Corrigé de la feuille d'exercices 7

1 Equations différentielles du 1er ordre

Exercice 1. 1. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est $x \mapsto \arctan x$.
Ainsi, les solutions de (E_1) sont :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-\arctan(x)} \end{array}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Comme sin ne s'annule pas sur $]0, pi[$, (E_2) est équivalente sur $]0,\pi[$ à $y' + \dfrac{\cos x}{\sin x} y = 0$.
Une primitive sur $]0,\pi[$ de $x \mapsto \dfrac{\cos x}{\sin x}$ est $x \mapsto \ln(|\sin(x)|) = \ln(\sin(x))$.
Ainsi, les solutions de (E_1) sont :

$$\begin{array}{rcl}]0,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-\ln(\sin(x))} = \dfrac{\lambda}{\sin x} \end{array}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

3.
   - On résout $y' - 2xy = 0$ sur $\mathbb{R}$.
   Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto -2x$ est $x \mapsto -x^2$,
   donc les solutions de $y' - 2xy = 0$ sont $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{x^2} \end{array}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
   - La fonction $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \operatorname{ch} x \end{array}$ est solution particulière de $y' - 2xy = \operatorname{sh}(x) - 2x\operatorname{ch}(x)$.
   - Ainsi, les solutions de $y' - 2xy = \operatorname{sh}(x) - 2x\operatorname{ch}(x)$ sont :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \operatorname{ch} x + \lambda e^{x^2} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

4.
   - On résout $y' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
   Les solutions de $y' + y = 0$ sont :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-x} \end{array}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

   - D'après la méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière de $y' + y = \dfrac{1}{1+e^x}$ de la forme $y : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda(x)e^{-x} \end{array}$ où λ est dérivable.

$$\begin{aligned} y' + y = \frac{1}{1+e^x} & \iff \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x)e^{-x} = \frac{1}{1+e^x} \\ & \iff \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \end{aligned}$$

   Or, $x \mapsto \ln(1+e^x)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^x}$.
   Donc $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(1+e^x)e^{-x} \end{array}$ est solution particulière de $y' + y = \dfrac{1}{1+e^x}$.
   - Ainsi, les solutions de $y' + y = \dfrac{1}{1+e^x}$ sont :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-x} + \ln(1+e^x)e^{-x} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

5.
   - On sait que : $\forall t \in]1,+\infty[$, $1 - t \neq 0$. Ainsi, (E) est équivalent sur $]1,+\infty[$ à $y' - \dfrac{1}{1-t} y = \dfrac{t}{1-t}$.

- On résout $y' - \dfrac{1}{1-t}y = 0$ sur $]1,+\infty[$.

  Une primitive sur $]1,+\infty[$ de $t \mapsto -\dfrac{1}{1-t}$ est $t \mapsto \ln|1-t|$,

  donc les solutions sur $]1,+\infty[$ de $y' - \dfrac{1}{1-t}y = 0$ sont $\begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{-\ln|t-1|} = \dfrac{\lambda}{|t-1|} = \dfrac{\lambda}{t-1} \end{array}$ $,\lambda \in \mathbb{R}$.

- D'après la méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière de $y' - \dfrac{1}{1-t}y = \dfrac{t}{1-t}$ de la forme $y: \begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{\lambda(t)}{t-1} \end{array}$ où λ est dérivable.

$$\begin{aligned} y' - \frac{1}{1-t}y = \frac{t}{1-t} & \iff \forall t \in]1,+\infty[, \frac{\lambda'(t)}{t-1} = \frac{t}{1-t} \\ & \iff \forall t \in]1,+\infty[, \ \lambda'(t) = -t \end{aligned}$$

  Or, $t \mapsto -\dfrac{t^2}{2}$ est une primitive de $t \mapsto -t$.

  Donc $\begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & -\dfrac{t^2}{2(t-1)} \end{array}$ est solution particulière de $y' - \dfrac{1}{1-t}y = \dfrac{t}{1-t}$.

- Ainsi, les solutions de $y' - \dfrac{1}{1-t}y = \dfrac{t}{1-t}$ sur $]1,+\infty[$ sont :

$$\begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{\lambda}{t-1} - \dfrac{t^2}{2(t-1)} \end{array} ,\lambda \in \mathbb{R}.$$

6.
- On résout $(E_0) : y' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

  Les solutions de (E_0) sont : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-x} \end{array}$ $,\lambda \in \mathbb{R}$.

- On applique ensuite le principe de superposition et on détermine une solution particulière des équations différentielles :

$$y' + y = 2e^x (E_1) \qquad \text{et } y' + y = 4\sin x + 3\cos x \qquad (E_2)$$

- $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x \end{array}$ est une solution particulière de (E_1).

- On cherche une solution particulière de (E_2) de la forme $y: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \alpha\cos x + \beta \sin x \end{array}$ $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} y' + y = 4\sin x + 3\cos x & \iff \forall x \in \mathbb{R},\ -\alpha\sin x + \beta\cos x + \alpha\cos x + \beta\sin x = 4\sin x + 3\cos x \\ & \iff \forall x \in \mathbb{R},\ (-\alpha+\beta-4)\sin x = (3-\alpha-\beta)\cos x \\ & \iff \begin{cases} -\alpha+\beta-4 = 0 \\ 3-\alpha-\beta = 0 \end{cases} \quad \text{car cos et sin sont non proportionnelles} \\ & \iff \begin{cases} -\alpha+\beta = 4 \\ \alpha+\beta = 3 \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} \beta = \frac{7}{2} \\ \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

  Donc $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{7}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x \end{array}$ est solution particulière de (E_2).

- Ainsi, $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{3x} + \dfrac{7}{2}\sin x - \dfrac{1}{2}\cos x \end{array}$ est une solution particulière de (E).

- Finalement, les solutions de (E) sont :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-x} + e^x + \dfrac{7}{2}\sin x - \dfrac{1}{2}\cos x \end{array} ,\lambda \in \mathbb{R}$$

7. • On résout $y' + 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Les solutions de $y' + 2y = 0$ sont $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-2x} \end{array}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

• Le second membre étant une fonction polynomiale de degré 2, on cherche une solution particulière de $y' + 2y = x^2$ de la forme : $y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax^2 + bx + c \end{array}$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} y' + 2y = x^2 & \iff \forall x \in \mathbb{R},\ 2ax + b + 2ax^2 + 2bx + 2c = x^2 \\ & \iff \forall x \in \mathbb{R},\ 2ax^2 + (2a + 2b)x + b + 2c = x^2 \\ & \iff \begin{cases} 2a = 1 \\ 2a + 2b = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -\dfrac{1}{2} \\ c = \dfrac{1}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \end{array}$ est solution particulière de $y' + 2y = x^2$.

• Ainsi, les solutions de $y' + 2y = x^2$ sont :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \lambda e^{-2x} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2. 1. Une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est $x \mapsto \ln x$.

Donc les solutions de $y' + \dfrac{1}{x}y = 0$ sont :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-\ln(x)} = \dfrac{\lambda}{x} \end{array},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto -\dfrac{2}{x^3}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$.

Donc les solutions de $y' - \dfrac{2}{x^3}y = 0$ sont :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-\frac{1}{x^2}} \end{array},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons : $y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-\frac{1}{x^2}} \end{array}$

$$\begin{aligned} y(1) = 2 & \iff e^{-1}\lambda = 2 \\ & \iff \lambda = 2e \end{aligned}$$

Ainsi, l'unique solution du problème de Cauchy considéré est $y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2e \times e^{-\frac{1}{x^2}} \end{array}$

3. • On résout $y' - 2xy = 0$ sur $\mathbb{R}$.
Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto -2x$ est $x \mapsto -x^2$.
Donc les solutions de $y' - 2xy = 0$ sont :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{x^2} \end{array},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

• D'après la méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière de $y' - 2xy = xe^{x^2}$ de la forme $y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda(x)e^{x^2} \end{array}$ où λ est dérivable.

$$\begin{aligned} y' - 2xy = xe^{x^2} & \iff \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x)e^{x^2} = xe^{x^2} \\ & \iff \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = x \end{aligned}$$

Or, $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ est une primitive de $x \mapsto x$.

Donc $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^2}{2}e^{x^2} \end{array}$ est solution particulière de $y' - 2xy = xe^{x^2}$.

- Ainsi, les solutions de $y' - 2xy = xe^{x^2}$ sont :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{x^2} + \dfrac{x^2}{2}e^{x^2} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

4. - On résout $y' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
   Les solutions de $y' + y = 0$ sont :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-x} \end{array}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

- D'après la méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière de $y' + y = e^{-x} + e^{-2x}$ de la forme $y : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda(x)e^{-x} \end{array}$ où λ est dérivable.

$$\begin{array}{rcl} y' + y = e^{-x} + e^{-2x} & \iff & \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x)e^{-x} = e^{-x} + e^{-2x} \\ & \iff & \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = 1 + e^{-x} \end{array}$$

Or, $x \mapsto x - e^{-x}$ est une primitive de $x \mapsto 1 + e^{-x}$.

Donc $\begin{array}{rcl}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^{-x} - e^{-2x} \end{array}$ est solution particulière de $y' + y = e^{-x} + e^{-2x}$.

- Ainsi, les solutions de $y' + y = e^{-x} + e^{-2x}$ sont :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^{-x} - e^{-2x} + \lambda e^{-x} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

5. - On résout $y' - 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
   Les solutions de $y' - 2y = 0$ sont :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{2x} \end{array}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

- D'après la méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière de $y' - 2y = (x+1)e^{x}$ de la forme $y : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda(x)e^{2x} \end{array}$ où λ est dérivable.

$$\begin{array}{rcl} y' - 2y = (x+1)e^{x} & \iff & \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x)e^{2x} = (x+1)e^{x} \\ & \iff & \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = (x+1)e^{-x} \end{array}$$

Soit $x, a \in \mathbb{R}$. On effectue l'intégration par parties :

$$\begin{array}{lcl} u'(t) = e^{-t}, & \text{et} & v(t) = t + 1 \\ u(t) = -e^{-t} & \text{et} & v'(t) = 1 \end{array}.$$

u et v sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$\int_a^x (t+1)e^{-t}dt = \Big[-(t+1)e^{-t}\Big]_a^x + \int_a^x e^{-t}dt = -(x+1)e^{-x} - \Big[e^{-t}\Big]_0^x + C_1 = -(x+1)e^{-x} - e^{-x} + C_2$$

où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Ainsi, $x \mapsto -(x+2)e^{-x}$ est une primitive de $x \mapsto (x+1)e^{-x}$.

Donc $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -(x+2)e^{x} \end{array}$ est solution particulière de $y' + y = (x+1)e^{x}$.

- Ainsi, les solutions de $y' + y = (x+1)e^{x}$ sont :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -(x+2)e^{x} + \lambda e^{2x} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

6. • On résout $y' - \tan(x)y = 0$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Une primitive sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de $x \mapsto -\tan(x)$ est $x \mapsto \ln(|\cos x|) = \ln(\cos(x))$.
Donc les solutions de $y' - \tan(x)y = 0$ sont :

$$\begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-\ln(\cos x)} = \dfrac{\lambda}{\cos x} \end{array}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

• D'après la méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière de $y' - \tan(x)y = \cos^2(x)$ de la forme $y : \begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\lambda(x)}{\cos x} \end{array}$ où λ est dérivable.

$$\begin{aligned} y' - \tan(x)y = \cos^2(x) &\iff \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \frac{\lambda'(x)}{\cos x} = \cos^2 x \\ &\iff \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \ \lambda'(x) = \cos^3 x \end{aligned}$$

On linéarise $\cos^3$.
Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos x$.
Ainsi, $x \mapsto \frac{1}{12}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin x$ est une primitive de $x \mapsto \cos^3(x)$.
Donc $\begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left(\dfrac{1}{12}\sin(3x) + \dfrac{3}{4}\sin x\right)\dfrac{1}{\cos x} \end{array}$ est solution particulière de $y' - \tan(x)y = \cos^2(x)$.

• Ainsi, les solutions de $y' - \tan(x)y = \cos^2(x)$ sont :

$$\begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\cos x}\left(\dfrac{1}{12}\sin(3x) + \dfrac{3}{4}\sin x + \lambda\right) \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

7. • On résout $y' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
Les solutions de $y' + y = 0$ sont :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-x} \end{array}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

• D'après la méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière de $y' + y = xe^x \cos x$ de la forme $y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda(x)e^{-x} \end{array}$ où λ est dérivable.

$$\begin{aligned} y' + y = xe^x \cos x &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x)e^{-x} = xe^x \cos x \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \ \lambda'(x) = xe^{2x}\cos x = \mathrm{Re}(xe^{(2+i)x}) \end{aligned}$$

Soit $x, a \in \mathbb{R}$. On effectue l'intégration par parties :

$$\begin{array}{lcl} u'(t) = e^{(2+i)t}, & \text{et} & v(t) = t \\ u(t) = \dfrac{e^{(2+i)t}}{2+i} & \text{et} & v'(t) = 1 \end{array}.$$

u et v sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned} \int_a^x te^{(2+i)t}dt &= \left[\frac{te^{(2+i)t}}{2+i}\right]_a^x - \int_a^x \frac{e^{(2+i)t}}{2+i}dt \\ &= \frac{xe^{(2+i)x}}{2+i} - \frac{1}{2+i}\left[\frac{e^{(2+i)t}}{2+i}\right]_a^x + C_1 \\ &= \frac{xe^{(2+i)x}}{2+i} - \frac{e^{(2+i)x}}{(2+i)^2} + C_2 \end{aligned}$$

où $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$.
On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left(\frac{xe^{(2+i)x}}{2+i} - \frac{e^{(2+i)x}}{(2+i)^2}\right) &= \mathrm{Re}\left(\frac{(2-i)}{5}xe^{(2+i)x} - \frac{(2-i)^2}{25}e^{(2+i)x}\right) \\
&= \frac{xe^{2x}}{5}\mathrm{Re}\left((2-i)e^{ix}\right) - \frac{e^{2x}}{25}\mathrm{Re}\left((3-4i)e^{ix}\right) \\
&= \frac{xe^{2x}}{5}\left(2\cos x + \sin x\right) - \frac{e^{2x}}{25}\left(3\cos x + 4\sin x\right) \\
&= \frac{(10x-3)}{25}e^{2x}\cos x + \frac{(5x-4)}{25}e^{2x}\sin x
\end{aligned}$$

Ainsi, $x \mapsto \dfrac{(10x-3)}{25}e^{2x}\cos x + \dfrac{(5x-4)}{25}e^{2x}\sin x$ est une primitive de $x \mapsto xe^{2x}\cos x$.

Donc $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{(10x-3)}{25}e^{x}\cos x + \dfrac{(5x-4)}{25}e^{x}\sin x \end{array}$ est solution particulière de $y' + y = xe^x\cos x$.

- Finalement, les solutions de $y' + y = xe^x\cos x$ sont :

$$\begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (\dfrac{(10x-3)}{25}e^{x}\cos x + \dfrac{(5x-4)}{25}e^{x}\sin x + \lambda e^{-x} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

8. $2y' - y = \sin x$ est équivalente à $y' - \dfrac{1}{2}y = \dfrac{\sin x}{2}$

- On résout $y' - \dfrac{1}{2}y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

  Les solutions de $y' - \dfrac{1}{2}y = 0$ sont : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-\frac{1}{2}x} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}$.

- On cherche une solution particulière de $y' - \dfrac{1}{2}y = \dfrac{\sin x}{2}$ de la forme $y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a\cos x + b\sin x \end{array}$ $a,\ b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
y' - \frac{1}{2}y = \frac{\sin x}{2} &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ -a\sin x + b\cos x - \frac{a}{2}\cos x - \frac{b}{2}\sin x = \frac{\sin x}{2} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \left(-\frac{a}{2} + b\right)\cos x = \left(a + \frac{b}{2} + \frac{1}{2}\right)\sin x \\
&\iff \begin{cases} a + \dfrac{b}{2} + \dfrac{1}{2} = 0 \\ -\dfrac{a}{2} + b = 0 \end{cases} \quad \text{car cos et sin sont non proportionnelles} \\
&\iff \begin{cases} -\left(a + \dfrac{b}{2}\right) = \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{a}{2} + b = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2a + b = -1 \\ -a + 2b = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a = -\dfrac{2}{5} \\ b = \dfrac{-1}{5} \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\dfrac{2}{5}\cos(x) - \dfrac{1}{5}\sin(x) \end{array}$ est solution particulière de $y' - \dfrac{1}{2}y = \dfrac{\sin x}{2}$.

