Corrigé de la feuille d'exercices 17

1 Ensemble $\mathbb{K}[X]$

Exercice 1. On a $\deg(P_n) \leq 4n$.
D'après la binôme de newton, on a :

$$P_n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^{2k} - \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^{2n-k} X^{2k}.$$

- le coefficient de X^{4n} de P_n vaut $\binom{2n}{2n} - \binom{2n}{2n}(-1)^{2n-2n} = 0$. Donc $\deg(P_n) \leq 4n - 1$.
- le coefficient en X^{4n-1} de P_n vaut 0. En effet, il n'y a que des termes à la puissance paires dans P_n donc $\deg(P_n) \leq 4n - 2$
- le coefficient en X^{2n-2} de P_n vaut $\binom{2n}{2n-1} - \binom{2n}{2n-1}(-1)^{2n-(2n-1)} = 2n + 2n = 4n$. Or, $4n \neq 0$

Ainsi P est de degré $4n - 2$ et son coefficient dominant vaut $4n$.

Exercice 2. Le polynôme nul est solution.
Considérons P un polynôme non nul. Si P est solution alors en prenant le degré dans cette égalité, on obtient : $2\deg(P) = 2 + \deg(P)$, soit $\deg(P) = 2$.
Soit P de degré 2, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^2$ tel que $P(X) = aX^2 + bX + c$.

$$\begin{aligned} P \text{ est solution } &\iff aX^4 + bX^2 + c = aX^4 + bX^3 + (a+c)X^2 + bX + c \\ &\iff \begin{cases} a = a \\ b = 0 \\ a + c = b \end{cases}, \end{aligned}$$

en identifiant les coefficients (deux polynômes sont égaux ssi ils ont mêmes coefficients). Ainsi l'ensemble des polynômes satisfaisant cette identité est :

$$\{aX^2 - a | a \in \mathbb{K}\}.$$

Exercice 3. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré 3. Il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{R}^3$ tel que $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$. On a :

$$\begin{aligned} & P(X+1) - P(X-1) = X^2 + 1 \\ \iff\ & a(X+1)^3 + b(X+1)^2 + c(X+1) + d - a(X-1)^3 - b(X-1)^2 - c(X-1) - d \\ \iff\ & a(X+1)^3 + b(X+1)^2 + c(X+1) + d - a(X-1)^3 - b(X-1)^2 - c(X-1) - d \\ \iff\ & a\left[(X+1)^3 - (X-1)^3\right] + b\left[(X+1)^2 - (X-1)^2\right] + 2c = 0 \\ \iff\ & a\left[X^3 + 3X^2 + 3X + 1 - X^3 + 3X^2 - 3X + 1\right] + b\left[X^2 + 2X + 1 - X^2 + 2X - 1\right] + 2c = X^2 + 1 \\ \iff\ & a\left[6X^2 + 2\right] + 4bX + 2c = X^2 + 1 \\ \iff\ & 6aX^2 + 4bX + 2a + 2c = X^2 + 1 \\ \iff\ & \begin{cases} 6a = 1 \\ 4b = 0 \\ 2a + 2c = 1 \end{cases} \\ \iff\ & \begin{cases} a = \dfrac{1}{6} \\ b = 0 \\ c = \dfrac{1}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\{\dfrac{1}{6}X^3 + \dfrac{1}{3}X + d \mid d \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 4. Soit $n \geq 1$. Soit P un polynôme de degré n.
on a $\deg(P') = n-1$. Ainsi, $\deg(X^2P') = n+1$. Comme $n+1 \neq n$, on a $\deg(Q) = \deg(X^2P'+P) = \max(\deg(X^2P', \deg(P)) = \max(n+1, n) = n+1$.
On a $\deg(XP') = 1 + \deg(P') = n$. On sait alors que $\deg(R) \leq \max(\deg(XP'), \deg(P)) = n$.
Notons $a_n \neq 0$ le coefficient de X^n dans P (coefficient dominant de P). Le coefficient de X^n dans XP' vaut na_n. Ainsi, le coefficient de X^n de R vaut $(n+1)a_n \neq 0$. Ainsi, R est de degré n.

2 Divisibilité

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après le binôme de Newton, on a :

$$(X+1)^n - nX - 1 = \sum_{k=0}^{n} X^k - nX - 1 = \sum_{k=2}^{n} X^k = X^2 \sum_{k=2}^{n} X^{k-2} = X^2 \sum_{k=0}^{n-2} X^k$$

Ainsi, on a bien : $X^2|(X+1)^n - nX - 1$.

Exercice 6.

1. On a $4X^5 - 2X^4 + 3X^3 + 2X^2 - X + 5 = (X^2+X+1)(4X^3 - 6X^2 + 5X + 3) - 9X + 2$ en effectuant la division euclidienne.
2. On a $iX^3 - X^2 + 1 - i = ((1+i)X^2 - iX + 3)\left(\frac{(1+i)}{2}X + \frac{(-1+2i)}{2}\right) + \frac{(-5-4i)}{2}X + \frac{(5-8i)}{2}$ en effectuant la division euclidienne.

Exercice 7.

1. On a $3X^6 - 2X^5 + X^3 - X^2 + 2X + 1 = (2X^3 + 3X - 1)\left(\frac{3}{2}X^3 - X^2 - \frac{9}{4}X + \frac{11}{4}\right) + \frac{19}{4}X^2 - \frac{17}{2}X + \frac{15}{4}$ en effectuant le division euclidienne.
2. On a $X^3 - iX^2 - X = (X - 1 + i)\left(X^2 + (1-2i)X - (2+3i)\right) - (5+i)$ en effectuant le division euclidienne.

Exercice 8. Soient $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}^*$, q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de n par p et soit $a \in \mathbb{K}^*$. On a ainsi : $n = pq + r$ avec $0 \leq r < p$.

1. $X^n = X^{pq+r} = (X^p)^q X^r = (X^p - a + a)^q X^r = X^r \times \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} (X^p - a)^k a^{q-k}$ d'après le binôme de Newton.

   Ainsi,

$$\begin{aligned}
X^n &= X^r \times \left[a^q + \sum_{k=1}^{q} \binom{q}{k} (X^p - a)^k a^{q-k}\right] \\
&= a^q X^r + X^r (X^p - a) \sum_{k=1}^{q} \binom{q}{k} (X^p - a)^{k-1} a^{q-k} \\
&= a^q X^r + X^r (X^p - a) \sum_{l=0}^{q-1} \binom{q}{l+1} (X^p - a)^l a^{q-1-l} \\
&= (X^p - a) \times \underbrace{X^r \sum_{l=0}^{q-1} \binom{q}{l+1} (X^p - a)^l a^{q-1-l}}_{=Q} + a^q X^r
\end{aligned}$$

   Ainsi, $X^n = (X^p - a)Q + a^q X^r$ et $\deg(X^r) = r < p = \deg(X^p - a)$.
   Le reste dans la division euclidienne de X^n par $X^p - a$ est donc $a^q X^r$.
2. Si $q = 0$, alors $n = r$ et donc $X^n - a^n = 0 \times (X^p - a^p) + (X^r - a^r)$ et $\deg(X^r - a^r) = r < p = \deg(X^p - a^p)$.
   On suppose donc $q \in \mathbb{N}^*$. On procède comme précédemment :

$$\begin{aligned}
X^n - a^n &= X^{pq+r} - a^{pq+r} = (X^p)^q X^r - (a^p)^q a^r = (X^p)^q (X^r - a^r) + ((X^p)^q - (a^p)^q) a^r \\
&= (X^p - a^p + a^p)^q (X^r - a^r) + ((X^p)^q - (a^p)^q) a^r \\
&= (X^r - a^r) \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} (X^p - a^p)^k a^{p(q-k)} + a^r (X^p - a^p) \sum_{l=0}^{q-1} X^{lp} a^{(q-1-l)p} \\
&= (X^r - a^r) \left[a^{pq} + (X^p - a^p) \sum_{k=1}^{q} (X^p - a^p)^{k-1} a^{p(q-k)}\right] + a^r (X^p - a^p) \sum_{l=0}^{q-1} X^{lp} a^{(q-1-l)p} \\
&= (X^p - a^p) \left(a^r \sum_{l=0}^{q-1} X^{lp} a^{(q-1-l)p} + (X^r - a^r) \sum_{m=0}^{q-1} \binom{q}{m+1} (X^p - a^p)^m a^{p(q-1-m)}\right) + a^{pq} (X^r - a^r)
\end{aligned}$$

   Or, $\deg(X^r - a^r) = r < p = \deg(X^p - a^p)$.
   Ainsi, le reste dans la division euclidienne de $X^n - a^n$ par $X^p - a^p$ est $a^{pq} (X^r - a^r)$.

3.

$$\begin{array}{rl}
12 = 3\times 4+0 & \text{donc le reste dans la division euclidienne de } X^{12} \text{ par } X^3-1 \text{ vaut } 1\times X^0 = 1\\
11 = 3\times 3+2 & \text{donc le reste dans la division euclidienne de } 8X^{11} \text{ par } X^3-1 \text{ vaut } 8\times 1\times X^2 = 8X^2\\
6 = 3\times 2+0 & \text{donc le reste dans la division euclidienne de } 5(X^6-1) \text{ par } X^3-1 \text{ vaut } 5\times 1\times (X^0-1) = 5\\
4 = 3\times 1+1 & \text{donc le reste dans la division euclidienne de } -3X^4 \text{ par } X^3-1 \text{ vaut } -3\times 1\times X = -3X\\
2 = 3\times 0+2 & \text{donc le reste dans la division euclidienne de } X^2 \text{ par } X^3-1 \text{ vaut } 1\times X^2 = X^2
\end{array}$$

Finalement, le reste dans la division euclidienne de $X^{12}+8X^{11}+5X^6-3X^4+X^2-5$ par X^3-1 est $1+8^2+5-3X+X^2-5 = 9X^2-3X+1$.

