Corrigé de la feuille d'exercices 26

Exercice 1. 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{R}$,la fonction exp est $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[0, x]$ donc d'après la formule de Taylor avec reste intégrale, on a :

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \exp^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \exp^{(n+1)}(t)dt.$$

Or : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exp^{(k)} = \exp$. Donc : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exp^{(k)}(0) = 1$.
Ainsi, on obtient :

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt.$$

2. En utilisant le résultat précédent pour $x = 1$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt$$

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\left| e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right| &= \left| \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt \right| \\
&= \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt \\
&\leq \int_0^1 \frac{1}{n!} e^t dt \quad \text{car } : \forall t \in [0,1],\ (1-t)^n \leq 1 \text{ et } \frac{e^t}{n!} > 0 \\
&\leq \frac{1}{n!}(e-1)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right| = 0$.

Donc $\sum \frac{1}{k!}$ converge vers e.

Exercice 2. 1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}$.
$(\left(-x^2\right)^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $-x^2 \neq 1$.
Ainsi, $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{n} \left(-x^2\right)^k = \frac{1 - (-x^2)^{n+1}}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$.
Ainsi, $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente, on a : $\forall t \in [0, x]$, $\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}$.

En intégrant cette égalité entre 0 et x, on obtient :

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^x t^{2k} dt + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt.$$

Ainsi :

$$\arctan x - \arctan(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+3}}{(1+x^2)(2n+3}.$$

Comme $\arctan(0) = 0$, on trouve :

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+3}}{(1+x^2)(2n+3}.$$

Ainsi :

$$\left|\arctan x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+3}}{(1+x^2)(2n+3)}\right|.$$

Or, $1+x^2 \geq 1$. Donc : $\dfrac{|x|^{2n+3}}{(1+x^2)(2n+3)} \leq \dfrac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$.

Ainsi,

$$\left|\arctan x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}\right| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}.$$

2. En appliquant l'inégalité précédente à $x = 1$, on obtient :

$$\left|\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right| \leq \frac{1}{2n+3}.$$

En multipliant les deux membres par 4, on obtient finalement :

$$\left|\pi - 4\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right| \leq \frac{4}{2n+3}.$$

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a :

$$\forall k \in \left[\!\left[\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, n \right]\!\right],\ u_n \leq u_k.$$

Ainsi, en sommant, on obtient :

$$\left(n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right) u_n = \sum_{k=[\frac{n}{2}]}^{n} u_n \leq \sum_{k=[\frac{n}{2}]}^{n} u_k.$$

Or,

$$n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \geq \frac{n}{2} + 1 \geq \frac{n}{2}$$

Comme (u_n) est à termes positifs, on a :

$$0 \geq \frac{n}{2} u_n \leq \sum_{k=[\frac{n}{2}]}^{n} u_k \leq \sum_{k=[\frac{n}{2}]}^{+\infty} u_k.$$

Or, comme la série $\sum u_n$ converge $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=[\frac{n}{2}]}^{+\infty} u_k = 0$.

Ainsi, par théorème d'encadrement, $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 4. 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

Comme $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge, la série $\sum \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)$ est une série télescopique convergente.

Ainsi, $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$ converge et on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - 0 = 1$.

2. On a : $\forall n \geq 2$, $\dfrac{1}{\sqrt{n-1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. On reconnait donc les termes généraux de deux séries télescopiques. Or, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ converge. Ainsi, $\sum \left(\dfrac{1}{\sqrt{n-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ converge et $\sum \left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ converge. Donc $\sum \left(\dfrac{1}{\sqrt{n-1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)$ converge.

De plus,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}\right) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\
&= 1 - 0 + 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Exercice 5. 1. Soit $n \geq 2$. On a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^2-1} &= \frac{1}{(n+1)(n-1)} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\end{aligned}$$

On reconnait les termes généraux de deux séries télescopiques. De plus, comme $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge, $\sum\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$ et $\sum\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ convergent donc $\sum\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$ converge.
De plus,

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1} &= \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}(1-0) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 0\right) \\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\frac{6^n}{(3^{n+1}-2^{n+1})(3^n-2^n)} = \frac{1}{1-(2/3)^n} - \frac{1}{1-(2/3)^{n+1}}$$

On reconnait ainsi une série télescopique. De plus, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1-(2/3)^n} = 1$.
Ainsi, $\sum \frac{6^n}{(3^{n+1}-2^{n+1})(3^n-2^n)}$ est convergente.
De plus,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6^n}{(3^{n+1}-2^{n+1})(3^n-2^n)} = \frac{1}{1-(2/3)} - 1 = 2.$$

Exercice 6. 1. On a :

$$\begin{aligned}\ln\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right) &\sim \frac{2}{n(n+3)} \\ &\sim \frac{2}{n^2}\end{aligned}$$

Or, la série, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann).
Ainsi, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum \ln\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right)$ converge.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{p} \ln\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right) = \sum_{n=1}^{p} \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n(n+3)}\right) &= \sum_{n=1}^{p} \ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{p}(\ln(n+1) + \ln(n+2) - \ln(n) - \ln(n+3)) \\ &= \sum_{n=1}^{p}(\ln(n+1) - \ln(n)) + \sum_{n=1}^{p}(\ln(n+2) - \ln(n+3)) \\ &= \ln(p+1) - \ln(1) + \ln(3) - \ln(p+3) = \ln(3) + \ln\left(\frac{p+1}{p+3}\right)\end{aligned}$$

par télescopage.
En passant à la limite lorsque $p \to +\infty$, on trouve :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right) = \ln(3).$$

2. On a $\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{n^2}$, terme général d'une série de Riemann convergente.

   Ainsi, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

   Soit $p \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{p} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) &= \sum_{n=2}^{p} \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) \\
&= \sum_{n=2}^{p} (\ln(n+1) - 2\ln(n) + \ln(n-1)) \\
&= \sum_{n=2}^{p} (\ln(n+1) - \ln(n)) + \sum_{n=2}^{p} (\ln(n-1) - \ln(n)) \\
&= \ln(p+1) - \ln(2) - \ln(p) + \ln(1) \\
&= -\ln(2) + \ln\left(1+\frac{1}{p}\right)
\end{aligned}$$

   par télescopage.

   En passant à la limite lorsque $p \to +\infty$, on trouve :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln(2).$$

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\tan(\arctan(n+1) - \arctan(n)) = \dfrac{n+1-n}{1+n(n+1)} = \dfrac{1}{n^2+n+1} = \tan\left(\arctan\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}\right)\right)$.

