Corrigé de la feuille d'exercices 17

1 Relations de comparaison : cas des suites

Exercice 1. 1. On a :

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\frac{2}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}$$

Ainsi,

$$\frac{x_n}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$$

Donc :

$$x_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

2. On a :

$$x_n=\frac{2}{(n+1)(n-1)}=\frac{2}{n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

Ainsi,

$$\frac{x_n}{\frac{2}{n^2}}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$$

Donc :

$$x_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2}{n^2}.$$

3. On a :

$$x_n=\ln(n+1)-\ln(n)=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Ainsi,

$$\frac{x_n}{\frac{1}{n}}=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$$

Donc :

$$x_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n}.$$

Exercice 2. 1. Posons $\epsilon=\frac{1-l}{2}>0$. Par définition de la limite, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq N\quad\Longrightarrow\quad\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}-l\right|\leq\epsilon.$$

Ainsi :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq N\quad\Longrightarrow\quad\frac{x_{n+1}}{x_n}\leq l+\epsilon.$$

Donc :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq N\quad\Longrightarrow\quad\frac{x_{n+1}}{x_n}\leq\frac{1+l}{2}.$$

De plus, on a : $\forall n\in\mathbb{N},\ x_n>0$.
Ainsi :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq N\quad\Longrightarrow\quad x_{n+1}\leq\left(\frac{1+l}{2}\right)x_n\quad(*).$$

Montrons par récurrence que : $\forall n\geq N,\ x_n\leq\left(\frac{1+l}{2}\right)^{n-N}x_N$.

- Pour $n = N$, on a $\left(\frac{1+l}{2}\right)^0 = 1$. Donc $x_N = \left(\frac{1+l}{2}\right)^0 x_N$.
- Soit $n \geq N$. Supposons que $x_n \leq \left(\frac{1+l}{2}\right)^{n-N} x_N$.
  D'après $(*)$, on a :
$$\begin{aligned} x_{n+1} &\leq \left(\frac{1+l}{2}\right) x_n \\ &\leq \left(\frac{1+l}{2}\right)\left(\frac{1+l}{2}\right)^{n-N} x_N \\ &\leq \left(\frac{1+l}{2}\right)^{n+1-N} x_N \end{aligned}$$
- Ainsi, on a :
$$\forall n \geq N,\ x_n \leq \left(\frac{1+l}{2}\right)^{n-N} x_N.$$

Or, $0 \leq \frac{1+l}{2} < 1$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1+l}{2}\right)^{n-N} x_N = 0$.
De plus, on a :
$$\forall n \geq N,\ 0 \leq x_n \leq \left(\frac{1+l}{2}\right)^{n-N} x_N$$
Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

2. On souhaite prouver que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.
   Posons : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = \frac{a^n}{n!}$.
   (x_n) est une suite de réels strictement positifs. De plus, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \frac{a}{n+1}.$$
   Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 0 < 1$.
   D'après la question 1, on a donc : $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$. Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.
   Ainsi, $a^n = o(n!)$.
3. On souhaite prouver que $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.
   Posons : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = \frac{n!}{n^n}$.
   (x_n) est une suite de réels strictement positifs. De plus, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{\frac{n!}{(n+1)^n}}{\frac{n!}{n^n}} = \left(\frac{n}{(n+1)}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \exp\left(-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(-\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right).$$
   Or, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.
   Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$.
   Ainsi, par continuité de l'exponentielle, on a : $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = e^{-1} < 1$.
   D'après la question 1, on a donc : $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.
   Ainsi, $n! = o(n^n)$.

Exercice 3. 1. On a : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ donc $\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$.
Ainsi,
$$n\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0.$

2. On a :
$$n^{1/n} - 1 = e^{\frac{\ln n}{n}} - 1.$$
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$

Ainsi, $e^{\frac{\ln n}{n}} - 1 \sim \dfrac{\ln n}{n}.$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^{1/n} - 1) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$ par croissances comparées.

3. On a :
$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^{n\ln(1+\frac{x}{n})}.$$
Or, $\ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right) \sim \dfrac{x}{n}$. D'où $n\ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right) \sim x.$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right) = x.$

Par continuité de l'exponentielle, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$

4. On a :
$$\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = e^{n\ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right)} = e^{n\ln\left(1+\frac{-2}{n+1}\right)}.$$
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-2}{n+1} = 0$. Ainsi, $\ln\left(1 + \dfrac{-2}{n+1}\right) \sim \dfrac{-2}{n+1}$. Donc :
$$\begin{aligned} n\ln\left(1 + \frac{-2}{n+1}\right) &\sim \frac{-2n}{n+1} \\ &\sim -2. \end{aligned}$$
Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right) = -2.$

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n = e^{-2}$ par continuité de l'exponentielle en -2.

5. On a :
$$\left(\frac{n}{n-x}\right)^n = e^{n\ln\left(\frac{n}{n-x}\right)} = e^{n\ln\left(1+\frac{x}{n-x}\right)}.$$
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{n+x} = 0$. Ainsi, $\ln\left(1 + \dfrac{x}{n+x}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{n+x}$. Donc :
$$\begin{aligned} n\ln\left(1 + \frac{x}{n+x}\right) &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{nx}{n+x} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{nx}{n} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} x. \end{aligned}$$
Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(\dfrac{n}{n-x}\right) = x.$

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n}{n-x}\right)^n = e^x$ par continuité de l'exponentielle en x.

6. On a :
$$\left(\frac{n^2+5n+4}{n^2-3n+7}\right)^n = e^{n\ln\left(\frac{n^2+5n+4}{n^2-3n+7}\right)} = e^{n\ln\left(1+\frac{8n-3}{n^2-3n+7}\right)}.$$
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{8n-3}{n^2-3n+7} = 0$. Ainsi, $\ln\left(1 + \dfrac{8n-3}{n^2-3n+7}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{8n-3}{n^2-3n+7}$. Donc :
$$\begin{aligned} n\ln\left(1 + \frac{8n-3}{n^2-3n+7}\right) &\sim \frac{n(8n-3)}{n^2-3n+7} \\ &\sim \frac{8n^2}{n^2} \\ &\sim 8 \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{8n-3}{n^2-3n+7}\right)=8$.
D'où : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+5n+4}{n^2-3n+7}\right)^n=e^8$ par continuité de l'exponentielle en 8.

2 Relations de comparaison : cas des fonctions

Exercice 4. 1. $\ln(\cos(ax))=\ln(1+\cos(ax)-1)$ avec $\lim_{x\to 0}(\cos(ax)-1)=0$.
Donc :

$$\begin{aligned}\ln(\cos(ax)) &\underset{x\to 0}{\sim} \cos(ax)-1\\ &\underset{x\to 0}{\sim} -\frac{(ax)^2}{2}\end{aligned}$$

De même, $\ln(\cos(bx))\underset{x\to 0}{\sim} -\frac{-(bx)^2}{2}$.
Donc :

$$\begin{aligned}\frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))} &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{(ax)^2}{2}\times\frac{2}{(bx)^2}\\ &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{a^2}{b^2}\end{aligned}$$

Donc $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}=\frac{a^2}{b^2}$.

2. $e^{\cos x}-e=e\left(e^{\cos x-1}-1\right)$ avec $\lim_{x\to 0}(\cos(x)-1)=0$.
D'où :

$$\begin{aligned}e^{\cos x}-e &\underset{x\to 0}{\sim} e\left(\cos(x)-1\right)\\ &\underset{x\to 0}{\sim} -e\frac{x^2}{2}\end{aligned}$$

Ainsi, $\frac{e^{\cos x}-e}{x^2}\underset{x\to 0}{\sim}-\frac{e}{2}$.
Donc $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos x}-e}{x^2}=-\frac{e}{2}$.

3. Posons $h=x-\frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}\frac{\ln((\sin x)^2)}{(\frac{\pi}{2}-x)^2} &= \frac{\ln((\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right))^2)}{(-h)^2}\\ &= \frac{\ln((\cos(h))^2)}{h^2}\\ &= 2\frac{\ln(\cos(h))}{h^2}\\ &= 2\frac{\ln(1+\cos(h)-1)}{h^2}\end{aligned}$$

avec $\lim_{h\to 0}\cos(h)-1=0$.
Ainsi :

$$\begin{aligned}\ln(\cos(h)) &\underset{h\to 0}{\sim} \cos(h)-1\\ &\underset{h\to 0}{\sim} -\frac{h^2}{2}\end{aligned}$$

Donc : $2\frac{\ln(1+\cos(h)-1)}{h^2}\underset{h\to 0}{\sim}-1$.
Ainsi, $\frac{\ln((\sin x)^2)}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim}-1$.
Donc : $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln((\sin x)^2)}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}=-1$.

4. Posons $h = \dfrac{1}{x}$.

$$\begin{aligned} x\ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right) &= \frac{1}{h}\ln\left(\sqrt{\frac{\frac{1}{h}+1}{\frac{1}{h}-1}}\right)\\ &= \frac{1}{2h}\ln\left(\sqrt{\frac{1+h}{1-h}}\right)\\ &= \frac{1}{2h}\ln\left(1+\frac{2h}{1-h}\right)\end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2h}{1-h} = 0$.
Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}\ln\left(\sqrt{\frac{\frac{1}{h}+1}{\frac{1}{h}-1}}\right) &\underset{h\to 0}{\sim} \frac{2h}{2h(1-h)}\\ &\underset{h\to 0}{\sim} \frac{1}{1-h}\\ &\underset{h\to 0}{\sim} 1\end{aligned}$$

D'où : $x\ln\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\right) = 1$.

5. Posons $h = x - \dfrac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} \tan(x)\tan(2x) &= \tan\left(\frac{\pi}{2}+h\right)\tan\left(\pi+2h\right)\\ &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+h\right)}\tan(2h)\\ &= -\frac{\cos(h)}{\sin(h)}\tan(2h)\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\pi}{2}+h\right)\tan\left(\pi+2h\right) &\underset{h\to 0}{\sim} \frac{1\times 2h}{-h}\\ &\underset{h\to 0}{\sim} -2\end{aligned}$$

Donc : $\tan x\tan(2x) \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim} -2$.

D'où $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x\tan(2x) = -2$.

Exercice 5. 1. $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$. Ainsi, par composition des limites, $\lim\limits_{x\to 0}\cos(\sin x) = 1$.
Ainsi, $\cos(\sin x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$.

2. $\ln(\cos x) = \ln(1+\cos(x)-1)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\cos(x) - 1 = 0$.
Ainsi :

$$\begin{aligned} \ln(\cos x) &\underset{x\to 0}{\sim} \cos(x) - 1\\ &\underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}\end{aligned}$$

3. On a : $a^x - b^x = a^x\left(1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^x\right) = e^{x\ln(a)}\left(1-e^{x\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} x\ln\left(\dfrac{b}{a}\right) = 0$.
Ainsi, $\left(1-e^{x\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right) \underset{x\to 0}{\sim} -x\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$.
De plus, $\lim\limits_{x\to 0} e^{x\ln(a)} = 1$. Ainsi, $e^{x\ln(a)} \underset{x\to 0}{\sim} 1$.
D'où par produit, $a^x - b^x \underset{x\to 0}{\sim} -x\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$

4. En utilisant deux fois la quantité conjuguée, on a :

$$\sqrt[4]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-x^2}=\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt[4]{1+x^2}+\sqrt[4]{1-x^2}}=\frac{2x^2}{(\sqrt[4]{1+x^2}+\sqrt[4]{1-x^2})(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2})}.$$

Or, $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt[4]{1+x^2}+\sqrt[4]{1-x^2})(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2})=4$.

Ainsi, $(\sqrt[4]{1+x^2}+\sqrt[4]{1-x^2})(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}) \underset{x\to 0}{\sim} 4$.

Donc : $\sqrt[4]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$

5.

$$\frac{1}{\sqrt{2+3x}}-\frac{1}{\sqrt{2-3x}}=\frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2+3x}}{\sqrt{2+3x}\sqrt{2-3x}}=\frac{(2-3x-2-3x)}{\sqrt{2+3x}\sqrt{2-3x}\left(\sqrt{2-3x}+\sqrt{2+3x}\right)}=\frac{-6x}{\sqrt{2+3x}\sqrt{2-3x}\left(\sqrt{2-3x}+\sqrt{2+3x}\right)}.$$

Or, $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{2+3x}\sqrt{2-3x}\left(\sqrt{2-3x}+\sqrt{2+3x}\right)=4\sqrt{2}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2+3x}}-\frac{1}{\sqrt{2-3x}} &\underset{x\to 0}{\sim} -\frac{6x}{4\sqrt{2}}\\ &\underset{x\to 0}{\sim} -\frac{3x}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

6. $\ln(\sin x)=\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\times x\right)=\ln(x)+\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$.

Ainsi, $\dfrac{\ln(\sin x)}{\ln x}=1+\dfrac{1}{\ln x}\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$.

