Devoir libre 1

Problème 1

Partie I

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto xe^x \end{cases}$

1) f est continue et dérivable par produit sur $\mathbb{R}$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = (1+x)e^x$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ D'où $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

Par croissance comparée $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0}$

4) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geq 0 \iff (1+x) \geq 0$ car $e^x > 0$

$\iff x \geq -1$

valeur de x	$-\infty$	-1	$+\infty$
signe de $f'(x)$	$-$		$+$
variations de f	$0 \searrow$	$-1/e$	$\nearrow +\infty$

$f(-1) = -e^{-1} = \frac{-1}{e} < 0$

5) f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty, -1]$ Donc : f réalise une bijection de $]-\infty, -1]$ sur $]0, \frac{-1}{e}] = J_0$ d'après le théorème de la bijection monotone.

6) De même qu'en I)5), f est continue et strictement sur $[-1, +\infty[$ donc,

f réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ sur $[\frac{-1}{e}, +\infty[$

7) $e \geq \frac{-1}{e}$

$\forall x \in [-1, +\infty[$, $W(e) = x \iff e = f(x)$

$\iff xe^x = e$

or : $1 \times e^1 = e$ et $1 \in [-1, +\infty[$ donc $\boxed{W(e) = 1}$

Problème 1) Partie I) (Suite)

8) Soit $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < e$

$0 < a < e$ donc : $\ln(a) < 1$

donc : $-\ln(a) > -1$

D'où : $\frac{-\ln(a)}{a} > \frac{-1}{a}$ or : $a < e$ donc : $\frac{-\ln(a)}{a} > \frac{-1}{e}$

on a $\begin{cases} f(-\ln(a)) = -\ln(a)\exp(-\ln(a)) = \frac{-\ln(a)}{a} \\ -\ln(a) \geq -1 \end{cases}$

donc : $W\left(\frac{-\ln(a)}{a}\right) = -\ln(a)$

9) Soit $a > e$

$\ln(a) > 1$ et $a\ln(a) > e$

or : $\begin{cases} f(\ln(a)) = a\ln(a) \\ \ln(a) > 1 \end{cases}$

donc : $W(a\ln(a)) = \ln(a)$

Partie II

Soit $t \in \mathbb{R}$

$2^t = 5t \iff \exp(t\ln(2)) = 5t$

$\iff \frac{1}{5} = t\exp(-t\ln(2))$

$\iff -\frac{\ln(2)}{5} = -t\ln(2)\exp(-t\ln(2))$

$\iff -\frac{\ln(2)}{5} = f(-t\ln(2))$

or : $\frac{\ln(2)}{5} < \frac{1}{e}$ donc : $\frac{-1}{e} < -\frac{\ln(2)}{5} < 0$

Donc : (d'après I)4)),

$2^t = 5t \iff -t\ln(2) = W\left(-\frac{\ln(2)}{5}\right)$

ou

$-t\ln(2) = \Omega\left(-\frac{\ln(2)}{5}\right)$

Par suite :

$2^t = 5t \iff t = -\frac{1}{\ln(2)} W\left(-\frac{\ln(2)}{5}\right)$ ou $t = -\frac{1}{\ln(2)}\Omega\left(-\frac{\ln(2)}{5}\right)$

Problème 1) Partie II) (Suite)

Les solutions de (E) sont $\frac{-1}{\ln(2)} W\left(-\frac{\ln(2)}{5}\right)$

et $\frac{-1}{\ln(2)} \Omega\left(-\frac{\ln(2)}{5}\right)$

Partie III

1) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$ae^{\omega x} + bx + c = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$a + bxe^{-\omega x} + ce^{-\omega x} = 0$$

$$\Leftrightarrow a = (-bx - c)e^{-\omega x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a\omega}{b} = \left(-\omega x - \frac{c\omega}{b}\right)e^{-\omega x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a\omega}{b} e^{-\frac{c\omega}{b}} = \left(-\omega x - \frac{c\omega}{b}\right)e^{-\omega x - \frac{c\omega}{b}}$$

$$\Leftrightarrow \left(-\omega x - \frac{c\omega}{b}\right)e^{-\omega x - \frac{c\omega}{b}} = \Delta$$

