Corrigé de la feuille d'exercices 10

1 Nombres entiers, décimaux, rationnels

Exercice 1. Raisonnons par l'absurde.
Supposons que $\sqrt{a}+\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$.
Posons $x=\sqrt{a}+\sqrt{b}$. On a donc $x \in \mathbb{Q}$. De plus, Alors $a=(\sqrt{a})^2=(x-\sqrt{b})^2=x^2-2x\sqrt{b}+b$. Or, $a \neq 0$ et $b \neq 0$ car $\sqrt{a} \neq 0$ et $\sqrt{b} \neq 0$ $(0 \in \mathbb{Q})$ Donc $\sqrt{b}=\dfrac{x^2+b-a}{2x} \in \mathbb{Q}$ exclu !
Ainsi, $\sqrt{a}+\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 2. Raisonnons par l'absurde.
Supposons que $\dfrac{ax+b}{cx+d} \in \mathbb{Q}$.
Posons $q=\dfrac{ax+b}{cx+d}$. On a $q \in Q$.
Ainsi, $ax+b=q(cx+d)$ d'où $(a-cq)x=dq-b$.
Si $a=cq$ alors, $dq=b$ donc $ad=cdq$ et $bc=cdq$ d'où $ad=bc$ ce qui est exclu.
Ainsi, $a \neq cq$. Ainsi, $a-cq \neq 0$. On obtient alors $x=\dfrac{dq-b}{a-cq}$ avec $a,b,q,c \in \mathbb{Q}$ donc $x \in \mathbb{Q}$. Absurde.
Ainsi, $\dfrac{ax+b}{cx+d} \notin \mathbb{Q}$.

2 Borne supérieure

Exercice 3.

1. Notons $A=\{\dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$.
   On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} \leq 1$ et $1 \in A$. Donc $\max(A)=\sup A=1$.
   On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} \geq 0$ donc 0 minore A.
   Soit $m \in \mathbb{R}$ un minorant de A alors on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} \geq m$.
   En passant à la limite, on obtient : $0 \geq m$.
   Ainsi, 0 est le plus grand des minorants donc $\inf(A)=0$.
2. Notons $B=\{\dfrac{n+5}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$.
   On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq \dfrac{n+5}{n+1} \leq 5$.
   De plus, $5 \in B$ donc $\max(B)=\sup(B)=5$.
   1 minore B.
   Soit m un minorant de B. On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n+5}{n+1} \geq m$.
   En passant à la limite, on obtient $1 \geq m$.
   Donc 1 est le plus grand des minorants.
   Ainsi, $\inf(B)=1$.
3. Notons $C=\{(-1)^n\left(1-\dfrac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}^*\}$.
   On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|(-1)^n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right|=1-\dfrac{1}{n} \leq 1$. Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leq (-1)^n\left(1-\dfrac{1}{n}\right) \leq 1$.
   Ainsi, -1 est un minorant et 1 est un majorant de C.
   Soit M un majorant de C. Alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^n\left(1-\dfrac{1}{n}\right) \leq M$. Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1-\dfrac{1}{2n} \leq M$.
   En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient : $1 \leq M$.
   Donc 1 est le plus petit des majorants. Donc $\sup(C)=1$.
   Soit m un minorant de C. Alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^n\left(1-\dfrac{1}{n}\right) \geq m$. Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right) \geq m$.
   En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient : $-1 \geq m$. Donc -1 est le plus grand des majorants. Donc $\inf(C)=-1$.
4. Notons $D=\{\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{p}, (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2\}$.
   On a : $\forall n,p \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leq -\dfrac{1}{p} \leq \dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{p} \leq \dfrac{1}{n} \leq 1$.

Ainsi, 1 est un majorant de D et -1 est un minorant de D.
Soit M un majorant de D. Alors : $\forall n,p\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{p}\leq M$. En particulier, on a : $\forall p\in\mathbb{N}^*,\ 1-\dfrac{1}{p}\leq M$.
En faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient : $1\leq M$.
Donc 1 est le plus petit des majorants. Donc $\sup(D)=1$.
Soit m un minorant de D. Alors : $\forall n,p\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{p}\geq m$. En particulier, on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n}-1\geq m$.
En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient : $-1\geq m$.
Donc -1 est le plus grand des majorants. Donc $\inf(D)=-1$.

