Chapitre 26 : Séries numériques

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et les suites considérées seront à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1 Généralités

1.1 Convergence-divergence

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

- On appelle série de terme général u_n, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.
  On la note $\sum u_n$ ou $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ ou encore $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, u_n est appelé terme général de la série et S_n est appelée somme partielle d'ordre n.
- On dit que la série $\sum u_n$ converge si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie dans $\mathbb{K}$. Sa limite est alors appelée somme de la série et notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$. On a ainsi $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.
- On dit que la série diverge si elle ne converge pas.

Remarque :

- Ne pas confondre la série $\sum u_n$, qui peut converger ou diverger, et la valeur de la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ dans le cas de convergence.
- ⚠ Attention, la notation $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est réservée aux séries convergentes.
- Déterminer la nature d'une série, c'est déterminer si elle converge ou diverge. En particulier, deux séries sont dites de même nature si elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.
- Si la suite (u_n) est définie seulement à partir d'un certain rang n_0, on définit les sommes partielles à partir du rang n_0 par :
$$\forall n \geq n_0,\ S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$
  et la série sera notée $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$. Lorsqu'il y a convergence, la somme est notée $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

Remarque : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$.
Les séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ sont de même nature.

En effet. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$. Alors, on a : $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \sum\limits_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$. Ainsi, $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k\right)_{n\geq n_0}$ sont de même nature. Si ces séries convergent, on a alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n=0}^{n_0-1} u_n + \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

Définition

Soit $\sum u_n$ une série convergente. On note : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle reste d'ordre n de cette série, l'élément de $\mathbb{K}$ défini par :
$$R_n = S - S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Remarque : Tous les termes ont bien un sens. En effet, soit $n \in \mathbb{N}$, comme la série $\sum\limits_{u_n}$ est convergente, $\left(\sum\limits_{k=0}^{N} u_k\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est convergente et a pour limite S et $\left(\sum\limits_{k=n+1}^{N} u_k\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est convergente et a pour limite $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}$.
Or, on a :
$$\sum_{k=0}^{N} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{n}.$$

Chaque membre admet une limite quand N tend vers $+\infty$, en passant à la limite, on obtient :

$$S = \sum_{k=0}^{n} u_k + R_n.$$

Ainsi, $R_n = S - S_n$.

Proposition

Soit $\sum u_n$ une série convergente. Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$.

Démonstration. On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $R_n = S - S_n$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} (S_n - S) = 0$. □

Proposition

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries.

- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, la série $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \quad \text{(linéarité de la somme).}$$

- Si $\sum u_n$ est convergente et $\sum v_n$ est divergente, alors $\sum(u_n + v_n)$ est une série divergente.

Démonstration.

- Supposons $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergentes. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=0}^{n} u_k + \mu \sum_{k=0}^{n} v_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \mu \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

par opérations sur les limites. Ainsi, la série $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et sa somme vaut $\lambda \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k + \mu \sum\limits_{k=0}^{+\infty} v_k$.

- Supposons $\sum u_n$ convergente et $\sum v_n$ divergente.
Raisonnons par l'absurde. Supposons que $\sum(u_n + v_n)$ converge alors $\sum(u_n + v_n - u_n)$ converge donc $\sum v_n$ converge. Absurde. Ainsi, $\sum(u_n + v_n)$ diverge.

□

Remarque :

- Ainsi l'ensemble E des séries convergentes est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
- L'application $\begin{array}{rccc} S: & E & \to & \mathbb{K} \\ & \sum u_n & \mapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n \end{array}$ est une forme linéaire.

Proposition

Soit $\sum u_n$ une série à termes complexes.
La série $\sum u_n$ converge si et seulement si les séries $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ convergent dans $\mathbb{R}$.
Dans ce cas, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(u_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u_n)$$

Démonstration. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$. On a alors : $\mathrm{Re}(S_n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{Re}(u_k)$ et $\mathrm{Im}(S_n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{Im}(u_k)$. Or, (S_n) converge si et seulement si $(\mathrm{Re}(S_n))$ et $\mathrm{Im}(S_n)$ converge.
Dans le cas de la convergence, on a alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(S_n) + i \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(S_n)$ ce qui donne le résultat voulu. □

1.2 Relations suites/séries

Proposition Condition nécessaire de convergence

Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Démonstration. Notons $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de $\sum u_n$. Cette suite converge puisque la série converge. Notons S sa limite. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = S_n - S_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S - S = 0$. □

Définition

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors la série associée ne converge pas : on dit qu'elle diverge grossièrement.

