Corrigé de la feuille d'exercices 6

Exercice 1. 1. Posons $f : t \mapsto e^{-t^2}$. On sait que f est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, Ψ est définie sur $\mathbb{R}$.

2. f étant continue sur $\mathbb{R}$, elle admet une primitive F sur $\mathbb{R}$. On a alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ \Psi(x) = F(3x) - F(x)$.
Or, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto 3x$ également. Ainsi, par différence et composée, Ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
$$\Psi'(x)3F'(3x) - F'(x) = 3e^{-9x^2} - e^{-x^2} = e^{-x^2}(3e^{-8x^2} - 1).$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
$$\begin{aligned}\Psi'(x) \geq 0 \quad &\iff \quad 3e^{-8x^2} - 1 \geq 0\\ &\iff \quad e^{-8x^2} \geq \frac{1}{3}\\ &\iff \quad -8x^2 \geq -\ln(3)\\ &\iff \quad x^2 \leq \frac{\ln 3}{8}\\ &\iff \quad -\sqrt{\frac{\ln 3}{8}} \leq x \leq \sqrt{\frac{\ln 3}{8}}.\end{aligned}$$
Ainsi, Ψ est croissante sur $\left[-\sqrt{\frac{\ln 3}{8}}, \sqrt{\frac{\ln 3}{8}}\right]$, décroissante sur $\left]-\infty, -\sqrt{\frac{\ln 3}{8}}\right[$ et sur $\left[\sqrt{\frac{\ln 3}{8}}, +\infty\right[$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in [x, 3x]$,
On a : $0 \leq x \leq t \leq 3x$.
Puis : $x^2 \leq t^2 \leq 9x^2$.
D'où : $-9x^2 \leq -t^2 \leq -x^2$.
Ainsi : $e^{-9x^2} \leq e^{-t^2} \leq e^{-x^2}$ En intégrant (les bornes étant dans le bon sens $x \leq 3x$), on obtient :
$$2xe^{-9x^2} \leq \Psi(x) \leq 2xe^{-x^2}.$$
Or, par croissances comparées $\lim\limits_{x \to +\infty} 2xe^{-9x^2} = 0 = \lim\limits_{x \to +\infty} 2xe^{-x^2}$. D'où par théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \Psi(x) = 0$.

Exercice 2. • Une primitive de ln sur $\mathbb{R}_+^*$ est $F : x \mapsto \displaystyle\int_1^x \ln(t)dt$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On effectue l'intégration par parties :
$$\begin{array}{ll} u'(t) = 1, & v(t) = \ln(t) \\ u(t) = t & v'(t) = \dfrac{1}{t} \end{array}.$$
u et v sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a alors :
$$\begin{aligned}F(x) &= \Big[t \ln t\Big]_1^x - \int_1^x \frac{t}{t} dt\\ &= x \ln x - \int_1^x dt\\ &= x \ln x - x + 1\end{aligned}$$
donc $x \mapsto x \ln x - x$ est une primitive de ln sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Une primitive de arctan sur $\mathbb{R}$ est $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \arctan t dt$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On effectue l'intégration par parties :
$$\begin{array}{ll} u'(t) = 1, & v(t) = \arctan(t) \\ u(t) = t & v'(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \end{array}$$

.
u et v sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,x]$ (ou $[x,0]$). On a alors :

$$\begin{aligned} F(x) &= \Big[t\arctan(t)\Big]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}dt \\ &= x\arctan x - \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^x \\ &= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \end{aligned}$$

donc $x \mapsto x\arctan x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$ est une primitive de arctan sur $\mathbb{R}$.

- $x \mapsto \dfrac{x}{\cos^2(x)}$ est continue sur tout intervalle de la forme $\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$. Soient α, x appartenant au même intervalle.
  Calculons $\displaystyle\int_\alpha^x \frac{t}{\cos^2(t)}dt$.
  On effectue l'intégration par parties :

$$\begin{array}{ll} u'(t) = \dfrac{1}{\cos^2(t)}, & v(t) = t \\ u(t) = \tan(t) & v'(t) = 1 \end{array}$$

  .
  u et v sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha,x]$ (ou $[x,\alpha]$). On a alors :

$$\begin{aligned} \int_\alpha^x \frac{t}{\cos^2(t)}dt &= [t\tan(t)]_\alpha^x - \int_\alpha^x \tan(t)dt \\ &= x\tan x - \int_\alpha^x \frac{\sin(t)}{\cos(t)}dt + C_1 \\ &= x\tan(x) + \Big[\ln|\cos(t)|\Big]_\alpha^x + C_1 \\ &= x\tan(x) + \ln|\cos(x)| + C_2 \end{aligned}$$

  où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
  Donc $x \mapsto x\tan(x) + \ln|\cos(x)|$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{\cos^2(x)}$ sur $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$.

Exercice 3. Intégrales de Wallis

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
   $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n-1} \times \sin t\ dt$.
   On effectue l'intégration par parties :

$$\begin{array}{ll} u'(t) = \sin(t), & v(t) = (\sin(t))^{n-1} \\ u(t) = -\cos(t) & v'(t) = (n-1)(\sin(t))^{n-2}\cos(t) \end{array}$$

   $\sin^{n-1}$ et $-\cos$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\frac{\pi}{2}]$. On a alors :

$$\begin{aligned} I_n &= \Big[(\sin t)^{n-1}(-\cos t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)(\sin t)^{n-2}\cos t(-\cos t)dt = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n-2}\cos^2 t dt \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n-2}(1-\sin^2 t)dt = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \end{aligned}$$

   Ainsi, $nI_n = (n-1)I_{n-2}$. Donc : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\},\ I_n = \dfrac{(n-1)}{n}I_{n-2}$.

2. Soit $p \in \mathbb{N}$.
   - Réflexion :
     D'après la relation de récurrence précédente, on a :

$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1}I_{2p-1} = \frac{(2p)(2p-2)}{(2p+1)(2p-1)}I_{2p-3}$$

En répétant l'opération, on obtient :

$$I_{2p+1} = \frac{2p(2p-2)\cdots\times 2}{(2p+1)(2p-1)\cdots\times 3} I_1$$

Or, $2p(2p-2)...\times 2 = 2^p p!$ et $(2p+1)(2p-1)\cdots\times 3 = \dfrac{(2p+1)!}{2p(2p-2)\cdots 2} = \dfrac{(2p+1)!}{2^p p!}$.
Enfin, $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)dt = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}}$.
Finalement, on obtient :

$$I_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Rédaction :
Montrons par récurrence que : $\forall p \in \mathbb{N},\ I_{2p+1} = \dfrac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$.

- Pour $p = 0$, $I_1 = 1$ et $\dfrac{(2^0 0!)^2}{1!} = 1$ donc la propriété est vraie pour $p = 0$.
- Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons que $I_{2p+1} = \dfrac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$.
  D'après la formule de récurrence démontré en 1., on a :

$$\begin{aligned} I_{2(p+1)+1} = I_{2p+3} &= \frac{2p+2}{2p+3} I_{2p+1} \\ &= \frac{(2p+2)}{2p+3} \times \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} \\ &= \frac{(2(p+1))^2}{(2p+3)(2p+2)} \times \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} \\ &= \frac{\left(2^{p+1}(p+1)!\right)^2}{(2p+3)!} \end{aligned}$$

- On a donc montré par récurrence que : $\forall p \in \mathbb{N},\ I_{2p+1} = \dfrac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$.

- Réflexion :
De façon analogue, d'après la relation de récurrence, on a :

$$I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)}{2p(2p-2)} I_{2p-4}$$

Ainsi, en itérant, on obtient :

$$\begin{aligned} I_{2p} &= \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}{2p(2p-2)\cdots\times 2} I_0 \\ &= \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} I_0 \end{aligned}$$

Or, $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$. Ainsi,

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \times \frac{\pi}{2}.$$

Rédaction : Montrons par récurrence que : $\forall p \in \mathbb{N},\ I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.

- Pour $p = 0$, $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{0!}{(2^0 0!)^2} \times \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$ donc la propriété est vraie pour $p = 0$.
- Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons que $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.

D'après la formule de récurrence démontré en 1., on a :

$$\begin{aligned}
I_{2(p+1)} = I_{2p+2} &= \frac{2p+1}{2p+2} I_{2p} \\
&= \frac{(2p+1)}{2p+2} \times \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2p+1)(2p+2)}{(2p+2)(2p+2)} \times \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2p+1)(2p+2)}{2^2(p+1)^2} \times \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2p+2)!}{(2^{p+1}(p+1)!)^2} \times \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

- On a donc montré par récurrence que : $\forall p \in \mathbb{N},\ I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 4. • Calculer l'intégrale $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2t} dt}{1+e^t}$.