- Ainsi, les solutions de $y' - \dfrac{1}{2}y = \dfrac{\sin x}{2}$ sont :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-x} + e^{3x} - \dfrac{1}{5}\sin x - \dfrac{2}{5}\cos x \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}$$

9. • On résout $y' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$. Les solutions de $y' + y = 0$ sont : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-x} \end{array}$ $, \lambda \in \mathbb{R}$.

- On applique ensuite le principe de superposition et on détermine une solution particulière des équations différentielles :

$$y' + y = 2\cos x (E_1) \qquad \text{et } y' + y = \cos(2x) \qquad (E_2)$$

- On cherche une solution particulière de (E_1) de la forme $y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a\cos x + b\sin x \end{array}$ $a,\ b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} y' + y = 2\cos x & \iff \forall x \in \mathbb{R},\ -a\sin x + b\cos x + a\cos x + b\sin x = 2\cos x \\ & \iff \forall x \in \mathbb{R},\ (-a+b)\sin x + + (a+b)\cos x = 2\cos x \\ & \iff \begin{cases} -a + b = 0 \\ a + b = 2 \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) + \sin(x) \end{array}$ est solution particulière de (E_1).

- On cherche une solution particulière de (E_2) de la forme $y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a\cos(2x) + b\sin(2x) \end{array}$ $a,\ b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} y' + y = \cos(2x) & \iff \forall x \in \mathbb{R},\ -2a\sin(2x) + 2b\cos(2x) + a\cos(2x) + b\sin(2x) = \cos(2x) \\ & \iff \forall x \in \mathbb{R},\ (-2a+b)\sin(2x) + (a+2b)\cos x = \cos(2x) \\ & \iff \begin{cases} -2a + b = 0 \\ a + 2b = 1 \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} a = \frac{1}{5} \\ b = \frac{2}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{5}\cos(2x) + \frac{2}{5}\sin(x) \end{array}$ est solution particulière de (E_2).

- Finalement, $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) + \sin(x) + \frac{1}{5}\cos(2x) + \frac{2}{5}\sin(x) \end{array}$ est solution particulière de $y' + y = 2\cos(x) + \cos(2x)$.

- Ainsi, les solutions de $y' + y = 2\cos(x) + \cos(2x)$ sont :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos x + \sin x + \frac{1}{5}\cos(2x) + \frac{2}{5}\sin(2x) + \lambda e^{-x} \end{array} \quad , \lambda \in \mathbb{R}$$

Exercice 3. • On résout $y' + \sin(x)y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \sin x$ est $x \mapsto -\cos x$,
donc les solutions de $y' + \sin(x)y = 0$ sont $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{\cos x} \end{array}$ $, \lambda \in \mathbb{R}$.

- On sait que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$. La fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2\cos(x) + 2 \end{array}$ est solution particulière de $y' + \sin(x)y = \sin(2x)$.

- Ainsi, les solutions de $y' + \sin(x)y = \sin(2x)$ sont :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{\cos(x)} + 2\cos(x) + 2 \end{array} \quad , \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4. 1. • On sait que : $\forall x \in]1,+\infty[$, $x\ln(x) \neq 0$. Ainsi, sur $]1,+\infty[$:

$$x\ln(x)y' - y = -\frac{1}{x}(\ln(x)+1) \iff y' - \frac{1}{x\ln(x)}y = -\frac{1}{x^2\ln x}(\ln(x)+1)$$

- On résout $y' - \dfrac{1}{x\ln(x)}y = 0$ sur $]1,+\infty[$.
  Une primitive sur $]1,+\infty[$ de $x \mapsto -\dfrac{1}{x\ln(x)}$ est $x \mapsto -\ln|\ln x| = -\ln(\ln x)$,
  Donc les solutions de $y' - \dfrac{1}{x\ln(x)}y = 0$ sont $\begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{\ln(\ln x)} = \lambda \ln x \end{array}$ $,\lambda \in \mathbb{R}$.
- D'après la méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière de $y' - \dfrac{1}{x\ln(x)}y = -\dfrac{1}{x^2\ln x}(\ln(x)+1)$ de la forme $y : \begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda(x)\ln x \end{array}$ où λ est dérivable.

$$\begin{aligned} y' - \frac{1}{x\ln(x)}y = -\frac{1}{x^2\ln x}(\ln(x)+1) &\iff \forall x \in]-1,+\infty[\,, \lambda'(x)\ln(x) = -\frac{1}{x^2\ln x}(\ln(x)+1) \\ &\iff \forall x \in]-1,+\infty[\,,\ \lambda'(x) = -\frac{1}{x^2(\ln x)^2}(\ln(x)+1) \end{aligned}$$

Or, $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln x}$ est une primitive de $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2(\ln x)^2}(\ln(x)+1)$.

Donc $\begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$ est solution particulière de $y' - \dfrac{1}{x\ln(x)}y = -\dfrac{1}{x^2\ln x}(\ln(x)+1)$.

- Ainsi, les solutions sur $]1,+\infty[$ de $y' - \dfrac{1}{x\ln(x)}y = -\dfrac{1}{x^2\ln x}(\ln(x)+1)$ sont :

$$\begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} + \lambda \ln x \end{array} ,\lambda \in \mathbb{R}.$$

2. • On sait que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+1 \neq 0$. Ainsi,

$$(1+x^2)y' + xy = \sqrt{1+x^2} \iff y' + \frac{x}{1+x^2}y = \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}$$

- On résout $y' + \dfrac{x}{1+x^2}y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
  Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$,
  Donc les solutions de $y' + \dfrac{x}{1+x^2}y = 0$ sont $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)} = \dfrac{\lambda}{\sqrt{x^2+1}} \end{array}$ $,\lambda \in \mathbb{R}$.
- D'après la méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière de $y' + \dfrac{x}{1+x^2}y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ de la forme $y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\lambda(x)}{\sqrt{x^2+1}} \end{array}$ où λ est dérivable.

$$\begin{aligned} y' + \frac{x}{1+x^2}y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \frac{\lambda'(x)}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = 1 \end{aligned}$$

Or, $x \mapsto x$ est une primitive de $x \mapsto 1$.

Donc $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{array}$ est solution particulière de $y' + \dfrac{x}{1+x^2}y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

- Ainsi, les solutions de $y' + \dfrac{x}{1+x^2}y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ sont :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+\lambda}{\sqrt{x^2+1}} \end{array} ,\lambda \in \mathbb{R}.$$

3. • On sait que : $\forall x \in]0,1[,\ 1-x \neq 0$.
Ainsi, $(1-x)y' + y = \dfrac{x-1}{x}$ est équivalente sur $]0,1[$ à $y' + \dfrac{1}{(1-x)}y = -\dfrac{1}{x}$.

• On résout $y' + \dfrac{1}{(1-x)}y = 0$ sur $]0,1[$.

Une primitive sur $]0,1[$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est $x \mapsto -\ln(|1-x|) = -\ln(1-x)$,

Donc les solutions de $y' + \dfrac{1}{(1-x)}y = 0$ sont $\begin{array}{ccc}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{\ln(1-x)} = \lambda(1-x) \end{array}$ $,\lambda \in \mathbb{R}$.

• D'après la méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière de $y' + \dfrac{1}{(1-x)}y = -\dfrac{1}{x}$

de la forme $y: \begin{array}{ccc}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda(x)(1-x) \end{array}$ où λ est dérivable.

$$\begin{aligned} y' + \frac{1}{(1-x)}y = -\frac{1}{x} &\iff \forall x \in]0,1[, \lambda'(x)(1-x) = -\frac{1}{x} \\ &\iff \forall x \in]0,1[,\ \lambda'(x) = -\frac{1}{(1-x)x} \end{aligned}$$

Soit $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & \forall x \in]0,1[,\ -\frac{1}{x(1-x)} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{x} \\ \iff & \forall x \in]0,1[,\ -\frac{1}{x(1-x)} = \frac{ax + b(1-x)}{x(1-x)} \\ \iff & \forall x \in]0,1[,\ -\frac{1}{x(1-x)} = \frac{(a-b)x + b}{x(1-x)} \\ \iff & \begin{cases} a - b = 0 \\ b = -1 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall x \in]0,1[,\ -\frac{1}{(1-x)x} = -\frac{1}{1-x} - \frac{1}{x}$$

Or, $x \mapsto \ln(1-x) - \ln x$ est une primitive de $x \mapsto -\dfrac{1}{(1-x)x}$.

Donc $\begin{array}{ccc}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (1-x)(\ln(1-x) - \ln x) \end{array}$ est solution particulière de $y' + \dfrac{1}{(1-x)}y = -\dfrac{1}{x}$.

• Ainsi, les solutions de $y' + \dfrac{1}{(1-x)}y = -\dfrac{1}{x}$ sont :

$$\begin{array}{ccc}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (\ln(1-x) - \ln x + \lambda)(1-x) \end{array} \quad ,\lambda \in \mathbb{R}.$$

4. • On sait que : $\forall t \in \mathbb{R},\ 1 + t^2 \neq 0$.
Ainsi, $(1+t^2)x' + x = \arctan(t)$ est équivalente sur $\mathbb{R}$ à
$x' + \dfrac{1}{1+t^2}x = \dfrac{\arctan(t)}{1+t^2}$

• On résout $x' + \dfrac{1}{1+t^2}x = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est $t \mapsto \arctan(t)$,

Donc les solutions de $x' + \dfrac{1}{1+t^2}x = 0$ sont $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{-\arctan(t)} \end{array}$ $,\lambda \in \mathbb{R}$.

• $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \arctan(t) - 1 \end{array}$ est une solution particulière de $x' + \dfrac{1}{1+t^2}x = \dfrac{\arctan(t)}{1+t^2}$.

- Ainsi, les solutions de $x' + \dfrac{1}{1+t^2}x = \dfrac{\arctan(t)}{1+t^2}$ sont :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan(t) - 1 + \lambda e^{-\arctan(t)} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

5. - On sait que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x \neq 0$.
   Ainsi, $xy' + (x-2)y = x-2$ est équivalente sur $\mathbb{R}_+^*$ à
   $y' + \dfrac{(x-2)}{x}y = \dfrac{x-2}{x}$
   - On résout $y' + \dfrac{(x-2)}{x}y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto \dfrac{x-2}{x} = 1 - \dfrac{2}{x}$ est $x \mapsto x - 2\ln x$,
   Donc les solutions de $y' + \dfrac{(x-2)}{x}y = 0$ sont $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-x+2\ln x} = \lambda x^2 e^{-x} \end{array}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
   - $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{array}$ est une solution particulière de $y' + \dfrac{(x-2)}{x}y = \dfrac{x-2}{x}$.
   - Ainsi, les solutions de $y' + \dfrac{(x-2)}{x}y = \dfrac{x-2}{x}$ sont :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 + \lambda x^2 e^{-x} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

6. - On sait que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^4 + 1 \neq 0 \neq 0$.
   Ainsi, $(x^4+1)y' - x^3y = x^5 - x^3 + 2x + 1$ est équivalente sur $\mathbb{R}$ à $y' - \dfrac{x^3}{x^4+1}y = \dfrac{x^5 - x^3 + 2x + 1}{x^4+1}$
   - On résout $y' - \dfrac{x^3}{x^4+1}y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
   Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto -\dfrac{x^3}{x^4+1}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{4}\ln(1+x^4)$,
   Donc les solutions de $y' - \dfrac{x^3}{x^4+1}y = 0$ sont $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{\frac{1}{4}\ln(1+x^4)} = \lambda \sqrt[4]{1+x^4} \end{array}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
   - On cherche une solution particulière de $y' - \dfrac{x^3}{x^4+1}y = \dfrac{x^5 - x^3 + 2x + 1}{x^4+1}$ de la forme : $y : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax^2 + bx + c \end{array}$
   où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (x^4+1)y' - x^3y = x^5 - x^3 + 2x + 1 &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (x^4+1)(2ax+b) - x^3(ax^2+bx+c) = x^5 - x^3 + 2x + 1 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (2a-a)x^5 + (b-b)x^4 - cx^3 + 2ax + b = x^5 - x^3 + 2x + 1 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ ax^5 - cx^3 + 2ax + b = x^5 - x^3 + 2x + 1 \\ &\iff \begin{cases} a = 1 \\ -c = -1 \\ 2a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

   Donc la fonction $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + x + 1 \end{array}$ est solution particulière de $y' - \dfrac{x^3}{x^4+1}y = \dfrac{x^5 - x^3 + 2x + 1}{x^4+1}$.
   - Ainsi, les solutions de $y' - \dfrac{x^3}{x^4+1}y = \dfrac{x^5 - x^3 + 2x + 1}{x^4+1}$ sont :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + x + 1 + \lambda \sqrt[4]{1+x^4} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5. 1. Au vu des différents degrés des polynômes, on cherche une solution de la forme $y : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax + b \end{array}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
(x+1)y'+xy=x^2-x+1 &\iff \forall x\in\mathbb{R},\ a(x+1)+(2x-1)(ax+b)=x^2-x+1\\
&\iff \forall x\in\mathbb{R},\ a(x+1)+x(ax+b)=x^2-x+1\\
&\iff \forall x\in\mathbb{R},\ ax^2+(a+b)x+a=x^2-x+1\\
&\iff \left\{\begin{array}{l} a=1\\ a+b=-1\\ a=1\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{l} a=1\\ b=-2\end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Donc la fonction $\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & x-2\end{array}$ est solution particulière de $(x+1)y'+xy=x^2-x+1$.

2. - On sait que : $\forall x\in]-1,+\infty[,\ x+1\neq 0\neq 0$.
     Ainsi, $(x+1)y'+xy=x^2-x+1$ est équivalente sur $]-1,+\infty[$ à
     $y'+\dfrac{x}{x+1}y=\dfrac{x^2-x+1}{x+1}$
   - On résout $y'+\dfrac{x}{x+1}y=0$ sur $]-1,+\infty[$.
     Une primitive sur $]-1,+\infty[$ de $x\mapsto\dfrac{x}{x+1}=1-\dfrac{1}{x+1}$ est $x\mapsto x-\ln(x+1)$,
     Donc les solutions de $y'+\dfrac{x}{x+1}y=0$ sont $\begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \lambda e^{x-\ln(x+1)}=\lambda e^{-x}(1+x)\end{array}$ $,\lambda\in\mathbb{R}$.
   - D'après la question précédente, $\begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & x-2\end{array}$ est solution particulière de $y'+\dfrac{x}{x+1}y=\dfrac{x^2-x+1}{x+1}$.
   - Ainsi, les solutions de $y'+\dfrac{x}{x+1}y=\dfrac{x^2-x+1}{x+1}$ sont :

$$\begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & x-2+\lambda e^{-x}(1+x)\end{array}\quad ,\lambda\in\mathbb{R}.$$

3. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Posons : $y:\ \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & x-2+\lambda e^{-x}(1+x)\end{array}$

$$
\begin{aligned}
y(1)=1 &\iff -1+2\lambda e^{-1}=1\\
&\iff \lambda e^{-1}=1\\
&\iff \lambda=e
\end{aligned}
$$

Ainsi, l'unique solution du problème de Cauchy considéré est $y:\ \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & x-2+e^{-x+1}(1+x)\end{array}$

Exercice 6. • Commençons par résoudre $(1-t)y'-y=t$ sur $]1,+\infty[$ et sur $]-\infty,1[$. On pose $I_1=]1,+\infty[$ et $I_2=]-\infty,1[$. Soit $k\in\{1,2\}$,

- On sait que : $\forall t\in I_k,\ 1-t\neq 0$. Ainsi, (E) est équivalente sur I_k à $y'-\dfrac{1}{1-t}y=\dfrac{t}{1-t}$.
- On résout $y'-\dfrac{1}{1-t}y=0$ sur I_k.
  Une primitive sur I_k de $t\mapsto-\dfrac{1}{1-t}$ est $t\mapsto\ln|1-t|$,
  donc les solutions sur I_k de $y'-\dfrac{1}{1-t}y=0$ sont :

$$\begin{array}{ccc} I_k & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \lambda e^{-\ln|t-1|}=\dfrac{\lambda}{|t-1|}\end{array}\quad ,\lambda\in\mathbb{R}.$$

  Comme $t\mapsto t-1$ garde un signe constant sur I_k, quitte à changer λ en $-\lambda$, les solutions sur I_k de $y'-\dfrac{1}{1-t}y=0$ sont $\begin{array}{ccc} I_k & \to & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & \dfrac{\lambda}{t-1}\end{array}$ $,\lambda\in\mathbb{R}$.

