Chapitre 8 : Ensembles et Applications

1 Ensembles

1.1 Définitions

Définition

Un ensemble est une collection d'objets. Chacun de ces objets est appelé **élément** de cet ensemble. Si x est un élément d'un ensemble E, alors on dit que x **appartient** à E et on note $x \in E$. Dans le cas contraire, on dit que x n'appartient pas à E et on note $x \notin E$.
Deux ensembles E et F sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes éléments i.e $\forall x \in E, x \in F$ et $\forall x \in F, x \in E$

Exemple :

- L'**ensemble vide**, noté $\emptyset$ est l'ensemble ne contenant aucun élément.
- Un ensemble constitué d'un unique élément est appelé **singleton**.
- ⚠ Ne pas confondre l'élément x et le singleton $\{x\}$.

Un ensemble peut être défini :

- en donnant la liste de ses éléments entre accolades (l'ordre n'a pas d'importance).
  Exemple : $A = \{1, 3, 4\} = \{4, 1, 3\}$
  $B = \{f_1, f_2\}$, où f_1 désigne la fonction constante égale à 1 et f_2 la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f_2(x) = x^2$.
- en énonçant une propriété caractérisant ses éléments.
  Exemple : $C = \{n \in \mathbb{N}\, ,\, n \text{ pair}\}$
  $D = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(-x) + f(-y)\}$

Définition

Soit E et F deux ensembles.
On dit que F est **inclus** dans E et on note $F \subset E$ ssi tous les éléments de F appartiennent à E, c'est à dire :

$$\forall x \in F,\ x \in E.$$

On dit alors que F est une **partie** de E ou que F est un **sous-ensemble** de E.
On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

Remarque :

- On a : $F \in \mathscr{P}(E) \iff F \subset E$
- ⚠ $\mathscr{P}(E)$ est un ensemble dont les éléments sont eux-mêmes des ensembles.

Exemple :

Remarque : On a toujours $E \in \mathscr{P}(E)$ et $\emptyset \in \mathscr{P}(E)$.

Proposition

Soient E, F deux ensembles. On a :

$$E = F \quad \text{si et seulement si} \quad E \subset F \text{ et } F \subset E.$$

Méthode : inclusion et égalité d'ensembles

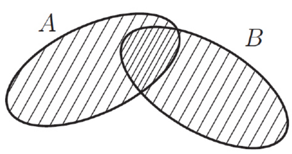
- Pour montrer que $F \subset E$, le modèle de rédaction est :
  Soit $x \in F$.
  Raisonnement
  Alors, $x \in E$.
  On a donc $F \subset E$.
- Montrer que $E = F$:
  Sauf dans les cas simples, où l'on peut montrer directement que $x \in E$ équivaut à $x \in F$ par équivalence, on raisonnera souvent par double inclusion pour montrer une égalité d'ensemble.

1.2 Opérations sur les parties d'un ensemble

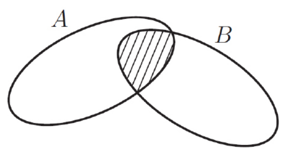
Définition

Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E.

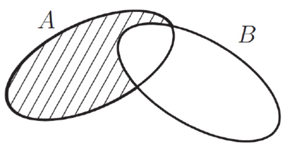
1. L'**intersection** de A et B, noté $A \cap B$, est l'ensemble des éléments de E appartenant à la fois à A et à B :
$$A \cap B = \{x \in E\ ,\ x \in A \text{ et } x \in B\}$$
2. La **réunion** de A et B, noté $A \cup B$, est l'ensemble des éléments de E appartenant à A ou à B :
$$A \cup B = \{x \in E\ ,\ x \in A \text{ ou } x \in B\}$$
3. La différence de A et B, noté $A \setminus B$, est l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B.
$$A \setminus B = \{x \in E, x \in A \text{ et } x \notin B\} = \{x \in A, x \notin B\}$$
4. le **complémentaire** de A dans E, noté C_E^A ou $E \setminus A$ est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.
$$C_E^A = E \setminus A = \{x \in E\ ,\ x \notin A\}$$
Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur E, le complémentaire de A dans E est aussi noté $\overline{A}$.