On effectue le changement de variable $u = e^t$. On a $du = e^t dt$, $dt = \frac{du}{u}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_1^e \frac{u^2}{u(1+u)} du \\
&= \int_1^e \frac{u}{1+u} du \\
&= \int_1^e \left(1 - \frac{1}{1+u}\right) du \\
&= e - 1 - (\ln(1+e) - \ln(2)) \\
&= \ln(2) + e - 1 - \ln(1+e).
\end{aligned}$$

- Calculer l'intégrale : $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

  On effectue le changement de variable : $x = \cos t$. On a $dx = -\sin t dt$.
  Ainsi :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1-\cos^2 t}(-\sin t) dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin t| \sin t dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2t)}{2} dt \\
&= \frac{\pi}{4} - \left[\frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

- Calculer l'intégrale : $I_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^4}{x^{10}+1} dx$.

  On effectue le changement de variable : $t = x^5$. On a $dt = 5x^4 dx$, $\dfrac{1}{5} dt = x^4 dx$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^1 \frac{1}{5} \times \frac{1}{t^2+1} dt \\
&= \frac{1}{5} \int_0^1 | \frac{1}{t^2+1} dt \\
&= \frac{1}{5} \Big[\arctan(t)\Big]_0^1 \\
&= \frac{1}{5} \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) \\
&= \frac{\pi}{20}
\end{aligned}$$

Exercice 5. • $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ est continue sur $]-a, a[$.

Soit $\alpha, X \in]-a, a[$. On calcule $\displaystyle\int_\alpha^X \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$.
On effectue le changement de variable : $x = at$. On a $dx = adt$.
Ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^X \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx &= a \int_{\frac{\alpha}{a}}^{\frac{X}{a}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - a^2 t^2}} dt \\
&= \frac{a}{|a|} \int_{\frac{\alpha}{a}}^{\frac{X}{a}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \\
&= \Big[\arcsin(t)\Big]_{\frac{\alpha}{a}}^{\frac{X}{a}} \\
&= \arcsin\left(\frac{X}{a}\right) + C
\end{aligned}$$

où $C \in \mathbb{R}$.
Ainsi, $x \mapsto \arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ sur $]-a, a[$.

• $x \mapsto \dfrac{1}{a^2+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $\alpha, X \in \mathbb{R}$. On calcule $\displaystyle\int_\alpha^X \frac{1}{a^2+x^2} dx$.
On effectue le changement de variable : $x = at$. On a $dx = adt$.
Ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^X \frac{1}{a^2+x^2} dx &= a \int_{\frac{\alpha}{a}}^{\frac{X}{a}} \frac{1}{a^2 + a^2 t^2} dt \\
&= \frac{1}{a} \int_{\frac{\alpha}{a}}^{\frac{X}{a}} \frac{1}{1+t^2} dt \\
&= \frac{1}{a} \Big[\arctan(t)\Big]_{\frac{\alpha}{a}}^{\frac{X}{a}} \\
&= \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{X}{a}\right) + C
\end{aligned}$$

où $C \in \mathbb{R}$.
Ainsi, $x \mapsto \dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{a^2+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. 1. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, on a :

$$\begin{aligned}
\sin x &= 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) \\
&= 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\tan\left(\frac{x}{2}\right) \\
&= \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

2. • f est continue sur $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k\pi,(k+1)\pi[$.

Soit $a, x \in]k\pi,(k+1)\pi[$, $k\in\mathbb{Z}$. On cherche à calculer $\displaystyle\int_a^x \frac{1}{\sin(t)}dt$.

On effectue le changement de variable $u=\tan(\frac{t}{2})$. On a $du=\dfrac{(1+\tan^2(\frac{t}{2})}{2}dt$, $dt=\dfrac{2du}{1+u^2}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_a^x \frac{1}{\sin(t)}dt &= \int_{\tan\left(\frac{a}{2}\right)}^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{(1+u^2)}{2u}\times\frac{2}{1+u^2}du\\ &= \int_{\tan\left(\frac{a}{2}\right)}^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{1}{u}du\\ &= \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C_k\end{aligned}$$

où $C_k\in\mathbb{R}$. Finalement, $x\mapsto \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|$ est une primitive de $x\mapsto \dfrac{1}{\sin(x)}$ sur $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k\pi,(k+1)\pi[$.

• g est continue sur $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$. On cherche à calculer $\displaystyle\int_a^x \frac{1}{\cos(t)}dt=\int_a^x \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}dt$.

On effectue le changement de variable $u=\dfrac{\pi}{2}-t$. On a $du=-dt$.

$$\begin{aligned}\int_a^x \frac{1}{\cos(t)}dt &= -\int_{\frac{\pi}{2}-a}^{\frac{\pi}{2}-x}\frac{1}{\sin(u)}du\\ &= -\left[\ln\left|\tan\left(\frac{u}{2}\right)\right|\right]_{\frac{\pi}{2}-a}^{\frac{\pi}{2}-x} \quad \text{d'après le point précédent.}\\ &= -\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right| + C_k\\ &= -\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right| + C_k\\ &= -\ln\left|\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right)}\right| + C_k\\ &= -\ln\left|\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}\right| + C_k\\ &= \ln\left|\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}\right| + C_k\\ &= \ln\left|\tan\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right| + C_k\end{aligned}$$

Finalement, $x\mapsto \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$ est une primitive de $x\mapsto\dfrac{1}{\cos(x)}$ sur $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$.

Exercice 7. 1. Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\{\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$, on a :

$$\begin{aligned}\sin x &= 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)\\ &= 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\tan\left(\frac{x}{2}\right)\\ &= \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\end{aligned}$$

2. On effectue le changement de variable $u=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$. On a : $du=\dfrac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx$, $dx=\dfrac{2du}{1+u^2}$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\sin(x)} &= \int_0^1 \frac{2+\frac{2u}{1+u^2}}{\times}\frac{2}{1+u^2}du \\ &= 2\int_0^1 \frac{1}{2u^2+2u+2}du \\ &= \int_0^1 \frac{1}{u^2+u+1}du\end{aligned}$$

Le discriminant du trinôme $1+u+u^2$ vaut $\Delta = -3 < 0$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$1+u+u^2 = \left(u+\frac{1}{2}\right)^2 + 1 - \frac{1}{4} = \left(u+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

donc

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\sin(x)} &= \int_0^1 \frac{1}{1+u+u^2}du \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \int_0^1 \frac{du}{\left(\frac{u+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1} \\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \int_0^1 \frac{du}{\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\end{aligned}$$

On effectue le changement de variable : $t = \dfrac{2u+1}{\sqrt{3}}$. On a : $dt = \dfrac{2}{\sqrt{3}}du$.
Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\sin(x)} &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{3}{\sqrt{3}}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{t^2+1}dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1}dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \Big[\arctan(t)\Big]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\sqrt{3}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right] \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right] \\ &= \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Exercice 8.

- On reconnait une fonction sous la forme $-\frac{1}{2}u'u^{\frac{1}{2}}$ avec $u : x \mapsto 1-x^2$.
  Ainsi, $x \mapsto -\dfrac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}$ est une primitive de f sur $[-1,1]$.
- On reconnait une fonction sous la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u : x \mapsto 1+e^x$.
  Ainsi, $x \mapsto 2\sqrt{1+e^x}$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.
- On reconnait une fonction sous la forme $u'u^3$ avec $u : x \mapsto \ln(3x+6)$.
  Ainsi, $x \mapsto \dfrac{(\ln(3x+6))^4}{4}$ est une primitive de h sur $]-2,+\infty[$.
- On reconnait une fonction sous la forme $\dfrac{u'}{u^4} = u'u^{-4}$ où $u : x \mapsto x^2-5x+9$.
  Ainsi, $x \mapsto -\dfrac{1}{3(x^2-5x+9)^3}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de l.

Exercice 9. • Le discriminant de x^2-5x+6 est $\Delta = 25-24=1$. Ses racines sont donc 2 et 3.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{2,3\}$, $\dfrac{1}{x^2-5x+63} = \dfrac{1}{(x-2)(x-3)}$.

Cherchons $a,b\in\mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2,3\}$, $\dfrac{1}{x^2-5x+63} = \dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{x-3}$.

Soit $a,b\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
& \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2,3\},\ \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x-2}+\frac{b}{x-3} \\
\iff\ & \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2,3\},\ \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{(a+b)x-3a-2b}{(x-2)(x-3)} \\
\iff\ & \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2,3\},\ 1 = (a+b)x-3a-2b \\
\iff\ & \begin{cases} a+b=0 \\ -3a-2b=1 \end{cases} \\
\iff\ & \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2,3\},\ \frac{1}{x^2-5x+6} = -\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}.$$

Donc, la fonction $x\mapsto -\ln(|x-2|)+\ln(|x-3|)$ est une primitive de f sur $]-\infty,2[$, $]2,3[$, $]3,+\infty[$.

- On sait que : $\forall x\in\mathbb{R},\ x^2+2x+1=(x+1)^2$.

  Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\},\ g(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

  La fonction $x\mapsto -\dfrac{1}{x+1}$ est une primitive de g sur $]-\infty,-1[$, $]-1,+\infty[$.

- Le discriminant du trinôme $1+x+x^2$ vaut $\Delta=-3<0$.

