Chapitre 3 : Fonctions de la variable réelle

1 Introduction : Inégalités dans $\mathbb{R}$

1.1 Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

Proposition

$\mathbb{R}$ est muni d'une relation de comparaison $\leq$ qui est dite relation d'ordre total, c'est à dire qu'elle possède les propriétés suivantes :

- Réflexivité : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leq x$
- Antisymétrie : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \big(x \leq y \text{ et } y \leq x\big) \Longrightarrow x = y$
- Transitivité : $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ \big(x \leq y \text{ et } y \leq z\big) \Longrightarrow x \leq z$
- L'ordre est total : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y$ ou $y \leq x$.

Remarque : On a également : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \big(x \leq y \text{ et } y < z\big) \Longrightarrow x < z$.
$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \big(x < y \text{ et } y \leq z\big) \Longrightarrow x < z$.

Proposition

La relation $\leq$ est compatible avec :

- l'addition : $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + z$
- la multiplication par un réel positif : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall z \in \mathbb{R}_+,\ x \leq y \Longrightarrow xz \leq yz$.

Proposition : Opérations sur les inégalités

Soient x, y, z, t quatre nombres réels.

- si $x \leq y$ et $z \leq t$, alors on a $x + z \leq y + t$.
- si $0 \leq x \leq y$ et $0 \leq z \leq t$, alors on a $xz \leq yt$.
- si $x \leq y$, alors on a $-y \leq -x$.
- si $x \leq y$ et $z \leq 0$, alors on a $xz \geq yz$.
- si $0 < x \leq y$, alors on a $\dfrac{1}{x} \geq \dfrac{1}{y}$.

  De même, si $x \leq y < 0$, alors on a $\dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{x} < 0$.

Remarque :

- ⚠ On ne peut multiplier que des inégalités entre nombres réels positifs !
- ⚠ On ne peut pas soustraire des inégalités, ni les diviser !
- ⚠ Quand on multiplie une inégalité par un nombre réel négatif, le sens de l'inégalité change !
- ⚠ Ne pas appliquer la dernière propriété lorsque x et y ne sont pas de même signe.

Méthode

• Pour soustraire deux inégalités, on procède en deux étapes : on multiplie la bonne inégalité par -1 puis on ajoute les inégalités.
• Pour faire un produit d'inégalités, on se ramène au cas où les nombres sont tous positifs, quitte à multiplier par -1 en étape intermédiaire.
• Pour faire un quotient d'inégalités, on procède en deux étapes : on inverse la bonne inégalité (en faisant attention aux signes !) puis on multiplie les inégalités.

Exemple : Montrer que : $\forall x, y \in [0, 1[,\ x \leq y \Longrightarrow \dfrac{x}{1-x} \leq \dfrac{y}{1-y}$.

Résoudre l'inéquation $\dfrac{x-1}{x+3} \leq 2$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1.2 Majorant et minorant - Maximum et minimum

Définition

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que :

- A est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in A,\ x \leq M$. On dit alors que M est un majorant de A.
- A est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in A,\ m \leq x$. On dit alors que m est un minorant de A.
- A est bornée lorsque A est à la fois majorée et minorée.
- Si A est majorée et possède un majorant qui est dans A, alors celui-ci est unique. On l'appelle **maximum** de A ou plus grand élément de A et on le note $\max A$.
- Si A est minorée et possède un minorant qui est dans A, alors celui-ci est unique. On l'appelle **minimum** de A ou plus petit élément de A et on le note $\min A$.

Définition : Intervalles de $\mathbb{R}$

On appelle intervalle de $\mathbb{R}$ toute partie de $\mathbb{R}$ ayant l'une des formes suivantes :

- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $a \leq b$
  (intervalle fermé et borné ou segment) ;
- $[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$ avec $a \in \mathbb{R}$
  (intervalle fermé non-majoré) ;
- $]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$ avec $b \in \mathbb{R}$
  (intervalle fermé non-minoré) ;
- $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b$
  (intervalle borné ouvert) ;
- $]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ avec $b \in \mathbb{R}$
  (intervalle ouvert non-minoré) ;
- $]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ avec $a \in \mathbb{R}$
  (intervalle ouvert non-majoré) ;
- $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b$
  (intervalle borné semi-ouvert à droite) ;
- $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b$
  (intervalle borné semi-ouvert à gauche) ;
- l'ensemble vide $\emptyset$
- $\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$
  (intervalle non-majoré et non-minoré)

Remarque : On note $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$, $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty[$, $\mathbb{R}_- =]-\infty,0]$, $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$, $\mathbb{R}_-^* =]-\infty,0[$
⚠ $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle

1.3 Valeur absolue

Définition

On appelle valeur absolue de $x \in \mathbb{R}$ le réel, noté $|x|$ et défini par :

$$|x| = \max(x,-x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Remarque : On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ -|x| \leq x \leq |x|$.

