Feuille d'exercices 26 : Déterminants

1 Déterminant d'une matrice carrée

Exercice 1. Calculer le déterminant des matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. Soit $x \in \mathbb{R}$, on considère le déterminant suivant :

$$D(x) = \begin{vmatrix} 1 & x^2-3 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -x^2+6 \end{vmatrix}.$$

1. Donner quatre racines évidentes de D.
2. Montrer que D est une fonction polynomiale dont on déterminera le degré.
3. En déduire une factorisation de $D(x)$.

Exercice 3. Calculer le déterminant de la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ a_{i,j} = \min(i, j).$$

Exercice 4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. Calculer :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_1 & \dots & a_1 & a_1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \geq 2$, on note $\Delta_{n,p}$ le déterminant d'ordre p suivant :

$$\Delta_{n,p} = \begin{vmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{p-1} \\ 1 & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{n+1}{p-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \binom{n+p-1}{1} & \dots & \binom{n+p-1}{p-1} \end{vmatrix}$$

où l'on a posé : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\binom{0}{k} = 0$.
Montrer, en effectuant des opérations sur les colonnes que pour $p \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_{n,p} = \Delta_{n+1,p}$.
En déduire la valeur de $\Delta_{n,p}$.

Exercice 6. Soit $n \geq 2$. Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $M_n(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & a & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & a & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\Delta_n(a) = \det(M_n(a))$.

1. Calculer $\Delta_n(a)$.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que la matrice $M_n(a)$ soit inversible.

Exercice 7. Soit $n \geq 3$. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Calculer $\begin{vmatrix} \cos(a_1+a_1) & \cos(a_1+a_2) & \dots & \cos(a_1+a_n) \\ \cos(a_2+a_1) & \cos(a_2+a_2) & \dots & \cos(a_2+a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(a_n+a_1) & \cos(a_n+a_2) & \dots & \cos(a_n+a_n) \end{vmatrix}$.

Exercice 8. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, soient $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |x| < \varepsilon \Rightarrow A + xB \in GL_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 9. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique.
Montrer que si n est impair, la matrice A n'est pas inversible.

Exercice 10. Déterminer les déterminants de :

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 11. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Déterminer les déterminants de :

1. $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & b+c & a+c \\ ab & bc & ca \end{pmatrix}$

Exercice 12. Déterminer les $\lambda \in \mathbb{C}$ pour lesquels la matrice $M(\lambda)$ est inversible, où :

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 7 & -5-\lambda & 1 \\ 6 & -6 & 2-\lambda \end{pmatrix}.$$

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $a, b \in \mathbb{K}$. Calculer $D_n = \det(M_n)$ où $M_n = (m_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifie :

$$\forall i, j \in [\![1,n]\!],\ m_{i,j} = \begin{cases} a+b & \text{si } i = j \\ a & \text{si } j = i+1 \\ b & \text{si } i = j+1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 14. Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. Montrer que :

$$V(a_1, ..a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

Ce déterminant est appelé déterminant de Vandermonde.

Exercice 15.
Soit $n \geq 2$. On pose :

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -1 \\ 1 & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

On pose $\Delta_n = \det(M_n)$.
Déterminer une relation de récurrence entre Δ_n et Δ_{n+1} et en déduire la valeur de Δ_n en fonction de n.

Exercice 16. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $M_n \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que :

$$M_n = \begin{pmatrix} a & 0 & \ldots & \ldots & 0 & b \\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 \\ \vdots & 0 & a & b & \vdots & 0 \\ \vdots & 0 & b & a & \vdots & \vdots \\ 0 & b & 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & \ldots & \ldots & 0 & a \end{pmatrix}$$

Montrer que :

$$\det(M_n) = (a^2 - b^2)^n.$$

Exercice 17. Calculer $\det A$ où $A = (|i-j|)_{i,j \in [\![1,n]\!]}$.

Exercice 18 (Déterminant de Van der Monde)**.** Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. On note :

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

On se propose de calculer ce déterminant d'une autre manière qu'à l'exercice 14.
Soit $x \in \mathbb{R}$, considérons :

$$V(a_1, \dots, a_{n-1}, x) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \end{vmatrix}$$

1. Justifier que $P : x \mapsto V(a_1, \dots, x)$ est une fonction polynomiale.
2. Déterminer la factorisation de $P(X)$ dans $\mathbb{K}[X]$.
3. Conclure.

Exercice 19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$.

Le déterminant $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1 \end{vmatrix}$ est appelé déterminant circulant.

L'objectif de l'exercice est de calculer un tel déterminant.
On pose : $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.
On note M la matrice associée au déterminant précédent, et :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \dots & \dots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \dots & \dots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \dots & \dots & (\omega^{n-1})^{n-1} \end{pmatrix}$$

1. Donner la valeur de $\det(U)$, et en déduire que U est inversible.
2. Former soigneusement le produit matriciel MU.
   En observant les colonnes de MU, donner la valeur de $\det(MU)$ en fonction de $\det(U)$.
   Indication : Pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, on note $[MU]_p$ la p-ème colonne de MU et U_p la p-ème colonne de U.
   Montrer que pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, il existe $\alpha_p \in \mathbb{C}$ tel que $[MU]_p = \alpha U_p$ (on déterminera la valeur de α_p).
   Utiliser ensuite la linéarité par rapport à chacune des colonnes du déterminant pour exprimer $\det(MU)$ en fonction de $\det(U)$.
3. En déduire la formule $\det(M) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \Big(a_1 + \omega^k a_2 + ... + \omega^{k(n-1)} a_n\Big)$.

2 Déterminant d'une famille de vecteurs

Exercice 20. Soient $P_1 = 1 + X - X^2$, $P_2 = 3 - X + 5X^2$ et $P_3 = -1 + 2X + 3X^2$.
La famille (P_1, P_2, P_3) est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

Exercice 21. Soient $e_1 = (1 + i, 1, i)$, $e_2 = (i, -1, 1 - i)$, $e_3 = (-2 + i, 0, -i)$.
La famille (e_1, e_2, e_3) est-elle une base de $\mathbb{C}^3$?

Exercice 22. Soit $u_1 = (1, 2, 3)$ et $u_2 = (1, 1, 1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{P} = \text{Vect}\,(u_1, u_2)$.
Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Prouver que $u \in \mathcal{P}$ si et seulement si $x - 2y + z = 0$.

Exercice 23. Soient $(z_0, z_1, ..., z_n)$ $n + 1$ nombres complexes 2 à 2 distincts.
Montrer que la famille $((X - z_0)^n, (X - z_1)^n, ..., (X - z_n)^n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

3 Déterminant d'un endomorphisme

Exercice 24. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle sont les valeurs possibles pour le déterminant de $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^3 + 2f = 0$?

Exercice 25. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et f un endomorphisme de E tel que : $f^2 = -id_E$. Montrer que E est de dimension paire.

Exercice 26.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à :

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

1. On pose $u_1 = (1,1,0,0)$, $u_2 = (0,1,1,0)$, $u_3 = (0,0,1,1)$ et $u_4 = (-1,0,0,1)$. Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer $B = Mat_{\mathcal{B}}(f)$.
3. Déterminer $\det B$, $\det f$ et $\det A$.

Exercice 27. Soit φ l'application qui, à tout polynôme réel P de degré inférieur ou égal à 2, associe Q défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = \int_x^{x+1} P(t)dt.$$

Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ et calculer $\det(\varphi)$.

Exercice 28. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer que l'application :

$$u_A : \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{K}), \quad M \mapsto AM$$

est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer que $\det(u_A) = (\det(A))^2$.