Feuille d'exercices 24 : Probabilités

1 Généralités

Exercice 1.
Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soient A et B des événements. On considère l'événement C :

C :"A ou B se réalise, mais pas les deux."

Déterminer $P(C)$.

Exercice 2.
On considère 6 dés non pipés de couleurs différentes (donc discernables). Quelle est la probabilité que toutes les faces donnent un chiffre différent ?

Exercice 3.
Dix paires de chaussures sont toutes rangées dans un placard. On prend au hasard 4 chaussures. Quelle est la probabilité :
1. d'obtenir deux paires de chaussures ?
2. d'obtenir au moins une paire de chaussures ?
3. d'obtenir une et une seule paire de chaussures ?

Exercice 4.
Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9. On tire deux boules de cette urne. Calculer la probabilité d'obtenir des numéros de la même parité dans les différents cas suivants :
1. on tire deux boules simultanément,
2. on tire une boule, on ne la remet pas, puis on tire la seconde,
3. on tire une boule, on la remet, puis on tire la seconde.

Exercice 5.
1. Une urne contient M jetons numérotés de 1 à M. On tire successivement n jetons en remettant chaque fois le jeton tiré et en brassant bien. On cherche la probabilité qu'aucun jeton ne soit tiré plus d'une fois.
2. On considère une classe de n élèves, avec $n \leq 365$. Quelle est la probabilité qu'au moins deux élèves aient leur anniversaire le même jour ? (On suppose qu'aucun élève n'est né le 29 février.)

Exercice 6.
Une urne contient 15 boules : une noire, 5 blanches et 9 rouges.
1. On tire simultanément et au hasard trois boules de cette urne. Calculer la probabilité des événements suivants :
   (a) A : « le tirage est tricolore »
   (b) B : « parmi les boules tirées figurent exactement une noire et au moins une rouge »
   (c) C : « les trois boules tirées sont de la même couleur. »
2. On suppose désormais que le tirage s'effectue successivement avec remise. Déterminer les probabilités des événements A, B et C définis ci-dessus.

Exercice 7.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.
1. On prélève en une fois une poignée aléatoire de p boules de l'urne ($p \in [\![0, n]\!]$).
   (a) Soit $k \in [\![p, n]\!]$. Calculer la probabilité de l'événement :

   A_k : "Le plus grand numéro de la poignée est k"

   (b) En déduire que :
   $$\sum_{k=p}^{n} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}.$$
2. On tire successivement et sans remise p boules de l'urne. Déterminer la probabilité pour que la $p^{\text{ième}}$ boule tirée ait un numéro supérieur aux $p-1$ numéros précédents.

2 Formules fondamentales

2.1 Formule des probabilités composées

Exercice 8. Une urne contient initialement 4 boules blanches et 2 boules noires. On tire une boule. On la remet dans l'urne avec une boule de la même couleur. On procède à un deuxième tirage.
Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires ?

Exercice 9. Une urne contient 4 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher. On tire 3 boules successivement sans remise. Déterminer la probabilité de N ≪ tirer une boule noire pour la première fois au troisième tirage ≫.

Exercice 10.
Un gardien d'un phare doit ouvrir une porte avec un trousseau de n clés, dont une et une seule convient. Il essaie au hasard les clés les unes après les autres.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
Calculer la probabilité que la porte s'ouvre à la k-ième tentative (et pas avant).

Exercice 11. Une expérience est conduite pour étudier la mémoire des rats. Un rat est mis devant trois couloirs. Au bout de l'un d'eux se trouve la nourriture qu'il aime, au bout des deux autres, il reçoit une décharge électrique. Cette expérience est répétée jusqu'à ce que le rat trouve le couloir avec la nourriture, auquel cas l'expérience s'arrête.
Sous chacune des hypothèses suivantes, déterminer la probabilité que la k-ième tentative soit la première réussie.
1. Le rat n'a aucun souvenir des expériences antérieures.
2. Le rat se souvient de l'expérience immédiatement précédente, mais pas des autres.
3. Le rat se souvient des deux expériences précédentes.

2.2 Formule des probabilités totales

Exercice 12.
Dans une usine, on fabrique des composants électroniques sur trois machines. Les machines M_1, M_2 et M_3 produisent respectivement 50%, 30% et 20% des composants.
Un qualiticien de l'usine estime que :

- 2% des composants fabriqués par la machine M_1 sont défectueux,
- 3% des composants fabriqués par la machine M_2 sont défectueux,
- 5% des composants fabriqués par la machine M_3 sont défectueux.