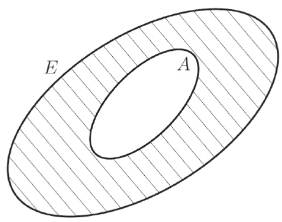
(a) Schéma de $A \cup B$



(b) Schéma de $A \cap B$



(c) Schéma de $A \setminus B$



(d) Schéma de C_E^A

Remarque :

- On a : $A \setminus B = A \cap C_E^B$.
- Soient E un ensemble et $A, B \in \mathscr{P}(E)$. Alors, on a toujours les inclusions suivantes :
$$A \cap B \subset A \subset A \cup B,$$
$$A \cap B \subset B \subset A \cup B.$$
- Vocabulaire :
  Soit E un ensemble et A, B deux sous-ensembles de E.
  A et B sont dits **disjoints** si $A \cap B = \emptyset$

Proposition : Propriétés algébriques de l'intersection et l'union

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E.

1. L'intersection et l'union sont **commutatives** :
$$A\cap B = B\cap A \quad \text{et} \quad A\cup B = B\cup A.$$
2. L'intersection et l'union sont **associatives** :
$$A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$$
$$A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$$
On pourra omettre les parenthèses et noter $A\cap B\cap C$ l'ensemble des éléments communs aux trois sous-ensembles A, B et C et noter $A\cup B\cup C$ l'ensemble des éléments qui sont dans l'un au moins des trois sous-ensembles A, B ou C.
3. $A\cap E = A \qquad A\cap\emptyset = \emptyset \qquad A\cup E = E \qquad A\cup\emptyset = A.$
4. L'intersection et la réunion sont **distributives** l'une par rapport à l'autre :
$$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C),$$
$$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C).$$

Démonstration.

- Montrons que : $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$.

Soit $x\in E$, on a :
$$\begin{aligned} x\in A\cap(B\cup C) &\iff x\in A \text{ et } x\in B\cup C\\ &\iff x\in A \text{ et } (x\in B \text{ ou } x\in C)\\ &\iff (x\in A \text{ et } B) \text{ ou } (x\in A \text{ et } C)\\ &\iff (x\in A\cap B) \text{ ou } (x\in A\cap C)\\ &\iff x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)\end{aligned}$$
On montre de même l'égalité $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$.

- Montrons que : $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$. Soit $x\in E$, on a :
$$\begin{aligned} x\in A\cup(B\cap C) &\iff x\in A \text{ ou } x\in B\cap C\\ &\iff x\in A \text{ ou } (x\in B \text{ et } x\in C)\\ &\iff (x\in A \text{ ou } B) \text{ et } (x\in A \text{ ou } C)\\ &\iff (x\in A\cup B) \text{ et } (x\in A\cup C)\\ &\iff x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)\end{aligned}$$

□

Proposition : Propriétés algébriques du complémentaire

Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

1. $C_E^{\emptyset} = E$, $C_E^E = \emptyset$.
2. $A\cup C_E^A = E$ et $A\cap C_E^A = \emptyset$.
3. $C_E^{C_E^A} = A$
4. $A\subset B \iff C_E^B\subset C_E^A$.
5. $C_E^{A\cap B} = C_E^A\cup C_E^B$
$C_E^{A\cup B} = C_E^A\cap C_E^B$.

Démonstration.

3. Montrons $A = C_E^{C_E^A}$ par double inclusion.
   - Soit $x\in C_E^{C_E^A}$ alors $x\notin C_E^A$ donc $x\in A$.
   - Soit $x\in A$ alors $x\notin C_E^A$ donc $x\in C_E^{C_E^A}$.

   Ainsi, $A = C_E^{C_E^A}$.
4. Montrons par double implication que $A\subset B \implies C_E^B\subset C_E^A$.

