Corrigé de la feuille d'exercices 15

1 Ensembles de matrices

Exercice 1. Soient $u, v, s, t \in [\![1, n]\!]$.
Posons $E_{u,s} = (e_{i,j}) = (\delta_{i,u}\delta_{j,s})_{i,j\in[\![1,n]\!]}$, $E_{v,t} = (f_{i,j}) = (\delta_{i,v}\delta_{j,t})_{i,j\in[\![1,n]\!]}$, $E_{u,t} = (n_{i,j}) = (\delta_{i,u}\delta_{j,t})_{i,j\in[\![1,n]\!]}$.
Posons $E_{u,s} \times E_{v,t} = (m_{i,j}))_{i,j\in[\![1,n]\!]}$.
Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

$$\begin{aligned}
m_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} e_{i,k} f_{k,j} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,u}\delta_{k,s}\delta_{k,v}\delta_{j,t} \\
&= \delta_{i,u}\delta_{j,t} \sum_{k=1}^{n} \delta_{k,s}\delta_{k,v} \\
&= \delta_{s,v}\delta_{i,u}\delta_{j,t} \\
&= \delta_{s,v} n_{i,j}
\end{aligned}$$

Ainsi, $E_{u,s}E_{v,t} = \delta_{s,t}E_{u,t}$.

Exercice 2. Soit $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
On a : $X^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}
X^2 - 2X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \quad &\iff \quad \begin{pmatrix} a^2+bc-2a & ab+bd-2b \\ ac+cd-2c & bc+d^2-2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \\
&\iff \quad \begin{cases} a^2+bc-2a = -1 \\ (a+d-2)b = 0 \\ (a+d-2)c = 6 \\ bc+d^2-2d = 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Avec la troisième équation, on en déduit que $a + d - 2 \neq 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
X^2 - 2X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \quad &\iff \quad \begin{cases} a^2+bc-2a = -1 \\ b = 0 \\ (a+d-2)c = 6 \\ cbc+d^2-2d = 3 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} a^2-2a = -1 \\ b = 0 \\ (a+d-2)c = 6 \\ d^2-2d = 3 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} a^2-2a+1 = 0 \\ b = 0 \\ (a+d-2)c = 6 \\ d^2-2d-3 = 0 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ (a+d-2)c = 6 \\ d \in \{-1, 3\} \end{cases} \\
&\iff \quad \left(\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ d = -1 \\ c = -3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ d = 3 \\ c = 3 \end{cases} \right)
\end{aligned}$$

Finalement, l'équation admet deux solutions à savoir : $\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & -1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & -3\end{pmatrix}$

Exercice 3. On pose $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $D=(d_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AD=(u_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $DA=(t_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]$ tels que $i\neq j$.

$$u_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}d_{k,j}$$

Or, D est diagonale donc :

$$u_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}d_{k,j}=a_{i,j}d_{j,j}.$$

De même :

$$t_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}d_{i,k}a_{k,j}=d_{i,i}a_{i,j}.$$

Or, $AD=DA$ donc :

$$a_{i,j}d_{j,j}=a_{i,j}d_{i,i}.$$

D'où : $a_{i,j}(d_{i,i}-d_{j,j})=0$ avec $d_{i,i}-d_{j,j}\neq 0$ car $i\neq j$ et les termes diagonaux de D sont deux à deux distincts.
Ainsi, $a_{i,j}=0$.
On a donc montré que : $\forall i,j\in[\![1,n]\!],\ i\neq j \implies a_{i,j}=0$ donc A est bien diagonale.

Exercice 4. 1. Posons $C_1=\{A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AB=BA\}$.
Soit $A\in C_1$. Alors : $\forall B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AB=BA$.
Exploitons cette égalité pour toutes les matrices élémentaires.
Soit $(r,s)\in[\![1,n]\!]$.
Posons $E_{r,s}=(e_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}=(\delta_{i,r}\delta_{j,s})_{1\leq i,j\leq n}$, $AE_{r,s}=(b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $E_{r,s}A=(c_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$.
Soit $i,j\in[\![1,n]\!]$, on a :

$$b_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}e_{k,j}=\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}\delta_{k,r}\delta_{j,s}=a_{i,r}\delta_{j,s}$$

$$c_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}e_{i,k}a_{k,j}=\sum_{k=1}^{n}\delta_{i,r}\delta_{k,s}a_{k,j}=\delta_{i,r}a_{s,j}$$

Ainsi :

$$\forall i,j\in[\![1,n]\!],\ a_{i,r}\delta_{j,s}=\delta_{i,r}a_{s,j}.$$

Ceci étant vrai pour toutes les matrices élémentaires :

$$\boxed{\forall i,j,r,s\in[\![1,n]\!],\ a_{i,r}\delta_{j,s}=\delta_{i,r}a_{s,j}}$$

Soient $i\in[\![1,n]\!]$, $r\in[\![1,n]\!]$ tel que $r\neq i$, soient $j\in[\![1,n]\!]$, prenons $s=j$, on obtient : $a_{i,r}\times 1=0\times a_{j,j}=0$.
Donc :

$$\forall i,r,\ i\neq r \quad\implies\quad a_{i,r}=0$$

Donc A est diagonale.
Soit $r,s\in[\![1,n]\!]$, en prenant $i=r$ et $j=s$, on obtient : $a_{r,r}=a_{s,s}$.
Ainsi :

$$\forall r,s\in[\![1,n]\!],\ a_{r,r}=a_{s,s}.$$

Donc finalement $A=a_{1,1}I_n$.
Réciproquement, Soit $\lambda\in\mathbb{K}$ et $A=\lambda I_n$. A commute avec tous les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Ainsi $C_1=\{\lambda I_n,\ \lambda\in\mathbb{K}\}$.