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$X^2+1 \neq 0$. Ainsi, par le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$, il existe $Q, R \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A = BQ+R$ et $\deg(R) < \deg(X^2+1) = 2$. Ainsi, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $R = \alpha X + \beta$. On a alors : $A = BQ + \alpha X + \beta$.
En évaluant cette égalité en $\pm i$, on obtient :

$$(S) \quad \begin{cases} \alpha + i\beta = (\cos(a) + i\sin(a))^n = e^{ina} \\ \alpha - i\beta = (\cos(a) - i\sin(a))^n = e^{-ina} \end{cases}$$

Or,

$$(S) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{e^{ina}+e^{-ina}}{2} = \cos(na) \\ \beta = \dfrac{e^{ina}-e^{-ina}}{2i} = \sin(na) \end{cases}$$

Ainsi, le reste dans la division euclidienne de A par B est $\cos(na)X + \sin(na)$.

Exercice 10. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Notons $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

$$\begin{aligned}
P\circ P - X &= P\circ P - P + P - X \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k (P^k - X^k) + P - X \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k (P^k - X^k) + P - X \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k \left((P-X) \sum_{l=0}^{k-1} P^l X^{k-1-l} \right) + P - X \\
&= (P-X) \left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=0}^{k-1} a_k P^l X^{k-1-l} \right) + P - X \\
&= (P-X) \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=0}^{k-1} a_k P^l X^{k-1-l} \right)
\end{aligned}$$

Ainsi, $P-X$ divise $P\circ P - X$.
Posons $P = X^2-3X+1$.
$P\circ P - X = (X^2-3X+1)^2 - 3(X^2-3X+1) + 1 - X = (X^2-3X+1)^2 - 3X^2 + 8X - 2$. Ainsi, chercher les solutions $x \in \mathbb{R}$ de $(x^2-3x+1)^2 = 3x^2-8x+2$ revient à chercher les racines de $P\circ P - X$.
Or, $P\circ P - X = (P-X)\left(1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=0}^{k-1} a_k P^l X^{k-1-l}\right)$ avec $a_0 = 1,\ a_1 = -3,\ a_2 = 1$.
On obtient ainsi : $P\circ P - X = (X^2-4X+1)(1-3+X+P) = (X^2-4X+1)(X^2-2X-1)$.
Le discriminant de X^2-4X+1 vaut $16-4 = 12$. Ainsi ses racines sont : $2 \pm \sqrt{3}$.
Le discriminant de X^2-2X-1 vaut $4+4 = 8$. Ainsi ses racines sont : $1 \pm \sqrt{2}$.
Finalement, on obtient que les solutions réelles de l'équation sont : $\{2\pm\sqrt{3}, 1\pm\sqrt{2}\}$.

3 Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$

Exercice 11. 1. Le polynôme nul est solution.

Considérons P un polynôme non nul.

Si P est solution alors en prenant le degré dans cette égalité, on a : $2(\deg(P)-1)=\deg(P)$. Ainsi, $\deg(P)=2$.

Soit P un polynôme de degré 2. Il existe $(a,b,c)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^2$ tel que $P=aX^2+bX+c$.

$$\begin{aligned}
P'(X)^2=4P(X) &\iff (2aX+b)^2=4aX^2+4bX+4c\\
&\iff 4a^2X^2+4abX+b^2=4aX^2+4bX+4c\\
&\iff \begin{cases} 4a^2=4a\\ 4b=4ab\\ 4c=b^2\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} a=1\\ 4c=b^2\end{cases} \quad \text{car } a\neq 0
\end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble des solutions est : $\mathcal{S}=\{X^2+bX+\frac{b^2}{4}\mid b\in\mathbb{C}\}\cup\{0\}$.

2. Le polynôme nul est solution.

Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ non nul. Notons $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ avec $a_n\neq 0$.

$$\begin{aligned}
(X^2+1)P''-6P=0 &\iff (X^2+1)\sum_{k=2}^{n}k(k-1)a_kX^{k-2}=6\sum_{k=0}^{n}a_kX^k\\
&\iff \sum_{k=2}^{n}k(k-1)a_kX^k+\sum_{k=2}^{n}k(k-1)a_kX^{k-2}=6\sum_{k=0}^{n}a_kX^k
\end{aligned}$$

Ainsi, si P est solution alors, en égalisant les coefficients en X^n, on obtient : $n(n-1)a_n=6a_n$ d'où $n(n-1)=6$ (car $a_n\neq 0$). Or, l'équation $n^2-n-6=0$ admet pour solutions 3 et -2. Ainsi, $n=3$ car $n\geq 0$. Ainsi, si P est solution alors, P est de degré 3.

Soit $P=a_3X^3+a_2X^2+a_1X+a_0$ avec $a_3\neq 0$.

$$\begin{aligned}
(X^2+1)P''-6P=0 &\iff (X^2+1)(6a_3X+2a_2)=6a_2X^2+6a_1X+6a_0\\
&\iff 6a_3X^3+2a_2X^2+6a_3X+2a_2=6a_3X^3+6a_2X^2+6a_1X+6a_0\\
&\iff \begin{cases} 2a_2=6a_2\\ 6a_3=6a_1\\ 2a_2=6a_0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} a_2=0\\ a_3=a_1\\ a_0=0\end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est : $\mathcal{S}=\{aX^3+aX\mid a\in\mathbb{C}\}$.

Exercice 12. Si $\deg(P)<2$ alors $P^{(2)}=0$ donc P n'est pas solution.

Soit $P\in\mathbb{K}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2 et soit $m\geq\deg(P)$. D'après la formule de Taylor, on a :

$$P=\sum_{k=0}^{m}\frac{P^{(k)}(2)}{k!}(X-2)^k.$$

P est solution si et seulement si $P=6+1\times(X-2)+\frac{4}{2}(X-2)^2$

si et seulement si $P=6+X-2+2(X^2-4X+4)=2X^2-7X+12$

Le seul polynôme solution est $2X^2-7X+12$.

Exercice 13. 1. Soit $n\in\mathbb{N}$. On a $P_n=(X^2-1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^{2k}(-1)^k$. Ainsi, P_n est de degré $2n$ donc $P_n^{(n)}$ est de degré $2n-n=n$.

De plus, le terme dominant de P_n est X^{2n} donc le terme dominant de $P_n^{(n)}$ est $(X^{2n})^{(n)}$.

Or, $\left(X^{2n}\right)^{(n)} = \dfrac{(2n)!}{(2n-n)!}X^{2n-n} = \dfrac{(2n)!}{n!}X^n$. Ainsi, le coefficient dominant de $P_n^{(n)}$ vaut $\dfrac{(2n)!}{n!}$.

Finalement, le coefficient dominant dans L_n est $\dfrac{1}{2^n n!} \times \dfrac{(2n)!}{n!} = \dfrac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$.

2. On remarque que $P_n = (X+1)^n(X-1)^n$. Ainsi, par la formule de Leibniz, il vient :

$$P^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} ((X+1)^n)^{(k)}((X-1)^n)^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!}(X+1)^{n-k}\frac{n!}{k!}(X-1)^k = n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (X+1)^{n-k}(X-1)^k.$$

On a : $P_n(1) = n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 2^{n-k}0^k = n!\binom{n}{0}^2 2^n = n!2^n$. Donc $L_n(1) = \dfrac{P_n^{(n)}(1)}{2^n n!} = \dfrac{2^n n!}{2^n n!} = 1$.

De même, on a : $P_n(-1) = n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 0^{n-k}(-2)^k = n!\binom{n}{n}^2 (-2)^n = n!(-2)^n$.

Donc $L_n(-1) = \dfrac{P_n^{(n)}(1)}{2^n n!} = \dfrac{(-2)^n n!}{2^n n!} = (-1)^n$.

4 Racines

Exercice 14. Posons $P_n = (X-2)^{2n} + (X-1)^n - 1$.
On commence par remarquer que $X^2 - 3X + 2 = (X-2)(X-1)$.

$$\begin{aligned}
\text{Ainsi, } X^2 - 3X + 2 | (X-2)^{2n} + (X-1)^n - 1 \quad & \text{si et seulement si} \quad (X-2)(X-1)|P_n \quad . \\
& \text{si et seulement si 1 et 2 sont racines de } P_n \\
& \text{si et seulement si } P_n(2) = P_n(1) = 0
\end{aligned}$$

Or, $P_n(2) = 0$ et $P_n(1) = (-1)^{2n} - 1 = 0$.
Ainsi, $X^2 - 3X + 2 | (X-2)^{2n} + (X-1)^n - 1$.

Exercice 15 (d'après Petites Mines)**.**

1. Le discriminant du polynôme vaut 1-4=-3. Ainsi, ses racines sont $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ et $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.
   On pose $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. On a alors $\overline{j} = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ donc Q se factorise sous la forme : $Q = (X-j)(X-\overline{j})$.
2. Soient m, n, p trois entiers naturels. On pose $P = X^{3m+2} + X^{3n+1} + X^{3p}$. Comme P est à coefficients réels, on sait que les racines de P sont réels ou complexes conjuguées. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
Q \text{ divise } P \quad & \text{si et seulement si} \quad (X-j)(X-\overline{j}) \text{ divise } P \\
& \text{si et seulement si } j \text{ et } \overline{j} \text{ sont racines de } P \\
& \text{si et seulement si } j \text{ est racine de } P
\end{aligned}$$

   Il suffit donc de vérifier $P(j) = 0$. Or, $P(j) = j^{3m+2} + j^{3n+1} + j^{3p} = j^{3m}j^2 + j^{3n}j + j^{3p} = j^2 + j + 1 = 0$. Ainsi, j est racine de P donc par équivalence, Q divise P.
3. Notons $P_n = (X+1)^n + X^n + 1$. Comme P_n est à coefficients réels, on peut appliquer la même méthode que dans la question précédente. Ainsi, P_n est divisible par Q si et seulement si $P_n(j) = 0$.
   Or, $P_n(j) = (j+1)^n + j^n + 1 = (-j^2)^n + j^n + 1$.
   Etudions la valeur de $P_n(j)$ par disjonction de cas :
   - si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3k$.
     Alors, $P_n(j) = (-1)^{3k}(j^2)^{3k} + j^{3k} + 1 = (-1)^{3k} + 2$.
     Dans ce cas $P_n(j) \neq 0$ donc Q ne divise pas P_n.
   - si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3k+1$.
     Alors, $P_n(j) = (-1)^{3k+1}(j^2)^{3k+1} + j^{3k+1} + 1 = (-1)^{3k+1}j^2 + j + 1$.
     - Si k est pair, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $k = 2p$. On a alors $P_n(j) = -j^2 + j + 1 = -2j^2$.
       Donc Q ne divise pas P_n.
     - Si k est impair, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $k = 2p+1$. On a alors $P_n(j) = (-1)^{6p+4}j^2 + j + 1 = j^2 + j + 1 = 0$.
       Donc Q divise P_n.
   - si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3k+2$.
     Alors, $P_n(j) = (-1)^{3k}j + j^2 + 1$.
     - Si k est pair, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $k = 2p$. On a alors $P_n(j) = (-1)^{6p}j + j^2 + 1 = j + j^2 + 1 = 0$.
       Donc Q divise P_n.

