Chapitre 23 : Applications linéaires

Dans tous ce chapitre E et F désigneront deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Généralité

1.1 Définition et opérations

Définition

On dit que $u : E \to F$ est une application linéaire si :

$$\forall\ x, y \in E,\ f(x+y) = f(x) + f(y);$$

$$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x).$$

On note $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Proposition

Une application $u : E \to F$ est linéaire si et seulement si :

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ f(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot f(y)$$

Démonstration. Soit $u : E \to F$.
Supposons u linéaire. Soient $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ On a : $u(\lambda x + \mu y) = u(\lambda x) + u(\mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$.
Réciproquement, supposons que u vérifie la condition de l'énoncé. En prenant $\lambda = \mu = 1$, on obtient : $\forall x, y \in E, u(x+y) = u(x) + u(y)$. En prenant $\mu = 0$, on obtient : $\forall x \in E,\ f(\lambda x) = \lambda f(x)$. □

Remarque : Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Une récurrence immédiate montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, ..., x_n) \in E^n, \forall (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ u\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(x_i)$$

Proposition

Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ alors $u(0_E) = 0_F$

Démonstration. Immédiat car $u(0_E) = u(0_K \times 0_E) = O_K \times u(0_E) = 0_F$. □

Vocabulaire :

- Soit $u : E \to F$ une application linéaire. On dit que
  - u est un endomorphisme de E si $E = F$. On note $\mathscr{L}(E) = \mathscr{L}(E,E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
  - u est une forme linéaire si $F = \mathbb{K}$.

Exemple : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $k \in \mathbb{K}$. L'application $k.Id_E : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & k.x \end{array}$ est linéaire.

Exemple : L'application $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array}$ n'est pas linéaire, puisque $u(0) \neq 0$.

Plus généralement, les applications $\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ x & \to & ax+b \end{array}$ avec $b \neq 0$ en sont pas linéaires.

Proposition

$\mathscr{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(E,F)$.

Démonstration. $\mathscr{L}(E,F)$ est non vide (il contient la fonction constante nulle).
Soit $u,v\in\mathscr{L}(E,F)$. Soit $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$.
Montrons que $\lambda u+\mu v\in\mathscr{L}(E,F)$.
Soient $x,y\in E$ et $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, on a

$$\begin{aligned}(\lambda.u+\mu.v)(\alpha.x+\beta.y) &= \lambda.u(\alpha.x+\beta.y)+\mu.v(\alpha.x+\beta.y)=\lambda.(\alpha.u(x)+\beta.u(y))+\mu.(\alpha.v(x)+\beta.v(y))\\ &=\alpha.(\lambda.u(x)+\mu.v(x))+\beta.(\lambda.u(y)+\mu.v(y))=\alpha.(\lambda.u+\mu.v)(x)+\beta.(\lambda.u+\mu.v)(y)\end{aligned}$$

donc $\lambda.u+\mu.v$ est linéaire. □

Proposition

Si $u\in\mathscr{L}(E,F)$ et $v\in\mathscr{L}(F,G)$, alors $v\circ u\in\mathscr{L}(E,G)$.

Démonstration. Soient $x,y\in E$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$. Alors

$$(v\circ u)(\lambda.x+\mu.y)=v(u(\lambda.x+\mu.y))=v(\lambda.u(x)+\mu.u(y))=\lambda.v(u(x))+\mu.v(u(y))=\lambda.(v\circ u)(x)+\mu.(v\circ u)(y)$$

donc $v\circ u$ est linéaire. □

1.2 Noyau et image

Proposition

Soit $u\in\mathscr{L}(E,F)$.

- Si E' est un sous-espace vectoriel de E, $u(E')=\{y\in F\mid\exists x\in E', y=u(x)\}=\{u(x),x\in E'\}$ est un sous-espace vectoriel de F.
- Si F' est un sous-espace vectoriel de F, $u^{-1}(F')=\{x\in E\mid u(x)\in F'\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

- On a $u(0)=0\in u(E')$ (car $0\in E'$) donc $u(E')\neq\emptyset$.
  Soient $x,y\in u(E')$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$. Il existe $a,b\in E'$ tels que $x=u(a)$ et $y=u(b)$. Alors $\lambda.x+\mu.y=\lambda.u(a)+\mu.u(b)=u(\lambda.a+\mu.b)$ car u linéaire. Or, $\lambda.a+\mu.b\in E'$, car $a,b\in E'$ et E' est un sous-espace vectoriel. Donc $\lambda.x+\mu.y\in u(E')$.
  En conclusion, $u(E')$ est un sous-espace vectoriel de F.
- On a $u(0)=0\in F'$, donc $0\in u^{-1}(F')$ et $u^{-1}(F')\neq\emptyset$.
  Soient $x,y\in u^{-1}(F')$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$. On a $u(\lambda.x+\mu.y)=\lambda.u(x)+\mu.u(y)$ car u linéaire. Or, $u(x),u(y)\in F'$ et F' est un sous-espace vectoriel donc $\lambda u(x)+\mu u(y)\in F'$. Ainsi, $u(\lambda.x+\mu.y)\in F'$. D'où $\lambda.x+\mu.y\in u^{-1}(F')$.
  Ainsi $u^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E.

□

Définition

Soit $u\in\mathscr{L}(E,F)$. On appelle

- image de u et on note $\mathrm{Im}\,u$ l'ensemble $\mathrm{Im}\,u=u(E)=\{u(x),x\in E\}=\{y\in F,\exists x\in E,y=u(x)\}$.
  Soit $y\in F$,
  $$y\in Im(u)\Leftrightarrow\exists x\in E,y=u(x).$$
- noyau de u et on note $\mathrm{Ker}\,(u)$ l'ensemble $\mathrm{Ker}\,(u)=u^{-1}(\{0_F\})=\{x\in E\mid u(x)=0\}$.
  Soit $x\in E$,
  $$x\in\mathrm{Ker}\,(u)\Leftrightarrow u(x)=0_F$$

Proposition

Soit $u\in\mathscr{L}(E,F)$.