1. Quelle est la probabilité qu'un compsoant pris au hasard à la sortie de l'usine soit défectueux ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une pièce défectueuse et qui provient de M_1 ?
3. Un composant est défectueux. Quelle est la probabilité pour qu'il provienne de M_1 ?

Exercice 13. Le fonctionnement au cours du temps d'un appareil possédant une maintenance obéit aux règles suivantes :

- s'il fonctionne à la date $n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), il a la probabilité a de toujours fonctionner à la date n.
- s'il est en panne à la date $n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), il a la probabilité b d'être encore en panne à la date n

où (a, b) est un couple de réels de $]0, 1[$. On suppose que l'appareil est en état de marche à la date 0. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note M_n l'événement ≪ l'appareil est en état de marche à la date n ≫ et $p_n = P(M_n)$.
1. Déterminer p_n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer la limite de (p_n)

Exercice 14.
Deux urnes A et B contiennent respectivement 6 boules blanches et 5 noires d'une part, 4 blanches et 8 noires d'autre part. On transfère au hasard deux boules de l'urne B dans l'urne A puis on tire au hasard une boule dans l'urne A.
1. Déterminer la probabilité que la boule tirée soit blanche.
2. Déterminer la probabilité que l'une au moins des deux boules transférées soit blanche sachant que la boule tirée était blanche.

Exercice 15.
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.
Soit $r \in [\![2, n]\!]$.
On tire avec remise r boules dans cette urne.
1. On considère l'événement :

E_r :"Le numéro de la boule tirée au $r^{\text{ième}}$ tirage est inférieur ou égal à tous les précédents."

Déterminer la probabilité de E_r.
2. Donner la valeur de cette probabilité en fonction de n pour $r = 2$.
3. Déterminer :
$$\lim_{n\to+\infty} P(E_r)$$

Exercice 16.
Un mobile se déplace aléatoirement dans l'ensemble des sommets d'un triangle ABC de la façon suivante : si à l'instant n il est sur l'un quelconque des trois sommets, alors à l'instant $n+1$, soit il y reste avec une probabilité de $2/3$, soit il se place sur l'un des deux autres sommets, et ceci avec la même probabilité pour chacun de ces deux sommets.
Initialement (c'est-à-dire à l'instant 0), le mobile se trouve en A.
On définit, pour tout n de $\mathbb{N}$ les événements A_n (resp. B_n, C_n) :

"le mobile se trouve en A (resp. en B, en C) à l'instant n"

et les probabilités $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.
1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $a_n + b_n + c_n$.
2. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
3. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - b_n) \text{ et } a_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - c_n).$$
4. En déduire une expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Exercice 17.
On s'intéresse à la survie d'une espèce pour laquelle un individu admet 3 descendants avec la probabilité $\frac{1}{8}$, 2 descendant avec la probabilité $\frac{3}{8}$, 1 descendant avec la probabilité $\frac{3}{8}$ et aucun descendant avec la probabilité $\frac{1}{8}$, indépendamment de ses congénères.
A l'instant initial, on suppose que la population est composée d'un seul individu. Par conséquent, l'espèce s'éteindra au bout de la première génération avec une probabilité de $x_1 = \frac{1}{8}$.
1. Déterminer la probabilité x_2 pour que l'espèce ait disparu à l'issue de la deuxième génération.
2. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, x_n la probabilité que l'espèce ait disparu à l'issue de la n-ième génération. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_{n+1} = \frac{1}{8}x_n^3 + \frac{3}{8}x_n^2 + \frac{3}{8}x_n + \frac{1}{8}.$$
3. Etudier la suite (x_n) et montrer qu'elle converge vers $-2+\sqrt{5}$. Interpréter ce résultat.

Exercice 18. Un message doit être transmis d'un point à un autre à travers N canaux successifs. Ce message peut prendre deux valeurs 0 ou 1, et a une probabilité $p \in]0,1[$ d'être bruité, c'est-à-dire transformé en son contraire, durant le passage par un canal.

Pour $n \in [\![1, N]\!]$, on note I_n l'événement : « Après le passage par le n-ième canal, le message est le même que celui initialement transmis. » et $p_n = P(I_n)$.
1. Pour $n \in [\![1, N-1]\!]$, donner une expression de p_{n+1} en fonction de p_n.
2. En déduire l'expression de p_n, puis la limite de p_N quand $N \to +\infty$.