Or, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ et $\lim\limits_{u\to 1}\ln(u)=0$ donc par composition, $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)=0$. De plus, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\ln x}=0$.

Ainsi, par somme et produit, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\ln x}\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)=1$.

Donc $\ln(\sin x) \underset{x\to 0}{\sim} \ln x$.

Exercice 6. 1. On sait que $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)=0$. Ainsi, $\ln(1+\ln(1+x)) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(1+x)$.

$$\underset{x\to 0}{\sim} x$$

D'où $\ln x\ln(1+\ln(1+x)) \underset{x\to 0}{\sim} x\ln x$.

Or, $\lim\limits_{x\to 0}x\ln(x)=0$ par croissances comparées.

Ainsi, on obtient : $\lim\limits_{x\to 0}\ln x\ln(1+\ln(1+x))=0$

2. On sait que : $x^x-1=e^{x\ln x}-1$. Or, $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=0$. Ainsi, $x^x-1 \underset{x\to 0}{\sim} x\ln x$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{x\ln x}{x^x-1} &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{x\ln x}{x\ln x}\\ &\underset{x\to 0}{\sim} 1\end{aligned}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln x}{x^x-1}=1$.

3. On a : $(1+\tan x)^{1/\sin x}=\exp\left(\dfrac{1}{\sin x}(1+\tan x)\right)$.

Commençons par déterminer la limite de $\dfrac{1}{\sin(x)}(\ln(1+\tan(x)))$.

Or, $\lim\limits_{x\to 0}\tan x=0$ donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin(x)}(\ln(1+\tan(x))) &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{\sin x}\tan x\\ &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{x}\\ &\underset{x\to 0}{\sim} 1\end{aligned}$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin(x)}(\ln(1+\tan(x)))=1$.

Or, l'exponentielle est continue en 1 donc on obtient : $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{1/\sin x}=e$.

4. Posons $h = x - \frac{1}{2}$.
On a

$$\begin{aligned}
(2x^2-3x+1)\tan(\pi x) &= \left(2\left(h+\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(h+\frac{1}{2}\right)+1\right)\tan\left(\pi\left(h+\frac{1}{2}\right)\right)\\
&= \left(2h^2-h\right)\tan\left(\pi h+\frac{\pi}{2}\right)\\
&= h\left(2h-1\right)\frac{\sin\left(\pi h+\frac{\pi}{2})\right)}{\cos\left(\pi h+\frac{\pi}{2}\right)}\\
&= h\left(2h-1\right)\frac{\cos\left(\pi h\right)}{-\sin\left(\pi h\right)}
\end{aligned}$$

Or,

$$h(2h-1) \underset{h\to 0}{\sim} -h.$$

Et :

$$\frac{\cos\left(\pi h\right)}{-\sin\left(\pi h\right)} \underset{h\to 0}{\sim} -\frac{1}{\pi h}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
h\left(2h-1\right)\frac{\cos\left(\pi h\right)}{-\sin\left(\pi h\right)} &\underset{h\to 0}{\sim} -h\frac{1}{-\pi h}\\
&\underset{h\to 0}{\sim} \frac{1}{\pi}
\end{aligned}$$

Ainsi, $(2x^2-3x+1)\tan(\pi x) \underset{h\to\frac{1}{2}}{\sim} \frac{1}{\pi}$.
D'où $\lim_{x\to\frac{1}{2}}(2x^2-3x+1)\tan\pi x = \frac{1}{\pi}$.

5. Posons $= \frac{1}{x}$. On a :

$$\begin{aligned}
\sqrt{4x+1}\ln\left(1-\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right) &= \sqrt{\frac{1}{h}+1}\ln\left(1-\frac{\sqrt{\frac{1}{h}+1}}{\frac{1}{h}+2}\right)\\
&= \sqrt{\frac{1+h}{h}}\ln\left(1-\frac{\sqrt{h}\sqrt{1+h}}{1+2h}\right)
\end{aligned}$$

Or, $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h}\sqrt{1+h}}{1+2h} = 0$.
Donc :

$$\begin{aligned}
\ln\left(1-\frac{\sqrt{h}\sqrt{1+h}}{1+2h}\right) &\underset{h\to 0}{\sim} -\frac{\sqrt{h}\sqrt{1+h}}{1+2h}\\
&\underset{h\to 0}{\sim} -\sqrt{h}
\end{aligned}$$

De plus :

$$\frac{\sqrt{1+h}}{\sqrt{h}} \underset{h\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{h}}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{1+h}{h}}\ln\left(1-\frac{\sqrt{h}\sqrt{1+h}}{1+2h}\right) &\underset{h\to 0}{\sim} -\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h}}\\
&\underset{h\to 0}{\sim} -1
\end{aligned}$$

Donc $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x+1}\ln\left(1-\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right) = -1$.

6. Posons $h = \dfrac{1}{x}$. On a :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x} &= \exp\left(x\ln x \ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)\right)\\ &= \exp\left(\frac{1}{h}\ln\left(\frac{1}{h}\right)\ln\left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{h}\right)}{\ln\left(\frac{1}{h}\right)}\right)\right)\\ &= \exp\left(-\frac{\ln(h)}{h}\ln\left(\frac{\ln(1+h)-\ln(h)}{-\ln(h)}\right)\right)\\ &= \exp\left(-\frac{\ln(h)}{h}\ln\left(1-\frac{\ln(1+h)}{\ln(h)}\right)\right)\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{\ln h} = 0$ et $\lim\limits_{h\to 0}\ln(1+h) = 0$ donc par produit, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{\ln(h)} = 0$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}\ln\left(1-\frac{\ln(1+h)}{\ln(h)}\right) &\underset{h\to 0}{\sim} -\frac{\ln(1+h)}{\ln(h)}\\ &\underset{h\to 0}{\sim} -\frac{h}{\ln(h)}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}-\frac{\ln(h)}{h}\ln\left(1-\frac{\ln(1+h)}{\ln(h)}\right) &\underset{h\to 0}{\sim} -\frac{\ln(h)}{h}\times\left(-\frac{h}{\ln(h)}\right)\\ &\underset{h\to 0}{\sim} 1\end{aligned}$$

Ainsi, $\lim\limits_{h\to} -\dfrac{\ln(h)}{h}\ln\left(1-\dfrac{\ln(1+h)}{\ln(h)}\right) = 1$.
Ainsi, $\lim\limits_{h\to 0}\exp\left(-\dfrac{\ln(h)}{h}\ln\left(1-\dfrac{\ln(1+h)}{\ln(h)}\right)\right) = e$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x} = e$ par continuité de l'exponentielle en 1.

3 Calcul de développements limités

Exercice 7. Posons $h = x-2$. On a :

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2+h} = \frac{1}{2+h} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{1+\frac{h}{2}}$$

Or,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+\frac{h}{2}} &\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{2}\left(1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{4}-\frac{h^3}{8}+o(h^3)\right)\\ &\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{2}-\frac{h}{4}+\frac{h^2}{8}-\frac{h^3}{16}+o(h^3)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$f(x) \underset{x\to 2}{=} \frac{1}{2}-\frac{(x-2)}{4}+\frac{(x-2)^2}{8}-\frac{(x-2)^3}{16}+o((x-2)^3).$$

Exercice 8. 1. Posons $h = x-e$. On a :

$$\ln(x) = \ln(e+h) = \ln(e)+\ln\left(1+\frac{h}{e}\right) = 1+\ln\left(1+\frac{h}{e}\right)$$

Or,

$$\ln\left(1+\frac{h}{e}\right) \underset{h\to 0}{=} \frac{h}{e}-\frac{h^2}{2e^2}+\frac{h^3}{3e^3}-\frac{h^4}{4e^4}+o(h^4)$$

D'où $\ln(x) \underset{x\to e}{=} 1+\dfrac{(x-e)}{e}-\dfrac{(x_e)^2}{2e^2}+\dfrac{(x-e)^3}{3e^3}-\dfrac{(x-e)^4}{4e^4}+o((x-e)^4)$.

2. Posons $h = x - 1$. On a :

$$e^x = e^{1+h} = e \times e^h$$

Or,

$$e^h \underset{h \to 0}{=} 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24} + o(h^4)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} e^x &\underset{x \to 1}{=} e\left(1 + h + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{24}(x-1)^4 + o\left((x-1)^4\right)\right) \\ &\underset{x \to 1}{=} e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + \frac{e}{6}(x-1)^3 + \frac{e}{24}(x-1)^4 + o\left((x-1)^4\right) \end{aligned}$$

Exercice 9. Supposons f paire.

f admet un développement limité à l'ordre n en 0 donc il existe $a_0, ...a_n \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$.

On a alors :

$$\begin{aligned} f(-x) &\underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (-x)^k + o((-x)^n) \\ &\underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (-x)^k + o((-x)^n) \\ &\underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (-1)^k x^k + o((-x)^n) \end{aligned}$$

Par unicité du DL de f en 0 à l'ordre n, on a : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ (-1)^k a_k = a_k$.
Donc pour tout entier k impaire de $[\![0, n]\!]$, $-a_k = a_k$.
Ainsi, P_n n'a que des termes de puissances paires.

Exercice 10. 1. On a :

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x - \sin x &\underset{0}{=} x + \frac{x^3}{6} - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + o(x^3) \\ &\underset{0}{=} \frac{x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} \frac{e^x}{\sqrt{1+x}} &\underset{x \to 0}{=} e^x (1+x)^{-1/2} \\ &\underset{x \to 0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3\right) + o(x^3) \\ &\underset{x \to 0}{=} 1 + \left(-\frac{1}{2} + 1\right)x + \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(-\frac{5}{6} + \frac{3}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right)x^3 + o(x^3) \\ &\underset{x \to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{(-15 + 18 - 12 + 8)}{48}x^3 + o(x^3) \\ &\underset{x \to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

3. Posons $h = x - \frac{\pi}{4}$.
On a :

$$\sin(x) = \sin(h + \frac{\pi}{4}) = \sin(h)\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos(h)\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin(h) + \cos(h))$$

Or,

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin(h) + \cos(h)) &\underset{h \to 0}{=} \frac{\sqrt{2}}{2}\left(h - \frac{h^3}{3!} + 1 - \frac{h^2}{2} + o(h^3)\right) \\ &\underset{h \to 0}{=} \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + h - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3!} + o(h^3)\right) \\ &\underset{h \to 0}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}h - \frac{\sqrt{2}}{4}h^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}h^3 + o(h^3). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\sin(x) \underset{x\to\frac{\pi}{4}}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3 + o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right).$$

Exercice 11. 1. **Brouillon :**
$e^x - 1 \underset{0}{=} x(1+...+o(x^r))$. Ainsi, $(e^x-1)^2 \underset{0}{=} x^2(1+...+o(x^r))^2$.
Ainsi, on choisit r tel que $2+r=4$ c'est à dire $r=2$.
On effectue donc un développement limité de $x \mapsto e^x - 1$ à l'ordre $1+r=3$.
Rédaction :

$$\begin{aligned} e^x - 1 &\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ &\underset{x\to 0}{=} x\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} (e^x-1)^2 &\underset{x\to 0}{=} x^2\left(\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}\right)^2 + o(x^2)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} x^2\left(1+\frac{x^2}{4}+x+\frac{1}{3}x^2+o(x^2)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} x^2\left(1+x+\frac{7}{12}x^2+o(x^2)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} x^2+x^3+\frac{7}{12}x^4+o(x^4) \end{aligned}$$

2. **Brouillon :**
$\mathrm{ch}\,(x) - \cos(x) \underset{0}{=} x^2(1+...+o(x^r))$ et $\mathrm{sh}\,(x) - \sin(x) \underset{0}{=} x^3(\frac{1}{3}+...+o(x^r))$.
Ainsi, $((\mathrm{ch}\,(x)-\cos(x))(\mathrm{sh}\,(x)-\sin(x)))^2 \underset{0}{=} x^4 \times x^6(1+...+o(x^r))^2(\frac{1}{3}+...+o(x^r))^2 = x^{10}(1+...+o(x^r))^2(\frac{1}{3}+...+o(x^r))^2$.
On choisit donc r tel que $10+r=11$, c'est à dire $r=1$.
On calcule donc un développement limité de $x \mapsto \mathrm{ch}\,(x)-\cos(x)$ à l'ordre $2+r=3$ et de $x\mapsto \mathrm{sh}\,(x)-\sin(x)$ à l'ordre $3+r=4$.
Rédaction :

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}\,(x)-\cos(x) &\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x^2}{2}-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)++o(x^3) \\ &\underset{x\to 0}{=} x^2+o(x^3) \\ &\underset{x\to 0}{=} x^2(1+o(x)) \end{aligned}$$

