Corrigé de la feuille d'exercices 19

1 Espaces vectoriels - Généralités

Exercice 1. a. E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Montrons que E est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

- $(0,0,0) \in E$ donc E est non vide.
- Soient $(x,y,z),(x',y',z') \in E$, soient $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. On a : $\lambda(x,y,z)+\mu(x',y',z') = (\lambda x+\mu x', \lambda y+\mu y', \lambda z+\mu z')$.
  Ainsi, $3(\lambda x+\mu x') - (\lambda y+\mu y') + 2(\lambda z+\mu z') = \lambda(3x-y+2z)+\mu(3x'-y'+2z') = \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0$.
  Ainsi, $\lambda(x,y,z)+\mu(x',y',z') \in E$.

Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

b. F n'est pas un espace vectoriel.
En effet, $(1,1,1,1) \in F$ et $(1,1,-1,-1) \in F$.
En revanche, $(1,1,1,1)+(1,1,-1,-1) = (2,2,0,0) \notin F$.

c. G est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Montrons que G est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

- $(0,0,0) \in G$ donc $G \neq \emptyset$.
- Soient $x,y,z,x',y',z' \in \mathbb{R}$, soient $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$.
  On a :

$$\begin{aligned}
&\lambda(x,x+y,x+y+z)+\mu(x',x'+y',x'+y'+z')\\
&=(\lambda x+\mu x', \lambda x+\mu x'+\lambda y+\mu y', \lambda x+\mu x'+\lambda y+\mu y'+\lambda z+\mu z')\\
&=(X,X+Y,X+Y+Z)
\end{aligned}$$

  avec $X = \lambda x+\mu x', Y = \lambda y+\mu y', Z = \lambda z+\mu z' \in \mathbb{R}$.
  Ainsi, $\lambda(x,x+y,x+y+z)+\mu(x',x'+y',x'+y'+z') \in G$.

Donc G est un sous-espace vectoriel de R^3.

d. H est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Montrons que H est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

- la fonction nulle appartient à H donc H est non vide.
- Soient $f,g \in H$, soient $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. On a : $(\lambda f+\mu g)(1) = \lambda f(1)+\mu g(1) = 0$.
  Donc $\lambda f+\mu g \in H$.

Donc H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R},\mathbb{R}$.

Exercice 2. 1. Montrons que E_1 est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- $0_2 \in E_1$ (il suffit de prendre $a=b=0$) donc $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est non vide.
- Soit $a,b,a',b' \in \mathbb{R}$, soient $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lambda\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a+\mu a' & \lambda b+\mu b' \\ \lambda b+\mu b' & \lambda a+\mu a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix},$$

  avec $c = \lambda a+\mu a'$ et $d = \lambda b+\mu b'$.
  Ainsi, $\lambda\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & a' \end{pmatrix} \in E_1$.

Donc E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. Montrons que E_2 est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- $0_2 \in E_2$ (il suffit de prendre $a=b=c=d=0$ qui vérifient bien $a+b+c+d=0$) donc E_2 est non vide.
- Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in E_2$ et soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\lambda\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a+\mu a' & \lambda b+\mu b' \\ \lambda c+\mu c' & \lambda d+\mu d' \end{pmatrix}.$$

  De plus, $(\lambda a+\mu a')+(\lambda b+\mu b')+(\lambda c+\mu c')+(\lambda d+\mu d') = \lambda(a+b+c+d)+\mu(a'+b'+c'+d') = 0$.
  Ainsi, $\lambda\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in E_2$.

Ainsi, E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

3. Montrons que E_3 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
   - Le polynôme nul appartient à E_3 donc E_3 est non vide.
   - Soient P, $Q \in E_3$ et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
     On a : $(\lambda P + \mu Q)(0) = \lambda P(0) + \mu Q(0) = \lambda P(1) + \mu Q(1) = (\lambda P + \mu Q)(1)$.
     Donc $\lambda P + \mu Q \in E_3$.

   Ainsi, E_3 est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ donc est lui même un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
4. Montrons que E_4 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([0,1], \mathbb{R})$.
   - La fonction nulle appartient bien à E_4 donc E_4 est non vide.
   - Soient $f, g \in E_4$ et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a : $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ et on a :
   $$\int_0^1 (\lambda f + \mu g)(t)dt = \lambda \int_0^1 f(t)dt + \mu \int_0^1 g(t)dt = 0,$$
     par linéarité de l'intégrale.
     Ainsi, $\lambda f + \mu g \in E_4$.

   Donc E_4 est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}([0,1], \mathbb{R})$ donc est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
5. Montrons que E_5 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   - la suite nulle appartient bien à E_5 car $0 = 3 \times 0 + 2 \times 0$.
   - Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_5$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
     Soit $n \in \mathbb{N}$. $\lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2} = \lambda(3u_{n+1} + 2u_n) + \mu(3v_{n+1} + 2v_n) = 3(\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) + 2(\lambda u_n + \mu v_n)$.
     Donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2} = 3(\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) + 2(\lambda u_n + \mu v_n)$.
     D'où, $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_5$

   Donc E_5 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ donc est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 3. 1. Montrons que E_1 est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.
   - $(0,0,0) \in E_1$ donc E_1 est non vide.
   - Soient $(x,y,z), (x',y',z') \in E_1$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :
   $$(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z') = \lambda(x+y+z) + \mu(x'+y'+z') = 0.$$
     De plus :
   $$(\lambda x + \mu x') - 3(\lambda y + \mu y') = \lambda(x - 3y) + \mu(x' - 3y') = 0.$$
     Ainsi, $\lambda(x,y,z) + \mu(x',y',z') \in E_1$.

   Donc E_1 est un sous-espace vectoriel de R^3.
2. E_2 n'est pas un espace vectoriel. En effet, $e_1 = (1,0,0) \in E_2$ et $e_2 = (0,1,0) \in E_2$.
   En revanche, $-2e_1 + e_2 = (-2,1,0) \notin E$. Ainsi, E_2 n'est pas stable par combinaison linéaire, il n'est donc pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
3. E_3 n'est pas une espace vectoriel.
   En effet, $f : x \mapsto x^2$ est croissante donc $f \in E_3$ et $g : x \mapsto -x$ est décroissante. Ainsi, $g \in E_3$.
   En revanche, $f + g : x \mapsto x^2 - x$ n'est pas monotone. Donc $f + g \notin E_3$.
   Ainsi, E_3 n'est pas stable par somme donc n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
4. Montrons que E_4 est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   - la suite nulle appartient à E_4 donc E_4 est non vide.
   - Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_4$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées, il existe $M, M' \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M$ et $|v_n| \leq M'$.
     Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après l'inégalité triangulaire, on a :
   $$\begin{aligned} |\lambda u_n + \mu v_n| &\leq |\lambda u_n| + |\mu v_n| \\ &\leq |\lambda||u_n| + |\mu||v_n| \\ &\leq |\lambda|M + |\mu|M' \end{aligned}$$
     Donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ |\lambda u_n + \mu v_n| \leq |\lambda|M + |\mu|M'$.
     Ainsi, $\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu(v_n)_{n\in N}$ est bornée. Donc $\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu(v_n)_{n\in N} \in E_4$.

   Donc E_4 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
5. Montrons que E_5 est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
   - la fonction nulle appartient à E_5 donc E_5 est non vide.

- Soient $f, g \in E_6$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a : $(\lambda f + \mu g)(2) = \lambda f(2) + \mu g(2) = 3\lambda f(4) + 3\mu g(4) = 3(\lambda f + \mu g)(4)$. Ainsi, $\lambda f + \mu g \in E_5$.

Donc E_5 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

6. Montrons que E_6 est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^2$.
   - $(0, 0) \in E_6$ donc E_6 est non vide.
   - Soient $(x, y), (x', y') \in E_6$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :

$$2(\lambda x + \mu x') - i\overline{(\lambda y + \mu y')} = 2(\lambda x + \mu x') - i(\lambda \overline{y} + \mu \overline{y'}) = \lambda(2x - i\overline{y}) + \mu(2x' - i\overline{y'}) = 0.$$

   Ainsi, $\lambda(x, y) + \mu(x', y') \in E_6$.