- Si k est impair, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $k = 2p+1$. On a alors
  $P_n(j) = (-1)^{6p+3} j + j^2 + 1 = -j + j^2 + 1 = -2j$.
  Donc Q ne divise pas P_n.

Ainsi, Q divise P_n si et seulement si il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 6p+4$ ou $n = 6p+2$.

Exercice 16. Raisonnons par l'absurde.
Supposons que sin est une fonction polynomiale. On a : $\forall k \in \mathbb{Z},\ \sin(k\pi) = 0$. Ainsi, sin s'annule une infinité de fois.
Donc $\sin = 0$. Absurde car $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

Exercice 17. Pour tout $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$, on note $\mathrm{dom}\,(P)$ son coefficient dominant.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $\deg(T_n) = n$ et $\mathrm{dom}\,(T_n) = 2^{n-1}$. »
   Montrons par récurrence d'ordre 2 que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
   - Pour $n = 1$, $T_1 = X$ donc $\deg(T_1) = 1$ et $\mathrm{dom}\,(T_1) = 1 = 2^0$.
     Pour $n = 2$, $T_2 = 2X^2 - 1$ donc $\deg(T_2) = 2$ et $\mathrm{dom}\,(T_2) = 2 = 2^{2-1}$. Ainsi $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies.
     On a $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ donc $\deg(T_{n+2}) = \deg(2XT_{n+1} - T_n)$.
     Or, $\deg(T_n) = n$, $\deg(2XT_{n+1}) = \deg(2X) + \deg(T_{n+1}) = \deg(X) + \deg(T_{n+1}) = n+2$
     donc $\deg(T_n) < \deg(2XT_{n+1})$).
     Ainsi, $\deg(T_{n+2}) = \max(\deg(2XT_{n+1}), \deg(T_n)) = \deg(2XT_{n+1}) = n+2$.
     De plus, comme $\deg(T_n) < \deg(2XT_{n+1})$), le coefficient dominant de T_{n+2} est celui du polynôme $2XT_{n+1}$.
     D'où $\mathrm{dom}\,(T_{n+2}) = \mathrm{dom}\,(2XT_{n+1}) = 2\mathrm{dom}\,(T_{n+1}) = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$.
     Ainsi, $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
   - Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\deg(T_n) = n$ et $\mathrm{dom}\,(T_n) = 2^{n-1}$.

   De plus, on a : $\deg(T_0) = 0$ et $\mathrm{dom}\,(T_0) = 1$.
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $\mathcal{Q}(n)$: « $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. »
   Montrons par récurrence d'ordre 2 que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Q}(n)$ est vraie.
   - Pour $n = 0$, $T_0(\cos(\theta)) = 1 = \cos(0\theta)$.
     Pour $n = 1$, $T_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta)$.
     Ainsi, $\mathcal{Q}(0)$ et $\mathcal{Q}(1)$ sont vraies.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{Q}(n)$ et $\mathcal{Q}(n+1)$ sont vraies.

     $$\begin{aligned} T_{n+2}(\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta) T_{n+1}(\cos(\theta)) - T_n(\cos(\theta)) \\ &\underset{HR}{=} 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) \\ &= 2\cos(\theta)\left(\cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta)\right) - \cos(n\theta) \\ &= \cos(n\theta)\left(2\cos(\theta)^2 - 1\right) - \sin(n\theta)\left(2\cos(\theta)\sin(\theta)\right) \\ &= \cos(n\theta)\cos(2\theta) - \sin(n\theta)\sin(2\theta) \\ &= \cos((n+2)\theta) \end{aligned}$$

     Ainsi, $\mathcal{Q}(n+2)$ est vraie.
   - On a donc prouvé par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Q}(n)$ est vraie.

   Montrons désormais l'unicité.
   Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $P(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
   On a alors : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ P(\cos(\theta)) = T_n(\cos(\theta))$.
   Donc : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $(P - T_n)(\cos(\theta)) = 0$. Or, $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ est surjective.
   Ainsi : $\forall x \in [-1, 1],\ (P - T_n)(x) = 0$.
   Donc $P - T_n$ admet une infinité de racines (distinctes). C'est donc le polynôme nul.
   On a donc $P = T_n$. Ainsi, T_n est bien l'unique polynôme vérifiant l'égalité souhaitée.
3. T_0 n'admet aucune racine.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminons les racines de T_n.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} T_n(\cos(\theta)) = 0 &\iff \cos(n\theta) = 0 \\ &\iff n\theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \frac{\frac{\pi}{2} + k\pi}{n} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n} \end{aligned}$$

Ainsi, les $\left(\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$ sont des racines de T_n.

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $1 \leq 2k+1 \leq 2n-1$. D'où : $0 \leq \frac{\pi}{2n} \leq \frac{(2k+1)\pi}{2n} \leq \pi - \frac{\pi}{2n} < \pi$.

De plus, la fonction $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ est injective. Ainsi, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, les $\left(\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)$ sont deux à deux distincts. On a ainsi obtenu n racines distinctes pour T_n de degré n. On a donc déterminé toutes les racines de T_n.

Exercice 18. Posons $P_n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} X^k\right)^2 - n^2 X^{n-1}$.

On a : $(X-1)^2 | P_n$ si et seulement si 1 est racine de P_n d'ordre au moins 2 .
si et seulement si $P_n(1) = 0$ et $P_n'(1) = 0$.

Or, $P_n(1) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} 1\right)^2 - n^2 = n^2 - n^2 = 0$.

De plus, $P_n' = 2 \times \left(\sum_{k=0}^{n-1} X^k\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n-1} kX^{k-1}\right) - n^2(n-1)X^{n-2}$.

Ainsi, $P_n'(1) = 2 \times \left(\sum_{k=0}^{n-1} 1\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n-1} k\right) - n^2(n-1) = 2 \times n \times \left(\sum_{k=1}^{n-1} k\right) - n^2(n-1) = 2 \times n \times \frac{n(n-1)}{2} - n^2(n-1) = 0$.

Donc $(X-1)^2 | P_n$.

Exercice 19. Posons $Q_n = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$.
On a : $(X-1)^3 | Q_n$ si et seulement si 1 est racine de Q_n d'ordre au moins 3
si et seulement si $Q_n(1) = 0$, $Q_n'(1) = 0$ et $Q_n''(1) = 0$.
Or, $Q_n(1) = n - (n+2) + (n+2) - n = 0$.
De plus, $Q_n' = n(n+2)X^{n+1} - (n+2)(n+1)X^n + (n+2)$.
Ainsi, $Q_n'(1) = n(n+2) - (n+2)(n+1) + (n+2) = (n+2)(n-n-1+1) = 0$.
Enfin, $Q_n'' = n(n+2)(n+1)X^n - n(n+2)(n+1)X^{n-1}$.
Ainsi, $Q_n''(1) = 0$.
Donc : $(X-1)^3 | Q_n$.

Exercice 20.

1. $P' = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k!} X^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X^k}{k!}$. Ainsi, $P - P' = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X^k}{k!} = \frac{X^n}{n!}$.
2. Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe a racine au moins double de P, alors $P(a) = P'(a) = 0$ (par la caractérisation en termes de dérivées), donc $P(a) - P'(a) = 0$ d'où $\frac{a^n}{n!} = 0$ puis $a = 0$. Or $P(0) = 1$ donc $P(0) \neq 0$. Ainsi, 0 n'est pas racine de P. Absurde !
Ainsi P n'a que des racines simples.

Exercice 21.

1. On a $P(1) = 0$, donc 1 est racine de P.
On calcule $P' = 5X^4 - 24X^3 + 42X^2 - 32X + 9$. On a $P'(1) = 0$, donc 1 est racine au moins double de P.
On calcule $P'' = 20X^3 - 72X^2 + 84X - 32$. On a $P''(1) = 0$, donc 1 est racine au moins triple de P.
On calcule $P^{(3)} = 60X^2 - 144X + 84$. On a $P^{(3)}(1) = 0$, donc 1 est racine de P de multiplicité au moins 4.
On calcule $P^{(4)} = 120X - 144$. On a $P^{(4)}(1) = -24 \neq 0$, donc 1 est racine de P de multiplicité 4.

2. D'après la question précédente, 1 est racine de multiplicité 4 donc $(X-1)^4$ diviser P. Ainsi, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-1)^4 Q(X)$. Or, $\deg(Q) = \deg(P) - 4 = 1$. Ainsi, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}$ tels que $Q = \alpha X + \beta$. En

égalisant les coefficients dominants de P et de $(X-1)^4Q$, on obtient : $\alpha = 1$. En égalisant les termes constants, on obtient : $\beta = -2$. Ainsi, $P = (X-1)^4(X-2)$.

Exercice 22. On utilise une caractérisation de l'ordre de multiplicité à l'aide des dérivées successives.
$P(1) = 0$ donc 1 est racine de P.
$P' = 10X^9 - 150X^5 + 240X^4 - 100X^3$ donc $P'(1) = 0$. Ainsi, 1 est racine de P d'ordre au moins 2.
$P'' = 90X^8 - 750X^4 + 960X^3 - 300X^2$ donc $P''(1) = 0$. Ainsi, 1 est racine de P d'ordre au moins 3.
$P^{(3)} = 720X^7 - 3000X^3 + 2880X^2 - 600X$ donc $P^{(3)}(1) = 0$. Ainsi, 1 est racine de P d'ordre au moins 4.
$P^{(4)} = 5040X^6 - 9000X^2 + 5760X - 600$ donc $P^{(4)}(1) \neq 0$. Ainsi, 1 est racine de P d'ordre 4.