D'où

$$(\mathrm{ch}\,(x)-\cos(x))^2 \underset{x\to 0}{=} x^4(1+o(x))$$

De plus :

$$\begin{aligned} \mathrm{sh}\,(x)-\sin(x) &\underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{6}-\left(x-\frac{x^3}{6}\right)++o(x^4) \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{x^3}{3}+o(x^4) \\ &\underset{x\to 0}{=} x^3\left(\frac{1}{3}+o(x)\right) \end{aligned}$$

Donc :

$$(\mathrm{sh}\,(x)-\sin(x))^2 \underset{x\to 0}{=} x^6\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2+o(x)\right)$$

Ainsi :

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{ch}(x)-\cos(x))^2(\operatorname{sh}(x)-\sin(x))^2 &\underset{x\to 0}{=} x^4\times x^6\times(1+o(x))\left(\frac{1}{9}+o(x)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} x^{10}\times\left(\frac{1}{9}+o(x)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{x^{10}}{9}+o(x^{11})
\end{aligned}
$$

Exercice 12. Calculer le développement limité des fonctions suivantes :

1. On sait que :

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

Et

$$\arctan x \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

Ainsi :

$$
\begin{aligned}
e^x\arctan x &\underset{x\to 0}{=} \left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)\left(x-\frac{x^3}{3}\right)+o(x^3)\\
&\underset{x\to 0}{=} x+x^2+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)x^3+o(x^3)\\
&\underset{x\to 0}{=} x+x^2+\frac{x^3}{6}+o(x^3)
\end{aligned}
$$

2. Posons $h=x-1$. On a :

$$\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln(1+h)}{1+h}$$

Or,

$$
\begin{aligned}
\ln(1+h) &\underset{h\to 0}{=} h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}-\frac{h^4}{4}+o(h^4)\\
&\underset{h\to 0}{=} h\left(1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{3}-\frac{h^3}{4}+o(h^3)\right)
\end{aligned}
$$

De plus :

$$\frac{1}{1+h}\underset{h\to 0}{=} 1-h+h^2-h^3+o(h^3)$$

Ainsi :

$$
\begin{aligned}
\frac{\ln(1+h)}{1+h} &\underset{h\to 0}{=} h\left(\left(1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{3}-\frac{h^3}{4}\right)(1-h+h^2-h^3)+o(h^3)\right)\\
&\underset{h\to 0}{=} h\left(1+\left(-1-\frac{1}{2}\right)h+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)h^2+\left(-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)h^3+o(h^3)\right)\\
&\underset{h\to 0}{=} h\left(1-\frac{3}{2}h+\frac{11}{6}h^2-\frac{25}{12}h^3+o(h^3)\right)\\
&\underset{h\to 0}{=} h-\frac{3}{2}h^2+\frac{11}{6}h^3-\frac{25}{12}h^4+o(h^4)
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$\frac{\ln x}{x}\underset{x\to 1}{=}(x-1)-\frac{3}{2}(x-1)+\frac{11}{6}(x-1)^2-\frac{25}{12}(x-1)^3+o((x-1)^4)$$

3. On a :

$$
\begin{aligned}
\sin(x) &\underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\\
&\underset{x\to 0}{=} x\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)\right)
\end{aligned}
$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
(\sin(x))^2 &\underset{x\to 0}{=} x^2\left(\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}\right)^2+o(x^4)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} x^2\left(1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{36}+\frac{x^4}{60}+o(x^4)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} x^2\left(1-\frac{x^2}{3}+\frac{2x^4}{45}+o(x^4)\right)
\end{aligned}$$

$$\frac{(\sin x)^2}{x^2}\underset{x\to 0}{=}1-\frac{x^2}{3}+\frac{2x^4}{45}+o(x^4)$$

4. **Méthode 1 :**
On sait : $\cos x \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^6)$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}
(\cos x)^3 &\underset{x\to 0}{=} \left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}\right)^3+o(x^6)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1+3\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}\right)+3\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}\right)^2+\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}\right)^3+o(x^6)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{260}x^6+3\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{24}\right)-\frac{1}{8}x^6+o(x^6)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{3x^2}{2}+\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{4}\right)x^4+\left(-\frac{1}{260}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\right)x^6+o(x^6)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{3x^2}{2}+\frac{7x^4}{8}-\frac{61x^6}{240}+o(x^4)
\end{aligned}$$

Méthode 2 : On peut aussi commencer par linéariser $(\cos x)^3$:

$$(\cos x)^3=\frac{1}{4}\left(\cos(3x)-3\cos(x)\right)$$

Puis, on cherche un développement limité de chacun des termes.

5. Posons $u=x-\frac{\pi}{3}$. On a :

$$\cos(x)=\cos(h+\frac{\pi}{3})=\cos(h)\times\frac{1}{2}-\sin(h)\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\cos(h)\times\frac{1}{2}-\sin(h)\times\frac{\sqrt{3}}{2} &\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{2}\left(1-\frac{h^2}{2}+\frac{h^4}{24}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(h-\frac{h^3}{6}\right)+o(h^4)\\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}h-\frac{h^2}{4}+\frac{\sqrt{3}}{12}h^3+\frac{h^4}{48}+o(h^4)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\cos(x)\underset{x\to\frac{\pi}{3}}{=}\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{12}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3+\frac{1}{48}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4+o\left(\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4\right)$.

Exercice 13. 1. **Brouillon** :

$$\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}\underset{0}{=}x^3\left(\frac{1}{3}+...+o(x^r)\right)$$

$$\cos(x)-1\underset{0}{=}x^2\left(-\frac{1}{2}+...+o(x^r)\right)$$

Ainsi,

$$\left(\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}\right)(\cos(x)-1)\underset{0}{=}x^5\left(\frac{1}{3}+...+o(x^r)\right)\left(-\frac{1}{2}+...+o(x^r)\right)$$

Ainsi, il suffit de choisir r tel que $5+r=6$ c'est à dire $r=1$.
On calcule alors un développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}$ à l'ordre $3+r=4$ et un développement limité de $x \mapsto \cos(x)-1$ à l'ordre $2+r=3$.
Rédaction :
On a :

$$\begin{aligned}\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2} &\underset{x\to 0}{=} \frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)\\ &\underset{x\to 0}{=} x^3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}x+o(x)\right)\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}\cos x - 1 &\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2}+o(x^3)\\ &\underset{x\to 0}{=} x^2\left(-\frac{1}{2}+o(x)\right)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}f(x) &\underset{x\to 0}{=} x^5\left(\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)+o(x)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} x^5\left(-\frac{1}{6}+\frac{x}{8}+o(x)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^5}{6}+\frac{x^6}{8}+o(x^6)\end{aligned}$$

2. **Brouillon :**

$$\begin{aligned}1-\cos x &\underset{0}{=} x^2\left(\frac{1}{2}+...+o(x^r)\right)\\ e^x-1 &\underset{0}{=} x\left(1+...+o(x^r)\right)\\ x-\sin x &\underset{0}{=} x^3\left(\frac{1}{6}+...+o(x^r)\right)\end{aligned}$$

Ainsi,

$$(1-\cos x)(e^x-1)(x-\sin x) \underset{0}{=} x^6\left(\frac{1}{2}+...+o(x^r)\right)\left(1+...+o(x^r)\right)\left(\frac{1}{6}+...+o(x^r)\right)$$

Pour obtenir un développement de f à l'ordre 7, il suffit de choisir r tel que $6+r=7$, c'est à dire $r=1$.
On calcule alors un développement limité de $x \mapsto 1-\cos x$ à l'ordre $2+r=3$, un développement limité de $x \mapsto e^x-1$ à l'ordre $1+r=2$ et un développement limité de $x \mapsto x-\sin x$ à l'ordre $3+r=4$.
Rédaction :

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}1-\cos x &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}x^2+o(x^3)\\ &\underset{x\to 0}{=} x^2\left(\frac{1}{2}+o(x)\right)\end{aligned}$$

De plus :

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$$

Donc :

$$\begin{aligned} e^x - 1 &\underset{x\to 0}{=} x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \\ &\underset{x\to 0}{=} x\left(1 + \frac{1}{2}x + o(x)\right) \end{aligned}$$

Enfin,

$$\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{1}{6}x^3 = o(x^4)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} x - \sin x &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) \\ &\underset{x\to 0}{=} x^3\left(\frac{1}{6} + o(x)\right) \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{0}{=} x^6\left(\left(\frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{x}{2} + o(x)\right)\left(\frac{1}{6}\right) + o(x)\right) \\ &\underset{0}{=} x^6\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{24}x + o(x)\right) \\ &\underset{0}{=} \frac{x^6}{12} + \frac{x^7}{24} + o(x^7) \end{aligned}$$

Exercice 14. 1. On sait que $\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &\underset{x\to 0}{=} e^{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + o(x^3) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) \end{aligned}$$

2. On sait que :

$$\begin{aligned} 1 + \cos(x) &\underset{x\to 0}{=} 1 + 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \\ &\underset{x\to 0}{=} 2\left(1 - \frac{x^2}{4} + o(x^3)\right) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \ln(1 + \cos(x)) &\underset{x\to 0}{=} \ln(2) + \ln\left(1 - \frac{x^2}{4} + o(x^3)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \ln(2) - \frac{x^2}{4} + o(x^3) \end{aligned}$$

3. On a :

$$\begin{aligned} x\ln(1 + x) &\underset{x\to 0}{=} x\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + o(x^4) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
e^{x\ln(1+x)} &\underset{x\to 0}{=} e^{x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}+o(x^4)}\\
&\underset{x\to 0}{=} 1+\left(x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}\right)^2+o(x^4)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1+x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}+\frac{1}{2}x^4+o(x^4)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1+x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{5}{6}x^4+o(x^4)
\end{aligned}$$

Exercice 15. 1.

$$(1+x)^{1/x}=\exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)\right)$$

Or,

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &\underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)\\
&\underset{x\to 0}{=} x\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)\right)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\frac{\ln(1+x)}{x}\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)$$

D'où :

$$\begin{aligned}
(1+x)^{1/x} &\underset{x\to 0}{=} \exp\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \exp(1)\times\exp\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \exp(1)\times\left(1+\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}\right)^2+\frac{1}{6}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}\right)^3+o(x^3)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \exp(1)\times\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{3}\right)-\frac{1}{48}x^3+o(x^3)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \exp(1)\times\left(1-\frac{x}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\right)x^2+\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{48}\right)x^3+o(x^3)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} e\left(1-\frac{x}{2}+\frac{11x^2}{24}-\frac{7x^3}{16}\right)+o(x^3)\\
&\underset{x\to 0}{=} e-\frac{ex}{2}+\frac{e11x^2}{24}-\frac{7ex^3}{16}+o(x^3)
\end{aligned}$$

2.

$$(\cos x)^{\sin x}=\exp(\sin(x)\ln(\cos(x)))$$

Or,

$$\begin{aligned}
\ln(\cos(x)) &\underset{x\to 0}{=} \ln\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)\\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4)\\
&\underset{x\to 0}{=} x^2\left(-\frac{1}{2}-\frac{x^2}{12}+o(x^2)\right)
\end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned}
\sin x &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\
&\underset{x\to 0}{=} x\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\sin(x)\ln(\cos(x)) &\underset{x\to 0}{=} x^3\left(\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{12}\right) + o(x^2)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x^3\left(-\frac{1}{2} + o(x^2))\right)
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
(\cos x)^{\sin x} &\underset{x\to 0}{=} \exp\left(x^3\left(-\frac{1}{2} + o(x^2)\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^5)
\end{aligned}$$

Exercice 16. 1. On sait que :

$$\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
e^{\cos x} &\underset{x\to 0}{=} \exp\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \exp(1) \times \exp\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \exp(1) \times \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + o(x^4)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \exp(1) \times \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \exp(1) \times \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} e - \frac{ex^2}{2} + \frac{ex^4}{6} + o(x^4)
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\sin(2x-4x^2) - 2\sin(x-x^2) &\underset{x\to 0}{=} (2x-4x^2) - \frac{1}{6}(2x-4x^2)^3 - 2\left((x-x^2) - \frac{1}{6}(x-x^2)^3\right) + o(x^3) \\
&\underset{x\to 0}{=} 2x - 4x^2 - \frac{8}{6}x^3 - 2\left(x - x^2 - \frac{1}{6}x^3\right) + o(x^3) \\
&\underset{x\to 0}{=} 2x - 4x^2 - \frac{4}{3}x^3 - 2x + 2x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \\
&\underset{x\to 0}{=} -2x^2 - x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

3. On a (attention à bien faire un DL de sin à l'ordre 5, le dénominateur réduisant d'un ordre le DL) :
   On sait que :

$$\begin{aligned}
\sin(x) &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{720} + o(x^5) \\
&\underset{x\to 0}{=} x\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{720} + o(x^4)\right)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\frac{\sin(x)}{x} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{720} + o(x^4)$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) &\underset{x\to 0}{=} \ln\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{720}+o(x^4)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \left(-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}\right)^2+o(x^4)\\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^4}{72}+o(x^4)\\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{180}x^4+o(x^4)
\end{aligned}$$