   Donc E_6 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^2$ vu comme un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.
   En revanche, E_6 n'est pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
   En effet, $(1, 2i) \in E_6$. En revanche, $i(1, 2i) = (i, -2) \notin E_6$.
   Donc E_6 n'est pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Exercice 4. Raisonnons par double implication.

- Supposons que $F \subset G$ ou $G \subset F$.
  - Si $F \subset G$ alors $F \cup G = G$ donc $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E.
  - De même, si $G \subset F$ alors $F \cup G = F$ donc $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E.

  Ainsi, si $F \subset G$ ou $G \subset F$ alors $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E.
- Réciproquement, supposons que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E.
  Montrons que $F \subset G$ ou $G \subset F$ par l'absurde.
  Supposons que $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$.
  Alors, il existe $x \in F \setminus G$ et $y \in G \setminus F$. On a $x, y \in F \cup G$ donc $x + y \in F \cup G$ car $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E. Donc $x + y \in F$ ou $x + y \in G$.
  - Si $x + y \in F$, alors $y = (x + y) - x \in F$ car F est un sous-espace vectoriel de E. Absurde.
  - Si $x + y \in G$, alors $x = (x + y) - y \in G$ car G est un sous-espace vectoriel de E. Absurde

  Ainsi, on a : $F \subset G$ ou $G \subset F$.

On a donc prouvé que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 5. 1.

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - t = 0\} \\ &= \{(x, y, z, x + y) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 0, 0, 1) + y(0, 1, 0, 1) + z(0, 0, 1, 0) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2, e_3) \end{aligned}$$

où $e_1 = (1, 0, 0, 1)$, $e_2 = (0, 1, 0, 1)$ et $e_3 = (0, 0, 1, 0)$.

2. Soient $x, y, z, t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ -2y - 2t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z \\ y = -t \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \text{ et } x - y + z - t = 0\} \\ &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = -z \text{ et } y = -t\} \\ &= \{(-z, -t, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z(-1, 0, 1, 0) + t(0, -1, 0, 1) \mid z, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2) \end{aligned}$$

où $e_1 = (-1, 0, 1, 0)$ et $e_2 = (0, -1, 0, 1)$.

Exercice 6. On souhaite prouver que $\mathrm{Vect}\,(u_1, u_2) = \mathrm{Vect}\,(u_3, u_4, u_5)$.
Raisonnons par double inclusion.

- Montrons que $\text{Vect}(u_1,u_2) \subset \text{Vect}(u_3,u_4,u_5)$.
  On remarque que $u_1 = \dfrac{1}{4}(u_3+u_4)$ et $u_2 = \dfrac{1}{4}(u_4 - 3u_5)$. Ainsi, $u_1, u_2 \in \text{Vect}(u_3,u_4,u_5)$.
  D'où $\text{Vect}(u_1,u_2) \subset \text{Vect}(u_3,u_4,u_5)$ car $\text{Vect}(v_1,v_2,v_3)$ est un espace vectoriel qui contient u_1 et u_2 donc contient le plus petit sous espace vectoriel les contenant.
- De même, on a : $u_3 = u_1 + 2u_2$, $u_4 = 3u_1 - 2u_2$ et $u_5 = u_1 - 2u_2$. Ainsi, $u_3, u_4, u_5 \in \text{Vect}(u_1,u_2)$. Donc $\text{Vect}(u_3,u_4,u_5) \subset \text{Vect}(u_1,u_2)$.

On a donc prouvé par double inclusion que $F = G$.

Exercice 7. a. On a :

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 3y = 2x + 2t\} \\
&= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 3y \text{ et } t = -\frac{3}{2}y\right\} \\
&= \left\{\left(3y, y, z, -\frac{3}{2}y\right) \mid y, z \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{y\left(3,1,0,-\frac{3}{2}\right) + z(0,0,1,0) \mid y,z \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \text{Vect}(e_1, e_2)
\end{aligned}$$

où $e_1 = \left(3,1,0,-\dfrac{3}{2}\right)$ et $e_2 = (0,0,1,0)$.

b. On a :

$$\begin{aligned}
E_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 2x + z\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y - z\} \\
&= \{(2y - z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} \\
&= \{y(2,1,0) + z(-1,0,1) \mid y,z \in \mathbb{R}\} \\
&= \text{Vect}(e_1, e_2)
\end{aligned}$$

où $e_1 = (2,1,0)$ et $e_2 = (-1,0,1)$.

c. On a :

$$\begin{aligned}
E_3 &= \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ , \ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison } 2\} \\
&= \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \ , \ \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda 2^n\} \\
&= \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \ , \ \exists \lambda \in \mathbb{R}, (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda (2^n)_{n\in\mathbb{N}}\} \\
&= \{\lambda (2^n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \\
&= \text{Vect}\ ((2^n)_{n\in\mathbb{N}})
\end{aligned}$$

d. On a :

$$\begin{aligned}
E_4 &= \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists (P,Q) \in \mathbb{R}_1[X]^2, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = P(x)\cos(x) + Q(x)\sin(x)\} \\
&= \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists a,b,c,d \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = (ax+b)\cos(x) + (cx+d)\sin(x)\} \\
&= \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists a,b,c,d \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = ax\cos(x) + b\cos(x) + cx\sin(x) + d\sin(x)\} \\
&= \text{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4)
\end{aligned}$$

où $f_1 : x \mapsto x\cos(x)$, $f_2 : x \mapsto \cos(x)$, $f_3 : x \mapsto x\sin(x)$ et $f_4 : x \mapsto \sin(x)$.

e. **Version 1 :**
On a :

$$\begin{aligned}
E_5 &= \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P'(3) = P''(3) = 0\} \\
&= \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid 3 \text{ est racine au moins double de } P'\} \\
&= \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid (X-3)^2 \mid P'\} \\
&= \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid \exists \lambda \in \mathbb{R},\ P' = \lambda(X-3)^2\} \quad \text{car } \deg(P') \leq 2 \\
&= \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid \exists \lambda \in \mathbb{R},\ P' = \lambda(X^2 - 6X + 9)\} \\
&= \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid \exists \lambda, d \in \mathbb{R},\ P = \lambda\left(\frac{1}{3}X^3 - 3X^2 + 9X\right) + d\} \\
&= \{\lambda\left(\frac{1}{3}X^3 - 3X^2 + 9X\right) + d, \lambda, d \in \mathbb{R}\} \\
&= \text{Vect}\left(\frac{1}{3}X^3 - 3X^2 + 9X, 1\right)
\end{aligned}$$

Version 2 :

$$\begin{aligned}
E_5 &= \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P'(3) = P''(3) = 0\} \\
&= \{aX^3 + bX^2 + cX + d \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ et } 3a \times 3^2 + 2b \times 3 + c = 0,\ 6a \times 3 + 2b = 0\} \\
&= \{aX^3 + bX^2 + cX + d \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ et } 27a + 6b + c = 0,\ 18a + 2b = 0\}
\end{aligned}$$

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} 27a + 6b + c = 0 \\ 18a + 2b = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} 27a + 6b + c = 0 \\ b = -9a \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} c = 27a \\ b = -9a \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
E_5 &= \{aX^3 + bX^2 + cX + d \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ et } b = -9a,\ c = 27a\} \\
&= \{a(X^3 - 9X^2 + 27) + d \mid a, d \in \mathbb{R}\} \\
&= \text{Vect}\left(X^3 - 9X^2 + 27X, 1\right)
\end{aligned}$$

Exercice 8. 1. E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En effet :

- $(0, 0, 0) \in E$ donc E est non vide.
- Soient $(x, y, z), (x', y', z') \in E$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
  On a : $2(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') - (\lambda z + \mu z') = \lambda(2x + y - z) + \mu(2x' + y' - z') = 0$.
  Ainsi, $\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z') \in E$.

