Corrigé de la feuille d'exercices 11

Exercice 1. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} u_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \\
&= \frac{1}{n(n+1)}\left[n\sum_{k=1}^{n+1} u_k - (n+1)\sum_{k=1}^{n} u_k\right] \\
&= \frac{1}{n(n+1)}\left[nu_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} u_k\right] \\
&= \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}(u_{n+1} - u_k)
\end{aligned}$$

Si (u_n) est décroissante, alors, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $u_{n+1} - u_k \geq 0$ (ceci se prouve par récurrence). Donc $v_{n+1} - v_n \geq 0$.
Ainsi, (v_n) est croissante.
De même, si (u_n) est décroissante, alors, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $u_{n+1} - u_k \leq 0$ donc $v_{n+1} - v_n \leq 0$.
Ainsi, (v_n) est décroissante.

Exercice 2. On reconnait une suite arithmético-géométrique.

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on a : $\alpha = 3\alpha + 2 \iff \alpha = -1$.
- Posons $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + 1)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = 3u_n + 2 + 1 = 3\,(u_n + 1) = 3v_n$.
  Ainsi, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 3.
  Par suite : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3^n(u_0 + 1) = 2 \times 3^n$.
- On obtient finalement que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 3^n - 1$.

Exercice 3.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\alpha = \frac{1}{3}\alpha + 2 &\iff 3\alpha = \alpha + 2 \\
&\iff \alpha = 3
\end{aligned}$$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - 3$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \dfrac{1}{3}u_n - 1 = \dfrac{1}{3}(u_n - 3) = \dfrac{1}{3}v_n$.
   Ainsi, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.
   De plus, $v_0 = u_0 - 3 = -3$.
   Donc on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0\left(\frac{1}{3}\right)^n = -3\left(\frac{1}{3}\right)^n = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

   Et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 3.$$

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

$$\alpha = -\alpha + 4 \iff \alpha = 2$$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - 2$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = -u_n + 2 = -(u_n 2) = -v_n$.
   Ainsi, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison -1.
   De plus, $v_0 = u_0 - 2 = -1$.
   Donc on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0(-1)^n = -\,(-1)^n = (-1)^{n+1}.$$

   Et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^{n+1} + 2.$$

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = 2u_n - n + 2 - (n+1) = 2(u_n - n) + 1 = 2v_n + 1$.
Ainsi, (v_n) est une suite arithmético-géométrique.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

$$\alpha = 2\alpha + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = -1$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = v_n + 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = v_{n+1} + 1 = 2v_n + 2 = 2w_n$.
Ainsi, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 2.
De plus, $w_0 = v_0 + 1 = u_0 + 1 = 3$.
Donc on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = w_0\,(2)^n = 3 \times 2^n.$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 3 \times 2^n - 1$$

Et enfin :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3 \times 2^n - 1 + n.$$

Exercice 5.

1. On a une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
   Son équation caractéristique est $r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0$. Son discriminant vaut $\frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$. Ainsi, les racines de l'équation caractéristique sont $-\frac{1}{2}$ et 1. Ainsi, il existe un unique $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \mu.$$

   Or,

   $$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ -\frac{1}{2}\lambda + \mu = -\frac{3}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\mu \\ \frac{3}{2}\mu = -\frac{3}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\mu \\ \mu = -1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = -1 \end{cases}$$

   Ainsi :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1.$$

2. On a une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
   Son équation caractéristique est $r^2 - r + \frac{1}{4} = 0$. Son discriminant vaut 0. Ainsi, l'unique racine de l'équation caractéristique est $\frac{1}{2}$. Ainsi, il existe un unique $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda + \mu n)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

   Or,

   $$\begin{cases} \lambda = u_0 = 1 \\ \frac{1}{2}(\lambda + \mu) = u_1 = 9 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 17 \end{cases}$$

   Ainsi :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (1 + 17n) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

3. On a une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
   Son équation caractéristique est $r^2 - r + \frac{1}{2} = 0$. Son discriminant vaut $-1 = (\pm i)^2$. Ainsi, les racines de l'équation caractéristique sont $\frac{1-i}{2}$ et $\frac{1+i}{2}$. Ainsi, il existe un unique $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda\left(\frac{1+i}{2}\right)^n + \mu\left(\frac{1-i}{2}\right)^n$$

Or,

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda+\mu=u_0=0\\ \lambda\left(\dfrac{1+i}{2}\right)+\mu\left(\dfrac{1-i}{2}\right)=u_1=1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}\mu=-\lambda\\ \lambda\left(\dfrac{1+i}{2}-\dfrac{1-i}{2}\right)=1\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l}\mu=-\lambda\\ i\lambda=1\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l}\mu=-\lambda\\ \lambda=\dfrac{1}{i}=-i\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l}\mu=i\\ \lambda=-i\end{array}\right.$$

Ainsi, on a :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=-i\left(\frac{1+i}{2}\right)^n+i\left(\frac{1-i}{2}\right)^n$$

Soit $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}u_n&=-i\left(\frac{1+i}{2}\right)^n+i\left(\frac{1-i}{2}\right)^n\\ &=2\mathrm{Re}\left[-i\left(\frac{1+i}{2}\right)^n\right]\\ &=-2\mathrm{Re}\left[i\left(\frac{1+i}{2}\right)^n\right]\\ &=2\mathrm{Im}\left[\left(\frac{1+i}{2}\right)^n\right]\\ &=2\mathrm{Im}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n\right]\\ &=\frac{2}{2^{n/2}}\mathrm{Im}\left(e^{\frac{in\pi}{4}}\right)\\ &=\frac{2}{2^{n/2}}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

Donc finalement :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right).$$

Exercice 6. Soit $k\in\mathbb{N}$, $c_{k+1}-c_k=\dfrac{u_{k+1}}{(k+1)!}-\dfrac{u_k}{k!}=\dfrac{1}{(k+1)!}(u_{k+1}-(k+1)u_k)=\dfrac{2^k(k+1)!}{(k+1)!}=2^k$.
Soit $n\in\mathbb{N}$.
En sommant l'égalité précédente pour k allant de 0 à $n-1$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(c_{k+1}-c_k)=\sum_{k=0}^{n-1}2^k$$

Par résultat sur les sommes télescopiques, on obtient :

$$c_n-c_0=\sum_{k=0}^{n-1}2^k=2^n-1$$

Donc :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ c_n=(2^n-1)+u_0=2^n-1+u_0$$

Finalement :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=n!(u_0+2^n-1).$$

Exercice 7. Posons $\begin{array}{rccl}f: & [0,+\infty[& \to & \mathbb{R}\\ & x & \mapsto & \ln(1+2x)\end{array}$.
f est strictement croissante en tant que composée de fonctions strictement croissantes.
Ainsi, (u_n) est monotone.