2. Posons $C_2=\{A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall B\in\mathcal{D}_n(\mathbb{K}), AB=BA\}$.
Soit $A\in C_2$. Alors : $\forall B\in\mathcal{D}_n(\mathbb{K}),\ AB=BA$.
Exploitons cette égalité pour toutes les matrices élémentaires diagonales.
Soit $r\in[\![1,n]\!]$.
Posons $E_{r,r}=(e_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}=(\delta_{i,r}\delta_{j,r})_{1\leq i,j\leq n}$, $AE_{r,r}=(b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $E_{r,r}A=(c_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$.
Soit $i,j\in[\![1,n]\!]$, on a :

$$b_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}e_{k,j}=\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}\delta_{k,r}\delta_{j,r}=a_{i,r}\delta_{j,r}$$

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} e_{i,k}a_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,r}\delta_{k,r}a_{k,j} = \delta_{i,r}a_{r,j}$$

Ainsi :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ a_{i,r}\delta_{j,r} = \delta_{i,r}a_{r,j}$$

Ceci étant vrai pour toutes les matrices élémentaires diagonales :

$$\boxed{\forall i, j, r \in [\![1, n]\!],\ a_{i,r}\delta_{j,r} = \delta_{i,r}a_{r,j}}$$

Soient $i \in [\![1, n]\!]$, $r \in [\![1, n]\!]$ tel que $r \neq i$, prenons $j = r$, on obtient : $a_{i,r} \times 1 = 0 \times a_{r,r} = 0$.
Donc :

$$\forall i, r,\ i \neq r \quad \Longrightarrow \quad a_{i,r} = 0$$

Donc A est diagonale.
Réciproquement, Soit $A = (a_{i,j}$ une matrice diagonale.
Soit $D = (d_{i,j}) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$. Alors, AD et DA sont diagonales et : le coefficient d'indice (i, i) de AD vaut $a_{i,i}d_{i,i}$ tout comme celui de DA d'indice (i, i).
Ainsi, A commute avec toute matrice diagonale.
Ainsi $C_2 = \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$.

3. Posons $C_3 = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}, AB = BA\}$.
Soit $A \in C_3$. Alors : $\forall B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}),\ AB = BA$.
Exploitons cette égalité pour toutes les matrices élémentaires triangulaires supérieurs.
Soit $r, s \in [\![1, n]\!]$ tels que $r \leq s$.
Posons $E_{r,s} = (e_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = (\delta_{i,r}\delta_{j,s})_{1 \leq i,j \leq n}$, $AE_{r,s} = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $E_{r,s}A = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.
Soit $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}e_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\delta_{k,r}\delta_{j,s} = a_{i,r}\delta_{j,s}$$

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} e_{i,k}a_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,r}\delta_{k,s}a_{k,j} = \delta_{i,r}a_{s,j}$$

Ainsi :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ a_{i,r}\delta_{j,s} = \delta_{i,r}a_{s,j}.$$

Ceci étant vrai pour toutes les matrices élémentaires triangulaires supérieures :

$$\boxed{\forall i, j, r, s \in [\![1, n]\!],\ r \leq s \quad \Longrightarrow \quad a_{i,r}\delta_{j,s} = \delta_{i,r}a_{s,j}}$$

Soient $i \in [\![1, n]\!]$, $r \in [\![1, n]\!]$ tel que $r \neq i$, prenons $s = j = r$, on obtient : $a_{i,r} \times 1 = 0 \times a_{r,r} = 0$.
Donc :

$$\forall i, r,\ i \neq r \quad \Longrightarrow \quad a_{i,r} = 0$$

Donc A est diagonale.

Soit $s \in [\![1, n]\!]$, en prenant $j = s$, $i = r = 1$ on obtient : $a_{1,1}\times = a_{s,s}$.
Ainsi : $\forall s \in [\![1, n]\!],\ a_{1,1} = a_{s,s}$.
Donc finalement $A = a_{1,1}I_n$.
Réciproquement, soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A = \lambda I_n$.
A commute avec tous les éléments de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.
Ainsi $C_3 = \{\lambda I_n,\ \lambda \in \mathbb{K}\}$.

Exercice 5. On remarque tout d'abord que $U^2 = nU$, $U^3 = n^2U$.
Montrons par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ U^k = n^{k-1}U$.

- Pour $k = 0$, on a $U^1 = n^0U$ donc la propriété est vraie pour $k = 0$.
- Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que $U^k = n^{k-1}U$.
On a alors, $U^{k+1} = U^k \times U$. Ainsi, $U^{k+1} = n^{k-1}U \times U = n^{k-1} \times (nU) = n^kU$. Ainsi, la propriété est vraie au rang $k + 1$.
- On a prouvé par récurrence que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^n, U^k = n^{k-1}U.$$

Exercice 6. Posons $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$. Donc : $\forall k \geq 3,\ N^k = 0$.
On a $M = N + I_3$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, $M^n = (I_3 + N)^n$. Or, N et I_3 commutent donc d'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned} M^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_3^{n-k} N^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k \end{aligned}$$

Si $n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} M^n &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} N^k \\ &= \binom{n}{0} I_3 + \binom{n}{1} N + \binom{n}{2} N^2 \end{aligned}$$

Donc : $\forall n \geq 2,\ \ A^n = I_3 + nN + \dfrac{n(n-1)}{2} N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n+2) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Or, pour $n = 0$ $\begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n+2) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 = A^0$

pour $n = 1$, $A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n+2) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^1$.

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n+2) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 7.