De plus, $n, n+1 \in \mathbb{R}_+$ donc $\arctan(n+1), \arctan(n) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Ainsi,

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arctan(n+1) - \arctan(n) < \frac{\pi}{2}$$

De plus, Or, arctan est bijective sur $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Ainsi,

$$\arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) = \arctan(n+1) - \arctan(n)$$

On est donc en présence d'une série télescopique.

De plus, $(\arctan(n))$ converge vers $\frac{\pi}{2}$.

Donc $\sum \arctan\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}\right)$ est convergente.

De plus, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) &= \frac{\pi}{2} - \arctan(0) \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Exercice 8. $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann divergente.

On sait donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}} = +\infty$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est continue décroissante positive sur $[1, +\infty[$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Par comparaison série-intégrale, on a :

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1 + \int_1^{n} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$$

Or $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{n+1} - 2$ et $\displaystyle\int_1^{n} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{n} - 2$ on obtient donc :

$$2\sqrt{n+1} - 2 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq (2\sqrt{n} - 2) + 1 = 2\sqrt{n} - 1.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1 - \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{n}}\right) = 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1$.
Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n}.$$

Exercice 9. On sait que $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge (série de Riemann) et $\alpha > 1$.
$x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$. Ainsi :

$$\forall k \geq 2,\ \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $N > n$.
En sommant pour $k \in [\![n+1, N]\!]$, on obtient :

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^N \frac{dt}{t^\alpha}$$

Or :

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}}\right) \quad \text{et} \quad \int_n^N \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{N^{\alpha-1}}\right).$$

D'où :

$$\forall N > n,\ \frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}}\right) \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{N^{\alpha-1}}\right).$$

En faisant tendre N vers l'infini, on obtient :

$$\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

Ainsi, :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1}} \leq n^{\alpha-1}(\alpha-1)\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1.$$

Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1}} = 1$.

Ainsi, par théorème d'encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(n^{\alpha-1}(\alpha-1)\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}\right) = 1$.

Donc :

$$R_n \sim \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

Exercice 10. 1. La série $\sum \sqrt{k}$ est une série de Riemann divergente.
La fonction racine carrée est croissante sur $[1, +\infty[$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a par comparaison série intégrale :

$$1 + \int_1^n \sqrt{t}dt \leq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leq \int_1^{n+1} \sqrt{t}dt$$

Ainsi,

$$1+\frac{2}{3}(n^{3/2}-1)\leq\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\leq\frac{2}{3}((n+1)^{3/2}-1)$$

d'où

$$1+\frac{1}{2n^{3/2}}\leq\frac{3}{2}n^{-3/2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3/2}-n^{-3/2}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{2n^{3/2}}=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3/2}-n^{-3/2}=1$ donc par le théorème d'encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3}{2}n^{-3/2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}=1$.
Ainsi :

$$S_n\sim\frac{2}{3}n^{3/2}$$

2. On sait $\sum\dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente.
La fonction $t\mapsto\dfrac{1}{t^2}$ est continue, décroissante et positive sur $[1,+\infty[$. Soit $n\in\mathbb{N}$. On sait que :

$$\forall k\geq 2,\ \int_k^{k+1}\frac{1}{t^2}dt\leq\frac{1}{k^2}\leq\int_{k-1}^{k}\frac{1}{t^2}dt$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $N>n$.
En sommant pour $k\in[\![n+1,N]\!]$, on obtient :

$$\int_{n+1}^{N}\frac{1}{t^2}dt\leq\sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{k^2}\leq\int_{n}^{N}\frac{1}{t^2}dt$$

d'où

$$\frac{1}{n+1}-\frac{1}{N}\leq\sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{n}-\frac{1}{N}$$

En passant à la limite quand N tend vers $+\infty$ (chacun des termes convergent), on obtient :

$$\frac{1}{n+1}\leq\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{n}$$

Ainsi, on a :

$$\frac{n}{n+1}\leq n\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\leq 1$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$ donc par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{1}{k^2}\right)=1$.
Ainsi :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\sim\frac{1}{n}.$$

Exercice 11. 1. On sait que $\sum\dfrac{1}{n^\alpha}$ est divergente car il s'agit d'une série de Riemann avec $\alpha\in]0,1[$.
La fonction $t\mapsto\dfrac{1}{t^\alpha}$ est continue, décroissante et positive sur $[1,+\infty[$.
Ainsi, on a :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \frac{1}{(k+1)^\alpha}\leq\int_k^{k+1}\frac{dt}{t^\alpha}\leq\frac{1}{k^\alpha}.$$

D'où :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \int_k^{k+1}\frac{dt}{t^\alpha}\leq\frac{1}{k^\alpha}\quad(1)$$

Et :

$$\forall k\geq 2,\ \frac{1}{k^\alpha}\leq\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t^\alpha}\quad(2)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
En sommant (1) pour k allant de 1 à n, on obtient :

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}.$$

En sommant (2) pour k allant de 2 à n, on obtient : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha}$
Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Finalement,

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq S_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha}$$

Or on a :

$$\int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left(n^{1-\alpha} - 1\right) \qquad \text{et} \qquad \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left((n+1)^{1-\alpha} - 1\right).$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{1-\alpha}\left((n+1)^{1-\alpha} - 1\right) \leq S_n \leq 1 + \frac{1}{1-\alpha}\left(n^{1-\alpha} - 1\right)$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} - \frac{1}{n^{1-\alpha}} \leq \frac{(1-\alpha)}{n^{1-\alpha}} S_n \leq \frac{1-\alpha+n^{1-\alpha}-1}{n^{1-\alpha}} = 1 - \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}$$

Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} - \frac{1}{n^{1-\alpha}}\right) = 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}\right) = 1$ donc par théorème d'encadrement, on obtient que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(1-\alpha)}{n^{1-\alpha}} S_n = 1$.
Ainsi,

$$S_n \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

2. (a) On sait que $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge en tant que série de Riemann avec $\alpha > 1$.

Déterminons un équivalent du reste partiel $\displaystyle R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ de la série de Riemann lorsque $\alpha > 1$.

La fonction $\displaystyle x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$. Ainsi :

$$\forall k \geq 2,\ \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $N > n$.
En sommant pour $k \in [\![n+1, N]\!]$, on obtient :

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^N \frac{dt}{t^\alpha}$$

Or on a :

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}}\right) \qquad \text{et} \qquad \int_n^N \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{N^{\alpha-1}}\right).$$

Ainsi :

$$\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}}\right) \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{N^{\alpha-1}}\right)$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_n \leq \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1}} \leq n^{\alpha-1}(\alpha-1)R_n \leq 1.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1}} = 1$. Ainsi, par théorème d'encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha-1}(\alpha-1)R_n = 1$.
Ainsi :

$$R_n \sim \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

(b) On sait que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (par le critère de Riemann). Notons l sa limite.
On sait que :

$$\forall n \geq 2, \ S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\alpha} \geq 1.$$

Ainsi, par passage à la limite dans les inégalités, on a : $l \geq 1$ donc $l \neq 0$.
Ainsi, $S_n \sim l$.
Donc par quotient, on obtient :

$$\frac{R_n}{S_n} \sim \frac{1}{l(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

Or, $\sum \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1$, critère de Riemann.
Ainsi, par le critère de comparaison des séries à termes positifs $\sum \frac{R_n}{S_n}$ converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1$, si et seulement si $\alpha > 2$.