  Soit $x\in\mathbb{R}$. On a

$$1+x+x^2 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1-\frac{1}{4} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

  donc

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1}{1+t+t^2}dt &= \int_0^x \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt \\
&= \int_0^x \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\
&= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\int_0^x \frac{dt}{\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1} \\
&= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\int_0^x \frac{dt}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}
\end{aligned}$$

  On effectue le changement de variable : $u=\dfrac{2t+1}{\sqrt{3}}$. On a : $du=\dfrac{2}{\sqrt{3}}dt$.

  Ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1}{1+t+t^2}dt &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{u^2+1}du \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{u^2+1}du \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\Big[\arctan(u)\Big]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C
\end{aligned}$$

où $C \in \mathbb{R}$.
Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x+x^2}$ est $x \mapsto \dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$.

Exercice 10. • Le discriminant du polynôme au dénominateur est strictement négatif.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f(x) = \frac{(x^2+x+1)-2x}{x^2+x+1} = 1 - \frac{2x}{x^2+x+1} = 1 - \frac{2x+1-1}{x^2+x+1} = 1 - \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{x^2+x+1}$$

On a déjà vu que $x \mapsto \dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$.
Finalement, $x \mapsto x - \ln(x^2+x+1) + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

• Soient $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\},\ \frac{2x+1}{(x+1)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} \quad &\iff \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\},\ \frac{2x+1}{(x+1)^2} = \frac{a(x+1)+b}{(x+1)^2} \\
&\iff \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\},\ 2x+1 = ax+a+b \\
&\iff \quad \left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ a+b = 1 \end{array}\right. \\
&\iff \quad \left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = -1 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\},\ \frac{2x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Ainsi, $x \mapsto 2\ln|x+1| + \dfrac{1}{x+1}$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{2x+1}{(x+1)^2}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Exercice 11. 1. On procède par intégration par parties.
Une primitive de arcsin sur $]-1,1[$ est $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \arcsin(t)dt$.
Soit $x \in]-1,1[$. On effectue l'intégration par parties :

$$\begin{array}{ll} u'(t) = 1, & v(t) = \arcsin(t) \\ u(t) = t & v'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} \end{array}.$$

u et v sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$. On a alors :

$$F(x) = [t\arcsin(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt = x\arcsin(x) + \left[\sqrt{1-t^2}\right]_0^x = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} - 1$$

Ainsi, une primitive sur $]-1,1[$ de arcsin est : $x \mapsto x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$.

2. On procède par double intégration par parties :
Soit $x \in \mathbb{R}$. On effectue l'intégration par parties :

$$\begin{array}{ll} u_1'(t) = e^{3t}, & v_1(t) = t^2+3t+1 \\ u_1(t) = \dfrac{e^{3t}}{3} & v_1'(t) = 2t+3 \end{array}.$$

u_1 et v_1 sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$\int_0^x (t^2+3t+1)e^{3t}dt = \left[\frac{(t^2+3t+1)}{3}e^{3t}\right] - \frac{1}{3}\int_0^x (2t+3)e^{3t}dt = \frac{(x^2+3x+1)}{3}e^{3x} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\int_0^x (2t+3)e^{3t}dt.$$

On effectue de nouveau une intégration par parties :

$$\begin{array}{ll} u_2' = e^{3t}, & v_2(t) = 2t+3 \\ u_2(t) = \dfrac{e^{3t}}{3} & v_2'(t) = 2 \end{array}.$$

u_2 et v_2 sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned}\int_0^x (t^2+3t+1)e^{3t}dt =& \frac{(x^2+3x+1)}{3}e^{3x} - \frac{1}{3} - \frac{1}{9}\Big[(2t+3)e^{3t}\Big]_0^x + \frac{2}{9}\int_0^x e^{3t}dt \\ =& \frac{(x^2+3x+1)}{3}e^{3x} - \frac{1}{3} - \frac{1}{9}(2x+3)e^{3x} + \frac{1}{3} + \frac{2}{27}\Big[\frac{e^{3t}}{3}\Big]_0^x \\ =& \frac{(x^2+3x+1)}{3}e^{3x} - \frac{1}{3} - \frac{1}{9}(2x+3)e^{3x} + \frac{1}{3} + \frac{2}{27}e^{3x} - \frac{2}{27} \\ =& \frac{(9x^2+21x+2)}{27}e^{3x}\end{aligned}$$

Ainsi, une primitive de $x \mapsto (x^2+3x+1)e^{3x}$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \dfrac{(9x^2+21x+2)}{27}e^{3x}$.

3. On procède par intégration par parties.
   Une primitive de $x \mapsto x^2 \cos x$ sur $\mathbb{R}$ est $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x t^2\cos(t)dt$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. On effectue l'intégration par parties :

$$\begin{array}{ll} u_1'(t) = \cos(t), & v_1(t) = t^2 \\ u_1(t) = \sin(t) & v_1'(t) = 2t \end{array}.$$

   u_1 et v_1 sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$\int_0^x t^2\cos t dt = \Big[t^2\sin(t)\Big]_0^x - 2\int_0^x t\sin(t)dt = x^2\sin(x) - 2\int_0^x t\sin(t)dt.$$

   On effectue de nouveau une intégration par parties :

$$\begin{array}{ll} u_2'(t) = \sin(t), & v_1(t) = t \\ u_2(t) = -\cos(t) & v_1'(t) = 1 \end{array}.$$

   u_2 et v_2 sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$\int_0^x t^2\cos t dt = x^2\sin(x)+2\Big[t\cos(t)\Big]_0^x-2\int_0^x \cos(t)dt = x^2\sin(x)+2x\cos(x)-2\Big[\sin(t)\Big]_0^x = x^2\sin(x)+2x\cos(x)-2\sin(x).$$

   Ainsi, une primitive de $x \mapsto x^2\cos(x)$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto x^2\sin(x)+2x\cos(x)-2\sin(x)$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $(x\mathrm{sh}\,(x))^2 = x^2 \times \dfrac{(e^{2x}-2+e^{-2x})}{4}$.

$$\int_0^x (t\mathrm{sh}\,(t))^2dt = \frac{1}{4}\int_0^x t^2(e^{2t}-2+e^{-2t})dt = \frac{1}{4}\int_0^x t^2(e^{2t}+e^{-2t})dt - \frac{1}{2}\int_0^x 1dt = \frac{1}{4}\int_0^x t^2(e^{2t}+e^{-2t})dt - \frac{1}{2}x.$$

   On calcule la première intégrale par une double intégration par parties :

$$\begin{array}{ll} u_1'(t) = e^{2t}+e^{-2t}, & v_1(t) = t^2 \\ u_1(t) = \dfrac{e^{2t}-e^{-2t}}{2} & v_1'(t) = 2t \end{array}.$$

   u_1 et v_1 sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$\int_0^x t^2(e^{2t}+e^{-2t})dt = \Big[\frac{t^2(e^{2t}-e^{-2t})}{2}\Big]_0^x - \int_0^x t(e^{2t}-e^{-2t})dt = \frac{x^2(e^{2x}-e^{-2x})}{2} - \int_0^x t(e^{2t}-e^{-2t})dt$$

   On effectue l'intégration par parties :

$$\begin{array}{ll} u_2'(t) = e^{2t}-e^{-2t}, & v_2(t) = t \\ u_2(t) = \dfrac{e^{2t}+e^{-2t}}{2} & v_2'(t) = 1 \end{array}.$$

   u_2 et v_2 sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned}\int_0^x t^2(e^{2t}+e^{-2t})dt =& \frac{x^2(e^{2x}-e^{-2x})}{2} - \Big[\frac{t(e^{2t}+e^{-2t})}{2}\Big]_0^x + \int_0^x \frac{e^{2t}+e^{-2t}}{2}dt \\ =& \frac{x^2(e^{2x}-e^{-2x})}{2} - \frac{x(e^{2x}+e^{-2x})}{2} + \int_0^x \frac{e^{2t}+e^{-2t}}{2}dt \\ =& \frac{x^2(e^{2x}-e^{-2x})}{2} - \frac{x(e^{2x}+e^{-2x})}{2} + \Big[\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{4}\Big]_0^x \\ =& \frac{x^2(e^{2x}-e^{-2x})}{2} - \frac{x(e^{2x}+e^{-2x})}{2} + \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{4}\end{aligned}$$

Ainsi,
$$\int_0^x (t\mathrm{sh}\,(t))^2 dt = \frac{x^2(e^{2x}-e^{-2x})}{8} - \frac{x(e^{2x}+e^{-2x})}{8} + \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{16} - \frac{1}{2}x$$
Donc $x \mapsto \dfrac{x^2(e^{2x}-e^{-2x})}{8} - \dfrac{x(e^{2x}+e^{-2x})}{8} + \dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{16} - \dfrac{1}{2}x$ est une primitive de $x \mapsto (x\mathrm{sh}\,(x))^2$ sur $\mathbb{R}$.

