Corrigé de la feuille d'exercices 28

1 Produit scalaire et norme euclidienne associée

Exercice 1.

- Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$. $\phi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k) = \sum_{k=0}^{n} Q(k)P(k) = \phi(Q,P)$. Ainsi, ϕ est symétrique.
- Soient $P, Q, R \in \mathbb{R}_n[X]$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\phi(\lambda P + \mu Q, R) &= \sum_{k=0}^{n} (\lambda P + \mu Q)(k) R(k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (\lambda P(k)R(k) + \mu Q(k)R(k)) \\ &= \lambda \sum_{k=0}^{n} P(k)R(k) + \mu \sum_{k=0}^{n} Q(k)R(k) \\ &= \phi(P,R) + \mu\phi(Q,R)\end{aligned}$$

Ainsi, ϕ est linéaire à gauche donc ϕ est bilinéaire.

- Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. $\phi(P,P) = \sum_{k=0}^{n} P(k)^2 \geq 0$. De plus, si $\phi(P,P) = 0$ alors $\sum_{k=0}^{n} P(k)^2 = 0$ donc : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(k) = 0$ (somme de termes positifs). Ainsi, P admet au moins $n+1$ racines distinctes or P est de degré inférieur ou égal à n donc $P = 0$. Ainsi, ϕ est définie-positive.

ϕ est donc bien un produit scalaire.

Exercice 2. Soient $x, y, z \in E$. On a : $\|x - z\|^2 = \|(x-y) + (y-z)\|^2$.
Ainsi, d'après l'identité du parallélogramme, on a :

$$\|(x-y) + (y-z\|^2 + \|x - y - (y-z)\|^2 = 2(\|x-y\|^2 + \|y-z\|^2)$$

Comme $\|x - y - (y-z)\|^2 \geq 0$, on obtient :

$$\|x - z\| \leq 2(\|x-y\|^2 + \|y-z\|^2)$$

Exercice 3. Soit $x, y \in E$. En utilisant les identités de polarisation, on a :

$$\begin{aligned}< f(x), f(y) > &= \frac{1}{2}\left(\|f(x) + f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\|f(x+y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right) \quad \text{car } f \text{ est linéaire} \\ &= \frac{1}{2}\left(\|g(x+y)\|^2 - \|g(x)\|^2 - \|g(y)\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\|g(x) + g(y)\|^2 - \|g(x)\|^2 - \|g(y)\|^2\right) \quad \text{car } g \text{ est linéaire} \\ &=< g(x), g(y) >\end{aligned}$$

Exercice 4. 1. Soient $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Posons ${}^tA = (c_{i,j})$ et ${}^tAB = (d_{i,j})$.
Soit $k, l \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}d_{k,l} &= \sum_{i=1}^{n} c_{k,i} b_{i,l} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} b_{i,l}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathrm{tr}({}^tAB) = \sum_{j=1}^{n} d_{j,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} b_{i,j}$$

- Soient $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\phi(A,B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{i,j}a_{i,j} = \phi(B,A)$. Ainsi, ϕ est symétrique.
- Soient $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}), C = (c_i,j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a :

$$\begin{aligned}\phi(\lambda A + \mu B, C) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j})c_{i,j} \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}c_{i,j} + \mu \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{i,j}c_{i,j} \\ &= \lambda\phi(A,C) + \mu\phi(B,C)\end{aligned}$$

  Ainsi, ϕ est linéaire à gauche donc bilinéaire.
- Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\phi(A,A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 \geq 0$. De plus, si $\phi(A,A) = 0$, alors : $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 = 0$.
  Donc : $\forall i,j \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} = 0$ (somme de réels positifs égale à 0).
  Ainsi, $A = 0$. Donc ϕ est définie positive.

Donc ϕ est un produit scalaire.

2. Soit $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$.
Posons $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et notons $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice ne contenant que des 1.
D'après l'inégalité de Cauchy Schwarz pour le produit scalaire de la question précédente, on a :

$$|\phi(A,U)| \leq \sqrt{\phi(U,U)}\sqrt{\phi(A,A)}.$$

Or, $\phi(U,U) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1 = n^2$ et $\phi(A,U) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$.
On en déduit que : $\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right| \leq n\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2}$.
De plus,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right| = n\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2} \quad &\text{si et seulement si} \quad (A,U) \text{ est liée} \\ &\text{si et seulement si} \quad U = 0 \text{ ou } \exists\lambda,\ A = \lambda U \\ &\text{si et seulement si } \exists\lambda \in \mathbb{R},\ \forall i,j \in [\![1,n]\!],\ a_{i,j} = \lambda\end{aligned}$$

Exercice 5. On pose $u = (\sqrt{x_1}, ..., \sqrt{x_n})$ et $v = (\frac{1}{\sqrt{x_1}}, ..., \frac{1}{\sqrt{x_n}})$. On note $<,>$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.
D'après l'inégalité de Cauchy Schwarz, on a :

$$< u, v >^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2$$

Or, $< u, v > = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{x_i}}{\sqrt{x_i}} = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$.
Ainsi, $n^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{x_i})^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right)^2\right)$.
On obtient alors :

$$n^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right)$$

Or, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ donc on obtient :

$$n^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}$$

$$\begin{aligned}
\text{Il y a égalité }\ &\text{si et seulement } (u,v) \text{ est liée}\\
&\text{si et seulement si } v=0 \text{ ou } \exists\lambda\in\mathbb{R}, u=\lambda v\\
&\text{si et seulement si } \exists\lambda\in\mathbb{R},\ u=\lambda v \quad (\text{ car } v\neq 0)\\
&\text{si et seulement si } \exists\lambda\in\mathbb{R},\ \forall i\in[\![1,n]\!],\ \sqrt{x_i}=\frac{\lambda}{\sqrt{x_i}}\\
&\text{si et seulement si } \exists\lambda\in\mathbb{R},\ \forall i\in[\![1,n]\!],\ x_i=\lambda\\
&\text{si et seulement si } : \forall i\in[\![1,n]\!],\ x_i=\frac{1}{n} \quad (\text{car } \sum_{k=1}^{n} x_k=1)
\end{aligned}$$

Exercice 6. On considère l'espace $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par :

$$< f,g >= \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

f étant continue sur $[a,b]$ et ne s'annulant pas sur $[a,b]$, f garde un signe constant (conséquence du TVI).
Quitte à changer f en $-f$, on suppose f strictement positive.
Posons $g=\sqrt{f}$.
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$< g, \frac{1}{g} >^2 \leq \|g\|^2 \left\|\frac{1}{g}\right\|^2$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Or, $< g, \frac{1}{g} >= \int_a^b \frac{g(t)}{g(t)}dt = \int_a^b 1dt = b-a$, $\|g\|^2 = \int_a^b g(t)^2 dt = \int_a^b f(t)dt$ et $\left\|\frac{1}{g}\right\|^2 \int_a^b \frac{1}{g(t)^2}dt = \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt.$
Ainsi :

$$(b-a)^2 \leq \int_a^b f(t)dt \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt.$$

$$\begin{aligned}
(b-a)^2 = \int_a^b f(t)dt\int_a^b \frac{1}{f(t)}dt \quad &\text{si et seulement si} \quad (g,\frac{1}{g}) \text{ est liée}\\
&\text{si et seulement si} \quad \frac{1}{g}=0 \text{ou il existe } \lambda\in\mathbb{R} \text{ tel que } g=\frac{\lambda}{g}\\
&\text{si et seulement si} \quad \text{il existe } \lambda\in\mathbb{R} \text{ tel que } g^2=\lambda\\
&\text{si et seulement si} \quad \text{il existe } \lambda\in\mathbb{R}_+^* \text{ tel que } g^2=\lambda \quad \text{car } g^2>0\\
&\text{si et seulement si} \quad \text{il existe } \lambda\in\mathbb{R}_+^* \text{ tel que } f=\lambda
\end{aligned}$$

De même, si $f<0$, on a égalité si et seulement si il existe $\lambda\in\mathbb{R}_-^*$ tel que $f=\lambda$.
Finalement, on a égalité si et seulement si il existe $\lambda\in\mathbb{R}^*$ tel que $f=\lambda$.

Exercice 7. 1. • Soient f, $g\in E$, on a :

$$< f,g >= f(1)g(1) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt = g(1)f(1) + \int_0^1 g'(t)f'(t)dt =< g,f > .$$

Ainsi, $<,>$ est symétrique.

- Soient $f,g,h\in E$. Soient $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
< \lambda f+\mu g, h > &= (\lambda f+\mu g)(1)h(1) + \int_0^1 (\lambda f+\mu g)'(t)h'(t)dt\\
&= \lambda f(1)h(1) + \mu g(1)h(1) + \int_0^1 \lambda f'(t)h'(t) + \mu g'(t)h'(t)dt\\
&= \lambda\left(f(1)h(1) + \int_0^1 f'(t)h'(t)dt\right) + \mu\left(g(1)h(1) + \int_0^1 g'(t)h'(t)dt\right)\\
&= \lambda < f,h > +\mu < g,h >
\end{aligned}$$

Ainsi, $<,>$ est bilinéaire.

- Soit $f \in E$, on a : $< f, f >= f(1)^2 + \int_0^1 f^2(t)dt$. Or, $t \mapsto f(t)^2$ est positive. Ainsi, par positivité de l'intégrale, $< f, f > \geq 0$.
  De plus, si $< f, f >= 0$. Alors, $f(1) = 0$ et $\int_0^1 f(t)^2 dt = 0$ (somme de termes positifs égale à 0).
  Or f^2 est continue et positive. Ainsi : $\forall t \in [0,1]$, $f(t) = 0$. Donc $f = 0$.
  Ainsi, $<, >$ est définie-positive.

On peut donc conclure que $< \cdot, \cdot >$ définit un produit scalaire sur E.