- Supposons que $A \subset B$.
Soit $x \in C_E^B$ alors $\notin B$.
par l'absurde : supposons que $x \in A$ alors $x \in B$ car $A \subset B$. Absurde.
Ainsi, $x \notin A$ d'où $x \in C_E^A$. Ainsi $C_E^B \subset C_E^A$.
- Supposons que $C_E^B \subset C_E^A$.
On a alors avec le point précédent $C_E^{C_E^A} \subset C_E^{C_E^B}$.
Donc $A \subset B$.

Ainsi, $A \subset B \quad \Longrightarrow \quad C_E^B \subset C_E^A$.

5. - Montrons par double inclusion que $C_E^{A\cup B} = C_E^A \cap C_E^B$.
    - Soit $x \in C_E^{A\cup B}$.
    On a non$(x \in A \cup B)$. Donc $non(x \in A$ ou $x \in B)$.
    Ainsi, non$(x \in A)$ et non$(x \in B)$.
    Donc $x \notin A$ et $x \notin B$.
    D'où $x \in C_E^A$ et $x \in C_E^B$. Donc $x \in C_E^A \cap C_E^B$.
    - Soit $x \in C_E \cap C_E^B$. Alors $x \in C_E^A$ et $x \in C_E^B$.
    Raisonnons par l'absurde et supposons que $x \in A \cup B$. Alors $x \in A$ ou $x \in B$.
    Si $x \in A$ alors $x \notin C_E^A$ Absurde.
    Si $x \in B$ alors $x \notin C_E^B$ Absurde.
    Ainsi, $x \notin A \cup B$ donc $x \in C_E^{A\cup B}$.

   On obtient donc $C_E^{A\cup B} = C_E^A \cap C_E^B$.
   - $C_E^{C_E^A \cup C_E^B} = C_E^{C_E^A} \cap C_E^{C_E^B} = A \cap B$.
   D'où $C_E^{A\cap B} = C_E^{C_E^{A\cap B}} = C_E^{C_E^{C_E^A \cup C_E^B}} = C_E^A \cup C_E^B$.

□

1.3 Produit cartésien

Définition

- Soient E et F deux ensembles.

Etant donné $x \in E$ et $y \in F$, on construit le couple (x, y) de sorte que :

$$\forall x, x' \in E,\ \forall y, y' \in F, \quad (x, y) = (x', y') \Longleftrightarrow x = x' \text{ et } y = y'$$

On appelle **produit cartésien** de E et F et on note $E \times F$, l'ensemble des couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$:

$$E \times F = \left\{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\right\}$$

- Plus généralement, soient $E_1, ..., E_n$ des ensembles.

Etant donné $x_1 \in E_1$, ..., $x_n \in E_n$, on construit le n-uplet $(x_1, ..., x_n)$ de sorte que :

$$\forall x_1, x_1' \in E_1, ...,\ \forall x_n, x_n' \in E_n, \quad (x_1, ..., x_n) = (x_1', ..., x_n') \Longleftrightarrow \quad \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = x_i'$$

On note $E_1 \times ... \times E_n$ l'ensemble des n-uplet $(x_1, ..., x_n)$ où : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i \in E_i$:

$$E_1 \times ... \times E_n = \left\{(x_1, ..., x_n) \mid \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i \in E_i\right\}$$

Si $E_1 = ... = E_n = E$, l'ensemble $E_1 \times \cdots \times E_p$ est noté E^p.

2 Applications

Dans toute cette section, E, F, G, H désignent des ensembles non vides.

2.1 Définition et premiers exemples

Définition

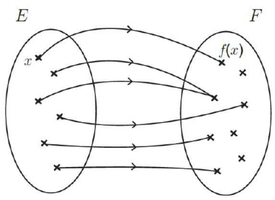
On appelle **application** f la donnée d'un ensemble de départ E, d'un ensemble d'arrivée F et d'une correspondance qui à tout élément x de E associe un unique élément de F noté $f(x)$. On la note $f:\begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$.

Si $x \in E$ et $y = f(x)$, on dit que :

- y est l'image de x par f
- x est un **antécédent** de y par f (pas forcément unique).

On appelle **graphe** de l'application f l'ensemble des couples $\{(x, f(x)), x \in E\}$.
On note $\mathscr{F}(E,F)$ ou F^E l'ensemble des applications de E dans F.