Exercice 4. 1. Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. Ces parties étant non vides et majorées, elles admettent une borne supérieure.
Soit $a\in A$, on a $a\in B$, donc $a\leq\sup(B)$. Ainsi : $\forall a\in A,\ \ a\leq\sup(B)$. Ainsi, $\sup(B)$ est un majorant de A donc est plus grand que le plus petit majorant de A, $\sup(A)$ donc $\sup(A)\leq\sup(B)$.

2. Soit $x\in A\cup B$, alors :
   - soit $x\in A$ alors $x\leq\sup(A)\leq\max(\sup(A),\sup(B))$;
   - soit $x\in B$ et $x\leq\sup(B)\leq\max(\sup(A),\sup(B))$.

   Ainsi, on a : $\forall x\in A\cup B,\ x\leq\max(\sup(A),\sup(B))$.
   Ainsi, $A\cup B$ est majorée.
   De plus, A est non vide et $A\subset A\cup B$ donc $A\cup B$ est non vide. Ainsi, $A\cup B$ est non vide et majorée donc admet une borne supérieure.
   On sait déjà : $\forall x\in A\cup B,\ x\leq\max(\sup(A),\sup(B))$ donc $\max(\sup(A),\sup(B))$ est un majorant de $A\cup B$ et donc $\sup(A\cup B)\leq\max(\sup(A),\sup(B))$.
   Réciproquement, $A\subset A\cup B$ et $B\subset A\cup B$ donc d'après la question précédente, $\sup(A)\leq\sup(A\cup B)$ et $\sup(B)\leq\sup(A\cup B)$ donc $\max(\sup(A),\sup(B))\leq\sup(A\cup B)$. Ainsi, $\max(\sup(A),\sup(B))=\sup(A\cup B)$.
3. Soit $x\in A\cap B$, alors $x\in A$ donc $x\leq\sup(A)$ et $x\in B$ donc $x\leq\sup(B)$. Ainsi, $x\leq\min(\sup(A),\sup(B))$.
   Ainsi, $A\cap B$ est majorée par $\min(\sup(A),\sup(B))$.
   On ne peut pas parler de $\sup(A\cap B)$ car on peut avoir $A\cap B=\emptyset$ et dans ce cas la borne supérieure n'existe pas.

Exercice 5. Comme A et B sont non vides, il existe $a\in A$ et $b\in B$. $a+b\in A+B$ donc $A+B$ est non vide.
Soit $x\in A+B$, il existe $(a,b)\in A\times B$ tel que $x=a+b$.
De plus, $a\leq\sup(A)$ et $b\leq\sup(B)$ donc $x\leq\sup(A)+\sup(B)$.
Ainsi : $\forall x\in A+B,\ x\leq\sup(A)+\sup(B)$.
Ainsi $A+B$ est majorée par $\sup(A)+\sup(B)$, donc $A+B$ admet une borne supérieure.
On a vu que $\sup(A)+\sup(B)$ est un majorant de $A+B$.
Soit $\epsilon>0$. Par caractérisation de la borne supérieure, il existe $x\in A$ tel que $\sup(A)-\frac{\epsilon}{2}<x$ et il existe $y\in B$ tel que $\sup(B)-\frac{\epsilon}{2}<y$.
Alors $(\sup(A)+\sup(B))-\epsilon<x+y$. Posons $z=x+y$. On a $z\in A+B$ et $(\sup(A)+\sup(B))-\epsilon<z$.
Par caractérisation de la borne supérieure, on a que $\sup(A+B)=\sup(A)+\sup(B)$

