Corrigé de la feuille d'exercices 25

1 Matrice et application linéaire

Exercice 1. 1. Notons $\mathcal{B}_n = (1, X, ..., X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{C} = (1)$ la base canonique de $\mathbb{R}$.

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_n,\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$$

2. Notons $\mathcal{B}_3 = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_3}(v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. 1. On a : $f(e_1) = f((1,0,0)) = (1,1)$, $f(e_2) = f((0,1,0)) = (1,-1)$ et $f(e_3) = f((0,0,1)) = (-1,2)$.
On en déduit que la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. $f'_1 = (1,2)$ et $f'_2 = (-1,1)$ ne sont pas colinéaires. Ainsi, (f'_1, f'_2) libre. De plus,cette famille se compose de deux vecteurs et $\dim(\mathbb{K}^2) = 2$ donc (f'_1, f'_2) est une base de $\mathbb{K}^2$.
3. Cherchons alors les coordonnées de $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$ dans la base $\mathcal{C}'$.
Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} & f(e_1) = \alpha e'_1 + \beta e'_2 \\ \Longleftrightarrow\ & \left\{ \begin{array}{l} \alpha - \beta = 1 \\ 2\alpha + \beta = 1 \end{array} \right. \\ \Longleftrightarrow\ & \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \dfrac{2}{3} \\ \beta = -\dfrac{1}{3} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ainsi, $f(e_1) = \dfrac{1}{3}(-f'_1 + 2f'_2)$.
De même, on a $f(e_2) = -f'_2$ et $f(e_3) = \dfrac{1}{3}(f'_1 + 4f'_2)$ On a donc :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}'}(f) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. 1. Notons $\mathcal{B}_n = (1, X, ..., X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{C} = (1)$ la base canonique de $\mathbb{R}$.
Soit $j \in [\![1, n+1]\!]$, on a $u(X^{j-1}) = \displaystyle\int_0^1 t^{j-1} dt = \frac{1}{j}$.
Ainsi,

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_n,\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3} & \cdots & \dfrac{1}{n+1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$$

2. Notons $\mathcal{B}_3 = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{C}_3[X]$.
On a $v(1) = 0$, $u_3(X) = 1$, $v(X^2) = 1 + 2X$, $v(X^3) = 1 + 3X + 3X^2$. Ainsi,

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_3}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{C})$$

Exercice 4. Montrons que cette famille est libre.

Soit $\lambda_0, ..., \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x) = 0$.

En composant avec f^{n-1}, on obtient : $\lambda_0 f^{n-1}(x) + \lambda_1 f^n(x) + ... + \lambda_{n-1} f^{2n-1}(x) = 0$. Or : $\forall q \geq n,\ f^q = 0$.
Donc : $\lambda_0 f^{n-1}(x) = 0$. Or, $f^{n-1}(x) \neq 0$ donc $\lambda_0 = 0$.

On a alors l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k f^k(x) = 0$. De la même manière en composant par f^{n-2}, on obtient : $\lambda_1 f^{n-1}(x) = 0$ puis $\lambda_1 = 0$.
En itérant, on obtient : $\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ \lambda_i = 0$.
Ainsi, la famille $(x, f(x), ..., f^{n-1}(x))$ est libre. Or, cette famille est de cardinal $n = \dim E$, elle constitue donc une base de E.
De plus, on a : $\forall j \in [\![1, n]\!],\ f\left(f^{j-1}(x)\right) = f^j(x)$.
Ainsi, la matrice de f dans cette base est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. Soit $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
$\phi(\lambda M_1 + \mu M_2) = A(\lambda M_1 + \mu M_2) = \lambda A M_1 + \mu A M_2 = \lambda\phi(M_1) + \mu\phi(M_2)$.
Ainsi, ϕ est une application linéaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ donc ϕ est un endomorphisme.
Notons $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
Notons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
On a : $\phi(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = aE_{1,1} + cE_{2,1}$.

De même, on a $\phi(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $\phi(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}$ et $\phi(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$. On a alors : $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$

Exercice 6. Commençons par prouver que $\mathcal{B}'$ est bien une base de E.

Soit $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e'_j = 0$.

Alors $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\sum_{k=1}^{j} e_k\right) = 0$.

Alors, en intervertissant les deux sommes, on obtient : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=k}^{n} \lambda_j\right) e_k = 0$.

Or, $(e_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ est une famille libre donc : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \left(\sum_{j=k}^{n} \lambda_j\right) = 0$.
En particulier, pour $k = n$: $\lambda_n = 0$.
Pour $k = n-1$, $\lambda_n + \lambda_{n-1} = 0$ donc $\lambda_{n-1} = 0$.
En itérant, on obtient : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \lambda_k = 0$.
Donc $\mathcal{B}'$ est libre.
De plus, $\mathrm{Card}\,(\mathcal{B}') = n = \dim\,(E)$.
Ainsi, $\mathcal{B}'$ est une base de E.
Déterminons la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.
Par définition de f, on a :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ f(e_k) = \sum_{i \in [\![1,n]\!] \setminus \{k\}} \beta e_i + \alpha e_i = \beta \sum_{i=1}^{n} e_i + (\alpha - \beta)e_k = \beta e'_n + (\alpha - \beta)e_k.$$

Soit $j \in [\![1, n]\!]$.

$$\begin{aligned}
f(e'_j) &= \sum_{k=1}^{j} f(e_k) \\
&= \sum_{k=1}^{j} (\beta e'_n + (\alpha - \beta) e_k) \\
&= \beta j e'_n + (\alpha - \beta) \sum_{k=1}^{j} e_k \\
&= \beta j e'_n + (\alpha - \beta) e'_j
\end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \beta - \alpha & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha - \beta & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha - \beta & 0 \\ \beta & 2\beta & \cdots & (n-1)\beta & \alpha - \beta + n\beta \end{pmatrix},$$

Exercice 7. f est l'unique application linéaire telle que $f(e_1) = e_1$, $f(e_4) = e_4$, $f(e_2) = 0$ et $f(e_3) = 0$.
Ainsi, f est la projection sur $\mathrm{Vect}\,(e_1, e_4)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\,(e_2, e_3)$.

Exercice 8. Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $M = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
On a :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $M^2 = M$.
Ainsi, $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f \circ f) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et donc $f \circ f = f$. Ainsi, f est bien un projecteur.