2. Soit $f \in E$.
   On pose $g : t \mapsto t$. On a bien $g \in E$.
   De plus, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :
   $$< f, g >^2 \leq \|f\|^2 \|g\|^2$$
   Or, $< f, g >= f(1)g(1) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt = f(1) + \int_0^1 f'(t)dt$, $\|g\|^2 = g(1)^2 + \int_0^1 g'(t)^2 dt = 1^2 + \int_0^1 1dt = 2$, $\|f\|^2 = f(1)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt$.
   Ainsi,
   $$\left(f(1) + \int_0^1 f'(t)dt \right)^2 \leq 2 \left(f(1)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt \right).$$

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $x_1, \ldots, x_n \in E$.
D'après l'inégalité triangulaire, on a :
$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n \|x_k\|.$$
Notons $<, >_{\mathbb{R}^n}$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ et $\| \ \|_{\mathbb{R}^n}$ la norme associée.
Posons $u = (1, ..., 1)$ et $X = (||x_1||, ..., ||x_n||)$.
D'après l'inégalité de Cauchy Schwarz, on a :
$$< u, X >_{\mathbb{R}^n}^2 \leq \|u\|_{\mathbb{R}^n}^2 \|X\|_{\mathbb{R}^n}^2.$$
Or, $< u, X >_{\mathbb{R}^n} = \sum_{k=1}^n \|x_k\| \times 1 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|$, $\|u\|^2 = \sum_{k=1}^n 1 = n$ et $\|v\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2$.
Ainsi :
$$\left(\sum_{k=1}^n ||x_k|| \right)^2 \leq n \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^2 \right)$$
Finalement, on en déduit que :
$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|^2 \leq n \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2$$

2 Orthogonalité

Exercice 9. 1. On souhaite prouver que :
$$\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$
Or, on a une hypothèse sur la norme. On va donc chercher à prouver que :
$$\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \|f(\lambda x + \mu y) - \lambda f(x) - \mu f(y)\| = 0.$$
En prenant $y = 0$ dans l'hypothèse, on obtient : $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$.
Soient $x, y \in E$, on a
$$\begin{aligned} < f(x), f(y) > &= \frac{1}{2}(\|f(x)\|^2 + \|f(y)\|^2 - \|f(x) - f(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|f(x)\|^2 + \|f(y)\|^2 - \|f(x - y)\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2) \\ &= < x, y > . \end{aligned}$$

Soient $(x,y)\in E^2$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
&\|f(\lambda x+\mu y)-\lambda f(x)-\mu f(y)\|^2\\
&=<f(\lambda x+\mu y),f(\lambda x+\mu y)>+\lambda^2<f(x),f(x)>+\mu^2<f(y),f(y)>-2\lambda<f(\lambda x+\mu y),f(x)>\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad-2\mu<f(\lambda x+\mu y),f(y)>+2\lambda\mu<f(x),f(y)>\\
&=<\lambda x+\mu y,\lambda x+\mu y>+\lambda^2<x,x>+\mu^2<y,y>-2\lambda<\lambda x+\mu y,x>-2\mu<\lambda x+\mu y,y>+2\lambda\mu<x,y)>\\
&=\lambda^2\|x\|^2+\mu^2\|y\|^2+2\lambda\mu<x,y>+\lambda^2\|x\|^2+\mu^2\|y\|^2-2\lambda^2\|x\|^2-2\lambda\mu<y,x>-2\lambda\mu<x,y>\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad-2\mu^2\|y\|^2+2\lambda\mu<x,y>\\
&=0
\end{aligned}$$

Ainsi, $f(\lambda x+\mu y)=\lambda f(x)+\mu f(y)$ donc f est linéaire.

2. On souhaite prouver que :
$$\forall x,y\in E,\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}, f(\lambda x+\mu y)=\lambda f(x)+\mu f(y)$$
Or, on a une hypothèse sur le produit scalaire. On va donc chercher à prouver que :
$$\forall x,y\in E,\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R},\forall w\in E,\ <w,f(\lambda x+\mu y)-\lambda f(x)-\mu f(y)>=0.$$
Soient $x,y\in E$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.
Soit $w\in E$, on a :
$$\begin{aligned}
<w,f(\lambda x+\mu y)-\lambda f(x)-\mu f(y)> &=<w,f(\lambda x+\mu y)>-\lambda<w,f(x)>-\mu<w,f(y)>\\
&=<g(w),\lambda x+\mu y>-\lambda<g(w),x>-\mu<g(w),y>\\
&=<g(w),\lambda w+\mu y-\lambda x-\mu y>\\
&=0.
\end{aligned}$$
Donc $f(\lambda x+\mu y)-\lambda f(x)-\mu f(y)$ est orthogonal à tout élément de E.
Ainsi, $f(\lambda x+\mu y)-\lambda f(x)-\mu f(y)=0$.
Donc f est linéaire. Par symétrie entre f et g, on montre de même que g est linéaire.

Exercice 10. Les vecteurs sont déjà normés, il suffit donc de montrer que la famille est orthogonale.
Soit $i\in[\![1,n]\!]$.
On a par hypothèse $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}<e_k,e_i>^2=\|e_i\|^2=1$, donc $\displaystyle\sum_{k\in[\![1,n]\!]\setminus\{i\}}<e_k,e_i>^2=0$.
Ainsi : $\forall j\in[\![1,n]\!]\setminus\{i\}$, $<e_k,e_i>=0$ (somme de réels positifs tous nuls).
Donc : $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\forall j\in[\![1,n]\!]\setminus\{i\}$, $<e_k,e_i>=0$.
La famille est orthogonale donc orthonormale.
Il s'agit donc d'une famille libre.
Soit $x\in E$.
$$\begin{aligned}
\left\|x-\sum_{k=1}^{n}<x,e_k>e_k\right\|^2&=\|x\|^2-2<x,\sum_{k=1}^{n}<x,e_k>e_k>+\left\|\sum_{k=1}^{n}<x,e_k>\right\|^2\\
&=\|x\|^2-2\sum_{k=1}^{n}<x,e_k>^2+\sum_{k=1}^{n}<x,e_k>^2\\
&=\|x\|^2-2\|x\|^2+\|x\|^2\\
&=0
\end{aligned}$$
Ainsi, on en déduit que $x=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}<x,e_k>e_k$. Donc , la famille $(e_1,...,e_n)$ est génératrice de E. Ainsi, $(e_1,...,e_n)$ est une base de E donc E est de dimension finie.

Exercice 11.
- Soit $x\in(F+G)^\perp$. Soit $y\in F$, $y=y+0\in F+G$ donc $<x,y>=0$. Ainsi, $x\in F^\perp$. De même $x\in G^\perp$. Ainsi $x\in F^\perp\cap G^\perp$ et on a $(F+G)^\perp\subset F^\perp\cap G^\perp$.
Réciproquement, soit $x\in F^\perp\cap G^\perp$. Soit $y\in F+G$, il existe $(a,b)\in F\times G$ tel que $y=a+b$. Par suite : $<x,y>=<x,a>+<x,b>=0$ (car $x\in F^\perp$ et $x\in G^\perp$) donc $x\in(F+G)^\perp$. Ainsi $(F+G)^\perp=F^\perp\cap G^\perp$.
- Méthode 1 :
Soit $x\in F^\perp+G^\perp$, il existe $(a,b)\in F^\perp\times G^\perp$ tel que $x=a+b$. Soit $y\in F\cap G$, on a : $<x,y>=<x,a>+<x,b>=0$ car $y\in F$ et $y\in G$.

Ainsi, $x \in (F \cap G)^{\perp}$.
Méthode 2 :
On peut aussi appliquer le point précédent à $F^{\perp}$ et $G^{\perp}$.
$(F^{\perp} + G^{\perp})^{\perp} = (F^{\perp})^{\perp} \cap (G^{\perp})^{\perp}$. Or, $F \cap G \subset (F^{\perp})^{\perp} \cap (G^{\perp})^{\perp}$. D'où $F \cap G \subset (F^{\perp} + G^{\perp})^{\perp}$.
Puis, $\left((F^{\perp} + G^{\perp})^{\perp}\right)^{\perp} \subset (F \cap G)^{\perp}$.
Or, $F^{\perp} + G^{\perp} \subset \left((F^{\perp} + G^{\perp})^{\perp}\right)^{\perp}$.
Donc $F^{\perp} + G^{\perp}(F \cap G)^{\perp}$.

- Si de plus, E est de dimension finie alors, $F = (F^{\perp})^{\perp}$ et $G = (G^{\perp})^{\perp}$. En reprenant la démonstration précédente, on obtient $F \cap G = (F^{\perp} + G^{\perp})^{\perp}$ puis, $(F \cap G)^{\perp} = ((F^{\perp} + G^{\perp})^{\perp})^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

Exercice 12.

- On a $\|u_1\| = \sqrt{2}$.
  On pose alors $f_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$.
- On pose $v_2 = u_2 - < u_2, f_1 > f_1$.
  Or, $< u_2, f_1 >= \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
  Ainsi, $v_2 = (1, 0, 1) - \dfrac{1}{2}(1, 1, 0) = \dfrac{1}{2}(1, -1, 2)$.
  On a : $\|v_2\| = \dfrac{1}{2}\sqrt{6}$.
  On pose alors $f_2 = \dfrac{v_2}{\|v_2\|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2)$.
- Enfin, on pose : $v_3 = u_3 - < u_3, f_1 > f_1 - < u_3, f_2 > f_2$.
  Or, $< u_3, f_1 >= \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $< u_3, f_2 >= \dfrac{1}{\sqrt{6}}$.
  Ainsi, $v_3 = (0, 1, 1) - \dfrac{1}{2}(1, 1, 0) - \dfrac{1}{6}(1, -1, 2) = \dfrac{2}{3}(-1, 1, 1)$.
  On a $\|v_3\| = \dfrac{2}{3}\sqrt{3}$.
  On pose alors : $f_3 = \dfrac{v_3}{\|v_3\|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)$.

(f_1, f_2, f_3) est orthonormale.

Exercice 13.

