Chapitre 7 : Équations différentielles

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

1 Équations différentielles du premier ordre

Définition

Soient $a, b : I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues sur I.

- On dit que $y : I \to \mathbb{K}$ est solution de l'équation différentielles linéaire d'ordre un $(E) : y' + a(x)y = b(x)$ si :
    - y est dérivable sur I.
    - $\forall x \in I,\ \ y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$.
- On appelle équation homogène (ou sans second membre) associée à (E), l'équation :

$$y' + a(x)y = 0 \quad (E_0)$$

Remarque :

- Si y est une solution de (E) sur I alors y de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. En effet, y est dérivable sur I et on a : $\forall x \in I,\ y'(x) = b(x) - a(x)y(x)$ avec $a,\ b,\ y$ continue sur I. Ainsi, y' est continue sur I.
- Une équation différentielle de la forme $\alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x)$ peut se ramener à une équation du type (E) en divisant par $\alpha(x)$ à condition se placer sur un intervalle où la fonction α ne s'annule pas.

1.1 Résolution de l'équation homogène

Proposition

Soit $a : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur I et $A : I \to \mathbb{K}$ une primitive de a sur I. Les solutions sur I de $(E_0)\quad y' + a(x)y = 0$ sont les fonctions $\left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-A(x)} \end{array} \right.$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Remarque :

- Ce résultat ne dépend pas du choix de A, primitive de a : si on remplace A par $A+k$ avec $k \in \mathbb{K}$, les solutions deviennent $\left\{ \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-k} e^{-A(x)} \end{array} \right., \lambda \in \mathbb{K} \right\}$. Or, λe^{-k} décrit $\mathbb{K}$ quand λ décrit $\mathbb{K}$.
- L'ensemble des solutions de (E_0) est égal à l'ensemble des multiples d'une solution particulière non nulle $x \mapsto e^{-A(x)}$. On dit que l'ensemble des solutions est une droite vectorielle.
- En utilisant la notation intégrale et en fixant $x_0 \in I$, les solutions sur I de (E_0) sont les fonctions $\left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-\int_{x_0}^{x} a(u)du} \end{array} \right.$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Démonstration.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $y : x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$.
  y est dérivable sur I.
  Soit $x \in I$, on a $y'(x) = -\lambda A'(x)e^{-A(x)} = -\lambda a(x)e^{-A(x)}$ donc $y'(x) + a(x)y(x) = 0$.
  Ainsi, y est solution de (E_0).
- Réciproquement, soit y une solution de (E_0).
  Idée : On veut prouver que $x \mapsto y(x)e^{A(x)}$ est constante. On veut donc montrer que cette fonction est de dérivée nulle.
  Posons $h : x \mapsto e^{A(x)}y(x)$.
  h est dérivable sur I comme produit et composée de fonctions qui le sont.
  Soit $x \in I$, $h'(x) = A'(x)e^{A(x)}y(x) + e^{A(x)}y'(x) = e^{A(x)}(a(x)y(x) + y'(x)) = 0$.
  h est donc constante sur l'intervalle I. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $\forall x \in I, h(x) = \lambda$ d'où : $\forall x \in I, y(x) = \lambda e^{-A(x)}$.

$\square$

Corollaire : Cas particulier où a est constante

Soit $a \in \mathbb{K}$, les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' + ay = 0$ sont les fonctions : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-ax} \end{array} \right.$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exemple :

- Résoudre $y' + \frac{1}{1+x^2} y = 0 \quad (E_1)$.
  Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est $x \mapsto \arctan x$.
  Donc, les solutions de (E_1) sont :
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-\arctan(x)} \end{array} \quad , \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Résoudre $(\sin x) y' + (\cos x) y = 0 \quad (E_2)$ sur $I =]0, \pi[$.
  Comme sin ne s'annule pas sur I, (E_2) est équivalente à $y' + \dfrac{\cos x}{\sin x} y = 0$.
  Une primitive sur I de $x \mapsto \dfrac{\cos x}{\sin x}$ est $x \mapsto \ln(|\sin(x)|) = \ln(\sin(x))$.
  Ainsi, les solutions de (E_1) sont :
$$\begin{array}{ccc}]0, \pi[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-\ln(\sin(x))} = \dfrac{\lambda}{\sin x} \end{array} \quad , \lambda \in \mathbb{R}.$$