2) $\Delta \geq 0$

OR :

$\forall x \in \mathbb{R}, \left(ae^{\omega x} + bx + c = 0\right) \Leftrightarrow -\left(\omega x + \frac{c\omega}{b}\right)e^{-\omega x - \frac{c\omega}{b}} = \Delta$

$\Leftrightarrow f\left(-\omega x - \frac{c\omega}{b}\right) = \Delta$

donc :

$\forall x \in \mathbb{R}, \left(ae^{\omega x} + bx + c = 0\right) \Leftrightarrow \left(-\omega x - \frac{c\omega}{b} = W(\Delta)\right)$

car $\Delta \geq 0$

donc :

$\forall x \in \mathbb{R}, \left(ae^{\omega x} + bx + c = 0\right) \Leftrightarrow \left(x = -\frac{W(\Delta)}{\omega} - \frac{c}{b}\right)$ $(\omega \neq 0)$

3) On a montré que

$\forall x \in \mathbb{R}, \left(ae^{\omega x} + bx + c = 0\right) \Leftrightarrow \left(f\left(-\omega x - \frac{c\omega}{b}\right) = \Delta\right)$

OR : $\Delta \in \left[-\frac{1}{e}, 0\right[$

Soit $x \in \mathbb{R}$

on a $-\omega x - \frac{c\omega}{b} \geq -1$ ou $-\omega x - \frac{c\omega}{b} < -1$

Problème 1 Partie III) (Suite)

Cas n°1 : $-\omega x - \frac{c\omega}{b} \geq -1$

donc : $f\left(-\omega x - \frac{c\omega}{b}\right) = \Delta \Leftrightarrow W(\Delta) = -\omega x - \frac{c\omega}{b}$

$$\Leftrightarrow \left(x = -\frac{W(\Delta)}{\omega} - \frac{c}{b}\right)$$

Cas n°2 : $-\omega x - \frac{c\omega}{b} < -1$

donc : $\left(f\left(-\omega x - \frac{c\omega}{b}\right) = \Delta\right) \Leftrightarrow \Omega(\Delta) = -\omega x - \frac{c\omega}{b}$

$$\Leftrightarrow \left(x = -\frac{\Omega(\Delta)}{\omega} - \frac{c}{b}\right)$$

"Dans tous les cas",

$$\left(f\left(-\omega x - \frac{c\omega}{b}\right) = \Delta\right) \Leftrightarrow \left(x = -\frac{W(\Delta)}{\omega} - \frac{c}{b}\right)$$

ou

$$\left(x = -\frac{\Omega(\Delta)}{\omega} - \frac{c}{b}\right)$$

4) on a montré que

$\forall x \in \mathbb{R},\ ae^{\omega x} + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(f\left(-\omega x - \frac{c\omega}{b}\right) = \Delta\right)$

or : $\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(-\omega x - \frac{c\omega}{b}\right) \geq \frac{-1}{e}$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(-\omega x - \frac{c\omega}{b}\right) \neq \Delta$

car $\Delta < \frac{-1}{e}$

L'équation en x

$$ae^{\omega x} + bx + c = 0$$

n'admet pas de solution ~~sur~~ dans $\mathbb{R}$

Problème 1 Partie IV

1) Montrons que : $T_0 \leq T_1$

on a $T_0 = x$ et $T_1 = x^{T_0} = x^x = \exp(x \ln(x))$

cas n°1 : $x > 1$

donc : $\ln(x) > 0$ d'où : $x \times \ln(x) > 1 \times \ln(x)$

donc : $x^x = \exp(x\ln(x)) > \exp(\ln(x)) = x$

(ie) $T_1 \geq T_0$

cas n°2 : $x \leq 1$

donc : $\ln(x) \leq 0$ donc : $-\ln(x) x \leq -\ln(x)$

d'où $x\ln(x) \geq \ln(x)$ donc : $x^x \geq x$

(ie) $T_1 \geq T_0$

Dans tous les cas $T_1 \geq T_0$

2) Soit $h : t \longmapsto t^{1/t} = \exp(\frac{1}{t}\ln(t))$

h est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par composition et

~~$\forall t > 0$ $h'(t) = (\frac{1}{t} \times 1 - \ln(t) \times \frac{-1}{t^2}$~~

