Corrigé de la feuille d'exercices 22

1 Droites, plans et sphères

Exercice 1.

1. Notons $\mathcal{P}_1$ le plan passant par les points $A(1,1,1), B(0,1,0)$ et $C(1,0,1)$. Dans ce cas on sait que P est le plan passant par A dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}(-1,0,-1)$ et $\overrightarrow{AC}(0,-1,0)$ dirigent le plan $\mathcal{P}_1$. Par suite,
$$\mathcal{P}_1 \mid \begin{cases} x = 1+s \\ y = 1+t \\ z = 1+s \end{cases}.$$
De plus $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (-1,-0,1)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_1$ donc $\mathcal{P}_1 \mid -x+0y+z=0$.
2. Soit $\mathcal{P}_2$ le pan passant par $D(1,2,3)$ et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u}(0,1,1)$ et $\overrightarrow{v}(1,1,0)$. On obtient alors une équation paramétrique du plan
$$\mathcal{P}_2 \mid \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+s+t \\ z = 3+s \end{cases}.$$
De même qu'à la question précédente, $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}(-1,1,-1)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_2$ et donc $\mathcal{P}_2 \mid -x+y-z=$.
3. Soit $\mathcal{P}_3$ passant par $E(0,0,0)$ dont un vecteur normal est $\overrightarrow{w}(0,1,0)$. On obtient donc une description cartésienne de $\mathcal{P}_3 \mid y=0$ et donc une équation paramétrique $\mathcal{P}_3 \mid \begin{cases} x = s \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}.$

Exercice 2. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points équidistants de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$. Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace. Par des formuels du cours
$$\mathrm{d}(M,\mathcal{P}) = \frac{|3x-4y+1|}{\sqrt{9+16}} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}(M,\mathcal{Q}) = \frac{|2x-3y+6z-1|}{\sqrt{4+9+36}}$$
$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{E} &\iff \mathrm{d}(M,\mathcal{P}) = \mathrm{d}(M,\mathcal{Q}) \\
&\iff \frac{|3x-4y+1|}{5} = \frac{|2x-3y+6z-1|}{7} \\
&\iff |21x-28y+7| = |10x-15y+30z-5| \\
&\iff 21x-28y+7 = 10x-15y+30z-5 \ \text{ ou } \ 21x-28y+7 = -10x+15y-30z+5 \\
&\iff 11x-13y+12=0 \ \text{ ou } \ 31x-43y+30z+2=0.
\end{aligned}$$
Autrement dit les points équidistants de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont les points situés sur l'union des plans dont une équation cartésienne est donnée par $11x-13y+12=0$ et $31x-43y+2=0$.

Exercice 3.

1. On a une équation cartésienne du plan $\mathcal{P} : x-2y+3z=1$. On a donc
$$\mathrm{d}(A,\mathcal{P}) = \frac{|1-2\times 2+3\times 1-1|}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{1}{\sqrt{14}}.$$
2. La droite D passe par le point de coordonnées cartésiennes $(1,2,0)$ et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}(3,-1,2)$. On en déduit que
$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(B,D) &= \frac{\left\| \begin{pmatrix} 1-1 \\ 2-2 \\ -1-0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|}{\sqrt{9+1+4}} \\
&= \frac{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|}{\sqrt{14}} \\
&= \frac{\sqrt{1+9}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{5}{7}}.
\end{aligned}$$

3. Pour calculer la distance d'un point à une droite, il suffit de déterminer un point de la droite ainsi qu'un vecteur directeur. Déterminons une représentation paramétrique de la droite D. Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$\begin{array}{rcll} M \in D & \iff & \left\{\begin{array}{l} 2x - y + z = 1 \\ x - y + z = -1 \end{array}\right. & \\ & \iff & \left\{\begin{array}{l} x - y + z = -1 \\ y - z = 3 \end{array}\right. & \begin{array}{r} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{array} \\ & \iff & \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 3 + z \end{array}\right. & \\ & \iff & (x-2, y-3, z) \in \mathrm{Vect}\,((0,1,1)). & \end{array}$$

On en déduit que D passe par le point $A(2, 3, 0)$ et est dirigée par $\overrightarrow{u}(0, 1, 1)$. Ainsi

$$\begin{aligned} d(C, D) &= \frac{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|}{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Exercice 4. Pour tout triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - z - 1 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 6z + 12 = x^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 - 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y - 2z + \frac{17}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + (z-1)^2 + \frac{3}{4}. \end{array}\right.$$

En notant

$$\left\{\begin{array}{l} S_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - z - 1 = 0 \\ S_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 6z + 12 = 0 \\ S_3 : x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y - 2z + \frac{17}{4} = 0, \end{array}\right.$$

on en déduit que S_1 est la sphère de centre $\Omega_1(1, 1, 1)$ et de rayon $R_1 = 2$. De même S_2 est la sphère de centre $A_2(0, 2, -3)$ et de rayon $R_2 = 1$ et S_3 est la sphère vide.

Comme dans le cadre de l'intersection d'un cercle et d'une droite, on évalue la distance du centre au plan $\mathcal{P}$. On a $\mathrm{d}(A_1, \mathcal{P}) = \frac{|+1+1+-3|}{\sqrt{3}} = 0$. Le centre de la sphère est donc dans le plan. L'intersection $\mathcal{P} \cap S_1$ est donc un cercle de centre A_1 et de rayon 3.

De même $\mathrm{d}(A_2, \mathcal{P}) = \frac{|2-3-3|}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} > 1$. On en déduit que $\mathcal{P} \cap S_2 = \emptyset$.

Enfin $A_1A_2 = 3\sqrt{2} > R_1 + R_2$, donc les sphères S_1 et S_2 ont une intersection vide.

La sphère S_3 étant vide l'intersection avec un plan ou bien une autre sphère est aussi vide.

Exercice 5.

1. Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace. On a

$$\begin{array}{rcl} M \in \mathcal{S} & \iff & OM = R \\ & \iff & \|\overrightarrow{OM}\|^2 = R^2 \\ & \iff & x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \end{array}$$

2. Soit M un point de l'espace dont un système de coordonnées cylindrique est (r, θ, z). Alors les coordonnées cartésiennes de M sont données par $(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$. D'après la question précédente, une équation cylindrique de $\mathcal{S}$ est donc

$$r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta) + z^2 = R^2,$$

autrement dit

$$\mathcal{S} \mid r^2 + z^2 = R^2.$$

Exercice 6.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}(-2, 3, 2)$ et $\overrightarrow{AC}(1, -1, 1)$ dirigent le plan $\mathcal{P}$. On en déduit que $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(5, 4, -1)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$. Ainsi,

$$\mathcal{P} \mid 5x + 4y + -z = 4.$$

2. Soient (a,b,c) les coordonnées cartésiennes de D'. On sait que $\overrightarrow{DD'}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{DD'}(5\lambda, 4\lambda, -\lambda)$ et donc
$$\begin{cases} a = 2 + 5\lambda \\ b = 5 + 4\lambda \\ c = 5 + -\lambda \end{cases}.$$
D'autre part $D' \in \mathcal{P}$ donc $5a + b - c = 4$. On obtient alors $10 + 20 - 5 + \lambda \times (25 + 16 + 1) = 4$ et donc $\lambda = \frac{-1}{2}$. Par suite, $D'\left(\frac{-1}{2}, 3, \frac{11}{2}\right)$.
3. Soit D'' le symétrique de D par rapport à $\mathcal{P}$. On a donc $D' = m[DD'']$. En notant $D''(u,v,w)$ les coordonnées cartésiennes de D'' on obtient
$$\begin{cases} \frac{u+2}{2} = \frac{-1}{2} \\ \frac{v+5}{2} = 3 \\ \frac{w+5}{2} = \frac{11}{2} \end{cases},$$
et donc $u = -3, v = 1$ et $w = 6$.

Exercice 7.

1. La droite (AB) passe par A et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}(-2,-2,-2)$. AInsi pour tout point de l'espace $M(x,y,z)$,
$$\begin{aligned} M \in (AB) &\iff \overrightarrow{AM} \in \operatorname{Vect}((1,1,1)) \\ &\iff x - 1 = y - 2 = z - 3 \\ &\iff \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - z + 2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$
2. Le plan P est médiateur du segment $[AB]$ donc $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal P. De plus $m([AB]) \in P$ donc
$$P \mid x + y + z = \frac{1 + (-1)}{2} + \frac{2+0}{2} + \frac{3+1}{2}.$$
On en déduit que $P \mid x + y + z = 3$.
3. Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace.
$$\begin{aligned} M \in P' \cap (AB) &\iff \begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x - y = -1 \\ x - z = -2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - z = -2 \\ y + z = 7 \\ -y + z = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 4 \end{cases} \\ &\iff M(2,3,4) \end{aligned}$$

Exercice 8.

1. Supposons qu'un tel plan P existe. Notons D la droite définie par l'équation cartésienne $\begin{cases} 3x - y + 1 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$.
Pour tout point de l'espace $M(x,y,z)$
$$\begin{aligned} M \in D &\iff \begin{cases} 3x - y + 1 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = x \\ y = 3x + 1 \\ z = -x - 1 \end{cases} \end{aligned}$$
On en déduit que D passe par le point $B(0,1,-1)$ et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}(1,3,-1)$. Or par hypothèse sur P, $D \subset P$ donc P passe par A et B. De plus $\overrightarrow{AB}(-2,4,2)$ et $\overrightarrow{u}$ ne sont pas colinéaires donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ sont des vecteurs directeurs de P. On en déduit que
$$P \mid \begin{cases} x = 2 - 2s + t \\ y = -3 + 4s + 3t \\ z = 1 + 2s - t \end{cases}.$$
Réciproquement si P est le plan défini par l'équation paramétrique précédente, alors $A \in P$ (prendre $s = t = 0$) et $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ sont directeurs de P. En particulier, puisque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{u}$, le point B est dans le plan P. Donc tous les points de la droite $B + \operatorname{Vect}(\overrightarrow{u})$ sont dans le plan P et donc $D \subset P$.

2. Soit D la droite définie par l'équation cartésienne $\begin{cases} z = x+1 \\ z = y \end{cases}$. Pour tout point $M(x,y,z)$, on a

$$M \in D \iff \begin{cases} x = -1+z \\ y = z \\ z = z \end{cases}$$

Ainsi D est la droite passant par le point de coordonnées cartésiennes $(-1,0,0)$ et dirigée par $\overrightarrow{n}(1,1,1)$. Or P est un plan orthogonal à D donc $\overrightarrow{n}$ est vecteur normal à P. De plus $B \in P$ donc

$$P \mid x+y+z = 3.$$

3. Le plan $\mathcal{Q}$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{u}(1,1,1)$ et $\overrightarrow{v}(1,0,2)$ dirigent $\mathcal{Q}$. De plus $C(1,0,0) \in \mathcal{Q}$ et donc

$$\mathcal{Q} \mid \begin{cases} x = 1+s+t \\ y = s \\ z = s+2t \end{cases}$$

Déterminons une équation cartésienne de $\mathcal{Q}$. Pour cela on cherche à déterminer les équations de compatibilité du système précédent. Soit $(x,y,z,s,t) \in \mathbb{R}^5$.

$$\begin{cases} x = 1+s+t \\ y = s \\ z = s+2t \end{cases} \iff \begin{cases} s = y \\ t = x-1-y \\ z = y+2x-2y-2 \end{cases}$$

On en déduit que $\mathcal{Q} : 2x-y-z-2 = 0$.