- $\mathrm{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de F.
- $\mathrm{Ker}\,(u)$ est sous espace-vectoriel de E.

Proposition

Soit $u\in\mathscr{L}(E,F)$.
u est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}\,u=\{0\}$.

Démonstration.
- Comme $\text{Ker}\, u$ est un sous espace vectoriel, on a toujours $\{0\} \subset \text{Ker}\, u$.
  Supposons u injective. Soit $x \in \text{Ker}\, u$. Alors $u(x) = 0 = u(0)$. Or, comme u est injective, $x = 0$. Ainsi, $\text{Ker}\, u \subset \{0\}$.
  Donc $\text{Ker}\, u = \{0\}$.
- Supposons $\text{Ker}\, u = \{0\}$. Soit $(x, y) \in E$ tels que $u(x) = u(y)$. Alors $u(x) - u(y) = 0$ donc $u(x - y) = 0$ car u linéaire. Ainsi $x - y \in \text{Ker}\, u = \{0\}$. Donc $x - y = 0$, puis $x = y$. Ainsi u est injective.

□

Remarque :
- ⚠ Attention, cette méthode ne vaut que pour des applications linéaires
- u est surjective si et seulement si $u(E) = F$
  si et seulement si $\text{Im}(u) = F$

Exemple : Déterminer les noyaux, images, et déduire éventuellement l'injectivité et la surjectivité de l'application suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + y - z, 2y + z) \end{array}$$

$\text{Ker}\, f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = 0\}$.
Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} & f(x, y, z) = 0 \\ \iff & \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x = -3y \\ z = -2y \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, $\text{Ker}\, f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = -3y, z = -2y\} = \{(-3y, y, -2y), y \in \mathbb{R}\} = \{y(-3, 1, -2), y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\,(e_1)$ où $e_1 = (-3, 1, -2)$. De plus, e_1 est non nul. Ainsi, (e_1) est une base de $\ker f$.
On a $\text{Ker}\, f \neq \{0\}$ donc f n'est pas injective. De plus, $\text{Im} f = \{(x + y - z, 2y + z) | x, y, z) \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0) + y(1, 2) + z(-1, 1)\ ,\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}\,(e_2, e_3, e_4))$ où $e_2 = (1, 0), e_3 = (1, 2), e_4 = (-1, 1)$. De plus, $e_3 = 2e_4 + 3e_2$. Ainsi : $\text{Im} f = \text{Vect}\,(e_4, e_2)$. De plus, e_2 et e_4 sont non colinéaires. Ainsi, (e_2, e_4) constitue une base de $\text{Im} f$. Ainsi, $\text{Im} f$ est inclus dans $\mathbb{R}^2$ et ces deux espaces sont de dimensions 2. Ainsi, $\text{Im} f = \mathbb{R}^2$.
f est donc surjective.

2 Isomorphisme

Définition

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. On dit que :
- u est un isomorphisme si u est bijectif.
- u est un automorphisme de E si $E = F$ et u est bijectif.
  L'ensemble des automorphismes de E est appelé groupe linéaire de E et noté $GL(E)$.

Proposition

Soient E, F, G 3 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux isomorphismes.
1. $g \circ f \in \mathscr{L}(E, G)$ est un isomorphisme ;
2. f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.

Démonstration.
- On sait déjà que la composée de deux applications linéaires et linéaires et que la composée de deux applications bijectives est bijective. On obtient donc directement le résultat.
- On sait déjà que f^{-1} est bijective de F dans E. Soient $(x, y) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. On veut montrer que $f^{-1}(\lambda.x + \mu.y) = \lambda.f^{-1}(x) + \mu.f^{-1}(y)$. On a

$$f(\lambda.f^{-1}(x) + \mu.f^{-1}(y)) = \lambda.f(f^{-1}(x)) + \mu f(f^{-1}(y)) = \lambda.x + \mu.y = f(f^{-1}(\lambda.x + \mu.y)).$$

  Comme f est injective, on a donc $f^{-1}(\lambda.x + \mu.y) = \lambda.f^{-1}(x) + \mu.f^{-1}(y)$ et f^{-1} est linéaire.

□

2.1 Isomorphismes et bases

Proposition

Soient $e_1,\dots,e_n \in E$ et $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

- Si $(e_1,\dots,e_n)$ est libre et u est injective, alors $(u(e_1),\dots,u(e_n))$ est libre.
- Si $(e_1,...,e_n)$ est liée alors $(u(e_1),...,u(e_n))$ est liée.
- Si $(e_1,\dots,e_n)$ est génératrice de E alors $(u(e_1),\dots,u(e_n))$ est génératrice de $\operatorname{Im} u$.

Démonstration.

- Supposons $(e_1,\dots,e_n)$ libre et u est injective.
  Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i u(e_i) = 0$. Comme u est linéaire, on a : $u\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = 0$. Ainsi $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in \operatorname{Ker} u = \{0\}$ (car u est injective), donc $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$. Comme $(e_1,\dots,e_n)$ est libre, on a $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Ainsi $(u(e_1),\dots,u(e_n))$ est libre.
- Supposons $(e_1,...,e_n)$ liée.
  Alors, il existe $(\lambda_1,...,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0,...,0)\}$ tel que : $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E$.
  On a alors : $u\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = u(0_E) = 0_F$. Par linéarité de u, on a : $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i u(e_i) = u(0_E) = 0_F$ et $(\lambda_1,...,\lambda_n) \neq (0,...,0)$.
  Ainsi, $(u(e_1),....,u(e_n))$ est liée.
- Supposons $(e_1,\dots,e_n)$ génératrice de E.
  Soit $y \in \operatorname{Im} u$. Il existe $x \in E$ tel que $u(x) = y$. Comme $(e_1,\dots,e_n)$ est génératrice de E, il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. On a alors $y = u(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i u(e_i)$ (par linéarité de u). Ainsi $(u(e_1),\dots,u(e_n))$ est génératrice de $\operatorname{Im} u$.