5. **Méthode 1 :** $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \sin(\ln t)dt$ est une primitive de $x \mapsto \sin(\ln x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
On effectue le changement de variable $u = \ln(t)$ ie $t = e^u$. On a : $dt = e^u du$.
Ainsi,
$$\begin{aligned}\int_1^x \sin(\ln t)dt &= \int_0^{\ln x} e^u \sin(u)du \\ &= \int_0^1 e^u \mathrm{Im}\left(e^{iu}\right)du \\ &= \int_0^1 \mathrm{Im}\left(e^{(1+i)u}\right)du \\ &= \mathrm{Im}\left(\int_0^1 e^{(1+i)u}du\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(1+i)u}}{1+i}\right]_0^{\ln x}\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{(1-i)}{2}\times\left(e^{(1+i)\ln x}-1\right)\right) \\ &= \frac{e^{\ln x}}{2}\mathrm{Im}\left((1-i)e^{i\ln x}\right)+C \\ &= \frac{x}{2}\left(-\cos(\ln x)+\sin(\ln x)\right)+C\end{aligned}$$
où $C \in \mathbb{R}$.
Ainsi, une primitive de $x \mapsto \sin(\ln x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto \dfrac{x}{2}\left(-\cos(\ln x)+\sin(\ln x)\right)$.
Méthode 2 : On procède par double intégration par parties.
Une primitive de $x \mapsto \sin(\ln x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $F : x \mapsto \displaystyle\int_1^x \sin(\ln t)dt$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On effectue l'intégration par parties :
$$\begin{array}{ll} u_1'(t) = 1, & v_1(t) = \sin(\ln t) \\ u_1(t) = t & v_1'(t) = \dfrac{1}{t}\cos(\ln t) \end{array}.$$
u_1 et v_1 sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a alors :
$$\int_1^x \sin(\ln(t))dt = \Big[t\sin(\ln t)\Big]_1^x - \int_1^x \cos(\ln(t))dt = x\sin(\ln(x)) - \int_1^x \cos(\ln(t))dt$$
On effectue de nouveau une intégration par parties :
$$\begin{array}{ll} u_2'(t) = 1, & v_2(t) = \cos(\ln t) \\ u_2(t) = t & v_2'(t) = -\dfrac{1}{t}\sin(\ln t) \end{array}.$$
u_2 et v_2 sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a alors :
$$\int_1^x \sin(\ln(t))dt = x\sin(\ln(x)) - \Big[t\cos(\ln t)\Big]_1^x - \int_1^x \sin(\ln t)dt = x\sin(\ln(x)) - x\cos(\ln(x)) + 1 - \int_1^x \sin(\ln(t))dt.$$
Ainsi, $2\displaystyle\int_1^x \sin(\ln(t))dt = x\sin(\ln(x)) - x\cos(\ln(x)) + 1$.
Ainsi, une primitive de $x \mapsto \sin(\ln x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto \dfrac{x}{2}\sin(\ln(x)) - \dfrac{x}{2}\cos(\ln(x))$.

6. Soit $x \in \mathbb{R}$, on cherche $\displaystyle\int_0^x \frac{t^7}{(t^4+1)^2}dt$.
On effectue le changement de variable $u = t^4$. On a $du = 4t^3dt$. Ainsi,
$$\int_0^x \frac{t^7}{(t^4+1)^2}dt = \frac{1}{4}\int_0^{x^4} \frac{u}{(u+1)^2}du.$$

Or : $\forall u \in \mathbb{R}_+,\ \dfrac{u}{(u+1)^2} = \dfrac{1}{(u+1)} - \dfrac{1}{(u+1)^2}$. Ainsi :

$$\int_0^x \frac{t^7}{(t^4+1)^2}dt = \frac{1}{4}\ln(x^4+1) + \frac{1}{4(x^4+1)} - \frac{1}{4}.$$

Finalement, une primitive de $x \mapsto \dfrac{x^7}{(x^4+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{4}\ln(x^4+1) + \dfrac{1}{4(x^4+1)}$.

7. Soit $x \in \mathbb{R}$, on cherche $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\operatorname{ch}(t)}dt = \int_0^x \frac{2}{e^t+e^{-t}}dt$.
   On effectue le changement de variable $u = e^t$. On a $du = udt$. Ainsi,
   $$\int_0^x \frac{1}{\operatorname{ch}(t)}dt = \int_1^{e^x} \frac{2}{u(u+\frac{1}{u})}du = \int_1^{e^x} \frac{2}{1+u^2}du = \Big[2\arctan(u)\Big]_1^{e^x} 2\arctan(e^x) - 2\arctan(1).$$
   Finalement, une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto 2\arctan(e^x)$.
8. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on cherche $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}dt$.
   On effectue le changement de variable $u = \sqrt{t}$. On a $du = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}dt$. Ainsi,
   $$\int_1^x \frac{1}{(1+t)\sqrt{t}}dt = 2\int_1^{\sqrt{x}} \frac{1}{1+u^2}du = 2\Big[\arctan(u)\Big]_1^{\sqrt{x}} = 2\arctan(\sqrt{x}) - 2\arctan(1).$$
   Finalement, une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto 2\arctan(\sqrt{x})$.
9. Soit $x \in \mathbb{R}$, on cherche à calculer $\displaystyle\int_0^x e^{\sqrt{t}}dt$.
   On effectue le changement de variable $y = \sqrt{t}$. on a $dy = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}dt$, $dt = 2ydy$. Ainsi, on a :
   $$\int_0^x e^{\sqrt{t}}dt = 2\int_0^{\sqrt{x}} ye^y dy.$$
   On effectue l'intégration par parties :
   $$\begin{array}{ll} u'(y) = e^y, & v(y) = y \\ u(y) = e^y & v'(y) = 1 \end{array}.$$
   u et v sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a alors :
   $$\begin{aligned}\int_0^x e^{\sqrt{t}}dt &= 2\Big[ye^y\Big]_0^{\sqrt{x}} - 2\int_0^{\sqrt{x}} e^y dy \\ &= 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2\Big[e^y\Big]_0^{\sqrt{x}} \\ &= 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + 2\end{aligned}$$
   Ainsi, $x \mapsto 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}}$ est une primitive de $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}$.
10. Le discriminant de $X^2 - X - 2$ vaut 9 et ses racines sont donc $\dfrac{1-3}{2} = -1$ et $\dfrac{1+3}{2} = 2$.
    Ainsi, les racines de $X^4 - X^2 - 2$ sont $\pm\sqrt{2}$.
    Soit $a, x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$, on cherche $\displaystyle\int_a^x \frac{t}{t^4-t^2-2}dt$.
    On effectue le changement de variable $u = t^2$. On a $du = 2tdt$. Ainsi,
    $$\int_a^x \frac{t}{t^4-t^2-2}dt = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{x^2} \frac{1}{u^2-u-2}du$$
    Les racines du dénominateur sont -1 et 2.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
& \forall u \in \mathbb{R}_+ \setminus \{2\},\ \frac{1}{u^2-u-2} = \frac{a}{u+1} + \frac{b}{u-2} \\
\iff & \forall u \in \mathbb{R}_+ \setminus \{2\},\ \frac{1}{u^2-u-2} = \frac{a(u-2)+b(u+1)}{(u+1)(u-2)} \\
\iff & \forall u \in \mathbb{R}_+ \setminus \{2\},\ \frac{1}{u^2-u-2} = \frac{(a+b)u-2a+b}{(u+1)(u-2)} \\
\iff & \forall u \in \mathbb{R}_+ \setminus \{2\},\ 1 = (a+b)u-2a+b \\
\iff & \begin{cases} a+b=0 \\ -2a+b=1 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} b=-a \\ a=-\dfrac{1}{3} \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} b=\dfrac{1}{3} \\ a=-\dfrac{1}{3} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\forall u \in \mathbb{R}_+ \setminus \{2\},\ \frac{1}{u^2-u-2} = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{u+1} + \frac{1}{u-2}\right)$$

Donc :

$$\int_a^x \frac{t}{t^4-t^2-2}dt = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{x^2} \frac{1}{u^2-u-2}du = \frac{1}{6}\Big[-\ln|1+u| + \ln|u-2|\Big]_{a^2}^{x^2} = \frac{1}{6}\left(\ln\left|\frac{x^2-2}{1+x^2}\right| - \ln\left|\frac{a^2-2}{1+a^2}\right|\right).$$

Finalement, une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^4-x^2-2}$ sur $R \setminus \{\pm\sqrt{2}\}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{6}\ln\left|\dfrac{x^2-2}{1+x^2}\right|$.