Exercice 17. 1. On a :

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1-x+o(x)$$

Ainsi :

$$\frac{x^2}{1+x} \underset{x\to 0}{=} x^2-x^3+o(x^3).$$

D'où

$$\begin{aligned}
\ln\left(1+\frac{x^2}{1+x}\right) &\underset{x\to 0}{=} \ln\left(1+x^2-x^3+o(x^3)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} x^2-x^3+o(x^3)
\end{aligned}$$

2. On a $\dfrac{e^{-1/x^2}}{x^5}=\dfrac{\frac{1}{x^5}}{e^{1/x^2}}=\dfrac{\left(\frac{1}{x^2}\right)^{5/2}}{e^{1/x^2}}$.
Or, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\frac{X^{5/2}}{e^X}=0$.
Ainsi, $e^{1/x^2} \underset{x\to 0}{=} o(x^5)$.
D'où $1+e^{-1/x^2} \underset{x\to 0}{=} 1+o(x^5)$.
De plus

$$\cos x \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
e^{\cos x} &\underset{x\to 0}{=} \exp\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \exp(1)\times\exp\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \exp(1)\times\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)^2+o(x^5)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \exp(1)\times\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^4}{8}+o(x^5)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \exp(1)\times\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}+o(x^5)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} e-\frac{ex^2}{2}+\frac{ex^4}{6}+o(x^5)
\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
e^{\cos x}(1+e^{-1/x^2}) &\underset{x\to 0}{=} \left(e-\frac{ex^2}{2}+\frac{ex^4}{6}+o(x^5)\right)\left(1+o(x^5)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} e-\frac{ex^2}{2}+\frac{ex^4}{6}+o(x^5)
\end{aligned}$$

3. On sait que :

$$\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+o(x^3)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} 2+x+\sqrt{1+x} &\underset{x\to 0}{=} 3+\frac{3}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+o(x^3) \\ &\underset{x\to 0}{=} 3\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{24}x^2+\frac{1}{48}x^3+o(x^3)\right) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \ln(2+x+\sqrt{1+x}) &\underset{x\to 0}{=} \ln(3)+\ln\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{24}x^2+\frac{1}{48}x^3+o(x^3)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \ln(3)+\frac{1}{2}x-\frac{1}{24}x^2+\frac{1}{48}x^3-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{24}x^2\right)^2+\frac{1}{3}\times\frac{x^3}{8}+o(x^3) \\ &\underset{x\to 0}{=} \ln(3)+\frac{1}{2}x-\frac{1}{24}x^2+\frac{1}{48}x^3-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{48}+\frac{x^3}{24}+o(x^3) \\ &\underset{x\to 0}{=} \ln(3)+\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}x^2+\frac{x^3}{12}+o(x^3) \end{aligned}$$

4. Posons $u=x-\frac{\pi}{2}$, on a :

$$\sin(x)=\sin(u+\frac{\pi}{2})=\cos u.$$

Or,

$$\cos u \underset{u\to 0}{=} 1-\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{24}+o(u^4)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} e^{\cos(u)} &\underset{u\to 0}{=} e\times\exp\left(-\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{24}+o(u^4)\right) \\ &\underset{u\to 0}{=} e\left(1+\left(-\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{24}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{24}\right)^2+o(u^4)\right) \\ &\underset{u\to 0}{=} e\left(1-\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{24}+\frac{u^4}{8}+o(u^4)\right) \\ &\underset{u\to 0}{=} e\left(1-\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{6}+o(u^4)\right) \\ &\underset{u\to 0}{=} e-\frac{eu^2}{2}+\frac{eu^4}{6}+o(u^4) \end{aligned}$$

Donc :

$$e^{\sin x} \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{=} e-\frac{e}{2}(x-\frac{\pi}{2})+\frac{e}{6}(x-\frac{\pi}{2})^4+o((x-\frac{\pi}{2})^4)$$

5. Posons $u=x-\dfrac{\pi}{6}$. On a :

$$2\sin(x)=2\sin\left(u+\frac{\pi}{6})\right)=\sqrt{3}\sin(u)+\cos(u)).$$

Or,

$$\begin{aligned} \sqrt{3}\sin(u)+\cos(u) &\underset{u\to 0}{=} \sqrt{3}\left(u-\frac{u^3}{6}\right)+\left(1-\frac{u^2}{2}\right)+o(u^3)) \\ &\underset{u\to 0}{=} 1+\sqrt{3}u-\frac{u^2}{2}-\frac{\sqrt{3}u^3}{6}+o(u^3)) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \ln\left(\sqrt{3}\sin(u)+\cos(u)\right) &\underset{u\to 0}{=} \ln\left(1+\sqrt{3}u-\frac{u^2}{2}-\frac{\sqrt{3}u^3}{6}+o(u^3))\right) \\ &\underset{u\to 0}{=} (\sqrt{3}u-\frac{u^2}{2}-\frac{\sqrt{3}u^3}{6})-\frac{1}{2}(\sqrt{3}u-\frac{u^2}{2}-\frac{\sqrt{3}u^3}{6})^2+\frac{1}{3}(\sqrt{3}u-\frac{u^2}{2}-\frac{\sqrt{3}u^3}{6})^3+o(u^3) \\ &\underset{u\to 0}{=} \sqrt{3}u-\frac{u^2}{2}-\frac{\sqrt{3}u^3}{6}-\frac{3u^2}{2}+\frac{\sqrt{3}u^3}{2}+\frac{3\sqrt{3}u^3}{3}+o(u^3) \\ &\underset{u\to 0}{=} \sqrt{3}u-2u^2+\frac{4\sqrt{3}}{3}u^3+o(u^3) \end{aligned}$$

Donc :

$$\ln(2\sin(x))) \underset{x\to\frac{\pi}{6}}{=} \sqrt{3}(x-\frac{\pi}{6}) - 2(x-\frac{\pi}{6})^2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}(x-\frac{\pi}{6})^3 + o((x-\frac{\pi}{6})^3)$$

Exercice 18. 1. La fonction sh est strictement croissante (car dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x) > 0$). De plus, elle est continue sur $\mathbb{R}$. Enfin, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x) - \infty$. Ainsi, sh est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathrm{sh}(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{sh}(x), \lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{sh}(x)\right[= \mathbb{R}$.

2. sh est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée ch ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Ainsi, f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et donc en 0.
D'après la formule de Taylor-Young, f admet un DL à tout ordre en 0 et donc en particulier à l'ordre 4.

3. Comme f admet un développement limité à l'ordre 4 en 0,il existe $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + o(x^4).$$

Or, sh est impaire, montrons que f est également impaire : $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.
Soit $x\in\mathbb{R}$, on a $\mathrm{sh}(f(-x)) = -x$. De plus, $\mathrm{sh}(-f(x)) = -\mathrm{sh}(f(x))$ car sh est impaire. Donc $\mathrm{sh}(-f(x)) = -x$.
Ainsi, $\mathrm{sh}(-f(x)) = \mathrm{sh}(f(-x))$. Par injectivité de la fonction sh, on en déduit que $f(-x) = -f(x)$.
Ainsi, f est impaire.
D'où $a_0 = a_2 = a_4 = 0$.
Ainsi :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_1x + a_3x^3 + o(x^4).$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{sh}(f(x)) &\underset{x\to 0}{=} x \\ &\underset{x\to 0}{=} x + o(x^4)\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}\mathrm{sh}(f(x)) &\underset{x\to 0}{=} \mathrm{sh}\left(a_1x + a_3x^3 + o(x^4)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \left(a_1x + a_3x^3\right) + \frac{1}{6}\left(a_1x + a_3x^3\right)^3 + o(x^4) \\ &\underset{x\to 0}{=} a_1x + \left(a_3 + \frac{a_1^3}{6}\right)x^3 + o(x^4)\end{aligned}$$

Ainsi, par unicité du développement limité de sh $\circ f$, on a : $a_1 = 1$ et $a_3 + \frac{a_1^3}{6} = 0$ donc $a_3 = -\frac{1}{6}$.
Donc :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4).$$

Exercice 19.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+e^x} &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1+1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)} \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}\times\frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o(x^3)} \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}\times\left(1-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}\right)+\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}\right)^2-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}\right)^3+o(x^3)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}\times\left(1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{8}-\frac{x^3}{8}+o(x^3)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}\times\left(1-\frac{x}{2}-\frac{(-2+6-3)}{24}x^3+o(x^3)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}-\frac{x}{4}-\frac{1}{48}x^3+o(x^3)\end{aligned}$$

Brouillon :

$$e^x - 1 - x \underset{x\to 0}{=} x^2\left(\frac{1}{2}+...+o(x^r)\right)$$

et

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x(1+...+o(x^r))$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{e^x-1-x}{\ln(1+x)} &\underset{x\to 0}{=} \frac{x^2\left(\frac{1}{2}+...+o(x^r)\right)}{x(1+...+o(x^r))}\\ &\underset{x\to 0}{=} x\times\left(\frac{\frac{1}{2}+...+o(x^r)}{1+...+o(x^r)}\right)\end{aligned}$$

Ainsi, f admet bien un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0.
De plus, on choisit r tel que $1+r=3$ i.e $r=2$.
On calcule donc un développement limité à l'ordre $2+r=2$ de $x\mapsto e^x-1-x$ et un développement limité à l'ordre $1+r=3$ de $x\mapsto \ln(1+x)$ au voisinage de 0.

Rédaction

On a :

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}e^x-1-x &\underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\\ &\underset{x\to 0}{=} x^2\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{6}+\frac{x^2}{24}+o(x^2)\right)\end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &\underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\\ &\underset{x\to 0}{=} x\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right)\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}\frac{e^x-1-x}{\ln(1+x)} &\underset{x\to 0}{=} x\times\frac{\frac{1}{2}+\frac{x}{6}+\frac{x^2}{24}+o(x^2)}{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}\\ &\underset{x\to 0}{=} x\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{6}+\frac{x^2}{24}\right)\left(1-\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\right)+\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\right)^2\right)+o(x^2)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} x\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{6}+\frac{x^2}{24}\right)\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3}+\frac{x^2}{4}\right)+o(x^2)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} x\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{6}+\frac{x^2}{24}\right)\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{12}\right)+o(x^2)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} x\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)x+\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{12}-\frac{1}{24}\right)x^2+o(x^2)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} x\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{12}x+\frac{1}{12}x^2+o(x^2)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}x+\frac{5}{12}x^2+\frac{1}{12}x^3+o(x^3)\end{aligned}$$

Exercice 20. 1.
$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} &= \frac{1}{1+(1+x)^{1/2}+(1-x)^{1/2}}\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1+1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3+o(x^3)}\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{3-\frac{1}{4}x^2+o(x^3)}\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{3}\times\frac{1}{1-\frac{1}{12}x^2+o(x^3)}\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{3}\times\left(1+\frac{1}{12}x^2+o(x^3)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{3}+\frac{1}{36}x^2+o(x^3)
\end{aligned}$$

2. On a : $(1+\arctan x)^{\frac{x}{(\sin x)^2}} = \exp\left(\frac{x}{\sin(x)^2}\ln(1+\arctan x)\right)$.

Brouillon :
On a $\arctan x \underset{0}{=} x(1+...+o(x^r)$.
Ainsi : $\ln(1+\arctan x) \underset{0}{=} x(1+...+o(x^r)$.
De plus, $\sin x \underset{0}{=} x(1+...+o(x^r))$. Ainsi $(\sin x)^2 \underset{0}{=} x^2(1+...+o(x^r))^2$.
Enfin, on a donc :

$$\begin{aligned}
\frac{x}{(\sin x)^2}\ln(1+\arctan x) &\underset{0}{=} \frac{x^2}{x^2}(1+...+o(x^r))^2(1+...+o(x^r))\\
&\underset{0}{=} (1+...+o(x^r))^2(1+...+o(x^r))
\end{aligned}$$

On choisit donc $r=2$.
On calcule donc un développement limité à l'ordre $1+r=3$ de arctan et un développement limité à l'ordre $1+r=3$ de sin.