- D'après la méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière de $y' - \dfrac{1}{1-t}y = \dfrac{t}{1-t}$ de la forme $\begin{array}{rccl} y: & I_k & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \dfrac{\lambda(t)}{t-1} \end{array}$ où λ est dérivable.

$$\begin{aligned} y' - \frac{1}{1-t}y = \frac{t}{1-t} & \iff \forall t \in I_k,\ \frac{\lambda'(t)}{t-1} = \frac{t}{1-t} \\ & \iff \forall t \in I_k,\ \lambda'(t) = -t \end{aligned}$$

Or, $t \mapsto -\dfrac{t^2}{2}$ est une primitive de $t \mapsto -t$.

Donc $\begin{array}{rcl} I_k & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & -\dfrac{t^2}{2(t-1)} \end{array}$ est solution particulière de $y' - \dfrac{1}{1-t}y = \dfrac{t}{1-t}$.

- Ainsi, les solutions de $y' - \dfrac{1}{1-t}y = \dfrac{t}{1-t}$ sur I_k sont :

$$\begin{array}{rcl} I_k & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{\lambda}{t-1} - \dfrac{t^2}{2(t-1)} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Il reste à étudier s'il existe une solution sur $\mathbb{R}$.

$$y \text{ solution sur } \mathbb{R} \text{ de } (E) \iff \begin{cases} \exists \lambda_1 \in \mathbb{R}, \forall t \in]-\infty, 1[,\ y(t) = \dfrac{\lambda_1}{t-1} - \dfrac{t^2}{2(t-1)} \\ \exists \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall t \in]1, +\infty[,\ y(t) = \dfrac{\lambda_2}{t-1} - \dfrac{t^2}{2(t-1)} \\ y(1) = -1 \\ y \text{ est continue et dérivable en } 1 \end{cases}$$

Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $\begin{array}{rccl} y: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{2\lambda_1 - t^2}{t-1} & \text{si } t < 1 \\ \dfrac{2\lambda_2 - t^2}{t-1} & \text{si } t > 1 \\ -1 \quad \text{si } t = 1 \end{cases} \end{array}$.

<u>Continuité en 1 :</u>
On a : $\lim\limits_{t\to 1}(2\lambda_1 + t^2) = 2\lambda_1 - 1$ et $\lim\limits_{t \to 1} 2(t-1) = 0$.
Si $\lambda_1 \neq \dfrac{1}{2}$, on a $\lim\limits_{t \to 1^-} y(t) = \pm\infty$.
Si $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}$, on a : $\forall t \in]-\infty, 1[$, $y(t) = \dfrac{1-t^2}{2(t-1)} = \dfrac{(1-t)(1+t)}{2(t-1)} = -\dfrac{(1+t)}{2}$ donc $\lim\limits_{t\to 1^-} y(t) = -1 = y(1)$.
De même, $\lim\limits_{t \to 1^-} y(t) = \begin{cases} -1 = y(1) & \text{si } \lambda_1 = \dfrac{1}{2} \\ \pm\infty & \text{si } \lambda_1 > \dfrac{1}{2} \end{cases}$.
Ainsi, y est continue en 1 si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{1}{2}$.
On suppose désormais que $\lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{1}{2}$.
Ainsi, $\begin{array}{rccl} y: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \dfrac{-(t+1)}{2} \end{array}$.

<u>Dérivabilité en 1 :</u>
y est dérivable en 1.

Finalement, l'équation (E) admet pour unique solution sur $\mathbb{R}$ la fonction :

$$\begin{array}{rccl} y: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & -\dfrac{(t+1)}{2} \end{array}.$$

Exercice 7. • Résolvons $xy' - (1+x)y = -x^2$ sur $I_1 = \mathbb{R}_+^*$ et $I_2 = \mathbb{R}_-^*$.

Soit $k \in \{1,2\}$.

- Sur I_k, (E) équivaut à $y' - \dfrac{(1+x)}{x}y = -x$.
- On résout (E_0) $\quad y' - \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)y = 0$ sur I_k.

  Une primitive sur I_k de $x \mapsto \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ est $x \mapsto x + \ln(|x|)$,

  donc les solutions sur I_k de (E_0) sont : $\begin{array}{ccc} I_k & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{x+\ln|x|} = \lambda|x|e^x \end{array}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

  Comme x ne change pas de change de signe sur I_k, quitte à changer λ en $-\lambda$, on peut conclure que les solutions sur I_k de (E_0) sont $\begin{array}{ccc} I_k & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda x e^x \end{array}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- La fonction $\begin{array}{ccc} I_k & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$ est solution particulière de $y' - \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)y = -x$.
- Ainsi, les solutions de $y' - \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)y$ sur I_k sont :

$$\begin{array}{ccc} I_k & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x + \lambda x e^x \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Il reste à étudier s'il existe une solution sur $\mathbb{R}$.

$$y \text{ solution sur } \mathbb{R} \text{ de } (E) \iff \begin{cases} \exists \lambda_1 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \ y(x) = x + \lambda_1 x e^x \\ \exists \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ y(x) = x + \lambda_2 x e^x \\ y(0) = 0 \\ y \text{ est continue et dérivable en } 0 \end{cases}$$

Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $\begin{array}{cccc} y: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} x + \lambda_1 x e^x & \text{si } x < 0 \\ x + \lambda_2 x e^x & \text{si } x > 0 \\ 0 \quad \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$.

<u>Continuité en 0 :</u>
On a $\lim\limits_{x \to 0^-} y(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x + \lambda_1 x e^x) = 0 = y(0)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} y(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x + \lambda_2 x e^x) = 0 = y(0)$.
Ainsi, y est continue en 0. (aucune condition sur λ_1 ou λ_2).
<u>Dérivabilité en 0 :</u>
On a $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\dfrac{y(x) - y(0)}{x}\right) = \lim\limits_{x \to 0^-} (1 + \lambda_1 e^x) = 1 + \lambda_1$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{y(x) - y(0)}{x}\right) = \lim\limits_{x \to 0^+} (1 + \lambda_2 e^x) = 1 + \lambda_2$.
Ainsi, y est dérivable en 0 si et seulement si $1 + \lambda_1 = 1 + \lambda_2$.
Finalement, l'équation (E) admet pour solutions sur $\mathbb{R}$ les fonctions :

$$\begin{array}{cccc} y: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x + \lambda x e^x \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Exercice 8. • Posons $I_1 =]-\infty, 0[$, $I_2 =]0, 1[$ et $I_3 =]1, +\infty[$.

Soit $k \in \{1,2,3\}$.Ainsi, $x(x-1)y' + (2x-1)y = 1$ est équivalente sur I_k à $y' + \dfrac{(2x-1)}{x(x-1)}y = \dfrac{1}{x(x-1)}$.

- On résout $y' + \dfrac{(2x-1)}{x(x-1)}y = 0$ sur I_k.

Une primitive sur $]0,1[$ de $x \mapsto \dfrac{(2x-1)}{x(x-1)}$ est $x \mapsto \ln|x(x-1)|$.

Les solutions de $y' + \dfrac{(2x-1)}{x(x-1)}y = 0$ sont :

$$\begin{array}{ccc} I_k & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-\ln|x(1-x)|} = \dfrac{\lambda}{|x(1-x)|} \end{array}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Comme $x \mapsto x(1-x)$ garde un signe constant sur I_k et quitte à remplacer λ en $-\lambda$, les solutions sur I_k de (E) sont :

$$\begin{array}{ccc} I_k & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\lambda}{x(1-x)} \end{array}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

- D'après la méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière de $y' + \dfrac{(2x-1)}{x(x-1)}y = \dfrac{1}{x(x-1)}$ de la forme $\begin{array}{rccc} y: & I_k & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{\lambda(x)}{x(1-x)} \end{array}$ où λ est dérivable.

$$\begin{aligned} y' + \frac{(2x-1)}{x(x-1)}y = \frac{1}{x(x-1)} &\iff \forall x \in I_k,\ \frac{\lambda'(x)}{x(1-x)} = \frac{1}{x(x-1)} \\ &\iff \forall x \in I_k,\ \lambda'(x) = -1 \end{aligned}$$

Or, $x \mapsto -x$ est une primitive sur I_k de $x \mapsto -1$.
Donc $\begin{array}{rcl} I_k & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\dfrac{x}{x(1-x)} = \dfrac{1}{x-1} \end{array}$ est solution particulière sur I_k de $y' + \dfrac{(2x-1)}{x(x-1)}y = \dfrac{1}{x(x-1)}$.

- Ainsi, les solutions de $y' + \dfrac{(2x-1)}{x(x-1)}y = \dfrac{1}{x(x-1)}$ sur I_k sont :

$$\begin{array}{rcl} I_k & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\lambda - x}{x(1-x)} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Il reste à étudier s'il existe une solution sur $\mathbb{R}$.

$$y \text{ solution sur } \mathbb{R} \text{ de } (E) \iff \begin{cases} \exists \lambda_1 \in \mathbb{R}, \forall x \in]-\infty, 0[,\ y(x) = \dfrac{\lambda_2 - x}{x(1-x)} \\ \exists \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall x \in]0,1[,\ y(x) = \dfrac{\lambda_1 - x}{x(1-x)} \\ \exists \lambda_3 \in \mathbb{R}, \forall x \in]1, +\infty[,\ y(x) = \dfrac{\lambda_3 - x}{x(1-x)} \\ y(0) = -1 \\ y(1) = 1 \\ y \text{ est continue et dérivable en 0 et en 1} \end{cases}$$

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ et $\begin{array}{rccc} y: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{\lambda_1 - x}{x(1-x)} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\lambda_2 - x}{x(1-x)} & \text{si } x \in]0,1[\\ \dfrac{\lambda_3 - x}{x(1-x)} & \text{si } x > 1 \\ -1 \quad \text{si } x = 01 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{array}$.

Continuité en 0 :
On a $\lim\limits_{x \to 0} \lambda_1 - x = \lambda_1$ et $\lim\limits_{x \to 0} x(1-x) = 0$.
Si $\lambda_1 \neq 0$ alors $\lim\limits_{x \to 0^-} y(x) = \pm\infty$.
Si $\lambda_1 = 0$, on a : $\forall x \in]-\infty, 0[,\ y(x) = -\dfrac{1}{1-x}$ donc $\lim\limits_{x \to 0^-} y(x) = -1 = y(0)$.
De même, $\lim\limits_{x \to 0^+} y(x) = \begin{cases} -1 = y(0) & \text{si } \lambda_2 = 0 \\ \pm\infty & \text{si } \lambda_2 \neq 0 \end{cases}$.
Ainsi, y est continue en 0 si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$
On considère désormais que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Continuité en 1 :
On a $\lim\limits_{x \to 1^-} y(x) = -\infty$. Ainsi, y n'est pas continue en 1.

Finalement, l'équation (E) n'admet donc aucune solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9. • Résolvons (E) $\quad xy' - 2y = x^4$ sur $I_1 = \mathbb{R}_-^*$ et $I_2 = \mathbb{R}_+^*$.
Soit $k \in \{1, 2\}$.

- On sait que : $\forall x \in I_k$, $x \neq 0$. Ainsi, sur cet intervalle (E) équivaut à $y' - \dfrac{2}{x}y = x^3$.

- On résout (E_0) $\quad y' - \dfrac{2}{x}y = 0$ sur I_k.

  Une primitive sur I_k de $x \mapsto \dfrac{2}{x}$ est $x \mapsto 2\ln|x|$,

  donc les solutions sur I_k de (E_0) sont $\begin{array}{ccc} I_k & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{2\ln|x|} = \lambda|x|^2 = \lambda x^2 \end{array}$ $, \lambda \in \mathbb{R}$.

- D'après la méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière de $y' - \dfrac{2}{x}y = x^3$ de la forme $\begin{array}{cccc} y: & I_k & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \lambda(x)x^2 \end{array}$ où λ est dérivable.

$$\begin{aligned} y' - \frac{2}{x}y = x^3 &\iff \forall x \in I_k, \lambda'(x)x^2 = x^3 \\ &\iff \forall x \in I_k,\ \lambda'(x) = x \end{aligned}$$

  Or, $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ est une primitive de $x \mapsto x$.

  Donc $\begin{array}{ccc} I_k & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^4}{2} \end{array}$ est solution particulière de $y' - \dfrac{2}{x}y = x^3$.

- Ainsi, les solutions de $xy' - 2y = x^4$ sur I_k sont :

$$\begin{array}{ccc} I_k & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^4}{2} + \lambda x^2 \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Il reste à étudier s'il existe une solution sur $\mathbb{R}$.

$$y \text{ solution sur } \mathbb{R} \text{ de } (E) \iff \begin{cases} \exists \lambda_1 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ y(x) = \lambda_1 x^2 + \dfrac{x^4}{2} \\ \exists \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall x \in I_k,\ y(x) = \lambda_2 x^2 + \dfrac{x^4}{2} \\ y(0) = 0 \\ y \text{ est continue et dérivable en } 0 \end{cases}$$

Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $\begin{array}{cccc} y: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \lambda_1 x^2 + \dfrac{x^4}{2} & \text{si } x < 0 \\ \lambda_2 x^2 + \dfrac{x^4}{2} & \text{si } x > 0 \\ 0 \quad \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$.

<u>Continuité en 0 :</u>
On a $\lim\limits_{x \to 0^-} y(x) = 0 = y(0)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} y(x) = 0 = y(0)$.
Ainsi, y est continue en 0. (aucune condition sur λ_1 ou λ_2).
<u>Dérivabilité en 0 :</u>
On a $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\dfrac{y(x) - y(0)}{x} \right) = \lim\limits_{x \to 0^- 1+} \left(2x\lambda_1 + x^3 \right) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{y(x) - y(0)}{x} \right) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(2x\lambda_2 + x^3 \right) = 0$.
Ainsi, y est dérivable en 0. (aucune condition sur λ_1 ou λ_2).
Finalement, l'équation (E) admet pour solutions sur $\mathbb{R}$ les fonctions :

$$\begin{array}{cccc} y: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \lambda_1 x^2 + \dfrac{x^4}{2} & \text{si } x < 0 \\ \lambda_2 x^2 + \dfrac{x^4}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{array}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Exercice 10. • Commençons par résoudre $xy' - 2y = (x-1)(x+1)^3$ sur $I_1 = \mathbb{R}_-^*$ et $I_2 = \mathbb{R}_+^*$.
Soit $k \in \{1, 2\}$.

- On sait que : $\forall x \in I_k$, $x \neq 0$. Ainsi, sur cet intervalle (E) équivaut à $y' - \dfrac{2}{x}y = \dfrac{(x-1)(x+1)^3}{x}$.

- On résout $y' - \dfrac{2}{x}y = 0$ sur I_k.

  Une primitive sur I_k de $x \mapsto -\dfrac{2}{x}$ est $x \mapsto -2\ln|x|$,

  donc les solutions sur I_k de $y' - \dfrac{2}{x}y = 0$ sont $\begin{array}{ccc} I_k & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{2\ln|x|} = \lambda|x|^2 = \lambda x^2 \end{array}$ $, \lambda \in \mathbb{R}$.

