Devoir n° 1

EXERCICE 1

P	Q	R	Q et R	P ou (Q et R)	P ou Q	P ou R	(P ou Q) et (P ou R)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Par suite P ou (Q et R) $\Leftrightarrow$ (P ou Q) et (P ou R)

EXERCICE 2

1) Soit $z \in \mathbb{C}$.

$-z^2+2z-2=0 \Leftrightarrow (z-1)^2+1=0$

$\Leftrightarrow (z-1)^2-i^2=0$

$\Leftrightarrow (z=+1+i)$ ou $(z=+1-i)$

2) Soit M d'affixe $z \in \mathbb{C}$.
Soit M' d'affixe $-z^2+2z$.
on a alors

M' est d'affixe 2 $\Leftrightarrow -z^2+2z=2$

$\Leftrightarrow -z^2+2z-2=0$

D'après ① $-z^2+2z-2=0 \Leftrightarrow z=1+i$ ou $z=1-i$

Donc :
M' est d'affixe 2 $\Leftrightarrow z=1+i$ ou $z=1-i$

3) Montrons que : M est le milieu de [NM'].
Le milieu de [NM'] a pour affixe $\frac{z_N+z'}{2}$

or : $\frac{z_N+z'}{2} = \frac{+z^2+(-z^2+2z)}{2} = z$.

Donc l'affixe du milieu de [NM'] est celle de M.
D'où : $M = m[NM']$

EXERCICE 2 (Suite)

4) a) M est situé sur le cercle unité de centre O

donc $|z| = 1$.

$z_M = z^2$.

or : θ est un argument de z

donc : $z = |z| e^{i\theta}$

Donc : $z_M = (|z| e^{i\theta})^2 = |z|^2 (e^{i\theta})^2$

$= |z|^2 e^{2i\theta}$

or : $|z|^2 > 0$ donc : $|z|^2 e^{2i\theta}$ est la forme exponentielle de z_M.

b) Soit A le point d'affixe 1.

Par définition de θ, $(\vec{OA}, \vec{OM}) = \theta$

D'après 4)a), $(\vec{OA}, \vec{OM'}) = 2\theta$

Donc : $(\vec{OM}, \vec{OM'}) = \theta$

De plus $OM = OM' = OA = 1$

Donc : les triangles AOM et MOM' sont semblables.

Déf : $NM = MA$

or : $M = m[NM']$

donc : $NM = MM'$

Ainsi, $MA = MM'$ donc : AMM' est isocèle en M.

Problème 1

1) a) on a (E_2) : $z^2 + z + 1 = 0$

on reconnait une équation du second degré

Soit $\Delta = 1^2 - 4 = -3 = (\sqrt{3}i)^2 < 0$

Donc

$\forall z \in \mathbb{C}$, $(E_2) \Leftrightarrow \left(z = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)$ ou $\left(z = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\right)$

b) on a $\begin{cases} \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \\ \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ et $\begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \\ \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Problème 1 (Suite)

1) b) (Suite)

donc : $\begin{cases} e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ e^{-\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

D'où :

$\forall z \in \mathbb{C}, (E_2) \Leftrightarrow \left(z = e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)$ ou $\left(z = e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right)$

2) a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme expression polynomiale et

$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = 3t^2 + 1$.

or : $\forall t \in \mathbb{R}, t^2 \geq 0$ donc : $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) \geq 0$

Valeur de t	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Signe de $f'(t)$	$+$
variations de f	$-\infty \nearrow +\infty$

2) b) $f(-1) = -1 < 0$ et $f(-\frac{1}{2}) = \frac{-1}{8} - \frac{1}{2} + 1$

$= \frac{3}{8} > 0$

De plus f est continue sur $[-1, -\frac{1}{2}]$ donc :

(théorème des valeurs intermédiaires)

$\exists \alpha \in]-1, -\frac{1}{2}[, f(\alpha) = 0$

De plus f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

donc : $\forall x \in \mathbb{R}, (x \neq \alpha) \Rightarrow (f(x) \neq f(\alpha) = 0)$

d'où : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha\}, f(x) \neq 0$

Par suite : α est unique.

c) En développant $(X - \alpha)(X - z_1)(X - z_2)$

on a

$P(X) = X^3 - (\alpha + z_1 + z_2)X^2 + (\alpha z_1 + \alpha z_2 + z_1 z_2)X - \alpha z_1 z_2$

or : $P(X) = X^3 + X + 1$

donc : (identification) $\begin{cases} -\alpha + z_1 + z_2 = 0 \\ -\alpha z_1 z_2 = 1 \end{cases}$