Proposition

On a :

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$ (avec égalité si et seulement si $x = 0$) ;
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| = |x| \times |y|$;
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$;
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x|^2 = x^2$;
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$;

Proposition : Inégalité triangulaire

On a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x+y| \leq |x| + |y|.$$

Corollaire : Deuxième inégalité triangulaire

On a :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ ||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Remarque : ⚠Attention, on ne peut pas majorer $|x - y|$ par $|x| - |y|$ mais seulement par $|x| + |-y| = |x| + |y|$.

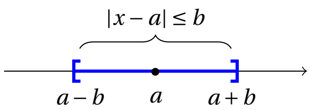
Proposition

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}_+$, Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on a :

- $|x - a| \leq b$ si et seulement si $a - b \leq x \leq a + b$. En particulier : $|x| \leq b \Longleftrightarrow -b \leq x \leq b$.
- $|x - a| \geq b$ si et seulement si $x - a \geq b$ ou $x - a \leq -b$.

Ces propriétés sont encore vraies en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

Interprétation géométrique : La valeur absolue d'un réel représente sa distance à 0. Si a et x sont deux réels, $|x - a|$ est la distance de a à x. Si $b \geq 0$, l'inégalité $|x - a| \leq b$ signifie que x est à une distance de a inférieure ou égale à b.



Proposition

Soient A et B deux réels.

$$|A| = |B| \text{ si et seulement si } A = B \text{ ou } A = -B.$$

2 Généralités sur les fonctions à valeurs réelles

Dans toute cette partie $\mathscr{D}$ désigne une partie non vide de $\mathbb{R}$.

2.1 Définitions

Définition

On appelle fonction la donnée d'un ensemble de départ $\mathscr{D}$, d'un ensemble d'arrivée $A \subset \mathbb{R}$ et d'une correspondance qui à tout $x \in \mathscr{D}$ associe un unique élément de A noté $f(x)$.

On la note : $f\ :\ \mathscr{D} \longrightarrow A$ ou $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \rightarrow & A \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$ ou encore $f : x \in \mathscr{D} \mapsto f(x) \in A$.

Si $x \in \mathscr{D}$ et $y = f(x)$, on dit que :

- y est l'image de x par f,
- x est un antécédent de y par f (pas forcément unique).

On note $\mathscr{F}(\mathscr{D}, A)$ l'ensemble des fonctions de $\mathscr{D}$ dans A.

Remarque :

- Lorsque l'espace de départ est omis, on appelle fréquemment ensemble de définition de la fonction f l'ensemble des réels x pour lesquels $f(x)$ a un sens.
- ⚠Attention à ne pas confondre fonction et valeur en un point. Une phrase du type « $f(x)$ est croissante » n'a pas de sens.

Définition

Soient $f : \mathscr{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathscr{D} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On définit les fonctions :

$$\lambda f + \mu g : x \in \mathscr{D} \mapsto \lambda f(x) + \mu g(x) \in \mathbb{R} \qquad fg : x \in \mathscr{D} \mapsto f(x)g(x) \in \mathbb{R}$$

(combinaison linéaire de f et g) (produit de f et g)

Si de plus g ne s'annule pas sur $\mathscr{D}$, on définit la fonction :

$$\frac{f}{g} : x \in \mathscr{D} \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

(quotient de f par g)

Définition

Soient $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ deux parties non vides de $\mathbb{R}$. Soient $f : \mathscr{D}_1 \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathscr{D}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathscr{D}_1$, $f(x) \in \mathscr{D}_2$.
On appelle composée de f par g et on note $g \circ f$ la fonction :

$$g \circ f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{D}_1 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array} \right.$$

Remarque : En général, $f \circ g \neq g \circ f$.

Exemple : On pose : $f : x \mapsto 1 + x$ et $g : x \mapsto x^2$.

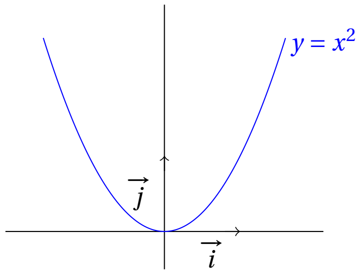
2.2 Représentation graphique

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Définition

Soit $f : \mathscr{D} \rightarrow \mathbb{R}$. On appelle courbe représentative de f ou encore graphe de f l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x, f(x))$, pour x parcourant $\mathscr{D}$.