- D'après la méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière de $y' - \frac{2}{x}y = \frac{(x-1)(x+1)^3}{x}$ de la forme $\begin{array}{rccc} y: & I_k & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \lambda(x)x^2 \end{array}$ où λ est dérivable.

$$\begin{aligned} y' - \frac{2}{x}y = \frac{(x-1)(x+1)^3}{x} &\iff \forall x \in I_k, \lambda'(x)x^2 = \frac{(x-1)(x+1)^3}{x} \\ &\iff \forall x \in I_k,\ \lambda'(x) = \frac{(x-1)(x+1)^3}{x^3} \\ &\iff \forall x \in I_k,\ \lambda'(x) = \frac{(x-1)(x^3+3x^2+3x+1)}{x^3} \\ &\iff \forall x \in I_k,\ \lambda'(x) = \frac{x^4+2x^3-2x-1}{x^3} \\ &\iff \forall x \in I_k,\ \lambda'(x) = x+2-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3} \end{aligned}$$

Or, $x \mapsto \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{2}{x} + \frac{1}{2x^2}$ est une primitive de $x \mapsto x + 2 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3}$.

Donc $\begin{array}{ccc} I_k & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^4}{2} + 2x^3 + 2x + \frac{1}{2} \end{array}$ est solution particulière de $y' - \frac{2}{x}y = \frac{(x-1)(x+1)^3}{x}$.

- Ainsi, les solutions de $y' - \frac{2}{x}y = \frac{(x-1)(x+1)^3}{x}$ sur I_k sont :

$$\begin{array}{ccc} I_k & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda x^2 + \frac{x^4}{2} + 2x^3 + 2x + \frac{1}{2} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Il reste à étudier s'il existe une solution sur $\mathbb{R}$.

$$y \text{ solution sur } \mathbb{R} \text{ de } (E) \iff \begin{cases} \exists \lambda_1 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ y(x) = \lambda_1 x^2 + \frac{x^4}{2} + 2x^3 + 2x + \frac{1}{2} \\ \exists \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y(x) = \lambda_2 x^2 + \frac{x^4}{2} + 2x^3 + 2x + \frac{1}{2} \\ y(0) = \frac{1}{2} \\ y \text{ est continue et dérivable en } 0 \end{cases}$$

Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $\begin{array}{rccl} y: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \lambda_1 x^2 + \frac{x^4}{2} + 2x^3 + 2x + \frac{1}{2} & \text{si } x < 0 \\ \lambda_2 x^2 + \frac{x^4}{2} + 2x^3 + 2x + \frac{1}{2} & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{2} \quad \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$.

<u>Continuité en 0 :</u>
On a $\lim_{x \to 0^-} y(x) = \frac{1}{2} = y(0)$ et $\lim_{x \to 0^+} y(x) = \frac{1}{2} = y(0)$.
Ainsi, y est continue en 0 (aucune condition sur λ_1 ou λ_2).
<u>Dérivabilité en 0 :</u>
On a $\lim_{x \to 0^-} \left(\frac{y(x) - y(0)}{x} \right) = \lim_{x \to 0^-} \left(2\lambda_1 x + 2x^3 + 6x^2 + 2 \right) = 2$ et $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{y(x) - y(0)}{x} \right) = \lim_{x \to 0^+} \left(2\lambda_2 x + 2x^3 + 6x^2 + 2 \right) = 2$.
Ainsi, y est dérivable en 0 (aucune condition sur λ_1 ou λ_2).
Finalement, l'équation (E) admet pour solutions sur $\mathbb{R}$ les fonctions :

$$\begin{array}{rccl} y: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \lambda_1 x^2 + \frac{x^4}{2} + 2x^3 + 2x + \frac{1}{2} & \text{si } x < 0 \\ \lambda_2 x^2 + \frac{x^4}{2} + 2x^3 + 2x + \frac{1}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{array}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Exercice 11. • On commence par résoudre $y' - y = 1 - x$.

- On résout $y' - y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
  Les solutions de $y' - y = 0$ sont :
  $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^x \end{array}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$
- $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$ est une solution particulière de $y' - y = 1 - x$.
- Ainsi, les solutions de $y' - y = 1 - x$ sont :
  $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x + \lambda e^x \end{array} ,\lambda \in \mathbb{R}.$$

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Posons $y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x + \lambda e^x \end{array}$.
$$\begin{aligned} xy' - y = f(x) \text{ sur } \mathbb{R} & \iff \forall x \in \mathbb{R},\ x\left(1 + \lambda e^x\right) - x - \lambda e^x = f(x) \\ & \iff \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda e^x (x - 1) = f(x) \end{aligned}$$

- Ainsi, l'ensemble des solutions est : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^x (x-1) \end{array}, \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

Exercice 12. Raisonnons par analyse synthèse.
Analyse : Supposons qu'il existe $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dérivable telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x)f(-x) = 1$.
Posons $h : x \mapsto f(x)f(-x)$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car f l'est).
On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x) = 1 - 1 = 0$.
Ainsi, il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = C.$$
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f'(x)f(-x) = 1$, donc $f(x) \neq 0$ et $C \in \mathbb{R}^*$. Ainsi :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{1}{f(-x)} = \frac{f(x)}{C}$$
f est donc solution de l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficient constant $y' - \dfrac{1}{C}y = 0$.
Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda e^{\frac{x}{C}}$.
En utilisant toujours l'égalité de départ, on en déduit que $f'(0)f(0) = 1$. Or, $f'(0) = \dfrac{\lambda}{C}$ et $f(0) = \lambda$. Ainsi, $\dfrac{\lambda^2}{C} = 1$ donc $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\dfrac{1}{C} = \dfrac{1}{\lambda^2}$. Finalement :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda e^{\frac{x}{\lambda^2}},\ \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

Synthèse : Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Posons $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{\frac{x}{\lambda^2}} \end{array}$.
f est dérivable. De plus, soit $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$f'(x)f(-x) = \frac{\lambda}{\lambda^2} e^{\frac{x}{\lambda^2}} \times \lambda e^{-\frac{x}{\lambda^2}} = 1$$
Ainsi, f est solution de l'équation.
En conclusion : L'ensemble des solutions est :
$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{\frac{x}{\lambda^2}},\ \lambda \in \mathbb{R}^* \end{array} \right\}.$$

2 Equations différentielles du 2nd ordre

Exercice 13. 1. L'équation caractéristique associée à $y'' + 2y' - 3y = 0$ est $r^2 + 2r - 3 = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = 16$. Ses racines sont -3 et 1.
Ainsi, les solutions de $y'' + 2y' - 3y = 0$ sont :
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-3x} + \mu e^x \end{array} ,(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

2. L'équation caractéristique associée à $y'' + 4y' - 4y = 0$ est $r^2 + 4r + 4 = 0$. Son discriminant vaut 0. Son unique racine est -2.
   Ainsi, les solutions de $y'' + 4y' + 4y = 0$ sont :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (\lambda + \mu x)e^{-2x} \end{array} , (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

3. L'équation caractéristique associée à $y'' + 2y' + 4y = 0$ est $r^2 + 2r + 4 = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = -12$. Ses racines sont $-1 - i\sqrt{3}$ et $-1 + i\sqrt{3}$.
   Les solutions dans $\mathbb{R}$ de $y'' + 2y' + 4y = 0$ sont :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda \cos(\sqrt{3}x)e^{-x} + \mu \sin(\sqrt{3}x)e^{-x} \end{array} , (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

4. D'après la question précédente, les solutions dans $\mathbb{C}$ de $y'' + 2y' + 4y = 0$ sont :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-(1+i\sqrt{3})x} + \mu e^{(-1+i\sqrt{3})x} \end{array} , (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2.$$

Exercice 14. 1. • Résolvons l'équation homogène associée à cette équation : $y'' + 3y' + 2y = 0$.
Son équation caractéristique est $r^2 + 3r + 2 = 0$ qui a pour discriminant 1. Ses racines sont -1 et -2. Ainsi, les solutions de l'équation homogène $y'' + 3y' + 2y = 0$ sont :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-x} + \mu e^{-2x} \end{array} , \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

- Cherchons une solution particulière de : $y'' + 3y' + 2y = e^x$.
  Comme 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme $y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & Ce^x \end{array}$, $C \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$y'(x) = Ce^x$$
$$y''(x) = Ce^x$$

  On a :

$$\begin{aligned} y'' + 3y\text{''} + 2y = e^x & \iff \forall x \in \mathbb{R},\ y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = e^x \\ & \iff \forall x \in \mathbb{R},\ 6Ce^x = e^x \\ & \iff 6C = 1 \end{aligned}$$

  Ainsi, la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, y_p(x) = \frac{1}{6}x^2 e^x$$

  est solution particulière de $y'' + 3y' + 2y = e^x$.
- Finalement, les solutions de l'équation $y'' + 3y' + 2y = e^x$ sont les fonctions :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{6}e^x + \lambda e^{-x} + \mu e^{-2x} \end{array} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

2. • Résolvons l'équation homogène associée à cette équation : $y'' - 2y' + y = 0$.
   Son équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0$ qui a pour racine double 1. Ainsi, les solutions de l'équation homogène $y'' - 2y' + y = 0$ sont :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (\lambda + \mu x)e^x \end{array} , \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

- L'équation $y'' - 2y' + y = 2\text{sh}\,(x)$ se réécrit $y'' - 2y' + y = e^x + e^{-x}$.
  D'après le principe de superposition, on cherche une solution particulière des équations :

$$y'' - 2y' + y = e^x \quad \text{et} \quad y'' - 2y' + y = e^{-x}$$

Cherchons une solution particulière de : $y'' - 2y' + y = e^x$.
Comme 1 est racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme $\begin{array}{rccl} y: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & Cx^2e^x \end{array}$, $C \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y'(x) &= C(2x + x^2)e^x \\ y''(x) &= C(4x + 2 + x^2)e^x \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} y'' - 2y" + y = e^x &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e^x \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ C(4x + 2 + x^2 - 4x - 2x^2 + x^2)e^x = e^x \\ &\iff 2C = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction définie par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{2}x^2e^x \end{array}$$

est solution particulière de $y'' - 2y' + y = e^x$.
Cherchons une solution particulière de : $y'' - 2y' + y = e^{-x}$.
Comme -1 est racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme $\begin{array}{rccl} y: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & Ce^{-x} \end{array}$, $C \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y'(x) &= -Ce^{-x} \\ y''(x) &= Ce^{-x} \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} y'' - 2y" + y = e^x &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e^x \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ 4Ce^{-x} = e^{-x} \\ &\iff 4C = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, y_p(x) = \frac{1}{4}e^{-x}$$

est solution particulière de $y'' - 2y' + y = e^{-x}$.
Ainsi, $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^x \end{array}$ est une solution particulière de $y'' - 2y' + y = 2\mathrm{sh}\,(x)$.

- Finalement, les solutions de l'équation $y'' - 2y' + y = 2\mathrm{sh}\,(x)$ sont les fonctions :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^x + (\lambda + \mu x)e^x \end{array} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice 15. 1. • Résolvons l'équation homogène associée à cette équation : $y'' + y = 0$.
Son équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$ qui admet deux racines complexes conjuguées i et $-i$.
Ainsi, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\cos(x) + \mu\sin x \end{array}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

- Cherchons une solution particulière de : $y'' + y = \frac{1}{4}\cos(3x)$.
Comme $3i$ n'est pas racine pas de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme : $\begin{array}{rccl} y: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x) \end{array}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y'(x) &= -3C_1\sin(3x) + 3C_2\cos(3x) \\ y''(x) &= -9C_1\cos(3x) - 9C_2\sin(3x) \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
y'' + y = \frac{1}{4}\cos(3x) &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ y''(x) + y(x) = \frac{1}{4}\cos(3x) \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ -9C_1\cos(3x) - 9C_2\sin(3x) + C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x) = \frac{1}{4}\cos(3x) \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ -8C_1\cos(3x) - 8C_2 \\
&\iff \begin{cases} -8C_1 = \dfrac{1}{4} \\ -8C_2 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction définie par :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\dfrac{1}{32}\cos(3x) \end{array}$$

est solution particulière de $y'' + y = \frac{1}{4}\cos(3x)$.

- Finalement, les solutions de l'équation $y'' + y = \frac{1}{4}\cos(3x)$ sont les fonctions :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\dfrac{1}{32}\cos(3x) + \lambda\cos(x) + \mu\sin x \end{array}\quad, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

2.
- Résolvons l'équation homogène associée à cette équation : $y'' + y = 0$.
  Son équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$ qui admet deux racines complexes conjuguées i et $-i$.
  Ainsi, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\cos(x) + \mu\sin x \end{array}\quad, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

- On linéarise $\cos^3(x)$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $\cos^3(x) = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$.
- D'après le principe de superposition et on détermine une solution particulière des équations différentielles :

$$y'' + y = \frac{1}{4}\cos(3x) \quad \text{et} \quad y'' + y = \frac{3}{4}\cos x$$

- On sait par le point précédent que :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\dfrac{1}{32}\cos(3x) \end{array}$$

est une solution particulière de $y'' + y = \frac{1}{4}\cos(3x)$.

- Cherchons une solution particulière de : $y'' + y = \frac{3}{4}\cos(x)$.
  Comme i est racine simple de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme :
  $y : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\left(C_1\cos(x) + C_2\sin(x)\right) \end{array}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
y'(x) &= C_1\cos(x) + C_2\sin(x) - C_1x\sin(x) + C_2x\cos(x) = (C_1 + C_2x)\cos(x) + (C_2 - C_1x)\sin(x) \\
y''(x) &= C_2\cos(x) - C_1\sin(x) - (C_1 + C_2x)\sin(x) + (C_2 - C_1x)\cos(x) = (2C_2 - C_1x)\cos(x) - (2C_1 + C_2x)\sin(x)
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
y'' + y = \frac{3}{4}\cos(x) &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ y''(x) + y(x) = \frac{1}{4}\cos(3x) \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (2C_2 - C_1x + C_1x)\cos(x) + (-2C_1 - C_2x + C_2x)\sin(x) = \frac{3}{4}\cos(x) \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ 2C_2\cos(x) - 2C_1\sin(x) = \frac{3}{4}\cos(x) \\
&\iff \begin{cases} 2C_2 = \dfrac{3}{4} \\ -2C_1 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{3}{8}x\cos(x) \end{array}$$

est une solution particulière de $y'' + y = \frac{3}{4}\cos(x)$.

- La fonction $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{1}{32}\cos(3x) + \frac{3}{8}x\cos(x) \end{array}$ est donc une solution particulière de $y'' + y = \cos^3(x)$
- Finalement, les solutions de $y'' + y = \cos^3(x)$ sont les fonctions :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\cos x + \mu\sin x - \frac{1}{32}\cos(3x) + \frac{3}{8}x\cos(x) \end{array} \quad , (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice 16. 1. L'équation caractéristique de $y'' - y' + (1+i) = 0$ est $r^2 - r + (1+i) = 0$. Son discriminant est $\Delta = 1 - 4(1+i) = -3 - 4i$.
Cherchons les racines carrées de Δ.
Soit $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (a+ib)^2 = -3 - 4i \quad & \iff \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = -4 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \\ & \iff \quad \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 4 \\ ab = -2 \end{cases} \\ & \iff \quad a + ib = \pm(1 - 2i) \end{aligned}$$

Ainsi, les racines de l'équation caractéristique sont : $\frac{1-(1-2i)}{2} = i$ et $\frac{1+1-2i}{2} = 1 - i$.
Donc les solutions de $y'' - y' + (1+i)y = 0$ sont :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \lambda e^{ix} + \mu e^{(1-i)x} \end{array} \quad , (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2.$$

2. - Résolvons l'équation homogène associée à cette équation : $y'' - 4y' + 4y = 0$.
Son équation caractéristique est $r^2 - 4r + 4 = 0$ qui a pour discriminant 0. Son unique racine est 2.
Ainsi, les solutions de l'équation homogène $y'' - 4y' + 4y = 0$ sont :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (\lambda + \mu x)e^{2x} \end{array} \; , \; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

- Cherchons une solution particulière de : $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$.
Comme 2 est racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme
$y : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & Cx^2e^{2x} \end{array} \; , C \in \mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y'(x) &= C(2x^2 + 2x)e^{2x} \\ y''(x) &= C(4x^2 + 8x + 2)e^{2x} \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \quad & \iff \quad \forall x \in \mathbb{R},\; y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = e^{2x} \\ & \iff \quad \forall x \in \mathbb{R},\; C(4x^2 + 8x + 2 - 8x^2 - 8x + 4x^2) = e^{2x} \\ & \iff \quad \forall x \in \mathbb{R},\; 2Ce^{2x} = e^{2x} \\ & \iff \quad \forall x \in \mathbb{R},\; 2C = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction définie par :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{2}x^2e^{2x} \end{array}$$

est solution particulière de $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$.

