Grassmann.
On a donc en ajoutant les deux égalités précédentes :

$$2n = \dim(\mathrm{Ker}\,(f)) + \dim(\mathrm{Ker}\,(g)) - \dim(\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g)) + \mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(g) - \dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g)).$$

Or, d'après le théorème du rang, on a : $\dim(\mathrm{Ker}\, f) + \mathrm{rg}\, f = n$ et $\dim(\mathrm{Ker}\, g) + \mathrm{rg}\, g = n$.
Ainsi, on obtient :

$$2n = 2n - \dim(\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g)) - \dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g))$$

Donc

$$\dim(\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g)) + \dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g)) = 0.$$

Comme ce sont deux entiers positifs, on a donc $\dim(\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g)) = \dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g)) = 0$.
Ainsi, $\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g) = \{0\}$ et $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\}$.
Donc les deux sommes sont directes.

Exercice 31. 1. Montrons que $\mathrm{Im}(f + g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.
Soit $y \in \mathrm{Im}(f + g)$, il existe $x \in E$ tel que $y = (f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
Donc $y \in \mathrm{Im} f + \mathrm{Im} g$.
Ainsi, $\mathrm{Im}(f + g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.

Donc $\text{rg}\,(f+g) = \dim(\text{Im}(f+g)) \leq \dim(\text{Im} + \text{Im}g)$.
D'après la formule de Grassmann, on obtient :

$$\dim(\text{Im}f + \text{Im}g) = \dim(\text{Im}f) + \dim(\text{Im}g) - \dim(\text{Im}f \cap \text{Im}g) = \text{rg}\,f + \text{rg}\,g - \dim(\text{Im}f \cap \text{Im}g) \leq \text{rg}\,f + \text{rg}\,g.$$

Finalement, on a bien prouvé que : $\text{rg}\,(f+g) \leq \text{rg}\,f + \text{rg}\,g$.

2. D'après le 1.,

$$\begin{aligned} \text{rg}\,(f) &= \text{rg}\,(f+g-g) \\ &\leq \text{rg}\,(f+g) + \text{rg}\,(-g) \end{aligned}$$

De plus, $\text{rg}\,(-g) = \dim(\text{Im}(-g))$. Or, $\text{Im}(-g) = \{-g(x), x \in E\} = \{g(-x), x \in E\} = \{g(y), y \in E\} = \text{Im}g$.
Ainsi, $\text{rg}\,(g) = \text{rg}\,(-g)$. Donc :

$$\text{rg}\,(f) \leq \text{rg}\,(f+g) + \text{rg}\,(g)$$

Donc $\text{rg}\,(f) - \text{rg}\,(g) \leq \text{rg}\,(f+g)$.
De même,

$$\begin{aligned} \text{rg}\,(g) &= \text{rg}\,(f+g-f) \\ &\leq \text{rg}\,(f+g) + \text{rg}\,(-f) \\ &\leq \text{rg}\,(f+g) + \text{rg}\,(f) \end{aligned}$$

Donc $\text{rg}\,(g) - \text{rg}\,(f) \leq \text{rg}\,(f+g)$.
Finalement, on obtient : $|\text{rg}\,(f) - \text{rg}\,(g)| \leq \text{rg}\,(f+g)$.

Exercice 32. • Soit $y \in \text{Im}(g \circ f)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ avec $f(x) \in F$.
Ainsi, $y \in \text{Im}g$.
Donc $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}g$.
Ainsi, $\dim(\text{Im}(g \circ f)) \leq \dim(\text{Im}g)$ d'où $\text{rg}\,(g \circ f) \leq \text{rg}\,(g)$.

- Soit $x \in \text{Ker}\,f$, alors $f(x) = 0$ donc $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(0) = 0$.
  Ainsi, $x \in \text{Ker}\,(g \circ f)$.
  Donc $\text{Ker}\,f \subset \text{Ker}\,(g \circ f)$
  D'où $\dim \text{Ker}\,f \leq \dim \text{Ker}\,(g \circ f)$.
  Donc par le théorème du rang, on obtient $n - \text{rg}\,(f) \leq n - \text{rg}\,(g \circ f)$.
  D'où $\text{rg}\,(g \circ f) \leq \text{rg}\,(f)$.
- Finalement, $\text{rg}\,(g \circ f) \leq \min(\text{rg}\,(g), \text{rg}\,(f))$.

- Posons $\begin{array}{cccc} \tilde{g}: & \text{Im}f & \to & G \\ & x & \mapsto & g(x) \end{array}$
  - Soit $x \in \text{Ker}\,\tilde{g}$, alors $\tilde{g}(x) = 0$ donc $g(x) = 0$. D'où $\text{Ker}\,(\tilde{g}) \subset \text{Ker}\,g$.
    Remarque : on a en fait $\text{Ker}\,\tilde{g} = \text{Ker}\,g \cap \text{Im}f$ (inutile de prouver l'égalité pour l'exercice).
    Ainsi,

    $$\begin{aligned} \dim(\text{Ker}\,\tilde{g}) &\leq \dim(\text{Ker}\,g) \\ &\leq n - \text{rg}\,(g) \end{aligned}$$

  - Soit $y \in \text{Im}\tilde{g}$, alors, il existe $x \in \text{Im}f$ tel que $y = \tilde{g}(x) = g(x)$.
    Or, $x \in \text{Im}f$ donc il existe $z \in E$ tel que $x = f(z)$ donc $y = g(f(z)) \in \text{Im}(g \circ f)$.
    Ainsi, $\text{Im}\tilde{g} \subset \text{Im}g \circ f)$.
    Remarque : on a en fait $\text{Im}\tilde{g} = \text{Im}(g \circ f)$ (inutile de prouver l'égalité pour l'exercice).
    Donc $\text{rg}\,(\tilde{g}) \leq \text{rg}\,(g \circ f)$.
  - Or, d'après le théorème du rang, on a :

    $$\dim(\text{Im}f) = \dim(\text{Ker}\,\tilde{g}) + \text{rg}\,(\tilde{g})$$

    Donc :

    $$\text{rg}\,(f) \leq n - \text{rg}\,(g) + \text{rg}\,(g \circ f)$$

    D'où :

    $$\text{rg}\,(f) + \text{rg}\,(g) - n \leq \text{rg}\,(g \circ f)$$

- On a donc prouvé que : $\text{rg}\,(f) + \text{rg}\,(g) - n\text{rg}\,(g \circ f) \leq \min(\text{rg}\,f, \text{rg}\,g)$.