Exemple : Courbe représentative de $x \mapsto x^2$:

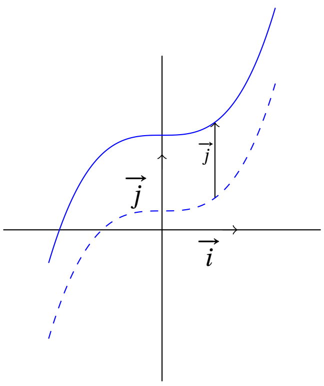


Proposition

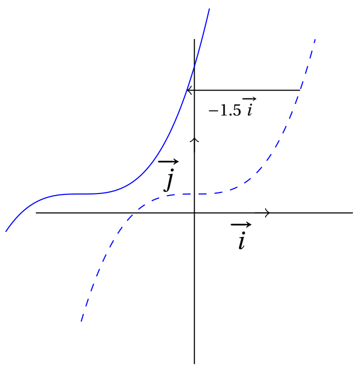
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le repère du plan $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soit $a \in \mathbb{R}^*$.
La courbe représentative de la fonction :

- $x \mapsto f(x) + a$ se déduit de $\mathscr{C}_f$ par translation de vecteur $a\overrightarrow{j}$.
- $x \mapsto f(x+a)$ se déduit de $\mathscr{C}_f$ par translation de vecteur -$a\overrightarrow{i}$
- $x \mapsto f(a-x)$ se déduit de $\mathscr{C}_f$ par symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \frac{a}{2}$.
- $x \mapsto f(-x)$ se déduit de $\mathscr{C}_f$ par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
- $x \mapsto f(ax)$ se déduit de $\mathscr{C}_f$ par la transformation d'expression $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (\frac{x}{a}, y) \end{array}$
- $x \mapsto af(x)$ se déduit de $\mathscr{C}_f$ par la transformation d'expression $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x, ay) \end{array}$
- $x \mapsto -f(x)$ se déduit de $\mathscr{C}_f$ par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

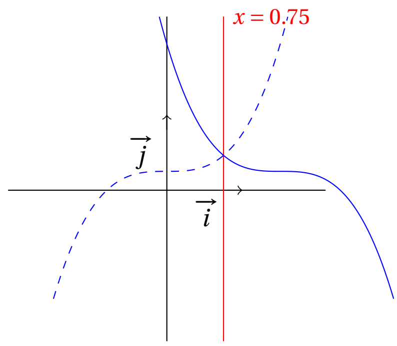
Exemple : Illustrons cette propriété :



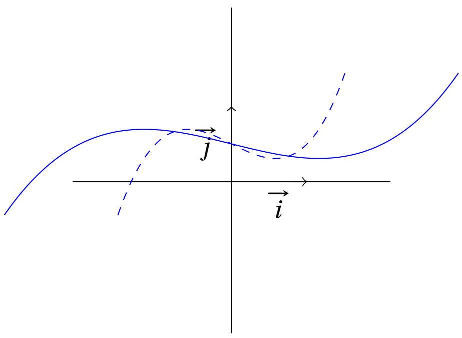
Courbe représentative de $x \mapsto f(x)+1$



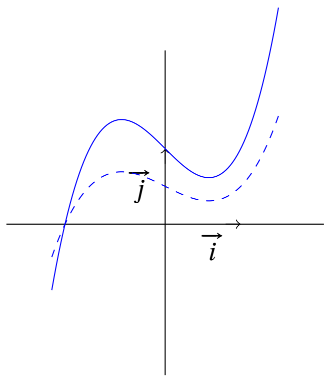
Courbe représentative de $x \mapsto f(x+1.5)$



Courbe représentative de $x \mapsto f(1.5-x)$



Courbe représentative de $x \mapsto f(0.5x)$

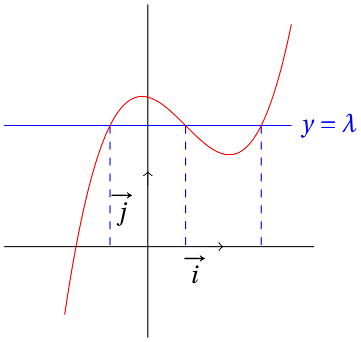


Courbe représentative de $x \mapsto 2f(x)$

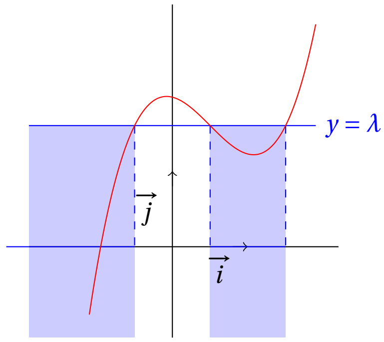
Proposition

Soit $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = \lambda$ est l'ensemble des abscisses des points d'intersection de la droite d'équation $y = \lambda$ avec le graphe de f.
- L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leq \lambda$ (resp. $f(x) \geq \lambda$) est l'ensemble des abscisses des points du graphe de f situés en-dessous (respectivement au-dessus de) la droite d'équation $y = \lambda$.