1.2 Résolution de l'équation avec second membre

Proposition

Soient $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ continues sur I et (E) : $\quad y' + a(x) y = b(x)$.
Si y_p est une solution particulière de (E) et si S_0 est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (E), alors l'ensemble S des solutions de (E) est :

$$S = \{y_p + y_0 \ , \ y_0 \in S_0\}.$$

Démonstration. Soit $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

$$\begin{aligned} y \in S & \iff \forall x \in I, \ y'(x) + a(x) y(x) = b(x) \\ & \iff \forall x \in I, \ y'(x) + a(x) y(x) = y_p'(x) + a(x) y_p(x) \\ & \iff (y - y_p)'(x) + a(x)(y - y_p)(x) = 0 \\ & \iff y - y_p \in S_0 \\ & \iff \exists y_0 \in S_0, y - y_p = y_0 \\ & \iff \exists y_0 \in S_0, y = y_p + y_0 \end{aligned}$$

□

Exemple :

- On résout $(E_0) \quad y' - 2xy = 0$ sur $\mathbb{R}$.
  Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto -2x$ est $x \mapsto -x^2$,
  donc les solutions de (E_0) sont les fonction $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{x^2} \end{array} \right. , \lambda \in \mathbb{R}.$
- La fonction ch est solution de (E).
- Ainsi, les solutions de (E) sont les fonctions :
$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \operatorname{ch} x + \lambda e^{x^2} \end{array} \right. , \lambda \in \mathbb{R}.$$

Recherche d'une solution particulière : Méthode de variation de la constante

Soit l'équation différentielle $(E)\quad y' + a(x)y = b(x)$ où a et b sont continus sur I.
Soit A une primitive de a sur I.

- Les solutions sur I de l'équation homogène $E_0)\ y' + a(x)y = 0$ sont les fonctions $\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-A(x)} \end{array}$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
- On cherche une solution particulière de (E) sur I de la forme $y: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \lambda(x)e^{-A(x)} \end{array}$ où λ est une fonction dérivable.
  On a :

$$\begin{aligned} y' + a(x)y = b(x) &\iff \forall x \in I,\ \lambda'(x)e^{-A(x)} + \lambda(x)(-A'(x))e^{-A(x)} + a(x)\lambda(x)e^{-A(x)} = b(x) \\ &\iff \forall x \in I,\ \lambda'(x) = b(x)e^{A(x)} \end{aligned}$$

  La détermination d'une solution particulière de (E) se ramène ainsi à la recherche d'une primitive de $x \mapsto b(x)e^{A(x)}$ sur I.

Remarque :

- Comme toute fonction continue admet des primitives, on a donc montré que toute équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients continus de la forme $y' + a(x)y = b(x)$ admet au moins une solution particulière.
- Cette méthode permet d'obtenir une expression théorique d'une solution particulière : soit $x_0 \in I$, $x \mapsto \left(\int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}\,dt\right) e^{-A(x)}$ est une solution particulière de (E).

Proposition : Principe de superposition

Soient $a, b_1, b_2 : I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues.
Si y_1 est solution sur I de $y' + a(x)y = b_1(x)$ et y_2 est solution sur I de $y' + a(x)y = b_2(x)$ alors la fonction $y_1 + y_2$ est une solution de $y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x)$.

Démonstration. $y_1 + y_2$ est dérivable sur I.
Soit $x \in I$, on a :

$$(y_1 + y_2)'(x) + a(x)(y_1 + y_2)(x) = (y_1'(x) + a(x)y_1(x)) + (y_2'(x) + ay_2(x)) = b_1(x) + b_2(x) = b(x)$$

□

Recherche d'une solution particulière

Considérons $y' + ay = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{R}$
On peut chercher une solution particulière sous la forme $x \mapsto \lambda\sin(\omega x) + \mu\cos(\omega x)$ où λ et μ sont des constantes à déterminer.