Exercice 12. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ 0 \leq v_n - u_n \leq w_n - v_n.$$

Or, $\sum(w_n - u_n)$ est une série convergente comme différence de deux séries convergentes.
Par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum(v_n - u_n)$ converge également.
De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ v_n = (v_n - u_n) + u_n$$

Ainsi, $\sum v_n$ converge en tant que somme de série convergente.

Exercice 13. sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin'(x) = \cos(x)$.
Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, \ |\sin'(x)| \leq 1$.
Donc sin est 1 lipschitzienne.
On a donc en particulier : $\forall x \in [0,\pi], \ |\sin(x) - \sin(0)| \leq |x|$.
D'où :

$$\forall x \in [0,\pi], \ \sin(x) \leq x$$

car sin est positif sur $[0,\pi]$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par croissance de l'intégrale, on obtient :

$$0 \leq u_n \leq \int_0^{\pi/n} x^{1/2}dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^{\pi/n} = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{3/2}$$

Or, la série $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ (Série de Riemann) est convergente. Ainsi, la série à terme positifs $\sum u_n$ converge (par comparaison).

Exercice 14. a. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ 0 \leq \max(u_n, v_n) \leq u_n + v_n$$

car (u_n) et (v_n) sont positives.
Or, $\sum(u_n + v_n)$ converge en tant que somme de séries convergentes.
On en déduit que $\sum \max(u_n, v_n)$ converge par le critère de comparaison des séries à termes positifs.

b. Comme $\sum u_n$ est une série à termes positifs convergente, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. En particulier, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq n_0 \implies 0 \leq u_n \leq 1$$

On a donc :

$$\forall n \geq n_0, \ 0 \leq u_n^2 \leq u_n.$$

Or, $\sum u_n$ converge.

Ainsi, par critère de comparaison des séries à termes positifs $\sum u_n^2$ est convergente.

c. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on sait que : $0 \leq (x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$.

Ainsi : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $xy \leq \dfrac{x^2+y^2}{2}$.

Il en résulte que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{\sqrt{u_n}}{n} \leq \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{n^2}\right)$$

Or, $\sum u_n$ et $\sum \dfrac{1}{n^2}$ sont convergentes.

Donc $\sum \left(u_n + \dfrac{1}{n^2}\right)$ converge en tant que somme de séries convergentes.

Ainsi, par comparaison de séries à termes positifs que $\sum \dfrac{\sqrt{u_n}}{n}$ est convergente.

Exercice 15. 1. On a $\dfrac{n^2}{n^2 - \ln n} = \dfrac{1}{1 - \frac{\ln n}{n^2}}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{n^2 - \ln n} = 1$.

Donc $\dfrac{1}{n^2 - \ln n} \sim \dfrac{1}{n^2}$.

De plus $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente (série de Riemann).

Ainsi, par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \dfrac{1}{n^2 - \ln n}$ converge.

2. On sait que $\left(\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ est bornée, ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n - \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = +\infty$. Ainsi, $\sum\left(n - \sin\dfrac{1}{n}\right)$ est grossièrement divergente.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $n.\sin\dfrac{1}{n^2} \sim \dfrac{n}{n^2}$.

Ainsi, $n.\sin\dfrac{1}{n^2} \sim \dfrac{1}{n}$.

Or, la série à termes positifs $\sum \dfrac{1}{n}$ est divergente.

Ainsi, par comparaison $\sum n.\sin\dfrac{1}{n^2}$ diverge.

Exercice 16. 1. On a :

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e &= \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) - e = \exp\left(n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) - e \\ &= \exp\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - e \\ &= e\left[\exp\left(-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 1\right] \\ &= e\left(1 - \frac{1}{2n} - 1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] \\ &= -\frac{e}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e \sim -\frac{e}{2n}$$

Or, $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge (série de Riemann).

Ainsi, par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - e\right)$ diverge.

2. On a :

$$\begin{aligned}u_n &= n\left[\left(1+\frac{a}{n^2}\right)^{1/3} - \left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{1/2}\right] \\ &= n\left[1 + \frac{a}{3n^2} - \frac{a^2}{9n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) - 1 - \frac{3}{2n^2} + \frac{9}{8n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right] \\ &= \left(\frac{a}{3} - \frac{3}{2}\right)\frac{1}{n} + \left(\frac{9}{8} - \frac{a^2}{9}\right)\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned}$$

- Si $a \neq \dfrac{9}{2}$: alors,
$$u_n \sim \frac{2a-9}{6n}.$$
Ainsi, quitte à multiplier par -1, on se ramène à des séries à termes positifs.
Or, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2a-9}{6n}$ diverge donc $\sum u_n$ diverge.
- Si $a = \dfrac{9}{2}$: alors,
$$u_n \sim \frac{9}{8n^3}$$
Or, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{9}{8n^3}$ converge donc $\sum u_n$ converge.

Ainsi, $\sum u_n$ converge si et seulement si $a = \dfrac{9}{2}$.

3. $\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)(\ln n)^{1000} \sim \left(\dfrac{\pi}{n}\right)^2 (\ln n)^{1000}$.

Or, $\dfrac{\pi^2 n^{3/2}}{n^2}(\ln n)^{1000} = \dfrac{\pi^2}{n^{1/2}}(\ln n)^{1000} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.
Ainsi, $\dfrac{\pi^2}{n^2}(\ln n)^{1000} = o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$.
Or, $\sum \dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge (série de Riemann).
Ainsi, par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \dfrac{\pi^2}{n^2}(\ln n)^{1000}$ converge.
D'où $\sum \left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)(\ln n)^{1000}$ converge.

Exercice 17. 1. On a : $\dfrac{n}{n^2+1} \sim \dfrac{1}{n}$. Or, $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge (série de Riemann). Ainsi, par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \dfrac{n}{n^2+1}$ diverge.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch}(2n)} = \frac{e^n + e^{-n}}{e^{2n}+e^{-2n}} = \frac{e^n(1+e^{-2n})}{e^{2n}(1+e^{-4n})} = \frac{1+e^{-2n}}{e^n(1+e^{-4n})}$$
. Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1+e^{-2n}}{1+e^{-4n}} = 1$ donc $\frac{1+e^{-2n}}{1+e^{-4n}} \sim 1$.
Ainsi :
$$\frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch}(2n)} \sim e^{-n}$$
Or, $\sum (e^{-1})^n$ converge en tant que série géométrique de raison $e^{-1} \in]0,1[$.
Ainsi, par le critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \dfrac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch}(2n)}$ converge.