- Finalement, les solutions de l'équation $y'' - 4y' + 4y = e^x$ sont les fonctions :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{2}x^2e^{2x} + (\lambda + \mu x)e^{2x} \end{array} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

3. - Résolvons l'équation homogène associée à cette équation : $y'' + 4y = 0$.
Son équation caractéristique est $r^2 + 4 = 0$ qui admet pour discriminant -16.
Ses racines sont $-2i$ et $2i$.
Ainsi, les solutions de l'équation homogène sont :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x) \end{array} , (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

- D'après le principe de superposition, on détermine une solution particulière des équations différentielles :

$$y'' + 4y = \sin x \quad \text{et} \quad y'' + 4y = \sin(2x)$$

- Déterminons une solution particulière de $y'' + 4y = \sin x$.
Comme i n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de la forme $y : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \alpha\cos(x) + \beta\sin(x) \end{array}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$y'(x) = -\alpha\sin x + \beta\cos x$$
$$y'' - x) = -\alpha\cos x - \beta\sin x$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} y'' + 4y = \sin(x) & \Longleftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ y''(x) + 4y(x) = \sin(x) \\ & \Longleftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ -\alpha\cos x - \beta\sin x + 4\alpha\cos x + 4\beta\sin x = \sin(x) \\ & \Longleftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ 3\alpha\cos x + 3\beta\sin x = \sin(x) \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} 3\alpha = 0 \\ 3\beta = 1 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = \frac{1}{3} \end{array} \right. \end{array}$$

Ainsi, la fonction définie par : $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{3}\sin(x) \end{array}$ est solution particulière de $y'' + 4y = \sin x$.

- Déterminons une solution particulière de $y'' + 4y = \sin(2x)$.
Comme $2i$ est racine simple de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme : $y : x \mapsto ax\cos(2x) + bx\sin(2x)$, $a, b \in \mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$y'(x) = (-2ax + b)\sin(2x) + (2bx + a)\cos(2x)$$
$$y'' - x) = (-4a - 4bx)\sin(2x) + (-4ax + 4b)\cos(2x)$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} y'' + 4y = \sin(2x) & \Longleftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ y''(x) + 4y(x) = \sin(2x) \\ & \Longleftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ (-4a - 4bx)\sin(2x) + (-4ax + 4b)\cos(2x) + 4ax\cos(2x) + 4bx\sin(2x) = \sin(2x) \\ & \Longleftrightarrow & 4b\cos(2x) + -4a\sin(2x) = \sin(2x) \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} -4a = 1 \\ 4b = 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} a = -\frac{1}{4} \\ b = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Ainsi, la fonction définie par :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{1}{4}x\cos(2x) \end{array}$$

est solution particulière de $y'' + 4y = \sin(2x)$.

- La fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{3}\sin x - \frac{1}{4}x\cos(2x) \end{array}$ est donc une solution particulière de $y'' - 2y' + y = \sin(x) + \sin(2x)$
- Finalement, les solutions de $y'' + 4y = \sin(x) + \sin(2x)$ sont :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\sin(2x) + \mu\cos(2x) + \frac{1}{3}\sin x - \frac{x}{4}\cos(2x) \end{array}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

4. - Résolvons l'équation homogène associée à cette équation : $y'' - 3y' + 2y = 0$.
   Son équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = 0$ qui admet pour discriminant 1. Ses racines sont 1 et 2.
   Ainsi, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^x + \mu e^{2x} \end{array}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

   - Comme $1 + i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme $\begin{array}{ccc} y: & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x(A\cos(x) + B\sin(x)) \end{array}$ Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y'(x) &= e^x((B - A)\sin(x) + (A + B)\cos(x)) \\ y''(x) &= e^x(2B\cos(x) - 2A\sin(x)) \end{aligned}$$

   Ainsi :

$$\begin{aligned} y'' - 3y' + 2y = e^x\cos(x) &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = e^x\cos(x) \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ e^x((2B - 3A - 3B + 2A)\cos(x) + (-2A - 3B + 3A + 2B)\sin(x)) = e^x\cos(x) \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (2B - 3A - 3B + 2A)\cos(x) + (-2A - 3B + 3A + 2B)\sin(x) = \cos(x) \\ &\iff \begin{cases} -A - B = 1 \\ A - B = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

   Ainsi, la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{e^x}{2}(\cos(x) + \sin(x)) \end{array}$ est solution particulière de $y'' - 3y' + 2y = e^x\cos x$.

   - Finalement, les solutions de l'équation $y'' - 3y' + 2y = e^x\cos x$ sont :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{e^x}{2}(\cos(x) + \sin(x)) + \lambda e^x + \mu e^{2x} \end{array}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

5. - Résolvons l'équation homogène : $y'' - y' - 2y = 0$.
   Son équation caractéristique est $r^2 - r - 2 = 0$ qui admet pour discriminant 9.
   Ses racines sont -1 et 2.
   Ainsi, les solutions de l'équation homogène sont :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-x} + \mu e^{2x} \end{array}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

   - Déterminons une solution particulière de $y'' - y' - 2y = x^2 - x$.
   On cherche une solution particulière de la forme : $\begin{array}{ccc} y: \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax^2 + bx + c \end{array}, a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
y''-y'-2y=x^2-x &\iff \forall x\in\mathbb{R},\ y''(x)-y'(x)-2y(x)=x^2-x\\
&\iff \forall x\in\mathbb{R},\ 2a-2ax-b-2ax^2-2bx-c=x^2-x\\
&\iff \forall x\in\mathbb{R},\ -2ax^2-2(a+b)x+2a-b-c=x^2-x\\
&\iff \begin{cases}-2a=1\\ -2(a+b)=-1\\ 2a-b-c=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}a=-\dfrac{1}{2}\\ b=1\\ c=-2\end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \frac{1}{2}x^2+x-2\end{array}$ est solution particulière de $y''-y'-2y=x^2-x$.

- Finalement, les solutions de $y''-y'-2y=x^2-x$ sont :

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \lambda e^{-x}+\mu e^{2x}-\frac{1}{2}x^2+x-2\end{array}\quad ,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$$

- Soit $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, posons $\begin{array}{cccc}y: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ & x & \mapsto & \lambda e^{-x}+\mu e^{2x}-\frac{1}{2}x^2+x-2\end{array}$.

  On a :

$$\begin{aligned}
\begin{cases}y(0)=0\\ y'(0)=1\end{cases} &\iff \begin{cases}\lambda+\mu-2=0\\ -\lambda+2\mu+1=1\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}\mu=\dfrac{2}{3}\lambda=\dfrac{4}{3}\end{cases}
\end{aligned}$$

  Finalement, l'unique solution du problème de Cauchy est :

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \frac{4}{3}e^{-x}+\frac{2}{3}e^{2x}-\frac{1}{2}x^2+x-2\end{array}$$

Exercice 17. Soit y deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Notons (E) $e^{-2x}y''-e^{-2x}y'-y=1$.

- On commence par constater que : $\forall x\in\mathbb{R},\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\ t=e^x \iff x=\ln(t)$.
- On pose $\begin{array}{cccc}z: & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}\\ & t & \mapsto & y(\ln t)\end{array}$.
- z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car ln l'est et y deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$y(x)=z(e^x)$$
$$y'(x)=e^xz'(e^x)$$
$$y''(x)=e^xz'(e^x)+(e^x)^2z''(e^x).$$

  On a :

$$\begin{aligned}
y \text{ solution sur } \mathbb{R} \text{ de } (E) &\iff \forall x\in\mathbb{R},\ e^{-2x}y''(x)-e^{-2x}y'(x)-y(x)=1\\
&\iff \forall x\in\mathbb{R},\ e^{-2x}\left(e^xz'(e^x)+e^{2x}z''(e^x)\right)-e^{-2x}\times e^xz'(e^x)-z(e^x)=1\\
&\iff \forall x\in\mathbb{R},\ z''(e^x)-z(e^x)=1\\
&\iff \forall t\in\mathbb{R}_+^*, z''(t)-z(t)=1 \quad \text{par bijectivité de } \exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*\\
&\iff z \text{ solution sur } \mathbb{R}_+^* \text{ de } z''-z=1 \quad (E')
\end{aligned}$$

  Résolvons $z''-z=0$.
  L'équation caractéristique associée à $z''-z=0$ est $r^2-1=0$. Ses racines sont donc 1 et -1.
  Ainsi, les solutions de $z''-z=0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont :

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & \lambda e^t+\mu e^{-t}\end{array}\quad ,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$$

De plus, $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & -1 \end{array}$ est une solution particulière de $z'' - z = -1$ sur R_+^*. Ainsi, les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E') sont :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & -1 + \lambda e^t + \mu e^{-t} \end{array} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} y \text{ solution sur } \mathbb{R} \text{ de } (E) \quad & \iff \quad \exists \lambda, \mu \in \mathbb{C},\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ z(t) = -1 + \lambda e^t + \mu e^t \\ & \iff \quad \exists \lambda, \mu \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = -1 + \lambda e^{(e^x)} + \mu e^{(-e^x)} \end{aligned}$$

Finalement, les solutions de $e^{-2x}y'' - e^{-2x}y' - y = 1$ sur $\mathbb{R}$ sont :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -1 + \lambda e^{(e^x)} + \mu e^{(-e^x)} \end{array}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Exercice 18. 1. Soit y deux fois dérivable sur $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. notons (E) $y'' + y'\tan(x) - y\cos^2(x) = 0$.

- On commence par constater que : $\forall x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \forall t \in]-1,1[,\ t = \sin(x) \iff x = \arcsin(t)$.
- On pose $\begin{array}{cccc} z: &]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & y(\arcsin(t)) \end{array}$.
- z est deux fois dérivable sur $]-1,1[$ car arcsin l'est sur $]-1,1[$ à valeurs dans $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et y deux fois dérivable sur $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
- Soit $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$\begin{aligned} y(x) &= z(\sin(x)) \\ y'(x) &= \cos(x)z'(\sin(x)) \\ y''(x) &= -\sin(x)z'(\sin(x)) + \cos^2(x)z''(\sin(x)). \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} y \text{ solution sur } \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\text{ de } (E) \quad & \iff \quad \forall x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, y''(x) + y'(x)\tan(x) - y(x)\cos^2(x) = 0 \\ & \iff \quad \forall x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ -\sin(x)z'(\sin(x)) + \cos^2(x)z''(\sin(x)) + \sin(x)z'(\sin(x)) - \cos^2(x)z(\sin(x)) = 0 \\ & \iff \quad \forall x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \cos^2(x)(z''(\sin(x)) - z(\sin(x))) = 0 \\ & \iff \quad \forall x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ z''(\sin(x)) - z(\sin(x)) = 0 \quad \text{car } \forall x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \cos^2(x) \neq 0 \\ & \iff \quad \forall t \in]-1,1[, z''(t) - z(t) = 0 \quad \text{par bijectivité de arcsin : }]-1,1[\to \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ & \iff \quad z \text{ solution sur }]-1,1[\text{ de } z'' - z = 0 \quad (E') \end{aligned}$$

Résolvons $z'' - z = 0$.
Son équation caractéristique est $r^2 - 1 = 0$. Ses racines sont donc 1 et -1.
Ainsi, les solutions de $z'' - z = 0$ sur $]-1,1[$ sont :

$$\begin{array}{ccc}]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^t + \mu e^{-t} \end{array} \quad , (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} y \text{ solution sur } \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\text{ de } (E) \quad & \iff \quad \exists \lambda, \mu \in \mathbb{C},\ \forall t \in]-1,1[,\ z(t) = \lambda e^t + \mu e^t \\ & \iff \quad \exists \lambda, \mu \in \mathbb{C},\ \forall x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ y(x) = \lambda e^{\sin(x)} + \mu e^{-\sin(x)} \end{aligned}$$

Finalement, les solutions de (E) sur $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sont :

$$\begin{array}{ccc} \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{\sin x} + \mu e^{-\sin x} \end{array}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2. Soit y deux fois dérivable sur $]-1,1,[$. Notons (E) $(1-x^2)t'' - xy' + 4y = \arccos(x)$.

- On commence par constater que : $\forall x \in \left]-1,1\right[, \forall t \in \left]0,\pi\right[,\ t = \cos(x) \iff x = \arccos(t)$.
- On pose $z : \begin{array}{ccc} \left]0,\pi\right[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & y(\cos(t)) \end{array}$.
- z est deux fois dérivable sur $\left]0,\pi\right[$ car cos l'est sur $\left]0,\pi\right[$ à valeurs dans $\left]-1,1\right[$ et y deux fois dérivable sur $\left]-1,1\right[$.
- Soit $x \in \left]-1,1\right[$,

$$y(x) = z(\arccos(x))$$
$$y'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} z'(\arccos(x))$$
$$y''(x) = \frac{1}{1-x^2} z''(\arccos(x)) - \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} z'(\arccos(x)).$$

Donc :

$$\begin{aligned} y \text{ solution sur } \left]-1,1\right[\text{ de } (E) &\iff \forall x \in \left]-1,1\right[, (1-x^2)y''(x) - xy'(x) + 4y(x) = \arccos(x) \\ &\iff \forall x \in \left]-1,1\right[, \\ &\quad z''(\arccos(x)) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} z'(\arccos(x)) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} z'(\arccos(x)) + 4z(\arccos(x)) = \arccos(x) \\ &\iff \forall x \in \left]-1,1\right[,\ z''(\arccos(x)) + 4z(\arccos(x)) = \arccos(x) \\ &\iff \forall t \in]0,\pi[, z''(t) + 4z(t) = t \text{par bijectivité de cos } :]0,\pi[\to \left]-1,1\right[\\ &\iff z \text{ solution sur } \left]0,\pi\right[\text{ de } z'' + 4z = t \quad (E') \end{aligned}$$

Résolvons $z'' + 4z = 0$.
Son équation caractéristique est $r^2 + 4 = 0$. Ses racines sont donc $2i$ et $-2i$.
Ainsi, les solutions de l'équation homogène $z'' + 4z = 0$ sur $\left]0,\pi\right[$ sont :

$$\begin{array}{ccc} \left]0,\pi\right[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t) \end{array}, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$$

De plus, $\begin{array}{ccc} \left]0,\pi\right[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{4}t \end{array}$ est solution particulière de (E').
Ainsi, les solutions de (E') sur $\left]0,\pi\right[$ sont :

$$\begin{array}{ccc} \left]0,\pi\right[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t) + \frac{1}{4}t \end{array}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} y \text{ solution sur } \left]-1,1\right[\text{ de } (E) &\iff \exists \lambda,\mu \in \mathbb{C},\ \forall t \in]0,\pi[,\ z(t) = \lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t) + \frac{1}{4}t \\ &\iff \exists \lambda,\mu \in \mathbb{C},\ \forall x \in \left]-1,1\right[,\ y(x) = \lambda\cos(2\arccos(x)) + \mu\sin(2\arccos(x)) + \frac{1}{4}\arccos(x) \\ &\iff \exists \lambda,\mu \in \mathbb{C},\ \forall x \in \left]-1,1\right[,\ y(x) = \lambda(2x^2-1) + 2\mu x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{4}\arccos(x) \end{aligned}$$

Finalement, les solutions de (E) sur $]-1,1[$ sont :

$$\begin{array}{ccc} \left]\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda(2x^2-1) + 2\mu x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{4}\arccos(x) \end{array},\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}.$$

Exercice 19. Soit y deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

- On commence par constater que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \left]\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ x = \tan(t) \iff t = \arctan(x)$.
- On pose $z : \begin{array}{ccc} \left]\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & y(\tan(t)) \end{array}$.
- z est deux fois dérivable sur $\left]\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ car arcsin l'est sur $]-1,1[$ à valeurs dans $]-1,1[$ et y deux fois dérivable sur $\left]-1,1\right[$.