Rédaction :
On a :

$$\arctan x \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{3}+o(x^3).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\ln(1+\arctan x) &\underset{x\to 0}{=} \ln\left(1+x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\\
&\underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\\
&\underset{x\to 0}{=} x\left(1-\frac{x}{2}+o(x^2)\right)
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\sin x &\underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\\
&\underset{x\to 0}{=} x\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
(\sin x)^2 &\underset{x\to 0}{=} x^2\left(\left(1-\frac{x^2}{6}\right)^2+o(x^2)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} x^2\left(1-\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{x}{\sin(x)^2}\ln(1+\arctan x) &\underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{x^2}\frac{\left(1-\dfrac{x}{2}+o(x^2)\right)}{1-\dfrac{x^2}{3}+o(x^2)} \\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1-\dfrac{x}{2}+o(x^2)}{1-\dfrac{x^2}{3}+o(x^2)} \\
&\underset{x\to 0}{=} \left(1-\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x^2}{3}\right)+o(x^2) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned}
(1+\arctan x)^{\frac{x}{(\sin x)^2}} &\underset{x\to 0}{=} \exp\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} e\times e^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)} \\
&\underset{x\to 0}{=} e\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{1}{2}\times\left(\frac{x}{2}\right)^2+o(x^2)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} e\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^2}{8}+o(x^2)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} e\left(1-\frac{x}{2}+\frac{11x^2}{24}+o(x^2)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} e-\frac{ex}{2}+\frac{11e}{24}x^2+o(x^2)
\end{aligned}$$

3. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{(1-x^2)^{1/3}}{\cos x} &\underset{x\to 0}{=} \frac{1-\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{x^4}{9}+o(x^4)}{1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+o(x^4)} \\
&\underset{x\to 0}{=} \left(1-\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{9}\right)\left(1-\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)+\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)^2\right)+o(x^4) \\
&\underset{x\to 0}{=} \left(1-\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{9}\right)\left(1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^4}{4}\right)+o(x^4) \\
&\underset{x\to 0}{=} \left(1-\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{9}\right)\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}\right)+o(x^4) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}-\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{6}-\frac{x^4}{9}+o(x^4) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{6}x^2-\frac{5}{72}x^4+o(x^4)
\end{aligned}$$

Exercice 21. 1. On sait que $\tan x \underset{x\to 0}{\sim} x$, donc $\tan x \underset{0}{=} x+o(x)$. Comme tan est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, tan admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.De plus, tan est impaire, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
\tan(x) &\underset{x\to 0}{=} x+o(x^2) \\
&\underset{x\to 0}{=} x(1+o(x))
\end{aligned}$$

De plus, tan est dérivable et on a $\tan' = 1+\tan^2$.
Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
\tan'(x) &\underset{x\to 0}{=} 1+x^2(1+o(x)) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1+x^2+o(x^3)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\tan'$ admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 donc tan admet un développement limité à l'ordre 4 en 0 et on a :

$$\begin{aligned}\tan(x) &\underset{x\to 0}{=} \tan(0) + x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)\\ &\underset{x\to 0}{=} x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4) \qquad\qquad \underset{x\to 0}{=} x\left(1 + \frac{1}{3}x^2 + o(x^3)\right)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}(\tan x)^2 &\underset{x\to 0}{=} x^2\left(\left(1+\frac{1}{3}x^2\right)^2 + o(x^3)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} x^2\left(1+\frac{2}{3}x^2+o(x^3)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\tan'(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$$

Ainsi, $\tan'$ admet un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 donc tan admet un développement limité à l'ordre 5 en 0 et on a :

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

Comme tan est $\mathcal{C}^6$ sur $\mathbb{R}$, tan admet donc un développement limité à l'ordre 6 en 0. De plus, tan est impaire, ainsi :

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^6).$$

2. On sait que :

$$\begin{aligned}\sin x &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)\\ &\underset{x\to 0}{=} x\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5)\right)\end{aligned}$$

Et

$$\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\tan x &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\\ &\underset{x\to 0}{=} x\frac{\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^5)\right)}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)}\\ &\underset{x\to 0}{=} x\left(\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}\right)\left(1-\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)+\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)^2\right)+o(x^5)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} x\left(\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}\right)\left(1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^4}{4}\right)+o(x^5)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} x\left(\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}\right)\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}\right)+o(x^5)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} x\left(1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)x^2+\left(\frac{5}{24}-\frac{1}{12}+\frac{1}{120}\right)x^4+o(x^5)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} x\left(1+\frac{x^2}{3}+\frac{2x^4}{15}+o(x^5)\right)\\ &\underset{0}{=} x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^6)\end{aligned}$$

Exercice 22. On pose $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
g est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Notons G une primitive de g sur $\mathbb{R}$. On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = G(x^2) - G(x)$.
f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2xG'(x^2) - G'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^4}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

On calcule un développement limité de f' à l'ordre 3 en 0.

$$\begin{aligned}
f'(x) &\underset{x\to 0}{=} 2x\left(1+x^4\right)^{-1/2} - \left(1+x^2\right)^{-1/2} \\
&\underset{x\to 0}{=} 2x\left(1+o(x^2)\right) - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} -1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)
\end{aligned}$$

Ainsi, en primitivant, on obtient :

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to 0}{=} f(0) - x + x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) \\
&\underset{x\to 0}{=} -x + x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)
\end{aligned}$$

Exercice 23. On pose $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$.
g est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$.
Notons G une primitive de g sur $\mathbb{R}$.
On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = G(x^2) - G(x^3)$.
f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2xG'(x^2) - 3x^2G'(x^3) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^4+x^8}} - \frac{3x^2}{\sqrt{1+x6+x^12}}.$$

On calcule un développement limité de f' à l'ordre 12 en 0.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2x \times \left(1+x^4+x^8\right)^{-1/2} - 3x^2 \times \left(1+x^6+x^{12}\right)^{-1/2} \\
&\underset{x\to 0}{=} 2x \times \left(1 - \frac{1}{2}(x^4+x^8) + \frac{3}{8}x^8 + o(x^{11})\right) - 3x^2 \times \left(1 - \frac{1}{2}x^6 + o(x^{10})\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 2x - x^5 - x^9 + \frac{3}{4}x^9 - 3x^2 + \frac{3}{2}x^8 + o(x^{12}) \\
&\underset{x\to 0}{=} 2x - 3x^2 - x^5 + \frac{3}{2}x^8 - \frac{1}{4}x^9 + o(x^{12})
\end{aligned}$$

Ainsi, en primitivant, on obtient :

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to 0}{=} f(0) + x^2 - x^3 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{6}x^9 - \frac{1}{40}x^{10} + o(x^{13}) \\
&\underset{x\to 0}{=} x^2 - x^3 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{6}x^9 - \frac{1}{40}x^{10} + o(x^{13})
\end{aligned}$$

Exercice 24. Méthode 1 :
f est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0.

De plus, on a :

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}} \times \sum_{k=1}^{n} \frac{kx^{k-1}}{k!} \\
&= \frac{1}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}} \times \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \frac{1}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}} \times \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k}}{k!} \qquad \text{par changement d'indice} \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - \frac{x^n}{n!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}} \\
&= 1 - \frac{x^n}{n!} \times \frac{1}{1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}} \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^n}{n!}(1 + o(1)) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^n}{n!} + o(x^n)
\end{aligned}
$$

Ainsi, f' admet un développement limité à l'ordre n en 0.
f admet donc un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 et on a :

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} &\underset{x\to 0}{=} f(0) + x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)n!} + o(x^{n+1}) \\
&\underset{x\to 0}{=} f(0) + x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1})
\end{aligned}
$$

Méthode 2 :
On sait que :

$$
e^x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1})
$$

Ainsi :

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} &\underset{x\to 0}{=} e^x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1}) \\
&\underset{x\to 0}{=} e^x \left(1 - \frac{x^{n+1}e^{-x}}{(n+1)!} + o(x^{n+1}e^{-x})\right)
\end{aligned}
$$

Or, $\dfrac{-\dfrac{x^{n+1}e^{-x}}{(n+1)!}}{-\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}} = e^{-x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. Donc : $-\dfrac{x^{n+1}e^{-x}}{(n+1)!} \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. Ainsi, $-\dfrac{x^{n+1}e^{-x}}{(n+1)!} = -\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1})$.
De plus, si $g(x) = o(x^{n+1}e^{-x})$, on a : $\dfrac{g(x)}{x^{n+1}} = \dfrac{g(x)}{e^{-x}x^{n+1}} e^{-x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \times 1 = 0$.
Donc $g(x) = o(x^{n+1})$.
Ainsi, on a :

$$
\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \underset{x\to 0}{=} e^x \left(1 - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1})\right)
$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right) &\underset{x\to0}{=} \ln\left(e^x\left(1-\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+o(x^{n+1})\right)\right)\\
&\underset{0}{=} \ln(e^x)+\ln(1-\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+o(x^{n+1}))\\
&\underset{0}{=} x-\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+o(x^{n+1})
\end{aligned}$$

4 Applications des développements limités

Exercice 25. 1. On sait que :

$$\begin{aligned}
\sin x &\underset{x\to0}{=} x-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)\\
&\underset{x\to0}{=} x\left(1-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)\right)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
(\sin x)^2 &\underset{x\to0}{=} x^2\left(\left(1-\frac{1}{6}x^2\right)^2+o(x^2)\right)\\
&\underset{x\to0}{=} x^2\left(1-\frac{1}{3}x^2+o(x^2)\right)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2} &\underset{x\to0}{=} \frac{1}{x^2\left(1-\frac{1}{3}x^2+o(x^2)\right)}-\frac{1}{x^2}\\
&\underset{x\to0}{=} \frac{1}{x^2}\left(1+\frac{x^2}{3}-1+o(x^2)\right)\\
&\underset{x\to0}{=} \frac{1}{3}+o(1)
\end{aligned}$$

$\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\underset{x\to0}{\sim}\frac{1}{3}$. Donc : $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin(x)^2}-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{3}$.

2. On a :

$$\begin{aligned}
\ln(1+x+2x^2) &\underset{x\to0}{=} x+2x^2-\frac{(x^2+4x^3)}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\\
&\underset{x\to0}{=} x+\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{3}x^3+o(x^3)
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-2x} &\underset{x\to0}{=} 1-x-\frac{1}{8}(2x)^2-\frac{1}{16}\times 8x^3+o(x^3)\\
&\underset{x\to0}{=} 1-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3+o(x^3)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\ln(1+x+2x^2)+\sqrt{1-2x}-1-x^2 &\underset{x\to0}{=} x+\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{3}x^3+1-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3-1-x^2+o(x^3)\\
&\underset{x\to0}{=} x^2\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}-1\right)+x^3\left(-\frac{5}{3}-\frac{1}{2}\right)+o(x^3)\\
&\underset{x\to0}{=} -\frac{13}{6}x^3+o(x^3)
\end{aligned}$$

Donc $\ln(1+x+2x^2)+\sqrt{1-2x}-1-x^2 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{13}{6}x^3$.
On a également :

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh}(x)-2\operatorname{sh}(2x)+\operatorname{sh}(3x) &\underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{6}-2\left(2x+\frac{8x^3}{6}\right)+3x+\frac{27x^3}{6}+o(x^3)\\
&\underset{x\to 0}{=} x^3\left(\frac{1}{6}-\frac{8}{3}+\frac{9}{2}\right)+o(x^3)\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1-16+27}{6}x^3+o(x^3)\\
&\underset{x\to 0}{=} 2x^3+o(x^3)
\end{aligned}$$

Donc $\operatorname{sh}(x)-2\operatorname{sh}(2x)+\operatorname{sh}(3x) \underset{x\to 0}{\sim} 2x^3$. Finalement, $\dfrac{\operatorname{sh}x-2\operatorname{sh}(2x)+\operatorname{sh}(3x)}{\ln(1+x+2x^2)+\sqrt{1-2x}-1-x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-12}{13}$.
On obtient ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}x-2\operatorname{sh}(2x)+\operatorname{sh}(3x)}{\ln(1+x+2x^2)+\sqrt{1-2x}-1-x^2}=-\frac{12}{13}$

Exercice 26. 1. On sait que :

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
x(e^x+1) &\underset{x\to 0}{=} x\left(2+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 2x+x^2+\frac{x^3}{2}+o(x^2)
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
-2(e^x-1) &\underset{x\to 0}{=} -2\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-1\right)+o(x^3)\\
&\underset{x\to 0}{=} -2x-x^2-\frac{x^3}{3}+o(x^3)
\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
x(e^x+1)-2(e^x-1) &\underset{x\to 0}{=} 2x+x^2+\frac{x^3}{2}-2x-x^2-\frac{x^3}{3}\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{6}x^3+o(x^3)
\end{aligned}$$

Donc $x(e^x+1)-2(e^x-1) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{6}x^3$. D'où $\dfrac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{6}$.
Ainsi, on obtient que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}=\frac{1}{6}$.

