Feuille d'exercices 27 : Variables aléatoires

1 Variables aléatoires

Exercice 1.
Soit $N \geq 2$. Un joueur jette N fois une pièce équilibrée.
Soit X la variable aléatoire donnant le numéro du jet pour lequel on obtient pile pour la première fois.
On pose $X = 0$ si l'on obtient jamais pile.
Etudier la loi de X.

Exercice 2.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Une urne contient n boules dont une seule boule blanche. On effectue des tirages successifs et sans remise jusqu'à obtenir la boule blanche.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
Montrer que X suit une loi uniforme.

Exercice 3.
n amis vont au cinéma et choisissent entre 3 films F_1, F_2 et F_3. Les choix sont indépendants et équilibrés entre les films.
Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note X_i le nombre de personnes choisissant le film F_i.

1. Déterminer la loi de X_i, pour $i \in \{1, 2, 3\}$.
2. Soit Y le nombre de films ayant reçu au moins un choix. Déterminer la loi de Y.

2 Couples de variables aléatoires - Indépendance

Exercice 4.
n candidats passent un examen. La probabilité de réussite pour chaque candidat est p. En cas d'échec, le candidat repasse un examen de rattrapage avec la même probabilité de réussite p.
Quelle est la loi du nombre de candidats ayant réussi à l'issue des deux épreuves ?

Exercice 5.
On tire une carte au hasard d'un jeu de 32 cartes. On considère les trois variables aléatoires suivantes :

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si on tire un roi} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si on tire une dame} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} 1 & \text{si on tire un coeur} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer les lois conjointes et les lois marginales des couples (X, Y) et (X, Z).
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Les variables X et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 6.
Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{-1, 1\}$ prenant toutes les deux la valeur 1 avec une probabilité $\frac{2}{3}$.
Soient X et Y les variables aléatoires définies par :

$$X = U, \quad Y = \begin{cases} V & \text{si } U = 1 \\ -V & \text{si } U = -1. \end{cases}$$

1. Déterminer la loi du couple de variables aléatoires (X, Y). Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Les variables aléatoires X^2 et Y^2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 7. Soient $p \in]0,1[$, n et $m \in \mathbb{N}^*$. On se donne X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(n,p)$ et $\mathcal{B}(m,p)$ respectivement.

1. Montrer que : $\forall k \in [\![0, m+n]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$.
2. En déduire que $X_1 + X_2$ suit la loi $\mathcal{B}(n+m, p)$.

Exercice 8. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
Déterminer la loi de $U = \max(X, Y)$ et de $V = \min(X, Y)$.

Exercice 9. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.
Déterminer la loi de $S = X + Y$.

Exercice 10.
Soit $N \geq 2$. Une urne contient $N+1$ boules numérotées de 0 à N. On tire avec remise une boule.
On considère les variables aléatoires suivantes :
$X_1 = 1$, et pour $i \geq 2$, $X_i = 1$ si le numéro tiré au tirage i n'est pas sorti dans les tirages précédents, $X_i = 0$ sinon.

1. Déterminer la loi de X_i.
2. Les variables aléatoires X_i et X_j sont-elles indépendantes, pour $i \neq j$?

Exercice 11.
N personnes choisissent un fournisseur d'accès à Internet, au hasard et de manière indépendante, parmi n fournisseurs notés de 1 à n, avec $n \geq 2$.
Soit X_i le nombre de clients ayant opté pour le fournisseur i.

1. Déterminer la loi de X_i.
2. Les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont-elles indépendantes ?

3 Espérance - Variance

Exercice 12. On considère deux urnes A et B contenant en tout b boules ($b \geq 2$). Lors de chaque étape, une boule est sélectionnée au hasard et changée d'urne.
On note X_n la variable aléatoire correspondant au nombre de boules dans l'urne A à l'instant n.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer $E(X_{k+1} - X_k)$ en fonction de $E(X_k)$.
2. En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $E(X_{k+1}) = \left(1 - \dfrac{2}{b}\right) E(X_k) + 1$.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer $E(X_k)$ en fonction de la composition initiale des deux urnes, puis sa limite quand k tend vers $+\infty$.

Exercice 13.
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

1. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
2. Déterminer l'espérance de $U = \max(X, Y)$ et de $V = \min(X, Y)$.

Exercice 14. Soit $n \geq 2$. Un lecteur mp3 contient n pistes de lectures (numérotées de 1 à n) et fonctionne en mode aléatoire (à la fin de chaque piste, une nouvelle, éventuellement égale à l'ancienne, est choisie aléatoirement).
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k le nombre de pistes différentes qui ont été lues au moins une fois au cours des k premières lectures.

1. Déterminer, en fonction de n et de k, les valeurs prises par X_k.
2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, donner la probabilité des événements $X_k = 1$ et $X_k = k$.
3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer $P(X_{k+1} = i)$ en fonction de $P(X_k = i)$ et de $P(X_k = i-1)$.
4. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, en déduire que $E(X_{k+1}) = \dfrac{(n-1)}{n} E(X_k) + 1$, puis déterminer une expression de $E(X_k)$.
5. Pour n fixé, que vaut $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} E(X_k)$. Ce résultat est-il prévisible ?
6. Pour k fixé, que vaut $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} E(X_k)$. Ce résultat est-il prévisible ?

Exercice 15. Soient U et V deux urnes, que l'on remplit, de manière aléatoire avec deux boules.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules dans U et Y la variable aléatoire qui compte le nombre d'urnes vides.

