Devoir libre n°1

à rendre le 04 novembre 2019

$\diamond$ Le candidat peut admettre le résultat d'une question et l'utiliser dans la suite à condition de l'écrire clairement sur sa copie.

$\diamond$ Si le candidat repère ce qu'il croit être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Problème 1

Dans ce problème les parties II, III et IV sont indépendantes entre elles mais dépendent toutes de la première partie.

Partie I : La fonction de Lambert

Soit f la fonction définie par

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^x \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Donner une expression de la dérivée de f sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f admet une limite en $-\infty$ et en $+\infty$. On donnera une valeur à ces limites.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Montrer que f est bijective de $]-\infty, -1]$ sur un intervalle J_0 qu'on déterminera.
6. Montrer que f est bijective de $[-1, +\infty[$ sur un intervalle J qu'on déterminera.
   Dans la suite, on note Ω la fonction réciproque de $f :]-\infty, -1] \to J_0$ et l'on note aussi W la fonction réciproque de $f : [-1, +\infty[\to J$.
7. Montrer que $W(e) = 1$.
8. Montrer que
$$\forall a \in \mathbb{R}, (0 < a < e) \Rightarrow \left(W\left(\frac{-\ln(a)}{a} \right) = -\ln(a) \right).$$
9. Montrer que
$$\forall a > e, \quad W(a \ln(a)) = \ln(a).$$

Partie II : Résolution d'une équation

On définit l'équation réelle en t

$$(E) : 2^t = 5t.$$

En admettant que $\frac{\ln(2)}{5} < \frac{1}{e}$, déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E). On exprimera t en fonction de W et de Ω.

Partie III : Théorème général

Soit $(a, b, w) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$. Soit $c \in \mathbb{R}$. On s'intéresse à l'équation réelle en x

$$ae^{wx} + bx + c = 0.$$

On note $\Delta = \frac{aw}{b} e^{\frac{-cw}{b}}$.

1. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (ae^{wx} + bx + c = 0) \Leftrightarrow \left((-wx - \frac{cw}{b}) e^{-wx - \frac{cw}{b}} = \Delta \right).$$
2. Dans cette question uniquement, on suppose que $\Delta \geq 0$. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (ae^{wx} + bx + c = 0) \Leftrightarrow \left(x = -\frac{W(\Delta)}{w} - \frac{c}{b} \right).$$
3. Dans cette question uniquement, on suppose que $\Delta \in \left[\frac{-1}{e}, 0 \right[$. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (ae^{wx} + bx + c = 0) \Leftrightarrow \left(x = -\frac{W(\Delta)}{w} - \frac{c}{b} \right) \text{ ou } \left(x = -\frac{\Omega(\Delta)}{w} - \frac{c}{b} \right).$$
4. Dans cette question uniquement, on suppose que $\Delta < \frac{-1}{e}$. Montrer que l'équation en x
$$ae^{wx} + bx + c = 0,$$
   n'admet pas de solution réelle.

Partie IV : Tétration infinie

Dans cette partie on fixe un nombre réel $x > 0$. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par l'expression

$$\begin{cases} T_0 = x \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+1} = x^{T_n}. \end{cases}$$

Soit g la fonction réelle définie par l'expression

$$g(t) = x^t,$$

pour tout nombre réel t.

1. Montrer que $T_0 \leq T_1$.
2. En étudiant la fonction h définie par l'expression $h(t) = t^{1/t}$ pour tout nombre réel $t > 0$, montrer que

$$\forall l \in \mathbb{R}, \quad \left(\lim_{n\to+\infty} T_n = l\right) \Rightarrow \left(x \in]0, e^{1/e}]\right)$$

On suppose dans la suite que $x \in \left]0, e^{\frac{1}{e}}\right]$.

3. Dans le cas où $x = 1$. Montrer que : $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner la limite.
4. Dans cette question on se place dans le cas où $x > 1$.
   (a) Étudier la fonction g sur $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.
   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n < e$.
   (d) En déduire que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente.
5. Dans cette question on suppose que $x < 1$.
   (a) Étudier la fonction g pour montrer que $g(t) \in [0, 1]$ quelquesoit $t \in [0, 1]$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n \in [0, 1]$.
   (c) Montrer que $T_0 \leq T_2$.
   (d) Montrer que $T_1 \geq T_3$.
   (e) Montrer que $(T_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et que $(T_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.
   (f) En déduire que les suites $(T_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.
   (g) En notant $l_0 = \lim\limits_{n\to+\infty} T_{2n}$ et $l_1 = \lim\limits_{n\to+\infty} T_{2n+1}$, montrer que $l_0^{l_0} = l_1^{l_1}$.

   On admet que dans ce cas, on a

$$\begin{cases} l_0 = l_1 \\ x \geq \frac{1}{e^e} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} l_0 \neq l_1 \\ x < \frac{1}{e^e} \end{cases}$$

On ne fait plus aucune hypothèse sur le nombre réel $x > 0$.

6. Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente si et seulement si $x \in \left[e^{-e}, e^{\frac{1}{e}}\right]$.
7. Montrer que pour tout $x \in \left[e^{-e}, e^{\frac{1}{e}}\right]$,

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = -\frac{W(-\ln(x))}{\ln(x)}.$$

FIN.