Feuille d'exercices 28 : Espaces euclidiens

1 Produit scalaire et norme euclidienne associée

Exercice 1. Soit :

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & \mathbb{R}_n[X]\times\mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ & (P,Q) & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k). \end{array}$$

Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 2. Soit $(E, <\ ,\ >)$ un espace euclidien. Montrer que : $\forall x,y,z\in E$, $\|x-z\|^2 \leq 2(\|x-y\|^2+\|y-z\|^2)$.

Exercice 3. Soit $(E, <\ ,\ >)$ un espace euclidien. Soient $f,g\in\mathcal{L}(E)$ tels que :

$$\forall x\in E,\ \|f(x)\| = \|g(x)\|.$$

Montrer que :

$$\forall x,y\in E,\ < f(x), f(y) >=< g(x), g(y) > .$$

Exercice 4. Soit $\begin{array}{rccl} \phi: & \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (A,B) & \mapsto & \mathrm{tr}({}^tAB) \end{array}$.

On rappelle que $\mathrm{tr}(M)$ désigne la somme des coefficients diagonaux de M.

1. Montrer que ϕ définit un produit scalaire sur E.
2. En déduire que pour $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}\in\mathbb{R}^{n^2}$, $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right| \leq n\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2}$ et préciser les cas d'égalité.

Exercice 5. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, soient $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}^{+*}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Montrer que :

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} \geq n^2.$$

Etudier le cas d'égalité.

Exercice 6. Soient $a<b$, soit $f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ telle que f ne s'annule pas sur $[a,b]$.
Montrer que :

$$\int_a^b f(t)\,dt.\int_a^b \frac{1}{f(t)}dt \geq (b-a)^2.$$

et caractériser le cas d'égalité.

Exercice 7. On considère l'espace $E=\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et on pose :

$$\forall f,g\in E,\quad < f,g >= f(1)g(1)+\int_0^1 f'(t)g'(t)dt.$$

1. Montrer que $<\cdot,\cdot>$ définit un produit scalaire sur E.
2. Établir que :

$$\forall f\in E,\quad \left(f(1)+\int_0^1 f'(t)dt\right)^2 \leq 2\left(f(1)^2+\int_0^1 f'(t)^2dt\right).$$

Exercice 8. Soit $(E, <\ ,\ >)$ un espace euclidien. Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x_1,\dots,x_n\in E,\ \left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\|^2 \leq n\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^2.$$

2 Orthogonalité

Exercice 9. Soit E un espace euclidien.

1. Soit $f : E \to E$ vérifiant$f(0) = 0$ et : $\forall (x, y) \in E^2$, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.
   Montrer que f est linéaire.
2. Soient $f, g : E \to E$ vérifiant : $\forall (x, y) \in E^2$, $< x, f(y) >=< g(x), y >$.
   Montrer que f et g sont linéaires.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $e_1, \ldots, e_n \in E$ tels que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \|e_i\| = 1 \text{ et } \forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} < e_k|x >^2 .$$

Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille orthonormale de E, puis que c'est une base de E.
En déduire que E est de dimension finie.

Exercice 11. Soit E un espace préhilbertien. Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que :

$$(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp,$$

$$F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp.$$

Montrer l'égalité lorsque E est de plus de dimension finie.

Exercice 12. Orthonormaliser pour le produit scalaire canonique la famille de $\mathbb{R}^3$:

$$u_1 = (1, 1, 0),\ u_2 = (1, 0, 1),\ u_3 = (0, 1, 1).$$

Exercice 13. Orthonormaliser, pour le produit scalaire usuel, la base suivante de $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 = (0, 1, 1, 1),\ u_2 = (1, 0, 1, 1),\ u_3 = (1, 1, 0, 1),\ u_4 = (1, 1, 1, 0).$$

Exercice 14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On pose :

$$\forall P, Q \in E,\ (P|Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

1. Montrer que $(.|.)$ défini un produit scalaire sur E.
2. On pose $n = 3$. Orthonormaliser la base canonique de E pour le produit scalaire $(.|.)$.