Finalement, E est un bien sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
$F = \{(x, x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 1, -1) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\left((1, 1, -1)\right)$. Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Soit $u \in E \cap F$. Comme $u \in F$, il existe $x \in \mathbb{R}$, tel que $u = (x, x, -x)$. De plus, $u \in E$ donc $2x + x - x = 0$. Ainsi, $x = 0$. D'où $u = 0$.
On a donc prouvé que $E \cap F \subset \{0\}$.
De plus, E et F sont des sous-espaces vectoriels donc $E \cap F$ également d'où $\{0\} \subset E \cap F$.
Ainsi, on a : $E \cap F = \{0\}$.

2. Il suffit de prouver que $u \in E$ et $v \in E$.
   Or, $u \in \mathbb{R}^3$ et $2 - 1 - 1 = 0$ donc $u = (1, -1, 1) \in E$.
   De même, $v \in \mathbb{R}^3$ et $6 + 1 - 7 = 0$ donc $v = (3, 1, 7) \in E$.
   Ainsi, comme E est un espace vectoriel, on a alors $\text{Vect}\,(u, v) \subset E$.

Soit $(x, y, z) \in E$. On a $2x + y - z = 0$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
(x,y,z) = \lambda u + \mu v \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda + 3\mu = x \\ -\lambda + \mu = y \\ \lambda + 7\mu = z \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda + 3\mu = x \\ 4\mu = y + x \\ 4\mu = z - x \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}y \\ \mu = \frac{1}{4}(y+x) \\ y + x = z - x \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}y \\ \mu = \frac{1}{4}(y+x) \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \qquad \text{or} \quad 2x + y - z = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}y \\ \mu = \frac{1}{4}(y+x) \end{cases}
\end{aligned}
$$

Ainsi, $(x, y, z) \in \operatorname{Vect}(u, v)$. Donc $E \subset \operatorname{Vect}(u, v)$. On avait déjà prouvé l'autre inclusion.
On a : $E = \operatorname{Vect}(u, v)$.

Exercice 9. Raisonnons par double inclusion.

1. G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. En effet :
   - $(0, 0, 0, 0) \in G$ donc G est non vide.
   - Soient $(x, y, z, t), (x', y', z', t') \in G$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
     On a $(\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y') = \lambda(x - y) + \mu(x' - y') = \lambda(t - z) + \mu(t' - z') = (\lambda t + \mu t') - (\lambda z + \mu z')$.
     De plus, $(\lambda x + \mu x') - (\lambda z + \mu z') + 2(\lambda t + \mu t') = \lambda(x - z + 2t) + \mu(x' - z' + 2t') = 0$.
     Ainsi, $\lambda(x, y, z, t) + \mu(x', y', z', t') \in G$.
     Donc G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
     De plus, $u \in \mathbb{R}^4$ et $1 - 2 = -1 = 0 - 1$ donc $u \in G$.
     De même, $v \in \mathbb{R}^4$ et $0 - 1 = -1 = 1 - 2$ donc $v \in G$. Donc, $\operatorname{Vect}(u, v) \subset G$.
   - Soit $(x, y, z, t) \in G$. On a : $x - y = t - z$ et $x - z + 2t = 0$.
     Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :

$$
\begin{aligned}
(x,y,z,t) = \lambda u + \mu v \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = x \\ 2\lambda + \mu = y \\ \lambda + 2\mu = z \\ \mu = t \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = x \\ \mu = t \\ 2x + t = y \\ x + 2t = z \end{cases}
\end{aligned}
$$

     Or, $(x, y, z, t) \in G$ donc $x - z + 2t = 0$ et $x - y = t - z$. Ainsi, $x + 2t = z$. De plus, $x - y = t - (x + 2t)$.
     Donc $2x + t = y$.
     Ainsi, on a :

$$
(x,y,z,t) = \lambda u + \mu v \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = x \\ \mu = t \end{cases}
$$

     Donc $(x, y, z, t) \in \operatorname{Vect}(u, v)$.
     Ainsi, $G \subset F$.

   On a donc prouvé par double inclusion que $F = G$

Exercice 10. 1. • Montrons que $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$:
Soit $x \in (F \cap G) + (F \cap H)$. Il existe $x_1 \in F \cap G$ et $x_2 \in F \cap H$ tels que $x = x_1 + x_2$.
Alors, $x_1, x_2 \in F$ donc $x_1 + x_2 \in F$ car F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .
De plus, $x_1 \in G$ et $x_2 \in H$ donc $x_1 + x_2 \in G + H$ donc $x \in F \cap (G + H)$.
Ainsi, $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$.

- L'autre inclusion n'est pas toujours vraie.
  En effet, posons $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 0\}$, $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = 0\}$ et $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}$. On a alors $G + H = \mathbb{R}^2$ donc $F \cap (G + H) = F$. Or, $F \cap H = \{0\}$ et $F \cap G = \{0\}$ donc $(F \cap G) + (F \cap H) = \{0\}$.
  Ainsi, dans ce cas, $F \cap (G + H) \not\subset (F \cap G) + (F \cap H)$.

2. - Montrons que $F \cap (G + (F \cap H)) \subset (F \cap G) + (F \cap H)$.
     Soit $x \in F \cap (G + (F \cap H))$ alors $x \in F$ et $x \in G + (F \cap H)$. Il donc existe $x_1 \in G$ et $x_2 \in F \cap H$ tels que $x = x_1 + x_2$. Or, $x_2 \in F$ et $x_2 \in H$. Ainsi, $x_1 = x - x_2 \in F$ car F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel donc $x_1 \in F \cap G$ et $x_2 \in F \cap H$. D'où $x \in (F \cap G) + (F \cap H)$.
     Ainsi, $F \cap (G + (F \cap H)) \subset (F \cap G) + (F \cap H)$.
   - Montrons que $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + (F \cap H))$
     Soit $x \in (F \cap G) + (F \cap H)$ alors il existe $x_1 \in F \cap G$ et $x_2 \in F \cap H$ tels que $x = x_1 + x_2$.
     On a alors $x_1, x_2 \in F$ donc $x \in F$ car F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. De plus, $x_1 \in G$ et $x_2 \in F \cap H$ donc $x = x_1 + x_2 \in G + (F \cap H)$. Ainsi, $x \in F \cap (G + (F \cap H))$.
     Donc $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + (F \cap H))$.

   Finalement, on a bien prouvé par double inclusion que $(F \cap G) + (F \cap H) = F \cap (G + (F \cap H))$.

Exercice 11. 1. **Méthode 1 :**
On a :

$$\begin{aligned} F &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2, -x_1 - x_2), x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_1(1, 0, -1) + x_2(0, 1, -1), x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2) \end{aligned}$$

où $e_1 = (1, 0, -1), e_2 = (0, 1, -1)$.
Ainsi, F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
On note $e_3 = (1, 1, 1)$.
On sait déjà que $F + G \subset \mathbb{R}^3$.
De plus, soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, soient $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} (x, y, z) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 \quad &\iff \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_3 = x \\ \lambda_2 + \lambda_3 = y \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = z \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_3 = x \\ \lambda_2 + \lambda_3 = y \\ -\lambda_2 + 2\lambda_3 = x + z \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_3 = x \\ \lambda_2 + \lambda_3 = y \\ 3\lambda_3 = x + y + z \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \dfrac{2x - y - z}{3} \\ \lambda_2 = \dfrac{-x + 2y - z}{3} \\ \lambda_3 = \dfrac{x + y + z}{3} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(x, y, z) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$.
Donc $\mathbb{R}^3 \subset F + G$.
Méthode 2 :
On sait déjà que $F + G \subset \mathbb{R}^3$.
Démontrons l'autre inclusion en raisonnant par analyse-synthèse.
Soit $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$
Analyse :
Supposons qu'il existe $(u, v) \in F \times G$ tel que $x = u + v$. Comme $v \in G$,il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $v = a(1, 1, 1)$. De plus, $u = (x_1, x_2, x_3) - a(1, 1, 1) = (x_1 - a, x_2 - a, x_3 - a) \in F$. Donc $x_1 - a + x_2 - a + x_3 - a = 0$. Ainsi, $a = \dfrac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$.
Synthèse : Posons $a = \dfrac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$, $v = a(1, 1, 1)$ et $u = (x_1, x_2, x_3) - u$.

