Feuille d'exercices 25 : Représentation matricielle

1 Matrice d'une application linéaire

Exercice 1. Déterminer les matrices dans les bases canoniques respectives des applications linéaires suivantes :

$$u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(1) \end{array}, \qquad v : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P+P' \end{array}.$$

Exercice 2. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et $\mathcal{C} = (f_1, f_2)$ la base canonique de $\mathbb{K}^2$.
Considérons $f \in \mathcal{L}(E, F)$ définie par :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}^3 & \to & \mathbb{K}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y-z, x-y+2z) \end{array}$$

1. Déterminer la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
2. On pose : $f_1' = (1,2)$ et $f_2' = (-1,1)$.
   (a) Justifier que (f_1', f_2') est une base de $\mathbb{K}^2$. On note $\mathcal{C}' = (f_1', f_2')$.
   (b) Déterminer la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}'$.

Exercice 3. Déterminer les matrices dans les bases canoniques respectives des applications linéaires suivantes :

$$u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 P(t)dt \end{array}, \qquad v : \begin{array}{rcl} \mathbb{C}_3[X] & \to & \mathbb{C}_3[X] \\ P & \mapsto & P(X+1)-P(X) \end{array},$$

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$.
Soit $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.
Ecrire la matrice de f dans cette base.

Exercice 5. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Soit :

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & AM. \end{array}$$

Montrer que φ est un endomorphisme et donner la matrice de φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Exercice 6. Soit $E = \mathbb{K}^n$ et soit $\mathcal{B} = (e_j)_{j \in [\![1,n]\!]}$ une base de E. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \beta & \dots & \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Soit $\mathcal{B}' = (e_j')_{j \in [\![1,n]\!]}$ définie par : pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $e_j' = \displaystyle\sum_{k=1}^{j} e_k$.
Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E et former la matrice de f dans $\mathcal{B}'$.

Exercice 7. Soit E un espace vectoriel ayant pour base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.
Reconnaitre l'application linéaire f telle que :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 8. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ défini par $f(x,y) = (3x+6y, -x-2y)$. Écrire la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, et en déduire que f est un projecteur.

Exercice 9. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}_4[X]$ défini par : $f : P \mapsto P(1-X)$ et soit A sa matrice dans la base canonique. Déterminer A^{-1}.
Indication : On pourra remarquer que $f \circ f = Id$

Exercice 10. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im} f$.
2. Démontrer que ces deux espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
3. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ réunion d'une base de $\mathrm{Ker}\, f$ et d'une base de $\mathrm{Im} f$ et écrire la matrice de f dans cette base.
4. Ecrire f comme la composée de deux endomorphismes connus.

Exercice 11. On munit $\mathbb{R}^3$ d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice en base B est $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer f^2. En déduire que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}\,(f)$.
2. Donner $\mathrm{rg}\, f$ et $\dim(\mathrm{Ker}\, f)$ puis déterminer une base du noyau et de l'image de f.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 12. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A^k = I_n$ (où $k \in \mathbb{N}^*$). On pose $B = I_n + A + \cdots + A^{k-1}$ et on note u et v les endomorphismes de $E = \mathbb{K}^n$ canoniquement associés à A et B.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}\, v = \mathrm{Im}(u - id_E)$, $\mathrm{Im} v = \mathrm{Ker}\,(u - id_E)$ et que les espaces $\mathrm{Ker}\, v$ et $\mathrm{Im} v$ sont supplémentaires dans E.
2. Donner la matrice de v dans une base adaptée. Montrer qu'alors la somme des coefficients diagonaux de cette matrice est $k\mathrm{rg}\,(B)$.

Exercice 13. Soit $u : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie pas $u(P) = (P(0), P(1), P(2))$. Notons $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ celle de $\mathbb{R}^3$.

1. Prouver que u est un isomorphisme
2. Déterminer u^{-1}

Exercice 14.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall i, j \in [\![1, n+1]\!],\ a_{i,j} = \begin{cases} \dbinom{j-1}{i-1} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j, \end{cases}$$

1. Montrer que l'application :
$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & P(X) & \mapsto & P(X+1) \end{array}$$
est un endomorphisme et donner sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

2 Changement de base

Exercice 15. Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$, où :

$$\mathcal{B}_1 = ((1,2,1), (2,3,3), (3,7,1)),$$

$$\mathcal{B}_2 = ((3,1,4), (5,3,2), (1,-1,7)).$$

Exercice 16. Notons $\mathcal{B} = ((1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1))$ la base canonique de $\mathbb{K}^4$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = ((1,0,0,0), (1,1,0,0), (1,1,1,0), (1,1,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Posons $x = (2,-1,3,4)$. Déterminer les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 17. Donner la matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection sur le plan d'équation $x+y-z=0$ parallèlement à la droite $\text{Vect}\,(1,1,1)$.
Comment vérifier le résultat obtenu ?