Exercice 15. Montrer que l'application suivante est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{cccc} \phi : & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) & \mapsto & (x_1 - 2x_2)(y_1 - 2y_2) + x_2y_2 + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3) \end{array}.$$

Orthonormaliser pour ce produit scalaire la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 16. On définit $\begin{array}{cccc} \phi : & \mathbb{R}_2[X]^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (P, Q) & \mapsto & P(1)Q(1) + 2P'(1)Q'(1) + 3P''(1)Q''(1) \end{array}.$

1. Montrer que ϕ définit un produit scalaire.
2. Donner une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 17. Dans $\mathbb{R}^2$, déterminer si les applications suivantes définissent un produit scalaire, et, si oui, donner une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$:

1. $\phi : ((x, y), (x', y')) \mapsto 2xx' + 2yy' + xy' + x'y$.
2. $\phi : ((x, y), (x', y')) \mapsto 2xx' + yy' + 4xy' + 4x'y$.

Exercice 18. On définit $\begin{array}{cccc} \phi : & \mathbb{R}_2[X]^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (P, Q) & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{2} P(k)Q(k) \end{array}.$

1. Montrer que ϕ définit un produit scalaire.
2. Donner une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

Exercice 19. Soit E un espace euclidien, soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. On suppose que les matrices de f et de g dans une base orthonormée sont respectivement symétriques et antisymétriques.
Montrer que :

$$\forall x \in E,\ < f(x), g(x) >= 0,$$

et

$$\forall x \in E,\ \|(f - g)(x)\| = \|(f + g)(x)\|.$$

Exercice 20. On munit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ du produit scalaire défini par :

$$\forall f, g \in E,\ (f|g) = \int_0^1 fg.$$

On considère l'espace vectoriel $H = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$.
1. Soit $f \in H^\perp$. On pose $g : t \mapsto tf(t)$. Que peut-on dire de f et g ? En déduire que $f = 0$.
2. En déduire $H^\perp$ et $(H^\perp)^\perp$.

3 Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel

Exercice 21. Soit E un espace euclidien. Soit $u \in E \setminus \{0\}$ et soit $H = (\mathrm{Vect}\,(u))^\perp$. Soit p la projection orthogonale sur H et s la symétrie orthogonale par rapport à H, c'est-à-dire la symétrie par rapport à H parallèlement à $H^\perp$.
1. Montrer que :
$$\forall x \in E,\ p(x) = x - \frac{(x|u)}{\|u\|^2}u.$$
2. Montrer que :
$$\forall x \in E,\ s(x) = x - 2\frac{(x|u)}{\|u\|^2}u.$$

Exercice 22. On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel.
On pose :
$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y + z + t = 0,\ x - y + z - t = 0\}.$$
Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.

Exercice 23. On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel.
On pose :
$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + 2y + 3z + 4t = 0,\ x + 3y + 5z + 7t = 0\}.$$
Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.

Exercice 24. Soit p un projecteur de E espace vectoriel euclidien. L'objectif est de prouver que p est une projection orthogonale si et seulement si :
$$\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leq \|x\|.$$
1. Prouver que si p est un projecteur orthogonale alors : $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leq \|x\|$..
2. On suppose désormais que : $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leq \|x\|$.
   (a) Soit $x \in \mathrm{Im}p$ et $y \in \mathrm{Ker}\,p$. En considérant le vecteur $u = x + \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que :
   $$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda^2\|y\|^2 + 2\lambda(x|y) \geq 0$$
   (b) En déduire que $(x|y) = 0$
   (c) Montrer que p est un projecteur orthogonal.