Exemple :
Résoudre l'équation différentielle $(E)\quad y' + 2y = x^2$.

- On résout $(E_0)\quad y' + 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
  Les solutions de (E_0) sont $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-2x} \end{array}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Le second membre étant une fonction polynomiale de degré 2, on cherche une solution particulière de (E) de la forme : $y: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax^2 + bx + c \end{array}$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} y' + 2y = x^2 &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ 2ax + b + 2ax^2 + 2bx + 2c = x^2 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ 2ax^2 + (2a + 2b)x + b + 2c = x^2 \iff \begin{cases} 2a = 1 \\ 2a + 2b = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -\dfrac{1}{2} \\ c = \dfrac{1}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc la fonction $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \end{array}$ est solution particulière de (E).

- Ainsi, les solutions de (E) sont :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \lambda e^{-2x} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

1.3 Problème de Cauchy

Théorème : Existence et unicité d'une solution satisfaisant une condition initiale

Soit (E) l'équation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$ où a et b sont continues sur I. Soit $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$.
Il existe une unique solution $y : I \to \mathbb{K}$ de (E) telle que $y(x_0) = y_0$.

Remarque :

- La condition $y(x_0) = y_0$ est appelée condition initiale.
- On appelle problème de Cauchy du premier ordre, la donnée d'une équation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$ sur I et d'une condition initiale de la forme $y(x_0) = y_0$ où $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.

Démonstration. Soit A est une primitive de a sur I.
Soit y_P une solution particulière de (E) (l'existence est assurée par la méthode de variation de la constante).
Les solutions de (E) sont les fonctions $\begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & y_P(x) + \lambda e^{-A(x)} \end{array}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Posons $\begin{array}{rrcl} y : & I & \to & \mathbb{K} \\ & x & \mapsto & y_P(x) + \lambda e^{-A(x)} \end{array}$.

$$\begin{aligned} y(x_0) = y_0 & \iff y_P(x_0) + \lambda e^{-A(x_0)} = y_0 \\ & \iff \lambda = e^{A(x_0)}(y_0 - y_P(x_0)) \end{aligned}$$

Ainsi, il y a existence et unicité de λ, donc de la solution cherchée. □

Exemple : Résoudre le problème de Cauchy $(E)(1-t)y' - y = t$ sur $]1, +\infty[$ et $y(2) = 1$.

- On a vu que les solutions de (E) sur $]1, +\infty[$ sont :

$$\begin{array}{rcl}]1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{\lambda}{t-1} - \frac{t^2}{2(t-1)} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons : $\begin{array}{rrcl} y : &]1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \frac{\lambda}{t-1} - \frac{t^2}{2(t-1)} \end{array}$

$$\begin{aligned} y(2) = 1 & \iff \lambda - 2 = 1 \\ & \iff \lambda = 3 \end{aligned}$$

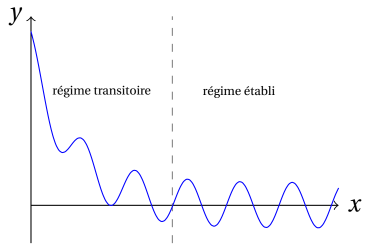
Ainsi, l'unique solution du problème de Cauchy considéré est $\begin{array}{rrcl} y : &]1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \frac{3}{t-1} - \frac{t^2}{2(t-1)} \end{array}$

Application en physique-chimie

Considérons un système physique dans lequel une grandeur y évolue en fonction du temps t en suivant l'équation différentielle $y' + \lambda y = A(t)$, où $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et A une fonction continue. Le second membre, peut être interprété comme l'action de l'extérieur sur le système et est généralement constant ou sinusoïdal.
(Chute libre d'un corps, échanges thermiques, réaction chimique ...)