$\square$

Exemple : Reprenons l'exercice 4.
$((1,0),(0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ donc une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.
Ainsi :

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(1,0), f(0,1)) = \operatorname{Vect}((1,-1,0),(-1,1,0)).$$

Proposition

Soient $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E et $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
u est un isomorphisme si et seulement si $(u(e_1),\dots,u(e_n))$ est une base de F.

Démonstration.

- Supposons que u est un isomorphisme.
  u est injective et $(e_1,...,e_n)$ est une base de E donc est une famille libre. Ainsi, $(u(e_1),...,u(e_n))$ est une famille libre. De plus, $(e_1,...,e_n)$ est génératrice de E donc $(u(e_1),...,u(e_n))$ est génératrice de $\operatorname{Im} u$. Or, u est surjective donc $\operatorname{Im} u = F$.
  Ainsi, $(u(e_1),...,u(e_n))$ est génératrice de F et est libre donc $(u(e_1),...,u(e_n))$ est une base de F.
- Supposons que $(u(e_1),...,u(e_n))$ est une base de F.
  Soit $x \in \operatorname{Ker}(u)$. Comme $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E, il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. Or, $u(x) = 0$ donc par linéarité de u, on a $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i u(e_i) = 0$. De plus, $(u(e_1),...,u(e_n))$ est une base de F donc est une famille libre. Ainsi, $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.
  Donc e $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$. Ainsi, $\operatorname{Ker} u \subset \{0\}$. D'où $\operatorname{Ker} u = \{0\}$. Ainsi, u est injective.
  On sait que $(u(e_1),\dots,u(e_n))$ génératrice de F. De plus, $(e_1,...,e_n)$ est une famille génératrice de E donc $(u(e_1),...,u(e_n))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} u$.
  Ainsi, $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(u(e_1),...,u(e_n)) = F$. Donc u est surjective.
  Ainsi,u est un isomorphisme.

$\square$

Théorème

Soit E et F deux espaces vectoriels de **même dimension finie** $\dim(E) = \dim(F)$. Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors :

u est bijective si et seulement si u est injective, si et seulement si u est surjective.

Démonstration.

- Par définition, si u est bijective, elle est surjective et injective.

- Supposons u injective. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est libre dans F. Cette famille a $n = \dim(E) = \dim(F)$ éléments, c'est donc une base de F. Comme u envoie une base sur une base, u est bijective.
- Supposons u surjective. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est génératrice de $\mathrm{Im}\, u = F$. Cette famille a $n = \dim(E) = \dim(F)$ éléments, c'est donc une base de F. Comme u envoie une base sur une base, u est bijective.

□

Remarque :

- Pour montrer que u est bijective, si $\dim(E) = \dim(F)$, il est plus simple de montrer l'injectivité, en général.
- En particulier, si u est un endomorphisme de E espace vectoriel de dimension finie, pour montrer que u est bijective il suffit de prouver que u est injective.

2.2 Espaces isomorphes

Définition

On dit que deux espaces sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de l'un dans l'autre.

Proposition Caractérisation des espaces isomorphes

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels. Si E est de dimension finie, E et F sont isomorphes si et seulement si F est de dimension finie avec $\dim(E) = \dim(F)$.

Démonstration.

- S'il existe $u : E \to F$ un isomorphisme. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Comme u est bijectif, $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une base de F. Ainsi, F est de dimension finie et $\dim(F) = n = \dim(E)$.
- Supposons que $\dim(E) = \dim(F) = n$. Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(f_1, ..., f_n)$ une base de F.

  Posons $\begin{array}{rccc} u: & E & \to & F \\ & x & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i f_i \end{array}$ où $(x_1, ..., x_n)$ est l'unique n-uplet tel que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

  - u est linéaire.

    Soient $x, x' \in E$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Il existe $(x_1, ..., x_n), (x'_1, ..., x'_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $x' = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x'_i e_i$.

    On a alors :

$$\begin{aligned}
u(\lambda x + \mu x') &= u\left(\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i e_i + \mu \sum_{i=1}^{n} x'_i e_i\right) \\
&= u\left(\sum_{i=1}^{n} \left(\lambda x_i + \mu x'_i\right) e_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda x_i + \mu x'_i\right) f_i \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i f_i + \mu \sum_{i=1}^{n} x'_i f_i \\
&= \lambda u(x) + \mu u(x')
\end{aligned}$$

    Ainsi, u est linéaire.

  - Soit $x \in \mathrm{Ker}\, u$ alors $x \in E$ donc il existe $x_1, ...x_n \in \mathbb{K}$ tels que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. De plus, $u(x) = 0_F$ donc $u\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = 0_F$.

    Par définition u, on a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i f_i = 0_F$. Or, $(f_1, ..., f_n)$ est une base de F donc est libre.
    Ainsi, $x_1 = ... = x_n$. Donc $x = 0$.
    Ainsi, $\mathrm{Ker}\, u \subset \{0\}$. D'où $\mathrm{Ker}\, u = \{0\}$. Donc u est injective.
  - De plus, E et F sont de même dimension finie. Ainsi, u est bijective. Donc u est un isomorphisme.

□

Remarque : Si E est de dimension n, E est donc isomorphe à $\mathbb{K}^n$, via le choix d'une base de E (comme vu dans la preuve).

Méthode

Pour montrer que E est de dimension finie p, on dispose de deux méthodes :

- exhiber une base de p vecteurs;
- exhiber un isomorphisme avec un espace dont on sait qu'il est de dimension p

Étude des suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

Proposition Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 **(Cas complexe)**

Soient $(a,b) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*$ et $\mathscr{S} = \{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$. Alors :

1. $\mathscr{S}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2.
2. On pose $P = r^2 - ar - b$.
   - Si P admet deux racines distinctes $r_1,\ r_2 \in \mathbb{K}$, alors :
     Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$,
     $$(u_n) \in \mathscr{S} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists!(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \text{tel que} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$
   - Si l'équation caractéristique admet une solution double $r \in \mathbb{K}$, alors : Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$,
     $$(u_n) \in \mathscr{S} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists!(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \text{tel que} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r^n + \mu n r^n$$

Démonstration. 1. ► Nous allons montrer que que $\mathscr{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
$\mathscr{S}$ est non vide car la suite nulle y appartient.
Soient (u_n) et (v_n) appartenant à $\mathscr{S}$, et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$.
Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}&(\alpha u_{n+2} + \beta v_{n+2}) - a(\alpha u_{n+1} + \beta v_{n+1}) - b(\alpha u_n + \beta v_n)\\ =&\alpha(u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n) + \beta(v_{n+2} - av_{n+1} - bv_n)\\ =&0\end{aligned}$$

Ainsi, $(\alpha u_n + \beta v_n) \in \mathscr{S}$ donc $\mathscr{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
► Déterminons désormais la dimension de $\mathscr{S}$.
Considérons pour cela l'application !