Exercice 9. Soit $P \in \mathbb{C}_4[X]$. On a : $(f \circ f)(P) = f(P(1-X)) = P(1-(1-X)) = P(X)$. Ainsi, $f \circ f = Id_{\mathbb{C}_4[X]}$.
Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{C}_4[X]$ et $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
On a $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f \circ f) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(Id) = I_5$.
Or, $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f \circ f) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = A^2$. Ainsi, $A^2 = I_5$ donc A est inversible et $A^{-1} = A$.
Or, $f(1) = 1$,
$f(X) = 1 - X$,
$f(X^2) = (1-X)^2 = 1 - 2X + X^2$,
$f(X^3) = (1-X)^3 = 1 - 3X + 3X^2 - X^3$
et $f(X^4) = (1-X)^4 = 1 - 4X + 6X^2 - 4X^3 + X^4$.
Ainsi,

$$A = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 10. 1. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned}
A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad &\iff \quad \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}\,A = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$, ainsi $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Vect}\,((1,1,1))$.
Comme $(1,1,1) \neq 0$, $((1,1,1))$ est une base de $\mathrm{Ker}\,f$.
$\mathrm{Im}A = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}\right)$ car $\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$.
Donc $\mathrm{Im}f = \mathrm{Vect}\,((2,-1,-1),(-1,2,-1))$.

2. Posons $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (2,-1,-1)$, $e_3 = (-1,2,-1)$.
Comme $e_1 \neq 0$, (e_1) est une base de $\mathrm{Ker}\,f$. Comme e_2 et e_3 ne sont pas colinéaires, (e_2,e_3) est une base de $\mathrm{Im}f$.
Soit $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3 = 0$.
Or,

$$\begin{aligned}
\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3 = 0 \quad &\iff \quad \begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3 = 0\\ \lambda_1-\lambda_2+2\lambda_3=0\\ \lambda_1-\lambda_2-\lambda_3=0\end{cases}\\
&\iff \quad \begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3 = 0 & \\ -3\lambda_2+3\lambda_3=0 & L_2\leftarrow L_2-L_1\\ -3\lambda_2=0 & L_3 \leftarrow L_3-L_1\end{cases}\\
&\iff \quad \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0
\end{aligned}$$

Donc (e_1,e_2,e_3) est libre. Comme $\mathrm{Card}\,(e_1,e_2,e_3) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.
Ainsi, (e_1,e_2,e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Donc $\mathrm{Vect}\,(e_1)\oplus\mathrm{Vect}\,(e_2,e_3) = \mathbb{R}^3$.
Ainsi : $\mathrm{Ker}\,f\oplus\mathrm{Im}f = \mathbb{R}^3$.
De plus, $\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ réunion d'une base de $\ker f$ et d'une base de $\mathrm{Im}f$.
On a $f(e_1) = 0$ car $e_1 \in \mathrm{Ker}\,f$.
De plus, $A\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-3\\-3\end{pmatrix}$ donc $f(e_2) = (6,-3,-3) = 3e_2$.
De même, $A\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$ donc $f(e_3) = (-3,6,-3) = 3e_3$.
D'où :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

Ainsi, on a : $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = 3I_3\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.
Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.
Alors, $f = (3Id_{\mathbb{R}^3})\circ g$.
De plus, g est l'unique application linéaire telle que $g(e_1) = 0$, $g(e_2) = e_2$ et $g(e_3) = e_3$. Donc g est la projection sur $\mathrm{Vect}\,(e_2,e_3) = \mathrm{Im}f$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\,(e_1) = \ker f$.
Donc f est la composée de l'homothétie de rapport 3 et de la projection sur $\mathrm{Im}f$ parallèlement à $\ker f$.

Exercice 11. 1. Par calcul, on a $A^2 = 0$ donc $f^2 = 0$.
Ainsi, $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}\,(f)$.
En effet : soit $y \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
On a alors : $f(y) = f^2(x) = 0$ donc $y \in \mathrm{Ker}\,(f)$.

2. D'après la question précédente, $\mathrm{Im}f \subset \mathrm{Ker}\,f$, on a $\mathrm{rg}\,(f) \leq \dim(\mathrm{Ker}\,f)$. Ainsi , $2\mathrm{rg}\,(f) \leq \mathrm{rg}\,(f) + \dim(\mathrm{Ker}\,f)$.
Or, d'après le théorème du rang, on a :$\dim(\mathrm{Ker}\,f) + \mathrm{rg}\,(f) = \dim\mathbb{R}^3 = 3$.
Ainsi, $2\mathrm{rg}\,(f) \leq 3$ donc $\mathrm{rg}\,(f) \leq \dfrac{3}{2}$.
Or, $\mathrm{rg}\,(f) \in \mathbb{N}$. Ainsi,$\mathrm{rg}\,(f) \in \{0,1\}$.
Or, $\mathrm{rg}\,(f) = 0$ ssi $\mathrm{Im}f = \{0\}$ ssi $f = 0$.
Comme A n'est pas la matrice nulle, f n'est pas l'application nulle donc $\mathrm{rg}\,f = 1$. Le théorème du rang nous donne alors $\dim(\mathrm{Ker}\,f) = 2$.
La première colonne de A est $\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$. Comme cette colonne est non nul, elle forme une base de $\mathrm{Im}A$.

Ainsi, $(3e_1 + 2e_2 - e_3)$ forme une base de $\mathrm{Im} f$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} AX = 0 \quad &\iff \quad \begin{cases} 3x - 3y + 6z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \end{cases} \\ &\iff \quad x - y + 2z = 0 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\, A &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K}) \mid x - y + 2z = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} y - 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K}\} \mid y, z \in \mathbb{K} \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Or, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires. Ainsi, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ forme une base de $\ker A$.
Ainsi, $(e_1 + e_2, -2e_1 + e_3)$ forme une base de $\mathrm{Ker}\, f$.