3. Il s'agit d'une série à termes positifs à partir du rang 2.
Par croissances comparées $n^2 u_n = \dfrac{n^4 \ln(n)}{e^n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Ainsi, $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
Or, $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge. Ainsi, par comparaison $\sum \dfrac{n^2 \ln n}{e^n}$ converge.

4. Commençons par obtenir un équivalent du terme général :
$$u_n = \frac{\sqrt{n+1}}{\ln^3(n) n^2} \sim \frac{1}{\ln^3(n) n^{3/2}}$$
Il s'agit d'une série à termes positifs à partir d'un certain rang. On obtient alors :
$$n^{3/2} u_n = \frac{1}{\ln^3(n)} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$
Ainsi :
$$u_n = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$
Or, $\sum \dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge (série de Riemann).
Ainsi, par comparaison $\sum u_n$ converge.

5. Commençons par obtenir un équivalent du terme général $u_n = \dfrac{\arctan n}{n^2}$. Il s'agit d'une série à termes positifs.
De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \arctan(n) = \dfrac{\pi}{2}$.
Ainsi, $\arctan(n) \sim \dfrac{\pi}{2}$.
Donc on a :
$$u_n \sim \frac{\pi}{2n^2}$$
Or, $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann) donc $\sum u_n$ converge par critère de comparaison des séries à termes positifs.
6. On a :
$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} &= \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-1/2} - \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{4n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$
Ainsi :
$$\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \sim \frac{1}{4n^3}.$$
Or, $\sum \dfrac{1}{n^3}$ converge (série de Riemann).
Ainsi, par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)$ converge.
7. On a :
$$\begin{aligned}2\ln(n^3+1) - 3\ln(n^2+1) &= 2\ln(n^3) + 2\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right) - 3\ln(n^2) - 3\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \\ &= 6\ln(n) + \frac{2}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - 6\ln(n) - \frac{3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= -\frac{3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$
Donc :
$$2\ln(n^3+1) - 3\ln(n^2+1) \sim \frac{-3}{n^2}$$
Quitte à multiplier par -1, on se ramène à des séries à termes positifs.
De plus, $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann).
Ainsi, par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum (2\ln(n^3+1) - 3\ln(n^2+1))$ converge.

Exercice 18. 1.
$$\begin{aligned}u_n &= \sqrt{n^4+2n+1} - \sqrt{n^4+kn} \\ &= n^2\left[\left(1+\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^4}\right)^{1/2} - \left(1+\frac{k}{n^3}\right)^{1/2}\right] \\ &= n^2\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^4}\right) - 1 - \frac{k}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right] \\ &= \frac{2-k}{2n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

- Si $k \neq 2$ alors $u_n \sim \dfrac{2-k}{2n}$.
  Or, $\dfrac{2-k}{2n}$ est de signe constant. Et, $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge (série de Riemann).
  Ainsi, par critère de comparaison $\sum u_n$ converge.

- Si $k=2$ alors $u_n \sim \dfrac{1}{2n^2}$.
  Or, $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge.
  Ainsi, par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

2. On a :

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2n} - \left(1+\frac{2}{n+a^2}\right)^{n}$$
$$= \exp\left(2n\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right) - \exp\left(n\ln\left(1+\frac{2}{n+a^2}\right)\right)$$
$$= \exp\left(2n\ln\left(1+\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)\right) - \exp\left(n\ln\left(1+\frac{2}{n}\frac{1}{1+\frac{a^2}{n}}\right)\right)$$
$$= \exp\left(2n\ln\left(1+\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\right) - \exp\left(n\ln\left(1+\frac{2}{n}\left(1-\frac{a^2}{n}+\frac{a^4}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\right)$$
$$= \exp\left(2n\ln\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right) - \exp\left(n\ln\left(1+\frac{2}{n}-\frac{2a^2}{n^2}+\frac{a^4}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)$$
$$= \exp\left(2n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n^3}\right)+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right) - \exp\left(n\left(\frac{2}{n}-\frac{2a^2}{n^2}+\frac{a^4}{n^3}-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{n^2}-\frac{8a^2}{n^3}\right)+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)$$
$$= \exp\left(2-\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \exp\left(2-\frac{2a^2}{n}+\frac{a^4}{n^2}-\frac{2}{n}+\frac{4a^2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$
$$= \exp\left(2-\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \exp\left(2-\frac{2(a^2+1)}{n}+\frac{a^2(a^2+4)}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$
$$= e^2\left[\exp\left(-\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \exp\left(-\frac{2(a^2+1)}{n}+\frac{a^2(a^2+4)}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right]$$
$$= e^2\left[1-\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}+\frac{9}{2n^2}-\left(1-\frac{2(a^2+1)}{n}+\frac{a^2(a^2+4)}{n^2}+\frac{2(a^2+1)^2}{n^2}\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$
$$= e^2\left[\frac{2a^2-1}{n}+\frac{-6a^4-16a^2+13}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

Ainsi :

- Si $a \notin \{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\}$, on a :
$$u_n \sim \frac{e^2(2a^2-1)}{n}$$
  Or, $\dfrac{e^2(2a^2-1)}{n}$ est de signe constant et $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge (série de Riemann).
  Ainsi, par comparaison, $\sum u_n$ converge.
- Si $a \in \{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\}$, on a :
$$u_n = \frac{7e^2}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
  Ainsi,
$$u_n \sim \frac{7e^2}{4n^2}$$
  Or, $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann).
  Ainsi, $\sum u_n$ converge.

On peut donc conclure sur $\sum u_n$ converge si et seulement si $a = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 19. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue décroissante et positive.

Par comparaison série-intégrale, on a donc :

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t}$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln n$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leq \frac{S_n}{\ln n} \leq 1 + \frac{1}{\ln n}$$

Or, $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \dfrac{1}{\ln(n)} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1$.
De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{\ln n}\right) = 1$.
Ainsi, par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{\ln n} = 1$.
Donc

$$S_n \sim \ln n.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.
On désire montrer que (u_n) converge.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour montrer la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$, on va étudier la convergence de la série télescopique $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(u_{n+1} - u_n)$.
On a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) \\
&= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, $u_{n+1} - u_n \sim -\dfrac{1}{2n^2}$.
Quitte à multiplier par -1, on se ramène à des séries à termes positifs.
De plus, la série $\sum \dfrac{1}{2n^2}$ converge (série de Riemann avec $\alpha = 2$).
Ainsi, $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.
Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
Notons $\gamma \in \mathbb{R}$ sa limite.
On obtient alors : $u_n = \gamma + o(1)$.
Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $t_n = S_n - \ln n - \gamma$.
On sait déjà que (t_n) converge vers 0.