- Soit $x \in]-1,1[$, on a :

$$y(x) = z(\arctan(x))$$
$$y'(x) = \frac{1}{1+x^2} z'(\arctan(x))$$
$$y''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} z'(\arctan(x)) + \frac{1}{(1+x^2)^2} z''(\arctan(x)).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
y \text{ solution sur } \mathbb{R} \text{ de } (E) &\iff \forall x \in \mathbb{R}, (1+x^2)^2 y''(x) + 2x(1+x^2)y'(x) + m^2 y(x) = 0 \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, -2xz'(\arctan(x)) + z''(\arctan(x)) + 2xz'(\arctan(x)) + m^2 z(\arctan(x)) = 0 \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ z''(\arctan(x)) + m^2 z(\arctan(x)) = 0 \\
&\iff \forall t \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, z''(t) + m^2 z(t) = 0 \quad \text{par bijectivité de tan : } \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \\
&\iff z \text{ solution sur } \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\text{ de } z'' + m^2 z = 0 \quad (E')
\end{aligned}$$

Résolvons $z'' + m^2 z = 0$.
Son équation caractéristique est $r^2 + m^2 = 0$. Ses racines sont donc im et $-im$.
Ainsi, les solutions de l'équation $z'' + m^2 z = 0$ sur $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sont les :

$$\begin{array}{rcl} \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda\cos(mt) + \mu\sin(mt) \end{array} \quad , (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
y \text{ solution sur } \mathbb{R} \text{ de } (E) &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall t \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ z(t) = \lambda\cos(mt) + \mu\sin(mt) \\
&\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \lambda\cos(m\arctan(x)) + \mu\sin(m\arctan(x))
\end{aligned}$$

Finalement, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\cos(m\arctan(x)) + \mu\sin(m\arctan(x)) \end{array} , \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Pour $m = 2$:
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos(2\arctan(x)) = 2\cos^2(\arctan(x)) - 1 = \frac{2}{1+\tan^2(\arctan(x))} - 1 = \frac{2}{1+x^2} - 1 = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$\sin(2\arctan(x)) = 2\sin(\arctan(x))\cos(\arctan(x)) = 2\tan(\arctan(x))\cos^2(\arctan(x)) = \frac{2x}{1+x^2}$$

Ainsi, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ pour $m = 2$ sont :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\lambda(1-x^2) + 2\mu x}{1+x^2} \end{array} , \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercice 20. Soit y deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Posons $z : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xy(x) \end{array}$.
- z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car y et $x \mapsto x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$y(x) = \frac{z(x)}{x}$$
$$y'(x) = \frac{z'(x)x - z(x)}{x^2} = \frac{z'(x)}{x} - \frac{z(x)}{x^2}$$
$$y''(x) = \frac{z''(x)x - z'(x)}{x^2} - \frac{z'(x)x^2 - 2xz(x)}{x^4} = \frac{z''(x)}{x} - 2\frac{z'(x)}{x^2} + 2\frac{z(x)}{x^3}$$

- On obtient alors :

$$xy''(x)+2y'(x)+xy(x)=\frac{z''(x)x^2-2xz'(x)+2z(x)}{x^2}+2\frac{z'(x)x-z(x)}{x^2}+z(x)=z''(x)+z(x)$$

Donc

$$\begin{aligned} y \text{ solution sur } \mathbb{R}_+^* \text{ de } (E) &\iff \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ xy''(x)+2y'(x)+xy(x)=0\\ &\iff \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ z''(x)-2\frac{z'(x)}{x}+2\frac{z(x)}{x^2}+2\frac{z'(x)}{x}-2\frac{z(x)}{x^2}+z(x)=0\\ &\iff \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ z''(x)+z(x)=0\\ &\iff z \text{ solution sur } \mathbb{R}_+^* \text{ de } \ z''+z=0 \quad (E')\end{aligned}$$

Résolvons $z''+z=0$.
Son équation caractéristique est $r^2+1=0$. Ses racines sont donc i et $-i$.
Ainsi, les solutions de l'équation (E') sur $\mathbb{R}_+^*$ sont :

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \lambda\cos(x)+\mu\sin(x)\end{array},\ \lambda\mu\in\mathbb{R}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} y \text{ solution sur } \mathbb{R}_+^* \text{ de } (E) &\iff \exists\lambda,\mu\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ z(x)=\lambda\cos x+\mu\sin x\\ &\iff \exists\lambda,\mu\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ y(x)=\lambda\frac{\cos x}{x}+\mu\frac{\sin x}{x}\end{aligned}$$

Les solutions de $xy''+2y'+xy=0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont donc les fonctions :

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \lambda\dfrac{\cos x}{x}+\mu\dfrac{\sin x}{x}\end{array},\lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

Exercice 21. 1. Soit y deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Posons $z:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & xy(x)\end{array}$.
- z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car y et $x\mapsto x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$y(x)=\frac{z(x)}{x}$$
$$y'(x)=\frac{z'(x)x-z(x)}{x^2}=\frac{z'(x)}{x}-\frac{z(x)}{x^2}$$
$$y''(x)=\frac{z''(x)x-z'(x)}{x^2}-\frac{z'(x)x^2-2xz(x)}{x^4}=\frac{z''(x)}{x}-2\frac{z'(x)}{x^2}+2\frac{z(x)}{x^3}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} y \text{ solution sur } \mathbb{R}_+^* \text{ de } (E) &\iff \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ xy''(x)+2(x+1)y'(x)+(x+2)y(x)=0\\ &\iff \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ z''(x)-2\frac{z'(x)}{x}+2\frac{z(x)}{x^2}+2z'(x)-2\frac{z(x)}{x}+2\frac{z'(x)}{x}-2\frac{z(x)}{x^2}+z(x)+2\frac{z(x)}{x}=0\\ &\iff \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ z''(x)+2z'(x)+z(x)=0\\ &\iff z \text{ solution sur } \mathbb{R}_+^* \text{ de } \ z''+2z'+z=0 \quad (E')\end{aligned}$$

Résolvons $z''+2z'+z=0$.
Son équation caractéristique est $r^2+2r+1=0$ dont l'unique solution est -1.
Ainsi, les solutions de $z''+2z'+z=0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont :

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & (\lambda+\mu x)e^{-x}\end{array}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} y \text{ solution sur } \mathbb{R}_+^* \text{ de } (E) &\iff \exists\lambda,\mu\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ z(x)=(\lambda+\mu x)e^{-x}\\ &\iff \exists\lambda,\mu\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ y(x)=(\frac{\lambda}{x}+\mu)e^{-x}\end{aligned}$$

2. Soit y deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Posons $\begin{array}{rccc} z: & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{y(x)}{x} \end{array}$.
- z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car y et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\begin{aligned} y(x) &= xz(x) \\ y'(x) &= z(x) + xz'(x) \\ y''(x) &= 2z'(x) + xz''(x) \end{aligned}$$

- Ainsi :

$$\begin{aligned} y \text{ solution sur } \mathbb{R}_+^* \text{ de } (E) &\iff \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x^2y''(x) - 2xy'(x) + (2-x^2)y(x) = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 2x^2z'(x) + x^3z''(x) - 2xz(x) - 2x^2z'(x) + 2xz(x) - x^3z(x) = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x^3(z''(x) - z(x)) = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ z''(x) - z(x) = 0 \quad \text{car : } \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x^3 \neq 0 \\ &\iff z \text{ solution sur } \mathbb{R}_+^* \text{ de } \ z'' - z = 0 \quad (E') \end{aligned}$$

Résolvons $z'' - z = 0$.
Son équation caractéristique est $r^2 - 1 = 0$ dont les solutions sont ± 1.
Ainsi, les solutions de l'équation (E') sur $\mathbb{R}_+^*$ sont

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^x + \mu e^{-x} \end{array}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} y \text{ solution sur } \mathbb{R}_+^* \text{ de } (E) &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ z(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x} \\ &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y(x) = \lambda x e^x + \mu x e^{-x} \end{aligned}$$

3. Soit y deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

- Posons $\begin{array}{rccc} z: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y'(x) + y(x) \end{array}$.
- z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ car y et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} z(x) &= y(x) + y'(x) \\ z'(x) &= y'(x) + y''(x) \end{aligned}$$

- Ainsi :

$$\begin{aligned} y \text{ solution sur } \mathbb{R} \text{ de } (E) &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (1+e^x)y''(x) + y'(x) - e^x y(x) = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (1+e^x)(y''(x) + y'(x)) - (1+e^x)y'(x) + y'(x) - e^x y(x) = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (1+e^x)(y''(x) + y'(x)) - e^x(y'(x) + y(x)) = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (1+e^x)z'(x) - e^x z(x) = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ z'(x) - \frac{e^x}{1+e^x} z(x) = 0 \quad \text{car :} \forall x \in \mathbb{R},\ 1 + e^x \neq 0 \\ &\iff z \text{ solution sur } \mathbb{R} \text{ de } \ z' - \frac{e^x}{1+e^x} z = 0 \quad (E') \end{aligned}$$

Résolvons $z' - \dfrac{e^x}{1+e^x} z = 0$.
Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto -\dfrac{e^x}{1+e^x}$ est $x \mapsto -\ln(1+e^x)$.
Ainsi, les solutions de l'équation (E') sur $\mathbb{R}$ sont :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{\ln(1+e^x)} = \lambda(1+e^x) \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} y \text{ solution sur } \mathbb{R} \text{ de } (E) &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ z(x) = \lambda(1+e^x) \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in,\ y'(x) + y(x) = \lambda(1+e^x) \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ y \text{ est solution sur } \mathbb{R} \text{ de } y' + y = \lambda(1+e^x) \end{aligned}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Résolvons $y' + y = \lambda(1+e^x)$.

- On résout $y' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
  Les solutions de $y' + y = 0$ sont :
  $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mu e^{-x} \end{array},\ \mu \in \mathbb{R}.$$
- D'après la méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière de $y'+y = \lambda(1+e^x)$ de la forme $y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mu(x)e^{-x} \end{array}$ où μ est dérivable.
  $$\begin{aligned} y' + y = \lambda(1+e^x) &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \mu'(x)e^{-x} = \lambda(1+e^x) \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \mu'(x) = \lambda(e^x + e^{2x}) \end{aligned}$$
  Ainsi, $x \mapsto \lambda\left(e^x + \frac{1}{2}e^{2x}\right)$ est une primitive de $x \mapsto \lambda(e^x + e^{2x})$.
  Donc $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\left(1 + \frac{1}{2}e^x\right) \end{array}$ est solution particulière de $y' + y = \lambda(1+e^x)$.
- Ainsi, les solutions de $y' + y = \lambda(1+e^x)$ sont :
  $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mu e^{-x} + \lambda\left(1 + \frac{1}{2}e^x\right) \end{array},\mu \in \mathbb{R}.$$

Donc,

$$y \text{ solution sur } \mathbb{R} \text{ de } (E) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists \mu \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \mu e^{-x} + \lambda\left(1 + \frac{1}{2}e^x\right)$$

Finalement, les solutions de $(1+e^x)y'' + y' - e^x y = 0$ sur $\mathbb{R}$ sont :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mu e^{-x} + \lambda\left(1 + \frac{1}{2}e^x\right) \end{array},\lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Exercice 22. • Résolvons $y'' - 2y' + \lambda y = 0$.
L'équation caractéristique associée à $y''-2y'+\lambda y = 0$ est $r^2-2r+\lambda = 0$ dont le discriminant vaut $4-4\lambda = 4(1-\lambda)$.

- **1er cas :** $\lambda < 1$.
  Les solutions de l'équation caractéristique sont : $1 \pm \sqrt{1-\lambda}$.
  Les solutions de $y'' - 2y' + \lambda y = 0$ sont :
  $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & Ae^{x(1-\sqrt{1-\lambda})} + Be^{x(1+\sqrt{1-\lambda})} \end{array},\ A, B \in \mathbb{R}.$$
- **2ème cas :** $\lambda = 1$.
  L'équation caractéristique admet une unique solution qui est : 1.
  Les solutions de $y'' - 2y' + \lambda y = 0$ sont :
  $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (Ax+B)e^x \end{array},\ A, B \in \mathbb{R}.$$

- **3ème cas :** $\lambda > 1$.
  Les solutions de l'équation caractéristiques sont : $1 \pm i\sqrt{\lambda - 1}$.
  Les solutions de $y'' - 2y' + \lambda y = 0$ sont :
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x\left(A\cos(\sqrt{\lambda-1}x) + B\sin(\sqrt{\lambda-1}x)\right) \end{array}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

- On applique le principe de superposition et on détermine une solution particulière des équations différentielles suivantes :
$$y'' - 2y' + \lambda y = e^{2x} \quad \text{ et } y'' - 2y' + \lambda y = e^x \sin x$$

- Cherchons une solution particulière de $y'' - 2y' + \lambda y = e^{2x}$.

  * On sait déjà que 2 n'est pas racine de l'équation caractéristique dans le cas $\lambda \geq 1$.
    Soit $\lambda < 1$, $1 - \sqrt{1-\lambda} \neq 2$.
    En revanche, $1 + \sqrt{1-\lambda} = 2 \iff \lambda = 0$.
  * Si $\lambda \neq 0$.
    Comme 2 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de la forme
    $y: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & Ce^{2x} \end{array}, C \in \mathbb{R}$.
    Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$y'(x) = 2Ce^{2x}$$
$$y''(x) = 4Ce^{2x}$$
    On a :
$$\begin{aligned} y'' - 2y' + \lambda y = e^{2x} &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ y''(x) - 2y'(x) + \lambda y(x) = e^{2x} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ e^{2x}(4C - 4C + \lambda C) = e^{2x} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \lambda C = 1 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ C = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$
    Ainsi, la fonction $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{\lambda}e^{2x} \end{array}$ est solution particulière de $y'' - 2y' + \lambda y = e^{2x}$.
  * Si $\lambda = 0$.
    Comme 2 est racine simple de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de la forme
    $y: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & Cxe^{2x} \end{array}$.
    Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$y'(x) = C(1 + 2x)e^{2x}$$
$$y''(x) = C(4 + 4x)e^{2x}$$
    On a :
$$\begin{aligned} y'' - 2y' + \lambda y = e^{2x} &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ y''(x) - 2y'(x) = e^{2x} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ Ce^{2x}(4 + 4x - 2 - 4x) = e^{2x} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ 2C = 1 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ C = \frac{1}{2} \end{aligned}$$
    Ainsi, la fonction $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{2}xe^{2x} \end{array}$ est solution particulière de $y'' - 2y' = e^{2x}$.

- Cherchons une solution particulière de $y'' - 2y' + \lambda y = e^x \sin x$.

  * On sait que pour tout $\lambda \leq 1$, $1 + i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique.
    Soit $\lambda > 1$.
    On a $\sqrt{\lambda - 1} = 1 \iff \lambda = 2$.

* si $\lambda \neq 2$.
Comme $1+i$ n'est pas solution de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de $y''-2y'+\lambda y = e^x\sin(x)$ sous la forme $\begin{array}{rccc} y: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & e^x(A\cos(x)+B\sin(x)) \end{array}$, $A,B\in\mathbb{R}$.
Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$y'(x) = e^x((A+B)\cos(x)+(B-A)\sin(x))$$
$$y''(x) = e^x(2B\cos(x)-2A\sin(x))$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} y''-2y'+\lambda y = e^x\sin(x) &\iff \forall x\in\mathbb{R},\ e^x\left((2B-2A-2B+\lambda A)\cos(x)+(-2A-2B+2A+\lambda B)\sin(x)\right) = e^x\sin(x) \\ &\iff \forall x\in\mathbb{R},\ (-2+\lambda)A\cos(x)+(-2+\lambda)B\sin(x) = \sin(x) \\ &\iff \begin{cases} (-2+\lambda)A = 0 \\ (-2+\lambda)B = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} A = 0 \\ B = \dfrac{1}{\lambda-2} \end{cases} \quad \text{car } \lambda\neq 2 \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\lambda-2}e^x\sin(x) \end{array}$ est solution particulière de $y''-2y'+\lambda y = e^x\sin(x)$.