$\forall t > 0$, $h'(t) = \left(\dfrac{\frac{1}{t} \times t - \ln(t)}{t^2}\right) \exp(\frac{1}{t}\ln(t))$

$= \dfrac{1 - \ln(t)}{t^2} t^{1/t}$

Donc, $\forall t > 0$ $(h'(t) > 0) \Leftrightarrow 1 - \ln(t) > 0$

$\Leftrightarrow (e > t)$

valeurs de t	0		e		$+\infty$
signe de $h'(t)$		$+$	0	$-$	
variations de h	0	$\nearrow$	$e^{1/e}$	$\searrow$	1

$\lim\limits_{t \to 0^+} \frac{1}{t} = +\infty$ $\lim\limits_{t \to 0^+} \ln(t) = -\infty$ donc : $\lim\limits_{t \to 0} t^{1/t} = 0$

Problème 1 Partie IV) (Suite)

2) (Suite)

Soit $\ell \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n = \ell$

(T_n) admet une limite finie

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} T_{n+1} = \ell$

or : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+1} = x^{T_n} = g(T_n) \\ g \text{ est continue par composition de fonctions usuelles} \end{cases}$

donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} T_{n+1} = \ell = g(\ell) > 0$

d'où : $\ell = \cancel{x} x^{\ell}$ donc : $\ell^{1/\ell} = x = h(\ell)$

donc : $x \in]0, e^{1/e}]$.

3) $\begin{cases} T_0 = x = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+1} = x^{T_n} = \exp(T_n \ln(1)) = 1 \end{cases}$

Montrons par Récurrence sur $\mathbb{N}$ que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ "} T_n = 1 \text{"}$$

• $n = 0$: $T_0 = 1$

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie jusqu'au rang n

donc : $T_n = 1$ donc : $T_{n+1} = x^{T_n} = 1^1$.

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n = 1$

Donc : (T_n) est une suite constante d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n = 1$

4) On suppose que $x > 1$

a) $g : t \longmapsto x^t$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g'(t) = \ln(x)\, x^t$$

or : $x > 1$ donc : $\ln(x) > 0$

D'où : $\forall t \in \mathbb{R}$, $g'(t) > 0$

Problème 1 Partie IV (Suite 2)

4)a) (Suite)

valeurs de t	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
signe de $g'(t)$	$+$
variations de g	$0 \nearrow +\infty$

$\lim\limits_{t \to -\infty} g(t) = \lim\limits_{t \to -\infty} \exp(t\ln(x)) = 0$ car $\ln(x) > 0$

$\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = +\infty$ car $\ln(x) > 0$

b) Montrons par récurrence sur $\mathbb{N}$ que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, "$T_n \leq T_{n+1}$"

• Soit $n=0$: D'après 1), $T_0 \leq T_1$

• <u>Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie jusqu'au rang n</u>

on a $T_n \leq T_{n+1}$ or g est croissante sur $\mathbb{R}$

<u>donc</u> : $g(T_n) \leq g(T_{n+1})$

<u>or</u> : $g(T_n) = x^{T_n} = T_{n+1}$ et $g(T_{n+1}) = T_{n+2}$

<u>donc</u> : $T_{n+1} \leq T_{n+2}$ <u>d'où la propriété au rang $n+1$</u>

c) Montrons par récurrence sur $\mathbb{N}$ que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, "$T_n < e$"

• Pour $n=0$: $T_0 = x \in]1, e^{1/e}]$

<u>or</u> : $e > 1$ <u>donc</u> : $\frac{1}{e} < 1$ <u>donc</u> $e^{1/e} < e$

D'où : $T_0 < e$.