Déterminons les points fixes de f :

Posons $\begin{array}{cccc} g: & [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)-x \end{array}$.

g est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout $x \in [0,+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{2}{1+2x} - 1 = \dfrac{1-2x}{1+2x}$.

Le tableau de variations de g est donc :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
g	0	$\nearrow$	$\ln(2)-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

Ainsi, g est continue et strictement croissante sur $\left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$.

Ainsi, g est bijective de $\left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ sur $\left]-\infty,\ln(2)\dfrac{1}{2}\right[$.

De plus, $0 \in \left]-\infty,\ln(2)\dfrac{1}{2}\right[$. Donc l'équation $g(x)=0$ admet donc une unique solution sur $\left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$. On la note α.

De plus, $g(0)=0$ et g est strictement croissante sur $\left[0,\dfrac{1}{2}\right[$. Ainsi, 0 est l'unique solution de $g(x)=0$ sur $\left]0,\dfrac{1}{2}\right[$. On a donc :

x	0		α		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	α	$\nearrow$	$+\infty$

Distinguons différents cas :

- Si $u_0 = 0$, alors (u_n) sera constante égale à 0 :
  - Pour $n=0$, on a $u_0=0$.
  - Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n = 0$.
    On a $u_{n+1} = f(u_n) = f(0) = 0$.
  - Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 0$.
- Si $u_0 = \alpha$ alors, (u_n) sera constante égale à α. On le prouve par récurrence.
- Si $u_0 \in]0,\alpha[$, comme $]0,\alpha[$ est stable par f, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in]u_0,\alpha[$.
  De plus, $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0 = g(u_0) > 0$ donc (u_n) est strictement croissante.
- Si $u_0 \in]\alpha,+\infty[$, comme $]0,\alpha[$ est stable par f, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in]u_0,\alpha[$. De plus, $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0 = g(u_0) < 0$ donc (u_n) est strictement décroissante.

1 Limites

Exercice 8. On raisonne par double implication.

- Si la suite (u_n) est stationnaire alors, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que : $\forall n \geq N$, $u_n = \alpha$.
  Soit $\epsilon > 0$. On a : $\forall n \geq N$, $|u_n - \alpha| = 0 \leq \epsilon$. Ainsi, la suite (u_n) est convergente de limite α.
- Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{Z}$ convergente de limite $l \in \mathbb{R}$.
  Posons $\epsilon = \dfrac{1}{3}$.
  Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ ngeqN \implies |u_n - l| \leq \epsilon$.
  Ainsi, on a : $\forall n \geq N$, $u_n \in \left[l-\dfrac{1}{3}, l+\dfrac{1}{3}\right]$. Or, deux entiers distincts sont distants d'au moins 1.
  Ainsi, $\left[l-\dfrac{1}{3}, l+\dfrac{1}{3}\right] \cap \mathbb{Z}$ contient au plus un élément. De plus, $u_N \in \left[l-\dfrac{\epsilon}{3}, l-\dfrac{\epsilon}{3}\right] \cap \mathbb{Z}$. Ainsi, $\left[l-\dfrac{1}{3}, l+\dfrac{1}{3}\right] \cap \mathbb{Z}$ est le singleton $\{u_N\}$.
  Soit $n \geq N$, $u_n \in \left[l-\dfrac{1}{3}, l+\dfrac{1}{3}\right] \cap \mathbb{Z} = \{u_N\}$ donc $u_n = u_N$.
  Ainsi, on a : $\forall n \geq N$, $u_n = u_N$. La suite est donc constante égale à u_N à partir du rang N.

Exercice 9. • Supposons que $s = \sup(A)$. On sait déjà que s majore A.
Soit $n \in \mathbb{N}$, par caractérisation de la borne supérieure, il existe $a_n \in A$ tel que $s - 10^{-n} < a_n$. Comme s majore A, $a_n \leq s$. Ainsi, $|a_n - s| \leq 10^{-n}$. Or, $(10^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers s.

- Supposons que s majore A et qu'il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers s.
Soit $\epsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies |s - a_n| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Ainsi $|s - a_N| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$, donc $a_N > s - \epsilon$, avec $a_N \in A$. Par caractérisation de la borne supérieure, on a donc $s = \sup(A)$.

Exercice 10. a. On a $\dfrac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n} = \dfrac{1 - \dfrac{(-1)^n}{n}}{1 + \dfrac{(-1)^n}{n}}$.

Or, $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n} = 1$ comme quotient de deux suites qui convergent vers 1.

b. On a : $\dfrac{n^3+5n}{5n^3+\cos n+\frac{1}{n^2}} = \dfrac{1+\frac{5}{n^2}}{5+\frac{\cos n}{n^3}+\frac{1}{n^5}}$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\dfrac{\cos n}{n^3}\right| \leq \dfrac{1}{n^3}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^3} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos n}{n^3} = 0$. Ainsi, par opérations sur les limites, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3+5n}{5n^3+\cos n+\frac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{5}$.

c. Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

- Si $a = b$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n} = 0$.
- Si $a > b$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n} = \dfrac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^n}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{b}{a}\right)^n = 0$ car $0 \leq \dfrac{b}{a} < 1$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n} = 1$.
- Si $a < b$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n} = \dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = 0$ car $0 \leq \frac{a}{b} < 1$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n} = -1$.

d. La suite $(\sin n^4)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et la suite $(\dfrac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0, donc $(\dfrac{\sin n^4}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

e. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{(n+a)(n+b)} - n &= \frac{(n+a)(n+b)-n^2}{\sqrt{(n+a)(n+b)}+n} \\ &= \frac{(a+b)n+ab}{\sqrt{(n+a)(n+b)}+n} \\ &= \frac{(a+b)+\frac{ab}{n}}{\sqrt{(1+\frac{a}{n})(1+\frac{b}{n})}+1}\end{aligned}$$

Ainsi, par quotient, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{(n+a)(n+b)} - n = \dfrac{a+b}{2}$.

f. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n^{1/\ln n} = e^{\frac{\ln n}{\ln n}} = e$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{1/\ln n} = e$.

g. Soit $n \geq 2$, $(\ln n)^{1/n} = e^{\frac{\ln(\ln n)}{n}}$. Or, $\dfrac{\ln(\ln n)}{n} = \dfrac{\ln(\ln n)}{\ln n} \times \dfrac{\ln n}{n}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln n = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln(X)}{X} = 0$ par croissances comparées donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(\ln n)}{\ln n} = 0$. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$.
Ainsi, par produit, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(\ln n)}{n} = 0$. Finalement, par continuité de la fonction exponentielle en 0, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln n)^{1/n} = e^0 = 1$

h. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n^{\sin n/n} = e^{\frac{\sin}{n}\ln n}$. Or, $\left|\dfrac{\sin n}{n}\ln n\right| \leq \dfrac{\ln n}{n}$. De plus, par croissance comparée, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin n}{n} \ln n = 0$. Par composition, on a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\sin n/n} = e^0 = 1$.

