Corrigé de la feuille d'exercices 1

Exercice 1. 1.

$$\begin{aligned}(P \implies (Q \implies R)) &\text{ est équivalente à } (\text{non}(P) \text{ ou } (Q \implies R))\\ &\text{ est équivalente à } (\text{non}(P) \text{ ou } (\text{non}(Q) \text{ ou } R))\\ &\text{ est équivalente à } ((\text{non}(P) \text{ ou } \text{non}(Q)) \text{ ou } R)\\ &\text{ est équivalente à } (\text{non}(P \text{ et } Q) \text{ ou } R)\\ &\text{ est équivalente à } ((P \text{ et } Q) \implies R)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}((P \text{ ou } Q) \implies R) &\text{ est équivalente à } (\text{non}(P \text{ ou } Q) \text{ ou } R)\\ &\text{ est équivalente à } ((\text{non}(P) \text{ et } \text{non}(Q)) \text{ ou } R)\\ &\text{ est équivalente à } ((\text{non}(P) \text{ ou } R) \text{ et } (\text{non}(Q) \text{ ou } R))\\ &\text{ est équivalente à } ((P \implies R) \text{ et } (Q \implies R))\end{aligned}$$

Exercice 2. 1. Faux. Contre exemple : Posons $x = y = 1$, $x + y^2 \neq 0$.
2. Faux. Posons $x = 1$, on a alors : $\forall y \in \mathbb{R},\ y^2 \neq -1$.
3. Faux. Par l'absurde. Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 0$. Ainsi, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $x = -y^2$. Ainsi, En prenant $y_1 = 1$ et $y_2 = 2$, on obtiendrait : $x = -1 = -4$ Absurde.
4. Vrai. Posons $x = -1$ et $y = 1$. On a $x + y^2 = 0$.
5. Vrai. Soit $y \in \mathbb{R}$, on pose $x = -y^2 \in \mathbb{R}$. On a alors $x + y^2 = 0$

Exercice 3. 1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$.
2. $\exists! x \in \mathbb{R},\ x^3 + x + 1 = 0$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + x + 1 \neq 0$
4. $\exists! x \in \mathbb{R},\ \ln(x) = 1$

Exercice 4.
1. (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1}$ Négation : $\exists n \in \mathbb{N},\ u_n > u_{n+1}$
   (b) $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$ Négation : $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ u_n > M$
   (c) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_{n+1}$ Négation : $\exists n \in \mathbb{N},\ u_n \neq u_{n+1}$
2. (a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$ Négation : $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x \leq y$ et $f(x) > f(y)$
   (b) $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq M$ Négation : $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ |f(x)| > M$
   (c) $\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = C$ Négation : $\forall C \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq C$
   (d) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$ Négation : $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$
   (e) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$ Négation : $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$
   (f) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \Big(x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)\Big)$ Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \Big(x \neq y \text{ et } f(x) = f(y)\Big)$
   (g) $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = n$ Négation : $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq n$
   (h) $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) > g(x)$ Négation : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq g(x)$

Exercice 5. Raisonnons par l'absurde .
Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{n^2+1} \in \mathbb{N}$. Posons $p = \sqrt{n^2+1}$. On a : $n^2 + 1 = p^2$. D'où $p^2 - n^2 = 1$. Ainsi $1 = (p-n)(p+n)$. Or, $(p - n) \in \mathbb{Z}$ et $(p + n) \in \mathbb{N}$ et ils divisent tous deux 1. Ainsi, $p - n = 1$ et $p + n = 1$. En soustrayant ces deux inégalités, on obtient $n = 0$ ce qui contredit l'hypothèse $n \in \mathbb{N}^*$.
Finalement, on peut conclure que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n^2+1} \notin \mathbb{N}$

Exercice 6. Raisonnons par contraposée.
La contraposée est : si $a \neq b$ ou $c \neq d$ alors $a + c \neq b + d$.
Supposons que $a \neq b$ ou $c \neq d$.

- Si $a \neq b$ alors comme $a \leq b$, on a $a < b$. Ainsi, $a + c < b + d$ donc en particulier, $a + c \neq b + d$.
- De même, si $c \neq d$ alors comme $c \leq d$, on a $c < d$. Ainsi, $a + c < b + d$ donc en particulier, $a + c \neq b + d$.

On a donc montré que si $a \neq b$ ou $c \neq d$ alors $a + c \neq b + d$.
Comme une proposition est équivalente à sa contraposée, on a également prouvé que si $a + c = b + d$ alors $a = b$ et $c = d$.