1. Soient $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$. Supposons que $aA + bI = a'A + b'I$. On a alors : $(a - a')A = (b' - b)I$. Or, A et I ne sont pas proportionnelles. Ainsi, $a - a' = 0$ et $b - b' = 0$.
2. On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ d'où $A^2 - 5A = -4I_3$.
   Ainsi, $A^2 = 5A - 4I_3$.
3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(p)$: « il existe $(\alpha_p, \beta_p) \in \mathbb{R}^2$ tels que $A^p = \alpha_p A + \beta_p I_3$ ».
   - Pour $p = 0$, $A_0 = I_3 = 0 \times A + 1 \times I_3$. On pose $\alpha_0 = 0$ et $\beta_0 = 1$. Ainsi, $A^0 = \alpha_0 A + \beta_0 I_3$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(p)$ est vraie. Ainsi, il existe $\alpha_p, \beta_p \in \mathbb{R}$ tels que $A^p = \alpha_p A + \beta_p I_3$.
     On a alors :
     $$\begin{aligned} A^{p+1} &= A \times A^p \\ &= A \times (\alpha_p A + \beta_p I_3) \\ &= A(\alpha_p A + \beta_p I_3) \\ &= \alpha_p A^2 + \beta_p A \\ &= \alpha_p (5A - 4I_3) + \beta_p A \\ &= (5\alpha_p + \beta_p)A - 4\alpha_p I_3 \end{aligned}$$
     Posons $\alpha_{p+1} = 5\alpha_p + \beta_p$ et $\beta_{p+1} = -4\alpha_p$.
     Ainsi, $A^{p+1} = \alpha_{p+1} A + \beta_{p+1} I_3$ donc $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.
   - Ainsi, on a prouvé par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $\alpha_p,\ \beta_p \in \mathbb{R}$, tels que $A^p = \alpha_p A + \beta_p I_3$.
     De plus, par unicité (question 1), on a :
     $$\forall p \in \mathbb{N},\ \begin{cases} \alpha_{p+1} = 5\alpha_p + \beta_p \\ \beta_{p+1} = -4\alpha_p \end{cases}$$

Ainsi, on a : $\forall p \in \mathbb{N},\ \alpha_{p+2} = 5\alpha_{p+1} + \beta_{p+1} = 5\alpha_{p+1} - 4\alpha_p$ et $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$.
Donc, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\alpha_p = a + b4^p$.
Or,

$$\left\{\begin{array}{l} a+b=0 \\ a+4b=1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} b=-a \\ a=-\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} b=\dfrac{1}{3} \\ a=-\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Ainsi : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\alpha_p = \dfrac{1}{3}(4^p - 1)$ et $\beta_p = \dfrac{1}{3}(4^{p+1} - 1 - 5 \times 4^p + 5) = \dfrac{4}{3}(-4^{p-1} + 1)$.

4. Soit $p \in \mathbb{N}$, $A^p = \dfrac{1}{3}(4^p - 1)A + \dfrac{4}{3}(1 - 4^{p-1})I_3 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 4^p+2 & 4^p-1 & 4^p-1 \\ 4^p-1 & 4^p+2 & 4^p-1 \\ 4^p-1 & 4^p-1 & 4^p+2 \end{pmatrix}$

Exercice 8. 1. Posons $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $N^2 = 0$ donc : $\forall k \geq 2,\ N^k = 0$.
On a $A = aI_2 + bN$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, donc $A^n = (aI_2 + bN)^n$. Or, bN et aI_2 commutent donc d'après la formule du binôme de Newton :

$$A^n = (aI_2 + bN)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (bN)^k (aI_2)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k} N^k$$

Si $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} b^k a^{n-k} N^k \\ &= a^n I_2 + nba^{n-1} N \\ &= \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De plus, pour $n = 0$, $N^0 = I_2$.
Remarque : on peut aussi intuiter la formule et la prouver par récurrence.

2. On remarque que $A^2 = 2I_2$.
Montrons par récurrence que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $A^{2p} = 2^p I_2$ et $A^{2p+1} = 2^p A$.
   - Pour $p = 0$, $A^0 = I_2$ et $A^1 = A = 2^0 A$. Ainsi, la propriété est vraie pour $p = 0$.
   - Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que $A^{2p} = 2^p I_2$ et $A^{2p+1} = 2^p A$ On a :

$$A^{2(p+1)} = A^{2p+2} = A^{2p+1} \times A = 2^p A \times A = 2^p \times 2I_2 = 2^{p+1} I_2$$

   et

$$A^{2(p+1)+1} = A^{2p+3} = A^{2p+2} \times A = 2^{p+1} I_2 \times A = 2^{p+1} A$$

   - On a donc : $\forall p \in \mathbb{N}$, $A^{2p} = 2^p I_2$ et $A^{2p+1} = 2^p A$.

3. Commençons par calculer $A^2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 & -2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ 2\sin(\theta)\cos(\theta) & \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$.

Montrons par récurrence que : $\forall p \in \mathbb{N},\ A^p = \begin{pmatrix} \cos(p\theta) & -\sin(p\theta) \\ \sin(p\theta) & \cos(p\theta) \end{pmatrix}$.

   - Pour $p = 0$, on a $A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(0) & -\sin(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \end{pmatrix}$.
   - Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que $A^p = \begin{pmatrix} \cos(p\theta) & -\sin(p\theta) \\ \sin(p\theta) & \cos(p\theta) \end{pmatrix}$.
   On a :

$$\begin{aligned} A^{p+1} &= A^p \times A \\ &= \begin{pmatrix} \cos(p\theta)\cos(\theta) - \sin(p\theta)\sin(\theta) & -\sin(\theta)\cos(p\theta) - \sin(p\theta)\cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(p\theta) + \sin(p\theta)\cos(\theta) & \cos(p\theta)\cos(\theta) - \sin(p\theta)\sin(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos((p+1)\theta) & -\sin((p+1)\theta) \\ \sin((p+1)\theta) & \cos((p+1)\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. Ainsi, on a : $\forall p \in \mathbb{N},\ A^p = \begin{pmatrix} \cos(p\theta) & -\sin(p\theta) \\ \sin(p\theta) & \cos(p\theta) \end{pmatrix}$.

Exercice 9. Posons $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N^3 = 0_3.$$

Ainsi : $\forall k \geq 3,\ N^k = 0_3$.
De plus, $M = 3I_3 + N$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $M^n = (3I_3 + N)^n$.
Or, N et $3I_3$ commutent donc d'après le binôme de Newton, on a :

$$\begin{aligned} M^n &= (I_3 + N)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k (3I_3)^{n-k} \end{aligned}$$

Si $n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} M^n &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} 3^{n-k} N^k \\ &= 3^n I_3 + n3^{n-1} N + \frac{n(n-1)}{2} \times 3^{n-2} N^2 \\ &= \begin{pmatrix} 3^n & 2n3^{n-1} & 4n(n-1) \times 3^{n-2} + n3^n \\ 0 & 3^n & 4n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De plus,

- Pour $n = 0$, on a : $\begin{pmatrix} 3^n & 2n3^{n-1} & 4n(n-1) \times 3^{n-2} + n3^n \\ 0 & 3^n & 4n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 = M^0$.
- Pour $n = 1$, on a : $\begin{pmatrix} 3^n & 2n3^{n-1} & 4n(n-1) \times 3^{n-2} + n3^n \\ 0 & 3^n & 4n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = I_3 = M^0$.

  Ainsi, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = \begin{pmatrix} 3^n & 2n3^{n-1} & 4n(n-1) \times 3^{n-2} + n3^n \\ 0 & 3^n & 4n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

Exercice 10. On a $A^2 = 6A$ par le calcul. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = 6^{n-1}A$.

- Pour $n = 1$, on a $A^1 = A$ et $6^0 A = A$. Ainsi, la propriété est vraie pour $n = 1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $A^n = 6^{n-1}A$.

$$A^{n+1} = A^n \times A = 6^{n-1}A^2 = 6^{n-1} \times 6A = 6^n A.$$

- Ainsi, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n 6^{n-1} A = \begin{pmatrix} 6^{n-1} & 2.6^{n-1} & 3.6^{n-1} \\ 6^{n-1} & 2.6^{n-1} & 3.6^{n-1} \\ 6^{n-1} & 2.6^{n-1} & 3.6^{n-1} \end{pmatrix}$.

Exercice 11. Posons $U_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On a : $M_{a,b} = bU_n + (a-b)I_3$.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $M_{a,n}^k = (bU_n + (a-b)I_3)^k$.
Or, d'après l'exercice 5, on sait que : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ U_n^p = n^{p-1}U_n$.

De plus, I_3 et U_n commutent. Ainsi, on a d'après le binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
M_{a,b}^k &= ((a-b)I_3 + bU_n)^k \\
&= \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} ((a-b)I_3)^{k-p} (bU_n)^p \\
&= \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} (a-b)^{k-p} b^p U_n^p \\
&= \left(\sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p} (a-b)^{k-p} b^p U_n^p \right) + (a-b)^k I_n \\
&= \left(\sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p} (a-b)^{k-p} b^p n^{p-1} U_n \right) + (a-b)^k I_n \\
&= \frac{1}{n} U_n \left(\sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p} (a-b)^{k-p} (bn)^p \right) + (a-b)^k I_n \\
&= \frac{1}{n} U_n \left(\sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} (a-b)^{k-p} (bn)^p - (a-b)^k \right) + (a-b)^k I_n = \frac{1}{n} \left((a-b+bn)^k - (a-b)^k \right) U_n + (a-b)^k I_n
\end{aligned}$$

Exercice 12. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, le système équivaut à $X_{n+1} = AX_n$ où $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0$.
Ce résultat se prouve par récurrence.

- Pour $n = 0$. $A^n X_0 = I_n X_0 = X_0$. Le résultat est vérifié pour $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $X_n = A^n X_0$.
  On a $X_{n+1} = AX_n = AA^n X_0 = A^{n+1} X_0$.
- Ainsi, on a prouvé par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0$.

Il nous faut donc calculer A^n.
On a : $A = \frac{1}{2} I_3 + \frac{1}{6} U$ avec $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $A^n = \left(\frac{1}{2} I_3 + \frac{1}{6} U \right)^n$. Or, $\frac{1}{2} I_3$ et $\frac{1}{6} U$ commutent donc d'après le binôme de Newton, on a :

$$\begin{aligned}
A^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{6} U \right)^k \left(\frac{1}{2} I_3 \right)^{n-k} \\
&= \left(\frac{1}{2} \right)^n I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{6} \right)^k \left(\frac{1}{2} \right)^{n-k} U^k
\end{aligned}$$

Or, d'après l'exercice 5, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $U^k = 3^{k-1} U$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
A^n &= \frac{1}{2^n} I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{6^k} \frac{1}{2^{n-k}} U^k \\
&= \frac{1}{2^n} I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{6^k} \frac{1}{2^{n-k}} 3^{k-1} U \\
&= \frac{1}{2^n} I_3 + \frac{1}{3 \times 2^n} U \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{6^k} 3^k \times 2^k \right) \\
&= \frac{1}{3 \times 2^n} U \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \right) + \frac{1}{2^n} I_3 \\
&= \frac{1}{3 \times 2^n} U \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - 1 \right) + \frac{1}{2^n} I_3 \\
&= \frac{1}{3 \times 2^n} U \left(2^n - 1\right) + \frac{1}{2^n} I_3 \\
&= \frac{1}{3} U + \frac{1}{2^n} (I_3 - \frac{1}{3} U) \\
&= \begin{pmatrix}
\frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) & \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \\
\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) & \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \\
\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) & \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) & \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}
\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Or, $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.
On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
\left[\frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\right] x_0 + \left[\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\right] y_0 + \left[\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\right] z_0 \\
\left[\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\right] x_0 + \left[\frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\right] y_0 + \left[\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\right] z_0 \\
\left[\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\right] x_0 + \left[\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\right] y_0 + \left[\frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\right] z_0
\end{pmatrix}$$

Ainsi, $\lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} y_n = \lim_{n \to +\infty} z_n = \frac{1}{3}(x_0 + y_0 + z_0)$.

