Feuille d'exercices 19 : Espaces vectoriels

1 Espaces vectoriels - Généralités

Exercice 1. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels pour les lois usuelles ?
1. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 3x - y + 2z = 0\}$,
2. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ xy = zt\}$,
3. $G = \{(x, x + y, x + y + z) \in \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$,
4. $H = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ f(1) = 0\}$

Exercice 2.
Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels :
1. $E_1 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ a, b \in \mathbb{R}\right\}$,
2. $E_2 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ a + b + c + d = 0\right\}$,
3. $E_3 = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(0) = P(1)\}$,
4. $E_4 = \{f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}),\ \int_0^1 f(t)\,dt = 0\}$,
5. $E_5 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n\}$.

Exercice 3. Les ensembles E suivants, munis des lois usuelles, sont-ils des espaces vectoriels ?

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0 \text{ et } x - 3y = 0\}$
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ xy \geq 0\}$
3. $E_4 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \text{ est monotone }\}$
4. $E_5 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée }\}$
5. $E_6 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ f(2) = 3f(4)\}$
6. $E_7 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2\ ,\ 2x - i\overline{y} = 0\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

Exercice 4. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E (un K-e.v.). Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 5. Ecrire les espaces vectoriels suivants sous la forme d'un Vect .
1. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - t = 0\}$.
2. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \text{ et } x - y + z - t = 0\}$.

Exercice 6. On pose : $u_1 = (1, 0, -1)$, $u_2 = (0, 1, -1)$, $u_3 = (1, 2, -3)$, $u_4 = (3, -2, -1)$, $u_5 = (1, -2, 1)$,
$F = \text{Vect}\,(u_1, u_2)$ et $G = \text{Vect}\,(u_3, u_4, u_5)$.
Montrer que $F = G$.

Exercice 7. Écrire les espaces vectoriels suivants sous la forme d'un Vect :
a. $E_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\ ,\ x = 3y = 2x + 2t\}$
b. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ ,\ x + 2y = 2x + z\}$
c. $E_3 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ ,\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison } 2\}$
d. $E_4 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ \exists(P, Q) \in \mathbb{R}_1[X]^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = P(x)\cos x + Q(x)\sin x\}$
e. $E_5 = \{P \in \mathbb{R}_3[X]\ ,\ P'(3) = P''(3) = 0\}$

Exercice 8. On définit les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x + y - z = 0\},\ F = \{(x, x, -x) \in \mathbb{R}^3,\ x \in \mathbb{R}\}.$$

1. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminer $E \cap F$.
2. On pose $u = (1, -1, 1)$ et $v = (3, 1, 7)$. Montrer que $\text{Vect}\,(u, v) \subset E$. A-t-on égalité ?

Exercice 9. Soient $u = (1, 2, 1, 0)$, $v = (0, 1, 2, 1)$ et $F = Vect(u, v)$.
Soit $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x - y = t - z \text{ et } x - z + 2t = 0\}$.
Montrer que $F = G$.

Exercice 10. Soient F, G, H des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
1. Comparer $F \cap (G + H)$ et $(F \cap G) + (F \cap H)$,
2. Montrer que : $F \cap (G + (F \cap H)) = (F \cap G) + (F \cap H)$.

Exercice 11. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les deux espaces vectoriels suivants :

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\ ,\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}\,((1, 1, 1)).$$

1. Montrer que $F+G=\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que la somme $F+G$ est directe.
3. Justifier que F et G sont supplémentaires.

Exercice 12.
On pose :
$$F=\{(x,2x,3x),\ x\in\mathbb{R}\}\text{ et }G=\{(x+y,x+y,y),\ x,y\in\mathbb{R}\}.$$
Montrer que :
$$\mathbb{R}^3=F\oplus G.$$

Exercice 13. Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ degré $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $F=\{PQ,Q\in\mathbb{K}[X]$.
Montrer que $F\oplus\mathbb{K}_{n-1}[X]=\mathbb{K}[X]$.