Exercice 7. 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Raisonnons par double implication.
Montrons tout d'abord que : si n est pair alors n^2 est pair :
Supposons n pair. Alors, il existe donc $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$. Ainsi, $n^2 = 4p^2 = 2 \times (2p^2)$ avec $2p^2 \in \mathbb{N}$ donc n^2 est pair.
On a donc : si n est pair alors n^2 est pair.
Montrons désormais que si n^2 est pair alors n est pair. On raisonne par contraposée.
La contraposée est : si n est impair alors n^2 est impair.
Supposons n impair. Il existe donc $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p + 1$. Ainsi, $n^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1$ avec $(2p^2 + 2p) \in \mathbb{N}$ donc n^2 est impair. Ainsi, si n est impair alors n^2 est impair.
Une proposition et sa contraposée étant équivalente, on a aussi : si n^2 est pair alors n est pair.
Finalement, on a bien montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, n est pair si et seulement si n^2 est pair.

2. Raisonnons par l'absurde.
Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel. Alors, il existe $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec $\dfrac{p}{q}$ irréductible.
On en déduit, en élevant au carré, que $2q^2 = p^2$ avec $q^2 \in \mathbb{N}$. Ainsi, p^2 est pair donc d'après la question précédente, p est pair. Ainsi, il existe $u \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2u$. En remplaçant dans l'équation $2q^2 = p^2$, on obtient : $2q^2 = 4u^2$ ce qui s'écrit encore $q^2 = 2u^2$. Ainsi, q^2 est pair (car $u^2 \in \mathbb{N}$) donc q également. On a ainsi montré que p et q sont pairs ce qui contredit le fait que la fraction $\frac{p}{q}$ soit irréductible.
Ainsi, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 8. Raisonnons par double implication.
Montrons tout d'abord que $(\forall x \in \mathbb{R},\ ax + be^x = 0) \implies a = b = 0$.
Supposons que : $\forall x \in \mathbb{R}, ax + be^x = 0$.
En prenant $x = 0$, on obtient $b = 0$ puis en prenant $x = 1$, on obtient $a + be = 0$ donc $a = 0$ car $b = 0$.
Réciproquement, supposons $a = b = 0$. Alors, on a directement que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(ax + be^x = 0)$.
Ceci prouve l'équivalence voulue.

Exercice 9. Méthode 1 :
Raisonnons par analyse-synthèse.
Analyse : Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}_+$, tel que $x + \sqrt{x} - 2 = 0$. Alors, on en déduit donc que x vérifie $\sqrt{x} = 2 - x$. En élevant cette égalité au carré, on aboutit finalement à l'équation : $x^2 - 5x + 4 = 0$. Le discriminant de cette équation vaut 9. Cette équation admet donc deux solutions distinctes 1 et 4.
Synthèse : $1 + \sqrt{1} - 2 = 0$. Donc 1 est bien solution de $x + \sqrt{x} - 2 = 0$. En revanche, $4 + \sqrt{4} - 2 = 4 \neq 0$ donc 4 n'est pas solution.
Conclusion : 1 est l'unique réel vérifiant $x + \sqrt{x} - 2 = 0$.
Méthode 2 :
Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned}
x + \sqrt{x} - 2 = 0 &\iff \sqrt{x} = 2 - x \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} 2 - x \geq 0 \\ x = (2 - x)^2 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} 2 - x \geq 0 \\ x = 4 - 4x + x^2 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x \leq 2 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

L'équation $x^2 - 5x + 4 = 0$ admet deux solutions distinctes qui sont 1 et 4.
Ainsi,

$$\begin{aligned}
x + \sqrt{x} - 2 = 0 &\iff \left\{\begin{array}{l} x \leq 2 \\ x = 1 \text{ ou } x = 4 \end{array}\right. \\
&\iff x = 1
\end{aligned}$$

Conclusion : Par équivalence, l'équation de départ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$.

Exercice 10. Méthode 1 :
Raisonnons par analyse-synthèse : Analyse : Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x = \sqrt{2 + x}$. Alors en élevant au carré l'égalité, on obtient $x^2 - x - 2 = 0$. Le discriminant de l'équation $x^2 - x - 2 = 0$ vaut 9. Ainsi, l'équation admet deux solutions distinctes 2 ou -1.
Synthèse : $2 = \sqrt{4}$ donc 2 est bien solution. En revanche, $\sqrt{2 - 1} = 1$. Donc $x = -1$ n'est pas solution de l'équation.
Conclusion : l'équation admet une unique solution réelle qui est 2.
Méthode 2 :

L'équation a un sens pour $x \in]-2,+\infty[$.
Soit $x \in]-2,+\infty[$. On a :

$$\begin{aligned}
x = \sqrt{2+x} &\iff \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 2+x \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \geq 0 \\ x = -1 \text{ ou } x = 2 \end{cases} \\
&\iff x = 2
\end{aligned}$$

L'équation admet donc une unique solution qui est 2.