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathscr{S} & \to & \mathbb{K}^2 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_0, u_1) \end{array}$$

- ϕ est linéaire :
  Soient $(u_n), (v_n) \in \mathscr{S}$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a :
  $$\begin{aligned}\phi\big(\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) &= \phi\big((\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)\\ &= (\lambda u_0 + \mu v_0, \lambda u_1 + \mu v_1)\\ &= \lambda(u_0, v_0) + \mu(u_1, v_1)\\ &= \lambda\phi((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) + \mu\phi((v_n)_{n\in\mathbb{N}})\end{aligned}$$
- ϕ est bijective : en effet, une suite u linéaire récurrente d'ordre 2 est uniquement déterminé par la donnée de ces premiers termes $(u_0, u_1) \in \mathbb{K}^2$.

Ainsi, ϕ est un isomorphisme et on peut affirmer que $\dim(\mathscr{S}) = \dim(\mathbb{K}^2) = 2$.

2. - Supposons que P admet deux racines complexes distinctes r_1, r_2. Soient $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ les deux suites définies par :
     $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = r_1^n$$
     $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = r_2^n$$
     On a :
     $$\forall n \in \mathbb{N},\ r_1^{n+2} - ar_1^{n+1} - br_1^n = r_1^n(r_1^2 - ar_1 - b) = 0$$
     Ainsi, $u \in \mathscr{S}$. On montre de même que $v \in \mathscr{S}$.
     D'autre part, u et v ne sont pas colinéaires. Ainsi, (u,v) forme une famille libre de $\mathscr{S}$.
     Comme elle est de cardinal 2 dans $\mathscr{S}$ de dimension 2, la famille (u,v) est donc une base de $\mathscr{S}$. Ainsi, si $x = (x_n) \in \mathscr{S}$, il existe un unique $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que $x = \alpha u + \beta v$ ce qui prouve le résultat voulue.
   - Supposons que P admet une racines double r. Soient $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ les deux suites définies par :
     $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = r^n$$
     $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = nr^n$$
     On a :
     $$\forall n \in \mathbb{N},\ r^{n+2} - ar^{n+1} - br^n = r^n(r^2 - ar - b) = 0$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)r^{n+2} - a(n+1)r^{n+1} - bnr^n = nr^n(r^2 - ar - b) + r^{n+1}(2r - a) = nr^nP(r) + r^{n+1}P'(r) = 0$$

Ainsi, $u \in \mathscr{S}$ et $v \in \mathscr{S}$.
D'autre part, u et v ne sont pas colinéaires donc la famille (u, v) famille est libre. Comme elle est de cardinal 2 dans $\mathscr{S}$ de dimension 2, la famille (u, v) est donc une base de $\mathscr{S}$. Ainsi, si $u = (x_n) \in \mathscr{S}$, il existe un unique $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que $x = \alpha u + \beta v$ ce qui prouve le résultat voulue.

□

3 Modes de définition d'une application linéaire

3.1 Utilisation d'une base

Théorème

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels avec $\dim(E) = n$.
Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, $(f_1, \ldots, f_n)$ une famille de vecteurs de F, il existe une unique application linéaire $u : E \to F$ telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u(e_i) = f_i$.

Remarque : On dit qu'une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.

Démonstration. On raisonne par analyse/synthèse.

- Analyse : Supposons qu'il existe $u \in \mathscr{L}[E, F)$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $u(e_i) = f_i$.

  Soit $x \in E$, il existe $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

  La linéarité de u nous donne :
  $$u(x) = u\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$$

  Donc : $\begin{array}{rccc} u : & E & \to & F \\ & x & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} x_i f_i \end{array}$ où $(x_1, ..., x_n)$ est l'unique n-uplet tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

- Synthèse : Posons $\begin{array}{rccc} u : & E & \to & F \\ & x & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} x_i f_i \end{array}$ où $(x_1, ..., x_n)$ est l'unique n-uplet tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

  - Montrons que u est linéaire : Soit $x, y \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Il existe $(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$. On a alors :

    $$\begin{aligned} u(\alpha x + \beta y) &= u\left(\alpha\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) + \beta\left(\sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right)\right) \\ &= u\left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta y_i) e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta y_i) f_i \\ &= \alpha\left(\sum_{i=1}^{n} x_i f_i\right) + \beta\left(\sum_{i=1}^{n} y_i f_i\right) \\ &= \alpha u(x) + \beta u(y) \end{aligned}$$

    ce qui prouve la linéarité de u.

  - De plus, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $u(e_i) = f_i$ puisque les composantes de e_i dans la base $(e_1, .., e_n)$ sont toutes nulles, hormis la i-ème qui vaut 1.

  Ainsi, u convient.

□

Méthode

- Pour définir un application linéaire partant d'un espace vectoriel E dont on connait une base, il suffit de donner les images des vecteurs de cette base.
- Pour prouver que $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(E, F)$ sont égales, il suffit de montrer qu'elles coïncident sur une base de E.

3.2 Utilisation d'espaces supplémentaires

Théorème Définition d'une application sur deux supplémentaires

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires. Pour tout $(u_1, u_2) \in \mathscr{L}(E_1, F) \times \mathscr{L}(E_2, F)$, il existe une unique application u linéaire de E dans F telle que $u_{|E_1} = u_1$ et $u_{|E_2} = u_2$.

Remarque : En d'autres termes u est entièrement déterminée par ses restrictions à E_1 et E_2.