Exercice 6. 1. A est non vide donc il existe $a\in A$. Ainsi, $-a\in -A$ donc $-A$ est non vide.
De plus, soit $x\in -A$, $-x\in A$ donc $-x\geq\inf(A)$. D'où $x\leq-\inf(A)$. Ainsi, $-A$ est majorée. Donc $-A$ admet une borne supérieure.
De plus, d'après l'inégalité précédente, $-\inf(A)$ majore $-A$ donc est plus grand que le plus petit des majorants.
Ainsi, $\sup(-A)\leq-\inf(A)$.
Montrons l'autre inégalité.
Soit $a\in A$, $-a\in -A$ donc $-a\leq\sup(-A)$ et $-\sup(-A)\geq a$. Ainsi, $-\sup(-A)$ est un minorant de A. Ainsi, il est plus petit que le plus grand des minorants de A donc $-\sup(-A)\leq\inf(A)$ donc $\sup(-A)\geq-\inf(A)$.
On a donc égalité : $-\inf(A)=\sup(-A)$.

2. On sait qu'il existe $M_A\in\mathbb{R}$ tel que : $\forall x\in A,\ |x|\leq M_B$. De même, il existe $M_B\in\mathbb{R}$ tel que : $\forall yx\in B,\ |y|\leq M_b$.
   Ainsi : $\forall x\in A,\ \forall y\in B,\ |xy|\leq M_AM_B$, c'est à dire : $\forall z\in AB,\ \ |z|\leq M_AM_B$ donc AB est bornée. De plus, A est non vide donc il existe $a\in A$ et B est non vide donc il existe $b\in B$. On a alors $ab\in AB$. Donc AB est non vide et borné donc admet une borne supérieure. Cependant, l'égalité n'est pas toujours vraie. Contre-exemple : posons $A=[-1,1]$ et $B=[-3,1]$. Alors $3\in AB$ donc $\sup(AB)\geq 3$ alors que $\sup(A)=\sup(B)=1$. L'égalité n'est donc pas vérifiée.

Exercice 7. 1. Notons $B=\{|x-y|\,;\,(x,y)\in A^2\}$.
Comme A est non vide, il existe $x\in A$ puis $0=|x-x|\in B$ et B est non vide. Comme A est borné, il existe $M>0$ tel que : $\forall x\in A,\ |x|\leq M$.
Soit $(x,y)\in A^2$, $|x-y|\leq|x|+|y|\leq 2M$, donc B est majoré et la borne supérieure de B existe.

2. Soit $(x,y)\in A^2$, on a : $\inf(A)\leq x\leq\sup(A)$ et $\inf(A)\leq y\leq\sup(A)$.
   D'où $-\sup(A)\leq -y\leq-\inf(A)$.

Ainsi, $-(\sup(A)-\inf(A)) \leq x-y \leq \sup(A)-\inf(A)$ avec $\sup(A)-\inf(A) \geq 0$.
D'où : $|x-y| \leq \sup(A)-\inf(A)$. Ainsi : $\forall (x,y) \in A^2$, $|x-y| \leq \sup(A)-\inf(A)$.
Donc $\sup(A)-\inf(A)$ majore B. Donc $\delta(A) \leq |x-y|$.

3. Soit $\epsilon > 0$, il existe $x \in A$ tel que $x > \sup(A) - \frac{\epsilon}{2}$ et il existe $y \in A$ tel que $y < \inf(A) + \frac{\epsilon}{2}$ (par caractérisation de la borne supérieure et de la borne inférieure). Ainsi, $-y > -\inf(A) - \frac{\epsilon}{2}$. Donc $\sup(A)-\inf(A)-\epsilon \leq x-y \leq |x-y|$.
4. D'après la 2, on sait que : $\sup(A)-\inf(A)$ majore B.
D'après la question 3, on a : $\forall \epsilon > 0$, $\sup(A)-\inf(A)-\epsilon < \delta(A)$. Par caractérisation de la borne supérieure, $\delta(A) = \sup(A)-\inf(A)$.

Exercice 8. 1. Posons $A = \{x \in [a,b], f(x) \geq x\}$.
$f(a) \in [a,b]$donc $f(a) \geq a$. Ainsi, $a \in A$ et A est non vide.
De plus : $\forall x \in A$, $x \in [a,b]$. Donc : $\forall x \in A$, $x \leq b$. Ainsi, A est majoré et il admet donc une borne supérieure.