Exercice 23.

1. $P(-i) = 0$ ainsi $-i$ est racine de P.
   $P' = 4X^3 + (-12+6i)X^2 + (24-16i)X + 4 + 26i$. Ainsi, $P'(-i) = 0$. Ainsi, $-i$ est racine d'ordre au moins 2 de P.
   $P'' = 12X^2 + (-24+12i)X + (24-16i)$. Ainsi, $P''(-i) = 24 + 8i$. Ainsi, $-i$ est racine de P d'ordre 2.
2. Comme $-i$ est racine de multiplicité 2 de P, $(X+i)^2 | P$ donc il existe $a, b, c \in \mathbb{C}^3$ tels que $P = (X+i)^2(aX^2 + bX + c)$.

$$
\begin{aligned}
& X^4 + (-4+2i)X^3 + (12-8i)X^2 + (4+26i)X - 13 = (X^2 + 2iX - 1)(aX^2 + bX + c) \\
\iff\ & X^4 + (-4+2i)X^3 + (12-8i)X^2 + (4+26i)X - 13 = aX^4 + (2ia+b)X^3 + (2ib+c-a)X^2 + (2ic-b)X - c \\
\iff\ & \begin{cases} a = 1 \\ 2ia + b = -4 + 2i \\ 2ib + c - a = 12 - 8i \\ 2ic - b = 4 + 26i \\ -c = -13 \end{cases} \\
\iff\ & \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 13 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Ainsi, $P = (X+i)^2(X^2 - 4X + 13)$. Le discriminant de $X^2 - 4 + 13$ vaut $16 - 4 \times 13 = -36 = (6i)^2$.
Ses racines sont donc $2 \pm 3i$.
Finalement, les racines de P sont $-i$ (de multiplicité 2), $2 + 3i$, $2 - 3i$.

Exercice 24. Soient $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $b \neq 0$. Soit P de degré 5.

$$
\begin{aligned}
P \text{ solution} &\iff \begin{cases} P(-b)+a = P'(-b) = P''(-b) = 0 & \text{car } (X+b)^3 \text{ divise } P+a \\ P(b)-a = P'(b) = P''(b) = 0 & \text{car } (X-b)^3 \text{ divise } P-a \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} P(-b)+a = 0 \\ P(b)-a = 0 \\ -b \text{ est racine de } P' \text{ d'ordre au moins } 2 \\ b \text{ est racine de } P' \text{ d'ordre au moins } 2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} P(-b)+a = 0 \\ P(b)-a = 0 \\ (X-b)^2(X+b)^2 \text{ divise } P' \quad \text{car } b \neq -b \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} P(-b)+a = 0 \\ P(b)-a = 0 \\ \exists \lambda \in \mathbb{C}^*,\ P' = \lambda(X-b)^2(X+b)^2 \quad \text{car } P' \text{ est de degré 4.} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} P(-b)+a = 0 \\ P(b)-a = 0 \\ \exists \lambda \in \mathbb{C}^*,\ P' = \lambda(X^2-2bX+b^2)(X^2+2bX+b^2) \\ \qquad\qquad = \lambda(X^4+(2b-2b)X^3+(b^2-4b^2+b^2)X^2+(-2b^3+2b^3)X+b^4 \\ \qquad\qquad = \lambda(X^4-2b^2X^2+b^4) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} P(-b)+a = 0 \\ P(b)-a = 0 \\ \exists \lambda \in \mathbb{C}^*,\ \exists d \in \mathbb{C},\ P = \lambda\left(\dfrac{X^5}{5} - \dfrac{2b^2}{3}X^3 + b^4X + d\right) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{C}^*,\ \exists d \in \mathbb{C},\ P = \lambda\left(\dfrac{X^5}{5} - \dfrac{2b^2}{3}X^3 + b^4X + d\right) \\ \lambda\left(-\dfrac{b^5}{5} + \dfrac{2b^2}{3}b^3 - b^4b + d\right) = -a \quad (L_1) \\ \lambda\left(\dfrac{b^5}{5} - \dfrac{2b^2}{3}b^3 + b^4b + d\right) = a \quad (L_2) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{C}^*,\ \exists d \in \mathbb{C},\ P = \lambda\left(\dfrac{X^5}{5} - \dfrac{2b^2}{3}X^3 + b^4X + d\right) \\ \lambda\left(\dfrac{8b^5}{15} + d\right) = a \quad (L_2) \\ 2\lambda d = 0 \quad ((L_1)+(L_2)) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{C}^*,\ \exists d \in \mathbb{C},\ P = \lambda\left(\dfrac{X^5}{5} - \dfrac{2b^2}{3}X^3 + b^4X + d\right) \\ \lambda\left(\dfrac{8b^5}{15} + d\right) = a \\ d = 0 \quad \text{car } \lambda \neq 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{C}^*,\ P = \lambda\left(\dfrac{X^5}{5} - \dfrac{2b^2}{3}X^3 + b^4X\right) \\ \lambda = \dfrac{15a}{8b^5} \text{ car } b \neq 0 \end{cases} \\
&\iff P = \frac{15a}{8b^5}\left(\frac{X^5}{5} - \frac{2b^2}{3}X^3 + b^4X\right)
\end{aligned}
$$

Ainsi, le seul polynôme solution est $P = \dfrac{15a}{8b^5}\left(\dfrac{X^5}{5} - \dfrac{2b^2}{3}X^3 + b^4X\right)$.

Exercice 25. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré non nul.

1. Vraie. Notons toujours P la fonction polynomiale associée à P. P est continue sur $\mathbb{R}$ et comme P est de degré impaire, si le coefficient dominant de P est strictement positif, on a $\lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$. Et si le coefficient dominant de P est strictement négatif, $\lim_{x \to -\infty} P(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} P(x) = -\infty$. Ainsi, par une extension du théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P(x_0) = 0$. Donc P admet une racine réelle.
2. Faux. $P = X$ admet 0 pour racine réelle. Mais $P' = 1$ n'admet pas de racine réelle.
3. Vraie. Notons toujours P la fonction polynomiale associée à P. Supposons qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $P(\alpha) = 0$ et $P(\beta) = 0$. Alors, P est continue sur $[\alpha, \beta]$ dérivable sur $]\alpha, \beta[$ donc d'après le théorème de Rolle, il existe

$\gamma \in]\alpha, \beta[\subset \mathbb{R}$ tel que $P'(\gamma) = 0$. Ainsi, P' admet une racine réelle.

4. Faux. Posons $P = X^2$. On a alors $P' = 2X$. Ainsi, toutes les racines de P' sont simples. Mais P admet 0 comme racine double.

Exercice 26. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $n = \deg(P) \geq 2$.
Supposons P scindé.
Notons $a_1, ..., a_p$ les racines deux à deux distinctes de P de multiplicité respectives $m_1, ..., m_p \in \mathbb{N}^*$. Comme P est scindé, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} m_k = n$.
Soit $k \in [\![1, p]\!]$, a_k est racine de P de multiplicité m_k donc $P(a_k) = ...P^{(m_k-1)}(a_k) = 0$ et $P^{(m_k)}(a_k) \neq 0$. Ainsi, a_k est racine de P' de multiplicité $m_k - 1$ (où l'on étend la définition d'ordre de multiplicité en disant qu'un élément est racine de P' de multiplicité 0 s'il n'est pas racine de P').
On obtient ainsi : $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}(m_k - 1) = \sum_{k=1}^{p} m_k - \sum_{k=1}^{p} 1 = n - p$ racines de P' comptées avec leur ordre de multiplicité.
De plus, pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, $P(a_k) = P(a_{k+1})$ et les fonctions polynomiales sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$. On applique le théorème de Rolle entre eux racines successives. Ainsi, pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, il existe $c_k \in]a_k, a_{k+1}[$ tel que $P'(c_k) = 0$.
Il y a donc $p - 1$ c_k distincts (tous les c_k sont distincts des a_i car : $\forall k \in [\![1, p-1]\!],\ c_k \in]a_k, a_{k+1}[$.
Finalement, en comptant les racines de P' avec leur multiplicité, on obtient : $n - p + p - 1 = n - 1 = \deg(P')$ racines pour P'.
Ainsi, P' est scindé sur $\mathbb{R}$.

5 Décomposition en facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

Exercice 27. 1. Soit α une racine de P.
Alors, $P((\alpha+1)^2) = P(\alpha)P(\alpha+2) = 0$. Ainsi, $(\alpha+1)^2$ est aussi racine de P.
De même, $P((\alpha-1)^2) = P(\alpha-2)P(\alpha) = 0$. Ainsi, $(\alpha-1)^2$ est aussi racine de P.
Notons $\alpha_1 = (\alpha-1)^2$ et $\alpha_2 = (\alpha+1)^2$.
Si $|\alpha_1| > |\alpha|$ alors le résultat est prouvée.
Supposons désormais $|\alpha_1| \leq |\alpha|$. On sait que : $|\alpha_1|^2 = \alpha_1\overline{\alpha_1} = (\alpha-1)\overline{(\alpha-1)} = \alpha\overline{\alpha} - (\alpha+\overline{\alpha}) + 1 = |\alpha|^2 - 2\mathrm{Re}(\alpha) + 1$.
On a alors : $|\alpha|^2 - 2\mathrm{Re}(\alpha) + 1 \leq |\alpha|^2$ donc $2\mathrm{Re}(\alpha) \geq 1$.
Or, $|\alpha_2|^2 = |\alpha|^2 + 2\mathrm{Re}(\alpha) + 1$. Ainsi, $|\alpha_2|^2 - |\alpha|^2 = 2\mathrm{Re}(\alpha) + 1 \geq 2$. Ainsi, on a $|\alpha_2| - |\alpha| > 0$.
Ainsi, il existe bien une racine de P dont le module est strictement plus grand que α.