Exercice 18.
On considère la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.
1. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
3. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.
4. Soit u l'endomorphisme de dérivation, c'est-à-dire $u : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$, $P \mapsto P'$. Déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ puis la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 19. On pose $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (1,1,0)$, $v_3 = (1,2,3)$, $F = \text{Vect}\,(v_1, v_2), G = \text{Vect}\,(v_3)$.
1. Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   On pose alors $F = \text{Vect}\,(v_1, v_2), G = \text{Vect}\,(v_3)$, de sorte que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
2. Soit s la symétrie par rapport à F dans la direction de G. Déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(s)$.
3. Déterminer la matrice de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
4. En déduire l'expression de s.

Exercice 20. On note $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}_3$ et $\mathcal{B} = ((1,3,1),(1,0,-2),(0,1,-1))$.
On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (10x-y-z, -6x+9y-3z, -2x-y+11z) \end{array}$$

1. Vérifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_c}(u)$. On note $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_c}(u)$.
3. Déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$. On note $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$.
4. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 21. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$.
Déterminer l'application linéaire canoniquement associée à A.

Exercice 22.
On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 0 \\ -20 & -10 & 0 \\ -6 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
1. (a) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f(x,y,z)$.
   (b) Déterminer une base de $\text{Ker}\, f$ et une base de $\text{Im} f$.
   (c) La matrice A est-elle inversible ?
2. On pose $e_1 = (1,-2,0)$, $e_2 = (-3,5,1)$, $e_3 = (0,0,1)$ et $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$.
   (a) Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ et la matrice de passage Q de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$.
   (c) Déterminer $D = Mat_{\mathcal{C}}(f)$.
   (d) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = PD^nP^{-1}.$$
   (e) Déterminer A^n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   (f) En déduire f^n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 23. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.
1. Montrer que $\text{Ker}\,(u - id_E)$, $\text{Ker}\,(u - 2id_E)$ et $\text{Ker}\,(u + 4id_E)$ sont de dimension 1 et en donner des bases.
2. On se donne e_1, e_2 et e_3 des vecteurs non nuls de chacun des noyaux précédents. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de E.
3. Donner la matrice D de u dans cette base. Justifier qu'il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ (que l'on explicitera) telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Exercice 24. Soit A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.
Déterminer les $\lambda \in \mathbb{R}$ tels qu'il existe $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tel que $f(x) = \lambda x$.
En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale, puis exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.

3 Noyau, image et rang d'une matrice

Exercice 25. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Déterminer $\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Im} A$, $\operatorname{rg}(A)$.

Exercice 26. Déterminer en fonction de a le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 2 & a & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 27. Calculer le rang et l'inverse des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 28. *(D'après CCP option PC)*
Montrer que la matrice carrée d'ordre n, $A = (\sin(i+j))$ est de rang au plus 2.

Exercice 29.
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par : $a_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $a_{i,j} = a$ sinon, avec $a \in \mathbb{K}$. Déterminer le rang de A en fonction de a et n.

Exercice 30. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et soient u et v les endomorphismes suivants :

$$u : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ P & \mapsto & P(X+1) \end{array}, \qquad v : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ P & \mapsto & P(X-1) \end{array}.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit M_λ la matrice dans la base canonique de l'endomorphisme $u + \lambda v$. Déterminer M_λ et le rang de $u + \lambda v$ en fonction de λ.

Exercice 31. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, soit $r \leq \min(n,p)$.
On pose :

$$J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,p-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

1. Montrer que :
$$\operatorname{rg}(A) = r \Leftrightarrow \exists P \in GL_p(\mathbb{K}),\ \exists Q \in GL_n(\mathbb{K}),\ A = QJ_rP.$$
2. En déduire une nouvelle preuve de $\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}({}^tM)$.

Exercice 32. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
1. Montrer que :
$$\operatorname{rg}(M) = 1 \iff \exists X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\},\ M = X\,{}^tY$$
2. Supposons que $\operatorname{rg}(M) = 1$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ M^k = \alpha^{k-1} M$$