Feuille d'exercices 20 : Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^3$, soient $u = (1,0,2)$, $v = (1,1,2)$, $w = (1,2,2)$, $t = (2,2,2)$.
1. Montrer que (u,v,w,t) est générateur de $\mathbb{R}^3$.
2. En extraire une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. Compléter en une base de $\mathbb{R}^4$ la famille (e_1, e_2) avec :

$$e_1 = (1,1,1,1) \quad e_2 = (1,1,-1,-1).$$

Exercice 3. Déterminer une base et la dimension des espaces vectoriels suivants :
1. $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ -x + 3y + z = 0\}$
2. $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0 \text{ et } x - 3y = 0\}$
3. $E_3 = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P(0) = 0\}$
4. $E_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ c & 0 & a+b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$
5. $E_5 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \mid \exists a,b \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ae^x + bx\}$

Exercice 4. Déterminer une base et la dimension des espaces vectoriels suivants :
1. $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x - 2y + 3z = 0\}$
2. $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x = 2y = 3z\}$
3. $E_3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y = 0, y + z = 0, z + t = 0, t + x = 0\}$
4. $E_4 = \{P \in \mathbb{R}_4[X],\ P(1) = 0\}$

Exercice 5. On pose :

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3, x + y + z = 0 \text{ et } x + iy - z = 0\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$ et en déterminer une base et sa dimension.

Exercice 6. Déterminer la dimension de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 7. Soient $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. On pose $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X]\ ,\ A|P\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_n[X]\ ,\ P(a) = 0\}$.
1. Montrer que F est un sous-e.v. de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_n[X]$ et en donner une base.
3. Déterminer la dimension de F et en donner une base. En déduire une base de G.

Exercice 8. Déterminer le rang des familles suivantes :
1. $x_1 = (1,-1,1)$, $x_2 = (-1,1,-1)$, $x_3 = (0,1,1)$, $x_4 = (1,0,2)$,
2. $x_1 = (1,1,0,1)$, $x_2 = (1,-1,1,0)$, $x_3 = (2,0,1,1)$, $x_4 = (0,-2,1,-1)$.
3. $x_1 = (1,0,2,3)$, $x_2 = (7,4,2,-1)$, $x_3 = (5,2,4,7)$.

Exercice 9. Déterminer le rang des familles suivantes :
1. $x_1 = (0,1,1,1)$, $x_2 = (1,0,1,1)$, $x_3 = (1,1,0,1)$, $x_4 = (1,1,1,0)$.
2. $x_1 = (0,1,0,1)$, $x_2 = (1,-1,1,-1)$, $x_3 = (1,-1,-1,1)$, $x_4 = (1,1,1,1)$.

Exercice 10. Déterminer le rang des familles suivantes :
1. $(3, X^2+1, X^5 - 3X^2 + 2)$;
2. $(X^k(X-1)^{n-k})_{k[|0,n|]}$;
3. $(L_0, \ldots, L_n)$ où L_i est le i-ème polynôme de Lagrange associé à $a_0 < \cdots < a_n$ c'est à dire $L_i = \dfrac{\displaystyle\prod_{k \in [\![0,n]\!] \setminus \{i\}} (X - a_k)}{\displaystyle\prod_{k \in [\![0,n]\!] \setminus \{i\}} (a_i - a_k)}$

Exercice 11. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ des familles finies de E.
Montrer que :

$$\max(\mathrm{rg}\,(\mathcal{F}), \mathrm{rg}\,(\mathcal{F}')) \leq \mathrm{rg}\,(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}') \leq \mathrm{rg}\,(\mathcal{F}) + \mathrm{rg}\,(\mathcal{F}').$$

Exercice 12. Posons $F = \mathrm{Vect}\,(1, X+1, X^3 - X^2)$. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 13. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $a = (0,1,-1,2)$, $b = (1,3,0,2)$, $c = (2,1,-3,4)$, $d = (0,0,2,1)$ et $e = (-1,1,0,3)$. On pose $F = \mathrm{Vect}\,(a,b,c)$ et $G = \mathrm{Vect}\,(d,e)$. Déterminer les dimensions de $F, G, F \cap G$ et $F + G$.