- On a $\|u_1\| = \sqrt{3}$.
  On pose alors $f_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(0, 1, 1, 1)$.
- On pose $v_2 = u_2 - < u_2, f_1 > f_1$.
  Or, $< u_2, f_1 >= \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.
  Ainsi, $v_2 = (1, 0, 1, 1) - \dfrac{2}{3}(0, 1, 1, 1) = (1, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}) = \dfrac{1}{3}(3, -2, 1, 1)$.
  On a $\|v_2\| = \dfrac{1}{3}\sqrt{9 + 4 + 1 + 1} = \dfrac{1}{3}\sqrt{15}$.
  On pose alors : $f_2 = \dfrac{v_2}{\|v_2\|} = \dfrac{1}{\sqrt{15}}(3, -2, 1, 1)$.
- On pose : $v_3 = u_3 - < u_3, f_1 > f_1 - < u_3, f_2 > f_2$.
  Or, $< u_3, f_1 >= \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $< u_3, f_2 >= \dfrac{2}{\sqrt{15}}$.
  Ainsi : $v_3 = (1, 1, 0, 1) - \dfrac{2}{3}(0, 1, 1, 1) - \dfrac{2}{15}(3, -2, 1, 1) = \dfrac{1}{15}(9, 9, -12, 3) = \dfrac{1}{5}(3, 3, -4, 1)$.
  On a $\|v_3\| = \dfrac{1}{5}\sqrt{9 + 9 + 16 + 1} = \dfrac{1}{5}\sqrt{35}$.
  On pose alors : $f_3 = \dfrac{v_3}{\|v_3\|} = \dfrac{1}{\sqrt{35}}(3, 3, -4, 1)$.
- On pose : $v_4 = u_4 - < u_4, f_1 > f_1 - < u_4, f_2 > f_2 - < u_4, f_3 > f_3$.
  Or, $< u_4, f_1 >= \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $< u_4, f_2 >= \dfrac{2}{\sqrt{15}}$, $< u_4, f_3 >= \dfrac{2}{\sqrt{35}}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
v_4 &= (1,1,1,0) - \frac{2}{3}(0,1,1,1) - \frac{2}{15}(3,-2,1,1) - \frac{2}{35}(3,3,-4,1)\\
&= \frac{1}{15}(9,9,3,-12) - \frac{2}{35}(3,3,-4,1)\\
&= \frac{1}{5}(3,3,1,-4) - \frac{2}{35}(3,3,-4,1)\\
&= \frac{1}{35}(15,15,15,-30) = \frac{1}{7}(3,3,3,-6) = \frac{3}{7}(1,1,1,-2)
\end{aligned}$$

On a $\|v_4\| = \dfrac{3}{7}\sqrt{1++1+4} = \dfrac{3}{7}\sqrt{7}$.

On pose alors : $f_4 = \dfrac{v_3}{\|v_3\|} = \dfrac{1}{\sqrt{7}}(1,1,1,-2)$.

(f_1, f_2, f_3, f_4) est orthonormale.

Exercice 14. 1. • Soient $P, Q \in E$, $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt = \int_{-1}^{1} Q(t)P(t)dt = (Q|P)$.

Ainsi, $(|)$ est symétrique.

- Soient $P, Q, R \in E$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
(\lambda P + \mu Q|R) &= \int_{-1}^{1} (\lambda P + \mu Q)(t)R(t)dt\\
&= \int_{-1}^{1} \lambda P(t)R(t) + \mu Q(t)R(t)dt\\
&= \lambda \int_{-1}^{1} P(t)R(t)dt + \mu \int_{-1}^{1} Q(t)R(t)dt\\
&= \lambda(P|R) + \mu(Q|R).
\end{aligned}$$

Ainsi, $(|)$ est bilinéaire.

- Soient $P \in E$, on a $(P|P) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)^2 dt$. Or, $t \mapsto P(t)^2$ est continue positive donc $(P|P) \geq 0$ par positivité de l'intégrale.

De plus, si $(P|P) = 0$, on a $\displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)^2 dt = 0$. Or, $t \mapsto P(t)^2$ est continue positive donc : $\forall t \in [-1,1],\ P(t)^2 = 0$.

Ainsi : $\forall t \in [-1,1],\ P(t) = 0$. P admet donc une infinité de racines donc $P = 0$. Ainsi, $(|)$ est définie-positive.

$(,)$ est donc un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Notons $\|\ \|$ la norme euclidienne associée à ce produit scalaire.

- On a $\|1\|^2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} 1dt = 2$.

On pose alors $Q_0 = \dfrac{1}{\|1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

- On pose $R_1 = X - (X|Q_0)Q_0$.

Or, $(X|Q_0) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2}} tdt = \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big[t^2\Big]_{-1}^{1} = 0$.

Ainsi, $R_1 = X$.

On a $\|R_1\|^2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$.

On pose alors : $Q_1 = \dfrac{R_1}{\|R_1\|} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}X$.

- On pose $R_2 = X^2 - (X^2|Q_1)Q_1 - (X^2|Q_0)Q_0$.

Or, $(X^2|Q_0) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t^2}{\sqrt{2}}dt = \frac{1}{3\sqrt{2}}\Big[t^3\Big]_{-1}^{1} = \frac{2}{3\sqrt{2}}$ et $(X^2|Q_1) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{3}{2}}t^3 dt = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{4}\Big[t^4\Big]_{-1}^{1} = 0$.

Ainsi, $R_2 = X^2 - \dfrac{2}{3\sqrt{2}}Q_0 = X^2 - \dfrac{2}{3\sqrt{2}} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} = X^2 - \dfrac{1}{3}$.

On a $\|R_2\|^2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dt = \int_{-1}^{1} t^4 - \frac{2}{3}t^2 + \frac{1}{9}tdt = \frac{1}{5} \times 2 - \frac{2}{9} \times 2 + \frac{2}{9} = \frac{18-10}{5 \times 9} = \frac{8}{5 \times 9}$

Donc $\|R_2\| = \dfrac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}$.

On pose alors $Q_2 = \dfrac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(X^2 - \dfrac{1}{3}\right)$.

- On pose $R_3 = X^3 - (X^3|Q_0)Q_0 - (X^3|Q_1)Q_1 - (X^3|Q_2)Q_2$.

  Or, $(X^3|Q_0) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t^3}{\sqrt{2}}dt = 0$, $(X^3|Q_2) = \dfrac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\displaystyle\int_{-1}^{1} t^5 - \frac{1}{3}t^3 dt = 0$, $(X^3|Q_1) = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\displaystyle\int_{-1}^{1} t^4 dt = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{3}{2}}$.

  Ainsi $R_3 = X^3 - \dfrac{2}{5}\sqrt{\dfrac{3}{2}}Q_1 = X^3 - \dfrac{2}{5}\sqrt{\dfrac{3}{2}}\sqrt{\dfrac{3}{2}}X = X^3 - \dfrac{3}{5}X$.

  On a $\|R_3\|^2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} t^6 + \frac{9}{25}t^2 - \frac{6}{5}t^4 dt = \frac{2}{7} + \frac{2\times 3}{25} - \frac{12}{25} = \frac{2}{7} - \frac{6}{25} = \frac{50-42}{7\times 25} = \frac{8}{7\times 5^2}$.

  Donc $\|R_3\| = \dfrac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{7}}$.

  On pose alors $Q_3 = \dfrac{5}{2}\sqrt{\dfrac{7}{2}}\left(X^3 - \dfrac{3}{5}X\right)$.

La famille (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) est la famille orthonormale recherchée.

Exercice 15.

- Soit $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$\phi(x,y) = (x_1-2x_2)(y_1-2y_2)+x_2y_2+(x_2+x_3)(y_2+y_3) = (y_1-2y_2)(x_1-2x_2)+y_2x_2+(y_2+y_3)(x_2+x_3) = \phi(y,x)$$

Ainsi, ϕ est symétrique.

- Soient $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3), z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\phi(\lambda x + \mu y, z) &= \Phi((\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3), z)\\
&= (\lambda x_1 + \mu y_1 - 2(\lambda x_2 + \mu y_2))(z_1 - 2z_2) + (\lambda x_2 + \mu y_2)z_2 + (\lambda x_2 + \mu y_2 + \lambda x_3 + \mu y_3)(z_2 + z_3)\\
&= \lambda\left[(x_1 - 2x_2)(z_1 - 2z_2) + x_2z_2 + (x_2 + x_3)(z_2 + z_3)\right] + \lambda\left[(y_1 - 2y_2)(z_1 - 2z_2) + y_2z_2 + (y_2 + y_3)(z_2 + z_3)\right]\\
&= \lambda\phi(x,z) + \mu\phi(y,z)
\end{aligned}$$

Ainsi, ϕ est linéaire à gauche et donc bilinéaire.

- Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. On a $\Phi(x,x) = (x_1 - 2x_2)^2 + x_2^2 + (x_2 + x_3)^2 \geq 0$. De plus, si $\Phi(x,x) = 0$ alors $\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ Ainsi, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

  ϕ est donc définie-positive.

ϕ est donc un produit scalaire.

Notons $\|\ \|$ la norme euclidienne associée à ce produit scalaire. Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

- On a $\|e_1\| = 1$.

  On pose alors pose $f_1 = \dfrac{1}{\|e_1\|}e_1 = (1,0,0)$.

- On pose $v_2 = e_2 - \phi(e_2, f_1)f_1$.

  Or, $\phi(e_2, f_1) = -2$.

  Ainsi, $v_2 = (0,1,0) - (-2)(1,0,0) = (2,1,0)$.

  On a : $\|v_2\| = \sqrt{2}$.

  On pose alors :$f_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(2,1,0)$.

- On pose $v_3 = e_3 - \phi(e_3, f_1)f_1 - \phi(e_3, f_2)f_2$.

  Or, $\phi(e_3, f_1) = 0$ et $\phi(e_3, f_2) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Ainsi, $v_3 = (0,0,1) - \dfrac{1}{2}(2,1,0) = (-1, -\dfrac{1}{2}, 1)$.

  On a $\|v_3\| = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

  On pose alors $f_3 = \sqrt{2}(-1, -\dfrac{1}{2}, 1)$.

Ainsi, la famille (f_1, f_2, f_3) est orthonormée.

Exercice 16. 1.

- Soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, on a :

$$\phi(P,Q) = P(1)Q(1) + 2P'(1)Q'(1) + 3P''(1)Q''(1) = Q(1)P(1) + 2Q'(1)P'(1) + 3Q''(1)P''(1) = \phi(Q,P).$$

Ainsi, ϕ est symétrique.

- Soient $P, Q, R \in \mathbb{R}_2[X]$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

  $$\phi(\lambda P+\mu Q, R) = (\lambda P+\mu Q)(1)R(1)+2(\lambda P+\mu Q)(1)R'(1)+3(\lambda P+\mu Q)''(1)R''(1) = \lambda\left(P(1)R(1) + 2P'(1)R'(1) + 3P''(\right.$$

  Ainsi, ϕ est linéaire à gauche donc bilinéaire.
- Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on a $\phi(P,P) = P(1)^2 + 2P'(1)^2 + 3P''(1)^2 \geq 0$.
  De plus, si $\phi(P,P) = 0$, alors $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$ (somme de réels positifs nulle). Ainsi, 1 est racine au moins triple de P. Or, $d^\circ P \leq 2$ donc on a $P = 0$.
  Ainsi, ϕ est définie-positive.