Diagramme sagittal.



Proposition Egalité de deux applications

Deux applications f et g sont égales ssi elles ont même ensemble de départ E, même ensemble d'arrivée et si : $\forall x \in E,\ f(x) = g(x)$.

Définition

Soit A une partie de E.

- On appelle **identité** de E et on note Id_E l'application

$$Id_E : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

- On appelle **fonction indicatrice** de A et on note $\mathbb{1}_A$ l'application

$$\mathbb{1}_A : \begin{array}{ccc} E & \to & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

Proposition

Soit E un ensemble et A, B deux sous-ensemble de E.

$$A = B \iff \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$$

Démonstration. Procédons par double implication.

- Supposons $A = B$. Alors, on a $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.
- Supposons $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$. Montrons par double implication $A = B$.
  - Soit $x \in A$. On a $\mathbb{1}_A(x) = 1$ donc $\mathbb{1}_B(x) = 1$ donc $x \in B$. Ainsi, $A \subset B$.
  - Par symétrie entre A et B, on obtient $B \subset A$

  Ainsi, $A = B$.

□

Proposition

Soit E un ensemble et A, B deux sous-ensemble de E.

$$\mathbb{1}_{C_E^A} = 1 - \mathbb{1}_A, \quad \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B, \quad \mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$$

Démonstration.

- $\mathbb{1}_{C_E^A}$ et 1_A ont même ensemble de départ E et même ensemble d'arrivée $\{0,1\}$.
  Soit $x \in E$:
  - Si $x \in A$, alors, $x \notin C_E^A$, donc $\mathbb{1}_A(x) = 1$ et $\mathbb{1}_{C_E^A}(x) = 0$ d'où $\mathbb{1}_{C_E^A}(x) = 1 - \mathbb{1}_A(x)$.
  - Si $x \notin A$ alors $x \in C_E^A$, donc $\mathbb{1}_A(x) = 0$ et $\mathbb{1}_{C_E^A}(x) = 1$ d'où $\mathbb{1}_{C_E^A}(x) = 1 - \mathbb{1}_A(x)$.

  Ceci montre : $\forall x \in E$, $\mathbb{1}_{C_E^A}(x) = 1 - \mathbb{1}_A(x)$.
  On conclut : $\mathbb{1}_{C_E^A} = 1 - \mathbb{1}_A$.
- $\mathbb{1}_{A\cap B}$ et $\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$ ont même ensemble de départ E et même ensemble d'arrivée $\{0,1\}$.
  Soit $x \in E$.
  - Si $x \in A \cap B$, alors $x \in A$ et $x \in B$, donc $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 1$, $\mathbb{1}_A(x) = 1$, $\mathbb{1}_B(x) = 1$, d'où $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 1 = \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x)$.
  - Si $x \notin A \cap B$, alors $x \notin A$ ou $x \notin B$, donc $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 0$. De plus, $\Big(\mathbb{1}_A(x) = 0 \text{ ou } \mathbb{1}_B(x) = 0\Big)$, d'où $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 0 = \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x)$.

  Ceci montre : $\forall x \in E$, $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x)$.
  On conclut : $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$.
- On a, en passant par des complémentaires et en utilisant des résultats précédents :

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{A\cup B} &= 1 - \mathbb{1}_{C_E^{A\cup B}} \\
&= 1 - \mathbb{1}_{C_E^A \cap C_E^B} \\
&= 1 - \mathbb{1}_{C_E^A}\mathbb{1}_{C_E^B} \\
&= 1 - (1 - \mathbb{1}_A)(1 - \mathbb{1}_B) \\
&= 1 - (1 - \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B) \\
&= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B
\end{aligned}$$

□

Définition

Soit A une partie de E.

- Soit $f : E \to F$ une application. On appelle **restriction** de f à A et on note $f_{|A}$ l'application

$$f_{|A} : \begin{array}{ccc} A & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

- On dit que f est un prolongement de g si g est une restriction de f.

Définition : famille

Soit I un ensemble fini. On appelle famille d'éléments de E indexée par I toute application x de I dans E. L'image de $i \in I$ est noté x_i plutôt que $x(i)$ et on note $(x_i)_{i\in I}$ une telle famille.

2.2 Composition des applications

Définition

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$, on appelle composée de f par g, notée $g \circ f$ l'application
$$g \circ f : \begin{array}{ccc} E & \to & G \\ x & \mapsto & (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & F \arrow[r, "g"] & G \end{tikzcd}$$

Proposition

Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$. On a :

- $Id_F \circ f = f$ et $f \circ Id_E = f$.
- $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Démonstration.

- $Id_F \circ f$ et f ont même ensemble de départ E et même ensemble d'arrivée F.
  Soit $x \in E$, $(Id_F \circ f)(x) = Id_F(f(x)) = f(x)$.
  Ainsi : $\forall x \in E,\ (Id_F \circ f)(x) = f(x)$.
  Donc $Id_F \circ f = f$.
- $f \circ Id_E$ et f ont même ensemble de départ E et même ensemble d'arrivée F.
  Soit $x \in E$, $(f \circ Id_E)(x) = f(Id_E(x)) = f(x)$.
  Ainsi : $\forall x \in E,\ (f \circ Id_E)(x) = f(x)$.
  Donc $f \circ Id_E = f$.
- $g \circ f \in \mathscr{F}(E, G)$ donc $h \circ (g \circ f) \in \mathscr{F}(E, H)$. De même, $h \circ g \in \mathscr{F}(F, H)$ donc $(h \circ g) \circ f \in \mathscr{F}(E, H)$.
  Ainsi, $h \circ (g \circ f)$ et $(h \circ g) \circ f$ ont même ensemble de départ E et même ensemble d'arrivée H.
  Soit $x \in E$, $(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$.
  De même $((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$.
  Donc : $\forall x \in E,\ ((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x)$.
  Ainsi, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

□

2.3 Image directe et réciproque

Définition

Soient $f : E \to F$.

- Soit $A \in \mathscr{P}(E)$, on appelle image directe de A par f et on note $f(A)$ l'ensemble :

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A, y = f(x)\} = \{f(x), x \in A\}.$$

$$\forall y \in F, y \in f(A) \iff \big(\exists x \in A, y = f(x)\big)$$

- Soit $B \in \mathscr{P}(F)$, on appelle image réciproque de B par f et on note $f^{-1}(B)$ l'ensemble :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E,\ f(x) \in B\}.$$

$$\forall x \in E,\ x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$$

Remarque :

- ⚠ Attention $f^{-1}(B)$ est une notation et ne suppose pas que f soit bijective.
  Cependant, si f est bijective, $f^{-1}(B)$ représente l'image réciproque de B par f mais aussi l'image directe de B par f^{-1} (ces deux ensembles sont identiques)
- Si $A \in \mathscr{P}(E)$, $f(A) \subset F$
  Si $B \in \mathscr{P}(F)$, $f^{-1}(B) \subset E$.

Exemple : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$.
Déterminer $f([-2,3])$ et $f^{-1}([-2,3])$

Montrons que $f([-2,3]) = [0,3]$ **:**

- Soit $y \in f([-2,3])$, alors il existe $x \in [-2,3]$ tel que $y = |x|$. Or :
  - si $x \in [-2,0]$ alors $|x| \in [0,2]$
  - si $x \in [0,3]$ alors $|x| \in [0,3]$.

  Ainsi, dans tous le cas $|x| \in [0,3]$.
  D'où, $y \in [0,3]$.
  Donc $f([-1,3]) \subset [0,3]$

- Soit $y \in [0,3]$, posons $x = y$.
  Alors, $x \in [0,3]$ donc $x \in [-2,3]$ et $f(x) = |x| = x = y$.
  Donc $y \in f([-2,3])$.
  Ainsi, $[0,3] \subset f([-2,3])$.

