Feuille d'exercices 21 : Intégration

1 Propriétés de l'intégrale

Exercice 1. Calculer : $\displaystyle\int_{-1}^{2} x|x|dx$ et $\displaystyle\int_{-1}^{1} x|x|dx$.

Exercice 2. Calculer : $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}dt$

Exercice 3. Calculer : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x^3}\frac{dt}{(\ln t)^2}$ $\qquad\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}\,dt$

Exercice 4. Soit $f\in\mathcal{C}^0([0,+\infty[)$ telle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell\in\mathbb{R}$. On définit $F:]0,+\infty[\to\mathbb{R}, x\mapsto \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$.
Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)=\ell$.

Exercice 5. Soit $f\in\mathcal{C}^0([a,b])$, montrer que : $\exists c\in[a,b],\ f(c)=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)dt$

Exercice 6.
1. Soient $a<b$, soit f continue sur $[a,b]$, soit g continue sur $[a,b]$ et positive.
   Montrer qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$.
2. Soit f continue au voisinage de 0.
   (a) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)dt$.
   (b) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t}dt$.

Exercice 7. Soient f et g deux fonctions continues sur $[0,1]$ telles que :

$$\forall x\in[0,1],\ f(x)=\int_0^x g(t)dt \text{ et } g(x)=\int_0^x f(t)dt.$$

Montrer que f et g sont égales à la fonction constante nulle.

Exercice 8. Soit f continue sur $[0,1]$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt=\frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe dans $[0,1]$.

Exercice 9. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que : $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt=0$ et $\displaystyle\int_0^1 tf(t)\,dt=0$.
Montrer que f s'annule au moins deux fois sur $]0,1[$.

Exercice 10. Soit f continue sur $[a,b]$. On suppose qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que : $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $\displaystyle\int_a^b x^k f(x)dx=0$.
Montrer que f admet au moins $n+1$ zéros sur $]a,b[$.

Exercice 11. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue telle que $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)dt\right|=\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$. Montrer que f est de signe constant sur $[a,b]$.

Exercice 12. Soit $f\in\mathcal{C}^0([0,1])$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f^2=\int_0^1 f^3=\int_0^1 f^4$.
Calculer $\displaystyle\int_0^1 (f^2-f)^2$.
En déduire toutes les fonctions $f\in\mathcal{C}^0([0,1])$ vérifiant $\displaystyle\int_0^1 f^2=\int_0^1 f^3=\int_0^1 f^4$.

2 Sommes de Riemann

Exercice 13. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2}$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

Exercice 14. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 2^{\frac{k}{n}}$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \prod_{k=0}^{n-1} (n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}$
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$

Exercice 15. Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k(n-k)}$.

Indication : pour le calcul de l'intégrale, on pourra effectuer le changement de variable $x=\cos^2 t$.

Exercice 16.

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $X^{2n}-1=(X^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}(X^2-2X\cos\frac{k\pi}{n}+1)$
2. Calculer, pour $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$: $I(x)=\int_0^{\pi} \ln(x^2-2x\cos t+1)\,dt$.

3 Calculs de primitives et d'intégrales

Exercice 17. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)dx$
2. $\int_{-1}^{1} (t^2+t+1)e^{-t}dt$
3. $\int_1^2 (\ln t)^2 dt$
4. $\int_1^e t^n ln(t)dx$ où $n\in$ $\mathbb{N}$
5. $\int_0^2 \frac{\arcsin\left(\frac{t}{2}\right)}{\sqrt{4-t^2}}dt$
6. $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}dt$

Exercice 18. Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $f_1 : t\mapsto \frac{t}{(t^2-4)^2}$
2. $f_2 : x\mapsto \sin xe^{2x}$
3. $f_3 : x\mapsto (x^2+1)\sin x$
4. $f_4 : t\mapsto t\arctan t$
5. $f_5 : x\mapsto \sin^2(x)\cos^2(x)$
6. $f_6 : t\mapsto t\sin^3 t$
7. $f_7 : x\mapsto \frac{\ln(x)}{x+x(\ln x)^2}$
8. $f_8 : x\mapsto \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}$
9. $f : x\mapsto \frac{x+1}{x^2-x+1}$

4 Suites et intégrales

Exercice 19. Soient $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$.
Montrer que (I_n) tend vers 0.

Exercice 20. Soient $a<b$. Montrer le lemme de Lebesgue :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)dt=0,$$

1. pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$,
2. pour une fonction f en escalier sur $[a,b]$,
3. pour une fonction f continue sur $[a,b]$.

Exercice 21. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$.

1. Calculer u_0 et u_1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_{n-1} - \frac{1}{n!}$.
2. Montrer que la suite (u_n) est monotone et convergente et calculer sa limite.
3. En déduire que :

$$e = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Exercice 22. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t) dt$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. On suppose ici que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et que $f'(1) \neq 0$.
   Déterminer la limite de la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire un équivalent de u_n.

Exercice 23. Soient $0 < a < b$, déterminer :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b \cos(nt^2)\, dt.$$

Exercice 24. Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \left(\int_a^b f(x)^n dx \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Montrer que la suite (I_n) converge vers $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$.
Indication : Justifier l'existence de $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = M$.
Minorer I_n en intégrant sur un voisinage de c.
Majorer I_n en majorant f par M.

5 Fonctions définies par une intégrale

Exercice 25. On considère pour tout $x > 0$, la fonction définie par : $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\forall x > 1, |f(x)| \leq \dfrac{2}{x}$.
2. En déduire la limite de f lorsque $x \to +\infty$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.
4. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$.

Exercice 26. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Montrer que :

$$\left(\forall \alpha, \beta \in [a,b],\ \int_\alpha^\beta f(x)\, dx = 0 \right) \Rightarrow (\forall x \in [a,b],\ f(x) = 0)\,.$$

Exercice 27. Soit f continue et positive sur $\mathbb{R}^+$.
On suppose qu'il existe un nombre réel k positif tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) \leq k \int_0^x f(t)\, dt.$$

Montrer que f est nulle.
Indication : on pourra étudier la fonction $F : x \mapsto e^{-kx} \displaystyle\int_0^x f(t) dt$.

Exercice 28. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. On considère la fonction F définie par :

$$\forall x \in [0,1], \quad F(x) = \int_0^1 \min(x,t) f(t) dt.$$

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$.
2. Calculer F' et en déduire que :

$$\forall x \in [0,1], \quad F(x) = \int_0^x \left(\int_u^1 f(t) dt \right) du.$$

6 Applications des formules de Taylor

Exercice 29. Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}_+$, $x - \dfrac{x^2}{2} \ \leq\ \ln(1+x) \ \leq\ x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.

Exercice 30. Montrer que pour tout x dans $[0, \pi/2]$, $1 - \dfrac{x^2}{2} \ \leq\ \cos x \ \leq\ 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$.

Exercice 31. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x^{n+1}|e^{|x|}}{(n+1)!}$$

Exercice 32.

1. Montrer que $\cos x \ =\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$
2. Montrer que $\sin x \ =\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

Exercice 33. Soit $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.
Montrer que pour $x \in [-a, a]$ on a $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2a}|f(a) - f(-a)| + \dfrac{a^2 + x^2}{2a} \displaystyle\sup_{t\in[-a,a]} |f''(t)|$. (On pourra appliquer deux fois la formule de Taylor avec reste intégral.)