Exercice 11 (Théorème de Césaro)**.** Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \geq N,\ |u_n - l| \leq \frac{\epsilon}{2}$.

Soit $n \geq N$,

$$\begin{aligned}
|v_n - l| &= \left| \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k \right) - l \right| \\
&= \left| \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k \right) - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} l \right) \right| \\
&= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (u_k - l) \right| \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |u_k - l| \qquad \text{d'après l'inégalité triangulaire} \\
&\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N-1} |u_k - l| + \frac{1}{n} \sum_{k=N}^{n} |u_k - l| \\
&\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N-1} |u_k - l| + \frac{1}{n} \sum_{k=N}^{n} \frac{\epsilon}{2} \\
&\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N-1} |u_k - l| + \frac{\epsilon}{2} \frac{n - N + 1}{n} \\
&\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N-1} |u_k - l| + \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{car } \frac{n - (N-1)}{n} \leq 1
\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} u_k$ est constant (car N est fixé), donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N-1} u_k = 0$. Ainsi, il existe un rang $N' \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N' \implies \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N-1} |u_k| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Soit $n \geq \max(N, N')$, on a alors $|v_n - l| \leq \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} \leq \epsilon$.
Ainsi, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

Exercice 12. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $k \in [\![1, n]\!]$, on a $\lfloor kx \rfloor \leq kx < \lfloor kx \rfloor + 1$. Ainsi, $kx - 1 < \lfloor kx \rfloor \leq kx$ (par définition de la partie entière). En sommant, il vient :

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} (kx - 1) < \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} kx$$

Ainsi :

$$\frac{x}{n^2} \left(\sum_{k=1}^{n} k \right) - \frac{n}{n^2} < \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor \leq \frac{x}{n^2} \left(\sum_{k=1}^{n} k \right).$$

D'où :

$$\frac{n(n+1)x}{2n^2} - \frac{1}{n} < \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor \leq \frac{n(n+1)x}{2n^2}$$

Or, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n(n+1)x}{2n^2} - \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{(1 + \frac{1}{n})x}{2} - \frac{1}{n} \right) = \frac{x}{2}$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{n(n+1)x}{2n^2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})x}{2} = \frac{x}{2}$.
Ainsi, par le théorème de convergence par encadrement, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{x}{2}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{1}{n^2 + n} \leq \dfrac{1}{n^2 + k} \leq \dfrac{1}{n^2 + 1}$ (car $1 \leq k \leq n$).
En multipliant par n et en sommant on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + 1}$$

D'où

$$\frac{n^2}{n^2 + n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2 + 1}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2}{n^2+n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$. Et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{1+\frac{1}{n^2}}=1$. Par théorème de convergence par encadrement, on obtient que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

c. Soit $n\geq 2$. On a :

$$\left\lfloor\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right\rfloor\leq\left(n+\frac{1}{2}\right)^2<\left\lfloor\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right\rfloor+1$$

$$\left\lfloor\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\right\rfloor\leq\left(n-\frac{1}{2}\right)^2<\left\lfloor\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\right\rfloor+1$$

Ainsi,

$$0<\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-1<\left\lfloor\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right\rfloor\leq\left(n+\frac{1}{2}\right)^2$$

$$0<\left(n-\frac{1}{2}\right)^2-1<\left\lfloor\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\right\rfloor\leq\left(n-\frac{1}{2}\right)^2$$

Donc :

$$0<\frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}\leq\frac{1}{\left\lfloor\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\right\rfloor}<\frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2-1}$$

Ainsi :

$$\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}\leq\frac{\left\lfloor\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right\rfloor}{\left\lfloor\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\right\rfloor}\leq\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2-1}$$

D'où :

$$\frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^2-\frac{1}{n^2}}{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^2}\leq\frac{\left\lfloor\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right\rfloor}{\left\lfloor\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\right\rfloor}\leq\frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^2-\frac{1}{n^2}}$$

Or, par opérations sur les limites, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^2-\frac{1}{n^2}}{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^2}=\dfrac{1-0}{1}=1$. De même, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^2-\frac{1}{n^2}}=$ 1. Donc par théorème de convergence par encadrement, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left\lfloor\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right\rfloor}{\left\lfloor\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\right\rfloor}=1$.

Exercice 13. a. Soit $n\in\mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}&=\frac{(n^2+n+1-(n^2-n+1)}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}}\\&=\frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}}\\&=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}\end{aligned}$$

On a alors par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}=\dfrac{2}{2}=1$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{n-\sqrt{n^2+1}}{n-\sqrt{n^2-1}} &= \frac{n+\sqrt{n^2+1}}{n^2-(n^2-1)} \times \frac{n-(n^2-1)}{n+\sqrt{n^2+1}} \\
&= -\frac{n+\sqrt{n^2-1}}{n+\sqrt{n^2+1}} \\
&= -\frac{\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}
\end{aligned}$$

Ainsi, par quotient, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-\sqrt{n^2+1}}{n-\sqrt{n^2-1}} = -1$.

c. On a :

$$\begin{aligned}
\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}} - \sqrt{n+\sqrt{n^2-1}} &= \frac{(n+\sqrt{n^2+1})-(n+\sqrt{n^2-1})}{\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}}+\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}} \\
&= \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}}+\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}} \\
&= \frac{(n^2+1)-(n^2-1)}{(\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}}+\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}})(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1})} \\
&= \frac{2}{(\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}}+\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}})(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1})}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+\sqrt{n^2+1}} - \sqrt{n+\sqrt{n^2-1}} = 0$.

d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$.

En sommant on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

Donc :

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

Or, $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1$.

De même, $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$.