Exemple : La série $\sum(-1)^n$ diverge grossièrement.
Remarque : ⚠ La convergence vers 0 du terme général est une condition nécessaire mais non suffisante de convergence.
Exemple : La série $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n}$, appelée série harmonique n'est pas grossièrement divergente mais diverge.

Raisonnons par l'absurde. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ et supposons que la série harmonique converge. Alors, la suite (H_n) converge vers une limite finie H. Ainsi, la suite $(H_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers H donc la suite $(H_{2n} - H_n)$ converge vers 0. Or, on a la minoration suivante :

$$\forall n \geq 1,\ H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

En passant à la limite, on aurait $0 \geq \frac{1}{2}$. Absurde.

Proposition : Séries géométriques

Soit $q \in \mathbb{C}$. $\sum q^n$, appelée série géométrique de raison q, converge si et seulement si $|q| < 1$.

Lorsque la série est convergente, on a alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Démonstration.
- Si $|q| \geq 1$, alors $|q^n| \geq 1$ et la suite (q^n) ne converge pas vers 0, donc la série diverge grossièrement.
- Si $|q| < 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0$. Ainsi, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite vaut $\frac{1}{1-q}$.

□

Remarque : Supposons $|q| < 1$. On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ et $R_n = \frac{q^{n+1}}{1-q}$.

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\sum(u_{n+1} - u_n)$, appelée série télescopique, converge. On a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1} - u_n) = \left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) - u_0$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $\sum\limits_{k=0}^{n}(u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0$ par télescopage. On obtient immédiatement le résultat annoncé.

□

2 Séries à termes positifs

Dans cette section, on ne considère que des séries $\sum u_n$ à termes positifs, c'est à dire telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

Proposition Convergence d'une série à termes positifs

Soit $\sum u_n$ une série à terme positifs .

- $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée soit :

$$\sum u_n \text{ converge } \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k \leq M.$$

- Si la série $\sum u_n$ diverge, alors on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty$.

Démonstration. Notons $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de $\sum u_n$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$, donc $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Par le théorème de la limite monotone, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée et si (S_n) diverge alors, $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$. □

2.1 Comparaison série-intégrale dans le cas monotone

Lemme

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ continue et décroissante. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n)$$

$$\forall n \geq 1, \quad \int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)dt$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [n, n+1]$, $f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$, par décroissance de f. Ainsi, en intégrant, on obtient :

$$f(n+1) = \int_n^{n+1} f(n+1)dt \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq \int_n^{n+1} f(n)dt = f(n).$$

Soit $n \geq 1$. A l'aide de l'inégalité précédente, on obtient :

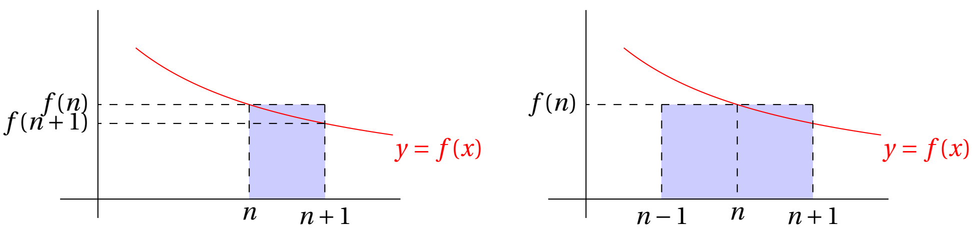
$$\int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)dt$$

l'inégalité de gauche s'obtient directement et l'inégalité de droite s'obtient à l'aide de l'inégalité précédente appliquée à $n-1 \in \mathbb{N}$. □

Remarque : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il est important de savoir retrouver les encadrements :

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n) \qquad \text{et} \qquad \int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)dt$$

pour une fonction continue et décroissante. On les retrouve en interprétant les intégrales comme des aires.



Proposition Comparaison série-intégrale

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ continue et décroissante.
On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{k=0}^{n} f(k) \leq f(0) + \int_0^n f(t)dt.$$

En particulier : $\left(\int_0^n f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\sum f(n)$ converge.

