Devoir surveillé n°5

samedi 29 février 2020
Durée : 4 heures

$\diamond$ Le candidat peut admettre le résultat d'une question et l'utiliser dans la suite à condition de l'écrire clairement sur sa copie.

$\diamond$ Si le candidat repère ce qu'il croit être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice 1

Dans le plan complexe, on considère le point A d'affixe 1, le cercle $\mathcal{C}$ de centre O d'affixe 0 et de rayon 1 ainsi que $\bar{\mathcal{D}}$ le disque fermé de centre O et de rayon 1. Soit $B \neq A$ un point du cercle $\mathcal{C}$ dont un système de coordonnées polaires est (r_B, φ) avec $r_B \geq 0$.

1. Montrer que $r_B = 1$.
2. (a) Montrer que $(AB) \mid \sin(\varphi)x + (1 - \cos(\varphi))y - \sin(\varphi) = 0$.
   (b) Soit M un point du plan dont un système de coordonnées polaires est (r, θ). Donner une expression de la distance $\mathrm{d}(M, (AB))$ du point M à la droite (AB).
3. Soit Δ la médiatrice du segment $[AB]$. Donner une équation cartésienne de Δ. *Dans la suite, on note I le milieu de $[AB]$.*
4. (a) Soit $M \in \Delta$. Montrer que $\mathrm{d}(M, (AB)) = IM$.
   (b) Montrer qu'il existe M_0 et M_1 tel que $\Delta \cap \mathcal{C} = \{M_0, M_1\}$ puis calculer M_0M_1.
   (c) On suppose dans la suite que $IM_0 \geq IM_1$. Montrer que $\mathrm{d}(M_k, (AB)) = 1 + (-1)^k OI$, pour $k \in \{0, 1\}$.
   (d) Soit $M \in \bar{\mathcal{D}}$. Montrer que $\mathrm{d}(M, (AB)) \leq 1 + OI$.
5. On suppose que $\varphi \in]0, \pi[$. Déterminer tous les points du disque $\bar{\mathcal{D}}$ dont la distance à la droite (AB) est maximale. Pour simplifier, on admet que les points réalisant cette distance maximale ne sont pas situés sur la bisectrice (demi-droite) de l'angle $\widehat{AOB}$. *On donnera un système de coordonnées polaires de ces points en fonction de φ.*

Problème 1

On souhaite étudier quelques propriétés de la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soient P et D les matrices

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Partie I. Puissances de A par diagonalisation

1. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
2. Montrer que $D = P^{-1}AP$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une expression explicite de A^n en fonction de n.

Partie II. Puissances de A par Newton

Dans cette partie, on définit $J = A - I_3$.

1. Calculer J, J^2 et J^3.
2. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire une expression de J^n en fonction de J et J^2.
3. Soit pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$,
$$a_n = \sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad b_n = \sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}.$$
   Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = b_n = 2^{n-1}$. *On pourra calculer $a_n + b_n$ et $a_n - b_n$.*
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant le binôme de Newton, déterminer une expression explicite de A^n en fonction de n.

Partie III. Racines carrées de A

Dans cette partie, on cherche toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que

$$X^2 = A.$$

Dans ce cas, on dit que X est une racine carrée de la matrice A.

1. Soit $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En notant $Y = P^{-1}XP$, montrer que

$$X^2 = A \iff Y^2 = D.$$

2. Soit $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Dans cette question, on suppose que $Y^2 = D$.
   (a) Montrer que Y et D commuttent.
   (b) Montrer que Y est une matrice diagonale.
   (c) En déduire une expression explicite de Y
3. Déterminer toutes les racines carrées de A.

Partie IV. Commutant de A

Dans cette partie, on note $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ AM = MA\}$ l'ensemble des matrices qui commuttent avec A.

1. Montrer que $\forall (X, Y) \in \mathcal{C}(A)^2, \ \ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \ \ \lambda X + \mu Y \in \mathcal{C}(A)$.
2. Montrer que pour toute matrice M,

$$M \in \mathcal{C}(A) \iff P^{-1}MP \text{ et } D \text{ commuttent.}$$

3. Montrer que pour toute matrice M,

$$M \in \mathcal{C}(A) \iff P^{-1}MP \in \mathcal{D}_3(\mathbb{R}).$$

Problème 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } \ n \text{ est un entier naturel pair} \\ 3n+1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$.