2.3 Formule de Bayes

Exercice 19.
Une maladie affecte une personne sur mille. On dispose d'un test qui détecte 99% des malades, et qui donne $0,2\%$ de faux positifs chez une personne saine. Une personne est contrôlée positive. Quelle est la probabilité qu'elle soit réellement malade ?

Exercice 20. Dans un jeu télévisé, trois portes sont fermées. Derrière l'une d'entre elles se trouve une voiture, derrière chacune des deux autres, un porte-clé. Le candidat choisit l'une des portes. Le présentateur, qui sait quelle pote cache la voiture, ouvre alors l'une des deux autres portes, derrière laquelle se trouve un porte-clé. Il propose alors au candidat de changer de porte. Que doit faire le candidat ?

Exercice 21.
Un joueur joue à pile ou face avec deux pièces équilibrées de la manière suivante : il lance simultanément ces deux pièces ; s'il n'obtient aucun pile, son gain est nul et la partie s'arrête. S'il obtient au moins un pile, il relance simultanément les deux pièces autant de fois qu'il a obtenu pile à la première phase du jeu et gagne autant d'unités que le nombre de piles obtenu lors de cette deuxième série de jets.
1. Déterminer la probabilité que son gain soit nul.
2. Déterminer la probabilité d'avoir obtenu deux piles au premier jet sachant qu'il a obtenu un seul pile à la seconde étape.

3 Indépendance

Exercice 22. On lance deux dés à 6 faces équilibrés. On considère les événements A « le premier dé donne un numéro pair » et B « le deuxième dé donne 3 ».
Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 23. Une personne va remplir une urne vide avec trois boules dont la couleur (noire ou blanche) est choisie au hasard. Pour cela, elle lance trois fois une pièce équilibrée, et, pour chaque pile obtenue, la personne met une boule blanche dans l'urne, et pour chaque face obtenue, une boule noire.

Une autre personne, qui ne connaît pas la couleur des boules dans l'urne tire, avec remise, n boules ($n \in \mathbb{N}^*$). On note B_i l'événement « La couleur de la i-ème boule tirée est blanche. »

1. Calculer $P(B_1)$, $P(B_2)$ et $P(B_1 \cap B_2)$. Les événements $B_1, \ldots, B_n$ sont-ils deux à deux indépendants ?
   On note B^n l'événement : « Les n boules tirées sont blanches. »
2. Exprimer B^n en fonction de $B_1, \ldots, B_n$ et calculer $P(B^n)$.
3. Lors des trois premiers tirages, on a obtenu 3 boules blanches. Quelle est la probabilité que l'une contienne 3 boules blanches ?
4. Lors des trois premiers tirages, on a obtenu 3 boules blanches. Quelle est la probabilité que la quatrième boule soit encore blanche ?

Exercice 24.
On lance deux fois de suite un dé à 6 faces équilibré. On définit les événements :

A :"le premier lancer donne un chiffre pair"
B :"le deuxième lancer donne un chiffre impair"
C :"l'un des lancer donne un chiffre pair, l'autre un chiffre impair"

1. Montrer que les événements A et B sont indépendants, que les événements A et C sont indépendants et que les événements B et C sont indépendants.
2. Les événements A,B et C sont-ils mutuellement indépendants ?

Exercice 25. On lance n fois une pièce truquée, où la probabilité d'obtenir pile est $\frac{1}{3}$. Quelle est la probabilité d'obtenir le premier face au n-ième lancer ?

Exercice 26.
Deux joueurs J_1 et J_2 jouent aux dés avec deux dés non truqués. J_1 gagne si la somme des dés donne 6 et J_2 gagne si la somme des dés vaut 7. Le jeu s'arrête dés que l'un des joueurs gagne.

1. Quelle est la probabilité pour que J_1 gagne au n-ième coup ?
2. Calculer la probabilité p_n pour que J_1 gagne en moins de n coups.
3. Calculer la probabilité q_n pour que J_2 gagne en moins de n coups.
4. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} p_n$ et $\lim_{n \to +\infty} q_n$. Interpréter.

Exercice 27.
Deux joueurs A et B lancent à tour de rôle un dé équilibré. Le jeu s'arrête dès qu'un joueur gagne avec sa stratégie : A gagne s'il obtient 1 ou 2, B gagne s'il obtient 3,4 ou 5. A commence.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les probabilités pour que A (resp. B) gagne au n-ième lancer.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les probabilités pour que A (resp. B) gagne en moins de n lancers.
   Interpréter les limites des probabilités obtenues.