- On parle de **régime libre** lorsque $A = 0$ (équation homogène), c'est à dire sans contrainte. Les solutions sont les fonctions de la forme $y(t) = Ce^{-\lambda t}$ où $C \in \mathbb{R}$.
- Dans le cas contraire, on parle de **régime forcé** (équation avec second membre). Les solutions sont de la forme $y(t) = y_1(t) + Ce^{-\lambda t}$, où y_1 est une solution particulière et $C \in \mathbb{R}$.

Dans la suite, on suppose A constant (non nul) ou sinusoïdal :
y_1 peut être choisi constant (non nul), si A est constant, ou sinusoïdale, si A est sinusoïdal. De plus, $e^{-\lambda t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (car $\lambda > 0$). Ainsi, on pourra négliger $e^{-\lambda t}$ à partir d'un certain temps. Les solutions y seront alors proches de y_1, qui est appelée **régime établi**.
La période pendant laquelle le régime établi n'est pas encore « atteint »(à une tolérance près) est appelée **régime transitoire**.



1.4 Complément : problèmes de recollement

2 Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

Soient $a, b \in \mathbb{K}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue.

Définition

- On dit que y est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants $y'' + ay' + by = f(x)(E)$ si et seulement si y est deux fois dérivable et : $\forall x \in I,\ y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x)$.
- On appelle équation homogène associée à (E) l'équation : $y'' + ay' + by = 0 \quad (E_0)$.

Remarque :

- Si y est une solution de (E) sur I, alors y est de classe $\mathscr{C}^2$ (deux fois dérivable et de dérivée seconde continue) sur I. En effet, elle est deux fois dérivable sur I. De plus y'' est continue sur I puisque $y'' = f - by' - ay$ avec f, y', y continues.
- Si on a une équation de la forme $\alpha y'' + \beta y' + \gamma y = f(x)$, avec $\alpha \neq 0$, on commence par diviser par α pour se ramener à la forme ci-dessus.

2.1 Résolution de l'équation homogène

Proposition

Soit $a, b \in \mathbb{K}$ et soit (E_0) l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$.
Soit $r \in \mathbb{C}$. La fonction $x \mapsto e^{rx}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si r est solution de l'équation $r^2 + ar + b = 0$.
L'équation $r^2 + ar + b = 0$ est appelée **équation caractéristique** de (E_0).

Démonstration. Soit $r \in \mathbb{C}$. Posons $y : x \mapsto e^{rx}$.
y est deux fois dérivables. De plus :

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by = 0 \quad &\iff \quad \forall x \in \mathbb{R},\ y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0 \\ &\iff \quad \forall x \in \mathbb{R},\ (r^2 + ar + b)e^{rx} = 0 \\ &\iff \quad r^2 + ar + b = 0. \end{aligned}$$

□

Proposition : Résolution de l'équation homogène dans $\mathbb{C}$

Soit $a, b \in \mathbb{C}$ et (E_0) : $y'' + ay' + by = 0$.

- Si l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ admet deux solutions complexes distinctes r_1 et r_2 alors les solutions complexes de (E_0) sont les fonctions :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x} \end{array} \quad \text{avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2.$$

- Si l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ admet une racine double r_0 alors les solutions complexes de (E_0) sont les fonctions :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & (\lambda x + \mu)e^{r_0 x} \end{array} \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2.$$

Démonstration. Soit $(r_1, r_2) \in \mathbb{C}^2$ les solutions complexes de l'équation caractéristique (éventuellement confondues) et y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Posons $z : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & e^{-r_1 x} y(x) \end{array}$. z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = z(x)e^{r_1 x}$.

$$y'(x) = (z'(x) + r_1 z(x))e^{r_1 x}$$
$$y''(x) = (z''(x) + 2r_1 z'(x) + r_1^2 z(x))e^{r_1 x}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de}(E_0) &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (z''(x) + 2r_1 z'(x) + r_1^2 z(x) + az'(x) + ar_1 z(x) + bz(x))e^{r_1 x} = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ z''(x) + (2r_1 + a)z'(x) + (r_1^2 + ar_1 + b)z(x) = 0 \end{aligned}$$