- On a bien $(x_1, x_2, x_3) = u + v$
- $v \in G$

- Et $u = (x_1, x_2, x_3) - a(1,1,1) = (x_1 - a, x_2 - a, x_3 - a)$. Et $x_1 - a + x_2 - a + x_3 - a = (x_1 + x_2 + x_3) - 3a = 0$. Ainsi, $u \in F$;

Pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, il existe $(u, v) \in F \times G$ tel que $(x_1, x_2, x_3) = u + v$.
Ainsi, $\mathbb{R}^3 \subset F + G$ et donc $\mathbb{R}^3 = F + G$.

2. Méthode 1 :
Dans le système précédent, il y a unicité donc la somme est directe.
Méthode 2 :
Soit $x \in F \cap G$. Comme $x \in G$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $x = a(1,1,1)$. Or, $x \in F$, donc on a $3a = 0$. Ainsi, $a = 0$ et donc $x = 0$. Ainsi, la somme $F + G$ est directe.
3. D'après les deux questions précédentes, $F + G = \mathbb{R}^3$ et la somme $F + G$ est directe.
Ainsi, F et G sont supplémentaires.
Remarque : Dans la question 1, on prouve par résolution d'un système ou par analyse-synthèse que tout élément de $\mathbb{R}^3$ se décompose de manière unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G (existence et unicité de u et de v). On pourrait donc conclure directement que F et G sont supplémentaires.

Exercice 12. On remarque tout d'abord que :

$$\begin{aligned} F &= \{(x, 2x, 3x), x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,2,3), x \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}\,((1,2,3)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} G &= \{(x+y, x+y, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,1,0) + y(1,1,1) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}\,((1,1,0),(1,1,1)) \end{aligned}$$

Ainsi, F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
Soit $x = (x_1, x_2, x_2) \in \mathbb{R}^3$. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} & x = (a, 2a, 3a) + (b+c, b+c, c) \\ \iff & \begin{cases} a + b + c = x_1 \\ 2a + b + c = x_2 \\ 3a + c = x_3 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} a + b + c = x_1 \\ -b - c = x_2 - 2x_1 \\ -3b - 2c = x_3 - 3x_1 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} a + b + c = x_1 \\ b + c = 2x_1 - x_2 \\ c = 3x_1 - 3x_2 + x_3 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} a = -x_1 + x_2 \\ b = -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ c = 3x_1 - 3x_2 + x_3 \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc prouvé que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, il existe un unique $(f, g) \in F \times G$ tel que $x = f + g$.
Donc $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

Exercice 13.
- Soit $Q \in F \cap \mathbb{K}_{n-1}[X]$. Comme $Q \in F$, il existe $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q = PR$.
Supposons que $Q \neq 0$. Alors, $R \neq 0$.
On a alors $\deg(R) \geq 0$ donc $\deg(Q) = \deg(P) + \deg(R) \geq \deg(P) = n$. Or, $Q \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ donc $\deg(Q) \leq n - 1$. Absurde.
Ainsi, $Q = 0$ donc la somme $F + \mathbb{K}_{n-1}[X]$ est directe.
- Montrons que $\mathbb{K}[X] = F + \mathbb{K}_{n-1}[X]$.
  - On sait déjà que $F + \mathbb{K}_{n-1}[X] \subset \mathbb{K}[X]$.
  - Montrons que $\mathbb{K}[X] \subset F + \mathbb{K}_{n-1}[X]$.
  Soit $S \in \mathbb{K}[X]$, Par le théorème de division euclidienne ($P \neq 0$), il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $R \in \mathbb{K}[X]$ tels que $S = PQ + R$ et $\deg(R) < \deg(P) = n$. Ainsi, $PQ \in F$ et $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$.
  Ainsi, $S \in F + \mathbb{K}_{n-1}[X]$.
  D'où $\mathbb{K}[X] \subset F + \mathbb{K}_{n-1}[X]$.

Ainsi, $F \oplus \mathbb{K}_{n-1}[X] = \mathbb{K}[X]$.

Remarque : L'existence et l'unicité de la division euclidienne justifie également l'existence et l'unicité de la décomposition et donc le fait que F et $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ dont supplémentaires.

Exercice 14. 1. **Méthode 1 :**

- Montrons que $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, z = t = 0\}$.
  Raisonnons par double inclusion. Notons $F' = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, z = t = 0\}$.
  - F' est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. En effet :
    - $(0, 0, 0, 0) \in F'$ donc F' est non vide.
    - Soient $(x, y, z, t), (x', y', z', t') \in F'$.
      On a : $\lambda z + \mu z' = 0$ et $\lambda t + \mu t' = 0$ car $z = z' = t = t' = 0$ donc $\lambda(x, y, z, t) + \mu(x', y', z', t') \in F'$.

    Ainsi, F' est un sous-espace vectoriel.
    De plus, $u_1, u_2 \in F'$.
    Donc $\text{Vect}(u_1, u_2) \subset F'$.
  - Soient $(x, y, z, t) \in F'$. On a $z = 0$ et $t = 0$.
    Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(x, y, z, t) = \lambda u_1 + \mu u_2 \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda + \mu = x \\ \mu = y \\ 0 = z \\ 0 = t \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = x - y \\ \mu = y \end{cases} \qquad \text{car } (x, y, z, t) \in F'\end{aligned}$$

    Ainsi, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y, z, t) = \lambda u_1 + \mu u_2$. Donc, $(x, y, z, t) \in \text{Vect}(u_1, u_2)$.
    D'où $F' \subset \text{Vect}(u_1, u_2)$.

  On a donc montré par double inclusion que $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, z = t = 0\}$.
- Montrons que $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - y = 0 \text{ et } x + y - 2z = 0\}$.
  Raisonnons par double inclusion. Notons $G' = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - y = 0 \text{ et } x + y - 2z = 0\}$.
  - G' est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. En effet :
    - $(0, 0, 0, 0) \in G'$ donc G' est non vide.
    - Soient $(x, y, z, t), (x', y', z', t') \in F'$.
      Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
      On a : $(\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y') = \lambda(x - y) + \mu(x' - y') = 0$.
      Et $(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') - 2(\lambda z + \mu z') = \lambda(x + y - 2z) + \mu(x' + y' - 2z') = 0$.
      Donc $\lambda(x, y, z, t) + \mu(x', y', z', t') \in G'$.

    Ainsi, G' est un sous-espace vectoriel.
    On remarque $1 - 1 = 0$ et $1 + 1 - 2 = 0$ donc $u_3 \in G'$.
    De même, $u_4 \in G'$.
    Donc $\text{Vect}(u_3, u_4) \subset G'$.
  - Soient $(x, y, z, t) \in G'$. On a $x - y = 0$ et $x + y - 2z = 0$.
    Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(x, y, z, t) = \lambda u_3 + \mu u_4 \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda + \mu = x \\ \lambda + \mu = y \\ \lambda + \mu = z \\ \mu = t \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = x - t \\ \mu = t \\ 0 = y - x \\ 0 = z - x \end{cases}\end{aligned}$$

    Or, $x - y = 0$ et $x + y - 2z = 0$ donc $2(x - z) = 0$ d'où $x - z = 0$.
    Ainsi,

$$(x, y, z, t) = \lambda u_3 + \mu u_4 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = x - t \\ \mu = t \end{cases}$$

    Ainsi, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y, z, t) = \lambda u_3 + \mu u_4$. Donc, $(x, y, z, t) \in \text{Vect}(u_3, u_4)$.
    D'où $G' \subset \text{Vect}(u_3, u_4)$.

On a donc montré par double inclusion que $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x-y=0 \text{ et } x+y-2z=0\}$.