Ainsi, par théorème de convergence par encadrement, on obtient que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

e. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $\forall k \in [\![1,n^2]\!]$, $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

En sommant on obtient $\sum\limits_{k=1}^{n^2} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \leq u_n$.

Or, $\sum\limits_{k=1}^{n^2} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} = \dfrac{n^2}{\sqrt{2n^2}} = \dfrac{n^2}{n\sqrt{2}} = \dfrac{n}{\sqrt{2}}$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n^2} \dfrac{1}{\sqrt{2}n} = +\infty$ donc par théorème de minoration, on obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

f. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leq u_n = \dfrac{\prod\limits_{k=1}^{n} k}{n^n} = \prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{n} = \dfrac{1}{n} \times \prod\limits_{k=2}^{n} \dfrac{k}{n} \leq \dfrac{1}{n}$ (tous les termes sont positifs et plus petits que 1), donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

g. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = e^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}$. Or $n\ln(1+\dfrac{x}{n}) = x\dfrac{\ln(1+x/n)}{x/n}$. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{n} = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$ donc par produit et composition, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(1+\dfrac{x}{n}) = x$. D'où par continuité de l'exponentielle en x, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^x$.

h. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = e^{n^2 \ln(1-\frac{1}{n})}$. Or $n^2 \ln(1-\frac{1}{n}) = -n\frac{\ln(1-1/n)}{-1/n}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$ donc par produit et composition, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 \ln(1-\frac{1}{n}) = -\infty$.
Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

i. Soit $n \geq 2$, on a : $\left(\sin\frac{1}{n}\right)^{1/\ln n} = e^{\frac{1}{\ln n}\ln\left(\sin\frac{1}{n}\right)}$.
Or,

$$\begin{aligned}
\frac{\ln\left(\sin\frac{1}{n}\right)}{\ln n} &= \frac{\ln\left(\frac{1}{n}\times\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right)}{\ln n} \\
&= \frac{\ln\left(\frac{1}{n}\right)+\ln\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right)}{\ln n} \\
&= \frac{-\ln(n)+\ln\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right)}{\ln n} \\
&= -1+\frac{\ln\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right)}{\ln n}
\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \frac{\sin X}{X} = \cos(0) = 1$. Donc par composition, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$. Par continuité de la fonction logarithme en 1, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right) = \ln(1) = 0$.

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$. D'où par opérations sur les limites, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\sin\frac{1}{n}\right)}{\ln n} = -1$.
Enfin, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sin\frac{1}{n}\right)^{1/\ln n} = e^{-1}$.

Exercice 14 (Règle de D'Alembert).

1. Posons $\epsilon = \frac{1-l}{2}$. On a $\epsilon > 0$ et $l < l+\epsilon < 1$. Par définition de la convergence, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \quad \Longrightarrow \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < l+\epsilon.$$

Soit $n \geq N$, comme $u_n > 0$, on a $u_{n+1} \leq (l+\epsilon)u_n$.
Puis par récurrence , on prouve que : $\forall n \geq N,\ 0 < u_n \leq (l+\epsilon)^{n-N}u_N$.
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} (l+\epsilon)^{n-N} = 0$ car $0 < l+\epsilon < 1$. Ainsi, par théorème de convergence par encadrement, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2. Posons $\epsilon = \frac{l-1}{2}$. On a $\epsilon > 0$ et $1 < l-\epsilon < l$. . Il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \quad \Longrightarrow \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} > l-\epsilon.$$

Soit $n \geq N$, comme $u_n > 0$, on en déduit $u_{n+1} > (l-\epsilon)u_n$.
On prouve alors par récurrence que : $\forall n \geq N,\ u_n \geq (l-\epsilon)^{n-N}u_N$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}(l-\epsilon)^{n-N} = +\infty$ car $l-\epsilon > 1$.
Ainsi, par théorème de divergence par minoration, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3. Quand $l = 1$, on ne peut rien dire. La suite peut très bien diverger vers $+\infty$ (exemple $(n)_{n\in\mathbb{N}}$) ou converger vers 0 (exemple $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$).

Exercice 15. Notons l la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l' la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Méthode 1 :

- Si $l = l'$.
Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N, N' \in \mathbb{N}$ tels que :
$$\forall n \geq N,\ |u_n - l| \leq \epsilon$$
$$\forall n \geq N',\ |v_n - l'| \leq \epsilon$$
Posons $N'' = \max(N, N')$.
Soit $n \geq N''$, on a : De plus, $\sup(u_n, v_n) = u_n$ ou $\sup(u_n, v_n) = v_n$.
Ainsi :
$$|\sup(u_n, v_n) - l| \leq \epsilon$$
De même, $\inf(u_n, v_n) = u_n$ ou $\inf(u_n, v_n) = v_n$.
Ainsi :
$$|\inf(u_n, v_n) - l| \leq \epsilon$$
On a donc que $(\sup(u_n, v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l = \max(l, l')$ et $(\inf(u_n, v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l = \min(l, l')$
- Si $l > l'$. Posons $\epsilon = \dfrac{l - l'}{3}$.
Il existe $N, N' \in \mathbb{N}$ tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |u_n - l| \leq \epsilon$$
$$\forall nin\mathbb{N},\ n \geq N' \quad \Longrightarrow \quad |v_n - l'| \leq \epsilon$$
Posons $N'' = \max(N, N')$.
Soit $n \geq N''$, on a :
$$v_n \leq l' + \epsilon \quad \text{et} \quad l - \epsilon \leq u_n$$
Or, $l' + \epsilon = \dfrac{2l' + l}{3}$ et $l - \epsilon = \dfrac{l' + 2l}{3}$ donc $l' + \epsilon < l - \epsilon$.
Ainsi : $\forall n \geq N'',\ v_n < u_n$.
Donc : $\forall n \geq N'',\ \inf(u_n, v_n) = v_n \quad$ et $\quad \sup(u_n, v_n) = u_n$.
Comme la limite d'une suite ne dépend que du comportement de cette suite à partir d'un certain rang, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \inf(u_n, v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l' = \min(l, l')$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup(u_n, v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l = \max(l, l')$.
- Si $l' > l$, on procède comme précédemment par symétrie entre $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Finalement, dans tous les cas $(\sup(u_n, v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\max(l, l')$ et $(\inf(u_n, v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\min(l, l')$.
Méthode 2 :
On remarque : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\sup(x, y) = \dfrac{x + y + |x - y|}{2}$ et $\inf(x, y) = \dfrac{x + y - |x - y|}{2}$. En effet :
Soient $x, y \in \mathbb{R}$:

- Si $x \leq y$, on a $\dfrac{x + y + |x - y|}{2} = \dfrac{x + y + y - x}{2} = y = \max(x, y)$
et $\dfrac{x + y - |x - y|}{2} = \dfrac{x + y - (y - x)}{2} = x = \min(x, y)$
- Si $x > y$, on a $\dfrac{x + y + |x - y|}{2} = \dfrac{x + y + x - y}{2} = x = \max(x, y)$
et $\dfrac{x + y - |x - y|}{2} = \dfrac{x + y - (x - y)}{2} = y = \min(x, y)$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\sup(u_n, v_n) = \frac{u_n + v_n + |v_n - u_n|}{2} \qquad \text{et} \qquad \inf(u_n, v_n) = \frac{u_n + v_n - |v_n - u_n|}{2}$$
Par opérations sur les limites, on a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup(u_n, v_n) = \dfrac{l + l' + |l' - l|}{2} = \sup(l, l')$.
De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} \inf(u_n, v_n) = \dfrac{l + l' - |l' - l|}{2} = \inf(l, l')$.

Exercice 16.

Exercice 17.

2 Suites récurrentes

Exercice 18. a. Posons $\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x^2}{3}+\dfrac{2}{3} \end{array}$.

Déterminons les points fixes de f :
Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x)=x &\iff \frac{x^2}{3}+\frac{2}{3}=x \\ &\iff x^2-3x+2=0 \\ &\iff x=1 \text{ ou } x=2 \end{aligned}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x)=\dfrac{2}{3}x$.
Ainsi :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

$u_0 \in [1,2]$ et $[1,2]$ est stable. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [1,2]$.
De plus, f est croissante sur $[1,2]$, ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
$u_1=f(u_0)=f(\dfrac{3}{2})=\dfrac{9}{12}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{17}{12}<u_0$. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. De plus, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ par théorème de la limite monotone.
De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $f(l)=l$ donc $l=1$ ou $l=2$. De plus, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Ainsi, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_0$ donc par passage à la limite, on a : $l \leq u_0$. D'où $l \leq \dfrac{3}{2}$. Ainsi, $l=1$.

b. Posons $\begin{array}{cccc} f: & \left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \ln(1+2x) \end{array}$.

Déterminons les points fixes de f :

Posons $\begin{array}{cccc} g: & \left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)-x \end{array}$.

g est dérivable sur $\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ et pour tout $x \in \left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$, $g'(x)=\dfrac{2}{1+2x}-1=\dfrac{1-2x}{1+2x}$.
Le tableau de variations de g est donc :

x	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
g	$-\infty$	$\nearrow$	$\ln(2)-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

Ainsi, g est continue et strictement croissante sur $\left]-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right[$.

Ainsi, g est bijective de $\left]-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right[$ sur $\left]-\infty,\ln(2)-\dfrac{1}{2}\right[$.

De plus, $0 \in \left]-\infty,\ln(2)-\dfrac{1}{2}\right[$. Donc l'équation $g(x)=0$ admet donc une unique solution sur $\left]-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right[$.

De même, l'équation $g(x)=0$ admet donc une unique solution sur $\left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$.

Or, $g(0) = 0$. Ainsi, il s'agit de l'unique solution de $g(x) = 0$ sur $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$. Par ailleurs, on note α l'unique solution non nulle de $g(x) = 0$ ($\alpha \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$).

On a donc :

x	$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
f	$\Vert$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

f est strictement croissante en tant que composée de fonctions strictement croissantes.
Ainsi, (u_n) est monotone.
Distinguons 5 cas :

- Si $u_0 = 0$, alors (u_n) sera constante égale à 0. On le prouve par récurrence.
- Si $u_0 = \alpha$ alors, (u_n) sera constante égale à α. On le prouve par récurrence.
- Si $u_0 \in]0, \alpha[$, comme $]0, \alpha[$ est stable par f, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in]u_0, \alpha[$. De plus, $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0 = g(u_0) > 0$ donc (u_n) est strictement croissante. De plus, (u_n) est majorée donc converge vers $l \in \mathbb{R}$ par théorème de la limite monotone. De plus, $l \in [0, \alpha]$ par passage à la limite dans les inégalités larges.
  Enfin, f est continue sur $[0, \alpha]$ donc l est un point fixe de f, donc $l = 0$ ou $l = \alpha$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_0 \leq u_n$ car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Ainsi, par passage à la limite dans les inégalités, on obtient : $0 < u_0 \leq l$. Ainsi, $l = \alpha$.
- Si $u_0 \in]\alpha, +\infty[$, comme $]0, \alpha[$ est stable par f, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in]u_0, \alpha[$. De plus, $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0 = g(u_0) < 0$ donc (u_n) est strictement décroissante. De plus, (u_n) est minorée donc converge vers vers $l' \in \mathbb{R}$ par théorème de la limite monotone. De plus, $l' \in [\alpha, +\infty[$ par passage à la limite dans les inégalités larges. Comme f est continue, l' est un point fixe de f, donc $l' = 0$ ou $l' = \alpha$. Or, $l' \in [\alpha, +\infty[$. Ainsi, $l' = \alpha$.
- Si $u_0 < 0$, alors (u_n) ne sera pas défini à partir d'un certain rang. Prouvons le par l'absurde.
  Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie i.e que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 + 2u_n > 0$.
  On prouve par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]-\frac{1}{2}, 0[$.
  - $u_0 < 0$.
  - Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n < 0$.
    Comme f est strictement croissante, on a $f(u_n) < f(0)$.
    Ainsi : $u_{n+1} < 0$.
  - Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < 0$.

  Or, f est croissante sur $\left]-\frac{1}{2}, 0\right[$. Ainsi, (u_n) est monotone. Enfin, $u_1 - u_0 = g(u_0) < 0$ donc (u_n) est décroissante. De plus, par hypothèse, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $-\frac{1}{2}$ donc (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$. De plus, par passage à la limite dans les inégalités larges, on a $l \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$. Ainsi,
  - 1er cas : (u_n) converge vers $l \in]-\frac{1}{2}, 0]$. Comme f est continue sur $]-\frac{1}{2}, 0]$, on en déduit que $f(l) = l$. Ainsi, $l = 0$. Absurde car (u_n) est décroissante donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_0$. Ainsi, par passage à la limite dans les inégalités larges, on a : $l \leq u_0 < 0$ donc $l < 0$.
  - 2ème cas : (u_n) converge vers $-\frac{1}{2}$. Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(1+2u_n) = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = -\infty$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1 + 2u_n)$. Absurde (unicité de la limite).

Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $1 + 2u_n \leq 0$ donc il existe un rang à partir duquel la suite n'est plus définie.

Exercice 19. a. Posons $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & xe^{-x} \end{array}$.
Déterminons les points fixes de f :
Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) = x \quad &\Longleftrightarrow \quad x(e^{-x} - 1) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = 0 \text{ ou } e^{-x} = 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = 0 \end{aligned}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = e^{-x}(1-x)$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$		$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

$u_0 \in [0,1]$ et $[0,1]$ est stable car $e^{-1} \leq 1$. Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1]$.
De plus, f est croissante sur $[0,1]$, ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
$u_1 = f(u_0) = f(1) = e^{-1} < u_0$. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. De plus, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0 donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ par théorème de la limite monotone.
De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $f(l) = l$ donc $l = 0$.

b. Posons $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 1+x^2 \end{array}$.
Déterminons les points fixes de f .
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = x \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - x + 1 = 0$$

Or, l'équation $x^2 - x + 1 = 0$ n'admet aucune solution réelle.
Ainsi, la fonction f n'a pas de point fixe.
De plus, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - x \geq 0$. Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geq 0$. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Par théorème de la limite monotone, (u_n) converge ou diverge vers $+\infty$.
Montrons par l'absurde que (u_n) diverge vers $+\infty$.
Supposons que (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, on a $f(l) = l$. Or, f n'admet aucun point fixe.
Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

c. Posons $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 + \dfrac{3}{16} \end{array}$.
Déterminons les points fixes de f :
Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) = x \quad & \Longleftrightarrow \quad x^2 + \frac{3}{16} = x \\ & \Longleftrightarrow \quad 16x^2 - 16x + 3 = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de $16x^2 - 16x + 3$ vaut $16^2 - 4 \times 3 \times 16 = 16(16-12) = 16 \times 4 = 8^2$.
Ainsi, on a :

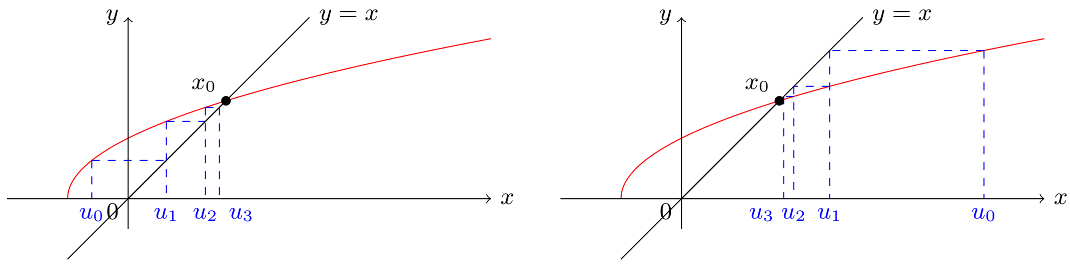
$$f(x) = x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{1}{4} \text{ ou } x = \frac{3}{4}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = 2x$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

$u_0 \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ et $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ est stable. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$.
De plus, f est croissante sur $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$, ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
$u_1 = f(u_0) = f(\dfrac{1}{2}) = \dfrac{3}{16} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{16} < u_0$. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. De plus, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $\dfrac{1}{4}$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ par théorème de la limite monotone.
De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $f(l) = l$ donc $l = \dfrac{1}{4}$ ou $l = \dfrac{3}{4}$. De plus, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Ainsi, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_0$ donc par passage à la limite, on a : $l \leq u_0$. D'où $l \leq \dfrac{1}{2}$. Ainsi, $l = \dfrac{1}{4}$.

Exercice 20. Commençons par visualiser graphiquement ce qu'il se passe :



Posons $\begin{array}{rccl} f: & [-1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{1+x} \end{array}$.

f est strictement croissante sur $[-1,+\infty[$ en tant que composée de fonctions strictement croissantes.
Ainsi, (u_n) est monotone et sa monotonie ne dépend que du signe de $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0$.
Déterminons les points fixes de f :
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f(x) = x &\iff x = \sqrt{1+x} \\
&\iff \begin{cases} x^2 = 1 + x \\ x \geq 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2 - x - 1 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x \geq 0 \end{cases} \\
&\iff x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

Posons $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. On a ainsi :

x	-1	x_1	$+\infty$
f	0 $\nearrow$	x_1 $\nearrow$	$+\infty$

Enfin, pour tout $x \in [-1, 0]$, on a : $x \leq 0 \leq f(x)$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned}
x \leq f(x) &\iff x \leq \sqrt{1+x} \\
&\iff x^2 \leq 1 + x \quad \text{car } x > 0 \\
&\iff x^2 - x - 1 \leq 0 \quad \text{car } x > 0 \\
&\iff x \in]0, x_1]
\end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$\forall x \in]-1, x_1], \ x \leq f(x)$$
$$\forall x \in]x_1, +\infty[, \ f(x) \leq x$$

On distingue finalement trois cas :

- Si $u_0 = x_1$, la suite (u_n) est constante égale à x_1 (on le prouve par récurrence).
- Si $u_0 \in [-1, x_1[$ comme $[-1, x_1[$ est stable par f, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [-1, x_1[$.
  De plus, f est croissante sur $[-1, x_1[$ donc (u_n) est monotone. Et $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0 \geq 0$. La suite (u_n) est donc croissante. De plus, (u_n) est majorée par x_1. Ainsi, la suite (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ par théorème de la limite monotone.
  Par passage à la limite dans les inégalités, on a : $l \in [-1, x_1]$.
  Enfin, f continue sur $[-1, x_1]$. Ainsi, $f(l) = l$ donc $l = x_1$.

- Si $u_0 \in]x_1, +\infty[$ comme $[x_1, +\infty[$ est stable par f, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [x_1, +\infty[$.
  De plus, f est croissante sur $[x_1, +\infty[$ donc (u_n) est monotone. Et $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0 \leq 0$. La suite (u_n) est donc décroissante. De plus, (u_n) est minorée par x_1. Ainsi, la suite (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ par théorème de la limite monotone.
  Par passage à la limite dans les inégalités, on a : $l \in [x_1, +\infty[$.
  Enfin, f continue sur $[x_1, +\infty[$. Ainsi, $f(l) = l$ donc $l = x_1$.

