Devoir surveillé n°1

samedi 14 septembre 2018
Durée : 2 heures

◇ Le candidat peut admettre le résultat d'une question et l'utiliser dans la suite à condition de l'écrire clairement sur sa copie.

◇ Si le candidat repère ce qu'il croit être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice 1

Étant donné P, Q et R trois propositions. À l'aide d'un tableau de vérité, montrer que

$$P \text{ ou } (Q \text{ et } R) \Leftrightarrow (P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R).$$

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. À tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe

$$z' = -z^2 + 2z.$$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$-z^2 + 2z - 2 = 0.$$
2. Déterminer tous les points M d'affixe $z \in \mathbb{C}$ tels que son image M' est le point d'affixe 2.
3. Soit M un point d'affixe z. Soit M' l'image de M d'affixe $z' = -z^2 + 2z$. On note N le point d'affixe $z_N = z^2$. Montrer que M est le milieu de $[NM']$.
4. Dans cette question, on suppose que M est situé sur le cercle de centre O et de rayon 1. On note θ un argument de z.
   (a) Déterminer le module de z et écrire z_N sous forme exponentielle.
   (b) Soit A le point d'affixe 1. Quelle est la nature du triangle AMM'.

Problème 1

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on considère l'équation

$$z^n + z + 1 = 0. \qquad (E_n)$$

1. Dans cette question $n = 2$.
   (a) Déterminer les solutions de l'équation (E_2) dans $\mathbb{C}$.
   (b) Écrire sous forme exponentielle les solutions de l'équation (E_2).
2. Dans cette question $n = 3$
   (a) On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par l'expression $f(t) = t^3 + t + 1$, pour tout nombre réel $t \in \mathbb{R}$. Étudier les variations de la fonction f.
   (b) Montrer que : (E_3) admet une unique solution réelle noté r et que $r \in]-1, -\frac{1}{2}[$.
   Soit $P(X) = X^3 + X + 1$ un polynome. On peut montrer qu'il existe deux nombres complexes notés z_1 et z_2 tels que
   $$P(X) = (X - r)(X - z_1)(X - z_2).$$
   (c) Montrer que : $z_1 + z_2 = -r$ et que $z_1 z_2 = \frac{-1}{r}$.
   (d) Montrer que : $\frac{1}{2} < |z_1 + z_2| < 1$.
   (e) Donner un encadrement de $|z_1 z_2|$.
   (f) Montrer que : $|z_1| \geq 2 \Rightarrow |z_1| < 1 + |z_2|$. En déduire que $|z_1| < 2$.
   (g) Montrer que toute solution de (E_3) est de module strictement inférieur à 2.
3. Localisation des solutions en général.
   (a) Soit $n \geq 2$ un entier naturel. Étudier les variations de
   $$\varphi_n : \begin{cases} [2, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^n - t - 1 \end{cases}.$$
   (b) Montrer que :
   $$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \forall n \geq 2, \quad (z^n + z + 1 = 0) \Rightarrow (|z| < 2).$$
   (c) Que penser de l'implication réciproque ?

FIN.