Exercice 9. Soit $\mathcal{P}$ le plan orthogonal à $\mathcal{Q}$ passant par A et B. Un vecteur normal de $\mathcal{Q}$ est donc un vecteur de la direction de $\mathcal{P}$. De plus $A, B \in \mathcal{P}$ donc $\overrightarrow{AB}(-3,-3,3)$ est aussi dans la direction de $\mathcal{P}$. Or $\overrightarrow{u}(2,-3,1)$ est normal à $\mathcal{Q}$ et n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{v}(-1,-1,1)$ donc $\mathcal{P}$ est dirigé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et passe par A. On en déduit une équation paramétrique

$$\mathcal{P} \mid \begin{cases} x = 3+2s-t \\ y = -5-3s-t \\ z = 1+s+t \end{cases}$$

On cherche une équation cartésienne indutie par cette représentaiton. Soit $(x,y,z,s,t) \in \mathbb{R}^5$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = 3+2s-t \\ y = -5-3s-t \\ z = 1+s+t \end{cases} &\iff \begin{cases} x+z = 4+3s \\ y+z = -4-2s \\ z = 1+s+t \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x+y+2z = s \\ y+z = -4-2s \\ z = 1+s+t \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} s = x+y+2z \\ y+z = -4-2x-2y-4z \\ t = z-1-x-y-2z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} s = x+y+2z \\ t = -x-y-z-1 \\ 2x+3y+5z+4 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est $2x+3y+5z+4 = 0$.

Exercice 10.

1. Par définition, $K \in \mathcal{S} \iff \Omega K = 3 \iff \|\overrightarrow{\Omega K}\|^2 = 9$. Or $(2-1)^2+(2-0)^2+(1+1)^2 = 9$ donc $K \in \mathcal{S}$.
2. Le plan $\mathcal{P}$ est tangent à $\mathcal{S}$ en K lorsque $K \in \mathcal{P}$ et $\overrightarrow{\Omega K} \perp \mathcal{P}$. Ainsi le vecteur $\overrightarrow{\Omega K}(1,2,2)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$. De plus $K(2,2,1) \in \mathcal{P}$ donc
$$P \mid x+2y+2z = 8.$$
3. Soit $\mathcal{S}'$ la sphère de rayon 2 qui est tangente extérieurement à $\mathcal{S}$ en K. Soit $\Omega'(a,b,c)$ le centre de $\mathcal{S}'$. La sphère $\mathcal{S}'$ est tangente à $\mathcal{S}$ en K donc $\mathcal{P}$ le plan tangent à $\mathcal{S}'$ en K. Ainsi,

$$\begin{cases} \overrightarrow{\Omega' K} \perp \mathcal{P} \\ K \in \mathcal{S}' \end{cases},$$

et donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{K\Omega'}(\lambda, 2\lambda, 2\lambda)$. De plus, puisque $K \in \mathcal{S}'$, on a $\|\overrightarrow{K\Omega'}\|^2 = 4$ et donc

$$\|\overrightarrow{K\Omega'}\|^2 = \lambda^2 + 4\lambda^2 + 4\lambda^2 = 9\lambda^2 = 4.$$

On sait aussi que $\mathcal{S}'$ est la sphère tangente extérieurement à $\mathcal{S}$ donc $\Omega\Omega' = 3 + 2$. Par la relation de Chalses, $\overrightarrow{\Omega\Omega'} = \overrightarrow{\Omega K} + \overrightarrow{K\Omega'} = (1 + \lambda)\overrightarrow{\Omega K}$ et donc

$$\begin{aligned} 25 &= \|\overrightarrow{\Omega\Omega'}\|^2 \\ &= (1+\lambda)^2\|\overrightarrow{\Omega K}\|^2 \\ &= (\lambda^2 + 2\lambda + 1)(1 + 4 + 4) \\ &= 9\lambda^2 + 18\lambda + 9 \\ &= 18\lambda + 13. \end{aligned}$$

Ainsi, $\lambda = \frac{2}{3}$. Finalement, $\Omega'\left(2 + \frac{2}{3}, 2 + \frac{4}{3}, 1 + \frac{4}{3}\right)$ et donc

$$\Omega'\left(\frac{8}{3}, \frac{10}{3}, \frac{7}{3}\right).$$

4. Notons H le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{Q}$. Par définition, $\overrightarrow{\Omega H} \perp \mathcal{Q}$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\Omega H}(2\lambda, \lambda, \lambda)$. De plus, $H \in \mathcal{Q}$ et donc

$$2(1 + 2\lambda) + \lambda + (-1 + \lambda) + 1 = 0,$$

ce qui donne $\lambda = -\frac{1}{3}$. Par suite, $\overrightarrow{\Omega H}\left(\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}\right)$.
Soit M un point de l'espace.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{S} \cap \mathcal{Q} &\iff \begin{cases} M \in \mathcal{Q} \\ \Omega M^2 = 9 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} M \in \mathcal{Q} \\ 9 = \Omega H^2 + HM^2 \quad \textit{(Pythagore dans le triangle } \Omega HM \textit{ rectangle en } H.\textit{)} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} M \in \mathcal{Q} \\ HM^2 = 9 - \frac{4+1+1}{9} = \frac{241}{3} = r^2. \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi dans le plan $\mathcal{Q}$, l'intersection $\mathcal{S} \cap \mathcal{Q}$ est le cercle de centre H et de rayon r.

Exercice 11. Soient $D \mid \frac{x+2}{3} = y - 1 = \frac{z+4}{a}$ et $\mathcal{P} \mid 2x - y + 3z - 1 = 0$.
Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{3} = y - 1 = \frac{z+4}{a} &\iff \begin{cases} x + 2 - 3y + 3 = 0 \\ ay - a = z + 4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -5 + 3y \\ y = y \\ z = -4 - a + ay \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que $D = (-5, 0, -4 - a) + \text{Vect}\left((3, 1, a)\right)$ et donc

$$\begin{aligned} P \parallel D &\iff (3, 1, a) \perp (2, -1, 3) \\ &\iff 6 - 1 + 3a = 0 \\ &\iff a = \frac{-5}{3}. \end{aligned}$$

Exercice 12.