2. On a : $\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{1/(\sin x)^2}=\exp\left(\dfrac{1}{\sin(x))^2}\ln\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)\right)$.
Or,

$$\begin{aligned}
\tan x &\underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\\
&\underset{x\to 0}{=} x\left(1+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\frac{\tan x}{x} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x^2}{3}+o(x^2)$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{\tan x}{x}\right) &\underset{x\to 0}{=} \ln\left(1+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{3}+o(x^2)
\end{aligned}$$

Donc $\ln\left(\frac{\tan x}{x}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{3}$.
De plus, $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$. Donc $\frac{1}{(\sin x)^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^2}$.
D'où $\frac{1}{\sin(x)^2}\ln\left(\frac{\tan x}{x}\right) \underset{0}{\sim} \frac{1}{3}$.
Ainsi $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin(x)^2}\ln\left(\frac{\tan x}{x}\right) = \frac{1}{3}$ donc par continuité de l'exponentielle en $\frac{1}{3}$, on a : $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/(\sin x)^2} = e^{1/3}$.

3. Posons $h = x - 1$.
On a $x^x - x = e^{x\ln(x)} - x = e^{(1+h)\ln(1+h)} - 1 - h$.
Or,
$$\ln(1+h) \underset{h\to 0}{=} h - \frac{h^2}{2} + o(h^2).$$
Donc
$$\begin{aligned}(1+h)\ln(1+h) &\underset{h\to 0}{=} (1+h)\left(h - \frac{h^2}{2}\right) + o(h^2)\\ &\underset{h\to 0}{=} h + \frac{h^2}{2} + o(h^2)\end{aligned}$$
Ainsi :
$$\begin{aligned}e^{(1+h)\ln(1+h)} &\underset{h\to 0}{=} \exp\left(h + \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right)\\ &\underset{h\to 0}{=} 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{1}{2}h^2 + o(h^2)\\ &\underset{h\to 0}{=} 1 + h + h^2 + o(h^2)\end{aligned}$$
Donc :
$$e^{(1+h)\ln(1+h)} - 1 - h \underset{h\to 0}{=} h^2 + o(h^2)$$
Ainsi : $x^x - x \underset{x\to 1}{=} (x-1)^2 + o((x-1)^2)$. Donc $x^x - x \underset{x\to 1}{\sim} (x-1)^2$.
De plus
$$1 - x + \ln(x) = -h + \ln(1+h)$$
Or,
$$-h + \ln(1+h) \underset{h\to 0}{=} -\frac{h^2}{2} + o(h^2)$$
Donc $1 - x + \ln(x) \underset{x\to 1}{=} -\frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2)$.
Ainsi : $1 - x + \ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} -\frac{(x-1)^2}{2}$.
On a donc :
$$\frac{x^x - x}{1 - x - \ln x} \underset{x\to 1}{\sim} -2$$
Donc $\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x - \ln x} = -2$.

4. Posons $h = \frac{1}{x} > 0$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \ln(x+\sqrt{x^2-1})}{\left(\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)^2} &= \frac{\ln\left(\frac{1}{h} + \sqrt{\left(\frac{1}{h}\right)^2+1}\right) - \ln\left(\frac{1}{h} + \sqrt{\left(\frac{1}{h}\right)^2-1}\right)}{\left(\ln\left(\frac{\frac{1}{h}+1}{\frac{1}{h}-1}\right)\right)^2} \\
&= \frac{\ln\left(\frac{1+\sqrt{1+h^2}}{h}\right) - \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-h^2}}{h}\right)}{\left(\ln\left(\frac{1+h}{1-h}\right)\right)^2} \\
&= \frac{\ln\left(1+\sqrt{1+h^2}\right) - \ln(h) - \ln\left(1+\sqrt{1-h^2}\right) + \ln(h)}{\left(\ln\left(\frac{1+h}{1-h}\right)\right)^2} \\
&= \frac{\ln(1+\sqrt{1+h^2}) - \ln(1+\sqrt{1-h^2})}{\left(\ln\left(\frac{1+h}{1-h}\right)\right)^2}.
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\ln(1+\sqrt{1+h^2}) &\underset{h\to 0}{=} \ln\left(2 + \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right) \\
&\underset{h\to 0}{=} \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{1}{4}h^2 + o(h^2)\right) \\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{4}h^2 + o(h^2)
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\ln(1+\sqrt{1-h^2}) &\underset{h\to 0}{=} \ln\left(2 - \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right) \\
&\underset{h\to 0}{=} \ln(2) + \ln\left(1 - \frac{1}{2}h^2 + o(h^2)\right) \\
&\underset{h\to 0}{=} -\frac{1}{4}h^2 + o(h^2)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\ln(1+\sqrt{1+h^2}) - \ln(1+\sqrt{1-h^2}) &\underset{h\to 0}{=} \ln(2) + \frac{1}{4}h^2 - \ln(2) + \frac{1}{4}h^2 + o(h^2) \\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{2}h^2 + o(h^2)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\ln(1+\sqrt{1+h^2}) - \ln(1+\sqrt{1-h^2}) \underset{h\to 0}{\sim} \frac{h^2}{2}$.
On a également,

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{1+h}{1-h}\right) &\underset{h\to 0}{=} \ln\left(1 + \frac{2h}{1-h}\right) \\
&\underset{h\to 0}{\sim} \frac{2h}{1-h} \\
&\underset{h\to 0}{\sim} 2h
\end{aligned}$$

On a donc $\left(\ln\left(\frac{1+h}{1-h}\right)\right)^2 \underset{h\to 0}{\sim} 4h^2$.

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+\sqrt{1+h^2})-\ln(1+\sqrt{1-h^2})}{\left(\ln\left(\dfrac{1+h}{1-h}\right)\right)^2} &\underset{h\to 0}{\sim} \frac{h^2}{2\times 4h^2}\\ &\underset{h\to 0}{\sim} \frac{1}{8}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\ln(x+\sqrt{x^2-1})}{\left(\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)\right)^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{8}$$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\ln(x+\sqrt{x^2-1})}{\left(\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)^2} = \frac{1}{8}$

5. Posons $u=\dfrac{1}{x}$. On a :

$$\begin{aligned}\left(e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}} &= \left(e-(1+u)^{1/u}\right)^{\sqrt{\left(\frac{1}{u}\right)^2+2}-\sqrt{\left(\frac{1}{u}\right)^2+1}}\\ &= \left(e-(1+u)^{1/u}\right)^{\frac{1}{u}\left(\sqrt{1+2u^2}-\sqrt{1+u^2}\right)}\\ &= \exp\left(\frac{1}{u}\left(\sqrt{1+2u^2}-\sqrt{1+u^2}\right)\ln\left(e-(1+u)^{1/u}\right)\right)\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}(1+u)^{1/u} &= e^{\frac{1}{u}\ln(1+u)}\\ &\underset{u\to 0}{=} e^{\frac{1}{u}\left(u-\frac{u^2}{2}+o(u^2)\right)}\\ &\underset{u\to 0}{=} e^{1-\frac{u}{2}+o(u)}\\ &\underset{u\to 0}{=} ee^{-\frac{u}{2}+o(u)}\\ &\underset{u\to 0}{=} e\left(1-\frac{u}{2}+o(u)\right)\\ &\underset{u\to 0}{=} e-\frac{eu}{2}+o(u)\end{aligned}$$

Ainsi, $e-(1+u)^{1/u}=\dfrac{ue}{2}+o(u)$.
D'où

$$\begin{aligned}\ln(e-(1+u)^{1/u}) &\underset{u\to 0}{=} \ln\left(\frac{ue}{2}+o(u)\right)\\ &\underset{u\to 0}{=} \ln\left(\frac{ue}{2}(1+o(1))\right)\\ &\underset{u\to 0}{=} \ln\left(\frac{ue}{2}\right)+\ln(1+o(1))\\ &\underset{u\to 0}{=} \ln\left(\frac{ue}{2}\right)+o(1)\end{aligned}$$

Ainsi, $\dfrac{\ln(e-(1+u)^{1/u})}{\ln\left(\dfrac{ue}{2}\right)} \underset{u\to 0}{=} 1+o\left(\dfrac{1}{\ln(u)}\right)$.
Or, si $g(u)o\left(\dfrac{1}{\ln(u)}\right)$ alors $g(u)=\dfrac{g(u)}{\dfrac{1}{\ln(u)}}\times\dfrac{1}{\ln(u)} \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 0\times 0=0$.
Ainsi, $\dfrac{\ln(e-(1+u)^{1/u})}{\ln\left(\dfrac{ue}{2}\right)} \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 1$.

Ainsi : $\ln(e-(1+u)^{1/u}) \underset{u\to 0}{\sim} \ln\left(\frac{ue}{2}\right)$. D'où $\ln(e-(1+u)^{1/u}) \underset{0}{=} \ln\left(\frac{ue}{2}\right)$. De plus, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{u}\left(\sqrt{1+2u^2}-\sqrt{1+u^2}\right) &\underset{u\to 0}{=} \frac{1}{u}\left(1+u^2-1-\frac{1}{2}u^2+o(u^2)\right)\\ &\underset{u\to 0}{=} \frac{u}{2}+o(u)\end{aligned}$$

D'où $\frac{1}{u}\left(\sqrt{1+2u^2}-\sqrt{1+u^2}\right) \underset{u\to 0}{\sim} \frac{u}{2}$.
On obtient finalement :

$$\frac{1}{u}\left(\sqrt{1+2u^2}-\sqrt{1+u^2}\right)\ln(e-(1+u)^{1/u}) \underset{u\to 0}{\sim} u\ln\left(\frac{ue}{2}\right)$$

D'où, $\lim\limits_{u\to 0^+} \frac{1}{u}\left(\sqrt{1+2u^2}-\sqrt{1+u^2}\right)\ln(e-(1+u)^{1/u}) = \lim\limits_{u\to 0^+} u\ln\left(\frac{ue}{2}\right) = 0$ par croissances comparées.
Ainsi, $\lim\limits_{u\to 0^+} \exp\left(\frac{1}{u}\left(\sqrt{1+2u^2}-\sqrt{1+u^2}\right)\ln\left(e-(1+u)^{1/u}\right)\right) = 1$, par continuité de l'exponentielle en 1.
Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}} = 1.$

Exercice 27. 1. On a :

$$\begin{aligned}\sin(x-\sin(x)) &\underset{x\to 0}{=} \sin\left(x-\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \sin\left(\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{x^3}{6}+o(x^3)\end{aligned}$$

Ainsi, $\sin(x-\sin x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{6}$.
De plus :

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x^2}-1 &\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}x^2-1+o(x^2)\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}x^2+o(x^2)\end{aligned}$$

Ainsi : $\sqrt{1+x^2}-1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}x^2$.

$$\begin{aligned}\text{Donc } \frac{\sin(x-\sin x)}{\sqrt{1+x^2}-1} &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{x^3}{6}}{\frac{1}{2}x^2}.\\ &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{3}\end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x-\sin x)}{\sqrt{1+x^2}-1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{3} = 0.$

2. On a :

$$\begin{aligned}(1+x)^{1/x}-e &= \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)-e\\ &= \exp\left(\frac{x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x}\right)-e\\ &= \exp\left(1-\frac{x}{2}+o(x)\right)-e\\ &= e\times e^{-\frac{x}{2}+o(x)}-e\\ &= e\left(1-\frac{x}{2}-1+o(x)\right)\\ &= -\frac{xe}{2}+o(x)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$(1+x)^{1/x} - e \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{xe}{2}$$

Donc :

$$\frac{(1+x)^{1/x} - e}{x} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{e}{2}$$

D'où : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{1/x} - e}{x} = -\dfrac{e}{2}$.

3. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x} - \frac{1}{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} \\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \times \frac{1}{1 - \frac{x}{2} + o(x)} \\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{1 - \frac{x}{2} + o(x)}\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}\left(1 - \left(1 + \frac{x}{2} + o(x)\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{2} + o(1)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

Exercice 28. 1. $f(x) = x + x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Or, $\dfrac{x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ car $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est bornée.

Ainsi, $x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = o(x^2)$.

Donc :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x^2).$$

Ainsi, f admet le développement limité à l'ordre 2 en 0.

2. D'après la remarque précédente, f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 : $f(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$.
Ainsi, f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$ et ce prolongement est dérivable en 0 avec $f'(0) = 1$.

3. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, et on a :

$$f'(x) = 1 + 3x^2 \sin(1/x) - x\cos(1/x).$$

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = 1 + 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 1$ car $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sont bornées.
Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = f'(0)$. Ainsi, f' est continue en 0. Donc f (ou plutôt son prolongement) est de classe $_mathcalC^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
En revanche :

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x} = 3x\sin(1/x) - \cos(1/x).$$

Or, $\lim\limits_{x\to 0} 3x\sin(1/x) = 0$ et $\cos(1/x)$ n'a pas de limite en 0. Ainsi, le taux d'accroissement de f' en 0 n'a pas de limite. Donc f n'est pas deux fois dérivables.