ϕ est donc bien un produit scalaire.

2. On orthonormalise la base $(1, X, X^2)$ par l'algorithme de Graam Schmidt.
Notons $\| \ \|$ la norme euclidienne associée à ce produit scalaire.

- On a $\|1\| = 1$.
  On pose alors $P_0 = \dfrac{1}{\|1\|} = 1$.
- On pose $P_1 = X - \phi(X, P_0)P_0$.
  Or, $\phi(X, P_0) = 1$.
  Ainsi $P_1 = X - 1$.
  On a $\|X - 1\| = \sqrt{2}$.
  On pose alors $P_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(X - 1)$.
- On pose $P_2 = X^2 - \phi(X^2, P_0)P_0 - \phi(X^2, P_1)P_1$.
  Or, $\phi(X^2, P_0) = 1$ et $\phi(X^2, P_1) = 2\sqrt{2}$.
  Ainsi, $P_2 = X^2 - 1 - 2(X - 1) = X^2 - 2X + 1$.
  On a $\|X^2 - 2X + 1\| = 2\sqrt{3}$.
  On pose alors $P_2 = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}(X^2 - 2X + 1)$.

Exercice 17. 1. • Soient $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$, on a : $\phi((x,y),(x',y')) = 2xx' + 2yy' + xy' + x'y = 2x'x + 2y'y + x'y + xy' = \phi((x',y'),(x,y))$.
Ainsi, ϕ est symétrique.

- Soient $(x,y), (u,v), (a,b) \in \mathbb{R}^2$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

  $$\begin{aligned}\phi(\lambda(x,y) + \mu(u,v), (a,b)) &= 2(\lambda x + \mu u)a + 2(\lambda y + \mu v)b + (\lambda x + \mu u)b + a(\lambda y + \mu v) \\ &= \lambda(2xa + 2yb + xb + ay) + \mu(2ua + 2vb + ub + av) \\ &= \lambda\phi((x,y),(a,b)) + \mu\phi((u,v),(a,b)).\end{aligned}$$

  Ainsi, ϕ est linéaire à gauche donc bilinéaire.
- Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\phi((x,y),(x,y)) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy = (x+y)^2 + x^2 + y^2 \geq 0$.
  De plus, si $\phi((x,y),(x,y)) = 0$ alors $(x+y)^2 + x^2 + y^2 = 0$ donc $x + y = x = y = 0$ (somme de carrés positive).
  Donc ϕ est définie-positive.

Ainsi, ϕ est bien un produit scalaire.
Notons $\| \ \|$ la norme associée à ce produit scalaire, $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$.

- On a $\|e_1\| = \sqrt{2}$.
  On pose alors : $f_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0)$.
- On pose $v_2 = e_2 - \phi(e_2, f_1)f_1$.
  Or, $\phi(e_2, f_1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
  Ainsi, $v_2 = (0,1) - \dfrac{1}{2}(1,0) = \left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$.
  On a $\|v_2\| = \sqrt{2 \times \dfrac{1}{4} + 2 - 1} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$.
  On pose alors $f_2 = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$.

La famille (f_1, f_2) est orthonormale.

2. On a $\phi((1,-1),(1,-1)) = -5 < 0$ donc ϕ n'est pas définie-positive. Ainsi, ϕ n'est pas un produit scalaire.

Exercice 18. 1. • Soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, on a $\phi(P,Q) = \sum_{k=0}^{2} P(k)Q(k) = \sum_{k=0}^{2} Q(k)P(k) = \phi(Q,P)$.
Ainsi, ϕ est symétrique.
• Soient $P, Q, R \in \mathbb{R}_2[X]$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\phi(\lambda P + \mu Q, R) &= \sum_{k=0}^{2} (\lambda P + \mu Q)(k)R(k) \\ &= \sum_{k=0}^{2} (\lambda P(k)R(k) + \mu Q(k)R(k)) \\ &= \lambda \sum_{k=0}^{2} P(k)R(k) + \mu \sum_{k=0}^{2} Q(k)R(k) \\ &= \lambda\phi(P,R) + \mu\phi(Q,R).\end{aligned}$$

2. Orthonormalisons la base canonique par le procédé de Gram-Schmidt.
   - On a $\|1\| = \sqrt{3}$.
     On pose alors $Q_0 = \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
   - On pose $R_1 = X - < X, Q_0 > Q_0$.
     Or, $< X, Q_0 >= \sqrt{3}$.
     Ainsi, $R_1 = X - 1$.
     On a $\|R_1\| = \sqrt{1+1}$.
     On pose alors $Q_1 = \frac{R_1}{\|R_1\|} = \frac{X-1}{\sqrt{2}}$.
   - On pose $R_2 = X^2 - < X^2, Q_0 > Q_0 - < X^2, Q_1 > Q_1$.
     Or, $< X^2, Q_0 >= \frac{5}{\sqrt{3}}$, $< X^2, Q_1 >= \frac{4}{\sqrt{2}}$.
     Ainsi, $R_2 = X^2 - \frac{5}{3} - 2(X-1) = X^2 - 2X + \frac{1}{3}$.
     On a $\|R_2\| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.
     On pose alors $Q_2 = \frac{R_2}{||R_2||} = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(X^2 - 2X + \frac{1}{3}\right)$.

Exercice 19. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Notons $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $B = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(g)$.
On sait que A est symétrique et B est antisymétrique donc ${}^tA = A$ et ${}^tB = -B$.
Soit $x \in E$. Notons $X = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(x)$. On a alors : $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f(x)) = AX$ et $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(g(x)) = BX$.
Ainsi :

$$< f(x), g(x) >= {}^t(AX)(BX) = {}^tX{}^tABX = {}^tXABX$$

$$< f(x), g(x) >=< g(x), f(x) >= {}^t(BX)AX = {}^tX{}^tBAX = -{}^tXBAX$$

De plus, $f \circ g = g \circ f$ donc $AB = BA$.
Ainsi, $< f(x), g(x) >= -{}^tXABX = - < f(x), g(x) >$. D'où $< f(x), g(x) >= 0$.
Soit $x \in E$, $f(x)$ et $g(x)$ sont orthogonaux. Ainsi, par le théorème de Pythagore :

$$\|(f-g)(x)\|^2 = \|f(x) - g(x)\|^2 = \|f(x)\|^2 + \|g(x)\|^2 = \|f(x) + g(x)\|^2 = \|(f+g)(x)\|^2$$

Exercice 20. 1. On a $g(0) = 0$ donc $g \in H$. De plus, $f \in H^\perp$, ainsi $< f, g >= 0$. Donc

$$< f, g >= \int_0^1 tf(t)^2 dt$$

Or, $t \mapsto tf(t)^2$ est continue et positive sur $[0,1]$. Ainsi, $\forall t \in [0,1],\ tf(t)^2 = 0$. Donc $\forall t \in]0,1],\ f(t) = 0$. Or, f est continue en 0 donc : $\forall t \in [0,1],\ f(t) = 0$. Donc $f = 0$.

2. On a prouvé que $H^\perp \subset \{0\}$ donc $H^\perp = \{0\}$.
Ainsi, $(H^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = E$.
Finalement, H et $H^\perp$ ne sont pas supplémentaires car $H \neq E$. De plus $H \subset (H^\perp)^\perp$ mais il n'y a pas égalité.

3 Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel

Exercice 21. 1. Soit q la projection orthogonale sur $\text{Vect}\,(u)$. $\left(\frac{u}{\|u\|}\right)$ est une base orthonormée de $\text{Vect}\,(u)$.
Ainsi, pour tout $x \in E$,

$$q(x) = (x|\frac{u}{\|u\|})\frac{u}{\|u\|} = \frac{(x|u)}{\|u\|^2}u$$

par linéarité.
Or, $p + q = Id_E$. Ainsi :

$$\forall x \in E,\ p(x) = x - \frac{(x|u)}{\|u\|^2}u.$$

2. On sait que $s = p - q$. Ainsi, pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned} s(x) &= p(x) - q(x) \\ &= x - \frac{(x|u)}{\|u\|^2}u - \frac{(x|u)}{\|u\|^2}u \\ &= x - 2\frac{(x|u)}{\|u\|^2}u. \end{aligned}$$

Exercice 22. Cherchons une base orthonormée de F.
Commençons par chercher une base de F.

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0, -2y - 2t = 0\} \\ &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x = -y - z - t, y = -t\} \\ &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x = -z, Y = -t\} \\ &= \{(-z, -t, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z(-1, 0, 1, 0) + t(0, -1, 0, 1) \mid z, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}\,((-1, 0, 1, 0), (0, -1, 0, 1)) \end{aligned}$$

Posons $e_1 = (-1, 0, 1, 0)$ et $e_2 = (0, -1, 0, 1)$.
e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires donc (e_1, e_2) est libre. Ainsi, (e_1, e_2) est une base de F.
Orthonormalisons cette base.
On pose $f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1, 0)$.
On pose $v_2 = e_2 - < e_2, f_1 > f_1 = (0, -1, 0, 1)$.
Or, $\|v_2\| = \sqrt{2}$.
On pose finalement $f_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 0, 1)$.
(f_1, f_2) est une base orthonormée de F.
Ainsi, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$,

$$\begin{aligned} p_F(x, y, z, t) &= < (x, y, z, t), f_1 > f_1 + < (x, y, z, t), f_2 > f_2 \\ &= \frac{1}{2}(-x + z)(-1, 0, 1, 0) + \frac{1}{2}(-y + t)(0, -1, 0, 1) \\ &= \frac{1}{2}(x - z, y - t, -x + z, -y + t) \end{aligned}$$

On note $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Ainsi,

$$\text{mat}_{\mathcal{B}_c}(p_F) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 23. Cherchons une base orthonormée de F.