* si $\lambda = 2$.
On commence par chercher une solution particulière de $y''-2y'+\lambda t = e^{(1+i)x}$ puis on prendra la partie imaginaire.
Comme $1+i$ est solution simple de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de $y''-2y'+2y = e^{(1+i)x}$ de la forme : $\begin{array}{rccc} y: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & x & \mapsto & Cxe^{(1+i)x} \end{array}$, $C\in\mathbb{C}$.
Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$y'(x) = C\left(1+(1+i)x\right)e^{(1+i)x}$$
$$y''(x) = C\left((1+i)^2x+2(1+i)\right)e^{(1+i)x} = C(2ix+2+2i)e^{(1+i)x}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} y''-2y'+2y = e^{(1+i)x} &\iff \forall x\in\mathbb{R},\ e^{(1+i)x}C(2ix+2+2i-2-2x-2ix+\lambda x) = e^{(1+i)x} \\ &\iff 2iC = 1 \\ &\iff C = -\frac{i}{2} \end{aligned}$$

Ainsi : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & -\dfrac{i}{C}e^{(1+i)x} \end{array}$ est solution particulière de $y''-2y'+\lambda y = e^{(1+i)x}$.

Donc, $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{Im}\left(-\dfrac{i}{2}xe^{(1+i)x}\right) = -\dfrac{xe^x}{2}\mathrm{Im}\left(ie^{ix}\right) = -\dfrac{1}{2}xe^x\mathrm{Re}(e^{ix}) = -\dfrac{1}{2}xe^x\cos(x) \end{array}$ est solution particulière de $y''-2y'+\lambda y = e^x\sin(x)$.

Finalement, la solution générale de l'équation est :

- Si $\lambda<1$ et $\lambda\neq 0$, $x\mapsto \dfrac{1}{\lambda}e^{2x}+\dfrac{1}{\lambda-2}e^x\sin(x)+Ae^{x(1-\sqrt{1-\lambda})}+Be^{x(1+\sqrt{1-\lambda})}$, $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.
- Si $\lambda=0$, $x\mapsto \dfrac{x}{2}e^{2x}-\dfrac{1}{2}e^x\sin(x)+A+Be^{2x}$, $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.
- Si $\lambda=1$, $x\mapsto e^{2x}-e^x\sin(x)+(Ax+B)e^x$, $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.
- $\lambda>1$ et $\lambda\neq 2$, $x\mapsto \dfrac{1}{\lambda}e^{2x}+\dfrac{1}{\lambda-2}e^x\sin(x)+e^x\left(A\cos(\sqrt{\lambda-1}x)+B\sin(\sqrt{\lambda-1})x)\right)$, $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.
- $\lambda=2$, $x\mapsto \dfrac{1}{2}e^{2x}-\dfrac{x}{2}e^x\cos(x)+e^x\left(A\cos(x)+B\sin(x)\right)$, $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.

Exercice 23. • Résolvons l'équation homogène : $y''+y=0$.
L'équation caractéristique associée à $y''+y=0$ est $r^2+1=0$ dont les racines sont $\pm i$.
Les solutions de $y''+y=0$ sont :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & A\cos(x)+B\sin(x) \end{array},\ A,B\in\mathbb{R}$$

- Cherchons une solution particulière de $y'' + y = |x| + 1$.

  - sur $]-\infty, 0[$: l'équation se réécrit : $y''+y = -x+1$. Ainsi, $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_-^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x+1 \end{array}$ est une solution particulière de $y''+y = -x+1$ sur $\mathbb{R}_-^*$.
  - sur $[0, +\infty[$: l'équation se réécrit : $y''+y = x+1$. Ainsi, $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array}$ est une solution particulière de $y''+y = -x+1$ sur $\mathbb{R}_+$.
- Finalement, les solutions de $y''+y = |x|+1$
  - sur $\mathbb{R}_-^*$ sont les fonctions :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_-^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x+1+A\cos(x)+B\sin(x) \end{array}, A, B \in \mathbb{R}$$

  - sur $\mathbb{R}_+$ sont les fonctions :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1+A\cos(x)+B\sin(x) \end{array}, A, B \in \mathbb{R}$$

- Il reste à étudier s'il existe une solution sur $\mathbb{R}$.

$$y \text{ solution sur } \mathbb{R} \text{ de } y''+y = |x|+1 \iff \left\{ \begin{array}{l} \exists A, B \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_-^*, y(x) = -x+1+A\cos(x)+B\sin(x) \\ \exists C, D \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+, y(x) = x+1+C\cos(x)+D\sin(x) \\ y \text{ continue et deux fois dérivable en } 0. \end{array} \right.$$

Soient $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, posons $\begin{array}{cccc} y: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} -x+1+A\cos(x)+B\sin(x) & \text{si } x < 0 \\ x+1+C\cos(x)+D\sin(x) & \text{si } x \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$.

<u>Continuité en 0</u> :
On a : $\lim_{x\to 0^-} y(x) = 1+A$ et $\lim_{x \to 0^+} y(x) = 1+C$.
Ainsi,

$$\begin{aligned} y \text{ est continue en } 0 & \text{ si et seulement si } 1+A = 1+C \\ & \text{ si et seulement si } A = C \end{aligned}$$

On suppose désormais $A = C$. Ainsi $\begin{array}{cccc} y: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} -x+1+A\cos(x)+B\sin(x) & \text{si } x < 0 \\ x+1+A\cos(x)+D\sin(x) & \text{si } x \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$.

<u>Dérivabilité en 0</u> :
On sait que $y(0) = 1+A$.
Soit $x \in \mathbb{R}_-^*$. On a : $\dfrac{y(x)-y(0)}{x} = \dfrac{-x+1+A\cos(x)+B\sin(x)-(1+A)}{x} = -1+A\left(\dfrac{\cos(x)-1}{x}\right)+B\dfrac{\sin(x)}{x}$.
D'où $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{y(x)-y(0)}{x} = -1-A\sin(0)+B\cos(0) = -1+B$ (cos et sin sont dérivables en 0).
De même, on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \dfrac{y(x)-y(0)}{x} = \dfrac{x+1+A\cos(x)+D\sin(x)-(1+A)}{x} = 1+A\left(\dfrac{\cos(x)-1}{x}\right)+D\dfrac{\sin(x)}{x}$.
D'où $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{y(x)-y(0)}{x} = 1-A\sin(0)+D\cos(0) = 1+D$.

$$\begin{aligned} y \text{ est dérivable en } 0 & \text{ si et seulement si } -1+B = 1+D \\ & \text{ si et seulement si } B = 2+D \end{aligned}$$

On suppose désormais $B = 2+D$. Ainsi $\begin{array}{cccc} y: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} -x+1+A\cos(x)+(2+D)\sin(x) & \text{si } x < 0 \\ x+1+A\cos(x)+D\sin(x) & \text{si } x \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$.

<u>Dérivabilité seconde en 0</u> :
On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \ y'(x) = -1-A\sin(x)+(2+D)\cos(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ y'(x) = 1 - A\sin(x) + D\cos(x)$$

on a alors : $y'(0) = 1 + D$.
Soit $x \in \mathbb{R}_-^*$. $\dfrac{y'(x) - y'(0)}{x} = \dfrac{-1 - A\sin(x) + (2+D)\cos(x) - (1+D)}{x} = (2+D)\left(\dfrac{\cos(x)-1}{x}\right) - A\dfrac{\sin x}{x}$.
On a alors : $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{y'(x) - y'(0)}{x} = -(2+D)\sin(0) - A\cos(0) = A$.
De même : Soit $x \in \mathbb{R}_+$. $\dfrac{y'(x) - y'(0)}{x} = \dfrac{1 - A\sin(x) + D\cos(x) - (1+D)}{x} = D\left(\dfrac{\cos(x)-1}{x}\right) - A\dfrac{\sin x}{x}$.
On a alors : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{y'(x) - y'(0)}{x} = -D\sin(0) - A\cos(0) = A$.
Ainsi, on a $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{y'(x) - y'(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{y'(x) - y'(0)}{x}$.
Donc y' est dérivable en 0 donc y est dérivable deux fois en 0.

Finalement, l'équation $y'' + y = |x| + 1$ admet pour solutions sur $\mathbb{R}$ les fonctions :

$$\begin{array}{lccl} y & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} -x + 1 + A\cos(x) + (2+D)\sin(x) & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ x + 1 + A\cos(x) + D\sin(x) & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{array} \right. \end{array} \quad,\ A, D \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 24. 1. Soit $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables. Posons $u = x + y$ et $v = x - y$.
u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ car x et y le sont.
On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = y + t^2 \\ y' = x - t^2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x' + y' = y + x \\ x' - y' = y - x + 2t^2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} u' = u \\ v' = -v + 2t^2 \end{array} \right.$$

- Déterminons les solutions de $u' - u = 0$.
  Les solutions de $u' - u$ sont $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^t \end{array}$ $, \lambda \in \mathbb{R}$.

- Cherchons les solutions de $v' = -v + 2t^2$.
  - Résolvons $v' + v = 0$.
    Les solutions de $v' + v$ sont $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{-t} \end{array}$ $, \lambda \in \mathbb{R}$.
  - Cherchons une solution particulière de $v' + v = 2t^2$ de la forme $v : t \mapsto at^2 + bt + c,\ a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} v' + v = 2t^2 &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ v'(t) + v(t) = 2t^2 \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ at^2 + (b + 2a)t + b + c = 2t^2 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} a = 2 \\ b + 2a = 0 \\ b + c = 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} a = 2 \\ b = -4 \\ b + c = 4 \end{array} \right. \end{aligned}$$

    Ainsi, $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 2t^2 - 4t + 4 \end{array}$ est une solution particulière de $v' + v = 2t^2$.
  - Finalement, les solutions de $v' + v = 2t^2$ sont :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 2t^2 - 4t + 4 + \lambda e^{-t} \end{array}$$

Finalement, on a :

$$\left\{\begin{array}{l} x' = y + t^2 \\ y' = x - t^2 \end{array}\right. \iff \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{l} u(t) = \lambda_1 e^t \\ v(t) = 2t^2 - 4t + 4 + \lambda_2 e^{-t} \end{array}\right.$$

$$\iff \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{l} u(t) + v(t) = \lambda_1 e^t + 2t^2 - 4t + 4 + \lambda_2 e^{-t} \\ u(t) - v(t) = \lambda_1 e^t - 2t^2 + 4t - 4 - \lambda_2 e^{-t} \end{array}\right.$$

$$\iff \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{l} x(t) = \dfrac{\lambda_1}{2} e^t + \dfrac{\lambda_2}{2} e^{-t} + t^2 - 2t + 2 \\ y(t) = \dfrac{\lambda_1}{2} e^t - \dfrac{\lambda_2}{2} e^{-t} - t^2 + 2t - 2 \end{array}\right.$$

$$\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{l} x(t) = \dfrac{\lambda}{2} e^t + \dfrac{\mu}{2} e^{-t} + t^2 - 2t + 2 \\ y(t) = \dfrac{\lambda}{2} e^t - \dfrac{\mu}{2} e^{-t} - t^2 + 2t - 2 \end{array}\right.$$

Finalement, les solutions $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ du système sont les fonctions définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = \frac{\lambda}{2} e^t + \frac{\mu}{2} e^{-t} + t^2 - 2t + 2, \quad \text{et } y(t) = \frac{\lambda}{2} e^t - \frac{\mu}{2} e^{-t} - t^2 + 2t - 2, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

2. Raisonnons par analyse-synthèse :
Analyse : supposons qu'il existe $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solution du système. Alors x et y sont dérivables.
De plus, $x' = -7x + y + 1$ donc x' est dérivable.
Soit $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} x''(t) &= -7x'(t) + y'(t) + 1 = -7x'(t) - 2x(t) - 5y(t) + 1 \\ &= -7x'(t) - 2x(t) - 5(x'(t) + 7x(t) - 1) + 1 \\ &= -12x'(t) - 37x(t) + 6 \end{aligned}$$

Ainsi, x est solution de l'équation $x'' + 12x' + 37x = 6$.

- Résolvons $x'' + 12x' + 37x = 0$.
  Son équation caractéristique est $r^2 + 12r + 37 = 0$ dont le discriminant vaut : $144 - 4 \times 37 = 144 - 148 = -4$.
  Ses racines sont donc $-6 - i$ et $-6 + i$.
  Les solutions de $x'' + 12x' + 37x = 0$ sont donc :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^{-6t}(\lambda \cos(t) + \mu \sin(t)) \end{array}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- La fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{6}{37} \end{array}$ est une solution particulière de $x'' + 12x' + 37x = 6$.
- Finalement, les solutions de $x'' + 12x' + 37x = 6$ sont :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^{-6t}(\lambda \cos(t) + \mu \sin(t)) + \dfrac{6}{37} \end{array}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Ainsi, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$x : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^{-6t}(\lambda \cos(t) + \mu \sin(t)) + \dfrac{6}{37} \end{array}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

On a alors : $y = x' + 7x - 1$ donc :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = e^{-6t}\left[(\mu - 6\lambda)\cos(t) - (6\mu + \lambda)\sin(t)\right] + 7e^{-6t}(\lambda \cos(t) + \mu \sin(t)) + \frac{42}{37} - 1$$

Donc

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = e^{-6t}\left[(\mu + \lambda)\cos(t) + (\mu - \lambda)\sin(t)\right] + \frac{5}{37}$$

Synthèse :
Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Posons pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = e^{-6t}(\lambda \cos(t) + \mu \sin(t)) + \dfrac{6}{37} \\ y(t) = e^{-6t}\left[(\mu + \lambda)\cos(t) + (\mu - \lambda)\sin(t)\right] + \dfrac{5}{37} \end{array}\right.$$

En dérivant, on vérifie que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x'(t) = -7x(t) + y(t) + 1 \text{ et : } \forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) = -2x(t) - 5y(t)$$

Finalement, les solutions $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ du système sont les fonctions définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = e^{-6t}(\lambda\cos(t) + \mu\sin(t)) + \frac{6}{37}, \quad \text{ et } y(t) = e^{-6t}\left[(\mu+\lambda)\cos(t) + (\mu-\lambda)\sin(t)\right] + \frac{5}{37}\lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Exercice 25. L'équation caractéristique associé à $y'' + ay' + by = 0$ est $r^2 + ar + b = 0$.
On remarque tout d'abord que la solution est bornée sur $]0, +\infty[$ si et seulement si la limite en $+\infty$ est finie.
Faisons trois cas selon le signe du discriminant.

- **1er cas** $a^2 - 4b > 0$.
  Notons r_1, r_2 les solutions de l'équation caractéristique.
  Les solutions de $y'' + ay' + b = 0$ sont :
  $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} \end{array}, A, B \in \mathbb{R}$$
  Soit $A, B \in \mathbb{R}$. Posons $y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} \end{array}$.
  La limite de y en $+\infty$ est finie si et seulement si $\Big(r_1 \leq 0 \text{ et } r_2 \leq 0\Big)$ si et seulement si $r_1 + r_2 \leq 0$ et $r_1 r_2 \geq 0$ si et seulement si $-a \leq 0$ et $b \geq 0$ si et seulement si $a \geq 0$ et $b \geq 0$.
- **2ème cas** $a^2 = 4b$.
  Notons r_0 l'unique solution de l'équation caractéristique.
  Les solutions de $y'' + ay' + b = 0$ sont :
  $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (Ax + B)e^{r_0 x} \end{array}, A, B \in \mathbb{R}$$
  Soit $A, B \in \mathbb{R}$. Posons $y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (Ax + B)e^{r_0 x} \end{array}$.
  La limite de y en $+\infty$ est finie si et seulement si $r_0 < 0$ si et seulement si $-\dfrac{a}{2} < 0$ si et seulement si $a > 0$.
- **3ème cas** $a^2 < 4b$.
  Notons $\alpha \pm i\beta$ les solutions de l'équation caractéristique (avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).
  Les solutions de $y'' + ay' + b = 0$ sont :
  $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{\alpha x}\left(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)\right) \end{array}, A, B \in \mathbb{R}$$
  Soit $A, B \in \mathbb{R}$. Posons $y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{\alpha x}\left(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)\right) \end{array}$.
  La limite de y en $+\infty$ est finie si et seulement si $\alpha \leq 0$ si et seulement si $2\alpha \leq 0$ si et seulement si $\alpha + i\beta + \alpha - i\beta \leq 0$ si et seulement si $-a \leq 0$ si et seulement si $a \geq 0$.