• <u>Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie jusqu'au rang n.</u>

on a $T_n < e$

<u>or</u> : $\begin{cases} T_{n+1} = x^{T_n} = \exp(T_n \times \ln(x)) \\ \ln(x) > 0 \end{cases}$

<u>donc</u> : $T_{n+1} \leq \exp(e\ln(x))$ #

Problème 1 Partie IV) (Suite 3)

4) c) (Suite)

or : $x \leq e^{1/e}$ donc : $\ln(x) \leq \frac{1}{e}$

donc : $e\ln(x) \leq 1$

D'où : $T_{n+1} \leq \exp(e\ln(x)) \leq e$

d'où la propriété au rang $n+1$

d) D'après 4)b) et 4)c) la suite (T_n) est croissante et majorée. Donc (T_n) converge

5) On suppose que $x < 1$

a) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$\forall t \in \mathbb{R}$ $g'(t) = \ln(x)x^t$

or : $\ln(x) < 0$ donc : $\forall t \in \mathbb{R}$, $g'(t) < 0$

valeurs de t	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
signe de $g'(t)$	$-$
variations de g	$+\infty \searrow 0$

De plus $g(1) = x < 1$

Donc : $\forall t \in [0, 1]$, $g(t) \in [0, 1]$.

b) Montrons par récurrence sur $\mathbb{N}$ que

$\forall n \in \mathbb{N}$, "$T_n \in [0, 1]$"

- $T_0 = x < 1$ et $x > 0$ donc : $T_0 \in [0, 1]$
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie jusqu'au rang n.

$T_n \in [0, 1]$

donc : $g(T_n) = T_{n+1} \in [0, 1]$ d'après 5)a).

d'où la propriété au rang $n+1$

c) on a $x\ln(x) \leq 0$

donc : $x^x = \exp(x\ln(x)) \leq 1$

donc : $x^x - 1 \leq 0$ or $\ln(x) \leq 0$

donc : $(x^x - 1)\ln(x) \geq 0$

Problème 1) Partie IV) (Suite 4)

5)c) (Suite)

D'où : $e^{(x^x-1)\ln(x)} \geqslant 1$

donc : $\dfrac{e^{x^x \ln(x)}}{e^{\ln(x)}} \geqslant 1$ (ie) $\dfrac{x^{(x^x)}}{x} \geqslant 1$

or : $T_2 = x^{T_1}$ et $T_1 = x^x$ et $T_0 = x$

Donc : $\dfrac{T_2}{T_0} \geqslant 1$ donc : $\boxed{T_0 \leqslant T_2}$

d) $T_1 = x^x$ et $T_3 = x^{T_2}$

Donc : $\begin{cases} T_1 = \exp(x\ln(x)) = \exp(T_0 \ln(x)) \\ T_3 = \exp(T_2 \ln(x)) \end{cases}$

or : $\begin{cases} \ln(x) < 0 \text{ donc : } T_0 \ln(x) \geqslant \ln(x) T_2 \\ T_0 \leqslant T_2 \end{cases}$

Par suite : $\boxed{T_1 \geqslant T_3}$

e) Montrons par récurrence sur $\mathbb{N}$ que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, " $T_{2n} \leqslant T_{2n+2}$ "

• $n=0$: $T_0 \leqslant T_2$ donc : $T_{2n} \leqslant T_{2n+2}$

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie jusqu'au rang n.

donc : $T_{2n} \leqslant T_{2n+2}$

or : d'après 5)a) g est strictement décroissante

donc : $g(T_{2n}) \geqslant g(T_{2n+2})$

D'où : $T_{2n+1} \geqslant T_{2n+3}$ donc : $g(T_{2n+1}) \leqslant g(T_{2n+3})$

Donc : $T_{2(n+1)} \leqslant T_{2(n+1)+2}$

d'où la propriété au rang $n+1$

Finalement $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_{2n} \leqslant T_{2(n+1)}$

Problème 1) Partie IV) (Suite 5)

5) e) (Suite)

<u>Soit $n \in \mathbb{N}$</u>

$T_{2n} \leq T_{2n+2}$ donc, $g(T_{2n}) \geq g(T_{2n+3})$

(ie) $T_{2n+1} \geq T_{2n+3} = T_{2(n+1)+1}$

<u>Par suite</u>, $(T_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante

f) D'après 5)b), $\begin{cases} \forall n\in\mathbb{N}, T_{2n} \leq 1 \\ \forall n\in\mathbb{N}, T_{2n+1} \geq 0 \end{cases}$

or $\begin{cases} (T_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante} \\ (T_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante} \end{cases}$ donc $\begin{cases} (T_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ et} \\ (T_{2n+1}) \text{ convergent} \end{cases}$

g) Soit $\ell_0 = \lim\limits_{n\to+\infty} T_{2n}$.