Commençons par chercher une base de F.

$$\begin{aligned}
F &= \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4, x+2y+3z+4t=0, y+2z+3t=0\}\\
&= \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4, x+2y+3z+4t=0, y=-2z-3t\}\\
&= \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4, x=4z+6t-3z-4t, y=-2z-3t\}\\
&= \{(z+2t,-2z-3t,z,t)\mid z,t\in\mathbb{R}\}\\
&= \{z(1,-2,1,0)+t(2,-3,0,1)\mid z,t\in\mathbb{R}\}\\
&= \mathrm{Vect}\left((1,-2,1,0),(2,-3,0,1)\right)
\end{aligned}$$

Posons $e_1=(1,-2,1,0)$ et $e_2=(2,-3,0,1)$.
e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires donc (e_1,e_2) est libre. Ainsi, (e_1,e_2) est une base de F.
Orthonormalisons cette base.
On pose $f_1=\dfrac{e_1}{\|e_1\|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}e_1=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1,0)$.
On pose :

$$\begin{aligned}
v_2 &= e_2- < e_2,f_1 > f_1\\
&= (2,-3,0,1)-\frac{8}{6}(1,-2,1,0)=(2,-3,0,1)-\frac{4}{3}(1,-2,1,0)\\
&= \frac{1}{3}(2,-1,-4,3)
\end{aligned}$$

Or, $\|v_2\|=\dfrac{1}{3}\sqrt{4+1+16+9}=\dfrac{1}{3}\sqrt{30}$. On pose finalement $f_2=\dfrac{1}{\sqrt{30}}(2,-1,-4,3)$.
(f_1,f_2) est une base orthonormée de F.
Ainsi, pour tout $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$,

$$\begin{aligned}
p_F(x,y,z,t) &=< (x,y,z,t),f_1 > f_1+ < (x,y,z,t),f_2 > f_2\\
&= \frac{1}{6} < (x,y,z,t),(1,-2,1,0) > (1,-2,1,0)+\frac{1}{30}(< (x,y,z,t),(2,-1,-4,3) > (2,-1,-4,3)\\
&= \frac{1}{30}(5x-10y+5z+4x-2y-8z+6t,-10x+20y-10z-2x+y+4z-3t,\\
&\qquad 5x-10y+5z-8x+4y+16z-12t,6x-3y-12z+9t)\\
&= \frac{1}{30}(9x-12y-3z+6t,-12x+21y-6z-3t,-3x-6y+21z-12t,6x-3y-12z+9t)\\
&= \frac{1}{10}(3x-4y-z+2t,-4x+7y-2z-t,-x-2y+7z-4t,2x-y-4z+3t)
\end{aligned}$$

On note $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Ainsi,

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_c}(p_F)=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}3&-4&-1&2\\-4&7&-2&-1\\-1&-2&7&-4\\2&-1&-4&3\end{pmatrix}$$

Exercice 24.

1. Supposons que p soit un projecteur orthogonal sur F.
   Soit $x\in\mathbb{R}^n$. On a $x=p(x)+x-p(x)$. $p(x)\in F$ et $x-p(x)\in F^\perp$ par définition du projeté orthogonal.
   D'après le théorème de Pythagore, on a donc :

   $$\begin{aligned}
   \|x\|^2 &= \|p(x)\|^2+\|x-p(x)\|^2\\
   &\geq \|p(x)\|^2
   \end{aligned}$$

   Donc : $\forall x\in E$, $\|p(x)\|\leq\|x\|$.
2. On suppose désormais que : $\forall x\in E$, $\|p(x)\|\leq\|x\|$.
   (a) Soit $x\in\mathrm{Im}p$ et $y\in\mathrm{Ker}\,p$. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$, posons $u=x+\lambda y$.
   On a : $p(u)=p(x)+\lambda p(y)=p(x)=x$.
   Or, par hypothèse, on a $\|p(u)\|\leq\|u\|$ donc $\|x\|\leq\|x+\lambda y\|$.
   Ainsi, $\|x\|^2\leq\|x\|^2+2\lambda(x|y)+\lambda^2\|y\|^2$.
   Donc $0\leq 2\lambda(x|y)+\lambda^2\|y\|^2$.
   (b) • Soit $\lambda>0$. Alors, d'après la question précédente, on a : $0\leq 2(x|y)+\lambda\|y\|^2$ donc en faisant tendre λ vers 0^+, on obtient : $(x|y)\geq 0$.

- Soit $\lambda < 0$. Alors, d'après la question précédente, on a : $0 \geq 2(x|y) + \lambda\|y\|^2$ donc en faisant tendre λ vers 0^-, on obtient : $(x|y) \leq 0$.

  Ainsi, $(x|y) = 0$.

(c) On a montré que : $\forall y \in \ker p$, $(x|y) = 0$ donc $x \in (\operatorname{Ker} p)^\perp$.
Ceci étant vrai pour tout $x \in \operatorname{Im} p$, on a : $\operatorname{Im} p \subset (\operatorname{Ker} p)^\perp$.
Or, $\dim \operatorname{Im} p = n - \dim \operatorname{Ker} p$ (théorème du rang). Ainsi, $\dim \operatorname{Im} p = \dim\left((\operatorname{Ker} p)^\perp\right)$. Ainsi, $\operatorname{Im} p = (\operatorname{Ker} p)^\perp$.
Puis $\operatorname{Ker} p = (\operatorname{Im} p)^\perp$.
Ainsi, p est un projecteur orthogonal.

Exercice 25. • Supposons que p soit un projecteur orthogonal sur F.
On alors $\operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p = E$ et p est la projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$. De plus, la projection étant orthogonale, on a : $\operatorname{Ker} p = (\operatorname{Im} p)^\perp$.
Soient $x, y \in E$, il existe $x_1, y_1 \in F$, $x_2, y_2 \in (\operatorname{Im} p)^\perp$ tels que :

$$x = x_1 + x_2 \quad \text{et} \quad y = y_1 + y_2.$$

On a alors : $p(x) = p(x_1) + p(x_2) = x_1$ et $p(y) = p(y_1) + p(y_2) = y_1$.
Ainsi :

$$< p(x), y >=< x_1, y_1 + y_2 >=< x_1, y_1 > + < x_1, y_2 >=< x_1, y_1 >$$

$$< x, p(y) >=< x_1 + x_2, y_1 >=< x_1, y_1 > + < x_2, y_1 >=< x_1, y_1 > .$$

Donc $< p(x), y >=< x, p(y) >$.

- Supposons que p soit un projecteur tel que : $\forall x, y \in E$, $< p(x), y >=< x, p(y) >$.
On sait déjà que p est un projecteur. Il reste à prouver que $\operatorname{Ker} p = (\operatorname{Im} p)^\perp$.
Soit $x \in \operatorname{Ker} p$, soit $y \in \operatorname{Im} p$, on a :

$$< x, y >=< x, p(y) >=< p(x), y >=< 0_E, y >= 0.$$

Ainsi : $\forall y \in \operatorname{Im} p$, $< x, y >= 0$. Donc $x \in (\operatorname{Im} p)^\perp$.
Donc $\operatorname{Ker} p \subset (\operatorname{Im} p)^\perp$.
De plus, par le théorème du rang, on a $\dim \operatorname{Ker} p = \dim E - \dim \operatorname{Im} p = \dim\left((\operatorname{Im} p)^\perp\right)$.
Ainsi, $\operatorname{Ker} p \subset (\operatorname{Im} p)^\perp$.
Donc p est un projecteur orthogonal.

Exercice 26. $(1, X, X^2)$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Soit $Q = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$.

$$Q = p_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3) \iff \begin{cases} < X^3 - Q, 1 >= 0 \\ < X^3 - Q, X >= 0 \\ < X^3 - Q, X^2 >= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 t^3 - at^2 - bt - cdt = 0 \\ \displaystyle\int_0^1 t^4 - at^3 - bt^2 - ctdt = 0 \\ \displaystyle\int_0^1 t^5 - at^4 - bt^3 - ct^2dt = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{1}{4} - \frac{a}{3} - \frac{b}{2} - c = 0 \\ \frac{1}{5} - \frac{a}{4} - \frac{b}{3} - \frac{c}{2} = 0 \\ \frac{1}{6} - \frac{a}{5} - \frac{b}{4} - \frac{c}{3} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = \frac{1}{4} \\ \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} = \frac{1}{5} \\ \frac{a}{5} + \frac{b}{4} + \frac{c}{3} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2a + 3b + 6c = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ 3a + 4b + 6c = \frac{12}{5} \\ 12a + 15b + 20c = \frac{3 \times 4 \times 5}{6} = 10 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + b = \frac{24 - 15}{10} = \frac{9}{10} \\ 2a + 3b + 6c = \frac{3}{2} \\ 12a + 15b + 20c = 10 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + b = \frac{9}{10} \\ b + 6c = \frac{15 - 18}{10} = -\frac{3}{10} \\ 3b + 20c = 10 - \frac{12 \times 9}{10} = 10 - \frac{6 \times 9}{5} = \frac{50 - 54}{5} = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + b = \frac{9}{10} \\ b + 6c = -\frac{3}{10} \\ 2c = -\frac{4}{5} + \frac{9}{10} = \frac{-8 + 9}{10} = \frac{1}{10} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = \frac{9}{10} + \frac{3}{5} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2} \\ b = -\frac{3}{10} - \frac{6}{20} = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5} \\ c = \frac{1}{20} \end{cases}$$

Ainsi, $p_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3) = \frac{3}{2}X^2 - \frac{3}{5}X + \frac{1}{20}$.

Exercice 27. 1. • Soient $P, Q \in E$, $(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt = \int_0^1 Q(t)P(t)dt = (Q|P)$.

Ainsi, $(|)$ est symétrique.

- Soient $P, Q, R \in E$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
(\lambda P + \mu Q|R) &= \int_0^1 (\lambda P + \mu Q)(t)R(t)dt \\
&= \int_0^1 \lambda P(t)R(t) + \mu Q(t)R(t)dt \\
&= \lambda \int_0^1 P(t)R(t)dt + \mu \int_0^1 Q(t)R(t)dt \\
& \lambda(P|R) + \mu(Q|R)
\end{aligned}$$

  Ainsi, $(|)$ est bilinéaire.

- Soient $P \in E$, on a $(P|P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)^2 dt$. Or, $t \mapsto P(t)^2$ est continue positive donc $(P|P) \geq 0$ par positivité de l'intégrale.
  De plus, si $(P|P) = 0$, on a $\displaystyle\int_0^1 P(t)^2 dt = 0$. Or, $t \mapsto P(t)^2$ est continue positive donc : $\forall t \in [0,1],\ P(t)^2 = 0$.
  Ainsi : $\forall t \in [0,1],\ P(t) = 0$. P admet donc une infinité de racines donc $P = 0$. Ainsi, $(|)$ est définie-positive.