2. Montrons que $f(s)$ majore A.
b majore A donc $s \leq b$. De plus, $a \in A$ donc $a \leq s$. Ainsi, $s \in [a,b]$. On peut donc calculer $f(s)$, s appartient au domaine de définition de f.
Soit $x \in A$, $x \leq s$, donc $f(x) \leq f(s)$ (car f croissante) puis $f(s) \geq f(x) \geq x$. Ainsi, $f(s)$ majore A. Donc $f(s)$ est supérieur au plus petit des majorants. Ainsi, $f(s) \geq s$.
3. Montrons que $f(s) \in A$.
On sait déjà que $f(s) \in [a,b]$. De plus, comme f est croissante, on déduit de l'inégalité précédente que $f(f(s)) \geq f(s)$ et donc $f(s) \in A$. Or s majore A, donc $s \geq f(s)$. Ainsi, $f(s) = s$.
4. Soit $\begin{array}{cccc} f: & [0,1] & \to & [0,1] \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$.
f est décroissante et n'admet pas de point fixe.

3 Partie entière

Exercice 9. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$
$$\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$$

On a donc

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x+y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$$

De plus,

$$\lfloor x+y \rfloor \leq x+y < \lfloor x+y \rfloor + 1$$

D'où :

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x+y < \lfloor x+y \rfloor + 1$$
$$\lfloor x+y \rfloor \leq x+y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$$

Ainsi :

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor < \lfloor x+y \rfloor + 1$$
$$\lfloor x+y \rfloor < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$$

Or, $\lfloor x+y \rfloor$, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \in \mathbb{Z}$ donc :

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor$$
$$\lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$

Ainsi :

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$

Exercice 10. Raisonnons par analyse synthèse.
Analyse : supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$.
Or, on a :

$$\lfloor \sqrt{x} \rfloor \leq \sqrt{x} < \lfloor \sqrt{x} \rfloor + 1$$
$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \leq \frac{x}{2} < \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1$$

Ainsi :

$$\sqrt{x} - 1 < \lfloor \sqrt{x} \rfloor \leq \sqrt{x}$$
$$\frac{x}{2} - 1 < \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \leq \frac{x}{2}$$

Donc :

$$\sqrt{x}-1<\lfloor\sqrt{x}\rfloor=\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor\leq\frac{x}{2}$$
$$\frac{x}{2}-1<\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor=\lfloor\sqrt{x}\rfloor\leq\sqrt{x}$$

Ainsi :

$$\sqrt{x}-1<\frac{x}{2}$$
$$\frac{x}{2}-1<\sqrt{x}$$

Donc $x-2\sqrt{x}+2>0$ et $x-2\sqrt{x}-1<0$.
Posons $X=\sqrt{x}$. On a alors : $X^2-2X+2>0$ et $X^2-2X-1<0$.
Le discriminant de X^2-2X+2 vaut -4. Ainsi, on a bien $X^2-2X+2>0$ (sans aucune condition sur x).
Le discriminant de X^2-2X-1 vaut 8. Ses racines sont $1-\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2}$.
Comme $X^2-2X-1<0$, on en déduit que $1-\sqrt{2}<X<1+\sqrt{2}$. Or, $X=\sqrt{x}\geq 0$.
Ainsi, $0\leq\sqrt{x}<1+\sqrt{2}$ donc $0\leq x<1+2\sqrt{2}+2<3+4$ car $\sqrt{2}\leq 2$.
Ainsi, $x\in[0,7[$.
Synthèse : Soit $x\in[0,7[$.