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après le lemme précédent, on a :

$$f(k+1) \underset{(1)}{\leq} \int_k^{k+1} f(t)dt \underset{(2)}{\leq} f(k)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En sommant (2) pour k variant de 0 à n, on obtient, par la relation de Chasles, :

$$\int_0^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{k=0}^{n} f(k).$$

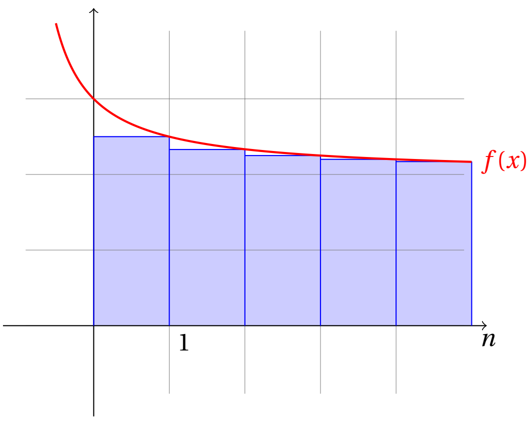
De plus, $\sum_{k=0}^{n} f(k) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} f(k) = f(0) + \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1)$. En sommant (1) pour k variant de 0 à $n-1$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) \leq \int_0^n f(t)dt.$$

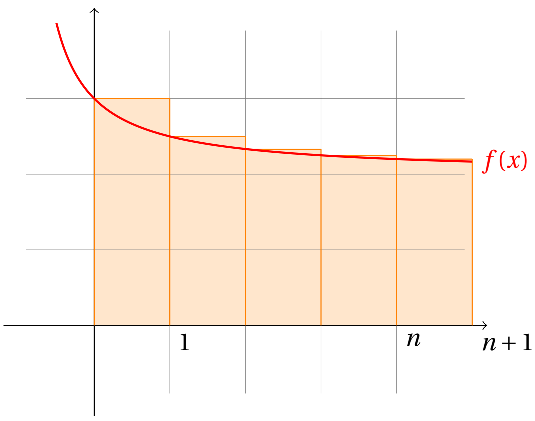
Finalement,

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = f(0) + \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) \leq f(0) + \int_0^n f(t)dt.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $v_n = \int_0^n f(t)dt$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} f(k)$. On a ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} \leq S_n \leq f(0) + v_n$.
Supposons (v_n) convergente. Alors, (v_n) est majorée par un réel $M > 0$ donc (S_n) est majorée par $f(0) + M$. Ainsi, (S_n) et donc $\sum f(n)$ converge car la série est à termes positifs.
Réciproquement, si $\sum f(n)$ converge alors $\left(\sum_{k=0}^{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Donc cette suite est bornée. Ainsi, il existe $M > 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} \leq \sum_{k=0}^{n} f(k) \leq M$. Ainsi, (v_n) est majorée. Or, (v_n) est une suite croissante. En effet : soit $n \in \mathbb{N}$. $v_{n+1} - v_n = \int_n^{n+1} f(t)dt \geq 0$ car f est positive et par positivité de l'intégrale. Ainsi, d'après le théorème de la limite monotone, (v_n) converge.



$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_0^n f(t)dt$$



$$\sum_{k=0}^{n} f(k) \geq \int_0^{n+1} f(t)dt$$

$\square$

Remarque :

- Plus généralement : Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ continue et décroissante :

$$\forall n \geq n_0,\ \int_{n_0}^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \leq f(n_0) + \int_{n_0}^{n} f(t)dt.$$

- Si f est croissante, on a les inégalités dans le sens contraire.

Proposition Critère de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration. Si $\alpha \leq 0$, $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers 0, donc on a divergence grossière.
Supposons donc $\alpha > 0$, alors $f : t \mapsto t^{-\alpha}$ est continue, positive, décroissante sur $[1, +\infty[$. Par comparaison série-intégrale, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_1^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq f(1) + \int_1^n f(t)dt.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

- Si $\alpha > 1$, on a donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \int_1^n f(t)dt = 1 + \left[\frac{1}{-\alpha+1} t^{1-\alpha}\right]_1^n = 1 + \frac{1 - n^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \leq 1 + \frac{1}{\alpha - 1} = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

  donc la suite des sommes partielles de $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ sont majorées. La série étant à termes positifs, elle converge.

- Si $\alpha = 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \int_1^{n+1} f(t)dt = \ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

  donc la série diverge.

- Si $0 < \alpha < 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \geq \int_1^{n+1} f(t)dt = \left[\frac{1}{-\alpha+1} t^{1-\alpha}\right]_1^{n+1} = \frac{(n+1)^{1-\alpha} - 1}{1 - \alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

  donc la série diverge.