Méthode 2 :
On a :

$$\begin{aligned}\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, z=t=0\} &= \{(x,y,0,0), x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,0,0,0)+y(0,1,0,0), x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}\,(e_1,e_2)\end{aligned}$$

Montrons que $\mathrm{Vect}\,(e_1,e_2) = \mathrm{Vect}\,(u_1,u_2) = F$.
On a $e_1 = u_1$ et $e_2 = u_2 - u_1$ donc $e_1, e_2 \in \mathrm{Vect}\,(u_1,u_2)$ et $\mathrm{Vect}\,(u_1,u_2)$ est un espace vectoriel donc $\mathrm{Vect}\,(e_1,e_2) \subset \mathrm{Vect}\,(u_1,u_2)$.
De même, $u_1 = e_1$ et $u_2 = e_1 + e_2$ donc $u_1, u_2 \in \mathrm{Vect}\,(e_1,e_2)$ et $\mathrm{Vect}\,(e_1,e_2)$ est un espace vectoriel donc $\mathrm{Vect}\,(u_1,u_2) \Subset \mathrm{Vect}\,(e_1,e_2)$.
Ainsi : $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, z=t=0\} = \mathrm{Vect}\,(e_1,e_2)\mathrm{Vect}\,(u_1,u_2) = F$.
De même :

$$\begin{aligned}\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x-y=0 \text{ et } x+y-2z=0\} &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x=y \text{ et } z=x\} \\ &= \{(x,x,x,t), x,t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,1,1,0)+t(0,0,0,1), x,t \in \mathbb{R}\} \qquad = \mathrm{Vect}\,(e_3,e_4)\end{aligned}$$

où $e_3 = (1,1,1,0)$ et $e_4 = (0,0,0,1)$.
Montrons que $\mathrm{Vect}\,(e_3,e_4) = \mathrm{Vect}\,(u_3,u_4)$.
$e_3 = u_3$ et $e_4 = u_4 - u_3$. Ainsi, $e_3, e_4 \in \mathrm{Vect}\,(u_3,u_4)$ et $\mathrm{Vect}\,(u_3,u_4)$ est un espace vectoriel donc $\mathrm{Vect}\,(e_3,e_4) \subset \mathrm{Vect}\,(u_3,u_4)$.
De même, $u_3 = e_3$ et $u_4 e_3 + e_4$ donc $u_3, u_4 \in \mathrm{Vect}\,(e_3,e_4)$ et $\mathrm{Vect}\,(e_3,e_4)$ est un espace vectoriel donc $\mathrm{Vect}\,(u_3,u_4) \subset \mathrm{Vect}\,(e_3,e_4)$.
Ainsi : $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x-y=0 \text{ et } x+y-2z=0\} = \mathrm{Vect}\,(e_3,e_4) = \mathrm{Vect}\,(u_3,u_4) = G$.

2. Soit $(x,y,z,t) \in E$. Soient $a,b,c,d \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & (x,y,z,t) = au_1 + bu_2 + cu_3 + du_4 \\ \iff & \begin{cases} a+b+c+d = x \\ b+c+d = y \\ c+d = z \\ d = t \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} a = x-y \\ b = y-z \\ c = z-t \\ d = t \end{cases}\end{aligned}$$

Il y a donc existence et unicité de la décomposition. On a donc $F \oplus G = E$.
Ainsi, F et G sont donc supplémentaires dans E.

Exercice 15. Vérifions tout d'abord que F et G sont deux sous espaces vectoriels de E.

- La fonction nulle sur $[0,1]$ appartient à F donc F est non vide.
- Soient $f, g \in F$. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$. On a $\displaystyle\int_0^1 (\lambda f + \mu g)(t)dt = \lambda \int_0^1 f(t)dt + \mu \int_0^1 g(t)dt = 0$.
De plus, $(\lambda f + \mu g)(0) = \lambda f(0) + \mu g(0) = 0$ et $(\lambda f + \mu g)'(1) = \lambda f'(1) + \mu g'(1) = 0$.
Ainsi, $\lambda f + \mu g \in F$

Donc F est un sous espace vectoriel de E.
$G = \mathrm{Vect}\,(e_0,e_1,e_2)$ où pour tout $k \in [\![0,2]\!]$, $\begin{array}{cccc} e_k : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^k \end{array}$.

Montrons que ces sous-espaces sont supplémentaires.
Soit $h \in E$. Montrons par analyse-synthèse qu'il existe un unique $(f,g) \in F \times G$ tel que $= f + g$.
Analyse : supposons qu'il existe $(f,g) \in F \times G$ tel que $h = f + g$.
Comme $g \in G$, il existe a_0, a_1, a_2 tels que $g : x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.
On a alors :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 h(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_0^1 (a_0 + a_1 t + a_2 t^2)dt = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} \quad \text{car } f \in F \\ h(0) = f(0) + g(0) = a_0 \quad \text{car } f \in F \\ h'(1) = f'(1) + g'(1) = a_1 + 2a_2 \text{ car } f \in F \end{cases}$$

Or,

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 = h(0) \\ a_1 + 2a_2 = h'(1) \\ a_0 + \dfrac{a_1}{2} + \dfrac{a_2}{3} = \displaystyle\int_0^1 h(t)dt \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} a_0 = h(0) \\ a_1 + 2a_2 = h'(1) \\ \dfrac{a_1}{2} + \dfrac{a_2}{3} = I - h(0) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} a_0 = h(0) \\ a_1 + 2a_2 = h'(1) \\ -\dfrac{2}{3}a_2 = \displaystyle\int_0^1 h(t)dt - h(0) - \dfrac{1}{2}h'(1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} a_0 = h(0) \\ a_1 = -3h(0) - \dfrac{1}{2}h'(1) + 3\displaystyle\int_0^1 h(t)dt \\ a_2 = \dfrac{3}{2}h(0) + \dfrac{3}{4}h'(1) - \dfrac{3}{2}\displaystyle\int_0^1 h(t)dt \end{array}\right.$$

Ainsi, si la décomposition de h comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G existe, elle est unique.

Synthèse : Posons $a_0 = h(0)$, $a_1 = -3h(0) - \dfrac{1}{2}h'(1) + 3\displaystyle\int_0^1 h(t)dt$ et $a_2 = \dfrac{3}{2}h(0) + \dfrac{3}{4}h'(1) - \dfrac{3}{2}\displaystyle\int_0^1 h(t)dt$.

Posons $g : x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2$ et $f = h - g$. On a :

- $h = f + g$
- Par définition même de g, $g \in G$.
- D'après les équivalences de la phase d'analyse, on a :

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 = h(0) \\ a_1 + 2a_2 = h'(1) \\ a_0 + \dfrac{a_1}{2} + \dfrac{a_2}{3} = \displaystyle\int_0^1 h(t)dt \end{array}\right.$$

  Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t)dt &= \int_0^1 h(t) - g(t)dt \\ &= \int_0^1 h(t)dt - \int_0^1 (a_0 + a_1t + a_2t^2)dt \\ &= \int_0^1 h(t)dt - \left(a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

  De plus, $f(0) = h(0) - a_0 = 0$ et $f'(1) = h'(1) - (a_1 + 2a_2) = 0$.
  Ainsi, $f \in F$.

Ainsi, tout élément de E se décompose de façon unique sous la forme $h = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$ donc F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 16. 1. • la fonction nulle appartient à F donc F est non vide.

- Soient $f, g \in F$. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
  Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $(\lambda f + \mu g)(a_i) = \lambda f(a_i) + \mu g(a_i) = 0$.
  Ainsi, $\lambda f + \mu g \in F$.

F est donc un sous-espace vectoriel de E.

2. Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on pose $g_i : \left\{\begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\prod_{j \in [\![1,p]\!] \setminus \{i\}} (x - a_j) \end{array}\right.$.

   Posons $G = \text{Vect}\left((g_i)_{i \in [\![1,p]\!]}\right)$.
   Montrons que G est un supplémentaire de F dans E.
   Soit $h \in E$. Montrons par analyse-synthèse qu'il existe un unique $(f, g) \in F \times G$ tel que $h = f + g$.

Analyse : Supposons qu'il existe $(f,g) \in F \times G$ tel que $h = f + g$.