Solutions de $f(x) = \lambda$.



Solutions de $f(x) \leq \lambda$.

2.3 Propriétés des fonctions

On munit le plan d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Définition : Parité

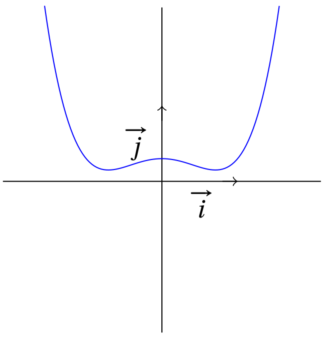
Soit $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$. On suppose ici que $\mathscr{D}$ est symétrique par rapport à 0, c'est à dire : $\forall x \in \mathscr{D},\ -x \in \mathscr{D}$.
On dit que f est :

- **paire** si : $\forall x \in \mathscr{D},\ f(-x) = f(x)$
- **impaire** si : $\forall x \in \mathscr{D},\ f(-x) = -f(x)$.

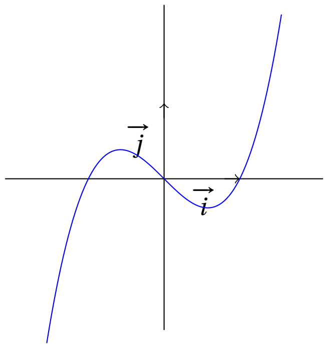
Proposition

Soit $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$.

- f est paire si et seulement si sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. On se contente de l'étudier sur $\mathbb{R}_+ \cap \mathscr{D}$.
- f est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine du repère. On se contente de l'étudier sur $\mathbb{R}_+ \cap \mathscr{D}$.



Courbe représentative d'une fonction paire



Courbe représentative d'une fonction impaire

Exemple :

Définition : Périodicité

Soit $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$.

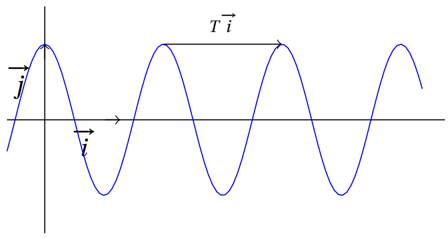
- Soit $T \in \mathbb{R}^*$. On dit que f est T-**périodique** si :
  - $\forall x \in \mathscr{D},\ x + T \in \mathscr{D}$ et $x - T \in \mathscr{D}$
  - $\forall x \in \mathscr{D},\ f(x + T) = f(x)$

  On dit alors que T est une période de f
- f est dite périodique s'il existe $T \in \mathbb{R}^*$ tel que f soit T-périodique.

Remarque : Si f est T-périodique alors on a : $\forall x \in \mathscr{D},\ \forall k \in \mathbb{Z},\ f(x+kT) = f(x)$.

Proposition

Soit $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$. Soit $T \in \mathbb{R}^*$
f est T-périodique si et seulement si sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est invariante par translation de vecteur $T\,\vec{i}$.
On se contente donc de l'étudier sur l'intersection de $\mathscr{D}$ avec un intervalle de longueur T puis on effectue des translations successives du tracé de $\mathscr{C}_f$ sur cette période.



Remarque : Pour une fonction T périodique et paire ou impaire, on choisit d'abord de restreindre l'étude à $\mathscr{D} \cap \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ afin de se ramener à un domaine centré en 0. Puis, en utilisant la parité, on se ramène à $\mathscr{D} \cap \left[0, \frac{T}{2}\right]$.

Définition

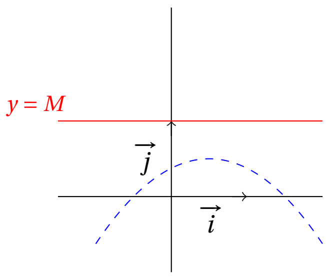
Soit $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$. On dit que :

- f est inférieure à g (sur $\mathscr{D}$) si : $\forall x \in \mathscr{D},\ f(x) \leq g(x)$. On note $f \leq g$.
- f est positive (sur $\mathscr{D}$) si : $\forall x \in \mathscr{D},\ f(x) \geq 0$. On note $f \geq 0$.