□

Méthode

En cas de divergence, la comparaison série/intégrale permet souvent d'obtenir un équivalent de la suite des sommes partielles.
En cas de convergence, la méthode précédente permet souvent d'obtenir un équivalent de la suite des restes.

2.2 Critère de comparaison

Proposition

Si (u_n) et (v_n) sont positives et si, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$ alors :

- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
- Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par sommation des inégalités pour $k \in [\![0, n]\!]$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k \qquad (*)$$

- Si $\sum v_n$ converge. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k \leq \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} v_k}_{\text{constante}} .$$

Donc, $\left(\sum_{k=0}^{n} u_n\right)$ est majorée, donc $\sum u_n$ converge. On obtient de plus en passant à la limite dans les inégalités :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

- Par contraposée du premier point, on a les résultat.

□

Remarque : Plus généralement, s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$, on a :

- Si $\sum_{n \geq n_0} v_n$ converge alors $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge et $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$
- Si $\sum_{n \geq n_0} u_n$ diverge alors $\sum_{n \geq n_0} v_n$ diverge

Corollaire

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. Si $u_n = O(v_n)$ (C'est en particulier le cas si $u_n = o(v_n)$). Alors :

- Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

Démonstration. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telle que $u_n = O(v_n)$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $v_n \neq 0$. Il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n| \leq M|v_n|$. Puisque (u_n) et (v_n) sont à termes positifs, on a donc pour tout $n \geq n_0$ $u_n \leq M v_n$.
Le théorème précédent permet alors de conclure. □

Exemple : Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n 2^n}$ est une série convergente.

Comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$, on a $\frac{\ln n}{n2^n} = o\left(\frac{1}{2^n}\right)$ donc $\frac{\ln n}{n2^n} = O\left(\frac{1}{2^n}\right)$. Or, la série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ converge donc la série de terme général $\frac{\ln n}{n2^n}$ converge.

Corollaire

Si (u_n) et (v_n) sont positives et si $u_n \equiv v_n$ alors la convergence de $\sum v_n$ est équivalente à celle de $\sum u_n$.
Autrement dit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Démonstration. Si $u_n \sim v_n$, on a en particulier : $u_n = O(v_n)$ (1) et $v_n = O(u_n)$ (2).

- Si $\sum v_n$ converge alors avec (1) $\sum u_n$ converge.
- Si $\sum u_n$ converge alors avec (2) $\sum v_n$ converge.

□

Remarque :

- ⚠ Le critère d'équivalence est faux si les termes généraux des séries ne sont pas de signe constant.
- Il est inutile de vérifier le caractère positif des termes généraux des deux séries. Vérifier la positivité de l'un des deux termes suffit puisque par équivalence, l'autre est aussi positif à partir d'un certain rang.

Comparaison aux séries de Riemann

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

- S'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $\lim_{n \to +\infty} n^\alpha u_n = 0$, alors $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ donc $\sum u_n$ converge
- S'il existe un réel $\alpha \leq 1$ tel que $\lim_{n \to +\infty} n^\alpha u_n = +\infty$ alors, $\frac{1}{n^\alpha} = o(u_n)$ donc $\sum u_n$ diverge.
- Sinon, on peut chercher un équivalent simple de u_n. S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $u_n \sim \frac{l}{n^\alpha}$, les séries $\sum u_n$ et $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ sont de même nature.

Remarque : Lorsque l'on cherche un équivalent simple de u_n, l'équivalent obtenu n'est pas toujours de la forme $\dfrac{l}{n^\alpha}$ (type Riemann). Si l'on obtient un équivalent sous forme géométrique q^n, on peut encore conclure.
Exemple : Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, étudier la convergence de $\sum e^{-n^2 x}$.
On a $n^2 e^{-n^2 x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée, donc $e^{-n^2 x} = o(\frac{1}{n^2})$. Par le critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum e^{-n^2 x}$ converge.

3 Séries absolument convergentes

Définition

On dit qu'une série $\sum u_n$ à termes réels ou complexes est absolument convergente si et seulement si $\sum |u_n|$ est convergente.

Remarque : Grâce à cette notion, on se ramène à l'étude d'une série à termes positifs pour laquelle on peut appliquer tous les résultats de la section précédente.

Théorème

Toute série absolument convergente est convergente.

