Feuille d'exercices 8 : Ensembles et applications

1 Ensembles

Exercice 1. Montrer que :
1. $\{x \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, x < \epsilon\} =]-\infty, 0]$
2. $\{x \in \mathbb{R}, \exists \epsilon > 0, x < \epsilon\} = \mathbb{R}$
3. $\{x \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, |x| < \epsilon\} = \{0\}$

Exercice 2. Soient A un ensemble et soient E et F des parties de A.
1. Montrer que : $E \subset F \iff \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$
2. Montrer que : $\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$
3. A t-on : $\mathcal{P}(E \cup F) = \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$

Exercice 3. Soit E un ensemble et soient A et B des sous-ensembles de E. Montrer que :

$$A \cup B = A \cap B \iff A = B$$

Exercice 4. Soit E un ensemble et soient A, B et C des sous-ensembles de E. Montrer que :

1. $A \cup B = B \iff A \subset B$;
2. $A \cap B = \emptyset \iff A \subset C_E^B$;
3. $A \cup B = E \iff C_E^A \subset B$;
4. $\Big(A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C\Big) \iff B = C$;
5. $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$;

Exercice 5. Soit E un ensemble. Pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on définit la différence symétrique de A et B par :

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

1. Montrer que : $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
2. Montrer que : $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, $A \Delta B = C_E^A \Delta C_E^B$.
3. Montrer que : $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E)$, $\Big(A \Delta B = A \Delta C \iff B = C\Big)$.

Exercice 6. Soit E un ensemble, soient A, $B \in \mathcal{P}(E)$. Résoudre l'équation d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$: $X \cup A = B$

Exercice 7. Soit E un ensemble, soient A, $B \in \mathcal{P}(E)$. Résoudre l'équation d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$: $X \cap A = B$

2 Applications

Exercice 8. Soient E un ensemble et soient A et B des parties de E.
Montrer en utilisant les fonctions indicatrices, que :

$$A \cap B = A \cup B \iff A = B.$$

Exercice 9. Soient E un ensemble et soient A, B et C des sous-ensembles de E.

1. Montrer en utilisant les fonctions indicatrices, que :

$$A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C \iff B = C.$$

2. Montrer en utilisant les fonctions indicatrices, que :

$$A \cap B \subset A \cap C \text{ et } A \cup B \subset A \cup C \iff B \subset C.$$

3 Image directe - Image réciproque

Exercice 10. On considère l'application $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$.

Déterminer $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}([-1,4])$, $f([-1,4])$, $f(f^{-1}([-1,4]))$ et $f^{-1}(f([-1,4]))$.

Exercice 11. Soit E et F deux ensembles, soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$.

1. Montrer que :
$$\forall A \in \mathcal{P}(E),\ A \subset f^{-1}(f(A)).$$
2. Montrer que :
$$\forall B \in \mathcal{P}(F),\ f(f^{-1}(B)) \subset B.$$

Exercice 12. Soient E et F deux ensembles et $f \in \mathcal{F}(E,F)$.

1. Soient $A, B \in \mathcal{P}(F)$. Montrer que :
$$A \subset B \implies f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B),$$
$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B),$$
$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B),$$
$$f^{-1}(C_F^A) = C_E^{f^{-1}(A)}.$$
2. Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que :
   (a) Montrer que
$$A \subset B \implies f(A) \subset f(B),$$
$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B),$$
$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$
   (b) Montrer qu'en général :
$$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B).$$
   (c) Montrer qu'en général :
$$f(C_E^A) \neq C_F^{f(A)}$$

4 Injections - Surjections - Bijections

Exercice 13. Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité des applications suivantes :

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x+3y, x+2y) \end{array} \qquad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, xy) \end{array}$$

$$f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x-y^2 \end{array} \qquad f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \qquad f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & e^z \end{array}$$

Exercice 14.
1. On pose $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^2-1}{x^2+1} \end{array}$.
   f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
2. On pose $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & [-1,1[\\ x & \mapsto & \dfrac{x^2-1}{x^2+1} \end{array}$.
   Montrer que g est bijective et calculer g^{-1}.

Exercice 15. On considère l'application $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x, xy-y^3) \end{array}$.

f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 16. Soient E, F, G et H des ensembles.

1. Soient $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et $g \in \mathcal{F}(F,G)$. Montrer que :
$$g \circ f \text{ injective} \quad \implies \quad f \text{ injective},$$
$$g \circ f \text{ surjective} \quad \implies \quad g \text{ surjective},$$
2. Soient $f \in \mathcal{F}(E,F)$, $g \in \mathcal{F}(F,G)$ et $h \in \mathcal{F}(G,H)$.
   Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, alors f, g et h le sont aussi.

Exercice 17. Soit E et F deux ensembles, soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$.

1. Montrer que :
$$f \text{ est injective} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall A \in \mathcal{P}(E),\ A = f^{-1}(f(A)).$$
2. Montrer que :
$$f \text{ est surjective} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall B \in \mathcal{P}(F),\ B = f(f^{-1}(B)).$$

Exercice 18. Soient E un ensemble et $f : E \to E$ bijective.
On pose :
$$\Phi_f : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(E,E) & \to & \mathcal{F}(E,E) \\ u & \mapsto & f \circ u \circ f^{-1} \end{array}.$$

1. Montrer que Φ_f est bijective et préciser sa réciproque.
2. Soient $f, g \in \mathcal{F}(E,E)$ bijectives, simplifier $\Phi_f \circ \Phi_g$.
3. On note $\mathcal{I}$ (resp. $\mathcal{S}$) l'ensemble des injections (respectivement surjections) de E dans E.
Montrer que $\Phi_f(\mathcal{I}) = \mathcal{I}$ et $\Phi_f(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$.

Exercice 19. Soit E un ensemble et soient A et B des parties non vides de E. On considère l'application :
$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B). \end{array}$$

1. Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$
2. Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$
3. Dans le cas où f est bijective, expliciter f^{-1}.

Exercice 20. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$.
Montrer que si f est strictement monotone alors f est injective.

5 Relations d'équivalence

Exercice 21. Soient E un ensemble et $A \in \mathcal{P}(E)$. Dans $\mathcal{P}(E)$, on définit la relation $\sim$ par :
$$\forall X, Y \in \mathcal{P}(E),\ X \sim Y \Longleftrightarrow X \cup A = Y \cup A.$$

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
2. Soit $X \in \mathcal{P}(E)$, déterminer la classe d'équivalence de X pour $\sim$?

Exercice 22. On désigne par E l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et on considère la relation définie sur E par :
$$\forall f, g \in E,\ f\mathcal{R}g \quad \Longleftrightarrow \quad f' = g'.$$

1. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E.
2. Soit $f_0 \in E$, déterminer la classe d'équivalence de f_0 pour $\mathcal{R}$.

Exercice 23. Dans $\mathbb{R}$, on considère la relation $\mathcal{R}$ définie par :
$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - y^2 = x - y.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, calculer $cl_{\mathcal{R}}(x)$.