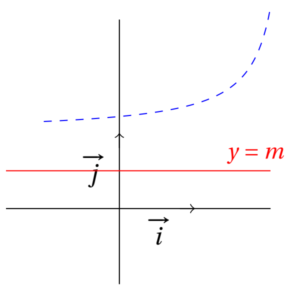
Définition : Majorée, minorée, bornée

Soit $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$. On dit que f est :

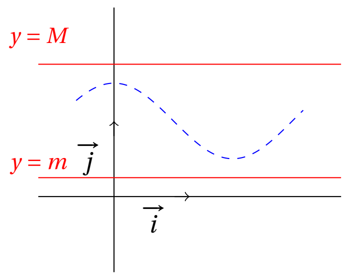
- **majorée** (sur $\mathscr{D}$) s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathscr{D},\ f(x) \leq M$. Un tel M est appelé majorant de f sur $\mathscr{D}$.
- **minorée** (sur $\mathscr{D}$) s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathscr{D},\ f(x) \geq m$. Un tel m est appelé minorant de f sur $\mathscr{D}$.
- **bornée** (sur $\mathscr{D}$) si f est majorée et minorée.



Fonction majorée



Fonction minorée



Fonction bornée

Proposition : Caractérisation des fonctions bornées

Soit $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f \text{ est bornée } & \text{ si et seulement si } |f| \text{ est majorée} \\ & \text{ si et seulement si il existe } M \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \forall x \in \mathscr{D},\ |f(x)| \leq M \end{aligned}$$

Définition

Soient $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathscr{D}$. On dit que :

- f admet un maximum en a si : $\forall x \in \mathscr{D},\ f(x) \leq f(a)$.
- f admet un minimum en a si : $\forall x \in \mathscr{D},\ f(x) \geq f(a)$.

Remarque :

- Une fonction peut avoir ni maximum, ni minimum, ou bien encore le maximum s'il existe peut être atteint en plusieurs points.
- La fonction f admet un maximum si et seulement si l'ensemble $\{f(x); x \in \mathscr{D}\}$ admet un maximum. De même, pour le minimum.

Exemple :

Définition : Monotonie

Soit $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$. On dit que f est :

- croissante si :
$$\forall (x,y) \in \mathscr{D}^2,\ x \le y \implies f(x) \le f(y)$$
- décroissante si :
$$\forall (x,y) \in \mathscr{D}^2,\ x \le y \implies f(x) \ge f(y)$$
- strictement croissante si :
$$\forall (x,y) \in \mathscr{D}^2,\ x < y \implies f(x) < f(y)$$
- strictement décroissante si :
$$\forall (x,y) \in \mathscr{D}^2,\ x < y \implies f(x) > f(y)$$
- (strictement) monotone si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.

Proposition

La composée de deux fonctions monotones est monotone. Plus précisément :

- si f et g sont de même monotonie alors $g \circ f$ est croissante.
- Si f et g sont de monotonie contraire alors $g \circ f$ est décroissante.

Remarque : En revanche, on ne peut en général rien dire sur le produit ou une combinaison linéaire quelconque de deux fonctions monotones ! Par exemple $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$, $x \mapsto x$ également, mais pas $x \mapsto x^2 - x$!

2.4 Limites

Dans toute cette section, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Soient $\lambda, l, l' \in \mathbb{R}$.
On considère, dans les tableaux suivants, deux fonctions f et g telles que les limites données aient un sens.

$\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} (\mathbf{f(x)+g(x)})$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = l'$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	forme indéterminée
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$	$-\infty$	forme indéterminée	$-\infty$

$\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} (\lambda\mathbf{f(x)})$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$
$\lambda > 0$	λl	$+\infty$	$-\infty$
$\lambda < 0$	λl	$-\infty$	$+\infty$
$\lambda = 0$	0	0	0

$\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} (\mathbf{f(x).g(x)})$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \neq 0$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = l' \neq 0$	$l.l'$	0	$+\infty$ si $l' > 0$ $-\infty$ si $l' < 0$	$-\infty$ si $l' > 0$ $+\infty$ si $l' < 0$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$	0	0	forme indéterminée	forme indéterminée
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$	$+\infty$ si $l > 0$ $-\infty$ si $l < 0$	forme indéterminée	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$	$-\infty$ si $l > 0$ $+\infty$ si $l < 0$	forme indéterminée	$-\infty$	$+\infty$

$\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \dfrac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{g(x)}}$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \neq 0$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = l' \neq 0$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$ si $l' > 0$ $-\infty$ si $l' < 0$	$-\infty$ si $l' > 0$ $+\infty$ si $l' < 0$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$	$\pm\infty(*)$	forme indéterminée	$\pm\infty(*)$	$\pm\infty(*)$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$	0	0	forme indéterminée	forme indéterminée
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$	0	0	forme indéterminée	forme indéterminée

$(*)$ La règle des signes donne le signe de la limite du quotient.