Donc $f([-1,2]) = [0,3]$.
Montrons que $f^{-1}([-2,3]) = [-3,3]$:

- Soit $x \in f^{-1}([-2,3])$. Alors $f(x) \in [-2,3]$ donc $|x| \in [-2,3]$. Donc $|x| \in [0,3]$. Ainsi, $x \in [-3,3]$.
  D'où, $f^{-1}([-2,3]) \subset [-3,3]$
- Soit $x \in [-3,3]$ alors $|x| \in [0,3]$. D'où $f(x) \in [0,3]$
  Donc $f(x) \in [-2,3]$. Ainsi, $x \in f^{-1}([-2,3])$.
  Donc, $[-3,3] \subset f^{-1}([-2,3])$.

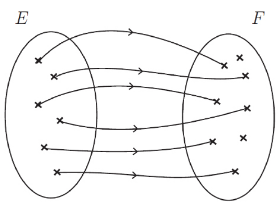
Finalement, $f^{-1}(|-2,3]) = [-3,3]$.

2.4 Injections, surjections et bijections

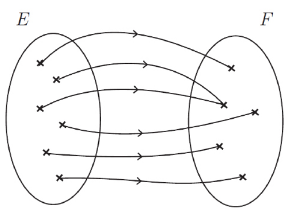
Définition

Soit $f : E \to F$, on dit que f est :

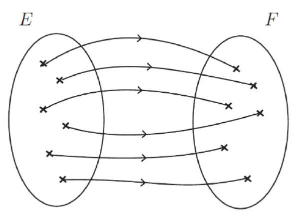
- **injective** (ou est une injection) si tout élément de F admet au plus un antécédent par f dans E, c'est à dire lorsque :
$$\forall (x,x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \implies x = x'.$$
- **surjective** (ou est une surjection) si tout élément de F admet au moins un antécédent par f dans E, c'est à dire lorsque :
$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x).$$
- **bijective** (ou est une bijection) si tout élément de F admet un unique antécédent par f dans E, c'est à dire lorsque :
$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ y = f(x)$$



(e) Application injective



(f) Application surjective



(g) Application bijective

Exemple : Soit $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$, $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$, $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ et $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$.
Les fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 sont-elles injectives, surjectives ou bijectives ?

- - f_1 n'est pas injective : $f_1(1) = f_1(-1)$ donc 1 admet deux antécédents distincts.
  - f_1 n'est pas surjective : -3 n'admet aucun antécédent.
  - f_1 n'est donc pas bijective.
- - f_2 est injective : soient $x, y \in \mathbb{R}_+$, supposons que $f_2(x) = f_2(y)$. Alors $x^2 = y^2$. D'où $\sqrt{x^2} = \sqrt{y^2}$. Donc $|x| = |y|$. Or, $x, y \geq 0$ donc $x = y$.
  - f_2 n'est pas surjective : -3 n'admet aucun antécédent.
  - f_2 n'est donc pas bijective.
- - f_3 n'est pas injective : $f_3(1) = f_3(-1)$ donc 1 admet deux antécédents distincts.
  - f_3 est surjective : Soit $y \in \mathbb{R}_+$. Posons $x = \sqrt{y}$. On a bien $x \in \mathbb{R}$ et $f_3(x) = f_3(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$.
  - f_3 n'est donc pas bijective.
- - f_4 est injective : soient $x, y \in \mathbb{R}_+$, supposons que $f_4(x) = f_4(y)$. Alors $x^2 = y^2$. D'où $\sqrt{x^2} = \sqrt{y^2}$. Donc $|x| = |y|$. Or, $x, y \geq 0$ donc $x = y$.

- f_4 est surjective : Soit $y \in \mathbb{R}_+$. Posons $x = \sqrt{y}$. On a bien $x \in \mathbb{R}$ et $f_4(x) = f_4(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$.
- f_4 est donc bijective.

Remarque : Le changement des ensembles de départ et d'arrivée d'une application modifie ses propriétés (injectivité, surjectivité, ...)