Démonstration. On raisonne par analyse/synthèse.

- Analyse : Supposons qu'il existe $u \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $u_{|E_1} = u_1$ et $u_{|E_2} = u_2$.
  Soit $x \in E$, il existe un unique $(y, z) \in E_1 \times E_2$ tels que $x = y + z$, et donc par linéarité de u, on a :
  $$u(x) = u(y+z) = u(y) + u(z) = u_1(y) + u_2(z)$$
- Posons $u : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & u_1(y) + u_2(z) \end{array}$ où (y, z) est l'unique couple de $E_1 \times E_2$ tel que $x = y + z$.
  - Montrons que u est linéaire.
    Soit $x, x' \in E$. Il existe $(y, z) \in E_1 \times E_2$ ainsi que $(y', z') \in E_1 \times E_2$ tel que : $x = y + z \qquad x' = y' + z'$ Soient $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$, on a alors :
    $$\lambda x + \lambda' x' = \underbrace{(\lambda y + \lambda' y')}_{\in E_1} + \underbrace{(\lambda z + \lambda' z')}_{\in E_2}$$
    et comme $\lambda y + \lambda' y' \in F$ et $\lambda z + \lambda' z' \in G$, on a donc :
    $$\begin{aligned} u(\lambda x + \lambda' x') &= u\big(\lambda(y+z) + \mu(y'+z')\big) \\ &= u\left(\underbrace{(\lambda y + \lambda' y')}_{\in E_1} + \underbrace{(\lambda z + \lambda' z')}_{\in E_2}\right) \\ &= u_1(\lambda y + \lambda' y') + u_2(\lambda z + \lambda' z') \\ &= (\lambda u_1(y) + \lambda' u_1(y)) + (\lambda u_2(z) + \lambda' u_2(z)) \\ &= \lambda u(x) + \lambda' u(y) \end{aligned}$$
  - Soit $x \in E_1$, on a : $x = x + 0$, avec $0 \in E_2$. Ainsi : $u(x) = u_1(x)$. Par suite, on a $u_{|E_1} = u_1$. On montre de même $u_{|E_2} = u_2$.
    Ainsi, l'application u répond bien au problème.

□

Méthode

- Pour définir une application linéaire sur E, il suffit de la définir sur deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
- Deux applications linéaires définies sur E sont égales dés qu'elles coïncident sur deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

4 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel

Définition

Si $k \in \mathbb{K}$, l'application $k.Id_E : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & k.x \end{array}$ est un endomorphisme de E appelé homothétie de rapport k.

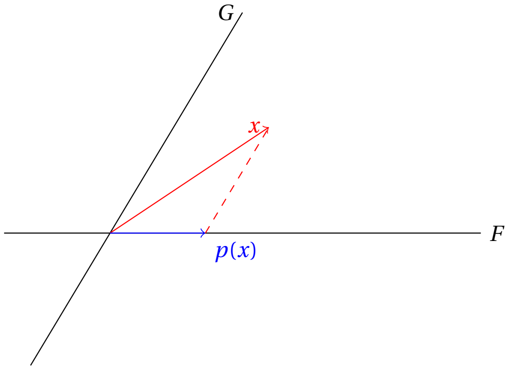
Remarque : Soit $E \neq \{0\}$. Soit $k \in \mathbb{K}$. $k.Id_E \in GL(E)$ si et seulement si $k \neq 0$. L'application réciproque est alors : $\dfrac{1}{k}.Id_E$.

4.1 Projections

Définition

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E. On appelle projecteur sur F parallèlement à G, l'unique endomorphisme $p \in \mathscr{L}(E)$ tel que :

$$\forall x \in F,\ p(x) = x \quad \text{ et } \quad \forall x \in G,\ p(x) = 0$$



Remarque : Pour tout $x \in E$, il existe $(y,z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$ et l'on a alors $p(x) = y$.

Proposition

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.
Soit p la projection sur F parallèlement à G. Alors :

- $G = \operatorname{Ker} p$
- $F = \operatorname{Im} p = \{x \in E \mid p(x) = x\} = \operatorname{Ker}(p - id_E)$

Démonstration.
- On sait déjà que $G \subset \operatorname{Ker} p$ par définition de G.
Soit $x \in \operatorname{Ker} p$. Il existe un unique couple $(y,z) \in F \times G$ tels que $x = y+z$. Alors $0_E = p(x) = p(y+z) = p(y)+p(z) = p(y) = y$. Ainsi, $x = z \in G$. Donc $\operatorname{Ker} p \subset G$. Ainsi on a bien $Ker(p) = G$.
- Soit $x \in F$. Alors, $p(x) = x$ donc $x \in \operatorname{Im} p$. Ainsi, $F \subset \operatorname{Im} p$.
Réciproquement, soit $y \in \operatorname{Im} p$, il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$. Or, il existe $(x_1, x_2) \in F \times G$ tel que $x = x_1 + x_2$. On a alors $y = p(x_1 + x_2) = p(x_1) + p(x_2) = p(x_1) = x_1 \in F$.
Ainsi, $\operatorname{Im} p \subset F$.
Donc $\operatorname{Im} p = F$.
Par définition $\{x \in E | p(x) = x\} = \operatorname{Ker}(p - id_E)$. De plus, on a $F \subset \{x \in E |\ p(x) = x\} = \operatorname{Ker}(p - id_E)$.
De plus, soit $x \in E$ tel que $p(x) = x$ alors, $x \in \operatorname{Im} p = F$. Finalement, $F = \operatorname{Ker}(p - id_E)$.

□

Théorème Caractérisation des projecteurs

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$. Alors :

$$p \text{ est un projecteur si et seulement si } p \circ p = p$$

Dans ce cas, on a $E = Im(p) \oplus \operatorname{Ker}(p)$ et p est la projection sur $Im(p)$ parallèlement à $Ker(p)$.

Démonstration.
- Supposons que p soit un projecteur sur F parallèlement à G.
p et $p \circ p$ sont deux applications de E dans E. De plus, soit $x \in E$, on a $p(x) \in \operatorname{Im} p = F$ et donc $p(p(x)) = p(x)$. On en déduit $p \circ p = p$.
- Supposons maintenant que $p \circ p = p$.
On sait déjà que $Ker(p)$ et $\operatorname{Im} p$ sont des sous espaces vectoriels de E.
Montrons que $Ker(p) \oplus \operatorname{Im} p = E$.
Soit $x \in E$.
Analyse : supposons qu'il existe $(y,z) \in \operatorname{Ker}(p) \times \operatorname{Im} p$ tel que $x = y + z$. Comme $z \in \operatorname{Im} p$, il existe $a \in E$ tel que $z = p(a)$. De plus, $p(y) = 0$. Par suite,

$$\begin{aligned} p(x) &= p(y) + p(z) \quad \text{(car } p \text{ linéaire)} \\ &= p(p(a)) = p(a) = z \end{aligned}$$

Ainsi $z = p(x)$ et $y = x - z = x - p(x)$ et on a unicité.
Synthèse : posons $z = p(x)$ et $y = x - p(x)$. Alors $x = y + z$, $z = p(x) \in \operatorname{Im} p$ et

$$\begin{aligned} p(y) &= p(x) - p(p(x)) \quad \text{(car } p \text{ linéaire)} \\ &= p(x) - p(x) = 0_E \end{aligned}$$

Ainsi, $y \in \operatorname{Ker} p$. Ainsi, on a existence.
En conclusion $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$.

De plus : $\forall x \in \operatorname{Ker} p$, $p(x) = 0$ et pour tout $x \in \operatorname{Im} p$, il existe $a \in E$ tel que $x = p(a)$. On a alors $p(x) = p \circ p(a) = p(a) = x$. Finalement, p est bien la projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.

□

Proposition

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.
Si p est le projecteur sur F parallèlement à G et q le projecteur sur G parallèlement à F alors :

- $p + q = Id_E$
- $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Démonstration.

1. Pour tout $x \in F$, $p(x) = x$ et $q(x) = 0$. Ainsi, $(p+q)(x) = Id_E(x)$ et $(p \circ q)(x) = p(0) = 0$ et $(q \circ p)(x) = q(x) = 0$.
2. Pour tout $x \in G$, $p(x) = 0$ et $q(x) = x$. Ainsi, $(p+q)(x) = x$ et $(p \circ q)(x) = p(x) = 0$ et $(q \circ p)(x) = q(0) = 0$. Les applications coïncident donc sur deux espaces supplémentaires, elles sont égales. Donc $p + q = Id_E$, $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

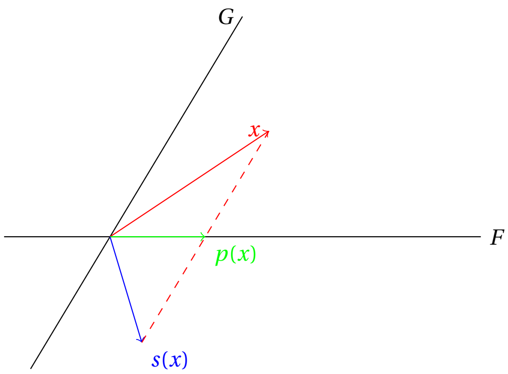
□

4.2 Symétrie

Définition

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E.
On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G, l'unique endomorphisme $s \in \mathscr{L}(E)$ tel que :

$$\forall x \in F,\ s(x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in G,\ s(x) = -x$$



Remarque : Pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(y, z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$.
On a alors : $s(x) = y - z$.

Proposition

Supposons $E = F \oplus G$. Notons s la symétrie par rapport à F parallèlement à G et p la projection sur F parallèlement à G, q la projection sur G parallèlement à F. On a :

$$s = p - q = 2p - Id_E$$

Démonstration. Pour tout $x \in F$, $s(x) = x$ et $(p-q)(x) = p(x) = x$ et $(2p - Id_E)(x) = 2x - x = x$.
Pour tout $x \in G$, $s(x) = -x$ et $(p-q)(x) = -q(x) = -x$ et $(2p - Id_E)(x) = 2p(x) - x = -x$.
Ainsi, ces applications coïncident sur deux espaces supplémentaires donc sont égales. □

Exemple : Dans $E = \mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, notons $F = \mathbb{R}$ et $G = i\mathbb{R}$. La symétrie par rapport à F et parallèlement à G est la conjugaison.

Proposition

1. $F=\{x\in E, s(x)=x\}=\operatorname{Ker}(s-Id_E)$;
2. $G=\operatorname{Ker}(s+Id_E)$

Démonstration. 1. Soit $x\in F$, on a $s(x)=x$. Ainsi $F\subset\{x\in E, s(x)=x\}=\operatorname{Ker}(s-Id_E)$.
Soit $x\in\operatorname{Ker}(s-Id_E)$, il existe $(y,z)\in F\times G$ tel que $x=y+z$. On a $s(x)=x$, d'où $s(y+z)=y+z$ donc $s(y)+s(z)=y+z$. Ainsi, $y-z=y+z$. Donc $z=0_E$. Ainsi $x=y\in F$. Donc $\operatorname{Ker}(s-Id_E)\subset F$.
On a ainsi montré que $F\subset\{x\in E, s(x)=x\}=\operatorname{Ker}(s-Id_E)\subset F$ et donc $F=\{x\in E, s(x)=x\}=\operatorname{Ker}(s-Id_E)$.
2. Soit $x\in G$, on a $s(x)=-x$. D'où $(s+Id_E)(x)=0_E$. Ainsi $G\subset\operatorname{Ker}(s+Id_E)$.
Réciproquement, soit $x\in\operatorname{Ker}(s+Id_E)$. $\exists!(y,z)\in F\times G$ tel que $x=y+z$. On a $s(x)=-x$. Donc $s(y+z)=-(y+z)$. Ainsi, $s(y)+s(z)=-y-z$. D'où $y-z=-y-z$. Ainsi, $y=0_E$. Donc $x=z\in G$. D'où $Ker(s+Id_E)\subset G$.
Finalement on a bien montré que $G=\operatorname{Ker}(s+Id_E)$.