Partie I. Généralités

1. Montrer que $x_0 \in \mathbb{N}^* \implies (\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \mathbb{N}^*)$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{N}^*, (x \text{ est impair}) \implies (f(x) \text{ est pair})$.
3. Dans cette question, on fixe $y \in \mathbb{N}$.
   (a) Résoudre l'équation $f(x) = y$ pour $x \in \mathbb{N}^*$.
   (b) L'application $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ est-elle bijective ? injective ? surjective ?
4. On suppose dans cette question que $x_0 = 3$.
   (a) Déterminer x_{10}.
   On dit que la suite (x_n) est p-périodique à partir d'un certain rang ($p \in \mathbb{N}^*$) lorsque

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0) \implies (x_{n+p} = x_n).$$

   (b) Montrer que (x_n) est 3-périodique à partir d'un certain rang.
5. Déterminer trois valeurs de x_0 telles que (x_n) est 3-périodique à partir d'un certain rang.

Partie II. Cycles de Collatz

Dans cette partie, on fait l'hypothèse que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est N-périodique (où $N \in \mathbb{N}^*$) et que $x_0, x_1, \cdots, x_{N-1} \in \mathbb{N}^*$ sont des entiers naturels deux à deux distincts. On définit $\mathcal{C}$ par

$$\mathcal{C} = \{x_n \ / \ n \in \mathbb{N}\},$$

l'ensemble des valeurs prises par la suite (x_n). Soit $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$ les deux ensembles définis par

$$\mathcal{C}_0 = \{c \in \mathcal{C} \ / \ c \text{ est pair.}\} \ \text{ et } \ \mathcal{C}_1 = \{c \in \mathcal{C} \ / \ c \text{ est impair.}\}$$

1. Montrer que $N \geq 3$.

2. Dans cette question, on donne des propriétés sur le cardinal des ensembles $\mathcal{C}, \mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$.
   (a) Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$ et calculer le cardinal de $\mathcal{C}$.
   (b) En déduire que $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$ sont finis.

   Dans la suite, on note $p = \#\mathcal{C}_0$ et $q = \#\mathcal{C}_1$. On définit $a_1, \cdots a_p$ et $b_1, \cdots b_q$ tels que

$$\mathcal{C}_0 = \{a_1, \cdots, a_p\} \quad et \quad \mathcal{C}_1 = \{b_1, \cdots, b_q\}.$$

   (c) Montrer que $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est une bijection.
   (d) Montrer que $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \sqcup \mathcal{C}_1$, $\mathcal{C} = f(\mathcal{C}) = f(\mathcal{C}_0) \sqcup f(\mathcal{C}_1)$ et que $f(\mathcal{C}_1) \subset \mathcal{C}_0$.
   (e) En déduire les inégalités $q \leq \frac{N}{2} \leq p$.
3. Soit m le plus petit élément de $\mathcal{C}$. Donner une expression de $f(m)$ en fonction de m. En déduire que $m \geq 1$.
4. Dans cette question, on définit $P = \prod_{x \in \mathcal{C}} x$ le produit de tous les éléments de $\mathcal{C}$.
   (a) Montrer que $P = \frac{1}{2^p} \left(\prod_{j=1}^{p} a_j \right) \times \left(\prod_{j=1}^{q} (3b_j + 1) \right)$.
   (b) En déduire l'égalité caractéristique du cycle $\mathcal{C}$

$$2^p = \prod_{j=1}^{q} \left(3 + \frac{1}{b_j} \right).$$

   (c) Montrer que $3^q \leq 2^p \leq \left(3 + \frac{1}{m}\right)^q$.

Partie III. Cas où $N = 5$, $N = 18$.

On conserve les notations des parties précédentes. On se place dans les conditions de la partie II et l'on suppose que $m = x_0$.

1. Dans cette question uniquement $N = 5$.
   (a) Exprimer x_1, x_2 et x_4 en fonction de x_0.
   (b) En raisonnant par l'absurde montrer que x_2 est impair puis exprimer x_3 en fonction de x_0.
   (c) Déterminer la valeur de x_0. Est-il possible que $N = 5$?
2. Dans cette question $N = 18$.
   (a) Montrer que $m > 1$.
   (b) En déduire l'encadrement

$$3^q \leq 2^{18-q} < 4^q.$$

   (c) Un calcul donne $3^7 = 2187$ et $2^{11} = 2048$. Est-il possible que $N = 18$?

FIN.