De plus, on a :

$$\begin{aligned} t_{n+1} - t_n &= S_{n+1} - \ln(n+1) - S_n + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Donc :

$$t_{n+1} - t_n \sim -\frac{1}{2n^2}$$

D'après la question 1.b de l'exercice 26, on obtient :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (t_{k+1} - t_k) \sim -\frac{1}{2} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

De plus, en utilisant le résultat de l'exercice 10 question 2, on sait que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$.

Donc $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} (t_{k+1} - t_k) \sim -\frac{1}{2n}$.

Or, on a également : $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} (t_{k+1} - t_k) = \left(\lim_{k\to+\infty} t_k\right) - t_n = -t_n$.

Ainsi, on obtient :

$$t_n \sim \frac{1}{2n}$$

D'où $t_n = \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 20. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \dfrac{n! e^n}{\sqrt{n} n^n}$ et $v_n = \ln(u_n)$.

Montrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Pour ce faire, on étudie la convergence de la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$.

On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \ln((n+1)!) + n + 1 - (n+1)\ln(n+1) - \frac{1}{2}\ln(n+1) - \ln(n!) - n + n\ln(n) + \frac{1}{2}\ln(n) \\ &= \ln(n+1) + 1 - (n + \frac{3}{2})\ln(n+1) + (n + \frac{1}{2})\ln(n) \\ &= 1 - (n + \frac{1}{2})(\ln(n+1) - \ln(n)) \\ &= 1 - (n + \frac{1}{2})\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= 1 - (n + \frac{1}{2})\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= 1 - 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$v_n - v_{n+1} \sim \frac{1}{12n^2}$$

De plus, $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann).

Ainsi, par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum (v_n - v_{n+1})$ converge.

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Notons $l \in \mathbb{R}$ sa limite.
Par continuité de la fonction exponentielle, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $e^l > 0$.
En posant $\lambda = e^l > 0$, on a : $u_n \sim e^l$ d'où :

$$n! \sim \lambda\sqrt{n}n^n e^{-n}.$$

Remarque : on peut prouver que $\lambda = \sqrt{2\pi}$ (à l'aide des intégrales de Wallis) ce qui donne $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, équivalent connu sous le nom de formule de Stirling.

Exercice 21. • **Si** $\alpha > 1$ **:** Posons $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$, on a alors $\gamma \in]1, \alpha[$.

Or :

$$\frac{n^\gamma}{n^\alpha(\ln n)^\beta} = \frac{1}{n^{\alpha-\gamma}(\ln(n))^\beta} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissances comparées car $\alpha - \gamma > 0$.

Donc $\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta} = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$.

Or, comme $\gamma > 1$, la série $\sum \frac{1}{n^\gamma}$ converge par le critère de Riemann.

Par suite $\sum \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ converge par le critère de comparaisons des séries à termes positifs.

• **Si** $\alpha < 1$ **:**

Posons $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$, on a alors $\gamma \in]\alpha, 1[$.

Or,

$$\frac{n^\alpha(\ln n)^\beta}{n^\gamma} = \frac{(\ln(n))^\beta}{n^{\gamma-\alpha}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissances comparées car $\gamma - \alpha > 0$.

Donc $\frac{1}{n^\gamma} = o\left(\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}\right)$.

Or, comme $\gamma < 1$, la série $\sum \frac{1}{n^\gamma}$ diverge par le critère de Riemann.

Par suite $\sum \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ diverge par le critère de comparaisons des séries à termes positifs.

• **Si** $\alpha = 1$ **:**

  • **Si** $\beta < 0$ **:**

  On a :

$$\frac{n\ln(n)^\beta}{n} = (\ln n)^\beta \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

  Ainsi : $\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{n(\ln(n))^\beta}\right)$.

  Or, $\sum \frac{1}{n}$ diverge par le critère de Riemann.

  Par suite, $\sum \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ diverge par le critère de comparaison des séries à termes positifs.

  • **Si** $\beta \geq 0$ **:**

  Le critère de Riemann ne peut plus nous aider.
  La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t(\ln t)^\beta}$ est continue décroissante et positive sur $[2, +\infty[$.
  Ainsi, par comparaison série intégrale, on a :

$$\forall n \geq 2,\ \int_2^{n+1} \frac{1}{t(\ln t)^\beta}dt \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)^\beta} \leq f(2) + \int_2^n \frac{1}{t(\ln t)^\beta}dt$$

  Si $\beta \neq 1$:

$$\forall n \geq 2,\ \int_2^{n+1} \frac{1}{t(\ln t)^\beta}dt = \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{1}{(\ln(n+1))^{\beta-1}} - \frac{1}{(\ln(2))^{\beta-1}}\right) \text{ et } \int_{\ln 2}^{\ln n} \frac{du}{u^\beta} = \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{1}{(\ln(n))^{\beta-1}} - \frac{1}{(\ln(2))^{\beta-1}}\right).$$

  Ainsi, on a :

$$\forall n \geq 2,\ \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{1}{(\ln(n+1))^{\beta-1}} - \frac{1}{(\ln(2))^{\beta-1}}\right) \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)^\beta} \leq f(2) + \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{1}{(\ln(n))^{\beta-1}} - \frac{1}{(\ln(2))^{\beta-1}}\right)$$

- Si $\beta \in [0,1[$, $\beta - 1 < 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{1-\beta} \left(\frac{1}{(\ln(n+1))^{\beta-1}} - \frac{1}{(\ln(2))^{\beta-1}} \right) \right) = +\infty$.

  Ainsi, $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ diverge.
- Si $\beta > 1$, $\beta - 1 > 0$:

$$\forall n \geq 2,\ 0 \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln(k)^\beta} \leq f(2) + \frac{1}{\beta - 1} \left(\frac{1}{(\ln(2))^{\beta-1}} - \frac{1}{(\ln(n))^{\beta-1}} - \right) \leq f(2) + \frac{1}{\beta - 1} \frac{1}{(\ln(2))^{\beta-1}}$$

  Ainsi, la suite des sommes partielles est majorée.
  Donc $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge.

Si $\beta = 1$:

$$\forall n \geq 2,\ \int_2^{n+1} \frac{1}{t \ln(t)} dt = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2))$$

Ainsi :

$$\forall n \geq 2,\ \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln(k)^\beta}$$

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} (\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2))) = +\infty$.
Ainsi, $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ diverge.