- Si $x\in[0,1[$, on a :
$$\sqrt{x}\in[0,1[\quad\text{et}\quad\frac{x}{2}\in[0,1[$$
Donc
$$\lfloor\sqrt{x}\rfloor=0\quad\text{et}\quad\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor=0$$
Ainsi, $\lfloor\sqrt{x}\rfloor=\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor$.
- Si $x\in[1,2[$, on a :
$$\sqrt{x}\in[1,2[\quad\text{et}\quad\frac{x}{2}\in[0,1[$$
Donc
$$\lfloor\sqrt{x}\rfloor=1\quad\text{et}\quad\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor=0$$
Ainsi, $\lfloor\sqrt{x}\rfloor\neq\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor$.
- Si $x\in[2,4[$, on a :
$$\sqrt{x}\in[1,2[\quad\text{et}\quad\frac{x}{2}\in[1,2[$$
Donc
$$\lfloor\sqrt{x}\rfloor=1\quad\text{et}\quad\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor=1$$
Ainsi, $\lfloor\sqrt{x}\rfloor=\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor$.
- Si $x\in[4,6[$, on a :
$$\sqrt{x}\in[2,3[\quad\text{et}\quad\frac{x}{2}\in[2,3[$$
Donc
$$\lfloor\sqrt{x}\rfloor=2\quad\text{et}\quad\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor=2$$
Ainsi, $\lfloor\sqrt{x}\rfloor=\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor$.
- Si $x\in[6,7[$, on a :
$$\sqrt{x}\in[2,3[\quad\text{et}\quad\frac{x}{2}\in[3,4[$$
Donc
$$\lfloor\sqrt{x}\rfloor=2\quad\text{et}\quad\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor=3$$
Ainsi, $\lfloor\sqrt{x}\rfloor\neq\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor$. Ainsi, tout élément de $[0,1[\cup[2,6[$ est solution.
Conclusion : L'ensemble des solutions est :
$$[0,1[\cup[2,6[$$

Exercice 11. Indication : Faire différents cas selon la position la position de x par rapport à $\lfloor x \rfloor + \dfrac{1}{2}$ et de y par rapport à $\lfloor y \rfloor + \dfrac{1}{2}$.
Soient $x, y \in \mathbb{R}$.
On a :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

$$\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$$

- Cas 1 : si $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + \dfrac{1}{2}$ et $\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + \dfrac{1}{2}$.
  Alors, on a $2\lfloor x \rfloor \leq 2x < 2\lfloor x \rfloor + 1$ avec $2\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ donc $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor$.
  De même, on a $2\lfloor y \rfloor \leq 2y < 2\lfloor y \rfloor + 1$ avec $2\lfloor y \rfloor \in Z$ donc $\lfloor 2y \rfloor = 2\lfloor y \rfloor$.
  Enfin, on a $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$ avec $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \in \mathbb{Z}$ donc $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.
  Ainsi, on a :
  $$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 2\lfloor y \rfloor = \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$$
- Cas 2 : si $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + \dfrac{1}{2}$ et $\lfloor y \rfloor + \dfrac{1}{2} \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$.
  Alors, on a : $2\lfloor x \rfloor \leq 2x < 2\lfloor x \rfloor + 1$ avec $2\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ donc $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor$.
  De plus, $2\lfloor y \rfloor + 1 \leq 2y < 2\lfloor y \rfloor + 2$ avec $2\lfloor y \rfloor + 1 \in \mathbb{Z}$ donc $\lfloor 2y \rfloor = 2\lfloor y \rfloor + 1$.
  Enfin, on a : $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \dfrac{1}{2} \leq x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \dfrac{3}{2}$. Ainsi, on a : $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$ avec $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \in \mathbb{Z}$. Ainsi, $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ ou $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.
  Donc dans tous les cas, $\lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.
  On a donc :
  $$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor \leq 2\lfloor x \rfloor + 2\lfloor y \rfloor + 1 = \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$$
- Cas 3 : si $\lfloor x \rfloor + \dfrac{1}{2} \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + \dfrac{1}{2}$.
  Par symétrie entre x et y, on obtient :
  $$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor \leq 2\lfloor x \rfloor + 2\lfloor y \rfloor + 1 = \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$$
  comme dans le cas précédent.
- Cas 4 : si $\lfloor x \rfloor + \dfrac{1}{2} \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $\lfloor y \rfloor + \dfrac{1}{2} \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$.
  Alors, on a $2\lfloor x \rfloor + 1 \leq 2x < 2\lfloor x \rfloor + 2$ avec $2\lfloor x \rfloor + 1 \in \mathbb{Z}$ donc $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1$.
  De même, on a $2\lfloor y \rfloor + 1 \leq 2y < 2\lfloor y \rfloor + 2$ avec $2\lfloor y \rfloor + 1 \in Z$ donc $\lfloor 2y \rfloor = 2\lfloor y \rfloor + 1$.
  Enfin, on a $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1 \leq x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$ avec $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1 \in \mathbb{Z}$ donc $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.
  Ainsi, on a :
  $$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 2\lfloor y \rfloor + 2 = \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$$