Proposition : Composition des limites

Soient $a, b, c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Soient f et g des fonctions telles que les limites suivantes aient un sens.
Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et si $\lim_{x\to b} g(x) = c$, alors $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$.

Théorème

Soient $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ et a un élément ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$). Soit $l \in \mathbb{R}$

- Théorème d'encadrement :
  Si : $\forall x \in I$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et si : $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l$, alors :
  $$\lim_{x\to a} g(x) = l.$$
- Théorème de minoration :
  Si : $\forall x \in I$, $f(x) \leq g(x)$ et si : $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, alors :
  $$\lim_{x\to a} g(x) = +\infty.$$
- Théorème de majoration :
  Si : $\forall x \in I$, $g(x) \leq h(x)$ et si : $\lim_{x\to a} h(x) = -\infty$, alors :
  $$\lim_{x\to a} g(x) = -\infty.$$

Théorème de la limite monotone

Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ tels que $a < b$. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction monotone.

- Si f est croissante, on a :
  - Si f est majorée, alors f admet une limite finie en b sinon $\lim_{x\to b} f(x) = +\infty$.
  - Si f est minorée, alors f admet une limite finie en a sinon $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.
- Si f est décroissante, on a :
  - Si f est minorée, alors f admet une limite finie en b sinon $\lim_{x\to b} f(x) = -\infty$.
  - Si f est majorée, alors f admet une limite finie en a sinon $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$.

Remarque : On retrouve facilement s'il faut regarder si f est majorée ou minorée en faisant un dessin.

Définition

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ telle que les limites suivantes aient un sens.

- Si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f.
- Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$, on dit que la droite d'équation $y = b$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $\pm\infty$.

2.5 Continuité

Dans cette section, I désigne toujours un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

- On dit que f est continue en $a \in I$ si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I.

On note $\mathscr{C}^0(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I.

Interprétation graphique. Une fonction f est continue sur I si elle est définie sur cet intervalle et si sa courbe représentative se trace d'un "trait continu", sans lever le crayon.

Remarque : Les fonctions usuelles (exponentielle, logarithme, cosinus, sinus, racine carrée, $x \mapsto |x|$ et fonctions rationnelles) sont continues sur leur ensemble de définition.

Proposition : Opérations sur les fonctions continues

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ continues sur I. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- Les fonctions $(\lambda f + \mu g)$ et $f \times g$ sont continues sur I.
- Si de plus g ne s'annule pas sur I, la fonction $\frac{f}{g}$ est continue sur I.

Proposition : Composée de fonctions continues

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point.
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur J telles que pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$. Alors $g \circ f$ est continue sur I.

Théorème des valeurs intermédiaires

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $(a, b) \in I^2$ tels que $a < b$. Alors, pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Remarque :

- y compris entre $f(a)$ et $f(b)$ signifie que $f(a) \leq y \leq f(b)$ ou $f(b) \leq y \leq f(a)$ (on ne sait pas si $f(a) \leq f(b)$ ou $f(b) \leq f(a)$).
- On peut étendre ce théorème au cas où a et b sont des extrémités de I qui ne sont pas dans I (éventuellement $\pm\infty$).
- Ce théorème permet de montrer théoriquement l'existence d'**au moins** une solution à des équations. Ce théorème ne dit rien sur l'unicité.

2.6 Bijectivité

Définition : Bijection

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. Soit $f : A \to B$.
On dit que f est bijective ou que c'est une bijection , si tout élément de B admet un unique antécédent par f (dans A). Cela peut s'écrire :

$$\forall y \in B, \exists! x \in A, \ y = f(x)$$

Remarque : Dire qu'une fonction f est bijective de A sur B équivaut à dire que, pour tout $y \in B$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in A$ admet une unique solution dans A.
Exemple :

Définition

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. Soit $f : A \to B$ une bijection.
On appelle réciproque de f et on note f^{-1} la fonction de B dans A qui, à tout élément de B, associe son unique antécédent par f (dans A).

Exemple :

Proposition

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ et $f : A \to B$ une bijection. Alors :

- $$\forall x \in A,\ f^{-1}(f(x)) = x$$
  $$\forall x \in B,\ f(f^{-1}(x)) = x$$
- $f^{-1} : B \to A$ est bijective et on a : $(f^{-1})^{-1} = f$.