3. On cherche une base (u_1, u_2, u_3) telle que $f(u_1) = u_2$, $f(u_2) = f(u_3) = 0$.
Il faut donc que $u_2 \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Im}(f)$ car $\mathrm{Im}(f) \subset \ker f$.
Posons $u_2 = 3e_1 + 2e_2 - e_3$.
On cherche u_1 tel que $f(u_1) = u_2$. On pose $u_1 = e_1$ (vu la première colonne de A).
On cherche également $u_3 \in \ker f$.
De plus, (u_1, u_2, u_3) doit former une base de $\mathbb{R}^3$.
On choisit donc pour u_3 un vecteur de $\ker f$ non colinéaire à u_2.
Posons $u_3 = e_1 + e_2$.
Vérifions que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.
Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$.
On a $\lambda_1 e_1 + \lambda_2(3e_1 + 2e_2 - e_3) + \lambda_3(e_1 + e_2) = 0$.
Ainsi : $(\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3)e_1 + (2\lambda_2 + \lambda_3)e_2 - \lambda_2 e_3 = 0$.
Or, (e_1, e_2, e_3) est libre.
Ainsi : $\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$.
Ainsi : $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$.
Ainsi, la famille $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ est libre et composée de 3 vecteurs. Or, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. Ainsi, cette famille est est une base de $\mathbb{R}^3$.
De plus, dans cette base, on a : $f(u_1) = u_2$, $f(u_2) = 0$, $f(u_3) = 0$.
Ainsi, $\mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 12. 1. Notons B_c la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

On a $\mathrm{mat}_{B_c}((u - id_E) \circ v) = (A - I_n)B = (A - I_n) \sum_{j=0}^{k-1} A^j = A^k - I_n^k = 0$ (puisque A et I_n commutent).

Ainsi $(u - id_E) \circ v = 0$.
On montre de même que $v \circ (u - id_E) = 0$.

- Montrons que $\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Ker}\,(u - id_E)$.
  Montrons tout d'abord que $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}\,(u - id_E)$.
  Soit $y \in \mathrm{Im}(v)$, il existe $x \in E$ tel que $y = v(x)$.

On a alors : $(u - id_E)(y) = (u - id_E) \circ v(x) = 0$.
Donc $y \in \mathrm{Ker}\,(u - id_E)$.
Montrons désormais que $\mathrm{Ker}\,(u - id_E) \subset \mathrm{Im}(v)$.
On a : $B = \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} A^j$ donc $v = \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} u^j$.
Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(u - id_E)$, on a $u(x) = x$.
Ainsi $v(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} u^j(x) = \sum_{j=0}^{k-1} x = kx$.
Ainsi, donc $x = v(k^{-1}x) \in \mathrm{Im}(v)$.
Donc $\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Ker}\,(u - id_E)$.

- Montrons que $\mathrm{Im}(u - id_E) = \mathrm{Ker}\,(v)$.
Montrons tout d'abord que $\mathrm{Im}(u - id_E) \subset \mathrm{Ker}\,(v)$.
Soit $y \in \mathrm{Im}(u - id_E)$, il existe $x \in E$ tel que $y = (u - id_E)(x)$.
On a alors : $v(y) = v \circ (u - id_E)(x) = 0$.
Donc $y \in \mathrm{Ker}\,(v)$.
Montrons désormais que $\mathrm{Ker}\,(v) \subset \mathrm{Im}(u - id_E)$.
Par le théorème du rang, on a : $\mathrm{rg}\,(v) + \dim(\mathrm{Ker}\,(v)) = \mathrm{rg}\,(u - id_E) + \dim(\mathrm{Ker}\,(u - id_E)) = n$.
Or, on a prouvé que $\mathrm{rg}\,(v) = \dim(\mathrm{Ker}\,(u - id_E))$, on déduit $\mathrm{rg}\,(u - id_E) = \dim(\mathrm{Ker}\,(v))$.
De plus, on avait $\mathrm{Im}(u - id_E) \subset \mathrm{Ker}\,(v)$ donc $\mathrm{Im}(u - id_E) = \mathrm{Ker}\,(v)$.

Montrons désormais que $\mathrm{Ker}\,v$ et $\mathrm{Im}v$ sont supplémentaires.
Tout d'abord, le théorème du rang donne $\dim(\mathrm{Ker}\,(v)) + \mathrm{rg}\,(v) = n$, donc pour montrer que $\mathrm{Im}(v)$ et $\mathrm{Ker}\,(v)$ sont supplémentaires, il suffit de montrer que leur intersection est réduit au singleton $\{0\}$.
Soit $x \in \mathrm{Im}(v) \cap \mathrm{Ker}\,(v)$.
On a alors $x \in \mathrm{Im}(v) = \mathrm{Ker}\,(u - id_E)$, donc $u(x) = x$.
On a alors $v(x) = kx$ (démonstration au dessus).
Or $x \in \mathrm{Ker}\,(v)$, donc $x = 0$ car $k \neq 0$.
Ainsi, $\mathrm{Im}(v) \cap \mathrm{Ker}\,(v) = \{0\}$.
Donc $\mathrm{Im}v$ et $\mathrm{Ker}\,v$ sont supplémentaires.

2. Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\mathrm{Im}(v)$ et $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base de $\mathrm{Ker}\,(v)$. D'après la question précédente, $(e_1, ..., e_n)$ forme une base $\mathcal{C}$ de E.
Soit $j \in [\![r+1, n]\!]$, comme $e_j \in \mathrm{Ker}\,v$, on a $v(e_j) = 0$.
Soit $j \in [\![1, r]\!]$, comme $e_j \in \mathrm{Im}(v) = \mathrm{Ker}\,(u - id_E)$ et comme vu plus haut $v(e_j) = k(e_j)$. Ainsi :

$$\mathrm{mat}_C(v) = \begin{pmatrix} kI_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La somme des coefficients diagonaux de cette matrice est kr, où $r = \dim(\mathrm{Im}(v)) = \mathrm{rg}\,(v) = \mathrm{rg}\,(B)$.

Exercice 13. 1. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, soient $\lambda_\mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} u(\lambda P + \mu Q) &= ((\lambda P + \mu Q)(0), (\lambda P + \mu Q)(1), (\lambda P + \mu Q)(2)) \\ &= (\lambda P(0) + \mu Q(0), \lambda P(1) + \mu Q(1), \lambda P(2) + \mu Q(2)) \\ &= \lambda(P(0), P(1), P(2)) + \mu(Q(0), Q(1), Q(2)) \\ &= \lambda u(P) + \mu u(Q) \end{aligned}$$

Ainsi, u est linéaire.
De plus, on a :

$$A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Montrons que A est inversible.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Ainsi, $A \underset{L}{\sim} I_n$. On peut donc conclure que cette matrice est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{3}{2} & 2 & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -1 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ainsi, u est un isomorphisme et $\mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u^{-1}) = A^{-1}$.