11. On reconnait une fonction sous la forme $x \mapsto u'(x)u(x)$. Ainsi, une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ est $x \mapsto \dfrac{(\ln(x))^2}{2}$.
12. On reconnait une fonction sous la forme $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$. Ainsi, une primitive sur $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ de $x \mapsto \dfrac{e^{\tan(x)}}{\cos^2(x)}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(e^{\tan(x)}\right)^2$.
13. On reconnait une fonction sous la forme : $x \mapsto \dfrac{u'(x)u(x)}{2}$. Ainsi, une primitive sur sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto xe^{x^2}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{2}e^{x^2}$.
14. On reconnait une fonction sous la forme : $x \mapsto u'(x)u(x)$.
Ainsi, une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{\arctan x}{1+x^2}$ est $x \mapsto \dfrac{(\arctan x)^2}{2}$.
15. On reconnait la dérivée d'une fonction usuelle. Ainsi, $x \mapsto \arcsin(x)$ est une primitive sur $]-1, 1[$ de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
16. La fonction s'écrit encore $x \mapsto x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}$. Ainsi, une primitive sur $\mathbb{R}_+$ de $x \mapsto \sqrt{x}(1-x)$ est $x \mapsto \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$.
17. Soit $x \in \mathbb{R}$. $x^2-x+4 = (x-\dfrac{1}{2})^2 + \dfrac{15}{4}$.
Ainsi, $\dfrac{1}{x^2-x+4} = \dfrac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{15}{4}} = \dfrac{4}{15} \times \dfrac{1}{\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{2}}\right)^2+1} = \dfrac{4}{15} \times \dfrac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{15}}x - \frac{1}{\sqrt{15}}\right)^2+1}$.

Soit $a \in \mathbb{R}$. On a :

$$\int_a^x \frac{1}{t^2-t+4}dt = \frac{4}{15}\int_a^x \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{15}}t - \frac{1}{\sqrt{15}}\right)^2+1}dt$$

On effectue le changement de variable $u = \dfrac{2}{\sqrt{15}}t - \dfrac{1}{\sqrt{15}}$. On a : $du = \dfrac{2}{\sqrt{15}}dt$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_a^x \frac{1}{t^2-t+4}dt &= \frac{4}{15}\int_{\frac{2}{\sqrt{15}}a-\frac{1}{\sqrt{15}}}^{\frac{2}{\sqrt{15}}x-\frac{1}{\sqrt{15}}} \frac{\frac{\sqrt{15}}{2}}{u^2+1}du \\
&= \frac{4}{15}\times\frac{\sqrt{15}}{2}\int_{\frac{2}{\sqrt{15}}a-\frac{1}{\sqrt{15}}}^{\frac{2}{\sqrt{15}}x-\frac{1}{\sqrt{15}}} \frac{1}{u^2+1}du \\
&= \frac{2}{\sqrt{15}}\int_{\frac{2}{\sqrt{15}}a-\frac{1}{\sqrt{15}}}^{\frac{2}{\sqrt{15}}x-\frac{1}{\sqrt{15}}} \frac{1}{u^2+1}du \\
&= \frac{2}{\sqrt{15}}\Big[\arctan(u)\Big]_{\frac{2}{\sqrt{15}}a-\frac{1}{\sqrt{15}}}^{\frac{2}{\sqrt{15}}x-\frac{1}{\sqrt{15}}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{15}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{15}}x-\frac{1}{\sqrt{15}}\right)+C
\end{aligned}$$

où $C\in\mathbb{R}$.

Ainsi, une primitive sur $\mathbb{R}$ est $x\mapsto \frac{2}{\sqrt{15}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{15}}x-\frac{1}{\sqrt{15}}\right)$.

18. Soit $x\in\mathbb{R}$. $2x^2+x+5 = 2\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\right) = 2\left((x+\frac{1}{4})^2+\frac{39}{16}\right)$.

Ainsi, $\frac{1}{2x^2+x+5} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{(x+\frac{1}{4})^2+\frac{39}{16}} = \frac{8}{39}\times\frac{1}{\left(\frac{x+\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{39}}{4}}\right)^2+1} = \frac{8}{39}\times\frac{1}{\left(\frac{4}{\sqrt{39}}x+\frac{1}{\sqrt{39}}\right)^2+1}$.

Soit $a\in\mathbb{R}$. On a :

$$\int_a^x \frac{1}{2t^2+t+5}dt = \frac{8}{39}\int_a^x \frac{1}{\left(\frac{4}{\sqrt{39}}t+\frac{1}{\sqrt{39}}\right)^2+1}dt$$

On effectue le changement de variable $u=\frac{4}{\sqrt{39}}t+\frac{1}{\sqrt{39}}$. On a : $du=\frac{4}{\sqrt{39}}dt$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_a^x \frac{1}{2t^2+t+5}dt &= \frac{8}{39}\int_{\frac{4}{\sqrt{39}}a+\frac{1}{\sqrt{39}}}^{\frac{4}{\sqrt{39}}x+\frac{1}{\sqrt{39}}} \frac{\frac{\sqrt{39}}{4}}{u^2+1}du \\
&= \frac{8}{39}\times\frac{\sqrt{39}}{4}\int_{\frac{4}{\sqrt{39}}a+\frac{1}{\sqrt{39}}}^{\frac{4}{\sqrt{39}}x+\frac{1}{\sqrt{39}}} \frac{1}{u^2+1}du \\
&= \frac{2}{\sqrt{39}}\int_{\frac{4}{\sqrt{39}}a+\frac{1}{\sqrt{39}}}^{\frac{4}{\sqrt{39}}x+\frac{1}{\sqrt{39}}} \frac{1}{u^2+1}du \\
&= \frac{2}{\sqrt{39}}\Big[\arctan(u)\Big]_{\frac{4}{\sqrt{39}}a+\frac{1}{\sqrt{39}}}^{\frac{4}{\sqrt{39}}x+\frac{1}{\sqrt{39}}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{39}}\arctan\left(\frac{4}{\sqrt{39}}x+\frac{1}{\sqrt{39}}\right)+C
\end{aligned}$$

où $C\in\mathbb{R}$.

Ainsi, une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x\mapsto\frac{1}{2x^2+x+5}$ est $x\mapsto\frac{2}{\sqrt{39}}\arctan\left(\frac{4}{\sqrt{39}}x+\frac{1}{\sqrt{39}}\right)$.

19. Le dénominateur admet pour racines : 1 et 2.

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
& \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1,2\},\ \frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}\\
\iff\ & \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1,2\},\ \frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{a(x-2)+b(x-1)}{(x-1)(x-2)}\\
\iff\ & \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1,2\},\ \frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{(a+b)-2a-b}{(x-1)(x-2)}\\
\iff\ & \begin{cases} a+b=0\\ -2a-b=1\end{cases}\\
\iff\ & \begin{cases} a=-1\\ b=-a\end{cases}\\
\iff\ & \begin{cases} a=-1\\ b=1\end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1,2\},\ \frac{1}{x^2-3x+2}=-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}.$$

Ainsi, une primitive de $x\mapsto\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$ est $x\mapsto-\ln(|x-1|)+\ln(|x-2|)=\ln\left(\left|\dfrac{x-2}{x-1}\right|\right)$.

20. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a :

$$\frac{2x}{x^2-x+1}=\frac{2x-1+1}{x^2-x+1}=\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{1}{x^2-x+1}.$$

Un primitive de $x\mapsto\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$ sur $\mathbb{R}$ est $x\mapsto\ln(x^2-x+1)$.

Déterminons une primitive de $x\mapsto\dfrac{1}{x^2-x+1}$.

Soit $x\in\mathbb{R}$, on sait que $x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2-x+1}&=\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\\
&=\frac{4}{3}\times\frac{1}{\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1}\\
&=\frac{4}{3}\times\frac{1}{\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}
\end{aligned}$$

Soit $a\in\mathbb{R}$. Ainsi,

$$\int_a^x\frac{1}{t^2-t+1}dt=\frac{4}{3}\int_a^x\frac{1}{\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dt$$

On effectue le changement de variable $u=\dfrac{2t}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. On a $du=\dfrac{2}{\sqrt{3}}dt$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_a^x\frac{1}{t^2-t+1}dt&=\frac{4}{3}\int_{\frac{2a}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2x}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{u^2+1}du\\
&=\frac{2}{\sqrt{3}}\int_{\frac{2a}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2x}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{1}{u^2+1}du\\
&=\frac{2}{\sqrt{3}}\Big[\arctan(u)\Big]_{\frac{2a}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2x}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}}\\
&=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+C
\end{aligned}$$

où $C \in \mathbb{R}$.
Ainsi, une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-x+1}$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{2x}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.
Finalement, une primitive de $x \mapsto \dfrac{2x}{x^2-x+1}$ est $x \mapsto \ln(x^2-x+1) + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{2x}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

21. On utilise l'exponentielle complexe. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{3x}\cos 2x = e^{3x}\mathrm{Re}\left(e^{2ix}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{(3+2i)x}\right)$. Or, $x \mapsto \dfrac{e^{(3+2i)x}}{(3+2i)}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto e^{(3+2i)x}$. Ainsi, $x \mapsto \mathrm{Re}\left(\dfrac{e^{(3+2i)x}}{(3+2i)}\right)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto e^{3x}\cos(2x)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left(\frac{e^{(3+2i)x}}{(3+2i)}\right) &= \mathrm{Re}\left(\frac{(3-2i)e^{(3+2i)x}}{13}\right) \\
&= e^{3x}\mathrm{Re}\left(\frac{(3-2i)e^{2ix}}{13}\right) \\
&= e^{3x}\frac{(3\cos(2x)+2\sin(2x))}{13}
\end{aligned}$$

Ainsi, une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto e^{3x}\cos(2x)$ est $e^{3x}\left(\dfrac{3}{13}\cos(2x) + \dfrac{2}{13}\sin(2x)\right)$.