2. Si P est non constant alors P admet une racine x_0 dans $\mathbb{C}$ d'après le théorème de d'Alembert Gauss. D'après la question précédente, P admet donc une racine $x_1 \in \mathbb{C}$ telle que $|x_0| < |x_1|$. En appliquant de nouveau la question précédente à x_1, il existe $x_2 \in \mathbb{C}$ racine de P tel que $|x_0| < |x_1| < |x_2|$. En itérant, on construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{C}}$ de racines de P de module strictement croissant. Ainsi , P admettrait une infinité de racines. Donc P serait constant égal à 0, contraire à l'hypothèse.
Ainsi, si P est solution alors P est constant donc il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $P = a$. De plus, si P est solution alors $a = a^2$ donc $a = 0$ ou $a = 1$.
On vérifie aisément que $P = 0$ et $P = 1$ sont bien solutions.
Ainsi, les solutions sont les polynômes : $P = 0$ et $P = 1$.

Exercice 28. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de fonction polynomiale périodique. Ainsi, il existe $T \in \mathbb{C}^*$ tel que : $\forall x \in \mathbb{C},\ P(x) = P(x+T)$.
Par l'absurde. Supposons P non constant.
Alors, d'après le théorème de d'Alembert Gauss, P admet une racine réelle $a \in \mathbb{C}$. On a alors : $P(a) = 0$. Par récurrence, on obtient que : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(a+nT) = P(a) = 0$. Ainsi, les $a + nT$ avec $n \in \mathbb{N}$ sont racines de P. De plus, $T \neq 0$ donc les $a + nT$ avec $n \in \mathbb{N}$ sont 2 à 2 distincts. Ainsi, P admet une infinité de racines (distinctes). Donc P est le polynôme nul ce qui contredit l'hypothèse P non constant.
Ainsi, si P est solution alors, P est constant.
De plus, tout polynôme constant a bien sa fonction polynomiale périodique. Ainsi, les polynômes solutions sont les polynômes constants.

Exercice 29. 1. $X^5+X=X(X^4+1)$.
Déterminons les racines de X^4+1.
Soit $x\in\mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} x^4+1=0 &\iff x^4=-1\\ &\iff x^4=e^{i\pi}\\ &\iff \left(\frac{x}{e^{i\frac{\pi}{4}}}\right)^4=1\\ &\iff \exists k\in[\![0,3]\!],\ \frac{x}{e^{i\frac{\pi}{4}}}=e^{\frac{2ik\pi}{4}}\\ &\iff \exists k\in[\![0,3]\!],\ x=e^{i\frac{\pi}{4}+\frac{2ik\pi}{4}} \end{aligned}$$

Ainsi, les racines de X^4+1 sont $e^{i\frac{\pi}{4}}$, $e^{\frac{3i\pi}{4}}$, $e^{\frac{5i\pi}{4}}=e^{-\frac{3i\pi}{4}}$, $e^{\frac{7i\pi}{4}}=e^{-\frac{i\pi}{4}}$.
Ainsi, on a :

$$X^5+1=X\left(X-e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X-e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X-e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)\left(X-e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right)\qquad \text{dans } \mathbb{C}[X].$$

Et

$$\begin{aligned} X^5+X&=X\left(X-e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X-e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X-e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)\left(X-e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right)\\ &=X\left(X^2-2\mathrm{Re}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)+\left|e^{i\frac{\pi}{4}}\right|^2\right)\left(X^2-2\mathrm{Re}\left(e^{3i\frac{\pi}{4}}\right)+\left|e^{3i\frac{\pi}{4}}\right|^2\right)\\ &=X\left(X^2-2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+1\right)\left(X^2-2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+1\right) \end{aligned}$$

Donc

$$X^5+X=X(X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)\qquad \text{dans } \mathbb{R}[X].$$

2. $(X^2-X+1)^2+1=(X^2-X+1)^2-i^2=(X^2-X+1+i)(X^2-X+1-i)$.
Déterminons les racines de $X^2-X+1+i$.
Son discriminant vaut $-3-4i$.
Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} (\alpha+i\beta)^2=-3-4i &\iff \begin{cases}\alpha^2-\beta^2=-3\\ \alpha^2+\beta^2=\sqrt{9+16}=5\\ 2\alpha\beta=-4\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}\alpha^2=1\\ \beta^2=4\\ 2\alpha\beta=-4\end{cases}\\ &\iff \alpha+i\beta=1-2i \text{ ou } \alpha+i\beta=-1+2i \end{aligned}$$

Ainsi, les racines de $(X^2-X+1)^2+1$ sont $\dfrac{1-1+2i}{2}=i$ et $\dfrac{1+1-2i}{2}=1-i$. Or comme $(X^2-X+1)^2+1\in\mathbb{R}[X]$, les racines complexes de $(X^2-X+1)^2+1$ sont conjuguées. Ainsi, les racines de $X^2-X+1-i$ seront $-i$ et $1+i$. Finalement, on a :

$$(X^-X+1)^2+1=(X-i)(X+i)(X-1-i)(X-1+i)=(X^2+1)(X^2-2X+2).$$

3. -1 est racine évidente du polynôme. Ainsi, il existe $(a,b,c)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^2$ tel que :
$X^3-5X^2+3X+9=(X+1)(aX^2+bX+c)$. En égalisant les coefficients dominants, on obtient $a=1$. En égalisant les termes constants, on obtient : $c=9$. En égalisant les coefficients devant X^2, on obtient $a+b=-5$ donc $b=-6$. Ainsi, $X^3-5X^2+3X+9=(X-1)(X^2-6X+9)$. Or, le discriminant de X^2-6X+9 vaut 0. Son unique racine vaut 3. Ainsi, on a $X^2-6X+9=(X-3)^2$.
Donc :

$$X^3-5X^2+3X+9=(X-1)(X-3)^2$$

4. Notons $P=6X^5+15X^4+20X^3+15X^2+6X+1$. On remarque que $P=(X+1)^6-X^6$.

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
&6X^5+15X^4+20X^3+15X^2+6X+1\\
&=(X+1)^6-X^6\\
&=\left((X+1)^3-X^3\right)\left((X+1)^3+X^3\right)\\
&=\left((X+1)^3-X^3\right)\left((X+1)^3-(-X)^3\right)\\
&=(X+1-X)\left(\sum_{k=0}^{2}(X+1)^kX^{2-k}\right)(X+1+X)\left(\sum_{k=0}^{2}(X+1)^k(-X)^{2-k}\right)\\
&=(X+1-X)\left(X^2+(X+1)^2+X(X+1)\right)(2X+1)\left((X+1)^2-X(X+1)+X^2\right)\\
&=\left(3X^2+3X+1\right)(2X+1)\left(X^2+X+1\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, $P=(3X^2+3X+1)(2X+1)(X^2+X+1)$.

Exercice 30. Factorisons le polynôme X^n-1 dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ ($n\geq 1$). On a déjà obtenu la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$:

$$X^n-1=\prod_{k=0}^{n-1}\left(X-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right).$$

Pour obtenir la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$, on doit distinguer les cas où n est pair et impair.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$

- Si n est pair, il existe $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $n=2p$. P admet deux racines réelles. On a en regroupant les termes complexes conjugués :

$$\begin{aligned}
X^{2p}-1&=(X-1)\prod_{k=1}^{p-1}\left(X-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\left(X-e^{\frac{2ip\pi}{n}}\right)\prod_{k=p+1}^{2p-1}\left(X-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\\
&=(X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{p-1}\left(X-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\prod_{k=p+1}^{2p-1}\left(X-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\\
&=(X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{p-1}\left(X-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\prod_{l=1}^{p-1}\left(X-e^{\frac{(2in\pi-2il\pi)}{n}}\right)\qquad\text{en posant } k=n-l=2p-l\\
&=(X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{p-1}\left(X-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\prod_{l=1}^{p-1}\left(X-e^{2i\pi}e^{\frac{-2il\pi}{n}}\right)\\
&=(X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{p-1}\left(X-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\left(X-e^{\frac{-2ik\pi}{n}}\right)\\
&=(X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{p-1}\left(X^2-2\cos(\frac{2k\pi}{n})X+1\right).
\end{aligned}$$

- Si n est impair, il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $n=2p+1$. P admet une seule racine réelle. On obtient de même :

$$\begin{aligned}
X^{2p+1}-1&=(X-1)\prod_{k=1}^{p}\left(X-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\prod_{k=p+1}^{2p}\left(X-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\\
&=(X-1)\prod_{k=1}^{p}\left(X-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\prod_{l=1}^{p}\left(X-e^{\frac{(2in\pi-2il\pi)}{n}}\right)\quad\text{en posant } k=n-l=2p+1-l\\
&=(X-1)\prod_{k=1}^{p}\left(X-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\prod_{l=1}^{p}\left(X-e^{2i\pi}e^{\frac{-2il\pi}{n}}\right)\\
&=(X-1)\prod_{k=1}^{p}\left(X-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\left(X-e^{-\frac{2ik\pi}{n}}\right)\\
&=(X-1)\prod_{k=1}^{p}\left(X^2-2\cos(\frac{2k\pi}{n})X+1\right).
\end{aligned}$$

Exercice 31. 1. Soit $x \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} x^6+1=0 &\iff x^6=-1 \\ &\iff x^6=e^{i\pi} \\ &\iff \left(\frac{x}{e^{i\frac{\pi}{6}}}\right)^6=1 \\ &\iff \exists k\in [\![0,5]\!],\ \frac{x}{e^{i\frac{\pi}{6}}}=e^{\frac{2ik\pi}{6}} \\ &\iff \exists k\in [\![0,5]\!],\ x=e^{i\frac{\pi}{6}+\frac{2ik\pi}{6}} \end{aligned}$$

Ainsi, les racines de X^6+1 sont $e^{i\frac{\pi}{6}}$, $e^{\frac{3i\pi}{6}}$, $e^{\frac{5i\pi}{6}}$, $e^{\frac{7i\pi}{6}}=e^{-\frac{5i\pi}{4}}$, $e^{\frac{9i\pi}{4}}=e^{-\frac{3i\pi}{4}}$, $e^{\frac{11i\pi}{4}}=e^{-\frac{i\pi}{4}}$.