□

Théorème Caractérisation des symétries

Soit $s\in\mathscr{L}(E)$.

s est une symétrie si et seulement si $s\circ s=id_E$.

Dans ce cas, $E=\operatorname{Ker}(s-Id_E)\oplus\operatorname{Ker}(s+Id_E)$ et s est la symétrie par rapport à $Ker(s-Id_E)$ dans la direction de $Ker(s+Id_E)$.

Démonstration.
- Supposons que s soit une symétrie par rapport à F parallèlement à G.
Soit $x\in F$, $(s\circ s)(x)=s(s(x))=s(x)=x=Id_E(x)$. Soit $x\in G$, $(s\circ s)(x)=s(s(x))=s(-x)=-s(x)=x=Id_E(x)$. Ainsi, $s\circ s$ et Id_E coïncident sur deux espaces supplémentaires donc sont égales.
- Supposons maintenant que $s\circ s=id_E$. On pose $F=\operatorname{Ker}(s-id_E)$ et $G=\operatorname{Ker}(s+id_E)$.
On sait déjà que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.
Montrons que $F\oplus G=E$.
Soit $x\in E$.
Analyse : supposons qu'il existe $(y,z)\in F\times G$ tel que $x=y+z$. Comme $y\in F$ et $z\in G$, on a $s(y)=y$ et $s(z)=-z$. Par suite,
$$\begin{aligned} s(x)&=s(y)+s(z) \quad \text{(car } s \text{ linéaire)}\\ &=y-z \end{aligned}$$
Ainsi $y=\frac{1}{2}(x+s(x))$ et $z=\frac{1}{2}(x-s(x))$ et on a unicité.
Synthèse : posons $y=\frac{1}{2}(x+s(x))$ et $z=\frac{1}{2}(x-s(x))$. Alors $x=y+z$. De plus,
$$\begin{aligned} s(y)&=\frac{1}{2}(s(x)+s(s(x))) \quad \text{(car } s \text{ linéaire)}\\ &=\frac{1}{2}(s(x)+x) \quad s\circ s=Id_E\\ &=y \end{aligned}$$
Ainsi, $y\in F$.
De même,
$$\begin{aligned} s(z)&=\frac{1}{2}(s(x)-s(s(x))) \quad \text{(car } s \text{ linéaire)}\\ &=\frac{1}{2}(s(x)-x) \quad s\circ s=Id_E\\ &=-z \end{aligned}$$
donc $z\in G$. Ainsi, on a existence.
En conclusion $E=F\oplus G$ et pour tout $x\in E$, $x=\dfrac{1}{2}(x+s(x))+\dfrac{1}{2}(x-s(x))$ cette décomposition étant unique.
Par ailleurs, pour tout $x\in F$, $s(x)=x$ et pour tout $x\in G$, $s(x)=-x$. Ainsi, s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

□

Remarque : Soit $s\in\mathscr{L}(E)$.
s est une symétrie si et seulement si $s\in GL(E)$ avec $s^{-1}=s$.

5 Rang d'une application linéaire

Définition

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconques.
Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
On dit que u est de rang fini, lorsque $\mathrm{Im}\,u$ est de dimension finie.
On appelle alors rang de u et on note $\mathrm{rg}\,(u)$ la dimension de $\mathrm{Im}\,u$:

$$\mathrm{rg}\,(u) = \dim\,(\mathrm{Im}(u))$$

Remarque : Si $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E, $(u(e_1),\dots,u(e_n))$ est génératrice de $\mathrm{Im}\,u$, donc $\mathrm{rg}\,(u) = \mathrm{rg}\,(u(e_1),\dots,\mathrm{rg}\,(u(e_n)))$.

Proposition

Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finies.
Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$ Alors $v\circ u$ et de rang finie et on a : $\mathrm{rg}\,(v\circ u) \le \min(\mathrm{rg}\,(v), \mathrm{rg}\,(u))$.

Démonstration. Comme $\mathrm{rg}\,(v\circ u) = \dim\,((v\circ u)(E)) = \dim\,(v(u(E)))$, et comme $v(u(E)) \subset v(F)$ (car $u(E), \subset F$), $\mathrm{rg}\,(v\circ u) \le \dim\,(v(F)) = \mathrm{rg}\,(v)$.
Soit $(f_1,\dots,f_r)$ une base de $\mathrm{Im}\,u = u(E)$ (avec $r = \mathrm{rg}\,(u)$). Alors $(v(f_1),\dots,v(f_r))$ est une famille génératrice de $v(u(E))$, donc est de cardinal plus grand que la dimension de cet espace. Ainsi $r \ge \dim\,(v(u(E)) = \mathrm{rg}\,(v\circ u)$ et $\mathrm{rg}\,(u) \ge \mathrm{rg}\,(v\circ u)$. □

Proposition

Soit E, F, F, H des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E,F)$ de rang finie.

- Si $v \in \mathscr{L}(F,H)$ est un isomorphisme, $\mathrm{rg}\,(v\circ u) = \mathrm{rg}\,(u)$.
- Si $w \in \mathscr{L}(G,E)$ est un isomorphisme, $\mathrm{rg}\,(u\circ w) = \mathrm{rg}\,(u)$.

Démonstration. Soit $n = \mathrm{rg}\,(u)$ et $\mathscr{B} = (e_1,...,e_n)$ une base de $\mathrm{Im}\,u$.

- On a : $\mathrm{Im}(v\circ u) = (v\circ u)(E) = v(u(E)) = v(\mathrm{Im}\,u =$.
  Comme $\mathscr{B}$ est une base de $\mathrm{Im}\,u$ et que v induit un isomorphisme de $\mathrm{Im}(u)$ dans $v(\mathrm{Im}(u)$ alors $(v(e_1),...,v(e_n))$ est une base de
  $v(\mathrm{Im}\,u) = \mathrm{Im}(v\circ u)$. Ainsi, $\mathrm{rg}\,(v\circ u) = \dim\,(v(\mathrm{Im}\,u)) = n = \mathrm{rg}\,(u)$
- Comme w est un isomorphisme, $w(G) = E$. On en déduit que $\mathrm{Im}(u\circ w) = (u\circ w)(G) = u(E) = \mathrm{Im}\,u$. Ainsi, on en déduit le résultat.