Comme $g \in G = \text{Vect}\,\left((g_i)_{i\in[\![1,p]\!]}\right)$, il existe $\lambda_0, ..., \lambda_p \in \mathbb{R}$ tel que $g = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i$. Soit $k \in [\![1,p]\!]$, on a alors :

$$h(a_k) = f(a_k) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i(a_k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \prod_{j\in[\![1,p]\!]\setminus\{i\}} (a_k - a_j) = \lambda_k \prod_{j\in[\![1,p]\!]\setminus\{k\}} (a_k - a_j)$$

Ainsi, $\lambda_k = \dfrac{h(a_k)}{\prod_{j\in[\![1,p]\!]\setminus\{k\}} (a_k - a_j)}$.

On a alors : $f = h - \sum_{i=1}^{n} \dfrac{h(a_i)}{\prod_{j\in[\![1,p]\!]\setminus\{i\}} (a_i - a_j)} g_i$. Ainsi, si une telle décomposition existe, celle-ci est unique.

Synthèse : Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, posons $\lambda_i = \dfrac{h(a_i)}{\prod_{j\in[\![1,p]\!]\setminus\{i\}} (a_i - a_j)}$, $g = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$ et $f = h - g$.

- On a bien $h = f + g$.
- On a $g \in G$
- Soit $k \in [\![1,p]\!]$,

$$\begin{aligned}
f(a_k) &= h(a_k) - g(a_k) \\
&= h(a_k) - \sum_{i=1}^{n} \frac{h(a_i)}{\prod_{j\in[\![1,p]\!]\setminus\{i\}} (a_i - a_j)} g_i(a_k) \\
&= h(a_k) - \sum_{i=1}^{n} \frac{h(a_i)}{\prod_{j\in[\![1,p]\!]\setminus\{i\}} (a_i - a_j)} \prod_{j\in[\![1,p]\!]\setminus\{i\}} (a_k - a_j) \\
&= h(a_k) - h(a_k) \\
&= 0
\end{aligned}$$

  Ainsi, $f \in F$.

On a donc montré que pour tout élément h de E, il existe un unique $(f,g) \in F \times G$ tel que $h = f + g$.
Ainsi, F et G sont supplémentaires dans E.

Exercice 17. 1. E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On peut prouver qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

- Commençons par prouver que F et G sont des sous espaces vectoriels de E.
  - Comme ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$, toute combinaison linéaire de ch et sh est dérivable. Ainsi, $F \subset E$.
    De plus, F est bien un sous-espace vectoriel donc F est un sous espace vectoriel de E.
  - On a $G \subset E$.
    - La fonction nulle appartient à G donc G est non vide.
    - Soient $f, g \in G$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
      On a $(\lambda f + \mu g)(0) = \lambda f(0) + \mu g(0) = 0$ car $f, g \in G$.
      De même, $(\lambda f + \mu g)'(0) = \lambda f'(0) + \mu g'(0) = 0$ car $f, g \in G$. Ainsi, $\lambda f + \mu g \in G$.

    Donc G est un sous-espace vectoriel de E.
- Soit $h \in E$.
  Montrons par analyse-synthèse qu'il existe un unique $(f,g) \in F \times G$ tel que $h = f + g$.
  Analyse : supposons qu'il existe $(f,g) \in F \times G$ tel que $h = f + g$. Comme $f \in \text{Vect}\,(\text{ch}\,,\text{sh}\,)$, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $f = a\text{ch}\, + b\text{sh}\,$.
  On a alors : $h(0) = f(0) + g(0) = a$ car $g(0) = 0$.
  De plus, $h'(0) = f'(0) + g'(0) = a\text{sh}\,(0) + b\text{ch}\,(0) = b$ car $g'(0) = 0$. Par suite $g = h - f$. Ainsi, si une telle décomposition existe, on a l'unicité.
  Synthèse : Posons $a = h(0)$, $b = h'(0)$, $f = a\text{ch}\, + b\text{sh}\,$ et $g = h - f$.
  On a : $h = f + g$, $f \in F$. De plus, $g(0) = h(0) - f(0) = h(0) - a = 0$ et $g'(0) = h'(0) - f'(0) = h'(0) - b = 0$

donc $h \in G$.
Ainsi, g et h conviennent.
Ainsi, pour tout $h \in E$, il existe un unique $(f, g) \in F \times G$ tel que $h = f + g$.
Donc $F \oplus G = E$.

2. • Commençons par justifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
On a clairement F sous-espace vectoriel de E.
On a $G \subset E$.
De plus, la fonction nulle appartient à G donc G est non vide.
Soient $f, g \in G$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
on a $(\lambda f + \mu g)(-1) = \lambda f(-1) + \mu g(-1) = 0$ car $f, g \in G$.
Ainsi, $\lambda f + \mu g \in G$ donc G est un sous-espace vectoriel de E.

• Soit $h \in E$.
Montrons par analyse-synthèse qu'il existe un unique $(f, g) \in F \times G$ tel que $h = f + g$.
Analyse : supposons qu'il existe $(f, g) \in F \times G$ tel que $h = f + g$. Comme $f \in \mathrm{Vect}\,(\exp)$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f = a \exp$.
On a alors : $h(-1) = f(-1) + g(-1) = ae^{-1}$ car $g \in G$. D'où $a = eh(-1)$.
Synthèse : posons $a = eh(-1)$, $f = a \exp$ et $g = h - f$.
On a alors $h = f + g$ et $f \in F$.
De plus, $g(-1) = h(-1) - f(-1) = h(-1) - ae^{-1} = h(-1) - h(-1) = 0$. Donc $g \in G$. Ainsi, g et h conviennent.
Ainsi, pour tout $h \in E$, il existe un unique $(f, g) \in F \times G$ tel que $h = f + g$. Donc : $E = F \oplus G$.

Exercice 18. • Soit $x \in A \cap C$, alors on a $x \in C \subset B$, donc $x \in (A \cap B) \cap C$. Or, $A \cap B$ et C sont supplémentaires dans B donc $(A \cap B) \cap C = \{0\}$. Ainsi, $x = 0$.
Donc $A \cap C \subset \{0\}$. D'où $A \cap C = \{0\}$.

• On sait déjà que $A \subset A + B$ et $C \subset B \subset A + B$. Ainsi, $A + C \subset A + B$.
Soit $x \in A + B$. Il existe $(a, b) \in A \times B$ tel que $x = a + b$. De plus, $B = (A \cap B) \oplus C$. Ainsi, il existe $(a_1, c) \in (A \cap B) \times C$ tel que $b = a_1 + c$.
Ainsi, $x = (a + a_1) + c$. Or, $a + a_1 \in A$ car A est un sous-espace vectoriel de E. Donc $x \in A + C$. D'où $A + C \subset A + B$.
Donc $A + C = A + B$.

On a donc prouvé que $A + B = A \oplus C$.

2 Familles finies de vecteurs

Exercice 19. 1. x_1 et x_2 ne sont pas colinéaires donc (x_1, x_2) est libre.

2. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$.
On a :

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0 \\
\iff & \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{array} \right. \\
\iff & \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 6\lambda_3 = 0 \end{array} \right. \\
\iff & \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ 6\lambda_3 = 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

La famille (x_1, x_2, x_3) est donc libre.

3. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0$.
On a :

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0 \\
\iff & \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

On a un système linéaire homogène à 3 équations et 4 inconnues donc il admet une infinité de solutions donc au moins une non nulle.
Ainsi, il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{(0,0,0,0)\}$ tel que $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0$.
Ainsi, la famille (x_1, x_2, x_3, x_4) est liée. **Remarque :** En utilisant le chapitre suivant, on pourrait dire : (x_1, x_2, x_3, x_4) est une famille de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Or, $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$. Ainsi, cette famille est nécessairement liée.

Exercice 20. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda \cos + \mu \sin = 0$. Ceci se réécrit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) = 0$$

En évaluant en $x = 0$, on obtient : $\lambda = 0$.
En évaluant en $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient : $\mu = 0$.
Ainsi, la famille $(\sin, \cos)$ est donc libre.

