Bonne rentrée

Exercice 1. Dérivation et intégration

1. (a) On pose
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\exp(x^2)}{x} \end{array} \right. .$$
Calculer la dérivée de f et la dérivée de f'.

   (b) En déduire la valeur de
$$J = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{e^{x^2}(x^2-1)}{x^3} dx.$$

2. (a) Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$,
$$\frac{x^2-3x+3}{(x-1)^3} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-1)^3}.$$

   (b) En déduire la valeur de
$$I = \int_3^5 \frac{x^2-3x+3}{(x-1)^3} dx$$

Exercice 2. Dans cet exercice, on définit f par
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} e^{(x-1)/2} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x+1}{2} & \text{si } 1 < x < 2 \\ (x-2)^4 + \frac{3}{2} & \text{si } x \geq 2 \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

1. Étudier les variations de f sur $]-\infty, 1]$, sur $]1, 2[$ et sur $]2, +\infty[$, ainsi que les limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Tracer la courbe représentative de f sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Calculer
$$\int_0^x f(t)dt.$$

Exercice 3. On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels par la relation
$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = \frac{1}{2}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{n^2+2n+1}{2(n+1)^2+1} u_n \end{array} \right. .$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.
3. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4.

1. Montrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x > 0$, on a
$$x^n = e^{n\ln(x)}.$$
2. Montrer que
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$
3. Soit $a \in]-1, +\infty[$.

   (a) Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} n \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) = a.$$

   (b) Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a.$$

   Remarque : $\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{a}{n} = 1$ *et pourtant dès que* $a \neq 0$*, on a* $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n \neq 1$.
4. Trouver une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n \longrightarrow 1$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n^n = +\infty$.
5. Trouver une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n^n = 0$.

Exercice 5. On définit

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\ln(x+1) + \frac{1+\ln(2)}{2} \end{array} \right. .$$

1. Étudier les variations de f.
2. Montrer sans utiliser la calculatrice que $0 \leq f(1) \leq f(0) \leq 1$.
3. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a $f(x) \in [0,1]$.

Exercice 6. Fonctions sinus et cosinus

On définit f par

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) \end{array} \right. .$$

1. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f\left(x + \frac{2\pi}{5}\right) = f(x)$.
   (b) En déduire que l'étude de f sur l'intervalle $\left[0, \frac{2\pi}{5}\right]$ permet d'étudier directement f sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
2. Calculer $f(0), f\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $f\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
3. Calculer f' et en déduire les variations de f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{20}, \frac{7\pi}{20}\right]$.
4. Tracer la courbe représentative de f sur $\left[-\frac{\pi}{20}, \frac{7\pi}{20}\right]$ puis sur