$$X^6+1=\prod_{k=0}^{5}(X-e^{i\frac{(2k+1)\pi}{6}}) \quad \text{dans } \mathbb{C}[X]$$

Pour la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$, il faut regrouper les termes deux à deux conjugués.

$$\begin{aligned} X^6+1 &= (X-e^{\frac{i\pi}{6}})(X-e^{\frac{-i\pi}{6}})(X-e^{\frac{3i\pi}{6}})(X-e^{\frac{-3i\pi}{6}})(X-e^{\frac{5i\pi}{6}})(X-e^{\frac{-5i\pi}{6}}) \\ &= \left(X^2-2\mathrm{Re}\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)+\left|e^{i\frac{\pi}{6}}\right|^2\right)\left(X^2-2\mathrm{Re}\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)+\left|e^{i\frac{\pi}{2}}\right|^2\right)\left(X^2-2\mathrm{Re}\left(e^{5i\frac{\pi}{6}}\right)+\left|e^{5i\frac{\pi}{6}}\right|^2\right) \\ &= (X^2-2\cos(\frac{\pi}{6})X+1)(X^2-\cos(\frac{\pi}{2})X+1)(X^2-\cos(\frac{5\pi}{6})X+1) \\ &= (X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2+1)(X^2+\sqrt{3}X+1) \end{aligned}$$

2. Notons $P=X^6-7X^3-8$, on constate que $P=Q(X^3)$ avec $Q=X^2-7X-8$.
Cherchons les racines de Q.
Son discriminant vaut $49+32=81$. Ainsi, Q a pour racines $\frac{7-9}{2}=-1$ et $\frac{7+9}{2}=8$.
On a donc $Q=(X+1)(X-8)$.
Ainsi $P=(X^3+1)(X^3-8)$.
Soit $x\in\mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} x^3+1=0 &\iff x^3=-1 \\ &\iff x^3=e^{i\pi} \\ &\iff \left(\frac{x}{e^{i\frac{\pi}{3}}}\right)^3=1 \\ &\iff \exists k\in [\![0,2]\!],\ \frac{x}{e^{i\frac{\pi}{3}}}=e^{\frac{2ik\pi}{3}} \\ &\iff \exists k\in [\![0,2]\!],\ x=e^{i\frac{\pi}{3}+\frac{2ik\pi}{3}} \end{aligned}$$

Ainsi, les racines de X^3+1 sont $e^{i\frac{\pi}{3}}$, -1 et $e^{-i\frac{\pi}{3}}$. Ainsi, $X^3+1=\left(X-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)(X+1))\left(X-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)$.
De même, Soit $x\in\mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} x^3+1=0 &\iff x^3=8 \\ &\iff \left(\frac{x}{8^{\frac{1}{3}}}\right)^3=1 \\ &\iff \exists k\in [\![0,2]\!],\ \frac{x}{2}=e^{\frac{2ik\pi}{3}} \\ &\iff \exists k\in [\![0,2]\!],\ x=2e^{\frac{2ik\pi}{3}} \end{aligned}$$

Donc les racines cubiques de 8 sont 2, $2e^{\frac{2i\pi}{3}}$, $2e^{\frac{4i\pi}{3}}=2e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.
Ainsi, on a : $X^3-8=(X-2)\left(X-2e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)\left(X-2e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right)$.
Finalement, on a :

$$P=(X+1)\left(X-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)(X-2)\left(X-2e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)\left(X-2e^{-2\frac{2i\pi}{3}}\right) \quad \text{dans } \mathbb{C}[X]$$

Et :

$$\begin{aligned}
P &= (X+1)\left(X-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)(X-2)\left(X-2e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)\left(X-2e^{-2\frac{2i\pi}{3}}\right)\\
&= (X+1)\left(X^2-2\mathrm{Re}\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)+\left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right|^2\right)(X-2)\left(X^2-2\mathrm{Re}\left(2e^{2i\frac{\pi}{3}}\right)+\left|2e^{2i\frac{\pi}{3}}\right|^2\right)\\
&= (X+1)\left(X^2-2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)X+1\right)(X-2)\left(X^2-4\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)X+4\right)\\
&= (X+1)(X-2)\left(X^2-X+1\right)\left(X^2+2X+4\right)
\end{aligned}$$

3. Posons $P=(X+1)^n-(X-1)^n$.
On sait que $\deg(P)\leq n$.
De plus, d'après le binôme de Newton, on a : $(X+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k$ et $(X-1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k(-1)^{n-k}$.
Ainsi, le coefficient de X^n dans $(X+1)^n$ vaut 1, de même, le coefficient de X^n dans $(X-1)^n$ vaut 1. Ainsi, le coefficient de X^n dans P vaut 0. Ainsi, $\deg(P)\leq n-1$.
De plus, le coefficient de X^{n-1} de $(X+1)^n$ vaut $\binom{n}{n-1}=n$ et le coefficient de X^{n-1} de $(X-1)^n$ vaut $\binom{n}{n-1}(-1)=-n$.
Ainsi, le coefficient de X^{n-1} de P vaut $2n$ donc $\deg(P)=n-1$ et le coefficient dominant de P vaut $2n$.
Cherchons les racines complexes du polynôme.
On remarque tout d'abord que 1 n'est pas racine de P.
Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$.

$$\begin{aligned}
& P(z)=0\\
\iff\ & (z+1)^n=(z-1)^n\\
\iff\ & \frac{(z+1)^n}{(z-1)^n}=1 \quad \text{car } z\neq 1\\
\iff\ & \exists k\in[\![0,n-1]\!],\ z+1=e^{\frac{2ik\pi}{n}}(z-1)\\
\iff\ & \exists k\in[\![0,n-1]\!],\ z\left(1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)=-\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}+1\right)\\
\iff\ & \exists k\in[\![0,n-1]\!],\ -2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)z=-2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\\
\iff\ & \exists k\in[\![1,n-1]\!],\ i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)z=\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad \text{car pour } k=0 \text{ on a } 0=1 \text{ absurde}\\
\iff\ & \exists k\in[\![1,n-1]\!],\ z=-i\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \quad \text{licite car on a :}\forall k\in[\![1,n-1]\!],\ \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\neq 0
\end{aligned}$$

De plus, les $\frac{k\pi}{n}$, $k\in[\![1,n-1]\!]$ sont des réels deux à deux distincts de $]0,\pi[$. Posons $h=\frac{\cos}{\sin}$. h est bien définie sur $]0,\pi[$ et dérivable sur $]0,\pi[$. De plus, $h'=\frac{-1}{\sin^2}<0$. Ainsi, h est strictement décroissante donc injective sur $]0,\pi[$. Ainsi, on a trouvé $n-1$ racines distinctes de P et on les a toutes puisque $\deg(P)=n-1$. Ainsi, $P=2n\prod_{k=0}^{n-1}\left(X+i\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right)$.
Pour la décomposition dans $\mathbb{R}$, on identifie les termes deux à deux conjugués.
Pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, posons $z_k=i\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$.

On a :

$$z_{n-k} = i\frac{\cos\left(\dfrac{(n-k)\pi}{n}\right)}{\sin\left(\dfrac{(n-k)\pi}{n}\right)} = i\frac{\cos\left(\pi+\dfrac{-k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\pi+\dfrac{-k\pi}{n}\right)} = i\frac{\cos\left(\dfrac{-k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\dfrac{-k\pi}{n}\right)} = -i\frac{\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)} = \overline{z_k}.$$

- Si n est pair, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$, on a $\frac{n}{2} - 1 = p - 1$ paires de racines complexes non réelles deux à deux conjuguées et une racine réelle 0 correspondant à $k = \dfrac{n}{2}$.

$$\begin{aligned}
P &= 2n\prod_{k=1}^{2p-1}(X - z_k)\\
&= 2n\prod_{k=1}^{p-1}(X - z_k)(X - z_p)\prod_{k=p+1}^{2p-1}(X - z_k)\\
&= 2n\prod_{k=1}^{p-1}(X - z_k)(X - z_p)\prod_{l=1}^{p-1}(X - z_{n-l}) \qquad \text{en posant } l = n - k = 2p - k\\
&= 2nX\prod_{k=1}^{p-1}(X - z_k)\prod_{k=1}^{p}(X - \overline{z_k})\\
&= 2nX\prod_{k=1}^{p-1}\left[(X - z_k)(X - \overline{z_k})\right]\\
&= 2nX\prod_{k=1}^{p-1}\left(X^2 - (z_k + \overline{z_k})X + z_k\overline{z_k}\right)\\
&= 2nX\prod_{k=1}^{p-1}\left(X^2 + \frac{\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)^2}{\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)^2}\right)
\end{aligned}$$

- Si n est impair, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p + 1$, on a $\frac{n-1}{2} = p$ paires de racines complexes non réelles deux à deux conjuguées.

$$\begin{aligned}
P &= 2n\prod_{k=1}^{2p}(X - z_k)\\
&= 2n\prod_{k=1}^{p}(X - z_k)\prod_{k=p+1}^{2p}(X - z_k)\\
&= 2n\prod_{k=1}^{p}(X - z_k)\prod_{l=1}^{p}(X - z_{n-l}) \qquad \text{en posant } l = n - k = 2p - k\\
&= 2n\prod_{k=1}^{p}(X - z_k)\prod_{k=1}^{p}(X - \overline{z_k})\\
&= 2n\prod_{k=1}^{p}\left[(X - z_k)(X - \overline{z_k})\right]\\
&= 2n\prod_{k=1}^{p}\left(X^2 - (z_k + \overline{z_k})X + z_k\overline{z_k}\right)\\
&= 2n\prod_{k=1}^{p}\left(X^2 + \frac{\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)^2}{\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)^2}\right)
\end{aligned}$$