Exercice 21.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ tel que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$.
On a donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_1 |x| + \lambda_2 |x-1| + \lambda_3 |x+1| = 0$.
En évaluant cette relation en 0,1,et -1, on obtient :

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Or,

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, la famille (f_1, f_2, f_3) est libre.

Exercice 22.

1. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$.
   Alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) = 0$.
   En évaluant en $0, \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{4}$, on obtient :

   $$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + \lambda_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

   Or,

   $$\begin{aligned} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + \lambda_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + \lambda_3 = 0 \end{cases} & \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + \lambda_3 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 \left(1 - \sqrt{2}\right) = 0 \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

   Ainsi, la famille (f_1, f_2, f_3) est libre.
2. On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.
   Ainsi : $2f_1 - f_2 - f_3 = 0$.
   Donc cette famille est liée.

3. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\displaystyle\sum_{k\in[\![1,n]\!]} \lambda_k \sin(2^k x) = 0$.

   On a alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \sin(2^k x) = 0$.

   En évaluant en $\dfrac{\pi}{4}$, on obtient $\lambda_1 = 0$.

   On a alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \lambda_k \sin(2^k x) = 0 \quad (*)$.

   En évaluant $(*)$ en $\dfrac{\pi}{8}$, on obtient alors $\lambda_2 = 0$.

   Par suite, par récurrence descendante, on obtient : $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ (en prenant successivement les valeurs en $\dfrac{\pi}{8}, \dots, \dfrac{\pi}{2^{n+1}}$.

   La famille $(f_1, ..., f_n)$ est donc libre.

4. Soit $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = 0$.

   Ainsi, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{\lambda_i x} = 0 \quad (1)$.

   On remarque tout d'abord que pour tout $\alpha < 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{\alpha x} = 0$.

   Multiplions (1) par $e^{-\lambda_n x}$.

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e^{(\lambda_i - \lambda_n)x} + \alpha_n = 0 \quad (2)$$

   Or, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $\lambda_i - \lambda_n < 0$. Ainsi, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{(\lambda_i-\lambda_n)x} = 0$.

   En passant à la limite dans (2), on obtient donc $\alpha_n = 0$.

   On a alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e^{\lambda_i x} = 0 \quad (3)$.

   Par récurrence descendante, on obtient : $\alpha_n = ... = \alpha_1 = 0$. Ainsi, la famille $(f_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est libre.

Exercice 23. Raisonnons par double implication.

- Supposons (a, b, c) libre.
  Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0$.
  Or, on a :

  $$\begin{aligned}
  & \lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0 \\
  \iff\ & \lambda_1(b+c) + \lambda_2(c+a) + \lambda_3(a+b) = 0 \\
  \iff\ & (\lambda_2+\lambda_3)a + (\lambda_1+\lambda_3)b + (\lambda_1+\lambda_2)c = 0 \\
  \iff\ & \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{car } (a,b,c) \text{ est libre} \\
  \iff\ & \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \\
  \iff\ & \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}
  \end{aligned}$$

  Ainsi, (u, v, w) est libre.

- Réciproquement, supposons (u, v, w) libre.
  - Exprimons (a, b, c) en fonction de (u, v, w).

$$
\begin{cases} b+c=u \\ a+c=v \\ a+b=w \end{cases}
$$

$$
\iff \begin{cases} a+b=w \\ -b+c=v-w \\ b+c=u \end{cases}
$$

$$
\iff \begin{cases} a+b=w \\ b-c=-v+w \\ c=\dfrac{1}{2}(u+v-w) \end{cases}
$$

$$
\iff \begin{cases} a=\dfrac{1}{2}(-u+v+w) \\ b=\dfrac{1}{2}(u-v+w) \\ c=\dfrac{1}{2}(u+v-w) \end{cases}
$$

- Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0$.
  Or, on a :

$$
\begin{aligned}
& \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0 \\
\iff & \lambda_1(-u+v+w) + \lambda_2(u-v+w) + \lambda_3(u+v-w) = 0 \\
\iff & (-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)u + (\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)v + (\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)w = 0 \text{ car } (u,v,w) \text{ est libre} \\
\iff & \begin{cases} -\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1-\lambda_2+\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1+\lambda_2-\lambda_3 = 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} \lambda_1-\lambda_2-\lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

  Ainsi, (a,b,c) est libre.

On a donc montré l'équivalence voulue.

Exercice 24. Résultat préliminaire :
Soit $(\alpha_j)_{j \in [\![1,n]\!]}$. On a :

$$
\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = 0 \\
\iff & \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (u + e_j) = 0 \\
\iff & \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right) + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j = 0 \\
\iff & \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \right) e_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j = 0 \\
\iff & \sum_{j=1}^{n} \left(\lambda_j \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right) e_j + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j = 0 \\
\iff & \sum_{j=1}^{n} \left(\lambda_j \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right) + \alpha_j \right) e_j = 0 \\
\iff & \forall j \in [\![1,n]\!],\ \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right) + \alpha_j = 0 \quad (*)
\end{aligned}
$$

Raisonnons par double implication.

- Montrons que si $(v_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ est liée alors $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\lambda_j=-1$.

  On raisonne par contraposée.
  Supposons que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\neq -1$.
  Montrons que $(v_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ est libre.
  Soit $(\alpha_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ telle que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\alpha_j v_j=0$.
  D'après l'équivalence montrée en préliminaire, on a : $\forall j\in[\![1,n]\!],\ \lambda_j\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)+\alpha_j=0$.
  Ainsi, en sommant pour j allant de 1 à n, on obtient : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(\lambda_j\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)+\alpha_j\right)=0$.
  Donc $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\left(1+\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\right)=0$. Or, par hypothèse, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\neq-1$ donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=0$.
  En réinjectant dans $(*)$, on obtient que : $\forall j\in[\![1,n]\!],\ \alpha_j=0$.
  Donc $(v_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ est libre.
  Ainsi, par contraposée, si $(v_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ est liée alors $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\lambda_i=-1$.

- Supposons désormais que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\lambda_j=-1$.

  Réflexion :
  On souhaite construire une famille $(\alpha_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ de scalaires non tous nuls telle que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\alpha_j v_j=0$.
  Pour ce faire, il suffit de construire une famille $(\alpha_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ de scalaires non tous nuls telle que :
  $\forall j\in[\![1,n]\!],\ \lambda_j\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)+\alpha_j=0\quad(**)$.
  Pour satisfaire $(**)$, il faut qu'il existe $C\in\mathbb{R}$ telle que : $\forall j\in[\![1,n]\!],\ \alpha_j=C\lambda_j$. Cherchons les constantes C qui conviennent.
  On cherche $C\neq0$ car on souhaite obtenir une famille $(\alpha_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ de scalaires non tous nuls.
  De plus,

$$\begin{aligned}
&\forall j\in[\![1,n]\!],\ \lambda_j\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)+\alpha_j=0\\
\iff\ &\forall j\in[\![1,n]\!],\ \lambda_j\left(\sum_{i=1}^{n}C\lambda_i\right)+C\lambda_j=0\\
\iff\ &\forall j\in[\![1,n]\!],\ C\lambda_j\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)+C\lambda_j=0\\
\iff\ &\forall j\in[\![1,n]\!],\ -C\lambda_j+C\lambda_j=0\\
\iff\ &0=0
\end{aligned}$$

  Ainsi, toutes les constantes conviennent.
  On peut par exemple prendre $C=1$.
  Rédaction :
  Pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, on pose $\alpha_j=\lambda_j$.
  Soit $j\in[\![1,n]\!]$, on a : $\lambda_j\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)+\lambda_j=-\lambda_j+\lambda_j=0$ par hypothèse sur $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\lambda_j$.
  Ainsi :

$$\forall j\in[\![1,n]\!],\ \lambda_j\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)+\alpha_j=0.$$

Donc d'après l'équivalence du préliminaire, on a :

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = 0.$$

De plus, la famille $(\alpha_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ est une famille de scalaire non tous nuls car $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = -1$.

Ainsi, la famille $(v_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ est liée.