2. On connait u^{-1} par le biais d'une représentation matricielle.
Soit $x = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On a : $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u^{-1}(x)) = A^{-1}\mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(x)$. Ainsi,

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u^{-1}(x)) = A^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -\dfrac{3}{2}a + 2b - \dfrac{1}{2}c \\ \dfrac{1}{2}a - b + \dfrac{1}{2}c \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\begin{array}{cccl} u^{-1} : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ & (a,b,c) & \mapsto & a + \left(-\dfrac{3}{2}a + 2b - \dfrac{1}{2}c\right)X + \left(\dfrac{1}{2}a - b + \dfrac{1}{2}c\right)X^2 \end{array}$

Exercice 14. 1.

- Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
$\deg(P) = \deg(P(X+1)) = \deg(P) \le n$ donc $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
- Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$.
$$f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(X+1) = \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1) = \lambda f(P) + \mu f(Q).$$
Donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
- Soit $j \in [\![1, n+1]\!]$,
$$f(X^{j-1}) = (X+1)^{j-1} = \sum_{l=0}^{j-1}\binom{j-1}{l}X^l = \sum_{i=1}^{j}\binom{j-1}{i-1}X^{i-1}.$$
Donc $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = (m_{i,j})$ avec :
$$\forall i, j \in [\![1, n+1]\!],\ m_{i,j} = \begin{cases} \dbinom{j-1}{i-1} & \text{si } i \le j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
Ainsi, $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$.

2.

- Posons $\begin{array}{cccc} g : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & P & \mapsto & P(X-1) \end{array}$ alors $g \circ f = f \circ g = Id_{\mathbb{R}_n[X]}$.
Donc f est bijective et $f^{-1} = g$.
Ainsi, A est inversible et $A^{-1} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(g)$.

- Soit $j \in [\![1, n+1]\!]$,
$$g(X^{j-1}) = (X-1)^{j-1} = \sum_{l=0}^{j-1} \binom{j-1}{l} (-1)^{j-1-l} X^l = \sum_{i=1}^{j} \binom{j-1}{i-1} (-1)^{j-i} X^{i-1}.$$
Ainsi, $A^{-1} = (b_{i,j})$ avec :
$$\forall i, j \in [\![1, n+1]\!],\ m_{i,j} = \begin{cases} \binom{j-1}{i-1}(-1)^{j-i} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
Ainsi, $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$.

2 Changement de base

Exercice 15. Pour déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$, il nous faut calculer les coordonnées de chaque vecteurs de $\mathcal{B}_2$ dans la base $\mathcal{B}_1$.
Soit a, b, $c \in \mathbb{R}$.
$$\begin{aligned} & a(1,2,1) + b(2,3,3) + c(3,7,1) = (3,1,4) \\ \iff & \begin{cases} a + 2b + 3c = 3 \\ 2a + 3b + 7c = 1 \\ a + 3b + c = 4 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} a + 2b + 3c = 3 \\ -b + c = -5 \\ b - 2c = 1 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} a + 2b + 3c = 3 \\ b - 2c = 1 \\ -c = -4 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} a = -27 \\ b = 9 \\ c = 4 \end{cases} \end{aligned}$$
Ainsi, $(3,1,4) = -27(1,2,1) + 9(2,3,3) + 4(3,7,1)$.
On procède de même pour les autres vecteurs de $\mathcal{B}_2$ et on trouve : $(5,3,2) = -59(1,2,1) + 17(2,3,3) + 10(3,7,1)$ et $(1,-1,7) = 10(1,2,1) - 3(3,7,1)$.
Notons P la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$. On obtient finalement :
$$P = \begin{pmatrix} -27 & -59 & 10 \\ 9 & 17 & 0 \\ 4 & 10 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 16. 1. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1(1,0,0,0) + \lambda_2(1,1,0,0) + \lambda_3(1,1,1,0) + \lambda_4(1,1,1,1) = 0$.
On a alors : $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases}$ puis $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.
Ainsi, $\mathcal{B}'$ est une famille libre de $\mathbb{R}^4$.
Or, elle se compose de 4 vecteurs et $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$ donc $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

2. Posons $X = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $X' = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(x)$, P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et Q la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.
On a $X = PX'$.
Ainsi, $X' = (P)^{-1} X$.
Or, $(P)^{-1} = Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

car $(0,1,0,0) = -(1,0,0,0) + (1,1,0,0)$
$(0,0,1,0) = -(1,1,0,0) + (1,1,1,0)$
et $(0,0,0,1) = -(1,1,1,0) + (1,1,1,1)$.
Finalement,

$$X' = QX = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 17. Notons $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\}$.
On a alors :

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,x+y) \mid x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,0,1) + y(0,1,1) \mid x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{Vect}(f_1, f_2) \end{aligned}$$

où $f_1 = (1,0,1)$ et $f_2 = (0,1,1)$.
Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Ainsi, la famille (f_1, f_2) est libre donc (f_1, f_2) forme une base de F.
Notons $G = \operatorname{Vect}((1,1,1))$, $f_3 = (1,1,1)$ et p la projection sur F parallèlement à G.
Comme p est la projection sur F parallèlement à G, on a $F \oplus G = E$ Ainsi, (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ que l'on note $\mathcal{B}'$.
Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On a $p(f_1) = f_1$, $p(f_2) = f_2$ et $p(f_3) = 0$. Ainsi, on a :

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}'}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De plus, notons P la matrice de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On a :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Par la formule de changement de base, on a $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}'}(p) = P^{-1}\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(p)P$ donc $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(p) = P\operatorname{mat}_{\mathcal{B}'}(p)P^{-1}$.
Après calcul, on obtient :

$$Mat_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour vérifier la calcul, on sait que $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Notons $A = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(p)$. On calcule $A\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Ainsi, $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(p(f_1)) = A\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f_1) = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f_1)$ donc $p(f_1) = f_1$ (cohérent avec le fait que p est un projecteur sur F parallèlement à G). On vérifie de même par le produit matriciel que l'on retrouve le fait que $p(f_2) = f_2$ et $p(f_3) = 0$.

Exercice 18.

1. Cette famille est une famille de polynômes non nuls de $\mathbb{R}_3[X]$ de degrés échelonnées. Elle forme donc une famille libre. De plus elle est composée de 4 vecteurs et $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4$. Ainsi, Elle forme donc une base de $\mathbb{R}_3[X]$
2. Notons P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On a $\mathcal{B}' = (1, X, -X + X^2, 2X - 3X^2 + X^3)$. Ainsi,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Notons Q la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.
Méthode 1 : On sait que $Q = P^{-1}$. Ainsi, il nous suffit par exemple de calculer l'inverse de la matrice précédente en utilisant la méthode de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Donc $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \end{pmatrix}$.