Or, $r_1^2 + ar_1 + b = 0$ et $r_1 + r_2 = -a$ soit $2r_1 + a = r_1 - r_2$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de}(E_0) &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ z''(x) + (r_1 - r_2)z'(x) = 0 \\ &\iff z' \text{ est solution de } Z' + (r_1 - r_2)Z = 0 \quad (E_0') \end{aligned}$$

- Si $\Delta = 0$, alors $r_1 = r_2$ et (E_0') devient $Z' = 0$.
  On a :
  $$z' \text{ solution de } (E_0') \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R},\ z'(x) = \lambda$$
  Donc
  $$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E_0) &\iff \exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R},\ z'(x) = \lambda \\ &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ z(x) = \lambda x + \mu \\ &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = (\lambda x + \mu)e^{r_1 x}. \end{aligned}$$
- Si $\Delta \neq 0$ alors $r_1 \neq r_2$. On a :
  $$z' \text{ solution de } (E_0') \iff \exists A \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ z'(x) = Ae^{-(r_1 - r_2)x}$$
  Ainsi
  $$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E_0) &\iff \exists A \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ z'(x) = Ae^{-(r_1 - r_2)x} \\ &\iff \exists \lambda_1, A \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ z(x) = \lambda_1 + \frac{A}{r_2 - r_1}e^{-(r_1 - r_2)x} \\ &\iff \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ z(x) = \lambda_1 + \lambda_2 e^{-(r_1 - r_2)x}. \quad \iff \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}. \end{aligned}$$

□

Proposition : Résolution de l'équation homogène dans $\mathbb{R}$

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et (E_0) : $y'' + ay' + by = 0$.

- Si l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 alors les solutions réelles de (E_0) sont les fonctions :
  $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x} \end{array} \quad \text{avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$
- Si l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ admet une racine double r_0 alors les solutions réelles de (E_0) sont les fonctions d :
  $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (\lambda x + \mu)e^{r_0 x} \end{array} \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$
- Si l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées non réelles $\alpha \pm i\beta$, (avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$) alors les solutions réelles de (E_0) sont les fonctions :
  $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \big(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)\big)e^{\alpha x} \end{array} \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Remarque : Comme vu dans le chapitre précédent, dans le troisième cas, les solutions réelles de (E_0) peuvent encore s'écrire :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & A\cos(\beta x - \phi)e^{\alpha x} \end{array} \quad \text{avec } (A, \phi) \in \mathbb{R}^2.$$

Démonstration.

- Les deux premiers points se montrent comme dans la proposition précédente, en remplaçant partout $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$.
- Supposons maintenant que $\Delta < 0$.

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{y est solution réel de } E_0) \\
\Longleftrightarrow & \begin{cases} \text{y est solution complexe de } E_0) \\ \forall x \in \mathbb{R}, \overline{y(x)} = y(x) \end{cases} \\
\Longleftrightarrow & \begin{cases} \exists c, d \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = ce^{(\alpha+i\beta)x} + de^{(\alpha-i\beta)x} \\ \forall x \in \mathbb{R}, \overline{y(x)} = y(x) \end{cases} \\
\Longleftrightarrow & \begin{cases} \exists c, d \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = ce^{(\alpha+i\beta)x} + de^{(\alpha-i\beta)x} \\ \forall x \in \mathbb{R}, \overline{c}e^{(\alpha-i\beta)x} + \overline{d}e^{(\alpha+i\beta)x} = ce^{(\alpha+i\beta)x} + de^{(\alpha-i\beta)x} \end{cases} \\
\Longleftrightarrow & \begin{cases} \exists c, d \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = ce^{(\alpha+i\beta)x} + de^{(\alpha-i\beta)x} \\ \forall x \in \mathbb{R}, (\overline{c} - d)e^{-i\beta x} = (c - \overline{d})e^{i\beta x} \end{cases} \\
\Longleftrightarrow & \begin{cases} \exists c, d \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = ce^{(\alpha+i\beta)x} + de^{(\alpha-i\beta)x} \\ \forall x \in \mathbb{R}, (\overline{c} - d) = (c - \overline{d})e^{2i\beta x} \end{cases} \\
\Longleftrightarrow & \begin{cases} \exists c, d \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = ce^{(\alpha+i\beta)x} + de^{(\alpha-i\beta)x} \\ \overline{c} - d = 0 \quad \text{car } x \mapsto e^{2i\beta x} \text{ et } x \mapsto 1 \text{ sont non proportionnelles.} \end{cases} \\
\Longleftrightarrow & \exists c \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = ce^{(\alpha+i\beta)x} + \overline{c}e^{(\alpha-i\beta)x} \\
\Longleftrightarrow & \exists c \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = e^{\alpha x}\left(ce^{i\beta x} + \overline{ce^{i\beta x}}\right) \\
\Longleftrightarrow & \exists c \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = 2e^{\alpha x}\mathrm{Re}\left(ce^{i\beta x}\right) \\
\Longleftrightarrow & \exists c \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = 2e^{\alpha x}\mathrm{Re}(c)\cos(\beta x) - 2e^{\alpha x}\mathrm{Im}(c)\sin(\beta x) \\
\Longleftrightarrow & \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \lambda e^{\alpha x}\cos(\beta x) + \mu e^{\alpha x}\sin(\beta x)
\end{array}
$$

□

Remarque : On dit que l'ensemble des solutions de (E_0) forme un plan vectoriel, puisque celles-ci sont combinaisons linéaires de deux fonctions non proportionnelles (que ce soit dans le cas réel ou complexe).

Exemple :

- Résoudre $y'' + 2y' - 3y = 0 \quad (E_1)$.
  L'équation caractéristique associée à (E_1) est $r^2 + 2r - 3 = 0$. Elle a pour discriminant $\Delta = 16$. Ses racines sont -3 et 1.
  Ainsi, les solutions de (E_1) sont :
  $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-3x} + \mu e^{x} \end{array} \quad , (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$
- Résoudre $y'' + 4y' + 4y = 0 \quad (E_2)$.
  L'équation caractéristique associée à (E_2) est $r^2 + 4r + 4 = 0$. Elle a pour unique racine -2.
  Les solutions de (E) sont :
  $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (\lambda + \mu x)e^{-2x} \end{array} \quad , (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$
- Résoudre $y'' + 2y' + 4y = 0 \quad (E_3)$ dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$.
  L'équation caractéristique associe à (E_3) est $r^2 + 2r + 4 = 0$. Elle a pour discriminant $\Delta = -12$. Ses racines sont $-1 - i\sqrt{3}$ et $-1 + i\sqrt{3}$.
  Les solutions dans $\mathbb{C}$ de (E) sont :
  $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-(1+i\sqrt{3})x} + \mu e^{(-1+i\sqrt{3})x} \end{array} \quad , (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2.$$
  Les solutions dans $\mathbb{R}$ de (E) sont :
  $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\cos(\sqrt{3}x)e^{-x} + \mu\sin(\sqrt{3}x)e^{-x} \end{array} \quad , (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

2.2 Résolution de l'équation avec second membre

Proposition

Soit $(E) : y'' + ay' + by = f(x)$.
Si y_p est une solution particulière de (E) et si S_0 est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (E), alors l'ensemble S des solutions de (E) est :

$$S = \{y_p + y_0\ ,\ y_0 \in S_0\}.$$

Démonstration. soit $y : I \to \mathbb{K}$ deux fois dérivable.

$$\begin{aligned} y \in S &\iff \forall x \in I,\ y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \\ &\iff \forall x \in I,\ y''(x) + ay'(x) + by(x) = y_p''(x) + ay_p'(x) + by_p(x) \\ &\iff (y - y_p)''(x) + a(y - y_p)'(x) + b(y - y_p)(x) = 0 \\ &\iff y - y_p \in S_0 \\ &\iff \exists y_0 \in S_0, y - y_p = y_0 \\ &\iff \exists y_0 \in S_0, y = y_p + y_0 \end{aligned}$$

□

Proposition : Principe de superposition

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, et $f_1, f_2 : I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues .
Si y_1 est solution sur $\mathbb{R}$ de $y'' + ay' + by = f_1(x)$ et y_2 est solution sur $\mathbb{R}$ de $y'' + ay' + by = f_2(x)$ alors la fonction $y_1 + y_2$ est une solution de $y'' + ay' + by = f_1(x) + f_2(x)$.