1. Le vecteur $\overrightarrow{u}(1, 3, -5)$ est normal à $\mathcal{P}$ et $\overrightarrow{v}(2, -1, -1)$ est normal à $\mathcal{Q}$. Or $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}(-8, -9, -5) \neq \overrightarrow{0}$. Par suite, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires et donc $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ne sont pas parallèles.
2. Soit $\mathcal{R}$ le plan contenant $A(1, 0, 2)$ et $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$. Un vecteur directeur de $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ est $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}(2, -9, -7)$. En appliquant la méthode du pivot de Gauss-Jordan, on remarque que $B\left(\frac{-5}{3}, \frac{-7}{9}, 0\right)$ est un élément de $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$. On en déduit que les vecteurs $(24, 7, 18)$ et $\overrightarrow{w}$ dirigent $\mathcal{R}$. Ainsi $\begin{pmatrix} 24 \\ 7 \\ 18 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 211 \\ -132 \\ -230 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{R}$ d'où

$$\mathcal{R} \mid 211x - 132y - 230z + 249 = 0.$$

2 Produit scalaire, produit vectoriel et produit mixte

Exercice 13.

1. En utilisant les coordonnées cartésiennes et en appliquant la définition de la norme euclidienne, on a

$$\begin{cases} AB = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\ AD = \sqrt{16+1+9} = \sqrt{26} \\ BC = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14} \\ BE = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}. \end{cases}$$

2. Avant de calculer les produits scalaires, on détermine les coordonnées cartésiennes des vecteurs suivants

   - $\overrightarrow{DA}(-4,1,3)$
   - $\overrightarrow{BC}(3,-2,1)$
   - $\overrightarrow{AE}(1,1,-4)$
   - $\overrightarrow{DB}(-5,1,2)$
   - $\overrightarrow{BE}(2,1,-3)$
   - $\overrightarrow{DE}(-3,2,-1)$
   - $\overrightarrow{BA}(1,0,1)$
   - $\overrightarrow{CE}(-1,3,-4)$

   En utilisant l'expression du produit scalaire dans un repère orthonormé, on a

$$\begin{cases} \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BE} = -8+1-9 = -16 \\ \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DE} = -9-4-1 = -14 \\ \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BA} = 1-4 = -3 \\ \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CE} = 5+3-8 = 0 \end{cases}$$

3. En utilisant les coordonnées cartésiennes obtenues à la question précédente on a

$$\begin{cases} \overrightarrow{DA}\wedge\overrightarrow{BE} = (-6,18,-6) \\ \overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{DE} = (0,0,0) \\ \overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{BA} = (1,-5,-1) \\ \overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{CE} = (-10,-22,-14). \end{cases}$$

4. Par définition, $[\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CD}] = \left(\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{BA}\right)\cdot\overrightarrow{CD} = 2-5+3 = 0$. À l'aide des questions précédentes, on a aussi

$$\overrightarrow{AB}(-1,0,-1), \overrightarrow{AC}(2,-2,0) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AD}(4,-1,-3),$$

   et donc

$$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 4\times(-2)+1\times 2-3\times 2 = -12.$$

   Le parallélépipède engendré par les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ est donc de volume égale à 12.

Exercice 14. Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs du plan.

1. On se place dans une base orthonormée $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3})$ directe dans laquelle

$$\begin{cases} \overrightarrow{u} &=& a\overrightarrow{u_1} \\ \overrightarrow{v} &=& b\overrightarrow{u_1}+c\overrightarrow{u_2} \\ \overrightarrow{w} &=& d\overrightarrow{u_1}+e\overrightarrow{u_2}+f\overrightarrow{u_3} \end{cases},$$

   où $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Puisque la base est directe, $\overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}$. On a alors

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})\wedge\overrightarrow{w} &= (a\overrightarrow{u_1}\wedge(b\overrightarrow{u_1}+c\overrightarrow{u_2}))\wedge\overrightarrow{w} \\ &= ac\,(\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2})\wedge\overrightarrow{w} \\ &= ac\overrightarrow{u_3}\wedge(d\overrightarrow{u_1}+e\overrightarrow{u_2}+f\overrightarrow{u_3}) \\ &= acd\overrightarrow{u_2}-ace\overrightarrow{u_1} \\ &= ad(\overrightarrow{v}-b\overrightarrow{u_1})-ace\overrightarrow{u_1} \\ &= ad\overrightarrow{v}-a(bd+ce)\overrightarrow{u_1} \\ &= (\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w})\overrightarrow{v}-(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w})\overrightarrow{u}. \end{aligned}$$

2. D'après la question précédente,

$$(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})\wedge\overrightarrow{w}+(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w})\wedge\overrightarrow{u}+(\overrightarrow{w}\wedge\overrightarrow{u})\wedge\overrightarrow{v} = (\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w})\overrightarrow{v}-(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w})\overrightarrow{u}+(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u})\overrightarrow{w}-(\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{u})\overrightarrow{v}+(\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v})\overrightarrow{u}-(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})\overrightarrow{w}.$$

   Ces termes s'annulent deux à deux en utilisant la symétrie du produit scalaire.

Exercice 15. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs fixés. On cherche tous les vecteurs de l'espace $\overrightarrow{x}$ tels que $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{x} = \overrightarrow{v}$.
Pour tout vecteur $\overrightarrow{x}$ de l'espace, on sait que $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{x}$ est un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{x}$.

- Cas n°1 : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \neq 0$.
  Donc pour tout vecteur de l'espace $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{v} \neq 0$. Il n'y a donc pas de solution à l'équation.
- Cas n°2 : $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$.
  On peut alors affirmer que $\mathcal{B} = \left(\frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}, \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}, \frac{\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|} \right)$ est une base orthonormée directe de l'espace. On raisonne par analyse-synthèse.
  Soit $\overrightarrow{x}$ un vecteur de l'espace tel que $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{x} = \overrightarrow{v}$. Pusique $\mathcal{B}$ est une base,

$$\exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \quad \overrightarrow{x} = \alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{v} + \gamma \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}.$$

  Or $\overrightarrow{x} \perp \overrightarrow{v}$ donc $\beta = 0$ car $\|\overrightarrow{v}\|^2 \beta = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{v}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{x} &= \overrightarrow{u} \wedge (\alpha \overrightarrow{u} + \gamma \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \\ &= \alpha \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u} + \gamma \overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \\ &= \gamma(-\overrightarrow{v}). \end{aligned}$$

  On en déduit que $\gamma = -1$ et donc $\overrightarrow{x} = \alpha \overrightarrow{u} - \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.
  Réciproquement, supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{x} = \alpha \overrightarrow{u} - \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$. Alors d'après le calcul précédent, $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{x} = \overrightarrow{v}$.