3 Suites adjacentes

Exercice 21.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$v_{2n+2} - v_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k = (-1)^{2n+2} u_{2n+2} + (-1)^{2n+1} u_{2n+1} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0$$

  car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
  Ainsi $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{2n+3} - v_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+3} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k u_k = -u_{2n+3} + u_{2n+2} \geq 0$$

  car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
  Ainsi $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{2n+1} - v_{2n} = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} (-1)^k u_k - \sum\limits_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k = -u_{2n+1}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
  Ainsi, $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} - (v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Les suites $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite.
En utilisant l'exercice 26, on peut donc conclure que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 22. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\mathcal{P}(n) :\ 0 < u_n < v_n.$$

- Pour $n = 0$: $0 < a < b$, $u_0 = a$ et $v_0 = b$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.
  On a alors : $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} > 0$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} > 0$ car $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
  De plus, $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + v_n - 2\sqrt{u_n v_n}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right)^2$.
  On a $v_n > 0$ et $u_n > 0$ donc $\sqrt{u_n}$ et $\sqrt{v_n}$ existent. De plus, par hypothèse de récurrence, $v_n > u_n$ donc $\sqrt{v_n} > \sqrt{u_n}$ Ainsi, $\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right)^2 > 0$ donc $v_{n+1} > u_{n+1}$.
  Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Ainsi, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < v_n$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\mathcal{Q}(n) \ :\ v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0).$$

- Pour $n = 0$: $v_0 - u_0 = \dfrac{1}{2^0}(v_0 - u_0)$. Ainsi, $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{Q}(n)$ vraie.
  $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + v_n) - \sqrt{u_n v_n} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + v_n - 2\sqrt{u_n v_n}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right)^2$.
  Or, $\quad \sqrt{v_n} - \sqrt{u_n} \leq \sqrt{v_n - u_n}$
  $\iff \sqrt{v_n} \leq \sqrt{v_n - u_n} + \sqrt{u_n}$
  $\iff v_n \leq v_n - u_n + u_n + 2\sqrt{u_n(v_n - u_n)}$
  Cette dernière inéquation est toujours vraie.
  On a donc : $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{v_n - u_n}\right)^2 = \dfrac{1}{2}(v_n - u_n) \underset{HR}{\leq} \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2^n}(v_0 - u_0) = \dfrac{1}{2^{n+1}}(v_0 - u_0)$.
  Ainsi, $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie.

- Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n - u_n \leq \dfrac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$.

3.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} > \sqrt{u_n u_n} = |u_n| = u_n$ car $v_n > u_n > 0$. Ainsi, (u_n) est strictement croissante.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{v_n + u_n}{2} < \dfrac{v_n + v_n}{2} = v_n$ car $v_n > u_n$. Ainsi, (v_n) est strictement décroissante.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 < v_n - u_n < \dfrac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$. Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$. Ainsi, par le théorème d'encadrement, $(v_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

   Donc (v_n) et (u_n) sont adjacentes.

Exercice 23. 1.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$.
     Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{1}{(n+1)(n+1)!} - \dfrac{1}{nn!} = \dfrac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} = \dfrac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$.
     Donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.
   - Enfin, soit $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - u_n = \dfrac{1}{nn!} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$.

   Ainsi, les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

2. Raisonnons par l'absurde.
   On suppose que l est rationnel. Alors, il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $l = \dfrac{p}{q}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit par stricte monotonie des suites : $u_n < u_{n+1} \leq e \leq v_{n+1} < v_n$.
   Ainsi :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n < \frac{p}{q} < u_n + \frac{1}{nn!}.$$
   En particulier pour $n = q$, on a :
   $$u_q < \frac{p}{q} < u_q + \frac{1}{qq!}$$
   puis
   $$qq!u_q < pq! < qq!u_q + 1$$
   Or, $qq!u_q = q \sum\limits_{k=0}^{q} \dfrac{q!}{k!}$ et pour tout $k \in [\![0, q]\!]$, $\dfrac{q!}{k!} = \dfrac{\prod\limits_{i=1}^{q} i}{\prod\limits_{j=1}^{k} j} = \prod\limits_{p=k+1}^{q} p \in \mathbb{N}$. Ainsi, $qq!u_q \in \mathbb{N}$ et $qq!u_q + 1$ est l'entier relatif consécutif. Ainsi, $pq!$ est un entier strictement compris entre $qq!u_q$ et $qq!u_q + 1$. Absurde.
   Ainsi, l n'est pas rationnel.

Exercice 24. Posons $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x+2} \end{array}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = \frac{x + 2 - (x+1)}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2}$$
Déterminons les points fixes de f :
Soit $x \in \mathbb{R}$
$$\begin{aligned} f(x) = x \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{x+1}{x+2} = x \\ &\Longleftrightarrow \quad x + 1 = x^2 + 2x \\ &\Longleftrightarrow \quad 0 = x^2 + x - 1 \end{aligned}$$
Le discriminant vaut 5. Ainsi :
$$f(x) = x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$
car $x \in \mathbb{R}_+$.
Notons $x_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.
On a donc :

x	0	x_1	$+\infty$
f			$+\infty$
		x_1	
	0		

- $u_0 \in [0, x_1[$ et $[0, x_1]$ est stable par f. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, x_1]$. De plus, f est croissante sur $[0, x_1]$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Et $u_1 = f(u_0) = f(0) = \dfrac{1}{2} > u_0$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- $v_0 \in [x_1, +\infty[$ et $[x_1, +\infty[$ est stable par f donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [x_1, +\infty[$. De plus, f est croissante sur $[x_1, +\infty[$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. De plus, $v_1 = f(v_0) = f(2) = \dfrac{3}{4} < v_0$ donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par x_1 donc converge vers $l \in \mathbb{R}$. De plus, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, x_1]$ et par passage à la limite dans les inégalités larges, $l \in [0, x_1]$. Enfin, f est continue sur $[0, x_1]$ donc $f(l) = l$. Ainsi, $l = x_1$.
  De même, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par x_1 donc converge vers $l' \in \mathbb{R}$. De plus, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [x_1, +\infty[$ et par passage à la limite dans les inégalités larges, $l' \in [x_1, +\infty[$. Enfin, f est continue sur $[x_1, +\infty[$ donc $f(l') = l'$. Ainsi, $l' = x_1$.
  Ainsi, $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x_1 - x_1 = 0$

Finalement, on a bien prouvé que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son adjacentes.