Ainsi, toute solution sur $]0, +\infty[$ de $y'' + ay' + by = 0$ est bornée

$$\begin{array}{ll}
\text{si et seulement si} & \left\{\begin{array}{l} a^2 > 4b \text{ et } a \geq 0 \text{ et } b \geq 0 \\ ou \\ a^2 = 4b \text{ et } a > 0 \\ ou \\ a^2 < 4b \text{ et } a \geq 0 \end{array}\right. \\
\text{si et seulement si} & \left\{\begin{array}{l} a^2 > 4b \text{ et } a \geq 0 \text{ et } b \geq 0 \\ ou \\ 4b = a^2 \geq 0 \text{ et } a \geq 0 \text{ et } a \neq 0 \\ ou \\ a^2 < 4b \text{ et } a \geq 0 \text{ et } b \geq 0 \end{array}\right. \\
\text{si et seulement si} & \left\{\begin{array}{l} a^2 > 4b \text{ et } a \geq 0 \text{ et } b \geq 0 \text{ et } (a,b) \neq (0,0) \\ ou \\ 4b = a^2 \geq 0 \text{ et } a \geq 0 \text{ et } b \geq 0 \text{ et } (a,b) \neq (0,0) \\ ou \\ a^2 < 4b \text{ et } a \geq 0 \text{ et } b \geq 0 \text{ et } (a,b) \neq (0,0) \end{array}\right. \\
\text{si et seulement si} & (a,b) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0,0)\}
\end{array}$$

Ainsi, l'ensemble des couples solution est $\mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Exercice 26. Raisonnons par analyse synthèse.
Analyse : Supposons qu'il existe $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dérivable telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(-x)$.
Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, on déduit de l'égalité que f' est elle même dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = -f'(-x)$. Or : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(-x) = f(x)$. Ainsi, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + f(x) = 0.$$

Ainsi, f est solution de l'équation différentielle homogène du second ordre $y'' + y = 0$.
L'équation caractéristique associée à $y'' + y = 0$ est $r^2 + 1 = 0$ dont les racines sont $\pm i$.
Ainsi, les solutions de $y'' + y = 0$ sont : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) \end{array}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Donc, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda\cos(x) + \mu\sin(x).$$

On obtient alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\lambda\sin(x) + \mu\cos(x)$. En reportant dans l'équation de départ, on en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R},\ -\lambda\sin(x) + \mu\cos(x) = \lambda\cos(x) - \mu\sin(x)$.
Donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ (\mu - \lambda)\cos(x) = (\lambda - \mu)\sin(x)$. Or, sin et cos ne sont pas proportionnelles.
Ainsi, $\lambda = \mu$.
Donc, $\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \lambda(\cos(x) + \sin(x)) \end{array}$.
Synthèse : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, posons $\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \lambda(\cos(x) + \sin(x)) \end{array}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \lambda(-\sin(x) + \cos(x)) = \lambda(\sin(-x) + \cos(-x)) = f(-x)$ par imparité du sinus et parité du cosinus.
Ainsi, f est bien solution de l'équation.
En conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda(\cos(x) + \sin(x)) \end{array},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 27. **Analyse :** Supposons qu'il existe f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) - f(x) = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$.
Posons $C = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$.
Les solutions de $y' - y = 0$ sont :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^x \end{array},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

De plus, $x \mapsto -C$ est solution particulière de $y' - y = C$.
Donc les solutions de $y' - y = C$ sont :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^x - C \end{array},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda e^x - C.$$

De plus, on doit avoir $C = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$.
Or,

$$\int_0^1 (\lambda e^t - C)dt = \lambda \int_0^1 e^t dt - C = \lambda(e-1) - C.$$

D'où $2C = \lambda(e-1)$ donc $C = \dfrac{\lambda(e-1)}{2}$.
Ainsi, on a :

$$\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \lambda\left(e^x - \dfrac{e-1}{2}\right) \end{array}$$

.
Synthèse : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \lambda\left(e^x - \dfrac{e-1}{2}\right) \end{array}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = \lambda e^x$. Donc $f'(x) - f(x) = \lambda e^x - \lambda e^x + \lambda\dfrac{(e-1)}{2} = \lambda\dfrac{(e-1)}{2}$.

De plus, $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \lambda(e-1) - \lambda\frac{(e-1)}{2} = \lambda\frac{(e-1)}{2}$.
Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) - f(x) = \int_0^1 f(t)dt$$

Donc f est solution du problème.
Conclusion : L'ensemble des solutions du problème est :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\left(e^x - \dfrac{e-1}{2}\right) \end{array}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 28. 1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $\phi(x) = f(x) - x\displaystyle\int_0^x f(t)dt + \int_0^x tf(t)dt$.

f et $t \mapsto tf(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ et $x \mapsto \displaystyle\int_0^x tf(t)dt$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ en tant que primitives de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus, f est même $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Finalement, ϕ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\phi'(x) = f'(x) - xf(x) - \int_0^x f(t)dt + xf(x) = f'(x) - \int_0^x f(t)dt.$$

$$\phi''(x) = f''(x) - f(x).$$

2. On raisonne par analyse synthèse.

Analyse : Supposons qu'il existe f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - \displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)dt = x^2$.

D'après la question 1., une telle fonction doit vérifier l'équation différentielle $f'' - f = 2$ (en dérivant deux fois l'équation).

- Résolvons $y'' - y = 0$.
  Son équation caractéristique est $r^2 - 1 = 0$ dont les racines sont ± 1 .
  Ainsi, les solutions de $y'' - y = 0$ sont :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^x + \mu e^{-x} \end{array}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- $x \mapsto -2$ est une solution particulière de $y'' - y = 2$.
- Finalement, les solutions de $y'' - y = 2$ sont :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^x + \mu e^{-x} - 2 \end{array}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Ainsi, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -2 + \lambda e^x + \mu e^{-x}$$

En réinjectant dans l'expression, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 = f(x) - \int_0^x (x-t)f(t) = \ -2 + \lambda e^x + \mu e^{-x} - x\int_0^x (-2 + \lambda e^t + \mu e^{-t})dt + \int_0^x t(-2 + \lambda e^t + \mu e^{-t})dt$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $\displaystyle\int_0^x (-2 + \lambda e^t + \mu e^{-t})dt = -2x + \lambda(e^x - 1) - \mu(e^{-x} - 1) = -2x + \lambda e^x - \mu e^{-x} - \lambda + \mu$.
Pour la seconde intégrale, on effectue l'intégration par parties :

$$\begin{array}{ll} u'(t) = -2 + \lambda e^t + \mu e^{-t}, & v(t) = t \\ u(t) = -2t + \lambda e^t - \mu e^{-t} & v'(t) = 1 \end{array}.$$

u et v sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned}\int_0^x t(-2 + \lambda e^t + \mu e^{-t})dt &= \Big[t(-2t + \lambda e^t - \mu e^{-t})\Big]_0^x - \int_0^x (-2t + \lambda e^t - \mu e^{-t})dt \\ &= x(-2x + \lambda e^x - \mu e^{-x}) - \Big[-t^2 + \lambda e^t + \mu e^{-t}\Big]_0^x \\ &= -2x^2 + \lambda x e^x - \mu x e^{-x} + x^2 - \lambda e^x - \mu e^{-x} + \lambda + \mu \\ &= -x^2 + \lambda(x-1)e^x + \mu(-x-1)e^{-x} + \lambda + \mu\end{aligned}$$

D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -2+\lambda e^{x}+\mu e^{-x}+2x^2-\lambda x e^{x}+\mu x e^{-x}+x(\lambda-\mu)-x^2+\lambda(x-1)e^{x}+\mu(-x-1)e^{-x}+\lambda+\mu=x^2$$

En simplifiant, on se ramène à l'équation :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -2+\lambda+\mu+x(\lambda-\mu)=0$$

Ainsi, en identifiant, on obtient : $\lambda+\mu=2$ et $\lambda-\mu=0$. D'où, $\lambda=\mu=1$.
Ainsi, f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)=-2+e^{x}+e^{-x}$.

Synthèse : Posons $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -2+e^{x}+e^{-x} \end{array}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x)-\int_0^x (x-t)f(t)dt &= f(x)-x\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(t)dt \\ &= -2+e^{x}+e^{-x}+2x^2-xe^{x}+xe^{-x}-x^2+(x-1)e^{x}-(x+1)e^{-x}+2 \\ &= x^2 \end{aligned}$$

En reprenant les calculs de la phase d'analyse pour $\lambda=\mu=1$.
Ainsi, f est solution du problème.

Conclusion : Il existe une unique solution de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)-\displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)dt=x^2$ qui est la fonction : $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -2+e^{x}+e^{-x} \end{array}$.

Exercice 29. Raisonnons par analyse-synthèse :
Analyse : supposons qu'il existe f deux fois dérivable vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y) \quad (*)$$

En évaluant l'égalité $(*)$ pour $x=y=0$, on obtient : $f(0)^2=f(0)$. Donc $f(0)=0$ ou $f(0)=1$.

- Si $f(0)=0$ alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $2f(x)=2f(x)f(0)=0$ (en prenant $y=0$ dans l'égalité $(*)$).
  Donc la fonction est identiquement nulle.
- Supposons désormais que $f(0)=1$.
  On en déduit que $\forall y \in \mathbb{R},\ f(y)+f(-y)=2f(y)$ en prenant $x=0$ dans $(*)$. Donc :

  $$\forall y \in \mathbb{R},\ f(-y)=f(y) \quad (**)$$

  c'est à dire que la fonction f est paire.
  En dérivant cette nouvelle relation, on obtient :

  $$\forall y \in \mathbb{R},\ -f'(-y)=f'(y)$$

  En évaluant cette égalité en 0, on obtient : $-f'(0)=f'(0)$ donc $f'(0)=0$.
  Soit $y \in \mathbb{R}$, en dérivant $(*)$ par rapport à x (possible car f est deux fois dérivable), on obtient :

  $$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x+y)+f'(x-y)=2f'(x)f(y)$$

  puis en dérivant de nouveau par rapport à x (toujours possible car f' est dérivable, on a :

  $$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x+y)+f''(x-y)=2f''(x)f(y)$$

  Donc :

  $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f''(x+y)+f''(x-y)=2f''(x)f(y) \quad (1)$$

  Soit $x \in \mathbb{R}$, en dérivant $(*)$ par rapport à y, on obtient :

  $$\forall y \in \mathbb{R},\ f'(x+y)-f'(x-y)=2f(x)f'(y)$$

  Puis en dérivant de nouveau par rapport à y, on obtient :

  $$\forall y \in \mathbb{R},\ f''(x+y)+f''(x-y)=2f(x)f''(y)$$

  Ainsi :

  $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f''(x+y)+f''(x-y)=2f(x)f''(y) \quad (2)$$

Des relations (1) et (2), on obtient :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f''(x)f(y)=f(x)f''(y)$$

En particulier, en prenant $y=0$, comme $f(0)=1$, on en déduit que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f''(x)=f''(0)f(x)$$

Posons $A=f''(0)$.
f est l'unique solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y''-Ay=0\\ y(0)=1\\ y'(0)=0\end{cases}$$

* Si $A=0$ alors, l'équation caractéristique associée à $y''-Ay=0$ est $r^2=0$ dont l'unique racine est 0.
  Ainsi, il existe $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tels que : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=(\lambda x+\mu)$.
  Or :
  $$\begin{cases} f(0)=1\\ f'(0)=0\end{cases}\iff\begin{cases}\mu=1\\ \lambda=0\end{cases}$$
  Ainsi, f est constante égale à 1.
* Si $A>0$. alors, l'équation caractéristique associée à $y''-Ay=0$ est $r^2-A=0$ dont les deux racines distinctes sont $\pm\sqrt{A}$.
  Par suite, il existe $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tels que l'on ait :
  $$f:\begin{array}{rcl}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&\lambda e^{\sqrt{A}x}+\mu e^{-\sqrt{A}x}\end{array}$$
  De plus, on a :
  $$\begin{aligned}\begin{cases} f(0)=1\\ f'(0)=0\end{cases}&\iff\begin{cases}\lambda+\mu=1\\ \sqrt{A}(\lambda-\mu)=0\end{cases}\\ &\iff\begin{cases}\lambda+\mu=1\\ \lambda-\mu=0\end{cases}\quad\text{car }\sqrt{A}\neq 0\\ &\iff\begin{cases}\lambda=\dfrac{1}{2}\\ \mu=\dfrac{1}{2}\end{cases}\end{aligned}$$
  Et f est donc la fonction définie par : $f:\begin{array}{rcl}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&\dfrac{e^{\sqrt{A}x}+e^{-\sqrt{A}x}}{2}=\operatorname{ch}(\sqrt{A}x)\end{array}$ (cette écriture convient aussi dans le cas $A=0$, on retrouve f constante égale à 1.
* Si $A<0$. alors, l'équation caractéristique associée à $y''-Ay=0$ est $r^2-A=0$ dont les deux racines distinctes sont $\pm i\sqrt{-A}$.
  Par suite, il existe $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tels que l'on ait :
  $$f:\begin{array}{rcl}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&\lambda\cos(\sqrt{-A}x)+\mu\sin(\sqrt{-A}x)\end{array}$$
  De plus, on a :
  $$\begin{aligned}\begin{cases} f(0)=1\\ f'(0)=0\end{cases}&\iff\begin{cases}\lambda=1\\ \sqrt{-A}\mu=0\end{cases}\\ &\iff\begin{cases}\lambda=1\\ \mu=0\end{cases}\quad\text{car }\sqrt{-A}\neq 0\end{aligned}$$
  Et f est donc la fonction définie par : $f:\begin{array}{rcl}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&\cos(\sqrt{-A}x)\end{array}$ (cette écriture convient aussi dans le cas $A=0$, on retrouve f constante égale à 1.

Ainsi, f est soit la fonctions nulle, soit la fonction $x \mapsto \cos(Cx)$ avec $C \in \mathbb{R}$, soit la fonction $x \mapsto \operatorname{ch}(Cx)$ avec $C \in \mathbb{R}$.
Synthèse : La fonction nulle est solution.
Soit $C \in \mathbb{R}$, posons $\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \operatorname{ch}(Cx) \end{array}$.
f est bien deux fois dérivable. De plus, soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} 2f(x)f(y) &= \frac{2}{4}\left(e^{Cx} + e^{-Cx}\right)\left(e^{Cy} + e^{-Cy}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[e^{C(x+y)} + e^{C(x-y)} + e^{C(-x+y)} + e^{C(-x-y)}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[e^{C(x+y)} + e^{-C(x+y)} + e^{C(x-y)} + e^{-C(x-y)}\right] \\ &= f(x+y) + f(x-y) \end{aligned}$$

Donc f est bien solution.
Posons $\begin{array}{cccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \cos(Cx) \end{array}$.
f est bien deux fois dérivable. De plus, soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} 2f(x)f(y) &= 2\cos(x)\cos(y) \\ &= \frac{2}{4}(e^{ix} + e^{-ix})(e^{iy} + e^{-iy}) \\ &= \frac{1}{2}(e^{i(x+y)} + e^{i(x-y)} + e^{-i(x-y)} + e^{-i(x+y)}) \\ &= \frac{1}{2}(2\cos(x+y) + 2\cos(x-y)) \\ &= \cos(x+y) + \cos(x-y) \\ &= f(x+y) + f(x-y) \end{aligned}$$

Donc g est bien solution.
Conclusion : Les solutions sont la fonction nulle et les fonctions de la forme $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(Cx) \end{array}$ et $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \operatorname{ch}(Cx) \end{array}$ avec $C \in \mathbb{R}$.