Exercice 14. Soit $E=\mathbb{R}^4$. On pose $u_1=(1,0,0,0)$, $u_2=(1,1,0,0)$, $u_3=(1,1,1,0)$, $u_4=(1,1,1,1)$, $F=\mathrm{Vect}\,(u_1,u_2)$ et $G=\mathrm{Vect}\,(u_3,u_4)$.
1. Montrer que $F=\{(x,y,z,t)\in E,\ z=t=0\}$ et $G=\{(x,y,z,t)\in E,\ x-y=0\text{ et }x+y-2z=0\}$.
2. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 15. On pose :
$$E=\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}),$$
$$F=\{f\in E,\ \int_0^1 f=0,\ f(0)=0,\ f'(1)=0\},$$
$$G=\{x\mapsto a_0+a_1x+a_2x^2,\ a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}\}.$$
Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 16. Soit $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et soient p réels $(a_i)_{i\in\ 1,p\rrbracket}$ deux à deux distincts dans $[0,1]$. On pose :
$$F=\{f\in E,\ \forall i\in[\![1,p]\!],\ f(a_i)=0\}.$$
1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Déterminer un supplémentaire de F dans E.

Exercice 17. Montrer, dans chacun des cas suivants, que F et G sont deux-sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E :
1. $E=\{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\ ,\ f\text{ dérivable}\}$, $F=\mathrm{Vect}\,(\mathrm{ch}\,,\mathrm{sh}\,)$, $G=\{f\in E\,;\ f(0)=f'(0)=0\}$.
2. $E=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $F=\mathrm{Vect}\,(\exp)$, $G=\{f\in E\,;\ f(-1)=0\}$.

Exercice 18. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soient A et B des sous-espaces vectoriels de E, soit C un supplémentaire de $A\cap B$ dans B, c'est-à-dire tel que $(A\cap B)\oplus C=B$.
Montrer que A et C sont supplémentaires dans $A+B$.

2 Familles finies de vecteurs

Exercice 19. Les familles suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ou liées ?
1. $x_1=(1,1,0)$, $x_2=(0,1,1)$
2. $x_1=(1,1,1)$, $x_2=(1,2,-1)$ et $x_3=(-1,1,1)$
3. $x_1=(1,1,-1)$, $x_2=(1,-1,1)$, $x_3=(-1,1,1)$, $x_4=(1,1,1)$.

Exercice 20. La famille $(\sin,\cos)$ est-elle un famille libre ou liée de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 21.
Soit $E=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, soient $f_1:x\mapsto|x|$, $f_2:x\mapsto|x-1|$ et $f_3:x\mapsto|x+1|$.
Montrer que la famille (f_1,f_2,f_3) est libre.

Exercice 22. Les familles suivantes de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sont-elles libres ou liées ?
1. $f_1:x\mapsto\cos x$, $f_2:x\mapsto\sin x$, $f_3:x\mapsto 1$.
2. $f_1:x\mapsto\cos^2 x$, $f_2:x\mapsto\cos(2x)$, $f_3:x\mapsto 1$.
3. $f_k:x\mapsto\sin 2^k x$ avec $k\in[\![1,n]\!]$
4. $f_i:x\mapsto e^{\lambda_i x}$ avec $\lambda_1<\cdots<\lambda_n$.

Exercice 23. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient $a,b,c\in E$. On pose :
$$u=b+c,\ v=c+a,\ w=a+b.$$
Montrer que :
$$(a,b,c)\text{ est libre}\Leftrightarrow(u,v,w)\text{ est libre}.$$

Exercice 24. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille libre de E et soit $(\lambda_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de scalaires. Soit $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ et pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $v_i = u + e_i$.

Montrer que $(v_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est liée si et seulement si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = -1$.

Exercice 25.
1. Montrer que la famille $((1,2,3),(1,1,0),(0,1,1),(3,2,1))$ est génératrice dans $\mathbb{R}^3$.
2. Cette famille est-elle libre ?

Exercice 26. Montrer que $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x - y + z = 0\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et en donner une base.

Exercice 27. Soient $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq b$. On pose :

$$E = \{P \in \mathbb{C}_4[X],\ P(a) = 0, P(b) = 0\}.$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_4[X]$ et déterminer une base de E.

Exercice 28. Soient $e_1 = (1,1,2,2)$, $e_2 = (1,1,1,1)$, $e_3 = (1,2,3,4)$, $e_4 = (1,-1,1,1)$.
1. Montrer que (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Quelles sont les coordonnées de $(4,3,2,1)$ dans cette base.

Exercice 29. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $\mathcal{E} = (e_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ et $\mathcal{F} = (f_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ deux familles libres de vecteurs de E. On suppose que, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $f_i \in F_i$ où $F_i = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_i)$. Montrer que :

$$\forall i \in [\![1,p]\!],\ e_i \in E_i \text{ où } E_i = \mathrm{Vect}\,(f_1, \ldots, f_i).$$