Méthode 2 : Déterminons les coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}'$. On a :
$1 = 1$, $X = X$, $X^2 = X^2 - X + X = X(X-1) + X$,
$X^3 = X^3 - 3X^2 + 2X + 3(X^2 - X) + X = X(X-1)(X-2) - 3X(X-1) - 5X$.
On obtient ainsi :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. $u(1) = 0$, $u(X) = 1$, $u(X^2) = 2X$, $u(X^3) = 3X^2$.
Ainsi, on obtient :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminons désormais $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(u)$.
Méthode 1 : Notons $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)$, $A' = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(u)$. Par la formule de changement de base, on a : $A' = QAP$.
Après calcul, on obtient :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Méthode 2 :
On a $u(1) = 0$,
$u(X) = 1$,
$u(X(X-1)) = u(X^2 - X) = 2X - 1$,
$u(X(X-1)(X-2)) = u(X^3 - 3X^2 + 2X) = 3X^2 - 6X + 2 = 3X(X-1) + 3X - 6X + 2 = 3X(X-1) - 3X + 2$.
On obtient ainsi :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 19. 1. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} & \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 \\ \iff & \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_3 = 0 \end{array}\right. \\ \iff & \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Ainsi, la famille (v_1, v_2, v_3) est libre et composée de 3 vecteurs. Or, $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$. Ainsi (v_1, v_2, v_3) forme une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Par définition de la symétrie, $s(v_1) = v_1$, $s(v_2) = v_2$ et $s(v_3) = -v_3$. Donc

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Pour déterminer la matrice de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on va utiliser la formule de changement de base.
Notons $\mathcal{B}_c$ la base canonique de s.
Notons P la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$.
On a : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. On a alors : $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(s) = P^{-1}\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_c}(s)P$ donc $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_c}(s) = P\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(s)P^{-1}$.
Calculons P^{-1} :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$
$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

On obtient ainsi :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Puis,

$$\begin{aligned} \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_c}(s) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On sait que $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_c}(s(u)) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_c}(s)\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_c}(u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y - \frac{2}{3}z \\ -\frac{4}{3}z \\ -z \end{pmatrix}$.
Finalement, on obtient :

$$s : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & \left(x - y - \dfrac{2}{3}z, -\dfrac{4}{3}z, -z\right) \end{array}$$

Exercice 20. 1. $\mathcal{B}$ est une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ avec $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$. Il nous suffit donc de prouver que cette famille est libre. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$. On a alors : $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$ puis $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_3 = 0 \end{cases}$ et enfin $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$. Ainsi, cette famille est libre. Elle constitue donc une base de $\mathbb{R}^3$.

2. On a $u(1, 0, 0) = (10, -6, -2)$, $u(0, 1, 0) = (-1, 9, -1)$ et $u(0, 0, 1) = (-1, -3, 11)$.
Ainsi, $A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & -1 \\ -6 & 9 & -3 \\ -2 & -1 & 11 \end{pmatrix}$.

3. On va utiliser la formule de changement de base. Notons P la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$. On a :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

On sait alors que $B = P^{-1}AP$. Par la méthode de Gauss Jordan, on peut inverser P :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & -1/6 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

On obtient ainsi :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 & 1/6 \\ 2/3 & -1/6 & -1/6 \\ -1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme B est diagonale, on a $B^n = \begin{pmatrix} 6^n & 0 & 0 \\ 0 & 12^n & 0 \\ 0 & 0 & 12^n \end{pmatrix}$ et par récurrence $A^n = PB^nP^{-1}$.

   Ainsi, après calcul, on obtient :

$$A^n = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} (2.6^n + 4.12^n) & (6^n - 12^n) & (6^n - 12^n) \\ 6(6^n - 12^n) & 3(6^n + 12^n) & 3(6^n - 12^n) \\ 2(6^n - 12^n) & (6^n - 12^n) & (6^n + 5.12^n) \end{pmatrix}$$

Exercice 21. Notons $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ les bases canoniques de $\mathbb{K}^2$ et $\mathbb{K}^3$.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$, on a $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}_2}(u(x)) = A \times \operatorname{mat}_{\mathcal{B}_3}(x) = A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ 2x - y + 2z \end{pmatrix}$.

Ainsi, l'application linéaire canoniquement associée à A est définie par :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^3 & \to & \mathbb{K}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x - y, 2x - y + 2z) \end{array}$$

Exercice 22.

1. (a) Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x + 6y \\ -20x - 10x \\ -6x - 3y - z \end{pmatrix}$$

   Ainsi, $f(x, y, z) = (12x + 6y, -20x - 10y, -6x - 3y - z)$.

   (b) • Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$.

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{l} 12x + 6y = 0 \\ -20x - 10y = 0 \\ -6x - 3y - z = 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 0 \\ 2x + y = 0 \\ 6x + 3y + z = 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} y = -2x \\ z = 0 \end{array} \right.$$

Ainsi, $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$, ainsi, $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((1,-2,0))$.
Comme, $(1,-2,0) \neq (0,0,0)$, $((1,-2,0))$ constitue une base de $\operatorname{Ker} f$.

- $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}12\\-20\\-6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\-10\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}6\\-10\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ car $\begin{pmatrix}12\\-20\\-6\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}6\\-10\\-2\end{pmatrix}$.
Donc $\operatorname{Im} f = ((6,-10,-3),(0,0,1))$.
Comme $(6,-10,-3)$ et $(0,0,1)$ ne sont pas colinéaires, $((6,-10,-3),(0,0,1))$ forme une base de $\operatorname{Im} f$.

(c) $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$ donc f n'est pas injective donc n'est pas bijective.
Ainsi, A n'est pas inversible.