Proposition

Soit $f \in \mathscr{F}(E, F)$. On a l'équivalence :

$$f \text{ bijective si et seulement si } f \text{ est injective et surjective.}$$

Méthode :

Pour montrer qu'une application est :

- injective, le modèle de rédaction est :
  Soit $(x, y) \in E^2$.
  Supposons $f(x) = f(y)$
  $\ldots$
  Donc $x = y$.
  Ainsi f est injective.
- surjective, le modèle de rédaction est :
  Soit $y \in F$.
  Posons $x = \cdot$.
  Alors $x \in E$ (car $\ldots$) et $y = f(x)$ (car $\ldots$).
  Ainsi, f est surjective.
- bijective, on pourra raisonner en deux étapes en montrant l'injectivité et la surjectivité.

Proposition

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

- Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
- Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
- Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

Démonstration.

- Supposons f et g injective. Soit $(x, x') \in E^2$. Supposons $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. Alors, $g(f(x)) = g(f(x'))$ donc $f(x) = f(x')$ (car g est injective) puis $x = x'$ (car f est injective). Ainsi, $g \circ f$ est injective.
- Soit $z \in G$. Comme g est surjective, il existe $y \in F$ tel que $g(y) = z$. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Ainsi $z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$ et $g \circ f$ est surjective.
- Supposons f et g bijective. Alors f et g sont injectives et surjectives. Ainsi, $g \circ f$ est injective par le premier point, surjective par le second, donc bijective.

$\square$

Définition

Soit $f : E \to F$ une application bijective, on appelle réciproque de f et on note f^{-1} l'application de F dans E qui à tout élément $y \in F$ associe son unique antécédent par f. Par définition, on a :

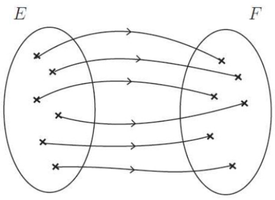
$$\forall (x, y) \in E \times F,\ y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Remarque : ⚠ On ne peut considérer f^{-1} que si f est bijective !
Voici la représentation d'une application bijective et de sa bijection réciproque :

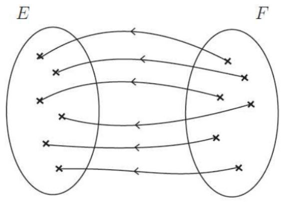
Proposition

Soit $f : E \to F$ une application bijective. Alors :

$$f \circ f^{-1} = Id_F \qquad \text{et} \qquad f^{-1} \circ f = Id_E.$$



(h) Représentation de f



(i) Représentation de f^{-1}

Démonstration. $f \circ f^{-1}$ et Id_F ont même ensemble de départ F, même ensemble d'arrivée F.
Soit $y \in F$, $f^{-1}(y)$ est par définition l'antécédent de y par f, ainsi $(f \circ f^{-1})(y) = y$.
Donc : $f \circ f^{-1} = Id_F$.
$f^{-1} \circ f$ et Id_E ont même ensemble de départ E, même ensemble d'arrivée F.
Soit $x \in E$, $f(x)$ admet par f un unique antécédente qui est x. Ainsi, $(f^{-1} \circ f)(x) = x$.
Donc, $f^{-1} \circ f = Id_E$ □

Proposition : Caractérisation de la bijection réciproque

Soit $f : E \to F$. On a l'équivalence :

$$f \text{ est bijective de } E \text{ dans } F \iff \exists g \in \mathscr{F}(F, E), \begin{cases} g \circ f = Id_E \\ f \circ g = Id_F \end{cases}$$

Dans ce cas, l'application g est unique et $g = f^{-1}$.

Démonstration.
- Supposons f est bijective alors f^{-1} convient d'après la proposition précédente.
- Réciproquement, supposons qu'il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$.
  Montrons que f est injective.
  Soit $(x, x') \in E$, supposons $f(x) = f(x')$. Alors, $g(f(x)) = g(f(x'))$ d'où $x = x'$.
  Ainsi, f est injective.
  Montrons que f est surjective.
  Soit $y \in F$. On a $f(g(y)) = y$ et $g(y) \in E$.
  Ainsi, f est surjective.
  f est donc bijective.

$$f^{-1} = f^{-1} \circ Id_F = f^{-1} \circ (f \circ g) = (f^{-1} \circ f) \circ g = Id_E \circ g = g.$$

  Donc g est unique et $g = f^{-1}$.

□

Exemple : Les fonctions carrée $\left\{ \begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ et racine carrée $\left\{ \begin{array}{cccc} g : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$ sont bijectives et réciproques l'une de l'autre. En effet :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ (f \circ g)(x) = (\sqrt{x})^2 = x \qquad \text{et} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ (g \circ f)(x) = \sqrt{x^2} = x.$$

Corollaire

- Si $f : E \to F$ est bijective, alors $f^{-1} : F \to E$ est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.
- Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont bijectives, alors $g \circ f : E \to G$ est une bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration.
- On a $f \circ f^{-1} = Id_F$ et $f^{-1} \circ f = Id_E$ donc $f^{-1} : F \to E$ est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.
- On a $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ Id_F \circ f = f^{-1} \circ f = Id_E$, et de même $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = Id_G$.
  Ainsi $g \circ f$ et $f^{-1} \circ g^{-1}$ sont bijectives, réciproques l'une de l'autre.

□

3 Relation d'équivalence

Dans toute cette partie E désigne un ensemble quelconque.

Définition

On appelle **relation binaire** $\mathscr{R}$ sur E, la donnée d'une partie $\mathscr{P}$ de $E \times E$. On dit que x en relation avec y et on note xRy ssi $(x, y) \in \mathscr{P}$.

Exemple :

- Dans $\mathbb{R}$, on a rencontré les relations binaire : $\leq$, $=$, $\equiv \quad [2\pi]$
- Dans $\mathscr{P}(E)$, on a rencontré l'inclusion $\subset$.

Définition

On dit qu'une relation binaire $\mathscr{R}$ sur E est une relation d'équivalence sur E si :

- R est réflexive : $\forall x \in E$, $x\mathscr{R}x$.
- R est symétrique : $\forall (x, y) \in E^2$, $x\mathscr{R}y \Longrightarrow y\mathscr{R}x$.
- R est transitive : $\forall (x, y, z) \in E^3$, $(x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z) \Longrightarrow x\mathscr{R}z$.

Exemple :

- L'égalité $=$ est une relation d'équivalence sur tout ensemble E.
  En général, l'appartenance $\in$ ou l'inclusion $\subset$ ne sont pas des relations d'équivalence (non symétriques).
- La congruence ($\equiv \quad [2\pi]$) est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
  Rappel : Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on dit que $x \equiv y \quad [2\pi]$ s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = y + 2k\pi$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$, $x = x + 0 \times 2\pi$, donc $x \equiv x \quad [2\pi]$, donc $\equiv \quad [2\pi]$ est réflexive.
  Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x \equiv y \quad [2\pi]$. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = y + 2k\pi$ d'où $y = x - 2k\pi = x + 2(-k)\pi$ avec $-k \in \mathbb{Z}$, donc $y \equiv x \quad [2\pi]$ et $\equiv \quad [2\pi]$ est symétrique.
  Soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x \equiv y \quad [2\pi]$ et $y \equiv z \quad [2\pi]$. Alors, il existe $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = y + 2k\pi$ et $y = z + 2l\pi$. Alors $x = y + 2k\pi = z + 2(k + l)\pi$, avec $k + l \in \mathbb{Z}$, donc $x \equiv z \quad [2\pi]$ et $\equiv \quad [2\pi]$ est transitive.
  En conclusion, la congruence modulo 2π ($\equiv \quad [2\pi]$) est bien une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

Définition

Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur E et $x \in E$. On appelle classe d'équivalence de x pour la relation R et on note $cl_{\mathscr{R}}(x)$, l'ensemble constitué des éléments $y \in E$ en relation avec x. Autrement dit :

$$cl_{\mathscr{R}}(x) = \{y \in E,\ y\mathscr{R}x\}.$$

Si $y \in cl_{\mathscr{R}}x$, on dit que y est un représentant de $cl_{\mathscr{R}}x$.

Exemple :

- Pour la relation d'égalité $=$, la classe d'équivalence de x est $\{x\}$.
- Pour la relation de congruence $\equiv \quad [2\pi]$ sur $\mathbb{R}$, la classe d'équivalence de x est $\{x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.