Exercice 33. 1. Raisonnons par double implication.

- Supposons qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Im}u = \text{Ker}\, u$.
Alors d'après le théorème du rang :
$$\dim E = \text{rg}\, u + \dim \text{Ker}\, u = 2\text{rg}\, u$$
donc n est pair.
- Réciproquement, supposons que n est pair, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$.
Si $p = 0$ l'endomorphisme nul convient.
Supposons désormais $p > 0$.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_{2p})$ une base de E.
Soit u l'unique application de $\mathcal{L}(E)$ telle que :
$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ u(e_i) = 0_F$$
$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ u(e_{i+p}) = e_i$$
On a $\text{Vect}\,(e_1, ..., e_p) \subset \text{Im}u$ et $\text{Vect}\,(e_1, ..., e_p) \subset \text{Ker}\, u$.
De plus, la famille $(e_1, ..., e_p)$ est libre (sous famille d'une famille libre).
Ainsi, $\dim \text{Im}u \geq p$ et $\dim \text{Ker}\, u \geq p$.
Par le théorème du rang, on a $2p = \dim\,(E) = \text{rg}\, u + \dim\,(\text{Ker}\, u) \geq 2p$.
Ainsi, les inégalités précédentes sont des égalités.
Donc $\dim\,(\text{Im}u) = p$ et $\dim \text{Ker}\, u = p$.
Par inclusion et égalité des dimensions, on a : $\text{Im}u = \text{Vect}\,(e_1, ..., e_p) = \text{Ker}\, u$.

2. Soit un tel $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Im}(u) = \text{Ker}\,(u)$.
Notons $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$.
Soit $(f_1, ..., f_p)$ une base de $\text{Im}u = \text{Ker}\, u$.
Il existe $e_1, ..., e_p \in E$ tels que : $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $u(e_i) = f_i$.
Montrons que $(e_1, ..., e_p, f_1, ..., f_p)$ est une base de E.
Il s'agit d'une famille de $2p = n$ vecteurs et $\dim\,(E) = n$.
Il suffit donc de prouver que cette famille est libre.
Soit $\lambda_1, ..., \lambda_p, \mu_1, ..., \mu_p \in \mathbb{K}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{p} \mu_i f_i = 0$.
En appliquant u, on obtient alors par linéarité de u : $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u(e_i) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i u(f_i) = 0$.
Or, $f_1, ..., f_p \in \text{Ker}\, u$.
Donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u(e_i) = 0$ d'où $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i = 0$ (par définition des f_i).
Donc : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i = 0$ car $(f_1, ..., f_p)$ est une base de $\text{Im}u$ donc est une famille libre.
On a alors : $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \mu_i f_i = 0$. Or, $(f_1, ..., f_p)$ est libre donc : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mu_i = 0$.
Ainsi, $(e_1, ..., e_p, f_1, ..., f_p)$ est libre et constitue donc une base de E.
Finalement, on a bien prouvé que $(e_1, ..., e_p, u(e_1), ..., u(e_p))$ est une base de E de la forme voulue.

Exercice 34. • Par le théorème du rang, la condition $\dim F + \dim G = \dim E$ est nécessaire.

- Montrons qu'elle est aussi suffisante.
Supposons que $\dim F + \dim G = \dim E$.
Soit H un supplémentaire de G dans E.
On a : $\dim\,(E) = \dim\,(H) + \dim\,(G)$ d'où $\dim H = \dim F = p$.
Soient $(e_1, ..., e_n)$ une base de E telle que $(e_1, ..., e_p)$ soit base de H et $(e_{p+1}, ..., e_n)$ base de G.
($(e_1, ..., e_n)$ est une base de E adaptée à $H \oplus G = E$).
Soit $(f_1, ..., f_p)$ une base de F.
Soit u l'unique application de $\mathcal{L}(E)$ telle que :
$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ u(e_i) = f_i \text{ et } \forall i \in [\![p+1, n]\!],\ u(e_i) = 0$$
Par construction, on a : $F \subset \text{Im}u$ et $G \subset \text{Ker}\, u$.
Ainsi, $\dim F \leq \text{rg}\,(u)$ et $\dim G \leq \dim \text{Ker}\, u$.
D'où par le théorème du rang, on a : $\dim\,(E) = \dim F + \dim G \leq \dim\,(\text{Im}u) + \dim\,(\text{Ker}\, u) = \dim\,(E)$.
Ainsi, les inégalités précédentes sont donc des égalités.
Ainsi, $\dim F = \text{rg}\, u$ et $\dim G = \dim \text{Ker}\, u$.
Par inclusions et égalités des dimensions, on en déduit que $F = \text{Im}u$ et $G = \text{Ker}\, u$..

Ainsi, il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $F = \text{Im}u$ et $G = \text{Ker}\, u$ si et seulement si $\dim\,(F) + \dim\,(G) = \dim\,(E)$.