2. (a) Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \begin{cases} \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \\
\Longleftrightarrow\ & \begin{cases} \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \\
\Longleftrightarrow\ & \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, cette famille est libre. $\mathcal{C}$ est donc une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Elle forme donc une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) On a $P = \begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\-2 & 5 & 0\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.
On sait également que $Q = P^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ainsi,

$$Q = \begin{pmatrix}-5 & -3 & 0\\-2 & -1 & 0\\2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

(c) **Méthode 1 :**
On a : $A\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ donc $f(e_1) = 0$.
$A\begin{pmatrix}-3\\5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\10\\2\end{pmatrix}$ donc $f(e_1) = 2e_2$.
$A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$ donc $f(e_3) = -e_3$.
Donc :

$$D = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Méthode 2 : D'après la formule de changement de base, on a :

$$\begin{aligned}
D = QAP &= \begin{pmatrix} -5 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 12 & 6 & 0 \\ -20 & -10 & 0 \\ -6 & -3 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -5 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(d) D'après la formule de changement de base, on a : $A = PDP^{-1}$.
Montrons par récurrence que :$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
Initialisation : $D = P^{-1}AP$ donc $A = PDP^{-1}$ et la propriété est vraie pour $n = 1$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $A^n = PD^nP^{-1}$.
On a :

$$A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

(e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme D est diagonale, $D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$.

Donc

$$\begin{aligned}
A^n &= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2.2^n & -2^n & 0 \\ 2.(-1)^n & (-1)^n & (-1)^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6.2^n & 3.2^n & 0 \\ -5.2^{n+1} & -5.2^n & 0 \\ -2^{n+1} + 2.(-1)^n & -2^n + (-1)^n & (-1)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(f) Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$. On a :

$$A^n \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \times 2^n x + 3 \times 2^n y \\ -5 \times 2^{n+1}x - 5 \times 2^n y \\ (-2^{n+1} + 2 \times (-1)^n)x + (-2^n + (-1)^n)y + (-1)^n z \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f^n(x,y,z) = \left(6.2^n x + 3.2^n y, -5.2^{n+1}x - 5.2^n y, (-2^{n+1} + 2.(-1)^n)x + (-2^n + (-1)^n)y + (-1)^n z\right).$$

Exercice 23. 1. • Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
AX - X = 0 &\iff \left\{ \begin{array}{l} -x + 2y - z = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} z = x \\ y = x \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}\,(A - I_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.
Ainsi, $\mathrm{Ker}\,(u - id_E) = \mathrm{Vect}\,((1,1,1))$.
De plus, $(1,1,1) \neq (0,0,0)$.
Ainsi, $((1,1,1))$ est une famille libre donc forme une base de $\mathrm{Ker}\,(u - id_E)$.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} AX - 2X = 0 \quad &\iff \quad \begin{cases} -2x + 2y - z = 0 \\ 3x - 4y = 0 \\ -2x + 2y - z = 0 \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} x = \dfrac{4}{3}y \\ z = -\dfrac{2}{3}y \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, $\operatorname{Ker}(A - 2I_3) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{4}{3}y \\ y \\ -\frac{2}{3}y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$.
Ainsi, $\operatorname{Ker}(u - 2id_E) = \operatorname{Vect}((4, 3, -2))$.
De plus, $(4, 3, -2) \neq (0, 0, 0)$.
Ainsi, $((4, 3, -2))$ est une famille libre donc forme une base de $\operatorname{Ker}(u - 2id_E)$.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} AX + 4X = 0 \quad &\iff \quad \begin{cases} 4x + 2y - z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \\ -2x + 2y + 5z = 0 \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} x = -\dfrac{2}{3}y \\ z = -\dfrac{2}{3}y \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, $\operatorname{Ker}(A + 4I_3) = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}y \\ y \\ -\frac{2}{3}y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.
Ainsi, $\operatorname{Ker}(u + 4id_E) = \operatorname{Vect}((2, -3, 2))$.
De plus, $(2, -3, 2) \neq (0, 0, 0)$.
Ainsi, $((2, -3, 2))$ est une famille libre donc forme une base de $\operatorname{Ker}(u + 4id_E)$.

2. Comme $e_1 \in \operatorname{Ker}(u - id_E) \setminus \{0\}$, il existe $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $e_1 = (x, x, x)$.
De même, comme $e_2 \in \operatorname{Ker}(u - 2id_E) \setminus \{0\}$, il existe $y \in \mathbb{R}^*$ tel que $e_2 = (4y, 3y, -2y)$.
Enfin, comme $e_3 \in \operatorname{Ker}(u + 4id_E) \setminus \{0\}$, il existe $z \in \mathbb{R}^*$ tel que $e_3 = (2z, -3z, 2z)$.
Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$. On a :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \lambda_1 x + 4\lambda_2 y + 2\lambda_3 z = 0 \\ \lambda_1 x + 3\lambda_2 y - 3\lambda_3 z = 0 \\ \lambda_1 x - 2\lambda_2 y + 2\lambda_3 z = 0 \end{cases} \quad &\iff \quad \begin{cases} \lambda_1 x + 4\lambda_2 y + 2\lambda_3 z = 0 \\ -\lambda_2 y - 5\lambda_3 z = 0 \\ -6\lambda_2 y = 0 \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} \lambda_1 x + 4\lambda_2 y + 2\lambda_3 z = 0 \\ -\lambda_2 y - 5\lambda_3 z = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{car } y \neq 0 \\ &\iff \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{car } y \neq 0 \text{ et } x \neq 0 \end{aligned}$$

Ainsi la famille (e_1, e_2, e_3) est libre. De plus, elle est composée de 3 vecteurs et $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.
Ainsi, (e_1, e_2, e_3) forme une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Comme $u(e_1) = e_1$, $u(e_2) = 2e_2$ et $u(e_3) = -4e_3$, on a $D = \operatorname{mat}_C(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

Notons P la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{C}$.

On a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Par la formule du changement de base, on a : $A = PDP^{-1}$.
On montre alors par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$.