Exercice 29. On sait déjà que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\frac{\pi}{2},0[$ et sur $]0,\frac{\pi}{2}[$.
De plus :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)} - \frac{1}{x} \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}\left(1+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right) - \frac{1}{x} \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{x}{6}+o(x) \end{aligned}$$

Ainsi, f admet un développement limité à l'ordre 1.
Donc f est prolongeable par continuité en 0 et son prolongement est dérivable en 0 en posant $f(0)=0$ et $f'(0)=\dfrac{1}{6}$.
Etudions si f' est continue en 0. Pour ce faire, on cherche $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)$.
On sait que

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\},\ f'(x) = \frac{-\cos(x)}{\sin(x)^2}+\frac{1}{x^2}.$$

Or :

$$\begin{aligned} \sin(x) &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6}+o(x^3) \\ &\underset{x\to 0}{=} x\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} (\sin(x))^2 &\underset{x\to 0}{=} x^2\left(\left(1-\frac{x^2}{6}\right)^2+o(x^2)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} x^2\left(1-\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} f'(x) &\underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{x^2}\frac{\left(1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{1-\dfrac{x^2}{3}+o(x^2)}+\frac{1}{x^2} \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2}\left(-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\left(1+\frac{x^2}{3}\right)+1+o(x^2)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2}\left(-1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^2}{2}+1+o(x^2)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{6}+o(1) \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \dfrac{1}{6}$. Or on a posé $f'(0)=\dfrac{1}{6}$. Ainsi, f' est bien continue en 0.
Ainsi, f est bien $\mathcal{C}^1$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 30. Posons $f : x \mapsto \ln(x^2+2x+2)$.
Effectuons un développement limité à l'ordre 2 de f.

$$\begin{aligned} f(x)\ln(2) &+ \ln\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right) \\ &\underset{0}{=} \ln 2 + x + \frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}+o(x^2) \\ &\underset{0}{=} \ln 2 + x + x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

Ainsi, la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 a pour équation $y = \ln 2 + x$. De plus, $f(x) - \ln 2 - x \underset{x\to 0}{\sim} x^2$. Ainsi, la courbe représentative de f est située au dessus de sa tangente en 0 au voisinage de 0.

Exercice 31. 1. On a :

$$\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
e^{\sin x} &\underset{x\to 0}{=} e^{x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)} \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{6} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{e^{\sin x} - 1}{x} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^3 + o(x^3).$$

Ainsi, f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$. De plus, ce prolongement est dérivable en 0 et on a $f'(0) = \frac{1}{2}$.

2. On a : $f(x) - \frac{1}{2}x \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{8}x^3$.
Ainsi, la courbe représentative de f est située au dessus de sa tangente en 0 au voisinage de 0^- et située en-dessous de sa tangente en 0 au voisinage de 0^+.

Exercice 32.

Etude au voisinage de $+\infty$:
Posons $u = \frac{1}{x} > 0$. On a :

$$\frac{f(x)}{x} = uf\left(\frac{1}{u}\right) = u\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{u}\right)^3}{\frac{1}{u} - 1}} = \frac{u}{|u|}\sqrt{\frac{u}{u(1-u)}} = \frac{1}{\sqrt{1-u}}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-u}} &\underset{u\to 0^+}{=} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}u - \frac{u^2}{8} + o(u^2)} \\
&\underset{u\to 0^+}{=} 1 - \left(-\frac{1}{2}u - \frac{u^2}{8}\right) + \frac{u^2}{4} + o(u^2) \\
&\underset{u\to 0^+}{=} 1 + \frac{1}{2}u + \frac{u^2}{8} + \frac{u^2}{4} + o(u^2) \\
&\underset{u\to 0^+}{=} 1 + \frac{u}{2} + \frac{3u^2}{8} + o(u^2)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\frac{f(x)}{x} \underset{x\to +\infty}{=} 1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Donc :

$$f(x) \underset{x\to +\infty}{=} x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ainsi, la droite d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote oblique à la courbe au voisinage de $+\infty$.
De plus, on a : $f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{3}{8x^2}$.
Ainsi, la courbe représentative de f est au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

Etude au voisinage de $-\infty$:
Posons $u = \dfrac{1}{x} < 0$. On a :

$$\frac{f(x)}{x} = uf\left(\frac{1}{u}\right) = u\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{u}\right)^3}{\frac{1}{u}-1}} = \frac{u}{|u|}\sqrt{\frac{u}{u(1-u)}} = \frac{-1}{\sqrt{1-u}}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\frac{-1}{\sqrt{1-u}} &\underset{u\to 0^-}{=} \frac{-1}{1-\frac{1}{2}u-\frac{u^2}{8}+o(u^2)} \\
&\underset{u\to 0^-}{=} -\left(1-\left(-\frac{1}{2}u-\frac{u^2}{8}\right)+\frac{u^2}{4}+o(u^2)\right) \\
&\underset{u\to 0^-}{=} -\left(1+\frac{1}{2}u+\frac{u^2}{8}+\frac{u^2}{4}+o(u^2)\right) \\
&\underset{u\to 0^-}{=} -\left(1+\frac{u}{2}+\frac{3u^2}{8}+o(u^2)\right) \\
&\underset{u\to 0^-}{=} -1-\frac{u}{2}-\frac{3u^2}{8}+o(u^2)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\frac{f(x)}{x} \underset{x\to-\infty}{=} -1-\frac{1}{2x}-\frac{3}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Donc :

$$f(x) \underset{x\to-\infty}{=} -x-\frac{1}{2}-\frac{3}{8x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ainsi, la droite d'équation $y = -x - \dfrac{1}{2}$ est asymptote oblique à la courbe au voisinage de $-\infty$.
De plus, on a : $f(x) - \left(-x-\dfrac{1}{2}\right) \underset{x\to-\infty}{\sim} -\dfrac{3}{8x}$.
Ainsi, la courbe représentative de f est en-dessous de son asymptote au voisinage de $-\infty$.

Exercice 33. Posons $g : x \mapsto \dfrac{x^2}{x-1}e^{1/x}$.
Posons $u = \dfrac{1}{x}$.

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x}{x-1}e^{1/x} = \frac{1}{1-\frac{1}{x}}e^{1/x} = \frac{1}{1-u}e^u$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-u}e^u &\underset{u\to 0}{=} (1+u+u^2)(1+u+\frac{u^2}{2})+o(u^2) \\
&\underset{u\to 0}{=} 1+2u+u^2\left(\frac{1}{2}+1+1\right) \\
&\underset{u\to 0}{=} 1+2u+\frac{5}{2}u^2+o(u^2)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\frac{g(x)}{x} \underset{x\to\pm\infty}{=} 1+\frac{2}{x}+\frac{5}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Donc :

$$g(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} x+2+\frac{5}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ainsi, la courbe représentative de g admet une asymptote oblique Δ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ d'équation $y = x+2$.
De plus, $g(x) - (x+2) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \dfrac{5}{2x}$. Ainsi, la courbe représentative de g est localement au dessus de Δ au voisinage de $+\infty$ et est en dessous de Δ au voisinage de $-\infty$.

Exercice 34. Posons $f : x \mapsto (x^2-1)\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.

Posons $u = \dfrac{1}{x}$.

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x} &= u\left(\left(\frac{1}{u}\right)^2 - 1\right)\ln\left(\frac{\frac{1}{u}-1}{\frac{1}{u}+1}\right)\\ &= \frac{(1-u^2)}{u}\ln\left(\frac{1-u}{1+u}\right)\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\frac{1-u}{1+u} &\underset{u\to 0}{=} (1-u)(1-u+u^2-u^3+o(u^3))\\ &\underset{u\to 0}{=} 1-2u+2u^2-2u^3+o(u^3)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{1-u}{1+u}\right) &\underset{u\to 0}{=} \ln(1-2u+2u^2-2u^3+o(u^3))\\ &\underset{u\to 0}{=} -2u+2u^2-2u^3-\frac{1}{2}(-2u+2u^2-2u^3)^2+\frac{1}{3}(-2u)^3+o(u^3)\\ &\underset{u\to 0}{=} -2u+2u^2-2u^3-\frac{1}{2}(4u^2-8u^3)-\frac{8}{3}u^3+o(u^3)\\ &\underset{u\to 0}{=} -2u-\frac{2}{3}u^3+o(u^3)\\ &\underset{u\to 0}{=} u\left(-2-\frac{2}{3}u^2+o(u^2)\right)\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}\frac{(1-u^2)}{u}\ln\left(\frac{1-u}{1+u}\right) &\underset{u\to 0}{=} (1-u^2)\left(-2-\frac{2}{3}u^2\right)+o(u^2)\\ &\underset{u\to 0}{=} -2+\frac{4}{3}u^2+o(u^2)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\frac{f(x)}{x} \underset{x\to\pm\infty}{=} -2+\frac{4}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Donc :

$$f(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} -2x+\frac{4}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ainsi, la courbe représentative de f admet une asymptote oblique Δ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ d'équation $y=-2x$. De plus, $f(x)-(-2x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{4}{3x}$. Ainsi, la courbe représentative de f est localement au dessus de Δ au voisinage de $+\infty$ et est en dessous de Δ au voisinage de $-\infty$.

Exercice 35. 1. On sait que :

$$\left(1+x^2\right)^{1/2} \underset{x\to 0}{=} 1+o(x)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-1} &= \frac{-1}{1-x}\\ &\underset{x\to 0}{=} -(1+x+o(x))\\ &\underset{x\to 0}{=} -1-x+o(x))\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}f(x) &= x\left(1\times(-1-x)+o(x)\right)\\ &\underset{0}{=} x(-1-x+o(x))\\ &\underset{0}{=} -x-x^2+o(x^2)\end{aligned}$$

Ainsi, la courbe représentative de f admet pour tangente au point d'abscisse 0 la droite Δ d'équation $y=-x$. De plus, $f(x)+x \underset{x\to 0}{\sim} -x^2$. Ainsi, la courbe représentative de f est au voisinage de 0 en-dessous de Δ.

2. Effectuons un développement limité de $\dfrac{f(x)}{x}$ à l'ordre 2 au voisinage de $+\infty$.

Posons $u = \dfrac{1}{x} > 0$. On a :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1} = \frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{1-\dfrac{1}{x}} = \frac{\sqrt{1+u^2}}{1-u}$$

Or :

$$\sqrt{1+u^2} \underset{u\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}u^2 + o(u^2)$$

et

$$\frac{1}{1-u} \underset{u\to 0}{=} 1 + u + u^2 + o(u^2)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+u^2}}{1-u} &\underset{u\to 0}{=} \left(1+\frac{1}{2}u^2\right)\left(1+u+u^2\right) + o(u^2)\\ &\underset{0}{=} 1 + u + \frac{3}{2}u^2 + o(u^2)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\frac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Finalement, on obtient :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x + 1 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

La droite d'équation $y = x+1$ est asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.
De plus, $f(x) - (x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{3}{2x}$. Ainsi, la courbe représentative de f est située au dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

Exercice 36. 1. Posons $f : x \mapsto x - \ln x$.
f est continue et dérivable sur $[1,+\infty[$. De plus : $\forall x \in [1,+\infty[,\ f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x} \geq 0$.
De plus, f ne s'annule qu'en 1. Ainsi, f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$. Ainsi, f est bijective de $[1,+\infty[$ dans $f([1,+\infty[) = [f(1), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$. Or, $f(1) = 1$. De plus : $\forall x \in [1,+\infty[,\ f(x) = x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ par croissances comparées. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
f est donc bijective de $[1,+\infty[$ dans $[1,+\infty[$.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \in [1,+\infty[$. Ainsi, l'équation $f(x) = n$ admet donc une unique solution dans $[1,+\infty[$ que l'on note u_n.

2. **Etape 1 :** Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = +\infty$.
Or, on sait que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = f^{-1}(n)$.
Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \lim\limits_{n\to+\infty} f^{-1}(n) = +\infty$.
Etape 2 : Montrons que $x_n \sim n$.
On a : $x_n = n + \ln(x_n)$.
Or, d'après l'étape précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ par croissances comparées.
Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(x_n)}{x_n} = 0$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{x_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{\ln x_n}{x_n}\right) = 1$.
Ainsi, $x_n \sim n$.
Etape 3 : Montrons que $x_n = n + \ln n + o(1)$.
D'après l'étape précédente, $x_n \sim n$ donc $x_n = n + o(n)$.
Or, $x_n = n + \ln(x_n)$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} x_n &= n + \ln(n + o(n)) \\ &= n + \ln(n(1 + o(1)) \\ &= n + \ln(n) + \ln(1 + o(1)) \\ &= n + \ln(n) + o(1) \end{aligned}$$

Etape 4 : Montrons que $x_n = n + \ln n + \dfrac{\ln n}{n} + o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$.

$$\begin{aligned} x_n &= n + \ln(x_n) \\ &= n + \ln\left(n + \ln n + o(1)\right) \\ &= n + \ln\left(n\left(1 + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\ &= n + \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

Or, si $u_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ alors $\dfrac{u_n}{\frac{\ln n}{n}} = \dfrac{1}{\ln n} \times \dfrac{u_n}{\frac{1}{n}} \underset{\to 0}{\longrightarrow} 0 \times 0 = 0$.
Ainsi, $u_n = o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$.
Ainsi, on a :

$$x_n = n + \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln}{n}\right)\right)$$

avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$.
Donc :

$$x_n = n + \ln(n) + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln}{n}\right)$$

Exercice 37. 1. Posons $g : x \mapsto \tan x - x$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. g est continue et dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$.
De plus : $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$, $g'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x) \geq 0$ et $f'(x)$ ne s'annule qu'en $n\pi$. Ainsi, g est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$.
g est donc bijective de $\left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$ sur $g\left(\left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[\right) = \left]\lim\limits_{x \to \left(-\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^+} g(x), \lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^-} g(x)\right[$.
Or, $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^+} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^-} g(x) = +\infty$. Ainsi, g est bijective de $\left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$ sur $\mathbb{R}$.
Or, $0 \in \mathbb{R}$.
Ainsi, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $\left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$ que l'on note x_n.
Soit $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 0 \iff \tan(x) = x$.
Ainsi, l'équation $\tan(x) = x$ admet une unique solution dans $\left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$.

