Feuille d'exercices 7 : Équations différentielles

1 Equations différentielles du 1er ordre

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + \dfrac{1}{1+x^2}y = 0$
2. $\sin x y' + (\cos x)y = 0$ sur $]0,\pi[$
3. $y' - 2xy = \mathrm{sh}\,(x) - 2x\mathrm{ch}\,(x)$
4. $y' + y = \dfrac{1}{1+e^x}$
5. $(1-t)y' - y = t$ sur $]1,+\infty[$
6. $y' + y = 2e^x + 4\sin x + 3\cos x$
7. $y' + 2y = x^2$

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + \dfrac{1}{x}y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$
2. $y' - \dfrac{2}{x^3}y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $y(1) = 2$
3. $y' - 2xy = xe^{x^2}$
4. $y' + y = e^{-x} + e^{-2x}$
5. $y' - 2y = (x+1)e^x$
6. $y' - y\tan x = \cos^2(x)$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$
7. $y' + y = xe^x\cos x$
8. $2y' - y = \sin x$
9. $y' + y = 2\cos x + \cos(2x)$

Exercice 3. Après avoir déterminé une solution évidente, résoudre l'équation différentielle suivante :
$y' + \sin(x)y = \sin(2x)$

Exercice 4. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $(x\ln x)y' - y = -\dfrac{1}{x}(\ln x + 1)$ sur $]1,+\infty[$
2. $(1+x^2)y' + xy = \sqrt{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$
3. $(1-x)y' + y = \dfrac{x-1}{x}$ sur $]0,1[$
4. $(1+t^2)x' + x = \arctan t$ sur $\mathbb{R}$
5. $xy' + (x-2)y = x-2$ sur $\mathbb{R}_+^*$
6. $(x^4+1)y' - x^3y = x^5 - x^3 + 2x + 1$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 5. Soit l'équation différentielle : $(x+1)y' + xy = x^2 - x + 1$
1. Trouver une solution polynomiale.
2. En déduire l'ensemble des solutions sur $]-1,+\infty[$.
3. Déterminer la solution vérifiant $y(1) = 1$.

Exercice 6.
1. Résoudre sur $]1,+\infty[$ l'équation différentielle suivante $(1-t)y' - y = t$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante $(1-t)y' - y = t$.

Exercice 7. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante $xy' - (1+x)y = -x^2$.

Exercice 8. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $x(x-1)y' + (2x-1)y = 1$

Exercice 9. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante $xy' - 2y - x^4 = 0$.

Exercice 10. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante $xy' - 2y = (x-1)(x+1)^3$.

Exercice 11. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que les deux équations différentielles $y' - y = 1 - x$ et $xy' - y = f(x)$ aient au moins une solution commune $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exercice 12. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dérivables telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x)f(-x) = 1$

2 Equations différentielles du 2nd ordre

Exercice 13. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 2y' - 3y = 0$
2. $y'' + 4y' + 4y = 0$
3. $y'' + 2y' + 4y = 0$ dans $\mathbb{R}$
4. $y'' + 2y' + 4y = 0$ dans $\mathbb{C}$

Exercice 14. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 3y' + 2y = e^x$
2. $y'' - 2y' + y = 2\text{sh}\, x$

Exercice 15. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + y = \dfrac{1}{4}\cos(3x)$
2. $y'' + y = \cos^3 x$

Exercice 16. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - y' + (1+i)y = 0$
2. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$
3. $y'' + 4y = \sin(x) + \sin(2x)$
4. $y'' - 3y' + 2y = e^x \cos x$
5. $y'' - y' - 2y = x^2 - x$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$

Exercice 17. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $e^{-2x}y'' - e^{-2x}y' - y = 1$.
On pourra poser : $t = e^x$.

Exercice 18. Résoudre les équations différentielles suivantes :
1. $y'' + y' \tan x - y\cos^2(x) = 0$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ en posant $t = \sin x$
2. $(1-x^2)y'' - xy' + 4y = \arccos x$ sur $]-1, 1[$ en posant $x = \cos t$

Exercice 19. Soit $m \in \mathbb{R}^*$, on considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \quad (1+x^2)^2 y'' + 2x(1+x^2)y' + m^2 y = 0.$$

Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$. On pourra poser $x = \tan t$.
Préciser les solutions dans le cas particulier $m = 2$.

Exercice 20. Résoudre $xy'' + 2y' + xy = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
On pourra poser $z(x) = xy(x)$.

Exercice 21. Résoudre les équations différentielles suivantes :
1. $xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant $z(x) = xy(x)$
2. $x^2y'' - 2xy' + (2-x^2)y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant $z(x) = \dfrac{y(x)}{x}$
3. $(1+e^x)y'' + y' - e^x y = 0$ sur $\mathbb{R}$ en posant $z = y' + y$

Exercice 22. Résoudre l'équation différentielle suivante, avec $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$y'' - 2y' + \lambda y = e^{2x} + e^x \sin x.$$

Exercice 23. Résoudre l'équation différentielle suivante : $y'' + y = |x| + 1$.

Exercice 24. Soit x et y des fonctions de la variable t. Résoudre les système différentiels suivants :
1. $\begin{cases} x' = y + t^2 \\ y' = x - t^2 \end{cases}$
   On pourra poser $u = x + y$ et $v = x - y$.
2. $\begin{cases} x' = -7x + y + 1 \\ y' = -2x - 5y \end{cases}$
   On pourra trouver une équation différentielle du second ordre satisfaite par x.

Exercice 25. Déterminer l'ensemble des couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que toute solution sur $]0, +\infty[$ de $y'' + ay' + by = 0$ soit bornée.

Exercice 26. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(-x).$$

Exercice 27. Trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(x) + \int_0^1 f(t)dt.$$

Exercice 28. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On définit ϕ par $\phi(x) = f(x) - \displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)dt$.
1. Montrer que ϕ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et calculer ϕ''.
2. Donner l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^2$ satisfaisant $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - \displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)dt = x^2$.

Exercice 29. Trouver toutes les fonctions deux fois dérivables vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

On pourra commencer par montrer que $f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.