Ainsi, dans tous les cas, on a bien :

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$$

Exercice 12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $x \in \mathbb{R}$.

1. On a $\lfloor nx \rfloor \leq nx$.
   donc $\dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x$.
   Ainsi, $\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor \leq \lfloor x \rfloor$ car la fonction partie entière est croissante.
   On a également : $\lfloor x \rfloor \leq x$
   donc $n\lfloor x \rfloor \leq nx$.
   D'où $\lfloor n\lfloor x \rfloor \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor$. Or, $n\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ donc $\lfloor n\lfloor x \rfloor \rfloor = n\lfloor x \rfloor$.
   Ainsi, $n\lfloor x \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor$
   On en déduit donc que : $\lfloor x \rfloor \leq \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$.
   D'où $\lfloor \lfloor x \rfloor \rfloor \leq \left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor$ par croissance de la partie entière. Or, Or, $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ donc $\lfloor \lfloor x \rfloor \rfloor = \lfloor x \rfloor$.
   Ainsi, $\lfloor x \rfloor \leq \left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor$.
   On a donc :
   $$\lfloor x \rfloor = \left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{\lfloor n(x+\frac{k}{n}) \rfloor}{n} \right\rfloor \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{\lfloor nx + k \rfloor}{n} \right\rfloor \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor + k}{n} \right\rfloor \qquad \text{car } k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Effectuons la division euclidienne de $\lfloor nx \rfloor$ par n.
On a $\lfloor nx \rfloor = nq + r$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $r \in [\![0, n-1]\!]$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{nq + r + k}{n} \right\rfloor \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor q + \frac{r+k}{n} \right\rfloor \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(q + \left\lfloor \frac{r+k}{n} \right\rfloor \right) \qquad \text{car } q \in \mathbb{Z} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n-1} q \right) + \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{r+k}{n} \right\rfloor \right) \\
&= qn + \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{r+k}{n} \right\rfloor
\end{aligned}$$

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. On a : $0 \leq r + k \leq 2(n-1)$ donc $0 \leq \dfrac{r+k}{n} \leq 2\dfrac{(n-1)}{n}$.
Ainsi, $0 \leq \dfrac{r+k}{n} < 2$ donc $\left\lfloor \dfrac{r+k}{n} \right\rfloor = 0$ ou $\left\lfloor \dfrac{r+k}{n} \right\rfloor = 1$.
On a :

$$\begin{aligned}
\left\lfloor \frac{r+k}{n} \right\rfloor = 1 \quad &\iff \quad 1 \leq \frac{r+k}{n} \\
&\iff \quad n \leq r + k \\
&\iff \quad n - r \leq k \\
&\iff \quad \max(n-r, 0) \leq k \qquad \text{car } k \in [\![0, n-1]\!]
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor &= qn + \sum_{k=0}^{n-r-1} \left\lfloor \frac{r+k}{n} \right\rfloor + \sum_{k=n-r}^{n-1} \left\lfloor \frac{r+k}{n} \right\rfloor \\
&= qn + \sum_{k=0}^{n-r-1} 0 + \sum_{k=n-r}^{n-1} 1 \\
&= qn + (n - 1 - n + r + 1) \\
&= qn + r \\
&= \lfloor nx \rfloor
\end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve.