Feuille d'exercices 3 : Fonctions de la variable réelle

1 Equations - Inéquations - Valeur absolue

Exercice 1. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations ou inéquations suivantes :

1. $\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{2x-3}<0$
2. $|2x-4|=|x-1|$
3. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x-1}<\dfrac{1}{4x^2}$
4. $|x+4|\leq|2x+1|$
5. $\left|\dfrac{x-1}{x+3}\right|\leq 2$

Exercice 2. Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x\in\mathbb{R}$:

$$\sqrt{x+4-4\sqrt{x}}+\sqrt{x+9-6\sqrt{x}}=1.$$

Exercice 3. Montrer que l'ensemble E suivant est borné :

$$E=\{\sqrt{n^2+n+2}-\sqrt{n^2+1}, n\in\mathbb{N}\}$$

Exercice 4.

1. Montrer que si x et y sont deux réels positifs tels que $x\geq y$ alors :
$$\sqrt{x+y}\leq\sqrt{x}+\sqrt{y}\quad\text{et}\quad\sqrt{x}-\sqrt{y}\leq\sqrt{x-y}\leq\sqrt{x}+\sqrt{y}$$
2. En déduire que, pour tout x, $y\in\mathbb{R}$:
$$\sqrt{|x+y|}\leq\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}$$
$$\text{et}\ \left|\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}\right|\leq\sqrt{|x-y|}\leq\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}$$

Exercice 5. Montrer que pour tout x, $y\in\mathbb{R}$:

$$|x|+|y|\leq|x+y|+|x-y|,$$

$$1+|xy-1|\leq(1+|x-1|)(1+|y-1|)$$

2 Parité - Périodicité

Exercice 6. Après avoir déterminé les ensembles de définition, étudier la parité des fonctions suivantes :

1. $f_1(x)=\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x}}$
2. $f_2(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$
3. $f_3(x)=\dfrac{(x-1)^2+(x+1)^2}{(x-1)^2-(x+1)^2}$

Exercice 7. Soient f, $g\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$
1. Montrer que, si f est paire, alors $g\circ f$ est paire.
2. Montrer que, si f et g sont impaires, alors $g\circ f$ est impaire.
3. Montrer que, si f est impaire et g est paire, alors $g\circ f$ est paire.

Exercice 8. Montrer que toute fonction $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ se décompose de façon unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 9. On considère la fonction : $f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \sin(x)\cos^2(x)\end{array}\right.$.
Montrer qu'il suffit d'étudier f sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ et expliquer comment obtenir toute la courbe représentative de f à partir de cette étude.

Exercice 10. Soient f, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe T_1, $T_2\in\mathbb{Z}^*$ tels que f est périodique de période T_1 et g de période T_2.
Montrer que $f+g$, $f-g$ et fg sont périodiques.

Exercice 11. Déterminer toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à la fois monotones et périodiques.

3 Limites

Exercice 12. Déterminer les limites de :

- $f_1 : x \mapsto \dfrac{3x^2 - x - 2}{x^4 - 1}$ en 1, $+\infty$ et $-\infty$
- $f_2 : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 1} - x + 2$ en $+\infty$
- $f_3 : x \mapsto \dfrac{\ln^2(x) + 2\ln(x)}{\ln^2(x) + 1}$ en 0.

Exercice 13. Déterminer les limites de :

- $f_1 : x \mapsto \dfrac{1 - 5x}{5 + x}$ en -5^-, -5^+, $+\infty$ et $-\infty$
- $f_2 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^3}{1 + x}}$ en $+\infty$ et $-\infty$
- $f_3 : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 9} + x - 3$ en $-\infty$

Exercice 14.

1. Calculer la limite en 1 de $f : x \mapsto \dfrac{\sin(\pi x)}{x - 1}$
2. Calculer la limite en $+\infty$ de $g : x \mapsto x \sin\left(\dfrac{3}{x}\right)$
3. Calculer la limite en 0 de $h : x \mapsto \dfrac{\sqrt{1 + x} - 1}{x}$
4. Calculer la limite en 0 de $u : x \mapsto \dfrac{\ln(1 + x)}{\ln x}$.