Exercice 16.

1. Les vecteurs $(-2, 1, -1)$ et $(3, 1, -2)$ dirigent $\mathcal{P}_1$ donc le vecteur $(-2, 1, -1) \wedge (3, 1, -2) = (-1, -7, -5)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_1$ d'où
$$\mathcal{P}_1 \mid -x - 7y - 5z + 7 = 0,$$
   car $\mathcal{P}_1$ passe par le point de coordonnées cartésiennes $(1, -2, 4)$.
2. On a $(2, -1, 3) \perp \mathcal{P}_2$ et $(1, 0, 2) \perp \mathcal{P}_3$. On en déduit que $(2, -1, 3) \wedge (1, 0, 2) = (2, -1, 1)$ dirige la droite $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$. Par suite
$$\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 \mid \begin{cases} y = 5 + \frac{x}{2} \\ z = 2 - \frac{x}{2} \end{cases},$$
   car $(0, 5, 2) \in \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$.
3. À l'aide des coordonnées cartésiennes des points A, B et C, on a
$$\overrightarrow{AB} = (1, -3, -1) \ \text{ et } \ \overrightarrow{AC} = (-1, -1, -5).$$
   Par suite le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (14, 6, -4)$ et donc le vecteur $(7, 3, -2)$ est normal à (ABC) (et $A \in (ABC)$). On obtient alors
$$(ABC) \mid 7x + 3y - 2z = 7.$$
4. Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.
$$\begin{aligned} M \in D_1 \cap P_2 \quad &\iff \quad \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + t \\ 2x - y + 3z - 1 = 0 \end{cases} \\ &\iff \quad \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + t \\ 6 - 2t - 1 - 2t + -3 + 3t - 1 = 0 \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases} \\ &\iff \quad M(2, 3, 0) \end{aligned}$$
5. Le plan Q est dirigé par les vecteurs $(-1, 2, 1)$ et $(3, -2, 5)$ et passe par le point $(3, 1, -1)$. Puisque $(-1, 2, 1) \wedge (3, -2, 5) = 4(3, 2, -1)$, le vecteur $(3, 2, -1)$ est normal à Q et donc
$$Q \mid 3x + 2y - z = 12.$$

6. On utilise les équations cartésiennes obtenues aux questions précédentes. Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$\begin{aligned}
M \in P_1 \cap P_2 \cap P_3 \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y = 5 + \frac{x}{2} \\ z = 2 - \frac{x}{2} \\ -x - 7y - 5z + 7 = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y = 5 + \frac{x}{2} \\ z = 2 - \frac{x}{2} \\ -x - 35 - \frac{7x}{2} - 10 + \frac{5x}{2} + 7 = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = -19 \\ y = \frac{-9}{2} \\ z = \frac{23}{2} \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad M\left(-19, \frac{-9}{2}, \frac{23}{2}\right)
\end{aligned}$$

L'intersection $P_1 \cap P_2 \cap P_3$ est réduite à un point de coordonnées $\left(-19, \frac{-9}{2}, \frac{23}{2}\right)$.

7. Puisque $\overrightarrow{AB} = (1, -1, -1)$, une équation paramétrique de (AB) est donnée par

$$(AB) \mid \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 - t \end{cases} .$$

Par suite, pour tout point $M(x, y, z)$ de l'espace,

$$\begin{aligned}
M \in P_2 \cap (AB) \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 - t \\ 2x - y + 3z - 1 = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 - t \\ 2 + 2t - 2 + 6t + 9 - 3t - 1 = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = 14 \\ z = 7 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad M(-3, 14, 7)
\end{aligned}$$

8. Soit D la droite passant par A, parallèle à P_2 et coupant D_1. On sait que D passe par A. Soit $\overrightarrow{u}(x, y, z)$ un vecteur directeur de D. Puisque D est parallèle à P_2, on a

$$\overrightarrow{u} \cdot (2, -1, 3) = 0,$$

et donc $2x - 3y + 3z = 0$. De plus D et D_1 sont sécantes. Il existe donc B tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ c'est-à-dire qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2t - 1 \\ z = -4 + t \end{cases} .$$

Avec l'équation précédente, on trouve $2(2 - t) - (2t - 1) + 3(-4 + t) = 0$ et donc $t = -7$. Finalement D est la droite passant par $A(1, 2, 3)$ dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}(9, -15, -11)$ donc

$$D \mid \begin{cases} x = 1 + 9t \\ y = 2 - 15t \\ z = 3 - 11t \end{cases} .$$

9. Soit P le plan passsant par C et contenant D_1. Le point $M(3, 1, -1)$ est un élément de D_1. Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{u}(-1, 2, 1)$ et $\overrightarrow{CM}(3, 0, 1)$ engendrent P. Un vecteur normal à P est donc $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{CM} = 2, 4, -6)$. On en déduit que

$$P \mid x + 2y - 3z - 8 = 0.$$

Exercice 17.

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. Par lecture de l'équation paramétrique définissant D, on sait que D est la droite passant par $A(4,3,1)$ dirigée par le vecteur $(2,1,1)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(M,D) &= \frac{\left\| \begin{pmatrix} t-4 \\ t-3 \\ t-1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|}{\sqrt{4+1+1}} \\
&= \frac{\sqrt{(t-3-t+1)^2+(-t+4+2t-2)^2+(t-4-2t+6)^2}}{\sqrt{6}} \\
&= \frac{\sqrt{4+t^2+4t+4+t^2-4t+4}}{\sqrt{6}} \\
&= \sqrt{\frac{t^2+6}{3}}.
\end{aligned}$$

La distance est minimale lorsque $(t^2+6)/3$ est minimal c'est-à-dire lorsque $t=0$. Dans ce cas, on a $\mathrm{d}(O,D)=\sqrt{2}$.

2. Soit $H(x,y,z)$ le projeté orthogonal de O sur D. On a $\overrightarrow{OH} \perp D$ et $H \in D$ donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} \overrightarrow{OH} \cdot (2,1,1) = 0 \\ x = 4+2t \\ y = 3+t \\ z = 1+t \end{cases}$$

Par suite

$$\begin{cases} 8+4t+3+t+1+t = 0 \\ x = 4+2t \\ y = 3+t \\ z = 1+t \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} t = -2 \\ x = 0 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}.$$

On en déduit que $H(0,1,-1)$.

3. Pour tout point de l'espace $M(x,y,z)$,

$$\begin{aligned}
M \in D &\implies \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 4+2t \\ y = 3+t \\ z = 1+t \end{cases} \\
&\implies \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} M(4+2t, 3+t, 1+t) \\ x-2z = 4+2t-2-2t = 2 \end{cases} \\
&\implies M \in P.
\end{aligned}$$

On en déduit que $D \subset P$. On sait que $Q \perp P$ et $D \subset Q$. Ainsi Q passe par le point $A \in D$ et est dirigé par les vecteurs $(1,0,-2)$ (normal à P) et $(2,1,1)$ (directeur de D). Par suite, $(1,0,-2) \wedge (2,1,1) = (2,-5,1)$ est un vecteur normal à Q et donc

$$Q \mid 2x-5y+z = 8-15+1 = -6.$$

4. En appliquant la formule de distance d'un point à un plan, on a

$$\mathrm{d}(O,P) = \frac{|0-2\times 0-2|}{\sqrt{1+4}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Exercice 18. Dans l'espace rapporté à la base orthonormée directe $(\overrightarrow{i}, vecj, veck)$ on considère les vecteurs

$$\overrightarrow{I} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{k}\right), \qquad \overrightarrow{J} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}\right)$$

$$\overrightarrow{K} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}\right).$$

1. D'après l'expression du produit scalaire dans une base orthonormée (ici $(\overrightarrow{i}, vecj, veck)$), on a

$$\begin{cases} \overrightarrow{I}\cdot\overrightarrow{I} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1 \\ \overrightarrow{J}\cdot\overrightarrow{J} = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = 1 \\ \overrightarrow{K}\cdot\overrightarrow{K} = \frac{1}{6}+\frac{4}{6}+\frac{1}{6} = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \overrightarrow{I}\cdot\overrightarrow{J} = -\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{6}} = 0 \\ \overrightarrow{I}\cdot\overrightarrow{K} = -\frac{1}{\sqrt{8}}+\frac{1}{\sqrt{8}} = 0 \\ \overrightarrow{J}\cdot\overrightarrow{K} = \frac{1}{\sqrt{18}}-\frac{2}{\sqrt{18}}+\frac{1}{\sqrt{18}} = 0. \end{cases}$$

2. On sait que la base $(\overrightarrow{i}, vecj, veck)$ est directe donc

$$\overrightarrow{i}\wedge\overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{i}\wedge\overrightarrow{k} = -\overrightarrow{j} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{j} = -\overrightarrow{i} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}.$$

Par suite

$$\begin{aligned} \overrightarrow{I}\wedge\overrightarrow{J} &= \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{i}\wedge\overrightarrow{j}+\overrightarrow{i}\wedge\overrightarrow{k}-\overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{i}+\overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{j}\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(-\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}\right) \\ &= \overrightarrow{K}. \end{aligned}$$

Ainsi la famille $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ est orthonormée directe.

Exercice 19. Soit M un point de l'espace. En développant, par linéarité et relation de Chasles, on trouve

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB} &= \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\wedge\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right) \\ &= \overrightarrow{MI}\wedge\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MI}\wedge\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}\wedge\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\wedge\overrightarrow{IB} \\ &= \overrightarrow{MI}\wedge\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IA}\right) \qquad \textit{(car } \overrightarrow{IA} \textit{ et } \overrightarrow{IB} \textit{ sont colinéaires.)} \\ &= \overrightarrow{MI}\wedge\overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MD} &= \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)\wedge\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID}\right) \\ &= \overrightarrow{MI}\wedge\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IC}\wedge\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\wedge\overrightarrow{ID} \\ &= \overrightarrow{MI}\wedge\left(\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{ID}\right) \qquad \textit{(car } \overrightarrow{IC} \textit{ et } \overrightarrow{ID} \textit{ sont colinéaires.)} \\ &= \overrightarrow{MI}\wedge\overrightarrow{CD}. \end{aligned}$$

On en déduit alors

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MD} &\iff \overrightarrow{MI}\wedge\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MI}\wedge\overrightarrow{CD} \\ &\iff \overrightarrow{MI}\wedge\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}\right) = \overrightarrow{0} \\ &\iff \overrightarrow{MI} \text{ et } \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD} \text{ sont colinéaires.} \end{aligned}$$

Or les droites (AB) et (CD) se coupent en un seul point donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires et donc $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD} \neq \overrightarrow{0}$. Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par I dirigée par $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$. On peut alors en déduire

$$\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MD} \iff M \in \mathcal{D}.$$

Exercice 20. Soient A, B, C, D quatre points non coplanaires. Soit M un point de l'espace.

$$\left(\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\right)\wedge\left(\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MD}\right) = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB} \text{ et } \overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MD} \text{ sont colinéaires.}$$

Le vecteur $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{AB}$ est nul si et seulement si M est un point de la droite (AB). De même, $\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{0} \iff M \in (CD)$.

Montrons que $(AB)\cap(CD) = \emptyset$. On sait que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires donc la famille $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est de rang 3 et les droites (AB) et (CD) ne peuvent être confondues. Supposons par l'absurde que $(AB)\cap(CD) \neq \emptyset$. Dans ce cas, il existe I un point de l'espace tel que $(AB)\cap(CD) = \{I\}$. Puisque $I \in (AB)$,

$$\overrightarrow{AB} = \frac{-\|\overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{IA}\|}\overrightarrow{IA} = \lambda_0\overrightarrow{IA}.$$

De même, il existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{ID} = \lambda_1 \overrightarrow{IC}$ ($C \neq I$ car sinon A, B et C sont alignés). Ainsi,

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = \lambda_0 \overrightarrow{IA} \\ \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} \\ \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{ID} = -\overrightarrow{IA} + \lambda_1 \overrightarrow{IC} \end{array} \right. ,$$

et donc la famille $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est de rang au plus 2.