2 Opérations élémentaires sur une matrice

Exercice 13. Commençons par réaliser des opérations sur les lignes de A et appliquons l'algorithme de Gauss-Jordan :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & -2 & -2 \\ 2 & -6 & -6 & -4 & -2 \\ -3 & 12 & 12 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{matrix}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow \tfrac{1}{2}L_2$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + 4L_2 \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{matrix}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow \tfrac{1}{3}L_3$$

$$\underset{L}{\sim} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3 \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3 \end{matrix}$$

On a montré que $A \underset{L}{\sim} A'$.
Réalisons désormais les opérations suivantes sur les colonnes de la matrice A' :

$$A' \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} C_4 \leftarrow C_4 + 2C_1 \\ C_5 \leftarrow C_5 + C_1 - C_2 + C_3 \end{matrix}$$

Ainsi, on peut bien passer de A à J en réalisant des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes de A.

3 Matrices carrées inversibles

Exercice 14. 1. On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. D'où $A^2 - 5A = -4I_3$ donc $A^2 = 5A - 4I_3$.
Ainsi, $a = 5$ et $b = -4$ conviennent.

2. On sait que $A^2 - 5A = -4I_3$ donc $A(A - 5I_3) = -4I_3$ d'où $A \times \left(-\frac{1}{4}(A - 5I_3)\right) = I_3$. De même, $(A - 5I_3)A = -4I_3$ d'où $\left(-\frac{1}{4}(A - 5I_3)\right) \times A = I_3$. Donc A est inversible et on a $A^{-1} = -\frac{1}{4}(A - 5I_3) = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$.

Exercice 15. Soit $n \geq 2$.
Posons $U_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On a $A + I_n = U_n$. D'après l'exercice 5, on a : $(A + I_n)^2 = U_n^2 = nU_n$.
Ainsi, $(A + I_n)^2 = n(A + I_n)$. On en déduit que $A^2 + 2A + I_n = n(A + I_n)$. D'où $A^2 + (2 - n)A = (n - 1)I_n$.
Ainsi, $\frac{1}{n-1}(A + (2 - n)I_n)A = I_n$ $(n - 1 \neq 0)$.
Donc, A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{n-1}(A + (2 - n)I_n)$.

Exercice 16. 1. Soient $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\lambda A + \mu B) &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{i,i} + \mu b_{i,i}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda a_{i,i} + \sum_{i=1}^{n} \mu b_{i,i} \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \mu \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} \\
&= \lambda \mathrm{tr}(A) + \mu \mathrm{tr}(B)
\end{aligned}$$

2. Soient $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   Posons $AB = (c_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $BA = (d_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{k,i} a_{i,k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{k,i} a_{i,k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} d_{k,k} \\
&= \mathrm{tr}(BA)
\end{aligned}$$

3. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(PAP^{-1}) &= \mathrm{tr}(P(AP^{-1})) \\
&= \mathrm{tr}(AP^{-1}P) \quad \text{d'après le 2} \\
&= \mathrm{tr}(A)
\end{aligned}$$

Exercice 17. On a A, $B \in \mathcal{T}_n^s(\mathbb{R})$.
Montrons que A et B sont inversibles.
D'après le cours, une matrice triangulaire supérieure est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$.
$a_{i,i} = t^{i-i}\binom{i}{i} = 1$ et $b_{i,i} = (-1)^{i+i} t^{i-i}\binom{i}{i} = (-1)^{2i} = 1$.
Donc $A, B \in \mathcal{T}_n^s(\mathbb{R})$ et leurs coefficients diagonaux sont tous non nuls donc $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$ et $AB \in \mathcal{T}_n^s(\mathbb{R})$.
Montrons que $AB = I_n$.
Posons $AB = (c_{i,j}) \in \mathcal{T}_n^s(\mathbb{R})$.
Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$.

- Si $i = j$, $c_{i,i} = a_{i,i} b_{i,i}$ car $A, B \in \mathcal{T}_n^s(\mathbb{R})$ donc $c_{i,i} = 1$.
- Si $i > j$, comme $AB \in \mathcal{T}_n^s(\mathbb{R})$, on a $c_{i,j} = 0$.
- Si $i < j$,

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{i,k} b_{k,j} + \sum_{k=i}^{j} a_{i,k} b_{k,j} + \sum_{k=j+1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}.$$

  Si $k \in [\![1, i-1]\!]$, $a_{i,k} = 0$.
  Si $k \in [\![j+1, n]\!]$, $b_{k,j} = 0$.

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
c_{i,j} &= \sum_{k=i}^{j} a_{i,k} b_{k,j} \\
&= \sum_{k=i}^{j} t^{k-i} \binom{k}{i} (-1)^{k+j} t^{j-k} \binom{j}{k} \\
&= \sum_{k=i}^{j} t^{j-i} (-1)^{k+j} \binom{k}{i} \binom{j}{k} \\
&= t^{j-i} (-1)^{j} \sum_{k=i}^{j} (-1)^{k} \binom{k}{i} \binom{j}{k}
\end{aligned}$$

Or, on sait que

$$\begin{aligned}
\binom{k}{i} \binom{j}{k} &= \frac{k!}{i!(k-i)!} \times \frac{j!}{(j-k)!k!} \\
&= \frac{j!}{i!(k-i)!(j-k)!} \\
&= \frac{j!}{i!(k-i)!(j-i-(k-i))!} \\
&= \frac{j!(j-i)!}{(j-i)!i!(k-i)!(j-i-(k-i))!} \\
&= \frac{j!}{(j-i)!i!} \times \frac{(j-i)!}{(k-i)!(j-i-(k-i))!} \\
&= \binom{j}{i} \times \binom{j-i}{k-i}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
c_{i,j} &= t^{j-i} (-1)^{j} \sum_{k=i}^{j} (-1)^{k} \binom{j}{i} \binom{j-i}{k-i} = t^{j-i} (-1)^{j} \binom{j}{i} \sum_{k=i}^{j} \binom{j-i}{k-i} (-1)^{k} \\
&= t^{j-i} (-1)^{j} \binom{j}{i} \sum_{p=0}^{j-i} \binom{j-i}{p} (-1)^{p+i} = t^{j-i} (-1)^{i+j} \binom{j}{i} \sum_{p=0}^{j-i} \binom{j-i}{p} (-1)^{p}
\end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\sum_{p=0}^{j-i} \binom{j-i}{p} (-1)^{p} = (-1+1)^{j-i} = 0^{j-i} = 0$ car $j > i$.
Donc $c_{i,j} = 0$ si $i < j$.
Finalement, on a montré que pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, $c_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$ donc $AB = I_n$ et A et B sont inverses l'une de l'autre.