2. Orhonormalisons la famille $(1, X)$ pour le produit scalaire précédent.
   - On a : $(1|1) = 1$.
     On pose alors $P_0 \dfrac{1}{(1,1)} = 1$.
   - On pose $Q_1 = X - (X|P_0)P_0$.
     Or, $(X|P_0) = \dfrac{1}{2}$.
     Ainsi, $Q_1 = X - \dfrac{1}{2}$.
     On a $\left(X - \dfrac{1}{2} | X - \dfrac{1}{2}\right) = \left[\dfrac{1}{3}\left(t - \dfrac{1}{2}\right)^3\right]_0^1 = \dfrac{1}{12}$.
     On pose alors $P_1 = 2\sqrt{3}\left(X - \dfrac{1}{2}\right)$.
   - On remarque que $\min\limits_{a,b \in \mathbb{R}} \displaystyle\int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt = d(X^2, \mathbb{R}_1[X])^2 = \|X^2 - p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2)\|^2$, avec le produit scalaire défini dans cet exercice.
     Or, $(P_0, P_1) = (1, \sqrt{3}(2X - 1))$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$.
     Ainsi $p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2) = (X^2|P_0)P_0 + (X^2|P_1)P_1$.
     Or, $(X^2|P_0) = \dfrac{1}{3}$ et $(X^2|P_1) = \sqrt{3}\displaystyle\int_0^1 2t^3 - t^2 dt = \sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.
     Ainsi, $p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{6}(2X - 1) = X - \dfrac{1}{6}$.
     On a alors

$$\begin{aligned}
d(X^2, \mathbb{R}_1[X])^2 &= \|X^2 - p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2)\|^2 \\
&= \|X^2 - X + \frac{1}{6}\|^2 \\
&= \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 dt \\
&= \int_0^1 \left(t^4 + t^2 + \frac{1}{36} - 2t^3 - \frac{1}{3}t + \frac{1}{3}t^2\right) dt \\
&= \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{36} - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{9} \\
&= \frac{36 + 60 + 5 - 90 - 30 + 20}{2^2 \times 3^2 \times 5} \\
&= \frac{1}{180}
\end{aligned}$$

     De plus, ce minimum est atteint uniquement pour $a = 1$ et $b = -\dfrac{1}{6}$.

Exercice 28. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si $n = 1$, $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|M - aI_n - bU\| = 0$. En effet, on prend par exemple $b = 0$ et si $M = (m)$, on pose $a = m$.

Supposons désormais $n \neq 1$.
Posons $F = \text{Vect}\,(I_n, U)$.

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|M - aI_n - bU\| = d(M,F) = \|M - p_F(M)\|$$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et posons $N = aI_n + bU$.

$$\begin{aligned} N = p_F(M) \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} < M - aI_n - bU, I_n >= 0 \\ < M - aI_n - bU, U >= 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} < M, I_n > -a < I_n, I_n > -b < U, I_n >= 0 \\ < M, U > -a < I_n, U > -b < U, U >= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Or, $< I_n, I_n >= \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$, $< U, I_n >= \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1 \times \delta_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$ et $< U, U >= \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1 = n^2$.
On pose $t = \text{tr}(M)$ et $s = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}$.
On a alors $< M, I_n >= \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}\delta_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} = \text{tr}(M) = t$ et $< M, U >= \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} \times 1 = s$.
Ainsi :

$$\begin{aligned} N = p_F(M) \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} t - na - nb = 0 \\ s - na - n^2 b = 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} na + nb = t \\ na + n^2 b = s \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} na + nb = t \\ n(n-1)b = s - t \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} b = \dfrac{s-t}{n(n-1)} \\ a = \dfrac{t}{n} - \dfrac{s-t}{n(n-1)} = \dfrac{nt - s}{n(n-1)} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi : $p_F(M) = \dfrac{nt-s}{n(n-1)} I_n + \dfrac{s-t}{n(n-1)} U$. On pose $a = \dfrac{nt-s}{n(n-1)}$ et $b = \dfrac{s-t}{n(n-1)}$.
On obtient alors :

$$\begin{aligned} \|M - p_F(M)\|^2 &= < M - p_F(M), M - p_F(M) > \\ &= < M, M - p_F(M) > \qquad \text{car } p_F(M) \in F \text{ et } M - p_F(M) \in F^{\perp} \\ &= \|M\|^2 - < M, p_F(M) > \\ &= \|M\|^2 - < M, aI_n + bU > \\ &= \|M\|^2 - a < M, I_n > - b < M, U > \\ &= \|M\|^2 - ta - sb \\ &= \|M\|^2 - \left[\frac{(nt-s)t + s(s-t}{n(n-1)}\right] \end{aligned}$$

Ainsi, $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|M - aI_n - bU\| = \sqrt{\|M\|^2 - \left[\dfrac{(nt-s)t + s(-t+s)}{n(n-1)}\right]}$.

Exercice 29. 1. • Montrons que I et P sont des sous-espaces vectoriels :

- La fonction nulle est paire. Ainsi, P est non vide.
- Soit $f, g \in P$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(\lambda f + \mu g)(-x) = \lambda f(-x) + \mu g(-x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = (\lambda f + \mu g)(x)$$

  Ainsi, $\lambda f \mu g \in P$.
  Donc F est un sous-espace vectoriel de E.

On procède de même pour prouver que I est impaire.

- Prouvons que I et P sont supplémentaires :
  Raisonnons par analyse-synthèse : Soit $f \in E$.
  Analyse : Supposons qu'il existe $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, paire et $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, impaire telles que $f = g + h$.
  On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x)$.
  De plus, par hypothèse : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$.
  Ainsi, par somme et différence, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

  Par suite, la décomposition de f, si elle existe, est donc unique.
  Existence : Posons $g : x \mapsto \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $h : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.
  - g est bien paire :
    * $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0
    * $\forall x \in \mathbb{R},\ g(-x) = \dfrac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \dfrac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x)$.
  - On montre de même que h est impaire.
  - Enfin, soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $g(x) + h(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} + \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x)$.
    Ainsi, $f = g + h$.

  Le couple (g, h) répond au problème et ce couple est unique.
  Ainsi, I et P sont supplémentaires.
- Montrons que I et F sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux.
  Soit $(f, g) \in I \times P$, on a :

$$\begin{aligned}
(f|g) &= \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt \\
&= \int_{-1}^{1} f(-u)g(-u)du \quad \text{en posant } t = -u \\
&= -\int_{-1}^{1} f(u)g(u)du
\end{aligned}$$

  Ainsi, $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt = 0$. D'où : $(f|g) = 0$.
  Ainsi, I et P sont orthogonaux.

2. Notons g la projection orthogonal de f sur P. $d(f, P) = \|f - g\|$.
   On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} + \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ et posons
   $h_1 : x \mapsto \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$, $h_2 : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$. On a $h_1 \in P$ et $h_2 \in I$. Ainsi, $g = h_1$. On a donc

$$\begin{aligned}
\|f - g\|^2 = \|h_2\|^2 &= \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2+t} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2+t} + \frac{1}{2-t} \right) \right)^2 dt \\
&= \frac{1}{4} \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2+t} - \frac{1}{2-t} \right)^2 dt \\
&= \frac{1}{4} \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{(2+t)^2} + \frac{1}{(2-t)^2} - \frac{2}{(2+t)(2-t)} \right) dt \\
&= \frac{1}{4} \Big[-\frac{1}{(2+t)} \Big]_{-1}^{1} + \frac{1}{4} \Big[\frac{1}{(2-t)} \Big]_{-1}^{1} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \int_{-1}^{1} \frac{1}{2-t} + \frac{1}{2+t} dt \\
&= \frac{1}{4}\Big(-\frac{1}{3} + 1 \Big) + \frac{1}{4}\Big(1 - \frac{1}{3} \Big) - \frac{1}{8} \Big[\ln\left(\frac{2+t}{2-t} \right) \Big]_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} - \frac{1}{8}\ln(3) + \frac{1}{8}\ln\left(\frac{1}{3} \right) \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\ln(3)
\end{aligned}$$

Finalement, $d(f,P) = \sqrt{\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}\ln(3)}$.

Exercice 30. Notons $G(x_1,...,x_n) = \begin{pmatrix} <x_1,x_1> & \cdots & <x_1,x_n> \\ \vdots & & \vdots \\ <x_n,x_1> & \cdots & <x_n,x_n> \end{pmatrix}$.