Exercice 25. Soit E un espace euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si
$$\forall x, y \in E, \quad < p(x), y >=< x, p(y) > .$$

Exercice 26. Déterminer la projection orthogonale du polynôme X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire définie par : $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_2[X],\ < P, Q >= \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

Exercice 27. Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On définit :

$$\forall P, Q \in E,\ (P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

1. Montrer que $(.|.)$ est un produit scalaire sur E. E est-il un espace euclidien ?
2. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.
3. Calculer :

$$\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt.$$

Exercice 28. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel.
Soit U la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer :

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|M - aI_n - bU\|.$$

Exercice 29. On note $E = \mathcal{C}([-1,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(.|.)$ défini par :

$$\forall f, g \in E,\ (f|g) = \int_{-1}^1 fg.$$

On note $\|.\|$ la norme associée à $(.|.)$ et d la distance associée à $\|.\|$.
Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont dits orthogonaux si : $\forall (x,y) \in F \times G,\ (x|y) = 0$.
Soit I (resp. P) l'ensemble des fonctions impaires (resp. paires).

1. Montrer que I et P sont deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires orthogonaux dans E.
2. Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{2+x}$. Calculer $d(f, P)$.

Exercice 30. Soient E un espace euclidien de dimension n, $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$. On définit le déterminant de Gram de ces vecteurs par :

$$Gram(x_1, \dots, x_p) = \begin{vmatrix} < x_1, x_1 > & \dots & < x_1, x_p > \\ \vdots & & \vdots \\ < x_p, x_1 > & & < x_p, x_p > \end{vmatrix}.$$

1. Montrer que $(x_1, \dots, x_p)$ est liée ssi $Gram(x_1, \dots, x_p) = 0$.
   On suppose désormais et dans toute la suite de l'exercice que $(x_1, \dots, x_p)$ est libre et on note $F = \text{Vect}\,(x_1, \dots, x_p)$.
2. Si B est une base orthonormée de F, montrer que $Gram(x_1, \dots, x_p) = \det_B(x_1, \dots, x_p)^2$.
3. Montrer que pour $x \in E$, $d(x, F)^2 = \dfrac{Gram(x, x_1, \dots, x_p)}{Gram(x_1, \dots, x_p)}$.

Polynômes orthogonaux

Exercice 31. On considère l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$, et on pose :

$$< P, Q > = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

Pour tout $0 \le p \le n$, on pose $Q_p(X) = X^p(X-1)^p$ et $L_p(X) = Q_p^{(p)}$.

1. Montrer que $< \cdot, \cdot >$ définit un produit scalaire sur E.
2. Montrer que L_p est un polynôme dont on précisera son degré et son coefficient dominant.
3. Calculer par intégration par parties $< L_p, L_q >$ pour $p \neq q$. En déduire que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Déterminer enfin la norme euclidienne de L_p.

Exercice 32. On considère une fonction continue strictement positive $\omega : [a,b] \to \mathbb{R}$, et on pose :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \quad < P, Q > = \int_a^b P(t)Q(t)\omega(t)dt.$$

1. Montrer que $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Etablir l'existence et l'unicité d'une base orthonormée de polynômes $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ tels que $\deg(P_k) = k$ et $< X^k, P_k >> 0$ pour $0 \le k \le n$.
   En déduire que pour tout $1 \le k \le n$, P_i est orthogonale à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

3. Etablir, pour $0 \leq k \leq n$, qu'il existe a_k, b_k, c_k (avec $c_0 = 0$) tels que :

$$XP_k(X) = a_k P_{k+1}(X) + b_k P_k(X) + c_k P_{k-1}(X).$$

4. Montrer que $< P_k, 1 >= 0$ pour $k \geq 1$, puis en déduire que P_k a au moins une racine x_1 appartenant à $]a, b[$ en laquelle il change de signe.
5. On note alors $x_1, \dots, x_p$ les racines d'ordre impaires de P_k appartenant à $]a, b[$ (2 à 2 distonctes). En considérant le produit scalaire $< P_k, (X - x_1) \dots (X - x_p) >$, en déduire que nécessairement $p = k$, et que les racines de P_k sont simples, réelles et dans $]a, b[$.