4 Suites extraites

Exercice 25. On considère les sous-suites : $(u_{10n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{10n+5})_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{10n} = \frac{5 \times 10^2 n^2 + \sin(10n)}{3(10n+2)^2} = \frac{5 \times 10^2 n^2 + \sin(10n)}{3 \times 10^2 n^2 + 3 \times 40n + 4 \times 3} = \frac{5}{3} \times \frac{1 + \frac{\sin(10n)}{500n^2}}{1 + \frac{2}{5n} + \frac{1}{25n^2}}.$$

Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(10n)}{500n^2} = 0$ car $((\sin(10n))$ est bornée). Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_{10n} = \frac{5}{3}$.
En revanche, $u_{10n+5} = -\dfrac{(10n+5)^2 + \sin(10n+5)}{3(10n+7)^2} = -\dfrac{5 \times 10^2 n^2 + 2 \times 5^2 \times 10n + \sin(10n+5)}{3 \times 10^2 n^2 + 3 \times 10 \times 2 \times 7n + 7^2 \times 3} = -\dfrac{5}{3} \times \dfrac{1 + \frac{1}{n} + \frac{\sin(10n+5)}{500n^2}}{1 + \frac{7}{5n} + \frac{49}{100n^2}}$.
Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(10n)}{500n^2} = 0$ car $((\sin(10n+5))$ est bornée). Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_{10n+5} = -\frac{5}{3}$. Ainsi, les suites extraites convergent mais ont des limites distinctes donc (u_n) n'admet pas de limite.

Exercice 26. Soit $\epsilon > 0$. Comme, la suite $(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers l alors il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall p \geq N_1,\ |u_{2p} - l| \leq \epsilon.$$

Et de même, pour la suite $(u_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall p \geq N_2,\ |u_{2p+1} - l| \leq \epsilon.$$

Posons $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$ et soit $n \geq N$:

- Si n est pair, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$ donc $2p \geq N \geq 2N_1$. Ainsi, $p \geq N_1$ d'où : $|u_{2p} - l| \leq \epsilon$. Donc $|u_n - l| \leq \epsilon$.
- Si n est impair, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p+1$ donc $2p+1 \geq N \geq 2N_2+1$. Ainsi, $p \geq N_2$ d'où : $|u_{2p+1} - l| \leq \epsilon$. Donc $|u_n - l| \leq \epsilon$.

Dans tous les cas, on a : $|u_n - l| \leq \epsilon$.
Ce qui prouve la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers l.

Exercice 27. Notons l_1, l_2 et l_3 les limites respectives de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$.
$(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$. En effet, $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}} = (u_{2(3n)})_{n\in\mathbb{N}} = (u_{3(2n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Donc $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l_1 et l_3. Donc par unicité de la limite, $l_1 = l_3$.
$(u_{6n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$. En effet, $(u_{6n+3})_{n\in\mathbb{N}} = (u_{3(2n+1)})_{n\in\mathbb{N}} = (u_{2(3n+1)+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Ainsi, $(u_{6n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l_2 et l_3 donc par unicité de la limite, $l_2 = l_3$.
Ainsi $l_1 = l_2$ et les suites extraites paires et impaires de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (à l'aide du résultat de l'exercice 26).

Exercice 28. 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
$$= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

Or : $\forall k \in [\![n+1, 2n]\!]$, $n+1 \leq k \leq 2n$.
Donc : $\forall k \in [\![n+1, 2n]\!]$, $\frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$.
Ainsi :

$$H_{2n} - H_n \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n}$$
$$\geq \frac{n}{2n}$$
$$\geq \frac{1}{2}$$

2. $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} \geq 0$.
Ainsi, d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge ou diverge vers $+\infty$.
Supposons que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ alors $\lim_{n\to+\infty}(H_{2n} - H_n) = l - l = 0$. Ceci est impossible puisque : $\forall n \in \mathbb{N},\ H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.
Ainsi, $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 29. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite périodique et convergente vers $l \in \mathbb{R}$.
Ainsi, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = u_n$.
Soit $k \in \mathbb{N}$, la suite extraite $(u_{np+k})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante de valeur commune u_k (par p-périodicité). De plus, $(u_{np+k})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l en tant que sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Ainsi, par unicité de la limite $u_k = l$.
Ceci étant vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$, on obtient que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à l.

5 Suites complexes

Exercice 30. 1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = x_{n+1} + iy_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n - y_n) + \frac{i}{2}(x_n + y_n) = \frac{1}{2}((1+i)x_n + i(1+i)y_n) = \frac{(1+i)}{2} z_n$.
Ainsi, (z_n) est géométrique de raison $\frac{(1+i)}{2}$ et de premier terme $z_0 = x_0 + iy_0$.
Ainsi, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = z_0 \left(\frac{1+i}{2}\right)^n.$$

Or, $\left|\frac{1+i}{2}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \in]-1, 1[$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1+i}{2}\right)^n = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} z_n = 0$.

2. (z_n) est une suite arithmético-géométrique.
Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\alpha = \frac{i}{2}\alpha + 1 \iff \frac{2-i}{2}\alpha = 1$$
$$\iff \alpha = \frac{2}{2-i}$$
$$\iff \alpha = \frac{2}{5}(2+i)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = z_n - \frac{2}{5}(2+i)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= z_{n+1} - \frac{2}{5}(2+i) \\
&= \frac{i}{2}z_n + 1 - \frac{2}{5}(2+i) \\
&= \frac{i}{2}z_n - \frac{2i}{5} + \frac{1}{5} \\
&= \frac{i}{2}\left(z_n - \frac{4}{5} + \frac{2}{5i}\right) \\
&= \frac{i}{2}\left(z_n - \frac{4}{5} - \frac{2i}{5}\right) \\
&= \frac{i}{2}\left(z_n - \frac{2}{5}(2+i)\right) \\
&= \frac{i}{2}v_n
\end{aligned}$$

Ainsi, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{i}{2}$.
De plus, $v_0 = z_0 - \frac{2}{5}(2+i)$.
Ainsi, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \left(\frac{i}{2}\right)^n v_0 = \left(\frac{i}{2}\right)^n \left(z_0 - \frac{2}{5}(2+i)\right).$$

Finalement, on obtient que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = \left(\frac{i}{2}\right)^n \left(z_0 - \frac{2}{5}(2+i)\right) + \frac{2}{5}(2+i).$$

Or, $\left|\frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2} \in]-1,1[$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n = 0$. Donc $\lim_{n\to+\infty} z_n = \frac{2}{5}(2+i)$.