Soit $\ell_1 = \lim\limits_{n\to+\infty} T_{2n+1}$

on a $T_{2n+1} = x^{T_n} = \exp(T_n \ln(x)) \longrightarrow \exp(\ell_0 \ln(x))$

De même $T_{2n+2} = x^{T_{2n+1}} \longrightarrow x^{\ell_1}$

<u>or</u>, $T_{2n+1} \longrightarrow \ell_1$ et $T_{2n+2} \longrightarrow \ell_0$

<u>donc</u>, $x^{\ell_0} = \ell_1$ et $\ell_0 = x^{\ell_1}$

<u>d'où</u>, $x = \ell_1^{1/\ell_0}$ et $\ell_0^{1/\ell_1} = x$

<u>donc</u>, $\ell_1^{1/\ell_0} = \ell_0^{1/\ell_1}$ donc : $\left(\ell_1^{1/\ell_0}\right)^{\ell_0\ell_1} = \left(\ell_0^{1/\ell_1}\right)^{\ell_0\ell_1}$

<u>d'où</u>, $\boxed{\ell_1^{\ell_1} = \ell_0^{\ell_0}}$

6) <u>Supposons que</u> : $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Problème 1) Partie IV) (Suite 6)

6) (Suite)

D'après ②, $x \in]0, e^{1/e}]$.

__Cas n° 1 :__ $x \geq 1$

donc : $x \geq e^{-e}$ car $-e \leq 0$ donc : $e^{-e} \leq 1$

__Cas n° 2 :__ $x < 1$

D'après 5), $\begin{cases} T_{2n} \longrightarrow l_0 = l \\ T_{2n+1} \longrightarrow l_1 = l \end{cases}$

d'où : $l_0 = l_1$ car (T_{2n}) converge

D'après le résultat admis, $x \geq \frac{1}{e^e}$ car $l_0 = l_1$

D'où : $x \geq e^{-e}$

Dans tous les cas, $x \in [e^{-e}, e^{1/e}]$

• __Supposons que :__ $x \in [e^{-e}, e^{1/e}]$

__Cas n° 1 :__ $x > 1$

D'après 4), $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente

__Cas n° 2 :__ $x = 1$

D'après 3), $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge

__Cas n° 3 :__ $x < 1$

D'après 5), $\begin{cases} T_{2n} \longrightarrow l_0 \\ T_{2n+1} \longrightarrow l_1 \end{cases}$

or : $x \geq \frac{1}{e^e}$ donc, d'après le résultat admis, $l_0 = l_1$

__Par suite__ $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l_0

7) Soit $x \in [e^{-e}, e^{1/e}]$

D'après 6), (T_n) converge. Soit $l = \lim_{n \to +\infty} T_n$.

Problème 1) Partie IV) (Suite 7)

7) (Suite)

$$\begin{cases} T_{n+1} \longrightarrow \ell \\ T_{n+1} = x^{T_n} \longrightarrow x^{\ell} \end{cases}$$

Par unicité de la limite, $x^{\ell} = \ell$

donc : $\exp(\ln(x)\,\ell) = \ell$

d'où : $1 = \ell \times \exp(-\ln(x)\,\ell)$

donc : $-\ln(x) = (-\ln(x)\ell) \times \exp(-\ln(x)\,\ell)$

(ie) $-\ln(x) = f(-\ln(x)\,\ell)$

or : $x \in [e^{-e}, e^{1/e}]$ donc : $-\ln(x) \in [\frac{1}{e}, e]$

d'où : $-\ln(x) > 0$

De plus $-\ln(x)\ell \geq \frac{1}{e} \times 0$

D'où : $W(-\ln(x)) = W(f(-\ln(x)\,\ell))$

$$= -\ln(x)\,\ell$$

d'où : $\ell = -\dfrac{W(-\ln(x))}{\ln(x)}$