Feuille d'exercices 16 : Géométrie plane

1 Triangle, droites, cerlces

Exercice 1. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que le nombre complexe $\dfrac{2iz-1}{z+1}$ ait un module égal à 1.

Exercice 2. Soient a, b et c trois nombres complexes deux à deux distincts.
1. (a) Donner une condition nécessaire et suffisante les points d'affixes a, b et c forment-ils un triangle équilatéra.
   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante les points d'affixes a, b et c forment-ils un triangle rectangle en A ?
2. Déterminer les nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que :
   (a) 1, z et z^2 forment un triangle rectangle.
   (b) z, $\dfrac{1}{z}$ et $-i$ sont alignés.
   (c) z, z^2 et z^4 sont alignés.

Exercice 3. Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que :
1. $|z+i| = |z-1|$
2. z, $\dfrac{1}{z}$ et $1+z$ aient le même module.
3. $\dfrac{z+1}{z-1} \in \mathbb{R}$

Exercice 4. Montrer que par trois points non alignés du plan il passe un unique cercle. Construire ce cercle à la règle et au compas.

Exercice 5. Soient $A(1,1), B(4,3)$ et $C(2,5)$. Déterminer l'aire du triangle ABC.

Exercice 6. Soit ABC un triangle équilatéral. On considère l'application f qui à un point M à l'intérieur du triangle associe le nombre réel $MH_A + MH_B + MH_C$ où H_A, H_B et H_C sont les projections de M sur (BC), (AC), et (AB). Montrer que f est constante.

2 Produit scalaire et produit mixte

Exercice 7. Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ des vecteurs.
1. Montrer que $(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})^2 + [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]^2 = ||\overrightarrow{u}||^2\ ||\overrightarrow{v}||^2$.
2. Montrer que dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des diagonales est égales à la somme des carrés des longueurs des quatre côtés.
3. Montrer (et interpréter géométriquement) l'égalité d'Appollonius (dite aussi de la médiane) :

$$\|\overrightarrow{w} - \overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{w} - \overrightarrow{v}\|^2 = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 + 2\left\|\overrightarrow{w} - \frac{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}}{2}\right\|^2.$$

Exercice 8. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $x \in \mathbb{R}$ pour que les points

$$M_1(1,x), \qquad M_2(2,x^2), \qquad M_3(4,x^3)$$

soient alignés.

Exercice 9. Soit $\mathcal{C}$ un cercle et soit M un point n'appartenant pas à $\mathcal{C}$. Une droite d passant par M coupe le cercle $\mathcal{C}$ en 0 ou 2 points (possiblement confondus). On note P et P' ces points d'intersection quand ils existent. Montrer que $\left(\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MP'}\right)$ ne dépend pas du choix de la droite d.

Exercice 10. Démontrer à l'aide d'un calcul de produit scalaire que les hauteurs d'un triangle non apliati sont concourantes.

Exercice 11. On considère trois points A, B et C non alignés dans le plan, et une droite (d) coupant respectivant les droites $(BC), (AC)$ et (AB) en A', B' et C'. Par le point A' , on mène les parallèles à (AB) et (AC) qui coupent respectivement en D et E la parallèle à (BC) passant par A. On souhaite montrer que les droites $(B'D)$ et $(C'E)$ sont parallèles. On se place dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

1. Faire une figure contenant toutes les informations de l'énoncé.
2. Déterminer les coordonnées cartésiennes de B' et de C' en fonction de deux paramètres réels.
3. Déterminer en fonction de ces coordonnées une équation des droites (d) et (BC)
4. Déterminer les coordonnées cartésiennes des points A', D et E.
5. Conclure à l'aide d'un calcul de produit mixte.

Exercice 12. Soit ABC un triangle tel que $AB = a, BC = 2a$ et $AC = a\sqrt{3}$ où $a \in \mathbb{R}$.
1. Que peut-on dire du triangle ABC ?
2. Déterminer $\{M \ / \ -4MA^2 + 3MB^2 + MC^2 = 6a^2\}$.
3. Déterminer $\{M \ / \ -4MA^2 + 3MB^2 + MC^2 = 0\}$.

3 Transformations

Exercice 13. Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
On pose $a = \sqrt{3} - i$. On note A sont image.
1. Calculer le module et un argument du nombre complexe a.
2. On considère la rotation r de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$. Soit f l'application qui, à l'affixe z de M, associe l'affixe z' de $M' = r(M)$. Exprimer $f(z)$ en fonction de $z \in \mathbb{C}$.
3. On note $B = r(A)$. Déterminer l'affixe b de B sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
4. En déduire les valeurs exactes de $\cos \dfrac{\pi}{12}$ et $\sin \dfrac{\pi}{12}$

Exercice 14. Déterminer l'écriture complexe de chacune des transformations suivantes :
1. L'homothétie f de centre A d'affixe $4i$ et de rapport $-\dfrac{1}{3}$.
2. La rotation g de centre A d'affixe -2 et d'angle $\dfrac{3\pi}{4}$.
3. La translation h de vecteur d'affixe $4 - 2i$.