□

Lemme

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriel quelconque. Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
Tout supplémentaire de $\mathrm{Ker}\,u$ dans E est isomorphe à $\mathrm{Im}\,u$.

Démonstration. Soit E_0 un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\,u$ dans E. On pose $v : \begin{array}{ccc} E_0 & \to & \mathrm{Im}\,u \\ x & \mapsto & u(x) \end{array}$ et on va montrer que v est un isomorphisme.
v est clairement linéaire comme restriction de u, linéaire.
Soit $x \in \mathrm{Ker}\,v$. Alors $x \in E_0$ et $v(x) = 0$ donc $u(x) = 0$. Ainsi, $x \in \mathrm{Ker}\,(u)$ Par suite $x \in E_0 \cap \mathrm{Ker}\,(u) = \{0\}$ donc $x = 0$. Ainsi $\mathrm{Ker}\,v = \{0\}$ et v est injective.
Soit $y \in \mathrm{Im}\,u$. Par définition de $\mathrm{Im}\,u$, il existe $x \in E$ tel que $u(x) = y$. Or, $\mathrm{Ker}\,u \oplus E_0 = E$. Ainsi, il existe $(a,b) \in \mathrm{Ker}\,u \times E_0$ tel que $x = a + b$. Comme u est linéaire, on a : $y = u(x) = u(a) + u(b) = u(b) = v(b)$. Ainsi v est surjective.
v est donc un isomorphisme et E_0 et $\mathrm{Im}\,u$ sont isomorphes. □

Théorème Théorème du rang

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et F un espace vectoriel quelconque. Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors :

$$u \text{ est de rang finie et } \quad \dim\,(E) = \dim\,(\mathrm{Ker}\,u) + \mathrm{rg}\,(u)$$

Démonstration. Comme E est de dimension finie, on en déduit que $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont de dimensions finies.
De plus, on sait qu'il existe E_0 un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E car E est de dimension finie. Ainsi, $E = E_0 \oplus \operatorname{Ker} u$.
Avec le lemme, on sait que E_0 et $\operatorname{Im} u$ sont isomorphes. On a alors : $\dim(E_0) = \dim(\operatorname{Im} u) = \operatorname{rg}(u)$.
Ainsi $\dim(E) = \dim(E_0 \oplus \operatorname{Ker} u) = \dim(E_0) + \dim(\operatorname{Ker} u) = \operatorname{rg}(u) + \dim(\operatorname{Ker} u)$ et on a le résultat. □

Remarque : ⚠ Attention, il s'agit d'une égalité de dimension ! En général, on n'a pas $E = Im(f) \oplus Ker(f)$.

Proposition

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

- Si E est de dimension finie, alors u est de rang finie, et l'on a $\operatorname{rg}(u) \leq \dim E$. De plus, $\operatorname{rg}(u) = \dim(E)$ si et seulement si u est injective.
- Si F est de dimension finie, alors u est de rang finie, et l'on a $\operatorname{rg}(u) \leq \dim F$. De plus, $\operatorname{rg}(u) = \dim(F)$ si et seulement si u est surjective.

Ainsi, si $\dim(E) < +\infty$ et $\dim(F) < +\infty$, on a : $\operatorname{rg}(u) \leq \min(\dim(E), \dim(F))$.

Démonstration.

- Supposons E de dimension finie. D'après le théorème du rang, on a $\dim(E) = \dim(\operatorname{Ker} u) + \operatorname{rg}(u)$. Donc $\operatorname{rg}(u) \leq \dim(E)$. Ainsi, u est de rang fini.
  De plus :
  $$\begin{aligned} \operatorname{rg}(u) = \dim(E) &\iff \operatorname{rg}(u) = \dim(\operatorname{Ker} u) + \operatorname{rg}(u) \quad \text{par le théorème du rang} \\ &\iff 0 = \dim(\operatorname{Ker} u) \\ &\iff \operatorname{Ker} u = \{0\} \\ &\iff u \text{ injective} \end{aligned}$$
- Supposons F de dimension finie. Alors, $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie, comme sous-espace vectoriel de F. De plus, $\operatorname{rg}(u) \leq \dim(F)$.
  De plus, u est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} u = F$ si et seulement si $\dim u = \dim F$ (car $\operatorname{Im} u \subset F$) si et seulement si $\operatorname{rg}(u) = \dim F$.

□

Méthode

Lorsqu'on souhaite déterminer une base du noyau et de l'image d'une application linéaire en dimension finie, on commence par le noyau (ce qui correspond à résoudre l'équation $u(x) = 0$). Lorsqu'on connaît la dimension du noyau, on en déduit celle de l'image par le théorème du rang, et il suffit de trouver une famille libre du bon cardinal.

6 Équations linéaires

Définition

On appelle équation linéaire toute équation du type $u(x) = b$ avec :

- $u : E \to F$ une application linéaire ;
- $b \in F$ appelé second membre de l'équation ;
- $x \in E$ un vecteur inconnu.

On appelle **équation homogène associée** à $u(x) = b$ l'équation linéaire $u(x) = 0_F$.

Proposition

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$, Soit $b \in F$. S'il existe $x_0 \in E$ tel que $u(x_0) = b$ alors, l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de $u(x) = b$ est :

$$\mathscr{S} = \{x_0 + h,\ h \in \operatorname{Ker} u\}.$$

Démonstration. Soit $x \in E$,

$$\begin{aligned}
x \in \mathscr{S} &\iff u(x) = b \\
&\iff u(x) = u(x_0) \\
&\iff u(x) - u(x_0) = 0 \\
&\iff u(x - x_0) = 0 \\
&\iff x - x_0 \in \operatorname{Ker} u \\
&\iff \exists h \in \operatorname{Ker} u,\ x = x_0 + h
\end{aligned}$$

□

Remarque : On retrouve la structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire, ou d'un système linéaire.