Exercice 18. • Méthode 1 :

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) & \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) && L_2 \leftrightarrow L_1\\
& \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 5 & -4 & 1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1\end{array}\right) && \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1\\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1\end{array}\\
& \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1\end{array}\right) && L_2 \leftarrow \tfrac{1}{5}L_2\\
& \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1\end{array}\right) && L_1 \leftarrow L_1 + L_2\\
& \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1\end{array}\right) && L_3 \leftarrow -L_3\\
& \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & 1 & -\frac{4}{5}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1\end{array}\right) && \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{5}L_3\\ L_2 \leftarrow L_2 + \frac{4}{5}L_3\end{array}
\end{aligned}$$

Ainsi, $A \underset{L}{\sim} I_3$ donc A est inversible et on a $A^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 1 & 5 & -4\\ 0 & 10 & -5\end{pmatrix}$.

- Méthode 2 :

  Soit $X = \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned}
AX = Y \quad & \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = y_1\\ x_1 - x_2 + x_3 = y_2\\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = y_3\end{array}\right.\\
& \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 = y_2 \qquad L_2 \leftrightarrow L_1\\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = y_1\\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = y_3\end{array}\right.\\
& \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 = y_2\\ 5x_2 - 4x_3 = y_1 - 3y_2 \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1\\ -x_3 = -2y_2 + y_3 \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1\end{array}\right.\\
& \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 = y_2\\ x_2 - \dfrac{4}{5}x_3 = \dfrac{1}{5}y_1 - \dfrac{3}{5}y_2 \qquad L_2 \leftarrow \dfrac{1}{5}L_2\\ -x_3 = -2y_2 + y_3\end{array}\right.\\
& \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 + \dfrac{1}{5}x_3 = \dfrac{1}{5}y_1 + \dfrac{2}{5}y_2 L_1 \leftarrow L_1 + L_2\\ x_2 - \dfrac{4}{5}x_3 = \dfrac{1}{5}y_1 - \dfrac{3}{5}y_2\\ -x_3 = -2y_2 + y_3\end{array}\right.\\
& \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 + \dfrac{1}{5}x_3 = \dfrac{1}{5}y_1 + \dfrac{2}{5}y_2\\ x_2 - \dfrac{4}{5}x_3 = \dfrac{1}{5}y_1 - \dfrac{3}{5}y_2\\ x_3 = 2y_2 - y_3 \qquad L_3 \leftarrow -L_3\end{array}\right.\\
& \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{1}{5}y_1 + \dfrac{1}{5}y_3 L_1 \leftarrow L_1 - \dfrac{1}{5}L_3\\ x_2 = \dfrac{1}{5}y_1 + y_2 - \dfrac{4}{5}y_3 \qquad L_2 \leftarrow L_2 + \dfrac{4}{5}L_3\\ x_3 = 2y_2 - y_3\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Ainsi, le système admet une unique solution donc A est inversible et on a $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 0 & 10 & -5 \end{pmatrix}$.

Exercice 19. •

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow -L_2$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_3$$

Ainsi, $A \underset{L}{\sim} I_3$ donc A est inversible et on a $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

•

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftrightarrow -L_1$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow -L_2$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array}$$

Ainsi, $B \underset{L}{\sim} I_3$ donc B est inversible et on a $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

-

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1 \end{array}$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad L_2 \leftrightarrow L_4$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -5 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow -L_2$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 11 & 1 & 5 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{array}$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 11 & 1 & 5 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow \tfrac{1}{3} L_3$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3} & 1 & -\frac{11}{3} & -\frac{16}{3} \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 4L_3 \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - 11L_3 \end{array}$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{11}{2} & 8 \end{array}\right) \quad L_4 \leftarrow -\tfrac{3}{2} L_4$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{11}{2} & 8 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{2}{3} L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3} L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{3} L_4 \end{array}$$

Ainsi, $C \underset{L}{\sim} I_4$ donc C est inversible et on a $C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & -5 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -2 \\ \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{11}{2} & 8 \end{pmatrix}$.

Exercice 20. 1. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 17 \\ 7 & -5 & 11 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 35 & -16 & 44 \\ 20 & -13 & 12 \\ -4 & 8 & -9 \end{pmatrix}$$

On obtient alors : $A^3 - 4A^2 + 8A = 15I_3$.
Ainsi : $A(A^2 - 4A + 8I_3) = 15I_3$ donc $A \times \dfrac{1}{15}(A^2 - 4A + 8I_3) = I_3$.
Donc A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{15}(A^2 - 4A + 8I_3) = \dfrac{1}{15} \begin{pmatrix} 9 & -8 & 5 \\ 3 & -1 & -5 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$
\begin{aligned}
AX = Y \quad & \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = y_1 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = y_2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = y_3 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} x_1 + x_2 + 4x_3 = y_2 & \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = y_1 & \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = y_3 & \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} x_1 + x_2 + 4x_3 = y_2 & \\ -5x_3 = y_1 - 2y_2 & \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -3x_2 - 3x_3 = y_3 - y_2 & \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} x_1 + x_2 + 4x_3 = y_2 & \\ -3x_2 - 3x_3 = y_3 - y_2 & \quad L_3 \leftrightarrow L_2 \\ -5x_3 = y_1 - 2y_2 & \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} x_1 + x_2 + 4x_3 = y_2 & \\ x_2 + x_3 = -\frac{1}{3}(y_3 - y_2) & \quad L_2 \leftrightarrow -\frac{1}{3}L_2 \\ -5x_3 = y_1 - 2y_2 & \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} x_1 + 3x_3 = \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3 & \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ x_2 + x_3 = \frac{1}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3 & \\ -5x_3 = y_1 - 2y_2 & \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} x_1 + 3x_3 = \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3 & \\ x_2 + x_3 = \frac{1}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3 & \\ x_3 = -\frac{1}{5}(y_1 - 2y_2) & \quad L_3 \leftarrow -\frac{1}{5}L_3 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} x_1 = \frac{3}{5}y_1 - \frac{8}{15}y_2 + \frac{1}{3}y_3 & \quad L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3 \\ x_2 = \frac{1}{5}y_1 - \frac{1}{15}y_2 - \frac{1}{3}y_3 & \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ x_3 = -\frac{1}{5}y_1 + \frac{2}{5}y_2) & \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