Exercice 24. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} f(x) = \lambda x \quad & \iff \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = \lambda x_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = \lambda x_2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda x_3 \end{cases} \\ & \iff \quad \begin{cases} (2-\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (2-\lambda)x_3 = 0 \end{cases} \\ & \iff \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + (2-\lambda)x_3 = 0 \\ x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 = 0 \\ (2-\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \\ & \iff \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + (2-\lambda)x_3 = 0 \\ (1-\lambda)x_1 - (1-\lambda)x_2 = 0 \\ -(1-\lambda)x_2 + (1-(2-\lambda)^2)x_3 = 0 \end{cases} \\ & \iff \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + (2-\lambda)x_3 = 0 \\ (1-\lambda)x_1 - (1-\lambda)x_2 = 0 \\ -(1-\lambda)x_2 + (1-\lambda)(\lambda-3)x_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Si $\lambda = 1$

$$f(x) = \lambda x \quad \iff \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Ainsi, $\mathcal{S}$ admet une infinité de solutions (2 inconnues paramètres) donc en admet au moins une non nulle.
Si $\lambda \neq 1$

$$\begin{aligned} f(x) = \lambda x \quad & \iff \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + (2-\lambda)x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + (\lambda-3)x_3 = 0 \end{cases} \\ & \iff \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + (2-\lambda)x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ (\lambda-4)x_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Si $\lambda \notin \{1, 4\}$

$$\begin{aligned} f(x) = \lambda x \quad & \iff \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + (2-\lambda)x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \\ & \iff \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, la seule solution est la solution nulle.
Si $\lambda = 4$

$$f(x) = \lambda x \quad \iff \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $f(x) = \lambda x$ admet une infinité des solutions (1 inconnue paramètre) donc en admet au moins une non nulle.
Finalement, il existe $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tel que $f(x) = \lambda x$ ssi $\lambda \in \{1, 4\}$.
Notons $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = x\}$ et $E_4 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 4x\}$.
E_1 et E_4 sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Déterminons des bases de E_1 et E_4.

Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} x \in E_1 &\iff f(x) = x \\ &\iff x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{aligned}$$

par les calculs précédents.
Ainsi,

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2, -x_1 - x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2) \end{aligned}$$

où $e_1 = (1, 0, -1)$ et $e_2 = (0, 1, -1)$.
Or, e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires donc (e_1, e_2) est libre donc forme une base de E_1.
De même,

$$\begin{aligned} x \in E_4 &\iff f(x) = 4x \\ &\iff \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

par les calculs précédents.
Ainsi,

$$\begin{aligned} E_4 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, x_2 - x_3 = 0\} \\ &= \{(x_3, x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}\,(e_3) \end{aligned}$$

où $e_3 = (1, 1, 1)$.
De plus, $e_3 \neq 0$ donc (e_3) forme une base de E_4.
Montrons que (e_1, e_2, e_3) forme une base de $\mathbb{R}^3$.
Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$. On a :

$$\begin{aligned} \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0 &\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \\ &\iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ (e_1, e_2, e_3) est libre. Elle forme donc une base de $\mathbb{R}^3$. Notons $\mathcal{B}'$ cette base.
On sait alors que $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = e_2$ et $f(e_3) = 4e_3$. Ainsi,

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Notons $D = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(f)$. Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

De plus, par la formule de changement de base, on a $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)P$. Or, $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $D = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ d'où $A = PDP^{-1}$.

Calculons P^{-1} :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$
$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

On obtient ainsi :

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $A = PDP^{-1}$.
Ainsi, par récurrence, on obtient que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$. De plus, comme D est diagonale, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 4^n & 4^n & 4^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3 Rang d'une matrice

Exercice 25. Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A \quad &\Longleftrightarrow \quad A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -7y + 3z = 0 \\ -7y + 3z = 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = -2y + z \\ y = \frac{3}{7}z \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{7}z \\ y = \frac{3}{7}z \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker} A &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0_{3,1} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{7}z \\ \frac{3}{7}z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Comme $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\ker A$ donc $\operatorname{Ker} A$ est de dimension 1.

D'après le théorème du rang, $\operatorname{rg}(A) = 2$, et comme $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $C_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, donc (C_1, C_2) forme une famille libre et donc une base de $\mathrm{Im}A$.

Exercice 26. Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 2 & a & 2 & 3 \end{pmatrix} &\underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a+1 & 1 \\ 2 & a-2 & 4 & 1 \end{pmatrix} && \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + C1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - C_1 \end{array} \\
&\underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a+1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & a-2 \end{pmatrix} && C_1 \leftrightarrow C_4 \\
&\underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3-a & a-3 \end{pmatrix} && \begin{array}{l} C_3 \leftarrow C_3 - (a+1)C_2 \\ C_4 \leftarrow C_4 - C_2 \end{array} \\
&\underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3-a & 0 \end{pmatrix} && C_4 \leftarrow C_4 + C_3
\end{aligned}$$

- Si $a \neq 3$, $\operatorname{rg}(A) = 3$.
- Si $a = 3$, $\operatorname{rg}(A) = 3$.

Exercice 27.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} &\underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} && C_2 \leftrightarrow C_1 \\
&\underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix} && \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + C_1 \end{array} \\
&\underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} && C_3 \leftrightarrow C_2 \\
&\underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} && C_2 \leftarrow \tfrac{1}{3}C_2 \\
&\underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} && C_3 \leftarrow C_3 - 3C_2
\end{aligned}$$

Ainsi, $\operatorname{rg}(A) = 3$.

$$
\begin{aligned}
B \quad &\underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{matrix} \\
&\underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \ C_3 \leftrightarrow C_2 \\
&\underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \ C_2 \leftarrow -C_2 \\
&\underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \ C_3 \leftarrow C_3 + 2C_2
\end{aligned}
$$

Ainsi, $\mathrm{rg}\,(B) = 2$.

Exercice 28. *(D'après CCP option PC)*
Si $n \leq 2$, c'est direct.
Supposons $n \geq 3$. Notons $C_1, ..., C_n$ les colonnes de A.
Soit $j \in [\![1, n]\!]$. On a :

$$
C_j = \begin{pmatrix} \sin(1+j) \\ \sin(2+j) \\ \vdots \\ \sin(n+j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(j)\sin(1) + \sin(j)\cos(1) \\ \cos(j)\sin(2) + \sin(j)\cos(2) \\ \vdots \\ \cos(j)\sin(n) + \sin(j)\cos(n) \end{pmatrix}
$$

Notons $X = \begin{pmatrix} \cos(1) \\ \vdots \\ \cos(n) \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} \sin(1) \\ \vdots \\ \sin(n) \end{pmatrix}$. On a alors $C_j = \cos(j)X + \sin(j)Y$.
Ainsi : $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $C_j \in \mathrm{Vect}\,(X, Y)$.
Ainsi, $\mathrm{Vect}\,(C_1, ..., C_n) \subset \mathrm{Vect}\,(X, Y)$ et donc $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(C_1, ..., C_n) \leq \mathrm{rg}\,(X, Y) \leq 2$.