Puisque les droites (AB) et (CD) ont une intersection vide, $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} \neq \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD} \neq \overrightarrow{0}$. Quitte à échanger A, B avec C, D, on suppose que $\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD} \neq \overrightarrow{0}$. On a alors

$$\left(\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\right) \wedge \left(\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD}\right) = \overrightarrow{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \lambda \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD}.$$

On s'intéresse à la nouvelle équation obtenue. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \lambda \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD} \quad & \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{AB} = \lambda \left(\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}\right) \\ & \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{MA} \wedge \left(\overrightarrow{AB} - \lambda \overrightarrow{AD} + \lambda \overrightarrow{AC}\right) = \lambda \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} \\ & \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{MA} \wedge \left(\overrightarrow{AB} - \lambda \overrightarrow{CD}\right) = \lambda \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}. \end{aligned}$$

Or les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles donc la famille $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ est libre donc $\overrightarrow{AB} - \lambda \overrightarrow{CD} \neq \overrightarrow{0}$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \wedge \left(\overrightarrow{AB} - \lambda \overrightarrow{CD}\right) = \lambda \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} \quad & \Longrightarrow \quad \lambda \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} \perp \left(\overrightarrow{AB} - \lambda \overrightarrow{CD}\right) \\ & \Longrightarrow \quad \lambda \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} \cdot \left(\overrightarrow{AB} - \lambda \overrightarrow{CD}\right) = 0 \\ & \Longrightarrow \quad \lambda \left(\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}\right) \cdot \overrightarrow{AB} - \lambda^2 \left(\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}\right) \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \\ & \Longrightarrow \quad \lambda[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}] - \lambda^2 [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CD}] = 0 \\ & \Longrightarrow \quad \lambda[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}] = 0 \qquad \textit{(car } \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}.\textit{)} \\ & \Longrightarrow \quad \lambda = 0 \qquad \textit{(car } (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) \textit{ n'est pas liée.)} \end{aligned}$$

Finalement, on a montré que

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\right) \wedge \left(\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD}\right) = \overrightarrow{0} \quad & \Longleftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \lambda \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD} \\ & \Longleftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{MA} \wedge \left(\overrightarrow{AB} - \lambda \overrightarrow{CD}\right) = \lambda \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} \\ & \Longrightarrow \quad \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \\ & \Longrightarrow \quad M \in (AB) \\ & \Longrightarrow \quad \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0} \\ & \Longrightarrow \quad \left(\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\right) \wedge \left(\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD}\right) = \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

En résumé si $M \notin (CD)$ alors

$$\left(\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\right) \wedge \left(\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD}\right) = \overrightarrow{0} \iff M \in (AB).$$

Par symétrie de l'analyse précédente, pour tout point M de l'espace,

$$\left(\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\right) \wedge \left(\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD}\right) = \overrightarrow{0} \iff M \in (AB) \text{ ou } M \in (CD).$$

3 Transformations

Exercice 21.

1. La rotation r d'angle π correspond à une symétrie axiale d'axe $D = \mathrm{Vect}\left((1, 2, 1)\right)$. Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace. Soit $M'(x', y', z') = r(M)$. Notons H le projeté orthogonal de M sur la droite D. Par l'analyse précédente, $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH}$. Il suffit alors de déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MH}$ pour trouver une relation entre M et M'.

On a $H \in D$ donc $b = 2a = 2c$. De plus $\overrightarrow{MH} \perp D$ donc $\overrightarrow{MH} \cdot (1,2,1) = (a-x) + 2(b-y) + (c-z) = 0$. En multipliant par 2, on trouve $2a + 4b + 2c = 6b = 2x + 4y + 2z$ et donc

$$b = \frac{x+2y+z}{3}.$$

Ainsi,

$$\begin{cases} a = \frac{x+2y+z}{6} \\ b = \frac{2x+4y+2z}{6} \\ c = \frac{x+2y+z}{6} \end{cases}$$

et finalement, puisque $(x'-x, y'-y, z'-z) = \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH} = (2(a-x), 2(b-y), 2(c-z))$,

$$\begin{cases} x' = 2a - x = \frac{-2x+2y+z}{3} \\ y' = 2b - y = \frac{2x+y+2z}{3} \\ z' = 2c - z = \frac{x+2y-2z}{3} \end{cases}$$

Matriciellement, on obtient alors

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

2. Soit $D' = \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$. Soit $\overrightarrow{w} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$. On a alors $\overrightarrow{w}$ est un vecteur directeur de D'. Les vecteurs $\overrightarrow{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$ et $\overrightarrow{v} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$ sont orthonormés et engendrent un plan orthogonal à D. On en déduit que $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base orthonormée de l'espace. La base $\mathcal{B}'$ étant adaptée à la rotation r', il est très facile de représenter les coordonnées de $M' = r'(M)$ dans le repère $(O, \mathcal{B}')$ lorsqu'on dispose des coordonnées cartésiennes de M dans le repère $(O, \mathcal{B}')$. En effet, si $M(x,y,z)$ et $M'(x',y',z') = r'(M)$ dans le repère $(O, \mathcal{B}')$ alors

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) & 0 \\ -\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Soient M un point de l'espace et $M' = r'(M)$. L'objectif est de partir de la représentation cartésienne de M dans la base $\mathcal{B}$ pour obtenir les coordonnées cartésiennes de M dans la base $\mathcal{B}'$. Par définition,

$$\begin{cases} \overrightarrow{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{v} = \frac{1}{\sqrt{6}}\overrightarrow{i} + \frac{1}{\sqrt{6}}\overrightarrow{j} - 2\frac{1}{\sqrt{6}}\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{w} = \frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{k} \end{cases}$$

On en déduit que pour tout M si (x,y,z) sont les coordonnées cartésiennes de M dans le repère $(O, \mathcal{B})$ alors