Problème 1 (Suite 2)

2) c) (Suite)

De plus $R \neq 0$ donc : $\begin{cases} z_1 + z_2 = -R \\ z_1 z_2 = \frac{-1}{R} \end{cases}$

d) Montrons que : $|z_1 + z_2| \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$

on a $|z_1 + z_2| = |-R| = -R$ car $R \leq 0$

or : $-1 < R < -\frac{1}{2}$ donc : $\frac{1}{2} < |z_1 + z_2| < 1$

e) On a $z_1 z_2 = \frac{-1}{R}$

donc : $|z_1 z_2| = \left|\frac{-1}{R}\right| = \frac{1}{-R}$ car $R \leq 0$

or : $-1 < R < \frac{-1}{2} < 0$

donc : (décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_-^*$)

$-1 > \frac{1}{R} > -2$ donc : $1 < \frac{-1}{R} < 2$

Par suite : $\boxed{1 < |z_1 z_2| < 2}$

f) Montrons que : $|z_1| \geq 2 \Rightarrow |z_1| < 1 + |z_2|$

Supposons que : $|z_1| \geq 2$

on a $|z_1| = |z_1 + z_2 - z_2| \leq |z_1 + z_2| + |z_2|$
$< 1 + |z_2|$

Montrons que : $|z_1| < 2$

Par l'absurde, si $|z_1| \geq 2$ alors

$2 \leq |z_1| < 1 + |z_2|$

donc : $|z_2| > 1$ et donc $|z_1 z_2| \geq 2$

ceci est en contradiction avec 2) d).

Par suite : $|z_1| < 2$

g) Soit $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = 0$

cas n° 1 : $z \in \mathbb{R}$

donc : $z \in \mathbb{R}$ et $-1 < R < -\frac{1}{2}$ donc : $|z| < 2$

cas n° 2 : $z \notin \mathbb{R}$

donc : $(z = z_1)$ ou $(z = z_2)$

Problème 1 (Suite 3)

2) g) (Suite)

or P est à coefficients réels.

donc : $z_1 = \overline{z_2}$

Par suite $|z_1| = |z_2| < 2$ D'après 2) f)

3) a) Soit $n \geq 2$. Soit $\varphi_n : \begin{cases} [2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto t^n - t - 1 \end{cases}$

φ_n dérivable sur $[2, +\infty[$ et

$\forall t \in [2, +\infty[,\ \varphi_n'(t) = nt^{n-1} - 1$

De plus $\forall t \geq 2, (\varphi_n'(t) \geq 0) \Leftrightarrow (nt^{n-1} \geq 1)$

$\Leftrightarrow \left(t^{n-1} \geq \frac{1}{n} > 0\right)$

$\Leftrightarrow t \geq \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$

or $n \geq 2$ donc : $2^{n-1} \geq \frac{1}{n}$ donc : $2 \geq \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}$

Donc : $\forall t \geq 2,\ \varphi_n'(t) \geq 0$.

valeurs de t	2 $+\infty$
signe de $\varphi_n'(t)$	$+$
variations de φ_n	$2^n - 3 \nearrow +\infty$

$\varphi_n(2) = 2^n - 2 - 1 = 2^n - 3$

b) Montrons que :

$\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \geq 2, (z^n + z + 1 = 0) \Rightarrow (|z| < 2)$

Soit $z \in \mathbb{C}$ Soit $n \geq 2$. Supposons que : $z^n + z + 1 = 0$

on a $|z^n| = |z|^n = |-(z+1)|$

$\leq |z| + |1|$

Supposons que : $|z| \geq 2$

Donc : φ_n est bien définie en $|z|$

et $\varphi_n(|z|) = |z|^n - |z| - 1$

Donc : $\varphi_n(|z|) \leq 0$

or : $\begin{cases} \varphi_n(|z|) \geq 2^n - 3 = \varphi_n(2) & (3a) \\ n \geq 2 \end{cases}$

Problème 1 (Suite 4)

3) b) (Suite)

donc : $2^n - 3 > 0$ et donc : $\varphi_n(|z|) > 0$

Par suite : $|z| < 2$

c) on a $|0| < 2$ et $0^n + 0 + 1 = 1 \neq 0$

donc : $\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \geq 2, (|z| < 2) \Rightarrow (z^n + z + 1 = 0)$ est une affirmation fausse.