Théorème

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone. Alors :

- $f(I) = \{y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, y = f(x)\} = \{f(x), x \in I\}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ (dont les bornes sont les limites de f aux bornes de I)
- f réalise une bijection de I sur $f(I)$
- la bijection réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$ est continue et strictement monotone, de même monotonie que f.

Méthode

En pratique, pour montrer qu'une fonction $f : I \to J$ est bijective :

- soit on utilise le théorème précédent
- soit, on montre que pour tout $y \in J$, l'équation $y = f(x)$ admet une unique solution $x \in I$ (x sera exprimé en fonction de y). Ceci nous permet d'obtenir une expression de la bijection réciproque : $f^{-1}(y) = x$.

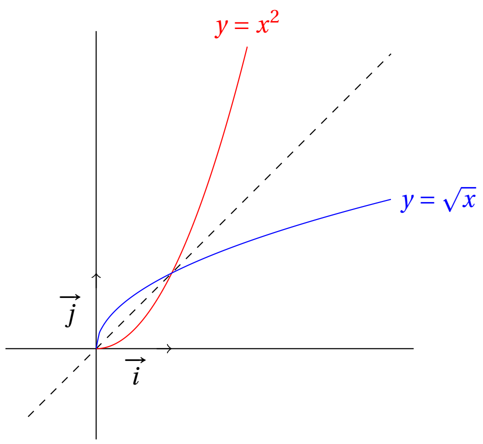
Exemple :

- Soit $f : x \to x^3 + x + 1$.
  1. Démontrer que f réalise une bijection de l'intervalle $[-1, 0]$ sur un intervalle J à déterminer.
  2. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-1, 0]$.

- Soit $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{2\} & \to & \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-2} \end{array} \right.$ Montrer que g est une bijection et déterminer g^{-1}.

Proposition : Graphe de la réciproque

Dans un repère orthonormé, les graphes d'une bijection f et de sa réciproque f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $y = x$ (première bissectrice).



Les courbes représentatives des fonctions $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ et $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

3 Dérivation

Dans cette partie I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et $a \in I$.

3.1 Rappels

Définition

On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$ si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie quand x tend vers a. On appelle alors dérivée de f en a et on note $f'(a)$ cette limite.
On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I, et on définit la fonction dérivée de f, notée f', par :

$$f' : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array} \right. .$$

Exemple : Soit $f : \begin{array}{ccc} [1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x-2)\sqrt{x-1} \end{array}$

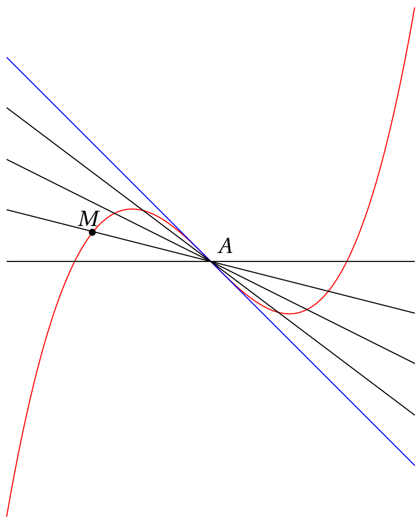
La fonction f est-elle dérivable en 1 ?

Remarque : La définition de la dérivée en un point peut permettre de résoudre certaines formes indéterminées qui se ramènent sous la forme de taux d'accroissement.

Exemple : Calculer $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\ln(1 + \sin(x))}{x} \right)$.

Interprétation géométrique.

Soit $a \in I$ et $x \in I$ tel que $x \neq a$. Le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est le coefficient directeur de la droite passant par $A(a, f(a))$ et $M(x, f(x))$.



Si est f est dérivable en a alors le coefficient directeur de la droite (AM) admet une limite finie quand x tend vers a. Ainsi, la droite (AM) admet une position limite lorsque M tend vers A appelé tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A. Son coefficient directeur est donc $f'(a)$, et son équation cartésienne est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Si le taux d'accroissement de f en a tend vers $\pm\infty$ lorsque x tend vers a, alors f n'est pas dérivable en a et la courbe représentative de f admet en $(a, f(a))$ une tangente verticale.

Proposition

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$ alors f est continue en a.

3.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition : Opérations sur les fonctions dérivables

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $f+g$, (λf), fg sont dérivables sur I et si g ne s'annule pas sur I, $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I avec

$$(f+g)' = f' + g' \qquad (\lambda f)' = \lambda f' \qquad (fg)' = f'g + fg' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Proposition : Dérivée d'une fonction composée

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point.
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I et $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur J telles que pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$. Alors $g \circ f$ est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I,\ (g \circ f)'(x) = f'(x) g'\big(f(x)\big).$$

Remarque :

- ⚠ Attention à ne pas oublier le f' dans la formule de dérivée d'une fonction composée !
- Les fonctions usuelles (exponentielle, logarithme, cosinus, sinus, polynomiale ...) sont en général dérivables sur leur domaine de définition. Voici entre autre deux exceptions :
  - La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ mais n'est pas dérivable en 0 (tangente verticale).
  - La fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en 0.