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

où (x',y',z') sont les coordonnées cartésiennes de M dans le repère $(O, \mathcal{B}')$. Notons P la métrice définie par

$$P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

À l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss-Jordan, on montre que P est inversible et que

$$P^{-1} = {}^tP \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Soient $M(x,y,z)$ et $M'(x',y',z') = r'(M)$ deux points de l'espace représenté par des coordonnées cartésiennes dans le repère $(O, \mathcal{B})$. On en déduit que le vecteur colonne

$$P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

représente les coordonénes cartésiennes de M dans le repère $(O, \mathcal{B}')$. Ainsi les coordonnées du point M' dans la base $(O, \mathcal{B}')$ sont données par le vecteur colonne

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right).$$

Ainsi les coordonnées cartésiennes de M' dans le repère $(O, \mathcal{B}')$ sont données par

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &= P \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. L'image d'un plan par une rotation est une rotation. De plus une rotation conserve les angles orientés. L'image d'un vecteur normal à un plan est donc un vecteur normal à l'image de ce plan par la même rotation. Un vecteur normal au plan $P : x - y + z = 0$ est $\overrightarrow{n} = (1, -1, 1)$. On a de plus

$$r(\overrightarrow{n}) = (-1, 1, -1) = -\overrightarrow{n} \quad \text{et} \quad r'(\overrightarrow{n}) = (1, 1, -1).$$

On en déduit que $r(P) = P$ et que $r'(P) \mid x + y - z = 0$.

Exercice 22. On considère les matrices suivantes :

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & 1 & -4 \\ 1 & -8 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}, B = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Quelles sont les matrices correspondant à des rotations vectorielle ? On précisera les caractéristiques de ces rotations.
2. Quelles sont les matrices correspondant à des réflexions ? On précisera les caractéristiques de ces réflexions.

Exercice 23.

1. Commençons par étudier la matrice A. On cherche dans un premier temps les point $M(x, y, z)$ qui restent fixes par la transformation induite par A. On étudie alors la matrice $A - I_3$.

$$\begin{aligned} A - I_3 &= \frac{1}{70} \begin{pmatrix} -112 & 4\sqrt{70} & 12\sqrt{14} \\ 4\sqrt{70} & -10 & -6\sqrt{5} \\ 12\sqrt{14} & -6\sqrt{5} & -18 \end{pmatrix} \\ &\sim \frac{1}{70} \begin{pmatrix} -112 & 0 & 0 \\ 4\sqrt{70} & 0 & 0 \\ 12\sqrt{14} & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi $\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 2\sqrt{14} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2\sqrt{14} \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs solution de $AX = X$ où $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Comme ils sont non colinéaires et que $A \neq I_3$ on a

$$\forall X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), AX = X \iff X \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 2\sqrt{14} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2\sqrt{14} \end{pmatrix} \right).$$

À poursuivre...

Exercice 24. Soit r la rotation vectorielle d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ et d'axe dirigé par $\overrightarrow{u}$. Soit $\overrightarrow{x}$ un vecteur de l'espace. Quitte à diviser par la norme du vecteur non nul $\overrightarrow{u}$, on peut supposer que $\overrightarrow{u}$ est unitaire. Par définition de r, on a $r(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$. Notons $a = \|\overrightarrow{x} - (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{x})\overrightarrow{u}\|$ et $\overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{x} - (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{x})\overrightarrow{u}}{a}$. Par un calcul,

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = \frac{1}{a}(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u} - (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{x})\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}) = 0.$$

Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthonormés. En définissant $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base orthonormée directe de l'espace. Pour faciliter les calculs suivants, on remarque que

$$a^2 = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x} - 2(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u})^2 + (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x})^2 = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x} - (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u})^2.$$

On peut alors écrire

$$\overrightarrow{x} = \alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{v} + \gamma \overrightarrow{w},$$

où

$$\begin{cases} \alpha = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{x} \\ \beta = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{x} = \frac{1}{a}(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x} - 2(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u})^2) = a \\ \gamma = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{x} = a \end{cases} .$$

Ainsi, on trouve l'égalité

$$\begin{aligned} r(\overrightarrow{x}) &= \alpha \overrightarrow{u} + \beta \cos(\theta) \overrightarrow{v} + \gamma \sin(\theta) \overrightarrow{w} \\ &= \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{x} \overrightarrow{u} + \cos(\theta)(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u} \overrightarrow{u}) + \sin(\theta)(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{x} - \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u} \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u}) \\ &= \cos(\theta) \overrightarrow{x} + \sin(\theta) \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{x} + (1 - \cos(\theta)) \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u} \overrightarrow{u}. \end{aligned}$$

4 Géométrie pure

Exercice 25. On considère un carré $(ABCD)$ de l'espace euclidien. On note $\mathcal{P}$ le plan du carré et $\mathcal{D}$ la droite perpendiculaire à $\mathcal{P}$ en A ($\mathcal{D}$ est arbitrairement orientée). Sur $\mathcal{D}$, on considère un point M différent de A.
La perpendiculaire en M au plan (MBC) rencontre le plan $\mathcal{P}$ en un point R.
La perpendiculaire en M au plan (MCD) rencontre le plan $\mathcal{P}$ en un point S.

1. Faire une figure réunissant les données précédentes où la droite $\mathcal{D}$ apparaît comme verticale. *Par la suite (et pas uniquement dans ce problème), on n'hésitera pas à faire des schémas intermédiaires pour illustrer les preuves ; notamment, on pourra faire des schémas dans certains plans particuliers.*
2. Montrer que R appartient à la droite (AB).
3. Préciser un plan de réflexion échangeant R et S et en déduire que S appartient à la droite (AD). Donner alors la nature du triangle ARS.
4. Établir que la droite (MC) est perpendiculaire au plan du triangle MRS.
5. On note K le milieu du segment $[RS]$. Quel est le lieu géométrique du point K lorsque M décrit la droite $\mathcal{D}$ privée de A.
6. La hauteur issue de A du triangle MAK rencontre le côté $[MK]$ en H. Montrer que (AH) est la hauteur issue de A du tétraèdre $ARMS$.
7. Conclure que le point H est l'orthocentre du triangle MRS.