En conclusion, $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

Exercice 22. $(u_n)_{n \geq 1}$ converge si et seulement si $\sum\limits_{n \geq 2} (u_n - u_{n-1})$ converge.

Soit $n \geq 2$.

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} - \ln(n) + \ln(n-1) \\ &= \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-1/2} + \ln\left(1 - \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n} \right) \right) - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2} \right) \\ &= -\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2} \right) \end{aligned}$$

Ainsi, $-(u_n - u_{n-1}) \sim \frac{1}{n^2}$.
Or, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann convergente).
Ainsi, $\sum (u_n - u_{n-1})$ converge par critère de comparaison de séries à termes positifs.
Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Exercice 23. Soit $p \in \mathbb{N}$.

- **Si $p = 0$:**
  On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$ donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- **Si $p = 1$:**
  On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \frac{1}{n+1}$.
  Or, $\sum \frac{1}{n+1}$ diverge.
  Ainsi, $\sum u_n$ diverge.

- **Si** $p = 2$ **:**
  soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_n = \frac{1! + 2! + ... + n!}{(n+2)(n+1)n!} &= \frac{1! + 2! + ... + (n-1)!}{(n+2)(n+1)n(n-1)!} + \frac{n!}{(n+2)(n+1)n!} \\ &\leq \frac{(n-1)(n-1)!}{(n+2)(n+1)n(n-1)!} + \frac{1}{(n+2)(n+1)} \\ &\leq \frac{(n-1)}{(n+2)(n+1)n} + \frac{1}{(n+2)(n+1)} \end{aligned}$$

  Or, $\dfrac{(n-1)}{(n+2)(n+1)n} \sim \dfrac{1}{n^2}$ et $\dfrac{1}{(n+2)(n+1)} \sim \dfrac{1}{n^2}$ et $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann).
  Ainsi, par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \dfrac{(n-1)}{(n+2)(n+1)n}$ et $\sum \dfrac{1}{(n+2)(n+1)}$ convergent.
  Par somme, $\sum \left(\dfrac{(n-1)}{(n+2)(n+1)n} + \dfrac{1}{(n+2)(n+1)} \right)$ converge.
  Puis par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.
- **Si** $p \geq 3$ **:**
  Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1! + 2! + ...n!}{(n+3)(n+2)(n+1)n!} \\ &\leq \frac{n.n!}{(n+3)(n+2)(n+1)n!} \\ &\leq \frac{n}{(n+3)(n+2)(n+1)} \end{aligned}$$

  Or, $\dfrac{n}{(n+3)(n+2)(n+1)} \sim \dfrac{1}{n^2}$ et $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge. Ainsi, par critère de comparaison des séries à termes positifs $\sum \dfrac{n}{(n+3)(n+2)(n+1)}$ converge.
  Ainsi toujours par comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

Exercice 24. On commence par remarquer que (v_n) est à termes positifs. On peut appliquer les théorèmes de comparaison.

- Supposons que $\sum u_n$ converge.
  On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{1+u_n} \leq 1$.
  D'où : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq v_n \leq u_n$. Par comparaison, on en déduit que $\sum v_n$ converge.
- Supposons $\sum v_n$ converge. Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. Ainsi, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0,\ v_n < 1$.
  On a alors : $\forall n \geq n_0,\ u_n = \dfrac{v_n}{1-v_n}\ (1 - v_n \neq 0)$.
  De plus, comme (u_n) ne s'annule pas, la suite (v_n) ne s'annule pas.
  Ainsi, on a : $\forall n \geq n_0,\ \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{1}{1-v_n}$.
  Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1-v_n} = 1$.
  Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.
  Ainsi, $u_n \sim v_n$.
  Donc $\sum u_n$ converge.

On a bien prouvé que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exercice 25. 1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$k^2 \leq n^2 \quad \text{et} \quad 0 \leq n-k \leq n$$

D'où : $(n-k)^2 \leq n^2$.
Ainsi :

$$k^2 + (n-k)^2 \leq 2n^2.$$

De plus, $k^2+(n-k)^2 = n^2-2nk+2k^2 = 2\left(k^2-nk+\dfrac{n^2}{4}\right)+\dfrac{n^2}{2} = 2\left(\dfrac{n}{2}-k\right)^2+\dfrac{n^2}{2} \geq \dfrac{n^2}{2}$.
Ainsi :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall k\in[\![1,n]\!],\ \frac{n^2}{2}\leq k^2+(n-k)^2\leq 2n^2.$$

2. On remarque que la fonction $x\mapsto x^a$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $a\geq 0$.
Ainsi :
   - Si $a\geq 0$:
     Soit $n\in\mathbb{N}^*$, soit $k\in[\![1,n]\!]$, on a :
     $$\frac{n^{2a}}{2^a}\leq (k^2+(n-k)^2)^a\leq 2^a n^{2a}$$
     Ainsi,
     $$\frac{1}{2^a n^{2a}}\leq\frac{1}{(k^2+(n-k)^2)^a}\leq\frac{2^a}{n^{2a}}$$
     En sommant les inégalités précédentes pour k allant de 1 à n, on obtient :
     $$\frac{1}{2^a}\frac{1}{n^{2a-1}}\leq u_n\leq\frac{2^a}{n^{2a-1}}$$
     - Si $2a-1>1$ ce qui revient à $a>1$, alors la série $\sum\dfrac{1}{n^{2a-1}}$ converge (série de Riemann) puis $\sum u_n$ converge.
     - Si $2a-1\leq 1$ ce qui revient à $a\in[0,1]$ alors la série $\sum\dfrac{1}{n^{2a-1}}$ diverge (série de Riemann) puis $\sum u_n$ diverge.
   - Si $a<0$:
     Soit $n\in\mathbb{N}^*$, soit $k\in[\![1,n]\!]$, on a :
     $$2^a n^{2a}\leq (k^2+(n-k)^2)^a\leq\frac{n^{2a}}{2^a}$$
     Ainsi,
     $$\frac{2^a}{n^{2a}}\leq\frac{1}{(k^2+(n-k)^2)^a}\leq\frac{1}{2^a n^{2a}}$$
     En sommant les inégalités précédentes pour k allant de 1 à n, on obtient :
     $$\frac{2^a}{n^{2a-1}}\leq u_n\leq\frac{1}{2^a}\frac{1}{n^{2a-1}}$$
     Comme $a<0$, on a $2a-1<0<1$.
     Ainsi, la série $\sum\dfrac{1}{n^{2a-1}}$ diverge (série de Riemann) puis $\sum u_n$ diverge.