Exercice 15.
1. Déterminer la représentation complexe d'une symétrie par rapport à une droite passant par l'origine et formant un angle de mesure $\theta \in \mathbb{R}$ avec l'axe des abscisses.
2. Montrer à l'aide des complexes que la composée de deux symétries par rapport à des droites passant par l'origine est une rotation de centre O et d'angle égal au double de l'angle formé entre les deux axes.
3. Que peut-on dire dans le cas de la composée de deux symétries d'axe sécants ?

Exercice 16. Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Soient $A(3, -1)$ et $B(0, 2)$. On définit
- h l'homothétie de centre A et de rapport $-\sqrt{2}$.
- r, la rotation de centre B et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.
- t, la translation de vecteur $\overrightarrow{BO}$.
- s, la transformation du plan définie par $s = t \circ r \circ h$.

Déterminer les points M tels que $s(M) = O$ puis les points M tels que $s(M) = M$.

Exercice 17. Montrer que les translations et les homothéties préservent les angles orientés. *On dit que ces transformations sont directes.*

Exercice 18 (*Inversion du plan*)**.** Soient $\mathcal{P}$ le plan muni du repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}\backslash\{O\}$. Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $f : \mathcal{P}^* \to \mathcal{P}^*$ l'application qui a un point M du plan $\mathcal{P}$ dont un système de coordonnées polaire est (r, θ) associe le point $f(M)$ dont un système de coordonnées polaires est $\left(\frac{k}{r}, \theta\right)$. On dit que f est l'inversion de pôle O et de puissance k.
1. Montrer que f est bien définie.
2. Montrer que f est une bijection de $\mathcal{P}^*$ dans $\mathcal{P}^*$ et préciser sa bijection réciproque.
3. Quel est l'ensemble des points invariants par f. On décrira cet ensemble à l'aide d'objets géométriques (droites, cercle, ...) dont on précisera les caractéristiques.
4. Soit A et B dans $\mathcal{P}^*$, notons A' et B' leurs images par f. À l'aide des complexes, montrer que
$$A'B' = k\frac{AB}{OA \times OB}.$$
5. Soit $M \in \mathcal{P}^*$. Si $M' = f(M)$, montrer que $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont colinéaires et que $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = k$.
6. (a) Soit Δ une droite passant par O. Montrer que $\Delta \setminus \{O\}$ est invariant par f.
   (b) Soit Δ une droite ne passant pas par O. Montrer que $f(\Delta)$ est un cercle passant par O.
   (c) En déduire que l'image d'un cercle passant par O (privé de O) est une droite ne passant pas par O.
   (d) L'image d'un cercle ne passant pas par O est un cercle ne passant pas par O.
7. Démontrer le théorème de Ptolémée : Quatre points distincts O, A, B et C sont co-cycliques ou alignés si et seulement si parmi les trois quantités $OA\ BC$, $OB\ AC$ et $OC\ AB$ l'une est la somme des deux autres.

4 Distances

Exercice 19. On considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre $(2,4)$ et de rayon $R > 0$ ainsi que la droite d d'équation $x+y=4$. Déterminer, suivant la valeur de R, le nombre de points d'intersection du cercle $\mathcal{C}$ et de la droite d.

Exercice 20. Déterminer la distance du point $M(1,1)$ à la droite d passant par les points $A(1,0)$ et $B(3,1)$.

Exercice 21. Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ les droites du plan $\mathcal{P}$ d'équations cartésiennes $3x-4y+4=0$ et $12x+5y-5=0$. On pose

$$\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{P} \ \ / \ \ \mathrm{d}(M,\mathcal{D}) = \mathrm{d}(M,\mathcal{D}')\}\,.$$

Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{E}$ et montrer que c'est la réunion de deux droites perpandiculaires.

Exercice 22. Soit λ est un paramètre réel. On considère la famille de droites $\mathcal{D}_\lambda$ d'équation cartésienne :

$$\mathcal{D}_\lambda \mid (1-\lambda^2)x + 2\lambda y = 4\lambda + 2.$$

Montrer qu'il existe un point équidistant de toutes les droites $(\mathcal{D}_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$.

Exercice 23. Pour $m \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ on considère $\mathcal{C}_m$ défini par

$$\mathcal{C}_m \mid x^2 + y^2 - 4mx - 2my + \frac{9m^2}{2} - m - \frac{1}{2} = 0.$$

1. Pour tout $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, montrer que $\mathcal{C}_m$ est un cercle dont on déterminera le rayon R_m et les coordonnées du centre Ω_m.
2. Pourquoi a-t'on exclus le cas $m=-1$?
3. Montrer que la droite $\mathcal{D} \mid y = x+1$ est tangente à tous les cercles $\mathcal{C}_m$ pour $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
4. Déterminer les équations des autres tangentes communes à ces cercles s'il en existe.