Ainsi, pour tout $Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, le système $AX = Y$ admet une unique solution donc la matrice A est inversible.
De plus, $A^{-1} = \dfrac{1}{15} \begin{pmatrix} 9 & -8 & 5 \\ 3 & -1 & -5 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

3.

$$
\begin{aligned}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad & \underset{L}{\sim} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \\
& \underset{L}{\sim} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\
& \underset{L}{\sim} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array} \right) \quad L_3 \leftarrow -\frac{1}{3}L_3 \\
& \underset{L}{\sim} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \quad L_2 \leftrightarrow L_3 \\
& \underset{L}{\sim} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\
& \underset{L}{\sim} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{array} \right) \quad L_3 \leftarrow -\frac{1}{5}L_3 \\
& \underset{L}{\sim} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{8}{15} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{15} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}
\end{aligned}
$$

Ainsi, $A \underset{L}{\sim} I_3$ donc A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{15}\begin{pmatrix} 9 & -8 & 5 \\ 3 & -1 & -5 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 21. 1.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad L_3 \leftrightarrow L_2$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad L_2 \leftrightarrow -L_2$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{array}$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \quad L_3 \leftrightarrow -L_3$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array}$$

Ainsi, $P \underset{L}{\sim} I_3$ donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = P^{-1}(AP) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Ainsi, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

3. On a $A = PDP^{-1}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$. Ce résultat se prouve par récurrence :
   - Pour $n = 1$, on a $A^1 = A = PDP^{-1} = PD^1P^{-1}$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $A^n = PD^nP^{-1}$.
     On a : $A^{n+1} = A^nA = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PA^{n+1}P^{-1}$.
   - Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = PD^nP^{-1}$.

   Or, $D^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -(-1)^n & -(-1)^n & 2(-1)^n \end{pmatrix}$ d'où $A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -(-1)^n & 1-(-1)^n & -1+2(-1)^n \\ -(-1)^n & -(-1)^n & 2(-1)^n \end{pmatrix}$

Exercice 22. 1.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}$$

Ainsi, $P \underset{L}{\sim} I_3$ donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. On a $AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ donc $D = P^{-1}(AP) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
   Ainsi, D est diagonale. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

3. On a $A = PDP^{-1}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, $A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$.
   Or, $D^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -(-1)^n & (-1)^n \\ 1^n & 2 & -1 \\ -3^n & -3^n & 3^n \end{pmatrix}$ d'où $A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 3^n & 3^n - (-1)^n & (-1)^n - 3^n \\ 1 - 3^n & 2 - 3^n & 3^n - 1 \\ 1 - 3^n & 2 - 3^n - (-1)^n & (-1)^n - 1 + 3^n \end{pmatrix}$

Exercice 23. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$ tel que $AX = 0$. Les x_i sont non tous nul, donc il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_i| > 0$.
Notons k l'entier de $[\![1, n]\!]$ tel que $|x_k|$ soit maximal (on a donc $|x_k| > 0$).
Comme $AX = 0$, on a $\sum_{j=1}^{n} a_{k,j}x_j = 0$ (k-ème coordonnée du produit AX) donc $-x_ka_{k,k} = \sum_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{k\}} x_ja_{k,j}$.
Ainsi,

$$\begin{aligned} |x_ka_{k,k}| &= |\sum_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{k\}} x_ja_{k,j}| \\ &\leq \sum_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{k\}} |x_ja_{k,j}| \\ &\leq \sum_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{k\}} |x_j||a_{k,j}| \\ &\leq |x_k| \sum_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{k\}} |a_{k,j}| \quad \text{car } |x_k| \text{ est maximal} \\ &< |x_k||a_{k,k}| \quad \text{car } |x_k| > 0 \text{ et } \sum_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{k\}} |a_{k,j}| < |a_{k,k}| \\ &< |x_ka_{k,k}| \end{aligned}$$

Absurde !
Ainsi, l'équation $AX = 0$ n'admet que la solution nulle donc A est inversible.

4 Transposition et matrices Symétriques

Exercice 24. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Raisonnons par analyse synthèse.
Analyse : Supposons qu'il existe $(S, A) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{AS}_n(\mathbb{K})$ tel que $M = S + A$.
On alors : $\begin{cases} M = S + A \\ {}^tM = {}^tS + {}^tA = S - A \end{cases}$ Ainsi, en sommant et soustrayant ces deux égalités, on obtient : $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$.
Synthèse : Posons $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$.
On a ${}^tS = \frac{1}{2}({}^tM + M) = S$ et ${}^tA = \frac{1}{2}({}^tM - M) = -A$. Ainsi, S est symétrique et A est antisymétrique. De plus, $M = S + A$.
Ainsi, M se décompose de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
Finalement, on a prouvé que toute matrice symétrique se décompose en la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Exercice 25. 1. Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Supposons X symétrique, on a alors ${}^tX = X$.
D'où :

$${}^tf(X) = {}^t({}^tAX) + {}^t(XA) = {}^tX^t({}^tA) + {}^tA^tX = {}^tXA + {}^tA^tX = XA + {}^tAX = f(X)$$

Donc $f(X)$ est symétrique.

2. Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Supposons X antisymétrique, on a alors ${}^tX = -X$.
D'où :
$$ {}^tf(X) = {}^t({}^tAX) + {}^t(XA) = {}^tX{}^t({}^tA) + {}^tA{}^tX = {}^tXA + {}^tA{}^tX = -XA - {}^tAX = -f(X) $$
Donc $f(X)$ est antisymétrique.

Exercice 26. 1. Notons $d_1, \dots, d_n$ les coefficients diagonaux de D.
Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On a alors $DX = \begin{pmatrix} d_1x_1 \\ \vdots \\ d_nx_n \end{pmatrix}$ puis ${}^tXDX = \displaystyle\sum_{k=1}^n d_kx_k^2$ (en identifiant une matrice $1,1$ et le nombre réel associé).

2. Une condition nécessaire et suffisante pour que D soit positive est : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $d_i \geq 0$.

- Supposons que : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $d_i \geq 0$.
Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a ${}^tXDX = d_1x_1^2 + \cdots + \dots d_nx_n^2 \geq 0$ (comme somme de réels positifs) donc D est positive.
- Montrons désormais que si D est positive alors : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $d_i \geq 0$.
Soit $i \in [\![1,n]\!]$.
Soit X le vecteur colonne dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf la i-ème, qui vaut 1. D'après la question 1, on a ${}^tXDX = d_i \geq 0$. Ainsi : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $d_i \geq 0$.

Finalement, D est positive si et seulement si : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $d_i \geq 0$.

Exercice 27. Posons $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et ${}^tA = (a'_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$
Par hypothèse, on a : $\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ i > j \Longrightarrow a_{i,j} = 0$.
Montrons par double implication que :
$$ {}^tAA = A{}^tA \quad \Longleftrightarrow \quad A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}). $$

- Supposons que ${}^tAA = A{}^tA$.
Posons ${}^tAA = (c_{i,j})$ et $A{}^tA = (d_{i,j})$.
Soient $i,j \in [\![1,n]\!]$,
$$ c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a'_{i,k}a_{k,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i}a_{k,j} $$
$$ d_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}a'_{k,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}a_{j,k} $$
Ainsi, on a :
$$ \sum_{k=1}^n a_{k,i}a_{k,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}a_{j,k} $$
Or : $\forall k > i,\ a_{k,i} = 0$ et $\forall k > j,\ a_{k,j} = 0$. Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=1}^n a_{k,i}a_{k,j} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} a_{k,i}a_{k,j}$.
De même : $\forall k < i,\ a_{i,k} = 0$ et $\forall k < j,\ a_{j,k} = 0$. Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=1}^n a_{i,k}a_{j,k} = \sum_{k=\max(i,j)}^n a_{i,k}a_{j,k}$.
Finalement, on a :
$$ \sum_{k=1}^{\min(i,j)} a_{k,i}a_{k,j} = \sum_{k=\max(i,j)}^n a_{i,k}a_{j,k} $$
D'où :
$$ \boxed{\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ i \leq j \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^i a_{k,i}a_{k,j} = \sum_{k=j}^n a_{i,k}a_{j,k} \qquad (*)} $$

<u>Réflexion :</u>

- Posons $i = j = n$, il vient : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{k,n}^2 = a_{n,n}^2$. Ainsi : $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $a_{k,n} = 0$.
- Posons $i = j = n-1$, il vient : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_{k,n-1}^2 = \sum_{k=n-1} a_{n-1,k}^2 = a_{n-1,n-1}^2 + a_{n-1,n}^2 = a_{n-1,n-1}^2$.
  Ainsi, pour tout $k \in [\![1, n-2]\!]$, $a_{k,n-1} = 0$.
- Ainsi de suite.

Rédaction :
Pour tout $l \in [\![1, n]\!]$, on note :

$$\mathcal{P}(l) : \ \ll \forall k \in [\![1, l-1]\!],\ a_{k,l} = 0 \gg$$

On prouve ceci par récurrence forte descendante sur l.

- Pour $l = n$, prenons $i = j = n$ dans $(*)$, on obtient : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{k,n}^2 = a_{n,n}^2$. Ainsi, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $a_{k,n} = 0$.
- Soit $l \in [\![2, n]\!]$, supposons que pour tout $p \in [\![l, n]\!]$, $\mathcal{P}(p)$ est vraie.
  Ainsi : $\forall p \in [\![l, n]\!]$, $\forall k \in [\![1, p-1]\!]$, $a_{k,p} = 0$.
  En prenant $i = j = l-1$ dans $(*)$, on obtient :

  $$\sum_{k=1}^{l-1} a_{k,l-1}^2 = \sum_{k=l-1}^{n} a_{l-1,k}^2$$

  Or, par hypothèse de récurrence, on a :

  $$\sum_{k=l-1}^{n} a_{l-1,k}^2 = a_{l-1,l-1}^2 + \sum_{k=l}^{n} a_{l-1,k}^2 = a_{l-1,l-1}^2$$

  D'où :

  $$\sum_{k=1}^{l-1} a_{k,l-1}^2 = a_{l-1,l-1}^2$$

  Ainsi :

  $$\forall k \in [\![1, l-2]\!],\ a_{k,l-1} = 0$$

- Ainsi, on a prouvé par récurrence que :

  $$\forall l \in [\![1, n]\!],\ \forall k \in [\![1, l-1]\!],\ a_{k,l} = 0.$$

  Autrement dit :

  $$\forall k, l \in [\![1, n]\!], k < l \quad \Longrightarrow \quad a_{k,l} = 0.$$

Donc $A \in \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$. Or, on savait déjà que $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Donc :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad i < j \quad \Longrightarrow \quad a_{i,j} = 0.$$

On a donc :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad i \neq j \quad \Longrightarrow \quad a_{i,j} = 0.$$

Ainsi, A est diagonale.

- Supposons A est diagonale. On a alors que ${}^tA = A$. Ainsi : ${}^tAA = A^2 = A{}^tA$.