Finalement, $\sum u_n$ converge si et seulement si $a>1$.

Exercice 26. 1. On suppose que $\sum v_n$ converge

(a) Supposons que $u_n=o(v_n)$. Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=0$.
Soit $\epsilon>0$. Comme $u_n=o(v_n)$, par définition de la limite, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq N\quad\Longrightarrow\quad\left|\frac{u_n}{v_n}\right|\leq\epsilon$$
Ainsi :
$$\forall n\geq N,\ u_n\leq\epsilon v_n\quad (1).$$
Soit $n\geq N$. Soit $p\geq n$, en sommant (1) pour k allant de n à p, on obtient :
$$\sum_{k=n}^{p}u_k\leq\epsilon\sum_{k=1}^{p}v_k$$

Comme $\sum v_n$ converge, il en est de même de $\sum u_n$ par le critère de comparaison des séries à termes positifs.
Ainsi, en faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \leq \epsilon \sum_{k=n}^{+\infty} v_k.$$

D'où :

$$\forall n \geq N,\ 0 \leq \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} u_k}{\sum_{k=n}^{+\infty} v_k} \leq \epsilon$$

Ainsi, on a prouvé que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} u_k}{\sum_{k=n}^{+\infty} v_k} = 0$ donc $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right)$.

(b) Supposons que $u_n \sim v_n$. Alors, $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.
Soit $\epsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| \leq \epsilon$$

Ainsi :

$$\forall n \geq N,\ (1-\epsilon)v_n \leq u_n \leq (1+\epsilon)v_n \quad (2).$$

Soit $n \geq N$. Soit $p \geq n$. En sommant (2) pour k allant de n à p, on obtient :

$$(1-\epsilon)\sum_{k=1}^{p} v_k \leq \sum_{k=n}^{p} u_k \leq (1+\epsilon)\sum_{k=1}^{p} v_k$$

Comme $\sum v_n$ converge, il en est de même de $\sum u_n$ par le critère de comparaison des séries à termes positifs.
Ainsi, en faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient :

$$(1-\epsilon)\sum_{k=n}^{+\infty} v_k \leq \sum_{k=n}^{+\infty} u_k \leq (1+\epsilon)\sum_{k=n}^{+\infty} v_k$$

D'où :

$$\forall n \geq N,\ -\epsilon \leq \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} u_k - \sum_{k=n}^{+\infty} v_k}{\sum_{k=n}^{+\infty} v_k} \leq \epsilon$$

Ainsi :

$$\forall n \geq N,\ \left|\frac{\sum_{k=n}^{+\infty} u_k}{\sum_{k=n}^{+\infty} v_k} - 1\right| \leq \epsilon$$

Ainsi, on a prouvé que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} u_k}{\sum_{k=n}^{+\infty} v_k} = 1$ donc $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$.

2. On suppose que $\sum v_n$ diverge.

(a) Supposons que $u_n = o(v_n)$. Alors, $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.

Soit $\epsilon > 0$. Comme $u_n = o(v_n)$, par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leq \epsilon$$

Ainsi :

$$\forall n \geq N,\ u_n \leq \epsilon v_n.$$

Soit $n \geq N$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{N-1} u_k + \sum_{k=N}^{n} u_k\\ &\leq \sum_{k=0}^{N-1} u_k + \sum_{k=N}^{n} \epsilon v_k\\ &\leq \sum_{k=0}^{N-1} u_k + \epsilon \sum_{k=0}^{n} v_k\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall n \geq N,\ 0 \leq \frac{\sum_{k=0}^{n} u_k}{\sum_{k=0}^{n} v_k} \leq \frac{\sum_{k=0}^{N-1} u_k}{\sum_{k=0}^{n} v_k} + \epsilon$$

Or, $\sum_{k=0}^{N-1} u_k$ est finie, et comme $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} v_k = +\infty$, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{N-1} u_k}{\sum_{k=0}^{n} v_k} = 0$.

Ainsi, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N_1,\ \sum_{k=0}^{N-1} u_k \leq \epsilon \sum_{k=0}^{n} v_k$.

On a alors :

$$\forall n \geq \max(N, N_1),\ 0 \leq \frac{\sum_{k=0}^{n} u_k}{\sum_{k=0}^{n} v_k} \leq 2\epsilon$$

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} u_k}{\sum_{k=0}^{n} v_k} = 0$ donc $\sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.

(b) Supposons que $u_n \sim v_n$. Alors, $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Soit $\epsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| \leq \epsilon$$

Ainsi :

$$\forall n \geq N,\ -\epsilon v_n \leq u_n - v_n \leq \epsilon v_n \quad (3).$$

Soit $n \geq N$. En sommant, (3) pour k allant de N à n on a :

$$-\epsilon \sum_{k=N}^{n} v_k \leq \sum_{k=N}^{n} (u_k - v_k) \leq \epsilon \sum_{k=N}^{n} v_k$$

Puis :

$$\sum_{k=0}^{N-1}(u_k-v_k)-\epsilon\sum_{k=0}^{n} v_k \leq \sum_{k=0}^{N-1}(u_k-v_k)-\epsilon\sum_{k=N}^{n} v_k \leq \sum_{k=0}^{n}(u_k-v_k) \leq \sum_{k=0}^{N-1}(u_k-v_k)+\epsilon\sum_{k=N}^{n} v_k \leq \sum_{k=0}^{N-1}(u_k-v_k)+\epsilon\sum_{k=0}^{n} v_k$$

Ainsi :

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}(u_k - v_k)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k} - \epsilon \leq \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(u_k - v_k)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k} \leq \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}(u_k - v_k)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k} + \epsilon$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}(u_k - v_k)$ est finie, et comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} v_k = +\infty$, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{N-1}(u_k - v_k)}{\sum_{k=0}^{n} v_k} = 0$.
Ainsi il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N_1,\ -\epsilon \leq \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}(u_k - v_k)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k} \leq \epsilon.$$

Ainsi :

$$\forall n \geq \max(N, N_1),\ -2\epsilon \leq \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(u_k - v_k)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k} \leq 2\epsilon$$

Donc :

$$\forall n \geq \max(N, N_1),\ \leq \left| \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k} - 1 \right| \leq 2\epsilon$$

D'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k}{\sum_{k=0}^{n} v_k} = 1$ donc $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$.

Exercice 27. 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\left|\dfrac{e^{in}}{n^2}\right| = \dfrac{1}{n^2}$.

Or, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann).

Donc $\displaystyle\sum \frac{e^{in}}{n^2}$ converge absolument.

Ainsi, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in}}{n^2}$ converge.

2. Pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n \ln n}{e^n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $|u_n| = \dfrac{\ln n}{e^n}$.