22. Soit $x \in \mathbb{R}$. $(x+1)e^{2x}\cos x = (x+1)e^{2x}\mathrm{Re}\left(e^{ix}\right) = \mathrm{Re}\left((x+1)e^{(2+i)x}\right)$.
On procède ensuite par intégration par parties.
On procède par intégration par parties.
Une primitive de $x \mapsto (x+1)e^{(2+i)x}$ sur $\mathbb{R}$ est $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x (t+1)e^{(2+i)t}dt$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On effectue l'intégration par parties :

$$\begin{array}{ll}
u'(t) = e^{(2+i)t}, & v(t) = t+1 \\
u(t) = \dfrac{e^{(2+i)t}}{2+i} & v'(t) = 1
\end{array}.$$

u et v sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^x (t+1)e^{(2+i)t}dt &= \left[(t+1)\frac{e^{(2+i)t}}{2+i}\right]_{-1}^x - \int_{-1}^x \frac{e^{(2+i)t}}{2+i}dt \\
&= (x+1)\frac{e^{(2+i)x}}{2+i} - \left[\frac{e^{(2+i)t}}{(2+i)^2}\right]_{-1}^x \\
&= (x+1)\frac{e^{(2+i)x}}{2+i} - \frac{e^{(2+i)x}}{(2+i)^2} + C
\end{aligned}$$

avec $C \in \mathbb{C}$.
On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left((x+1)\frac{e^{(2+i)x}}{2+i} - \frac{e^{(2+i)x}}{(2+i)^2}\right) &= (x+1)\mathrm{Re}\left(\frac{(2-i)}{5}e^{(2+i)x}\right) - \mathrm{Re}\left(\frac{(2-i)^2}{25}e^{(2+i)x}\right) \\
&= \frac{(x+1)e^{2x}}{5}\mathrm{Re}\left((2-i)e^{ix}\right) - \frac{e^{2x}}{25}\mathrm{Re}\left((3-4i)e^{ix}\right) \\
&= \frac{(x+1)e^{2x}}{5}\left(2\cos(x)+\sin(x)\right) - \frac{e^{2x}}{25}\left(3\cos(x)+4\sin(x)\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, une primitive de $x \mapsto (x+1)e^{2x}\cos x$ sur $\mathbb{R}$ est : $x \mapsto e^{2x} \times \dfrac{((10x+7)\cos(x)+(5x+1)\sin(x))}{25}$.

23. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\sin^3(x)&\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 && \text{d'après les formules d'Euler} \\
&= \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}}{-8i} && \text{d'après la formule de Moivre et le binôme de Newton} \\
&= \frac{2i\sin(3x)}{-8i} - \frac{6i\sin(x)}{-8i} \\
&= -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)
\end{aligned}$$

Ainsi, $x \mapsto \frac{1}{12}\cos(3x) - \frac{3}{4}\cos(x)$ est une primitive de $x \mapsto \sin^3(x)$ sur $\mathbb{R}$.

24. On commence par linéariser $\cos^3$.
Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\cos^3(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}}{8} \\
&= \frac{2\cos(3x)+6\cos x}{8} \\
&= \frac{1}{4}\cos(3x)+\frac{3}{4}\cos x
\end{aligned}$$

On procède ensuite par double intégration par parties. Soit $x \in \mathbb{R}$. On effectue l'intégration par parties :

$$\begin{array}{ll} u_1'(t) = \frac{1}{4}\cos(3t)+\frac{3}{4}\cos t, & v_1(t) = t^2 \\ u_1(t) = \frac{1}{12}\sin(3x)+\frac{3}{4}\sin t & v_1'(t) = 2t \end{array}.$$

u_1 et v_1 sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^x t^2\cos^3 t dt &= \left[t^2\left(\frac{1}{12}\sin(3t)+\frac{3}{4}\sin t\right)\right]_0^x - 2\int_0^x t\left(\frac{1}{12}\sin(3t)+\frac{3}{4}\sin t\right)dt \\
&= x^2\left(\frac{1}{12}\sin(3x)+\frac{3}{4}\sin x\right) - 2\int_0^x t\left(\frac{1}{12}\sin(3t)+\frac{3}{4}\sin t\right)dt.
\end{aligned}$$

On effectue de nouveau une intégration par parties :

$$\begin{array}{ll} u_2'(t) = \frac{1}{12}\sin(3t)+\frac{3}{4}\sin t, & v_1(t) = t \\ u_2(t) = -\frac{1}{36}\cos(3t)-\frac{3}{4}\cos t & v_1'(t) = 1 \end{array}.$$

u_2 et v_2 sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^x t^2\cos^3 t dt &= x^2\left(\frac{1}{12}\sin(3x)+\frac{3}{4}\sin x\right) + 2\left[t\left(\frac{1}{36}\cos(3t)+\frac{3}{4}\cos t\right)\right]_0^x - 2\int_0^x \frac{1}{36}\cos(3t)+\frac{3}{4}\cos t dt \\
&= x^2\left(\frac{1}{12}\sin(3x)+\frac{3}{4}\sin x\right) + 2x\left(\frac{1}{36}\cos(3x)+\frac{3}{4}\cos x\right) - \left[\frac{1}{54}\sin(3t)+\frac{3}{2}\sin t\right]_0^x \\
&= x^2\left(\frac{1}{12}\sin(3x)+\frac{3}{4}\sin x\right) + 2x\left(\frac{1}{36}\cos(3x)+\frac{3}{4}\cos x\right) - \left(\frac{1}{54}\sin(3x)+\frac{3}{2}\sin x\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, une primitive de $x \mapsto x^2\cos^3(x)$ sur $\mathbb{R}$ est
$x \mapsto \frac{x^2}{12}\sin(3x) + \frac{x}{18}\cos(3x) - \frac{1}{54}\sin(3x) + \frac{3}{4}x^2\sin(x) + \frac{3}{2}x\cos(x) - \frac{3}{2}\sin(x)$.

Exercice 12. 1. On effectue l'intégration par parties :

$$\begin{array}{ll} u'(t) = t, & v(t) = \arctan(t) \\ u(t) = \frac{t^2}{2} & v'(t) = \frac{1}{1+t^2} \end{array}.$$

u et v sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t\arctan(t)dt &= \left[\frac{t^2}{2}\arctan t\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2}{2(1+t^2)}dt = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1+t^2-1}{1+t^2}dt \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt = \frac{\pi}{8} - \int_0^1\frac{dt}{2} + \int_0^1\frac{dt}{2(t^2+1)} \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{2}\arctan t\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

2. On effectue l'intégration par parties :

$$\begin{array}{ll} u_1'(t) = \text{ch}\,(t), & v_1(t) = t^3 - 1 \\ u_1(t) = \text{sh}\,(t) & v_1'(t) = 3t^2 \end{array}.$$

u_1 et v_1 sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $[-1, 1]$. On a alors :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} (t^3 - 1)\text{ch}\, t dt &= \Big[(t^3 - 1)\text{sh}\,(t)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 3t^2 \text{sh}\,(t) dt \\ &= 2\text{sh}\,(-1) - 3\int_{-1}^{1} t^2 \text{sh}\,(t) dt \\ &= -2\text{sh}\,(1) - 3\int_{-1}^{1} t^2 \text{sh}\,(t) dt \end{aligned}$$

On effectue l'intégration par parties :

$$\begin{array}{ll} u_2'(t) = \text{sh}\,(t), & v_2(t) = t^2 \\ u_2(t) = \text{ch}\,(t) & v_2'(t) = 2t \end{array}.$$

u_2 et v_2 sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $[-1, 1]$. On a alors :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} (t^3 - 1)\text{ch}\, t dt &= -2\text{sh}\,(1) - 3\Big[t^2 \text{ch}\,(t)\Big]_{-1}^{1} + 3\int_{-1}^{1} 2t\text{ch}\, t dt \\ &= -2\text{sh}\,(1) + 6\int_{-1}^{1} t\text{ch}\, t dt \end{aligned}$$

On effectue l'intégration par parties :

$$\begin{array}{ll} u_3'(t) = \text{ch}\,(t), & v_3(t) = t \\ u_3(t) = \text{sh}\,(t) & v_2'(t) = 1 \end{array}.$$

u_3 et v_3 sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $[-1, 1]$. On a alors :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} (t^3 - 1)\text{ch}\, t dt &= -2\text{sh}\,(1) + 6\Big[t\text{sh}\, t\Big]_{-1}^{1} - 6\int_{-1}^{1} \text{sh}\, t dt \\ &= -2\text{sh}\,(1) \end{aligned}$$