Par double implication, on a donc prouvé que $(v_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ est liée si et seulement si $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = -1$.

Exercice 25. 1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
On a :

$$\begin{aligned}
& (x,y,z) = a(1,2,3) + b(1,1,0) + c(0,1,1) + d(3,2,1) \\
\iff & \begin{cases} a + b + 3d = x \\ 2a + b + c + 2d = y \\ 3a + c + d = z \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} a + b + 3d = x \\ -b + c - 4d = y - 2x \\ -3b + c - 8d = z - 3x \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} a + b + 3d = x \\ -b + c - 4d = y - 2x \\ -2c + 4d = z - 3y + 3x \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} a = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z - d \\ b = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z - 2d \\ c = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}z + 2d \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 = a(1, 2, 3)+b(1, 1, 0)+c(0, 1, 1)+d(3, 2, 1)$.
Ainsi, cette famille est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

2. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $a(1, 2, 3) + b(1, 1, 0) + c(0, 1, 1) + d(3, 2, 1) = (0, 0, 0)$.
En reprenant les équivalences précédentes avec $x = y = z = 0$, on obtient :

$$a(1,2,3) + b(1,1,0) + c(0,1,1) + d(3,2,1) = (0,0,0) \iff \begin{cases} a = -d \\ b = -2d \\ c = 2d \end{cases}$$

Ainsi, en prenant $d = 1$, on a : $-(1, 2, 3) - 2(1, 1, 0) + 2(0, 1, 1) + (3, 2, 1) = (0, 0, 0)$.
Ainsi, cette famille est liée.

Exercice 26.

-
$$\begin{aligned}
E &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x - y + z = 0\} \\
&= \{(x, y, y - 2x), x, y \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x(1,0,-2) + y(0,1,1), x, y \in \mathbb{R}\} \\
&= \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2)
\end{aligned}$$

  où $e_1 = (1, 0, -2)$ et $e_2 = (0, 1, 1)$.
  Ainsi, E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- De plus, la famille (e_1, e_2) est une famille génératrice de E.
- Enfin, e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires donc (e_1, e_2) est libre.
- La famille (e_1, e_2) constitue donc une base de E.

Exercice 27. •

$$\begin{aligned}
E &= \{P \in \mathbb{C}_4[X],\ P(a)=0, P(b)=0\} \\
&= \{P \in \mathbb{C}_4[X],\ (X-a)(X-b) \mid P\} \\
&= \{P \in \mathbb{C}_4[X],\ \exists Q \in \mathbb{C}_2[X], P=(X-a)(X-b)Q\} \quad \deg(Q) \leq 2 \text{ car } \deg(P) \leq 4 \\
&= \{P \in \mathbb{C}_4[X],\ \exists (a_0,a_1,a_2) \in \mathbb{C}^3,\ P=(X-a)(X-b)(a_2X^2+a_1X+a_0)\} \\
&= \{P \in \mathbb{C}_4[X],\ \exists (a_0,a_1,a_2) \in \mathbb{C}^3,\ P=a_0(X-a)(X-b)+a_1(X-a)(X-b)X+a_2(X-a)(X-b)X^2\} \\
&= \{a_0(X-a)(X-b)+a_1(X-a)(X-b)X+a_2(X-a)(X-b)X^2,\ a_0,a_1,a_2 \in \mathbb{C}\} \\
&= \mathrm{Vect}\left((X-a)(X-b),(X-a)(X-b)X,(X-a)(X-b)X^2\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, la famille $((X-a)(X-b),(X-a)(X-b)X,(X-a)(X-b)X^2)$ est génératrice de E.
De plus, cette famille est une famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés. Elle est donc libre.
Ainsi, $((X-a)(X-b),(X-a)(X-b)X,(X-a)(X-b)X^2)$ constitue une base de E.

Exercice 28. 1. Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. Soient $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4 \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
&\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3+\lambda_4e_4=(x,y,z,t) \\
\iff &\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=x \\ \lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3-\lambda_4=y \\ 2\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3+\lambda_4=z \\ 2\lambda_1+\lambda_2+4\lambda_3+\lambda_4=t \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=x \\ \lambda_3-2\lambda_4=y-x \\ -\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4=z-2x \\ -\lambda_2+2\lambda_3-\lambda_4=t-2x \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=x \\ \lambda_2-\lambda_3+\lambda_4=2x-z \\ \lambda_3-2\lambda_4=y-x \\ \lambda_3=t-z \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=x \\ \lambda_2-\lambda_3+\lambda_4=2x-z \\ \lambda_3=t-z \\ \lambda_4=\dfrac{-1}{2}(y-x-t+z) \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, il existe un unique $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que $(x,y,z,t)=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3+\lambda_4e_4$.
Ainsi, (e_1,e_2,e_3,e_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.
Remarque :
En utilisant le chapitre suivant, il suffit en fait de montrer que (e_1,e_2,e_3,e_4) est une famille libre. En effet, on a alors une famille libre de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^4$ de dimension 4. Il s'agit donc d'une base de $\mathbb{R}^4$.

2. En reprenant l'équivalence précédente avec $x=4$, $y=3$, $z=2$, $t=1$, on obtient : $\lambda_4=0$, $\lambda_3=-1$, $\lambda_2=5$ et $\lambda_1=0$. Ainsi, $(4,3,2,1)=5e_2-e_3$.
Ainsi les coordonnées de $(4,3,2,1)$ dans la base (e_1,e_2,e_3,e_4) sont $(0,5,-1,0)$.

Exercice 29. Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, on note : $\mathcal{P}(i)$: « $e_i \in \mathrm{Vect}(f_1,\dots,f_i)$ »
Montrons par récurrence forte que pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $\mathcal{P}(i)$ est vraie.

- Pour $i=1$. Par hypothèse, $f_1 \in \mathrm{Vect}(e_1)$. Donc, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f_1=\lambda e_1$.
  Si $\lambda=0$ alors $f_1=0$. Absurde car la famille (f_1) est libre.
  Ainsi, $\lambda \neq 0$. Donc $e_1=\dfrac{1}{\lambda}f_1 \in \mathrm{Vect}(f_1)$. Ainsi, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Soit $i \in [\![1,p-1]\!]$. Supposons que pour tout $k \in [\![1,i]\!]$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie.
  D'après l'hypothèse de récurrence, on sait déjà que pour tout $k \in [\![1,i]\!]$, $e_i \in \mathrm{Vect}(f_1,\dots,f_i)$.
  Ainsi, pour tout $k \in [\![1,i]\!]$, il existe $(\alpha_1^k,\dots,\alpha_i^k) \in \mathbb{R}^k$ tel que :

$$e_k=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j^kf_j$$

De plus, par hypothèse, $f_{i+1} \in \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_{i+1})$. Ainsi, il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_{i+1}) \in \mathbb{R}^{i+1}$ tel que

$$f_{i+1} = \sum_{n=1}^{i+1} \lambda_n e_n$$

D'où $\lambda_{i+1} e_{i+1} = f_{i+1} - \sum_{n=1}^{i} \lambda_n \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^n f_j$.

Supposons $\lambda_{i+1} = 0$. Alors, $f_{i+1} = \sum_{n=1}^{i} \lambda_n \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^n f_j$. Absurde. En effet, on a $f_{i+1} \in \mathrm{Vect}\,(f_1, ..., f_i)$ ce qui contredit le caractère libre de la famille $(f_j)_{j \in [\![1, i+1]\!]}$ (en tant que sous famille de la famille libre $(f_j)_{j \in [\![1,p]\!]}$).

Donc $\lambda_{i+1} \neq 0$, alors, $e_{i+1} = \dfrac{1}{\lambda_{i+1}} \left(f_{i+1} - \sum_{n=1}^{i} \lambda_n \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^n f_j \right) \in \mathrm{Vect}\,(f_1, ..., f_{i+1})$.

Donc $\mathcal{P}(i+1)$ est vraie.

- On a donc bien prouvé que : $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $e_i \in \mathrm{Vect}\,(f_1, \ldots, f_i)$.