Méthode

On justifiera généralement en une ligne qu'une fonction est dérivable, comme combinaison linéaire, produit, quotient (attention au dénominateur) et/ou composée de fonctions dérivables.

Théorème : Signe de la dérivée et variations

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.

- f est croissante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$.
- f est constante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$ (resp. $\forall x \in I$, $f'(x) \leq 0$) et si f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points de I, alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I

3.3 Fonction réciproque

Proposition : Dérivation d'une fonction réciproque

Soient $a \in I$, $f : I \to J$ continue, bijective et dérivable en a.

$$f^{-1} : J \to I \text{ est dérivable en } b = f(a) \text{ si, et seulement si} f'(a) \neq 0$$

et dans ce cas :

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}$$

Corollaire

Soit $f : I \to J$ une bijection dérivable. Alors :

$$f^{-1} : J \to I \text{ est dérivable sur } J \text{ si et seulement si } f' \text{ ne s'annule pas sur } I.$$

et dans ce cas :

$$\forall y \in J,\ (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Remarque :

- Cet énoncé sert à calculer la dérivée de fonctions réciproques f^{-1} dont on connait l'existence sans forcément avoir son expression. Si on connaît explicitement f^{-1}, on la dérive directement.
- On peut donner une interprétation géométrique de ce théorème : soit $y \in J$, l'hypothèse f dérivable en $f^{-1}(y)$ et $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$ signifie que la courbe représentative de f admet au point d'abscisse $f^{-1}(y)$ une tangente de pente non nulle. Or, la symétrie par rapport à la première bissectrice transforme cette tangente en la tangente à la courbe représentative de f^{-1} au point d'abscisse y, dont la pente est par définition $(f^{-1})'(y)$. Or, par cette symétrie, une droite de pente $m \neq 0$ est transformée en une droite de pente $\frac{1}{m}$, d'où le résultat.
  Le cas particulier $f'(f^{-1}(y)) = 0$ correspond à une tangente horizontale à la courbe représentative de f au point d'abscisse $f^{-1}(y)$. On obtient alors via la symétrie par rapport à la première bissectrice une tangente verticale à la courbe représentative de f^{-1} au point d'abscisse y, en particulier f^{-1} n'est pas dérivable en y.

3.4 Dérivées d'ordre supérieur

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

- On pose $f^{(0)} = f$.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que la fonction $f^{(k)} : I \to \mathbb{R}$ existe et qu'elle est dérivable sur I. On note alors $f^{(k+1)}$ la fonction dérivée de $f^{(k)}$, c'est à dire : $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, si la fonction $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ existe, on dit alors f est n fois dérivable sur I et la fonction $f^{(n)}$ est appelée dérivée n-ième de f sur I.
On dit que f est indéfiniment dérivable sur I si f est n-fois dérivable sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4 Étude d'une fonction

Méthode : Plan d'étude d'une fonction

Pour étudier une fonction f on procède comme suit :

1. Ensemble de définition.
2. On cherche si on peut restreindre l'étude (par des propriétés de parité ou de périodicité).
3. Dérivabilité de f, calcul de sa dérivée. La rédaction doit être :
   Soit $x \in ....$ $f'(x) = ...$
4. Tableau de signes de f'
5. Limites aux bornes de l'ensemble d'étude et aux points de discontinuité.
6. Tableau de variations de f
7. Représentation graphique de f en faisant apparaitre :
   - les points où la dérivée s'annule pour lesquels la tangente est horizontale ;
   - les tangentes verticales ;
   - ses asymptotes ;

Remarque :

- Lors de l'étude du signe de la dérivée, on cherche une expression factorisée afin de tracer un tableau de signes. Si le signe ne s'obtient pas directement, on doit résoudre une inéquation. La rédaction est alors : Soit $x \in ...$, $f'(x) > 0 \iff ....$
- Les annulations de la dérivée donneront des tangentes horizontales.
- Les limites finies en $\pm\infty$ donneront des asymptotes horizontales.
- Les limites infinies en un point fini donneront des asymptotes verticales.

Méthode

Pour démontrer une inégalité, il peut être utile d'étudier une fonction intermédiaire (posée en mettant tous les termes dans le même membre).

Exemple : Montrer que : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin x \leq x$