1. Déterminer la loi de X et de Y.
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

3. Déterminer $E(X)$, $E(Y)$ et $E(XY)$.

Exercice 16.
Soit $n \in \mathbb{N}$, soit r tel que $0 \leq r \leq n$.
Un placard contient n paires de chaussures. On tire, au hasard, $2r$ chaussures du placard. On note X la variable aléatoire égale au nombre de paires complètes parmi les chaussures tirées. Les paires du placard sont numérotées de 1 à n.
Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la $i^{\text{ème}}$ paire se trouve parmi les chaussures tirées et 0 sinon.

1. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, déterminer la loi et l'espérance de X_i.
2. Déterminer l'espérance de X.

Exercice 17. Une urne contient initialement r boules rouges et b boules blanches. On pose $N = r + b$. On effectue des tirages successifs dans l'urne, et, à l'issue de chaque tirage, la boule prélevée est remise, avec c boules de la même couleur ($c \in \mathbb{N}^*$).
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le nombre de boules rouges tirées lors des n premiers tirages et Y_n la variable indicatrice de l'événement « Le n-ième tirage donne une boule rouge ».

1. Déterminer la loi de Y_1.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E(Y_{n+1}) = \dfrac{r + cE(X_n)}{N + nc}$.
3. Exprimer X_n à l'aide des variables $Y_1, \ldots, Y_n$ et en déduire que toutes les variables Y_n ont la même loi.
4. Déterminer l'espérance de X_n.

Exercice 18.
Soit $p \in]0, 1[$. Une puce se déplace aléatoirement sur une droite d'origine 0. A chaque instant elle fait un bond d'une unité vers la droite avec une probabilité p ou vers la gauche avec la probabilité $1 - p$. A l'instant initial, la puce est à l'origine.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la position de la puce à l'instant n.
Déterminer la loi de X_n ainsi que son espérance.

Exercice 19.
Soit $n \geq 2$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, dans laquelle on tire deux boules sans remise.
On note X (resp. Y) la variable aléatoire égale au plus petit (resp. au plus grand) des deux numéros obtenus.

1. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$
2. Déterminer la loi de Y.
3. Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.
4. Déterminer la loi de X.
5. Montrer que les variables aléatoires Y et $n + 1 - X$ ont même loi. En déduire $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 20.
On effectue une succesion infinie de lancers d'une pièce équilibrée. A chaque lancer, à partir du deuxième, si le côté obtenu est différent du côté obtenu au lancer précédent, on marque un point.
Pour $n \geq 2$, soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus à l'issu de n lancers.

1. Déterminer les lois , les espérances et les variances de X_2 et X_3.
2. Soit $n \geq 2$, quel est l'ensemble des valeurs prises par X_n ? Déterminer $P(X_n = 0)$ et $P(X_n = n - 1)$.
3. Soit $n \geq 2$, soit $k \in [\![1, n-1]\!]$, montrer que $P(X_{n+1} = k) = \dfrac{1}{2}P(X_n = k) + \dfrac{1}{2}P(X_n = k - 1)$.
4. Soit $n \geq 2$. On pose :
$$\begin{array}{rccl} Q_n : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & s & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k)s^k. \end{array}$$
   (a) Soit $n \geq 2$. Calculer $Q_n(1)$ et montrer que $Q_n'(1) = E(X_n)$. Exprimer $V(X_n)$ à l'aide de la fonction Q_n.
   (b) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, pour tout $s \in \mathbb{R}$, $Q_{n+1}(s) = \dfrac{(1+s)}{2}Q_n(s)$.
   (c) En déduire une expression de $Q_n(s)$ en fonction de n et de s.
   (d) Calculer alors, pour tout $n \geq 2$, l'espérance et la variance de X_n.

Exercice 21. Le jour 0, une action vaut 1. On suppose que, chaque jour, la valeur de l'action est multipliée par $\alpha > 1$ avec probabilité $p \in]0, 1[$, ou par $\beta \in]0, 1[$ avec probabilité $q = 1 - p$. On suppose que ces variations journalières sont indépendantes.
Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. On note S la variable aléatoire égale à la valeur de l'action le jour n.

1. Déterminer l'espérance et la variance de S.
2. On suppose $\beta = \frac{1}{\alpha}$. Quelle doit être la valeur de p pour que $E(S) = 1$?
3. On suppose $\beta = 1 - h$ et $\alpha = 1 + h$ pour $h \in]0, 1[$. Quelle doit être la valeur de p pour que $E(S) = 1$? Que vaut alors $V(S)$?

Exercice 22.
Une machine A fabrique 100 pièces. Chaque pièce fabriquée par la machine A a une probabilité de 5% d'être défectueuse. Une machine B, indépendante de A, fabrique 400 pièces. Chaque pièce fabriquée par la machine B a une probabilité de 10% d'être défectueuse.
Soit X (resp. Y) la variable aléatoire donnant le nombre de pièces défectueuses pour A (resp. B).
1. Déterminer les lois de X et Y.
2. Soit $Z = X + Y$. Déterminer $E(Z)$ et $V(Z)$.
3. Déterminer une valeur c pour laquelle le risque que le nombre de pièces défectueuses dans l'ensemble de la production soit supérieur à c est inférieur à 5%.

Exercice 23.
1. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
2. Montrer que si X suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$, on a :
$$V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$