Ainsi, par croissances comparées, on a : $n^2|u_n| = \dfrac{n^2 \ln n}{e^n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Ainsi, $|u_n| = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Par comparaison à une série de Riemann, on en déduit que $\sum |u_n|$ est convergente. Ainsi, $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

Exercice 28. 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $|u_n| = \dfrac{1}{n^2}$. Ainsi, $\sum |u_n|$ converge (série de Riemann). Donc $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $|u_n| = \left|\cos n \left(1 - \cos \dfrac{1}{n}\right)\right| \leq \left|1 - \cos \dfrac{1}{n}\right|$.

Or, $\left|1 - \cos \frac{1}{n}\right| \sim \dfrac{1}{2n^2}$.

Par comparaison avec une série de Riemann convergente, $\displaystyle\sum \left|1 - \cos \frac{1}{n}\right|$ converge.

Ainsi, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum |u_n|$ converge.

Finalement, $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $|u_n| \leq \frac{1}{n^2}$. Or, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc par comparaison, $\sum u_n$ converge absolument donc converge.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $|u_n| \leq \frac{1+n}{n^2\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{5/2}} + \frac{1}{n^{3/2}}$. Or, $\sum \frac{1}{n^{5/2}}$ et $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ sont deux séries convergentes donc par comparaison $\sum u_n$ converge absolument donc converge.

Exercice 29. On a : $\forall n \geq 2,\ \left|\frac{\sin n}{n^{3/2}+\cos n}\right| \leq \frac{1}{n^{3/2}-1}$.

- Or, $\frac{1}{n^{3/2}-1} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$ et $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (somme de Riemann). Ainsi, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^{3/2}-1}$ converge.
- Par comparaison, $\sum_{n\geq 2} \frac{\sin n}{n^{3/2}+\cos n}$ converge absolument donc $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n^{3/2}+\cos n}$ converge absolument.
- Finalement, on obtient que $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n^{3/2}+\cos n}$ converge.

Exercice 30 (Critère de d'Alembert)**.** 1. Supposons $l > 1$.

Posons $\epsilon = \frac{l-1}{2} > 0$. Par définition de la limite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \implies \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - l\right| \leq \epsilon$$

Ainsi :

$$\forall n \geq n_0,\ 1 \leq \frac{l+1}{2} \leq l - \epsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} - l$$

D'où :

$$\forall n \geq n_0,\ 0 < u_{n_0} \leq u_n$$

Donc, (u_n) ne converge pas vers 0 donc la série diverge grossièrement donc diverge.

2. Supposons $l \in [0, 1[$.

Soit $\epsilon = \frac{1-l}{2}$. Par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \implies \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - l\right| \leq \epsilon$$

Ainsi :

$$\forall n \geq n_0,\ 0 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1+l}{2}$$

Posons $k = \frac{1+l}{2}$.

On a :

$$\forall n \geq n_0,\ u_{n+1} \leq k u_n$$

Par récurrence aisée, on montre alors que :

$$\forall n \geq N,\ 0 \leq u_n \leq k^{n-N} u_N$$

Or, $\sum k^n$ converge en tant que série géométrique de raison $k = \frac{1+l}{2} \in [0, 1[$.

Ainsi, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ converge.

3. (a) (u_n) est bien suite de réels strictement positifs.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}(\sin\alpha)^{2n+2}n^2}{(n+1)^2 2^n (\sin\alpha)^{2n}} = 2(\sin\alpha)^2 \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2 \underset{n\to+\infty}{\to} 2(\sin\alpha)^2.$$

- Si $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$, $\sin\alpha \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ donc $2(\sin\alpha)^2 \in [0,1[$. Ainsi, par la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ converge.
- Si $\alpha \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin\alpha \in \left]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$ donc $2(\sin\alpha)^2 \in]1,2]$. Ainsi, par la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ diverge.
- Si $\alpha = \frac{\pi}{4}$, la règle de d'Alembert ne s'applique pas.

  On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n^2}$. Ainsi $\sum u_n$ converge.

Finalement, $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{2}{\exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}.$$

Or, $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim 1$ Ainsi, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{2}{e} < 1$.

Ainsi, par la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ converge.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n!\ln(n+1)}{(n+1)!\ln n} = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)\ln n}.$$

Or, $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 1$. Ainsi, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Donc par la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ converge.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\ln(n+1)2^n}{2^{n+1}\ln(n)} = \frac{1}{2}\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}$$

Or, Or, $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} < 1$.

Donc par la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ converge.

Exercice 31. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+2} - S_{2n} = (-1)^{2n+2}u_{2n+2} - (-1)^{2n+1}u_{2n+1} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0$ (car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante).
  Ainsi, $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- De même, soit $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+3} - S_{2n+1} = (-1)^{2n+3}u_{2n+3} - (-1)^{2n+2}u_{2n+2} = -u_{2n+3} + u_{2n+2} \geq 0$ (car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante).
  Donc $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- Enfin, soit $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1}u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Ainsi, les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, donc convergent vers la même limite.
Ainsi, les suites extraites paires et impaires convergent vers la même limite donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (preuve à refaire, cf exercice 14 TD 11 suites réelles).
Ainsi, $\sum(-1)^n u_n$ converge.

2. La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers 0. Ainsi, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

   En revanche, cette série ne converge pas absolument (car la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge).

Exercice 32. 1. On a :

$$\begin{aligned}
w_n &= \ln((n+1)^a u_{n+1}) - \ln(n^a u_n) \\
&= \ln\left(\frac{(n+1)^a u_{n+1}}{n^a u_n}\right) \\
&= \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^a\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\
&= a\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{a}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= \frac{a}{n} - \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

2. $\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc par comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum w_n$ converge.
   Ainsi, la suite (v_n) converge. Notons $l = \lim_{n\to+\infty} v_n \in \mathbb{R}$.
   Alors $(\ln(v_n))$ converge vers e^l. Posons $\lambda = e^l > 0$.
   On a alors $n^\alpha u_n \sim \lambda$ d'où $u_n \sim \frac{\lambda}{n^\alpha}$.
3. Par critère de Riemann, $\sum \frac{1}{n^a}$ converge si et seulement si $a > 1$.
   Ainsi, par critère de comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge si et seulement si $a > 1$.
4. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\frac{n+b}{n+a}} &= \frac{1}{1+\frac{b-a}{n+a}} \\
&= \frac{1}{1+\frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{a}{n}}\right)} \\
&= \frac{1}{1+\frac{b-a}{n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \\
&= \frac{1}{1+\frac{b-a}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}
\end{aligned}$$

   D'après la question précédente, $\sum u_n$ converge si et seulement si $b-a > 1$.