Exercice 29.
On a :

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & \cdots & a \\ a & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & \cdots & a & 1 \end{pmatrix}.
$$

Ainsi, en effectuant les opérations élémentaires $C_i \leftarrow C_i - C_n$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, on obtient :

$$
A \quad \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1-a & 0 & \cdots & 0 & a \\ 0 & 1-a & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1-a & a \\ a-1 & a-1 & \cdots & a-1 & 1 \end{pmatrix}
$$

Si $a = 1$

$$
A \quad \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

donc $\mathrm{rg}\,(A) = 1$.

Si $a \neq 1$ En effectuant $C_i \leftarrow \dfrac{1}{1-a} C_i$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, on obtient :

$$A \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Puis, en effectuant $C_n \leftarrow C_n - a \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} C_i$, on obtient :

$$A \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 1+(n-1)a \end{pmatrix}$$

Ainsi,

- Si $a = \dfrac{-1}{n-1}$, $\mathrm{rg}\,(A) = n-1$.
- Si $a \notin \{\dfrac{-1}{n-1}, 1\}$, $\mathrm{rg}\,(A) = n$.

Exercice 30. Notons $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
On a : $u(1) = 1$, $u(X) = X + 1$, $u(X^2) = (X+1)^2 = X^2 + 2X + 1$, $u(X^3) = (X+1)^3 = X^3 + 3X^2 + 3X + 1$.
Ainsi,

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De même, $v(1) = 1$, $v(X) = X - 1$, $v(X^2) = (X-1)^2 = X^2 - 2X + 1$, $v(X^3) = (X+1)^3 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$.
Donc :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u + \lambda v) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) + \lambda \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1-\lambda & 1+\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 1+\lambda & 2-2\lambda & 3+3\lambda \\ 0 & 0 & 1+\lambda & 3-3\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1+\lambda \end{pmatrix}$$

Ainsi :

- Si $\lambda \neq -1$, $\mathrm{rg}\,(A) = 4$.
- Si $\lambda = -1$, on a :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u + \lambda v) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  et $\mathrm{rg}\,(A) = 3$.

Exercice 31. 1. Raisonnons par double implication.

- Supposons qu'il existe $P \in GL_p(\mathbb{K})$, $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ tels que $A = QJ_rP$. Alors :

$$rg(A) = rg(Q^{-1}J_rP) = rg(Q^{-1}J_r) = rg(J_r) = r.$$

  . En effet, si on note $C_1, \ldots, C_p$ les colonnes de J_r, on a :

$$rg(J_r) = \dim Vect(C_1, \ldots, C_p) = \dim Vect(C_1, \ldots, C_r) = r.$$

  car $(C_1, ..., C_r)$ est libre.

- Supposons que $rg(A) = r$. Alors le nombre de pivot dans l'unique matrice R échelonnée réduite par lignes équivalente par ligne à A est égal à r. Notons $R = (b_{i,j})$. On a :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & & 0 & \\ 0 & & 1 & \cdots & & \\ & & 0 & & 0 & \\ & & & & 1 & \cdots \\ & & & & 0 & 0 \\ 0 & & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $A \underset{L}{\sim} R$.

Par permutations des colonnes de R, on obtient la matrice :

$$R \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & & 0 & * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Puis en effectuant des opérations élémentaires, on élimine les coefficients des $p - r$ dernières colonnes à l'aide des r premières colonnes. On obtient :

$$R \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $R \sim_{\mathcal{C}} J_r$. Or, comme $A \underset{L}{\sim} R$, il existe $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ produit de matrices d'opérations élémentaires donc inversible tel que $A = QR$. De plus, $R \underset{C}{\sim} J_r$ donc il existe $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ produit de matrices d'opérations élémentaires donc inversible tel que $R = J_rP$.

On en déduit ainsi que $Q \in GL_n(\mathbb{K})$, $P \in GL_p(\mathbb{K})$ et $A = QR = QJ_rP$..

2. Notons $r = rg(A)$.
D'après la proposition précédente, il existe $P \in GL_p(\mathbb{K})$, $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ tels que $A = QJ_rP$.
En prenant la transposée, on obtient ${}^tA =^t P^tJ_r^tQ$.
Or ${}^tP \in GL_p(\mathbb{K})$, ${}^tQ \in GL_n(\mathbb{K})$ et ${}^tJ_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,n-r} \end{pmatrix}$.
Par la proposition précédente, on a donc $rg({}^tA) = rg({}^tJ_r) = r$.

Exercice 32. 1. Raisonnons par double implication.

- Supposons qu'il existe $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ tel que $M = X^tY$.
Notons $Y = \begin{pmatrix} y_1 & \ldots & y_n \end{pmatrix}$.
On a : $M = X^tY = (y_1X|\ldots|y_nX)$.
Ainsi, $\text{Im}(M) = \text{Vect}\,(y_1X, \ldots, y_nX) \subset \text{Vect}\,(X)$.
Donc $\text{rg}\,(M) \leq 1$.
De plus, $Y \neq 0$ donc il existe $y_k \neq 0$. Ainsi, $X = \dfrac{1}{y_k}y_kX$ donc $\text{Vect}\,(X) \subset \text{Vect}\,(y_1X|\ldots|y_nX)$.
D'où $\text{Vect}\,(X) = \text{Vect}\,(y_1X|\ldots|y_nX)$.
Donc $\text{rg}\,(M) = \dim\,(\text{Vect}\,(X)) = 1$ car $X \neq 0$.
- Supposons que $\text{rg}\,(M) = 1$.
Notons $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de M.
Alors, $\dim\,(\text{Vect}\,(C_1, \ldots, C_n)) = 1$.
Ainsi, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ tel que (X) soit une base $\text{Vect}\,(C_1, \ldots, C_n)$.
Donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $\alpha_i \in \mathbb{K}$ tel que $C_i = \alpha_iX$.
Ainsi, $M = (C_1|\ldots|C_n) = (\alpha_1X|\ldots|\alpha_nX)$.
Posons $Y = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$.
On obtient : $X^tY = (\alpha_1X|\ldots|\alpha_nX) = M$.

2. Supposons que $\mathrm{rg}\,(M) = 1$. D'après la question précédente, il existe $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $M = X^tY$.
   Soit $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} M^k &= (X^tY)^k \\ &= X({}^tYX)^{k-1}tY \end{aligned}$$

   On a ${}^tYX \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{K})$.
   On pose $\alpha = {}^tYX$.
   Alors :

$$\begin{aligned} M^k &= X\alpha^{k-1t}Y \\ &= \alpha^{k-1}X^tY \\ &= \alpha^{k-1}M \end{aligned}$$