4. On constate que $P = \sum_{k=0}^{n} X^{2k}$ est de degré $2n$ et unitaire. On remarque que 1 et -1 ne sont pas racine de P.
Soit $x \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$. On a :

$$\begin{aligned}
P(x) = 0 \quad &\iff \quad \sum_{k=0}^{n} (x^2)^k = 0 \\
&\iff \quad \frac{(x^2)^{n+1} - 1}{x^2 - 1} = 0 \\
&\iff \quad x^{2n+2} = 1 \\
&\iff \quad \exists k \in [\![0, 2n+1]\!],\ x = e^{\frac{2ik\pi}{2n+2}} \\
&\iff \quad \exists k \in [\![1, 2n+1]\!] \setminus \{n+1\},\ x = e^{\frac{2ik\pi}{2n+2}} \quad \text{car } x \neq -1 \text{ et } x \neq 1 \text{ donc } k \neq 0 \text{ et } k \neq n+1
\end{aligned}$$

On obtient alors $2n$ racines de P_n deux à deux distinctes (ce sont des racines $(2n+2)$-ièmes de l'unité deux à deux distinctes) et

$$\begin{aligned}
P &= \prod_{k=1}^{n} (X - e^{\frac{ik\pi}{n+1}}) \prod_{k=n+2}^{2n+1} (X - e^{\frac{ik\pi}{n+1}}) \\
&= \prod_{k=1}^{n} (X - e^{\frac{ik\pi}{n+1}}) \prod_{l=1}^{n} (X - e^{\frac{i(2n+2-l)\pi}{n+1}}) \quad \text{en posant } l = 2n+2-k \\
&= \prod_{k=1}^{n} (X - e^{\frac{ik\pi}{n+1}}) \prod_{l=1}^{n} (X - e^{-\frac{il\pi}{n+1}}) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \left[(X - e^{\frac{ik\pi}{n+1}})(X - e^{-\frac{ik\pi}{n+1}}) \right] \\
&= \prod_{k=1}^{n} (X^2 - 2X \cos(\frac{k\pi}{n+1}) + 1).
\end{aligned}$$

Exercice 32. On constate que $P(X) = X^{2n} - 2\cos\phi X^n + 1 = Q(X^n)$ avec $Q(X) = X^2 - 2\cos\phi X + 1$.
On commencer par trouver les racines de Q.
Les racines de Q sont $e^{i\phi}$ et $e^{-i\phi}$. Ainsi, on a $Q = (X - e^{i\phi})(X - e^{-i\phi})$.
Donc $P = (X^n - e^{i\phi})(X^n - e^{-i\phi})$.
Déterminons les racines de $X^n - e^{i\phi}$.
Pour ce faire, déterminons les racines n-ièmes de $e^{i\phi}$.
Soit $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned}
z^n = e^{i\phi} \quad &\iff \quad \left(\frac{z}{e^{i\frac{\phi}{n}}} \right)^n = 1 \\
&\iff \quad \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ \frac{z}{e^{i\frac{\phi}{n}}} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\
&\iff \quad \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ z = e^{i\frac{\phi}{n}} e^{\frac{2ik\pi}{n}}
\end{aligned}$$

Justifions que toutes les racines sont complexes non réelles : Soit $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned}
e^{i\frac{\phi}{n}} e^{\frac{2ik\pi}{n}} \in \mathbb{R} \quad &\iff \quad \frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \equiv 0 \ [\pi] \\
&\iff \quad \phi + 2k\pi \equiv 0 \ [n\pi] \\
&\iff \quad \phi \equiv -2k\pi \ [n\pi]
\end{aligned}$$

Or, $\phi \notin \pi\mathbb{Z}$ donc $e^{i\frac{\phi}{n}} e^{\frac{2ik\pi}{n}} \notin \mathbb{R}$. On a ainsi obtenu n racines complexes non réelles deux à deux distinctes.
Or, $P \in \mathbb{R}[X]$. Ainsi, les racines de $(X - e^{-i\phi})$ sont les $e^{-i\frac{\phi}{n}} e^{-\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$.
On a donc :

$$P(X) = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{i(\frac{\phi+2k\pi}{n})})(X - e^{-i(\frac{\phi+2k\pi}{n})}) = \prod_{k=0}^{n-1} (X^2 - 2\cos\left(\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right) X + 1)$$

Exercice 33. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que P' divise P. Supposons P non nul, P est alors non constant (sinon $P' = 0$ divise P entraînerait $P = 0$), donc $P' \neq 0$. On écrit $P'(X) = \lambda \prod_{i=1}^{k} (X - a_i)^{m_i}$ la factorisation de P'.

Soit $i \in [\![1, k]\!]$, on a a_i racine de P' donc de P (car P' divise P). Comme a_i est racine de P' de multiplicité m_i, on a : $P'(a_i) = ... = (P')^{(m_i-1)}(a_i) = 0$ et $(P')^{(m_i)}(a_i) \neq 0$. Donc $P'(a_i) = ... = P^{(m_i)}(a_i) = 0$ et $P^{(m_i+1)}(a_i) \neq 0$. Ainsi, a_i est racine de P de multiplicité $m_i + 1$.
Donc P admet au moins $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}(m_i+1) = \left(\sum_{i=1}^{k} m_i\right) + k$ racines, chacune étant comptée avec sa multiplicité.
Or, $\deg(P) = \deg(P') + 1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} m_i + 1$ (car P' est scindé). Ainsi, $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{k} m_i\right) + k \leq \left(\sum_{i=1}^{k} m_i\right) + 1$ donc $k \leq 1$.
Si $k = 1$, on a alors $\deg(P) = \deg(P') + 1 = m_1 + 1$ et a_1 est racine de P de multiplicité $m_1 + 1$. Ainsi, P admet autant de racines comptées avec leur multiplicité que son degré donc P est scindé. Ainsi, P est de la forme $\lambda(X-a)^m$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N}^*$.
Si $k = 0$ alors $P' = \lambda$. Ainsi, il existe $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $P = \lambda X + \beta$. Donc de nouveau, P est scindé et s'écrit sous la forme $\lambda(X-a)^m$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N}^*$.
Réciproquement, soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}^*$, posons $P = \lambda(X-a)^m$.
Alors $P' = m\lambda(X-a)^{m-1}$ donc $P = \dfrac{1}{m}(X-a)P'$ $(m \neq 0)$.
Donc $P'|P$.
Finalement, l'ensemble des solution est $\{\lambda(X-a)^m \mid \lambda \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice 34.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $(X-1)P_n = X^{n+1} - 1 = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}(X - e^{2ik\pi/(n+1)}) = (X-1)\prod_{k=1}^{n}(X - e^{2ik\pi/(n+1)})$.

   Ainsi, $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X - e^{2ik\pi/(n+1)})$.

2. $P_n(1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1$ et

$$
\begin{aligned}
P_n(1) &= \prod_{k=1}^{n}(1 - e^{2ik\pi/(n+1)}) \\
&= \prod_{k=1}^{n}(e^{-ik\pi/(n+1)} - e^{ik\pi/(n+1)}) \prod_{k=1}^{n} e^{ik\pi/(n+1)} \\
&= \prod_{k=1}^{n} e^{ik\pi/(n+1)} \prod_{k=1}^{n}\left[-2i\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right] \\
&= \left[\prod_{k=1}^{n} e^{ik\pi/(n+1)}\right]\left[\prod_{k=1}^{n}(-2i)\right]\left[\prod_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right] \\
&= (-2i)^n \prod_{k=1}^{n} e^{ik\pi/(n+1)} \prod_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)
\end{aligned}
$$

   Or,

$$\prod_{k=1}^{n} e^{ik\pi/(n+1)} = \exp\left(\frac{i\pi}{n+1}\sum_{k=1}^{n} k\right) = \exp\left(\frac{in(n+1)\pi}{2(n+1)}\right) = \exp\left(\frac{in\pi}{2}\right) = i^n$$

   Donc

$$i^n(-2i)^n \prod_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) = n+1$$

   Ainsi,

$$2^n \prod_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) = n+1$$

   Donc finalement,

$$\prod_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) = \frac{n+1}{2^n}$$

6 Relations entre coefficients et racines

Exercice 35.

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Notons $s = x + y$ et $p = xy$. Avec ces notations,

$$\begin{aligned}
(S) \quad &\iff \quad \begin{cases} 3s + 4p = -5 \\ s - 2p = 5 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} s - 2p = 5 \\ 10p = -20 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} s = 1 \\ p = -2 \end{cases}
\end{aligned}$$

2. D'après la question précédente, (S) est équivalent au système :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -2 \end{cases}$$

Or, les solutions x, y de ce système sont les racines du polynôme $X^2 - X - 2 = 0$, à savoir 2 et -1. Finalement, (S) admet deux couples de solutions $(2, -1)$ et $(-1, 2)$.

Exercice 36. 1. Le polynôme P est unitaire de degré n.
Soit $x \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
P(x) = 0 \quad &\iff \quad (x + 1)^n = e^{2ina} \\
&\iff \quad \exists k \in [\![0, n - 1]\!],\ x + 1 = e^{2ia} e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\
&\iff \quad \exists k \in [\![0, n - 1]\!],\ x = -1 + e^{2ia} e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\
&\iff \quad \exists k \in [\![0, n - 1]\!],\ x = e^{i(a + \frac{k\pi}{n})} (2i) \sin(a + \frac{k\pi}{n})
\end{aligned}$$

Soient $k, l \in [\![0, n - 1]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}
&-1 + e^{2ia} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = -1 + e^{2ia} e^{\frac{2il\pi}{n}} \\
\iff \quad & e^{2ia + \frac{2ik\pi}{n}} = e^{2ia + \frac{2il\pi}{n}} \\
\iff \quad & 2a + \frac{2k\pi}{n} \equiv 2a + \frac{2l\pi}{n} \ [2\pi] \\
\iff \quad & \frac{2k\pi}{n} \equiv \frac{2l\pi}{n} \ [2\pi] \\
\iff \quad & k \equiv l \ [n] \\
\iff \quad & k = l \quad \text{car } k, l \in [\![0, n - 1]\!]
\end{aligned}$$

On a trouvé n racines deux à deux distinctes et P est de degré n donc on les a toutes.