4 Étude de fonctions

Exercice 15. Etudier le domaine de définition, de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \frac{x}{x^2 - 3x + 2} \qquad f_2 : x \mapsto (x + 2)e^{3x} \qquad f_3 : x \mapsto \cos(x^3)$$

$$f_4 : x \mapsto (\cos x)^3 \qquad f_5 : x \mapsto e^{\sqrt{x^2 + x + 1}} \qquad f_6 : x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}$$

Exercice 16. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{2 - x}} \qquad g : x \mapsto x\ln(x^2 + 1) \qquad h : x \mapsto \sin\left(\ln\left(\frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} + 3}\right)\right)$$

Exercice 17. Soit $\begin{array}{rccc} f : & [1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & (x - 2)\sqrt{x - 1} \end{array}$

La fonction f est-elle dérivable en 1 ?

Exercice 18. Etudier et représenter la fonction définie par $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{2 - 2x}{3 + x^2}}$.
Est-elle bornée ? Possède t-elle des extrema sur son ensemble de définition ?

Exercice 19. On désigne par f la fonction carré.

1. Tracer dans un même repère les courbes représentatives des fonctions $g : x \mapsto f(x + 2)$ et $h : x \mapsto f(4 - x)$
2. Résoudre graphiquement les inéquations $f(x) \leq 4$, $g(x) \geq 1$ et $h(x) = 1$.

Exercice 20. On considère la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0, +\infty[\setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1 - x}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f relativement à un repère orthonormal.

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, puis lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures et par valeurs inférieures. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}_f$?
2. Montrer que f est croissante sur chacun des intervalles $[0, 1[$, $]1, +\infty[$. Est-elle croissante sur son ensemble de définition ?
3. Préciser l'équation cartésienne de la tangente (T) au point A de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 0.
4. Prouver que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution sur $[0, +\infty[\setminus\{1\}$.

Exercice 21. Faire une étude complète (représentation graphique incluse) de la fonction :

$$f : x \mapsto \sqrt{|x^2 - 1|}$$

Exercice 22. Montrer que : $\forall x \in [-2, 2],\ -4 \leq x^4 - x^2 - 2x - 2 \leq 14$.

Exercice 23. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2 + (x-1)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + x^2} \geq 2$

Exercice 24. Soit $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{2\} & \to & \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-2} \end{array} \right.$
Montrer que g est une bijection et déterminer g^{-1}.

Exercice 25. Pout $t \in]0, 1]$, on définit :

$$f(t) = \frac{1 - t^3}{t}$$

1. Calculer $f'(t)$, et montrer que f définit une bijection de $]0, 1]$ sur $[0, +\infty[$.
2. On note g la bijection réciproque de f.
   (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ (g(x))^3 + xg(x) - 1 = 0$.
   (b) Montrer que g est dérivable sur un ensemble que l'on précisera et montrer que : $g'(x) = \dfrac{-g(x)}{3(g(x))^2 + x}$.

Exercice 26. Soit g l'application définie par $g(x) = \ln\left(\sqrt{\left|\dfrac{2+x}{2-x}\right|}\right)$.

1. Étudier les variations de g et construire la courbe représentative de g dans un repère orthonormé.
2. On note g_1 la restriction de g à $]-2, 2[$. Montrer que g_1 est bijective de $]-2, 2[$ dans un intervalle J à déterminer.
3. Déterminer la bijection réciproque de g_1.

Exercice 27. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc}]-1, 1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1 - |x|} \end{array} \right.$.
Montrer que f est une bijection, et préciser sa réciproque $g = f^{-1}$.

Exercice 28. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante.
Montrer que f est strictement décroissante.

Exercice 29. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que : $\forall g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ f \circ g = g \circ f$.