Exercice 11. Raisonnons par analyse-synthèse :
Analyse : Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $e^x + e^{-x} = \frac{5}{2}$. Alors $e^{2x} - \frac{5}{2}e^x + 1 = 0$. Posons $X = e^x$. On a donc $X^2 - \frac{5}{2}X + 1 = 0$. Ainsi, $X = \dfrac{1}{2}$ ou $X = 2$. D'où , $e^x = \dfrac{1}{2}$ ou $e^x = 2$. Donc $x = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln(2)$ ou $x = \ln(2)$.
Synthèse : on a $e^{\ln(2)} + e^{-\ln(2)} = 2 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$. Ainsi, $\ln(2)$ est bien solution de l'équation.
Conclusion, il existe bien $x \in \mathbb{R}$, $e^x + e^{-x} = \dfrac{5}{2}$, $\ln(2)$ et $-\ln(2)$ conviennent.

Exercice 12. Analyse : supposons qu'il existe f solution du problème.
1. En prenant, $x = y = 0$, on a : $f(0)^2 - f(0) = 0$ i.e $f(0) \times (f(0) - 1) = 0$ donc $f(0) = 1$ ou $f(0) = 0$. Or, si $f(0) = 0$ alors en prenant $x = 0$ et $y = 1$, on obtiendrait : $0 - 0 = 1$ Absurde. Ainsi, $f(0) = 1$.
2. D'après la question précédente, $f(0) = 1$. En prenant $y = 0$, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - 1 = 0$. Donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x + 1$.

Synthèse : on pose $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x+1 \end{array}$.
Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On a $f(x)f(y) - f(xy) = (x+1)(y+1) - (xy+1) = xy + x + y + 1 - xy - 1 = x + y$ donc f est bien solution.
Conclusion : on a prouvé par analyse synthèse que le problème possède pour unique solution la fonction $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x+1 \end{array}$.

Exercice 13. On raisonne par analyse/synthèse.
Analyse : Supposons qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$. Alors $b = f(0)$ et $a = f(1) - f(0)$.
Synthèse : Posons $b = f(0)$ et $a = f(1) - f(0)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x = 0$ ou $x = 1$, on a alors $f(x) = ax + b$.
Supposons maintenant $x \neq 0$ et $x \neq 1$. Par hypothèse, on a alors $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$, donc $\frac{f(x)-b}{x} = \frac{f(x)-(a+b)}{x-1}$.
D'où $(x-1)(f(x) - b) = x(f(x) - a - b)$. Ainsi, $xf(x) - f(x) - bx + b = xf(x) - ax - bx$. D'où $f(x) = ax + b$.
Donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$.
Conclusion : on a montré que : $\exists!(a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$.

Exercice 14. Soit $x \in \mathbb{R}$.
$\max(x^2, (x-2)^2) \geq 1$ si et seulement si $x^2 \geq 1$ ou $(x-2)^2 \geq 1$.
Montrons que $x^2 \geq 1$ ou $(x-2)^2 \geq 1$.
Supposons que $x^2 < 1$. On a alors $-1 < x < 1$, donc $-3 < x - 2 < -1$. Comme la fonction carrée est décroissante sur $\mathbb{R}_-$, on en déduit que $(x-2)^2 \geq (-1)^2 = 1$.
On peut donc conclure que $x^2 \geq 1$ ou $(x-2)^2 \geq 1$ puis que $\max(x^2, (x-2)^2) \geq 1$.
Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, \max(x^2, (x-2)^2) \geq 1$.

Exercice 15. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$.
• Pour $n = 0$: $u_0 = 1$. La propriété est vraie pour $n = 0$.
• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 \leq u_n \leq 1$.
Alors , $1 \leq u_n + 1 \leq 2$ puis $0 < \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{u_n + 1}{2} \leq 1$. En appliquant la fonction racine carrée (strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$), on obtient $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.
• On a donc montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 1$.

Exercice 16. Montrons, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2^n > n$.
• Pour $n = 1$: $2 > 1$. La propriété est vraie pour $n = 1$.
• Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $2^n > n$. Alors $2^{n+1} = 2 \times 2^n > 2n$. Or, $n \geq 1$ donc $n + n \geq n + 1$.
Ainsi, $2^{n+1} > n + 1$.
• On a donc montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2^n > n$.