1.
   - Supposons que $(x_1,\ldots,x_p)$ est liée.
     Alors il existe $i \in [\![1,n]\!]$ et $\lambda_1,...,\lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que $x_i = \displaystyle\sum_{j\in[\![1,p]\!]\setminus\{i\}} \lambda_j x_j$.
     Soit $k \in [\![1,p]\!]$. $<x_k, x_i> = <x_k, \displaystyle\sum_{j\in[\![1,p]\!]\setminus\{i\}} \lambda_j x_j> = \sum_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{i\}} \lambda_j <x_k, x_j>$.
     Ainsi, en notant $C_1,...,C_p$ les colonnes de $G(x_1,...,x_p)$, on obtient : $C_i = \displaystyle\sum_{j\in[\![1,p]\!]\setminus\{i\}} \lambda_j C_j$.
     Donc $(C_1,...,C_p)$ est liée. Ainsi $\det((C_1|...|C_p)) = Gram(x_1,...,x_p) = 0$.
   - Réciproquement, supposons que $Gram(x_1,\ldots,x_p) = 0$.
     Alors : $\det((C_1|...|C_p)) = 0$ donc $\mathrm{rg}\,(C_1,...,C_p) < p$. Ainsi, $(C_1,...,C_p)$ est liée.
     Donc, il existe $i \in [\![1,p]\!]$ et $\lambda_1,...,\lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que : $C_i = \displaystyle\sum_{j\in[\![1,p]\!]\setminus\{i\}} \lambda_j C_j$.
     Ainsi : $\forall k \in [\![1,p]\!], <x_k, x_i> = \displaystyle\sum_{j\in[\![1,p]\!]\setminus\{i\}} \lambda_j <x_k, x_j>$.
     Soit $x = x_i - \displaystyle\sum_{j\in[\![1,p]\!]\setminus\{i\}} \lambda_j x_j$. D'après la relation précédente, on a :
     $$\forall k \in [\![1,p]\!],\ <x_k, x> = <x_k, x_i - \sum_{j\in[\![1,p]\!]\setminus\{i\}} \lambda_j x_j> = <x_k, x_i> - \sum_{j\in[\![1,p]\!]\setminus\{i\}} \lambda_j <x_k, x_j> = 0.$$
     Ainsi :
     $$<x,x> = <x_i - \sum_{j\in[\![1,p]\!]\setminus\{i\}} \lambda_j x_j, x> = <x_i, x> - \sum_{j\in[\![1,p]\!]\setminus\{i\}} \lambda_j <x_j, x> = 0 - \sum_{j\in[\![1,p]\!]\setminus\{i\}} \lambda_j 0 = 0.$$
     Donc $x = 0$. Ainsi $x_i = \displaystyle\sum_{j\in[\![1,p]\!]\setminus\{i\}} \lambda_j x_j$ et la famille $(x_1,\ldots,x_p)$ est liée.
2. Soit $(e_1,\ldots,e_p)$ une base orthonormale de F.
   Soit $(i,j) \in [\![1,p]\!]$:
   $$\begin{aligned} <x_i, x_j> &= <\sum_{k=1}^{p} <x_i, e_k> e_k, \sum_{l=1}^{p} <x_j, e_l> e_l> \\ &= \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} <x_i, e_k><x_j, e_l><e_k, e_l> \\ &= \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} <x_i, e_k><x_j, e_l> \delta_{k,l} \\ &= \sum_{k=1}^{p} <x_i, e_k><x_j, e_k> . \end{aligned}$$
   Soit A la matrice de $(x_1,\ldots,x_p)$ en base $(e_1,\ldots,e_p)$, alors $A = (a_{i,j}) = (<x_j, e_i>)_{1,\leq i,j \leq p}$.
   Ainsi, on a : $\forall i,j, \in [\![1,p]\!], <x_i, x_j> = \sum_{k=1}^{p} a_{k,i} a_{k,j}$.
   De plus, $G(x_1,\ldots,x_n) = (<x_i, x_j>)$ donc $G(x_1,\ldots,x_n) = {}^tAA$. D'où :
   $$Gram(x_1,\ldots,x_n)) = \det(G(x_1,...,x_p)) = \det({}^tAA) = \det({}^tA)\det(A) = \det(A)^2.$$
3. Soit p la projection orthogonale sur F. Soit $x \in E$, on a $x = x - p(x) + p(x)$.
   On note $\|\|$ la norme associée au produit scalaire sur E.

On a alors :

$$
\begin{aligned}
Gram(x,x_1,\dots,x_p) &= \begin{vmatrix} <x,x> & <x,x_1> & \dots & <x,x_p> \\ <x_1,x> & <x_1,x_1> & \dots & <x_1,x_p> \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ <x_p,x> & <x_p,x_1> & & <x_p,x_p> \end{vmatrix}. \\
&= \begin{vmatrix} \|x-p(x)+p(x)\|^2 & <x,x_1> & \dots & <x,x_p> \\ <x_1,x-p(x)+p(x)> & <x_1,x_1> & \dots & <x_1,x_p> \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ <x_p,x-p(x)+p(x)> & <x_p,x_1> & & <x_p,x_p> \end{vmatrix}. \\
&= \begin{vmatrix} \|x-p(x)\|^2+\|p(x)\|^2 & <x,x_1> & \dots & <x,x_p> \\ <x_1,x-p(x)>+<x_1,p(x)> & <x_1,x_1> & \dots & <x_1,x_p> \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ <x_p,x-p(x)>+<x_p,p(x)> & <x_p,x_1> & & <x_p,x_p> \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

car $x-p(x)$ et $p(x)$ sont orthogonaux.
Par linéarité du déterminant par rapport à la première colonne, on obtient alors :

$$
\begin{aligned}
Gram(x,x_1,\dots,x_p) &= \begin{vmatrix} \|x-p(x)\|^2 & <x,x_1> & \dots & <x,x_p> \\ <x_1,x-p(x)> & <x_1,x_1> & \dots & <x_1,x_p> \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ <x_p,x-p(x)> & <x_p,x_1> & & <x_p,x_p> \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \|p(x)\|^2 & <x,x_1> & \dots & <x,x_p> \\ <x_1,p(x)> & <x_1,x_1> & \dots & <x_1,x_p> \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ <x_p,p(x)> & <x_p,x_1> & & <x_p,x_p> \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \|x-p(x)\|^2 & <x,x_1> & \dots & <x,x_p> \\ 0 & <x_1,x_1> & \dots & <x_1,x_p> \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & <x_p,x_1> & & <x_p,x_p> \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \|p(x)\|^2 & <x,x_1> & \dots & <x,x_p> \\ <x_1,p(x)> & <x_1,x_1> & \dots & <x_1,x_p> \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ <x_p,p(x)> & <x_p,x_1> & & <x_p,x_p> \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

car $x-p(x)\in F^{\perp}$ et $\forall k\in[\![1,p]\!],\ x_k\in F$.
Ainsi, en développant suivant la 1ère colonne pour le 1er déterminant, on obtient :

$$
\begin{aligned}
Gram(x,x_1,\dots,x_p) &= \|x-p(x)\|^2 \begin{vmatrix} <x_1,x_1> & \dots & <x_1,x_p> \\ \vdots & & \vdots \\ <x_p,x_1> & & <x_p,x_p> \end{vmatrix} + Gram(p(x),x_1,...,x_p) \\
&= \|x-p(x)\|^2 Gram(x_1,...,x_p) + Gram(p(x),x_1,...,x_p)
\end{aligned}
$$

Or, $p(x)\in F$ et $(x_1,...,x_p)$ forme une base de F. Ainsi, il existe $\lambda_1,...,\lambda_p\in\mathbb{R}$ tels que $p(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\lambda_k x_k$.
Donc $(p(x),x_1,...,x_p)$ est liée. Ainsi, d'après la question 1, on a : $Gram(p(x),x_1,...,x_p)=0$.
D'où :

$$Gram(x,x_1,\dots,x_p)=\|x-p(x)\|^2 Gram(x_1,...,x_p).$$

De plus, on sait que : $d(x,F)^2=\|x-p(x)\|^2$.
Enfin, $(x_1,...,x_p)$ est libre donc d'après la question 1, on a $Gram(x_1,...,x_p)\neq 0$.
Ainsi, on obtient :

$$d(x,F)=\|x-p(x)\|^2=\frac{Gram(x,x_1,\dots,x_p)}{Gram(x_1,...,x_p)}.$$

Polynômes orthogonaux

Exercice 31. 1. • Soient $P,Q\in E$, $<P,Q>=\displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)dt=\int_0^1 Q(t)P(t)dt=(Q|P)$.
Ainsi, $(|)$ est symétrique.

- Soient $P, Q, R \in E$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} < \lambda P + \mu Q, R > &= \int_0^1 (\lambda P + \mu Q)(t) R(t) dt \\ &= \int_0^1 \lambda P(t)R(t) + \mu Q(t)R(t) dt \\ &= \lambda \int_0^1 P(t)R(t)dt + \mu \int_0^1 Q(t)R(t)dt \\ & \lambda < P, R > + \mu < Q, R > \end{aligned}$$

  Ainsi, $(|)$ est bilinéaire.

- Soient $P \in E$, on a $< P, P >= \int_0^1 P(t)^2 dt$. Or, $t \mapsto P(t)^2$ est continue positive donc $< P, P > \geq 0$ par positivité de l'intégrale.
  De plus, si $< P, P >= 0$, on a $\int_0^1 P(t)^2 dt = 0$. Or, $t \mapsto P(t)^2$ est continue positive donc : $\forall t \in [0, 1], \ P(t)^2 = 0$.
  Ainsi : $\forall t \in [0, 1], \ P(t) = 0$. P admet donc une infinité de racines donc $P = 0$. Ainsi, $(|)$ est définie-positive.

En conclusion, $< \ , \ >$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Le terme de plus haut degré de Q_p est X^{2p}. Ainsi, le terme de plus haut degré de L_p est $(X^{2p})^{(p)} = (2p)...(p+1)X^p = \frac{(2p)!}{p!}X^p$. Ainsi, L_p est un polynôme de degré p et de coefficient dominant $\frac{(2p)!}{p!}$.
3. Soit $p, q \in [\![0, n]\!]$ tels que $p \neq q$. On peut supposer $p < q$ sans perte de généralité.
   On a :

$$\begin{aligned} < L_p, L_q > &= \int_0^1 Q_p^{(p)}(t) Q_q^{(q)}(t) dt \\ &= \left[Q_p^p(t) Q_q^{q-1}(t) \right]_0^1 - \int_0^1 Q_p^{(p+1)}(t) Q_q^{(q-1)}(t) dt \end{aligned}$$

   Or, 0 et 1 sont racines d'ordre q de Q_q donc sont racines de $Q_q^{(k)}$ pour $k \in [\![0, q-1]\!]$. En effectuant q intégration par parties, les crochets d'intégration sont nuls. on obtient :

$$< L_p, L_q >= (-1)^q \int_0^1 Q_p^{(p+q)}(t) Q_q(t) dt = 0$$

   car $p + q > 2p$ et Q_p est de degré $2p$.
   Ainsi, la famille $(L_0, ..., L_n)$ est une famille de polynômes non nuls orthogonaux.
   Cette famille est donc libre et de cardinal $n+1$. Or, $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$. Ainsi, cette famille est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Soit $p \in [\![0, n]\!]$, $\|L_p\|^2 =< L_p, L_p >= (-1)^p \int_0^1 Q_p^{(2p)}(t) Q_p(t) dt$ par un calcul similaire à celui de la question précédente.
   Or, le terme dominant de Q_p est X^{2p}.
   Ainsi, $Q_p^{(2p)}(t) = (2p)!$. Donc :

$$\begin{aligned} \|L_p\|^2 &= (-1)^p (2p)! \int_0^1 t^p (t-1)^p dt \\ &= (-1)^p (2p)! \left[\left[\frac{t^{p+1}}{p+1} (t-1)^p \right]_0^1 - \frac{p}{p+1} \int_0^1 t^{p+1} (1-t)^{p-1} dt \right] \quad \text{par intégration par parties} \\ &= (-1)^p (2p)! (-1)^p \frac{p \times ... \times 1}{(2p) \times ... \times (p+1)} \int_0^1 t^{2p} dt \quad \text{par } p \text{ intégration par parties} \\ &= \frac{(2p)! p!^2}{(2p)!} \frac{1}{2p+1} \\ &= \frac{p!^2}{2p+1} \end{aligned}$$

   Ainsi, $\|L_p\| = \frac{p!}{\sqrt{2p+1}}$.