2. Le terme constant du polynôme P est $1 - e^{2ina}$. Ainsi :

$$\prod_{k=0}^{n-1} (e^{i(a + \frac{k\pi}{n})} 2i \sin(a + \frac{k\pi}{n})) = (-1)^n (1 - e^{2ina}) = (-1)^{n+1} 2i e^{ina} \sin(na)$$

par les relations coefficients racines.
De plus

$$\prod_{k=0}^{n-1} e^{i(a + \frac{k\pi}{n})} = \left[\prod_{k=0}^{n-1} e^{ia}\right] \left[\prod_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}}\right] = e^{ina} \exp\left(\frac{i\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k\right) = e^{ina} e^{\frac{i\pi n(n-1)}{2n}} = e^{ina} \times (e^{\frac{i\pi}{2}})^{n-1} = i^{n-1} e^{ina}.$$

Par ailleurs, $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (2i) = (2i)^n$.
Ainsi, on a :

$$\prod_{k=0}^{n-1} (e^{i(a + \frac{k\pi}{n})} 2i \sin(a + \frac{k\pi}{n})) = i^{n-1} e^{ina} (2i)^n = (-1)^{n-1} i 2^n e^{ina} \prod_{k=0}^{n-1} \sin(a + \frac{k\pi}{n})$$

Donc :

$$(-1)^{n-1}i2^n e^{ina}\prod_{k=0}^{n-1}\sin(a+\frac{k\pi}{n}) = 2i(-1)^{n+1}e^{ina}\sin(na)$$

Ainsi,

$$2^n\prod_{k=0}^{n-1}\sin(a+\frac{k\pi}{n}) = 2\sin(na)$$

Donc finalement,

$$\prod_{k=0}^{n-1}\sin(a+\frac{k\pi}{n}) = \frac{\sin(na)}{2^{n-1}}.$$

3. Soit $a \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right) &= \frac{\sin(na)}{2^{n-1}\sin(a)}\\ &= \frac{n}{2^{n-1}}\times\frac{\sin(na)}{na}\times\frac{a}{\sin(a)}\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{a\to 0}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
Et $\lim\limits_{a\to 0}\left(\frac{n}{2^{n-1}}\times\frac{\sin(na)}{na}\times\frac{a}{\sin(a)}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}\times 1\times 1 = \frac{n}{2^{n-1}}$.
Ainsi, on obtient :

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Exercice 37. 1. Soit P un polynôme non nul vérifiant la relation et α une racine de P.
En évaluant la relation en α, on a : $P\left((\alpha)^2\right) = P(\alpha)P(\alpha-1) = 0$.
Ainsi, α^2 est aussi racine de P.
Montrons par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, α^{2^n} est racine de P.

- Pour $n = 0$, on a $\alpha^{2^0} = \alpha$ et par hypothèse α est bien racine de P.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que α^{2^n} est racine de P.
  En évaluant la relation en α^{2^n}, on trouve :

  $$P\left(\left(\alpha^{2^n}\right)^2\right) = P\left(\alpha^{2^n}\right)P\left(\alpha^{2^n}-1\right) = 0$$

  car par hypothèse, $P\left(\alpha^{2^n}\right) = 0$. Or, $\left(\alpha^{2^n}\right)^2 = \alpha^{2^n\times 2} = \alpha^{2^{n+1}}$.
  Ainsi :

  $$P\left(\alpha^{2^{n+1}}\right) = 0.$$

  Donc $\alpha^{2^{n+1}}$ est racine de P.
- On a prouvé par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, α^{2^n} est racine de P.

On a $|\alpha|^{2^{n+1}} - |\alpha|^{2^n} = |\alpha|^{2^n}\left(|\alpha|^2 - 1\right)$. Donc $|\alpha|^{2^{n+1}} - \left|\alpha^{2^n}\right|$ est du signe de $|\alpha|^2 - 1$.

Supposons que $|\alpha|$ soit différent de 0 et 1. Alors, $|\alpha|^{2^{n+1}} - |\alpha|^{2^n}$ est de signe strict constant :

- Si $|\alpha| \in]0,1[$, alors $|\alpha|^{2^{n+1}} - |\alpha|^{2^n} < 0$ donc la suite $\left(|\alpha|^{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Donc les $|\alpha|^{2^n}$, avec $n \in \mathbb{N}$, sont 2 à 2 distincts et donc à fortiori les α^{2^n}, avec $n \in \mathbb{N}$.
- Si $|\alpha| \in]1,+\infty[$, alors $|\alpha|^{2^{n+1}} - |\alpha|^{2^n} > 0$ donc la suite $\left(|\alpha|^{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. Donc les $|\alpha|^{2^n}$, avec $n \in \mathbb{N}$, sont 2 à 2 distincts et donc à fortiori les α^{2^n}, avec $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, dés que $|\alpha|$ est différent de 0 et 1, alors les α^{2^n} pour $n \in \mathbb{N}$ sont 2 à 2 distincts. Donc P admettrait donc une infinité de racines donc P serait le polynôme nul, ce qui contredit l'hypothèse de départ.
Ainsi, les racines de P sont nulles ou de module 1.
Soit $\alpha = e^{i\theta}$, $\theta \in]-\pi,\pi]$ une racine complexe non nulle de P.
De plus, on a $P((\alpha+1)^2) = P(\alpha+1)P(\alpha) = 0$. Ainsi, $(\alpha+1)^2$ est aussi racine de P donc est nulle ou de module 1. On a donc :

- soit $\alpha+1=0$ et donc $\alpha=-1$
- soit $|\alpha+1|^2=1$ d'où $1=|1+e^{i\theta}|^2$ donc $(\cos(\theta)+1)^2+\sin(\theta)^2=1$ puis $1+2\cos(\theta)+1=1$. Donc finalement, $\cos(\theta)=-\dfrac{1}{2}$. Ainsi, $\theta\equiv\dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$. Ainsi, $\alpha=e^{\frac{2i\pi}{3}}$ ou $\alpha=e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.

On a donc bien prouvé que l'ensemble des racines de P appartiennent à $\{0,-1,e^{\frac{2i\pi}{3}},e^{-\frac{2i\pi}{3}}\}$. On rappelle que l'on pose $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On a alors : $\overline{j}=j^2=e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.

2. Le polynôme nul est solution.
Soit P un polynôme non nul solution. D'après le théorème de décomposition dans $\mathbb{C}[X]$, P se décompose de manière unique à l'ordre des facteurs près sous la forme :
$$P=\lambda X^{\alpha}(X+1)^{\beta}(X-j)^{\gamma}(X-j^2)^{\delta}$$
avec $\lambda\in\mathbb{C}$ et $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{N}$.
On en déduit les décompositions de $P(X)\times P(X-1)$ et de $P(X^2)$.
$$\begin{aligned}P(X)P(X-1)&=\lambda^2X^{\alpha+\beta}(X-1)^{\alpha}(X+1)^{\beta}(X-j)^{\gamma}(X-j^2)^{\delta}(X-1-j^2)^{\delta}(X-1-j)^{\gamma}\\&=\lambda^2X^{\alpha+\beta}(X-1)^{\alpha}(X+1)^{\beta}(X-j)^{\gamma}(X-j^2)^{\delta}(X+j)^{\delta}(X+j^2)^{\gamma}\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}P(X^2)&=\lambda X^{2\alpha}(X^2+1)^{\beta}(X^2-j^2)^{\delta}(X^2-j^4)^{\gamma}\\&=\lambda X^{2\alpha}(X-i)^{\beta}(X+i)^{\beta}(X-j)^{\delta}(X+j)^{\delta}(X-j^2)^{\gamma}(X+j^2)^{\gamma}\end{aligned}$$
Par unicité de la décomposition d'un polynôme, on obtient :
$$\begin{aligned}P(X^2)=P(X+1)P(X-1)\quad&\iff\begin{cases}\lambda=\lambda^2\\\alpha+\beta=2\alpha\\\beta=0\\\alpha=0\\\gamma=\delta\end{cases}\\&\iff\begin{cases}\lambda(\lambda-1)=0\\\alpha=0\\\beta=0\\\gamma=\delta\end{cases}\\&\iff P=\big((X-j)(X-j^2)\big)^{\gamma}\text{ ou }P=0\\&\iff P=\big(X^2+X+1\big)^{\gamma}\text{ ou }P=0\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\{\big(X^2+X+1\big)^{\gamma},\gamma\in\mathbb{R}\}\cup\{0\}$.

Exercice 38. Soit $P\in\mathbb{C}[X]\setminus\{0\}$, soit $n=\deg P$. Notons $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$.

Pour tout $j\in[\![0,n-1]\!]$, on note S_j la somme des racines de $P^{(j)}$ et $P^{(j)}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-j}c_k^jX^k$.

On a : $\forall j\in[\![0,n-1]\!]$, $P^{(j)}=\displaystyle\sum_{k=j}^{n}a_k\frac{k!}{(k-j)!}X^{k-j}$.

Ainsi : $\forall j\in[\![0,n-1]\!]$, $c_{n-j}^j=a_n\dfrac{n!}{(n-j)!}$ et $c_{n-1-j}^j=a_{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(n-1-j)!}$.

Ainsi : $\forall j\in[\![0,n-1]\!]$, $S_j=-\dfrac{c_{n-1-j}}{c_{n-j}}=-\dfrac{a_{n-1}(n-1)!}{(n-1-j)!}\times\dfrac{(n-j)!}{n!a_n}=-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\times\dfrac{n-j}{n}$.

Soit $j\in[\![0,n-2]\!]$,
$$\begin{aligned}S_{j+1}-S_j&=-\frac{a_{n-1}}{a_n}\times\frac{n-(j+1)}{n}-\frac{a_{n-1}}{a_n}\times\frac{n-j}{n}\\&=-\frac{a_{n-1}}{na_n}(n-j-1-n+j)\\&=\frac{a_{n-1}}{na_n}\end{aligned}$$
Ainsi : $\forall j\in[\![0,n-2]\!]$, $S_{j+1}-S_j=\dfrac{a_{n-1}}{na_n}$ qui est indépendant de j.

Ainsi, les sommes des racines de P, P', …, $P^{(n-1)}$ forment une progression arithmétique de raison $\dfrac{a_{n-1}}{na_n}$.