Démonstration. Soient y_1 une solution de $y'' + ay' + by = f_1(x)$ et y_2 est solution sur $\mathbb{R}$ de $y'' + ay' + by = f_2(x)$.
$y_1 + y_2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in I$,

$$(y_1 + y_2)''(x) + a(y_1 + y_2)'(x) + b(y_1 + y_2)(x) = y_1''(x) + ay_1'(x) + by_1(x) + y_2''(x) + ay_2'(x) + by_2(x) = f_1(x) + f_2(x).$$

□

Proposition : Recherche d'une solution particulière

L'équation différentielle $y'' + ay' + by = Ae^{\lambda x}\quad (E)$ où $a, b, A, \lambda \in \mathbb{K}$ admet une solution de la forme :

- $x \mapsto Ce^{\lambda x}$ si λ n'est pas solution de l'équation caractéristique ;
- $x \mapsto Cxe^{\lambda x}$ si λ est racine simple de l'équation caractéristique ;
- $x \mapsto Cx^2e^{\lambda x}$ si λ est racine double de l'équation caractéristique ;

où $C \in \mathbb{K}$.

Démonstration.

- La fonction $y : x \mapsto e^{\lambda x}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, y''(x) + ay'(x) + by(x) = (\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x}$$

Ainsi, si $\lambda^2 + a\lambda + b \neq 0$, la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{A}{\lambda^2 + a\lambda + b}e^{\lambda x} \end{array}$ est solution de (E).

- La fonction $y : x \mapsto xe^{\lambda x}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, y''(x) + ay'(x) + by(x) = ((\lambda^2 + a\lambda + b)x + (2\lambda + a))e^{\lambda x}$$

Or, si λ est racine simple de $r^2 + ar + b = 0$ alors $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ et $\lambda \neq -\dfrac{a}{2}$.
Ainsi, la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{A}{2\lambda + a}xe^{\lambda x} \end{array}$ est solution de (E).

- La fonction $y : x^2 \mapsto xe^{\lambda x}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, y''(x) + ay'(x) + by(x) = ((\lambda^2 + a\lambda + b)x^2 + 2(2\lambda + a)x + 2)e^{\lambda x}$$

Or, si λ est racine double de $r^2 + ar + b = 0$ alors $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ et $\lambda = -\dfrac{a}{2}$.

Ainsi, la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{A}{2}x^2e^{\lambda x} \end{array}$ est solution de (E).

$\square$

Remarque : En utilisant le principe de superposition, on peut également trouver une solution particulière de $y'' + ay' + by = f(x)$ lorsque le second membre est de la forme $f(x) = \mathrm{ch}\,(\alpha x)e^{\beta x}$, $f(x) = \mathrm{sh}\,(\alpha x)e^{\beta x}$

Méthode

L' équation différentielle $y'' + ay' + by = e^{\alpha x}(A_1\cos(\beta x) + A_2\sin(\beta x)) \quad (E)$ où $a, b, A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ avec $\beta \in \mathbb{R}^*$ admet une solution de la forme :

- $x \mapsto e^{\alpha x}\big(C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x)\big)$ si $\alpha + i\beta$ n'est pas solution de l'équation caractéristique ;
- $x \mapsto xe^{\alpha x}\big(C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x)\big)$ si $\alpha + i\beta$ est racine simple de l'équation caractéristique.

où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Posons $A = A_1 - iA_2$. On remarque alors que $\mathrm{Re}\left(Ae^{(\alpha+i\beta)x}\right) = e^{\alpha x}(A_1\cos(\beta x) + A_2\sin(\beta x))$.