Exercice 32. 1. • Soient $P,Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $< P,Q >= \int_a^b P(t)Q(t)w(t)dt = \int_a^b Q(t)P(t)w(t)dt =< Q,P >$. Donc $< \ , \ >$ est symétrique.

• Soient $P,Q,R \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} < \lambda P + \mu Q, R > &= \int_a^b (\lambda P(t) + \mu Q(t))R(t)w(t)dt \\ &= \int_a^b (\lambda P(t)R(t)w(t) + \mu Q(t)R(t)w(t))dt \\ &= \lambda \int_a^b P(t)R(t)w(t)dt + \mu \int_a^b Q(t)R(t)w(t)dt \\ &= \lambda < P,R > +\mu < Q,R > \end{aligned}$$

Ainsi, $< \ , \ >$ est linéaire à gauche, donc bilinéaire.

• Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $< P,P >= \int_a^b P(t)^2 w(t)dt \geq 0$ (car $P^2 w$ est positive et par positivité de l'intégrale).
Supposons $< P,P >= 0$. Alors $\int_a^b P(t)^2 w(t)dt = 0$. Comme $P^2 w$ est positive et continue sur $[a,b]$, on a : $\forall t \in [a,b]$, $P(t)^2 w(t) = 0$. Or : $\forall t \in [a,b]$, $w(t) \neq 0$. Ainsi : $\forall t \in [a,b]$, $P(t) = 0$. Donc P admet une infinité de racines donc $P = 0$.
Ainsi, $< \ , \ >$ est définie-positive.

En conclusion, $< \ , \ >$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. En orthonormalisant la base $(1, X, ..., X^n)$ par l'algorithme de Gram Schmidt, on obtient une famille $(P_0, ..., P_n)$ orthonormée vérifiant :
$\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\text{Vect}\,(P_0, .., P_k) = \text{Vect}\,(1, ..., X^k)$
$\forall k \in [\![0,n]\!]$, $< X^k, P_k >> 0$.
De plus, on sait que :

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ P_k = \frac{X^k - \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} < X^i, P_i > P_i}{\left\| X^k - \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} < X^i, P_i > P_i \right\|}$$

On obtient ainsi par récurrence que : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\deg(P_k) = k$.
Ainsi, on a bien existence d'une famille vérifiant les conditions de l'énoncé.
De plus, si une famille vérifie les conditions de l'énoncé, alors, elle est orthonormée et vérifie :
$\forall k \in [\![0,n]\!]$, $< X^k, P_k >> 0$.
Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Par la condition sur les degrés on a $\text{Vect}\,(P_0, ..., P_k) \subset \text{Vect}\,(1, X, ..., X^k)$.
Or, les familles $(1, ..., X^k)$ et $(P_0, ..., P_k)$ sont libres (la deuxième étant orthonormée), on a $\text{rg}\,(1, ..., X^k) = \text{rg}\,(P_0, ..., P_k)$. Ainsi, $\text{Vect}\,(1, ..., X^k) = \text{Vect}\,(P_0, ..., P_k)$.
La famille $(P_0, ..., P_k)$ vérifie donc toutes les conditions de l'algorithme de Gram-Schmidt appliqué lors de l'orthonormalisation de la base $(1, ..., X^n)$. Par unicité d'une telle famille, on obtient unicité de la famille vérifiant les conditions de l'énoncé.
Soit $k \in [\![1,n]\!]$. $(P_0, ..., P_{k-1})$ est libre (car orthonormée) composée de k polynômes de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ qui est de dimension k. Ainsi, $(P_0, ..., P_{k-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$. De plus, $(P_0, ..., P_k)$ est orthonormée donc P_k est orthogonal aux polynômes P_0, ..., P_{k-1}. Ainsi, P_0 est orthogonal à une famille génératrice de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ donc à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

3. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. $XP_k \in \mathbb{R}_{k+1}[X]$. Or, On sait que $(P_0, ..., P_{k+1})$ forme une base de $\mathbb{R}_{k+1}[X]$.
Ainsi, il existe $\lambda_0, ..., \lambda_{k+1} \in \mathbb{R}$ tels que $XP_k = \sum_{j=0}^{k+1} \lambda_j P_j$.
Si $k = 0$, on $XP_0 = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1$ ce que l'on souhaitait.
On suppose désormais, $k \geq 1$.
Soit $i \in [\![0, k+1]\!]$. Comme $(P_0, ..., P_{k+1})$ est orthonormée, on a :

$$< XP_k, P_i >=< \sum_{j=0}^{k+1} \lambda_j P_j, P_i >= \sum_{j=0}^{k+1} \lambda_j < P_j, P_i >= \sum_{j=0}^{k+1} \lambda_j \delta_{j,i} = \lambda_i.$$

De plus, par définition du produit scalaire, on a :

$$< XP_k, P_i >= \int_a^b tP_k(t)P_i(t)\omega(t)dt = \int_a^b P_k(t)tP_i(t)\omega(t)dt =< P_k, XP_i > .$$

Ainsi :

$$\lambda_i =< P_k, XP_i > .$$

Or, P_k est orthogonal à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$. Ainsi, si $XP_i \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$ c'est à dire si $i+1 \leq k-1$ c'est à dire si $i \leq k-2$ alors, $\lambda_i = 0$.

Ainsi, $XP_k = \displaystyle\sum_{j=k-1}^{k+1} \lambda_j P_j = \lambda_{k+1}P_{k+1} + \lambda_k P_k + \lambda_{k-1}P_{k-1}$.

4. Soit $k \in [\![1, n]\!]$, On sait que $1 \in \mathbb{R}_0[X] \subset \mathbb{R}_{k-1}[X]$ et P_k est orthogonal à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$. On a donc : $< P_k, 1 >= 0$.
Raisonnons par l'absurde.
Supposons que P_k n'admette aucune racine appartenant à $]a, b[$ en laquelle il change de signe.
Alors, comme P_k est continu sur $[a, b]$, P_k garde un signe constant (conséquence du TVI).
De plus, $< P_k, 1 >= \displaystyle\int_a^b P_k(t)w(t)dt = 0 >$. Or, $t \mapsto P_k(t)w(t)$ est continue et garde un signe constant donc : $\forall t \in [a, b]$, $P_k(t)w(t) = 0$. Or : $\forall t \in [a, b]$, $w(t) \neq 0$. Ainsi : $\forall t \in [a, b]$, $P_k(t) = 0$. Absurde car P_k est de degré $k \in \mathbb{N}$. Ainsi, P_k admet au moins une racine appartenant à $]a, b[$ en laquelle il change de signe.
5. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On sait que $\deg(P_k) = k$ donc $p \leq k$.
Montrons par l'absurde que $p = k$.
Supposons $p < k$ et posons $Q = (X - x_1) \dots (X - x_p)$. On a $Q \in \mathbb{R}_p[X] \subset \mathbb{R}_{k-1}[X]$. Or, P_k est orthogonal à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$. Ainsi, $< P_k, Q >= 0$.
De plus, par décomposition de P_k en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, il existe $q, r, s \in \mathbb{N}$, il existe $\alpha_1, ..., \alpha_p \in \mathbb{N}$, il existe $\beta_1, ..., \beta_q \in \mathbb{N}^*$, il existe $\gamma_1, ..., \gamma_s$, il existe $y_1, ..., y_q \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts (les racines d'ordre pair de P_k), il existe $z_1, ...z_s \in \mathbb{R}\backslash]a, b[$ deux à deux distinctes (les racines d'ordre pair de P située hors de $]a, b[$), il existe $(a_1, b_1), ..., (a_r, b_r) \in \mathbb{R}^2$ avec pour tout $l \in [\![1, r]\!]$, $a_l^2 - 4b_l < 0$ tels que :

$$P_k(X) = \prod_{i=1}^{p}(X - x_i)^{2\alpha_i+1} \prod_{m=1}^{s}(X - z_m)^{2\gamma_m+1} \prod_{j=1}^{q}(X - y_i)^{2\beta_i} \prod_{l=1}^{r}(X^2 + a_l X + b_l)$$

Ainsi :

$$P_k Q = \prod_{i=1}^{p}(X - x_i)^{2\alpha_i+2} \prod_{m=1}^{s}(X - z_m)^{2\gamma_m+1} \prod_{j=1}^{q}(X - y_i)^{2\beta_i} \prod_{l=1}^{r}(X^2 + a_l X + b_l)$$

Or, les fonctions polynômiales $t \mapsto t^2 + a_l t + b_l$ avec $l \in [\![1, r]\!]$ sont de signe constant (discriminant négatif).
Les fonctions polynomiales $t \mapsto (t - z_m)^{2\gamma_m+1}$ avec $m \in [\![1, s]\!]$ sont de signe constant sur $[a, b]$ (leur racine n'appartient pas à $]a, b[$).
Et les fonctions polynomiales $t \mapsto (t - y_j)^{2\beta_j}$ avec $j \in [\![1, q]\!]$, $t \mapsto (t - x_j)^{2\alpha_i+2}$ avec $i \in [\![1, p]\!]$ sont de signe constant sur $[a, b]$ (positifs).
Donc $P_k Q$ garde un signe constant sur $[a, b]$. Il en est donc de même pour $P_k Q w$. De plus, $t \mapsto P_k(t)Q(t)w(t)$ est continue et $\displaystyle\int_a^b P_k(t)Q(t)w(t)dt = 0$. Ainsi : $\forall t \in [a, b]$, $P_k(t)Q_k(t)w(t) = 0$.
Or : $\forall t \in [a, b] \setminus \{x_1, ..., x_p\}$, $w(t)Q(t) \neq 0$. Ainsi, : $\forall t \in [a, b] \setminus \{x_1, ..., x_p\}$, $P_k(t) = 0$. Donc P_k admet une infinité de racines donc $P_k = 0$.
Absurde (car $\deg(P_k = k \in \mathbb{N})$.
On peut donc conclure que $p = k$.
Ainsi, les racines de P_k sont simples, réelles et dans $]a, b[$.