3. $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x} dx = \left[\frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1}\right]_1^e = \frac{1}{n+1}$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\arcsin x}{1 - x^2}} dx = \left[\frac{2}{3}(\arcsin(x))^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{3}{2}}.$
5. $\forall t \in \mathbb{R},\ \displaystyle\frac{1}{2t^+2t+1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}$. Donc :

$$\int_0^1 \frac{dt}{2t^2 + 2t + 1} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} dt = 2\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{t + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^2 + 1} dt = 2\int_0^1 \frac{1}{(2t+1)^2 + 1} dt$$

On effectue le changement de variable $u = 2t + 1$. On a $dt = \frac{1}{2} du$.

$$\int_0^1 \frac{dt}{2t^2 + 2t + 1} = \int_1^3 \frac{du}{u^2 + 1} = [\arctan(u)]_1^3 = \arctan(3) - \frac{\pi}{4}.$$

6. On commence par linéariser.

Soit $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\cos^3 t \sin^4 t &= \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^3 \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^4 \qquad \text{d'après les formules d'Euler} \\
&= \frac{1}{2^7}(e^{3it}+3e^{it}+3e^{-it}+e^{-3it})(e^{4it}-4e^{2it}+6-4e^{-2it}+e^{-4it}) \quad \text{d'après le binôme de Newton} \\
&= \frac{1}{128}(e^{7it}-4e^{5it}+6e^{3it}-4e^{it}+e^{-it}+3e^{5it}-12e^{3it}+18e^{it}-12e^{-it}+3e^{-3it} \\
&\quad +3e^{3it}-12e^{it}+18e^{-it}-12e^{-3it}+3e^{-5it}+e^{it}-4e^{-it}+6e^{-3it}-4e^{-5it}+e^{-7it}) \\
&= \frac{1}{128}(e^{7it}-e^{5it}-3e^{3it}+3e^{it}+3e^{-it}-3e^{-3it}-e^{-5it}+e^{-7it}) \\
&= \frac{1}{128}(2\cos(7t)-2\cos(5t)-6\cos(3t)+6\cos t) \\
&= \frac{1}{64}(\cos(7t)-\cos(5t)-3\cos(3t)+3\cos t)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \cos^3 t \sin^4 t dt &= \frac{1}{64}\int_0^{\pi/2}\cos(7t)dt - \frac{1}{64}\int_0^{\pi/2}\cos(5t)dt - \frac{3}{64}\int_0^{\pi/2}\cos(3t)dt + \frac{3}{64}\int_0^{\pi/2}\cos(t)dt \\
&= \frac{1}{64}\left[\frac{1}{7}\sin(7t)\right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{64}\left[\frac{1}{5}\sin(5t)\right]_0^{\pi/2} - \frac{3}{64}\left[\frac{1}{3}\sin(3t)\right]_0^{\pi/2} + \frac{3}{64}\left[\sin(t)\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{64}\left(-\frac{1}{7}-\frac{1}{5}+1+3\right) = \frac{1}{64}\times\frac{128}{35} = \frac{2}{35}
\end{aligned}$$

7. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
& \forall t \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2\},\ \frac{1}{t(t+1)(t+2)} = \frac{a}{t}+\frac{b}{t+1}+\frac{c}{(t+2)} \\
\iff\ & \forall t \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2\},\ \frac{1}{t(t+1)(t+2)} = \frac{a(t+1)(t+2)+bt(t+2)+ct(t+1)}{t(t+1)(t+2)} \\
\iff\ & \forall t \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2\},\ \frac{1}{t(t+1)(t+2)} = \frac{(a+b+c)t^2+(3a+2b+c)t+2a}{t(t+1)(t+2)} \\
\iff\ & \begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \\ 2a=1 \end{cases} \\
\iff\ & \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-1 \\ c=\frac{1}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2\},\ \frac{1}{t(t+1)(t+2)} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{(t+2)}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{dt}{t(t+1)(t+2)} &= \frac{1}{2}\int_1^2\frac{dt}{t} - \int_1^2\frac{dt}{t+1} + \frac{1}{2}\int_1^2\frac{dt}{t+2} \\
&= \frac{1}{2}\Big[\ln|t|\Big]_1^2 - \Big[\ln|1+t|\Big]_1^2 + \frac{1}{2}\Big[\ln|t+2|\Big]_1^2 \\
&= \frac{1}{2}\ln 2 - (\ln 3 - \ln 2) + \frac{1}{2}(\ln 4 - \ln 3) = \frac{5}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3.
\end{aligned}$$

8. On effectue le changement de variable $u = e^t$. On a $du = e^t dt = udt$. On obtient :

$$\int_0^1 \frac{dt}{e^t+1} = \int_1^e \frac{du}{u(u+1)}.$$

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
& \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0,-1\},\ \frac{1}{u(u+1)} = \frac{a}{u}+\frac{b}{u+1}\\
\iff\ & \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0,-1\},\ \frac{1}{u(u+1)} = \frac{a(u+1)+bu}{u(u+1)}\\
\iff\ & \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0,-1\},\ \frac{1}{u(u+1)} = \frac{(a+b)u+a}{u(u+1)}\\
\iff\ & \begin{cases} a+b=0\\ a=1\end{cases}\\
\iff\ & \begin{cases} b=-1\\ a=1\end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0,-1\},\ \frac{1}{u(u+1)} = \frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}.$$

Ainsi,

$$\int_0^1 \frac{dt}{e^t+1} = \int_1^e \frac{du}{u} - \int_1^e \frac{du}{u+1} = \Big[\ln|u| - \ln|1+u|\Big]_1^e = \ln(e)-\ln(e+1)+\ln(2) = 1+\ln 2-\ln(1+e).$$

Exercice 13. 1. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
& \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\},\ \frac{1}{(x+1)(1+x^2)} = \frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{1+x^2}\\
\iff\ & \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\},\ \frac{1}{(x+1)(1+x^2)} = \frac{a(1+x^2)+(bx+c)(x+1)}{(x+1)(x^2+1)}\\
\iff\ & \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\},\ \frac{1}{(x+1)(1+x^2)} = \frac{(a+b)x^2+(b+c)x+a+c}{(x+1)(x^2+1)}\\
\iff\ & \begin{cases} a+b=0\\ c+b=0\\ a+c=1\end{cases}\\
\iff\ & \begin{cases} a=\frac{1}{2}\\ b=-\frac{1}{2}\\ c=\frac{1}{2}\end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$, et $c=\frac{1}{2}$ conviennent.

2. Commençons par résoudre $\tan(x)+1=0$.
Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\tan(x)=-1 \quad &\iff \quad \tan(x)=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\\
&\iff \quad x\equiv -\frac{\pi}{4}\ [\pi]
\end{aligned}$$

Soit $k\in\mathbb{Z}$. On pose $I_1^k =]-\frac{\pi}{2}+k\pi, -\frac{\pi}{4}+k\pi[$ et $I_2^k =]-\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$.
Soit $a,x\in I_1^k\cup I_2^k$, on cherche $\displaystyle\int_a^x \frac{t}{\tan(x)+1}dt$.
On effectue le changement de variable $u=\tan(t)$. On a $du=(1+u^2)dt$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_a^x \frac{1}{\tan t+1}dt &= \int_{\tan(a)}^{\tan(x)} \frac{1}{(u+1)(1+u^2)}du = \frac{1}{2}\int_{\tan(a)}^{\tan(x)} \left(\frac{1}{t+1}+\frac{-t+1}{1+t^2}\right)dt\\
&= \frac{1}{2}\Big[\ln|1+u|\Big]_{\tan(a)}^{\tan(x)} - \frac{1}{4}\Big[\ln(1+t^2)\Big]_{\tan(a)}^{\tan(x)} + \frac{1}{2}\Big[\arctan(u)\Big]_{\tan(a)}^{\tan(x)}\\
&= \frac{1}{2}\ln|\tan(x)+1| + \frac{1}{2}\arctan(\tan(x)) - \frac{1}{4}\ln\left|1+\tan^2(x)\right| + C,\ C\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Ainsi, les primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{\tan x + 1}$ sur I_1^k sont $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln|\tan(x)+1| + \dfrac{1}{2}\arctan(\tan(x)) - \dfrac{1}{4}\ln\left|1+\tan^2(x)\right| + C_1^k$ et les primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{\tan x + 1}$ sur I_2^k sont $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln|\tan(x)+1| + \dfrac{1}{2}\arctan(\tan(x)) - \dfrac{1}{4}\ln\left|1+\tan^2(x)\right| + C_2^k$ où $(C_1^k, C_2^k) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 14. On cherche à calculer l'intégrale : $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(t)+\tan(t)}dt$.

1. On effectue le changement de variable $u = \cos t$. On a $du = -\sin(t)dt$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(t)+\tan(t)}dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(t)+\frac{\sin(t)}{\cos(t)}}dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{(1-\cos^2(t))\left(1+\frac{1}{\cos(t)}\right)}dt \\
&= -\int_{\frac{1}{2}}^{0} \frac{1}{(1-u^2)\left(1+\frac{1}{u}\right)}du \\
&= \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{u}{(1-u^2)(u+1)}du.
\end{aligned}$$

Donc : $R(u) = \dfrac{u}{(1-u^2)(u+1)}$.

2. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
& \forall u \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ \frac{u}{(1-u^2)(u+1)} = \frac{a}{1-u} + \frac{b}{1+u} + \frac{c}{(1+u)^2} \\
\iff\ & \forall u \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ \frac{u}{(1-u^2)(u+1)} = \frac{a(1+u)^2 + b(1-u)(1+u) + c(1-u)}{(1-u)(1+u)^2} \\
\iff\ & \forall u \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ \frac{u}{(1-u^2)(u+1)} = \frac{(a-b)u^2 + (2a-c)u + a+b+c}{(1-u)(1+u)^2} \\
\iff\ & \begin{cases} a-b=0 \\ 2a-c=1 \\ a+b+c=0 \end{cases} \\
\iff\ & \begin{cases} a = \dfrac{1}{4} \\ b = \dfrac{1}{4} \\ c = -\dfrac{1}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, $a = \dfrac{1}{4}$, $b = \dfrac{1}{4}$ et $c = -\dfrac{1}{2}$ conviennent.

3.

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{1-u} + \frac{1}{4}\times\frac{1}{1+u} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{(1+u)^2)}\right)du \\
&= \left[-\frac{1}{4}\ln|1-u| + \frac{1}{4}\ln|1+u| + \frac{1}{2}\times\frac{1}{1+u}\right]_0^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + \frac{1}{2}\times\frac{1}{1+u}\right]_0^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{4}\ln(3) + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{4}\ln(3) - \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Exercice 15. 1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on effectue le changement de variable $t = \ln x$. On a $dt = \dfrac{1}{x}dx = \dfrac{1}{e^t}dx$. On obtient alors :

$$I_n = \int_0^1 t^n e^t dt.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On effectue l'intégration par parties :

$$\begin{array}{ll} u'(t) = e^t, & v(t) = t^{n+1} \\ u(t) = e^t & v'(t) = nt^n \end{array}.$$

u et v sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. On a alors :

$$I_{n+1} = \Big[t^{n+1}e^t\Big]_0^1 - \int_0^1 (n+1)t^n e^t dt = e - (n+1)I_n.$$

3. Soit $t \in [0,1]$, on a $1 \leq e^t \leq e$, donc $0 \leq t^n e^t \leq t^n e$ car $t^n \geq 0$.
Ainsi :

$$\forall t \in [0,1],\ 0 \leq t^n e^t \leq e t^n.$$

En intégrant (les bornes sont dans le bon sens), il vient $0 \leq I_n \leq e \displaystyle\int_0^1 t^n dt = \frac{e}{n+1}$.
Par le théorème de convergence par encadrement, $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite vaut 0.

Exercice 16. 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. $I_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n+2} \sin x dx$.
On effectue l'intégration par parties :

$$\begin{array}{ll} u_1'(t) = \sin(x), & v_1(t) = x^{n+2} \\ u_1(t) = -\cos(x) & v_1'(t) = (n+2)x^{n+1} \end{array}.$$

u_1 et v_1 sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$I_{n+2} = \Big[-x^{n+2}\cos(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n+1}\cos x dx = (n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n+1}\cos x dx.$$

On effectue l'intégration par parties :

$$\begin{array}{ll} u_2'(t) = \cos(x), & v_2(t) = x^{n+1} \\ u_2(t) = \sin(x) & v_2'(t) = (n+1)x^n \end{array}.$$

u_2 et v_2 sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$I_{n+2} = (n+2)\Big[x^{n+1}\sin(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - (n+2)(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin(x)dx = (n+2)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1} - (n+2)(n+1)I_n.$$

2. Soit $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} I_{2p} &= (2p)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-1} - 2p(2p-1)I_{2(p-1)} \\ &= (2p)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-1} - (2p)(2p-1)(2p-2)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-3} + (2p)(2p-1)(2p-2)(2p-3)I_{2(p-2)} \\ &= (-1)^p(2p)!\sum_{k=1}^{p}\frac{(-1)^k}{(2k-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k-1} + (-1)^p(2p)!I_0 \end{aligned}.$$

Or, $I_0 = 1$. Donc,

$$I_{2p} = (-1)^p(2p)!\sum_{k=1}^{p}\frac{(-1)^k}{(2k-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k-1} + (-1)^p(2p)!.$$

(On peut alors prouver cette formule par récurrence). De la même manière,

$$\begin{aligned} I_{2p+1} &= (2p+1)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p} - (2p+1)(2p)I_{2(p-1)+1} \\ &= (2p+1)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p} - (2p+1)(2p)(2p-1)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-2} + (2p+1)(2p)(2p-1)(2p-2)I_{2(p-2)+1} \\ &= (-1)^p(2p+1)!\sum_{k=1}^{p}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k} + (-1)^p(2p+1)!I_1 \end{aligned}.$$

Or, $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)dx$.
On effectue l'intégration par parties :

$$\begin{array}{lll} u'(t) = \sin(x), & \text{et} & v(t) = x \\ u(t) = -\cos(x) & \text{et} & v'(t) = 1 \end{array}.$$

u et v sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$I_1 = \Big[-x\cos(x) \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = \Big[\sin(x) \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Donc,

$$\begin{aligned} I_{2p+1} &= (-1)^p(2p+1)! \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k} + (-1)^p(2p+1)!. \\ &= (-1)^p(2p+1)! \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k} \end{aligned}$$

(On peut alors prouver cette formule par récurrence).

Exercice 17. Pour tout $x \in [0,+\infty[$, on pose $I(x) = \left(\int_0^x f(t)dt\right)^2 - \int_0^x f^3(t)dt$.

I est dérivable sur $[0,+\infty[$ car $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est la primitive de f (continue) qui s'annule en 0, de même $x \mapsto \int_0^x f^3(t)dt$ est la primitive de f^3 (continue) qui s'annule en 0 .
Soit $x \in [0,+\infty[$,

$$I'(x) = 2\int_0^x f(t)dt \times f(x) - f^3(x) = f(x)\left(2\int_0^x f(t)dt - f^2(x)\right).$$

Or, pour tout $x \in [0,+\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et $f(0) = 0$ donc pour tout $x \in [0,+\infty[$, $f(x) \geq 0$.
Posons désormais : $k(x) = 2\int_0^x f(t)dt - f^2(x)$.
k est dérivable sur $[0,+\infty[$ pour les mêmes raisons que précédemment.
Soit $x \in [0,+\infty[$,

$$k'(x) = 2f(x) - 2f(x)f'(x) = 2f(x)(1 - f'(x)).$$

Or, pour tout $x \in [0,+\infty[$, $f(x) \geq 0$ et on sait également que pour tout $x \in [0,+\infty[$, $f'(x) < 1$. Ainsi, pour tout $x \in [0,+\infty[$, $k'(x) \geq 0$ donc k est croissante sur $[0,+\infty[$ et $k(0) = 0$ donc pour tout $x \in [0,+\infty[$, $k(x) \geq 0$. Finalement, on en déduit que pour tout $x \in [0,+\infty[$, $I'(x) \geq 0$.
Finalement, I est croissante sur $[0,+\infty[$. Or, $I(0) = 0$ donc pour tout $x \in [0,+\infty[$, $I(x) \geq 0$ ce qui prouve l'inégalité voulue.

Exercice 18. ϕ est dérivable sur $[0,+\infty[$ car fg est continue sur $[0,+\infty$ donc $x \mapsto \int_0^x f(t)g(t)dt$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ (Il s'agit de la primitive de fg qui s'annule en 0).
Soit $x \in [0,+\infty[$,

$$\phi'(x) = f(x)g(x)$$

Or, $0 \leq f(x) \leq C + \phi(x)$ et $g(x) \geq 0$ donc $f(x)g(x) \leq Cg(x) + \phi(x)g(x)$.
Or, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ donc $\phi(x) \geq 0$ et $C > 0$ donc $C + \phi(x) > 0$. Ainsi, $\phi'(x) \leq g(x)(C + \phi(x))$. D'où :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ \frac{\phi'(x)}{C + \phi(x)} \leq g(x).$$

Or, g et $x \mapsto \dfrac{\phi'(x)}{C + \phi(x)}$ sont continues sur $[0,+\infty[$. Ainsi, en intégrant l'inégalité entre 0 et x (les bornes sont dans le bon sens), on a :

$$\Big[\ln|C + \phi(t)| \Big]_0^x \leq \int_0^x g(t)dt$$

donc

$$\ln(C + \phi(x)) - \ln(C) \leq \int_0^x g(t)dt$$

(car $\phi(0) = 0$) donc

$$\frac{C + \phi(x)}{C} \leq \exp\left(\int_0^x g(t)dt\right)$$

Comme $C > 0$), on a :

$$C + \phi(x) \leq C\exp\left(\int_0^x g(t)dt\right)$$

Finalement :

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ \ f(x) \leq C + \phi(x) \leq C \exp\left(\int_0^x g(t)dt\right).$$