Exercice 17. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = (n+1) \times 3^n$ ».
Montrons, par récurrence d'ordre 2 que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
• On a $u_0 = 1 = 3^0$ et $u_1 = 6 = 2 \times 3$ donc $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.
• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies.
Alors , par hypothèse de récurrence, on a $u_n = (n+1) \times 3^n$ et $u_{n+1} = (n+2) \times 3^{n+1}$.
On en déduit donc que $u_{n+2} = 6 \times (n+2) \times 3^{n+1} - 9 \times (n+1) \times 3^n = 3^{n+2} \times (2n+4-n-1) = 3^{n+2}(n+3)$.
Ainsi, $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
• On a donc montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n+1) \times 3^n$.

Exercice 18. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \leq \left(\frac{5}{3}\right)^n$ ».
Montrons, par récurrence d'ordre 2 que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
• On a $u_0 = 1 = \left(\frac{5}{3}\right)^0$ et $u_1 = 1$ donc $u_1 \leq \left(\frac{5}{3}\right)^1$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.
• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies.
Alors, par hypothèse de récurrence, on a $u_n \leq \left(\frac{5}{3}\right)^n$ et $u_{n+1} \leq \left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= u_{n+1} + u_n \\
&\leq \left(\frac{5}{3}\right)^n + \left(\frac{5}{3}\right)^{n+1} \\
&\leq \left(\frac{5}{3}\right)^n \left(1 + \frac{5}{3}\right) \\
&\leq \frac{8}{3}\left(\frac{5}{3}\right)^n
\end{aligned}$$

De plus, $\left(\frac{5}{3}\right)^2 - \frac{8}{3} = \frac{25-24}{9} \geq 0$. Ainsi, $\frac{8}{3} \leq \left(\frac{5}{3}\right)^2$ donc $u_{n+2} \leq \left(\frac{5}{3}\right)^2 \left(\frac{5}{3}\right)^n = \left(\frac{5}{3}\right)^{n+2}$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
• On a donc montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \left(\frac{5}{3}\right)^n$

Exercice 19. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = n(n-1)$ ».
Montrons, par récurrence d'ordre 3 que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
• On a $u_0 = 0$, $u_1 = 0$ et $u_2 = 2 = 2 \times 1$ donc $\mathcal{P}(0)$, $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies.
• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{P}(n)$, $\mathcal{P}(n+1)$ et $\mathcal{P}(n+2)$ sont vraies.
Alors par hypothèse de récurrence, on a $u_n = n(n-1)$, $u_{n+1} = (n+1)n$ et $u_{n+2} = (n+2)(n+1)$. On en déduit donc que :

$$\begin{aligned}
u_{n+3} &= 3(n+2)(n+1) - 3n(n+1) + n(n-1) \\
&= 3n^2 + 9n + 6 - 3n^2 - 3n + n^2 - n \\
&= n^2 + 5n + 6 \\
&= (n+3)(n+2)
\end{aligned}$$

• On a donc montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n(n-1)$

Exercice 20. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = n$ ».
Montrons par récurrence forte que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
• Pour $n = 0$: on a $u_0 = 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Alors :

- Si n est pair, on a $u_{n+1} = 2u_{\frac{n}{2}} + 1$. Or, $u_{\frac{n}{2}} = \frac{n}{2}$ par hypothèse de récurrence car $\frac{n}{2} \in [\![0, n]\!]$.
  Ainsi, $u_{n+1} = 2 \times \frac{n}{2} + 1 = n + 1$.
- Si n est impair, on a $u_{n+1} = u_n + 1$. Or, $u_n = n$ par hypothèse de récurrence car $n \in [\![0, n]\!]$. Ainsi, $u_{n+1} = n+1$.

Donc, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
• On a donc montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$

Exercice 21. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$ ».
Montrons par récurrence d'ordre 2 que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• On a $x^0 + \dfrac{1}{x^0} = 1 + 1 = 2 \in \mathbb{Z}$ et $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$ par hypothèse sur x. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.
• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies.
Alors, on a : On a :

$$\begin{aligned}\left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) &= x^{n+2} + \frac{x^{n+1}}{x} + \frac{x}{x^{n+1}} + \frac{1}{x^{n+2}} \\ &= x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}} + x^n + \frac{1}{x^n}\end{aligned}$$

D'où :

$$x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}} = \left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)$$

Or, par hypothèse de récurrence, on a : $x^{n+1} + \dfrac{1}{x^{n+1}} \in \mathbb{Z}$, $x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$. De plus, $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$ par hypothèse sur x.
Ainsi, $x^{n+2} + \dfrac{1}{x^{n+2}} \in \mathbb{Z}$ et $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
• On a donc montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$