Démonstration.
- Supposons tout d'abord que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
  Pour $n \in \mathbb{N}$, on note
  $$u_n^+ = \begin{cases} u_n & \text{si } u_n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad u_n^- = \begin{cases} -u_n & \text{si } u_n \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
  On a alors $u_n = u_n^+ - u_n^-$ et $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$, $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$ et $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$. Par le critère de comparaison des séries à termes positifs, comme $\sum |u_n|$ converge, $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent. Ainsi $\sum u_n = \sum (u_n^+ - u_n^-)$ converge.
  Remarque : cette preuve n'est pas valable pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ car u_n^+ et u_n^- ne sont pas définis.
- Supposons maintenant $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $|\mathrm{Re}(u_n)| \leq |u_n|$ et $|\mathrm{Im}(u_n)| \leq |u_n|$. Par le critère de comparaison des séries à termes positifs, comme $\sum |u_n|$ converge, $\sum |\mathrm{Re}(u_n)|$ et $\sum |\mathrm{Im}(u_n)|$ convergent. D'après le point précédent, $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ convergent. Ainsi $\sum u_n$ converge.

□

Remarque : On obtient ainsi, une condition suffisante de convergence. Cette condition n'est pas nécessaire. En effet, la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge mais non absolument convergente (cf exo 31 en TD).

Proposition Inégalité triangulaire

Si $\sum u_n$ converge absolument, alors $\left|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après l'inégalité triangulaire, on a
$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |u_k|$$
Comme les deux séries convergent (car $\sum u_n$ converge absolument donc converge), en passant cette inégalité à la limite, on a le résultat voulu. □

Proposition

Si (u_n) est une suite à valeurs complexes et si (v_n) est une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$, si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Démonstration. En effet supposons que $u_n = O(v_n)$, alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée donc $\left(\left|\dfrac{u_n}{v_n}\right|\right)$ est bornée. D'où $\left(\left|\dfrac{|u_n|}{v_n}\right|\right)$ est bornée car $v_n \geq 0$. Ainsi, $|u_n| = O(v_n)$ et la convergence de la série $\sum v_n$ entraîne la convergence absolue de la série $\sum u_n$ et donc sa convergence. □

Plan d'étude d'une série numérique

Pour étudier la nature d'une série $\sum u_n$ à termes quelconques, on vérifie, dans l'ordre :

- si son terme général tend vers 0.
- si elle est de signe constant, on applique les théorèmes de comparaison/domination/équivalence avec des séries de références (géométrique, Riemann)
- si la série converge absolument
- sinon, il faut employer des techniques plus fines.

4 Développement décimal d'un nombre réel

Proposition

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \in [\![0,9]\!]$, alors $\sum\limits_{n\geq 0} a_n 10^{-n}$ converge.

Démonstration. En effet : $\forall n \geq 1$, on a $0 \leq a_n 10^{-n} \leq 9\times 10^{-n}$. Comme $\sum(9\times 10^{-n})$ converge (c'est une série géométrique de raison $10^{-1} \in]0,1[$), $\sum a_n 10^{-n}$ converge par le critère de comparaison des séries à termes positifs. □

Exemple : On a $0,33333\cdots = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 3.10^{-n} = 3\frac{10^{-1}}{1-10^{-1}} = \frac{1}{3}$.

De même $0,9999\cdots = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 9.10^{-n} = 9\frac{10^{-1}}{1-10^{-1}} = 1 = 1.0000...$.

Il y a donc plusieurs manières d'écrire un nombre avec une infinité de chiffres derrière la virgule

Théorème Développement décimal propre

Soit $x\in\mathbb{R}$. Il existe une unique suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $a_n \in [\![0,9]\!]$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non stationnaire sur 9, telle que $x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n 10^{-n}$.

Cette unique écriture est appelée développement décimal propre de x.

Exemple : Ainsi, le développement décimale 0.999... de 1 sera dit impropre.

Remarque : Tout réel x peut s'écrire sous la forme $x = a + r$ avec $a\in\mathbb{Z}$ et $r\in[0,1[$. Il suffit de poser $a = \lfloor x\rfloor$ et $r = x - \lfloor x\rfloor$. On peut donc limiter l'étude aux réels appartenant à $[0,1[$.

Théorème

Soit $x\in\mathbb{R}$. x est rationnel si et seulement si son développement décimal propre est périodique à partir d'un certain rang.

Démonstration. Admis □