- Si $\alpha + i\beta$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors $y'' + ay' + by = Ae^{\alpha x + i\beta x}$ admet une solution de la forme $x \mapsto Ce^{(\alpha+i\beta)x}$, avec $C \in \mathbb{C}$. Posons $C_1 = \mathrm{Re}(C)$ et $C_2 = -\mathrm{Im}(C)$.
  En prenant la partie réelle, on obtient que $x \mapsto e^{\alpha x}(C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x))$ est solution de (E).
- De même, si $\alpha + i\beta$ est racine simple de l'équation caractéristique, alors $y'' + ay' + by = Ae^{(\alpha+i\beta)x}$ admet une solution de la forme $x \mapsto Cxe^{(\alpha+i\beta)x}$, avec $C \in \mathbb{C}$. Posons $C_1 = \mathrm{Re}(C)$ et $C_2 = -\mathrm{Im}(C)$.
  En prenant la partie réelle, on obtient que $x \mapsto e^{\alpha x}(C_1x\cos(\beta x) + C_2x\sin(\beta x))$ est solution de (E).

$\square$

2.3 Problème de Cauchy

Théorème : Existence et unicité d'une solution satisfaisant une condition initiale

Soit (E) l'équation différentielle $y'' + ay' + by = f(x)$ où $a, b \in \mathbb{K}$ et f continue sur I.
Soient $x_0 \in I$ et $(y_0, y_1) \in \mathbb{K}^2$.
Il existe une unique solution $y : I \to \mathbb{K}$ de (E) telle que $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$.

Démonstration. Admis $\square$

Exemple : Résoudre $y'' + y = \dfrac{1}{4}\cos(3x)$ avec $y(0) = y'(0) = 0$.

D'après les exemples précédents, les solutions de $y'' + y = \dfrac{1}{4}\cos(3x)$ sont :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\cos x + \mu\sin x - \dfrac{1}{32}\cos(3x) + \dfrac{3}{8}x\cos(x) \end{array}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Posons : $y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\cos x + \mu\sin x - \dfrac{1}{32}\cos(3x) + \dfrac{3}{8}x\cos(x) \end{array}$.

On a :

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu + \dfrac{3}{32} = 0 \end{cases}$$

Ainsi, la solution du problème de Cauchy considéré est : $y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\dfrac{3}{32}\sin x - \dfrac{1}{32}\cos(3x) + \dfrac{3}{8}x\cos(x) \end{array}$.

2.4 Complément : changement de variable ou changement de fonction

Toute équation différentielle qui n'est pas de la forme ci-dessus devra comporter une indication pour sa résolution. Cette indication se présentera généralement sous la forme d'un changement de variable ou d'un changement de fonctions.

Considérons une équation différentielle (E) d'inconnue y et dépendant de la variable x que l'on souhaite résoudre sur I.

Changement de variable

Un changement de variable se présentera souvent sous la forme $t = \phi(x)$ avec $\phi : I \to J$ une bijection.

- On remarque que : $\forall x \in I, \forall t \in J,\ t = \phi(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x = \phi^{-1}(t)$.
- On pose $z : \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & y(\phi^{-1}(t)) \end{array}$
- On justifie que z est deux fois dérivable sur J.
- On exprime y en fonction de z : $y(x) = z(\phi(x))$ puis on exprime y' et y'' en fonction de z, z', z''.
- On justifie que : y solution de (E) sur $I \quad \Longleftrightarrow \quad z$ solution de (E') sur J
  où (E') est une équation différentielle que l'on sait résoudre.
- On résout l'équation différentielle en z et on en déduit les solutions de (E).

Changement de fonction

Un changement de fonctions se présentera généralement sous la forme $z =$ une fonction faisant intervenir y.

- On justifie que z est deux fois dérivable.
- On exprime y' et y'' en fonction de z, z', z''
- On justifie que : y solution de $(E) \quad \Longleftrightarrow \quad z$ solution de (E')
  où (E') est une équation différentielle que l'on sait résoudre.
- On résout l'équation différentielle en z et on en déduit les solutions de (E).