2. On a :

$$n\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \pi - \frac{\pi}{2} \leq x_n \leq n\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 - \frac{\pi}{2n\pi} \leq \frac{x_n}{n\pi} \leq 1 + \frac{\pi}{2n\pi}.$$

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \dfrac{\pi}{2n\pi}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{\pi}{2n\pi}\right) = 1$. Ainsi , par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x_n}{n\pi} = 1$
donc $x_n \sim n\pi$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\tan(x_n - n\pi) = \tan(x_n) = x_n.$$

Or, $x_n - n\pi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Ainsi, $x_n - n\pi = \arctan(x_n)$.
De plus, d'après la question précédente, $x_n \sim n\pi$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$.
Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_n - n\pi) = \dfrac{\pi}{2}$. D'où : $x_n - n\pi \sim \dfrac{\pi}{2}$. Ainsi :

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1).$$

4. Posons $y_n = x_n - n\pi - \dfrac{\pi}{2}$.
On sait déjà, d'après la question précédente, que $y_n = o(1)$. Ainsi, $\tan(y_n) \sim y_n$.

$$\begin{aligned}
\tan(y_n) &= \tan\left(x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \tan\left(x_n - \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{par } \pi \text{ périodicité de } tan \\
&= \frac{\sin\left(x_n - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x_n - \frac{\pi}{2}\right)} \\
&= \frac{-\sin\left(\frac{\pi}{2} - x_n\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x_n\right)} \\
&= -\frac{\cos(x_n)}{\sin(x_n)} \\
&= \frac{-1}{\tan(x_n)} \\
&= \frac{-1}{x_n} \\
&= \frac{-1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)} \\
&= -\frac{1}{n\pi} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \\
&= -\frac{1}{n\pi}\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\dfrac{\tan(y_n)}{-\frac{1}{n\pi}} = 1 - \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\tan(y_n)}{-\frac{1}{n\pi}} = 1$.
Ainsi, $\tan(y_n) \sim -\dfrac{1}{n\pi}$.
Ainsi, $y_n \sim -\dfrac{1}{n\pi}$. On obtient ainsi :

$$x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \sim \frac{-1}{n\pi}$$

5. On sait que $y_n = o(1)$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$.
Donc $\tan y_n = y_n + o(y_n^2)$.
Or, $y_n \sim -\dfrac{1}{n\pi}$ donc $y_n^2 \sim \dfrac{1}{n^2\pi^2}$.
Si $u_n = o(y_n^2)$ alors $n^2 u_n = (n^2\pi^2 y_n^2) \times \dfrac{u_n^2}{y_n^2} \underset{n\to+\infty}{\longleftrightarrow} 1 \times 0 = 0$.
Ainsi : $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
Ainsi, $\tan(y_n) = y_n + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
De plus, en reprenant les calculs précédent, on a :

$$\begin{aligned}
\tan(y_n) &= -\frac{1}{n\pi}\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$0 = y_n + \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc : $y_n = -\frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
Ainsi :

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 38. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \to x^3 + nx$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions strictement croissantes.
Ainsi, f_n est bijective de $\mathbb{R}$ dans $f_n(\mathbb{R}) =]\lim_{x\to-\infty} f_n(x), \lim_{x\to+\infty} f_n(x)[$. Or, $\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)[= +\infty$. Ainsi, f_n est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
De plus, $0 \in \mathbb{R}$. Ainsi, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ que l'on note x_n.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \left(\frac{1}{n}\right)^3 > 1$ et $f(0) = 0$.
Ainsi, $f(0) < f(x_n) < f\left(\frac{1}{n}\right)$. Or, f est croissante sur $\mathbb{R}$ donc $0 < x_n < \frac{1}{n}$.
Or, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Ainsi, par théorème de convergence par encadrement, $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

3. D'après la question précédente, on sait que $x_n = o(1)$. Ainsi, $x_n^3 = o(1)$ donc $\frac{1}{n}x_n^3 = o\left(\frac{1}{n}\right)$.
Or, $x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n}x_n^3$.
Finalement, on obtient : $x_n = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

4. D'après la question précédente, $x_n = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $x_n \sim \frac{1}{n}$.
D'où $x_n^3 \sim \frac{1}{n^3}$. Ainsi, $x_n^3 = \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.
Or, $x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n}x_n^3$.
Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \end{aligned}$$

Exercice 39. 1. Posons $f : x \to \tan(x) - \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
f est continue et dérivable sur $\left]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ et sur $\left]n\pi + \frac{\pi}{2}, (n+1)\pi\right[$.
Soit $x \in \left]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]n\pi + \frac{\pi}{2}, (n+1)\pi\right[$, on a :

$$f'(x) = (1 + \tan^2(x)) - \frac{\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}(x)} = 1 + \tan^2(x) - 1 + \frac{\operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = \tan^2(x) + \frac{\operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} > 0$$

car : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \frac{\operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} > 0$.
Ainsi, f est strictement croissante sur $\left]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ et sur $\left]n\pi + \frac{\pi}{2}, (n+1)\pi\right[$.
Ainsi, f est bijective de $\left]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ sur $f\left(\left]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[\right)$ et de $\left]n\pi + \frac{\pi}{2}, (n+1)\pi\right[$ sur $f\left(\left]n\pi + \frac{\pi}{2}, (n+1)\pi\right[\right)$.
Or, $f(n\pi) = -\frac{\operatorname{sh}(n\pi)}{\operatorname{ch}(n\pi)}$, $\lim_{n\to\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = +\infty$.
Ainsi, $f\left(\left]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[\right) = \left]-\frac{\operatorname{sh}(n\pi)}{\operatorname{ch}(n\pi)}, +\infty\right[$.
Et, $f((n+1)\pi) = -\frac{\operatorname{sh}((n+1)\pi)}{\operatorname{ch}((n+1)\pi)}$, $\lim_{n\to\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = -\infty$.
Ainsi, $f\left(\left]n\pi + \frac{\pi}{2}, (n+1)\pi\right[\right) = \left]-\infty, -\frac{\operatorname{sh}((n+1)\pi)}{\operatorname{ch}((n+1)\pi)}\right[$.
Ainsi, f est bijective de $\left]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\left]-\frac{\operatorname{sh}(n\pi)}{\operatorname{ch}(n\pi)}, +\infty\right[$ et de $\left]n\pi + \frac{\pi}{2}, (n+1)\pi\right[$ sur $\left]-\infty, -\frac{\operatorname{sh}((n+1)\pi)}{\operatorname{ch}((n+1)\pi)}\right[$.

Or, $0 \in \left]-\dfrac{\text{sh}\,(n\pi)}{\text{ch}\,(n\pi)}, +\infty\right[$ et $0 \notin \left]-\infty, -\dfrac{\text{sh}\,((n+1)\pi)}{\text{ch}\,((n+1)\pi)}\right[$.
Ainsi, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\left]n\pi, n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$ que l'on note x_n et n'admet aucun solution dans $\left]n\pi + \dfrac{\pi}{2}, (n+1)\pi\right[$.
Donc finalement, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]n\pi, (n+1)\pi[$.
Or, soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \quad &\iff \quad \tan(x) - \frac{\text{sh}\,(x)}{\text{ch}\,(x)} = 0 \\ &\iff \quad \tan(x) = \frac{\text{sh}\,(x)}{\text{ch}\,(x)} \\ &\iff \quad \tan(x)\frac{\text{ch}\,(x)}{\text{sh}\,(x)} = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\tan(x)\dfrac{\text{ch}\,(x)}{\text{sh}\,(x)} = 1$ admet une unique solution dans $]n_pi, (n+1)\pi[$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que $\tan(x_n)\dfrac{\text{ch}\,(x_n)}{\text{sh}\,(x_n)} = 1$. Ainsi, $\tan(x_n) = \dfrac{\text{sh}\,(x_n)}{\text{ch}\,(x_n)}$.
   Or, $\tan(x_n) = \tan(x_n - n\pi)$ par π périodicité de la fonction tangente.
   Ainsi, $\tan(x_n - n\pi) = \dfrac{\text{sh}\,(x_n)}{\text{ch}\,(x_n)}$.
   Or, d'après la question 1, $x_n \in \left]n\pi, n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$ donc $x_n - n\pi \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
   Or : $\forall x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[,\ \arctan(tan(x)) = x$.
   Ainsi, $\arctan(\tan(x_n - n\pi)) = x_n - n\pi$.
   $x_n - n\pi = \arctan(\tan(x_n - n\pi)) = \arctan\left(\dfrac{\text{sh}\,(x_n)}{\text{ch}\,(x_n)}\right)$.
3. **Etape 1 :**
   On sait que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n\pi \leq x_n$. Donc par minoration, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.
   Etape 2 :
   De plus, $\dfrac{\text{sh}\,(x_n)}{\text{ch}\,(x_n)} = \dfrac{e^{x_n} - e^{-x_n}}{e^{x_n} + e^{-x_n}} = \dfrac{1 - e^{-2x_n}}{1 + e^{-2x_n}}$.
   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\text{sh}\,(x_n)}{\text{ch}\,(x_n)} = 1$.
   Ainsi, $\lim\limits_{x\to 1} \arctan\left(\dfrac{\text{sh}\,(x_n)}{\text{ch}\,(x_n)}\right) = \arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$.
   Donc $\lim\limits_{x\to 1}(x_n - n\pi) = \dfrac{\pi}{4}$.
   Ainsi, $x_n - n\pi \sim \dfrac{\pi}{4}$ donc $x_n - n\pi = \dfrac{\pi}{4} + o(1)$.
   Etape 3 :
   Posons $y_n = x_n - n\pi - \dfrac{\pi}{4}$.
   D'après l'étape précédente, on sait que $y_n = o(1)$ c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$.
   Ainsi, $\tan(y_n) \sim y_n$.

De plus,

$$\begin{aligned}
\tan(y_n) &= \tan\left(x_n - n\pi - \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \tan\left(x_n - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{par } \pi \text{ périodicité de la fonction } \tan \\
&= \frac{\tan(x_n) - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan(x_n)\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} \\
&= \frac{\dfrac{\operatorname{sh}(x_n)}{\operatorname{ch}(x_n)} - 1}{1 + \dfrac{\operatorname{sh}(x_n)}{\operatorname{ch}(x_n)}} \\
&= \frac{\operatorname{sh}(x_n) - \operatorname{ch}(x_n)}{\operatorname{sh}(x_n) + \operatorname{ch}(x_n)} \\
&= \frac{-e^{-x_n}}{e^{x_n}} \\
&= -e^{-2x_n}
\end{aligned}$$

Or, $x_n = n\pi + \dfrac{\pi}{4} + o(1)$. Donc $e^{-2x_n} = e^{-2n\pi - \frac{\pi}{2} + o(1)} = e^{-2n\pi - \frac{\pi}{2}} e^{o(1)} = e^{-2n\pi - \frac{\pi}{2}}(1 + o(1))$.
Ainsi, on a : $\dfrac{e^{-2x_n}}{e^{-2n\pi - \frac{\pi}{2}}} = 1 + o(1)$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{e^{-2x_n}}{e^{-2n\pi - \frac{\pi}{2}}} = 1$.
Ainsi, $e^{-2x_n} \sim e^{-2n\pi - \frac{\pi}{2}}$.
On obtient donc finalement que $\tan(y_n) \sim -e^{-2n\pi - \frac{\pi}{2}}$.
D'où $y_n \sim -e^{-2n\pi - \frac{\pi}{2}}$.
Ainsi, $x_n - n\pi - \dfrac{\pi}{4} \sim -e^{-2n\pi - \frac{\pi}{2}}$.