Corrigé de la feuille d'exercices 2

1 Forme algébrique

Exercice 1. • $z_1 = \dfrac{(5-i)(3-2i)}{1+i} = \dfrac{(13-13i)(1-i)}{2} = \dfrac{13(1-i)^2}{2} = -13i$

• $z_2 = (2-i)(1+6i-9) = (2-i)(-8+6i) = -16+12i+8i+6 = -10+20i$

• En utilisant le binôme de Newton, on a :

$$z_3 = i^5 - 5i^4 + 10i^3 - 10i^2 + 5i - 1 = i - 5 - 10i + 10 + 5i - 1 = 4 - 4i$$

• En utilisant le binôme de Newton, on a :

$$z_4 = \frac{i^4+4i^3+6i^2+4i+1}{2^4 - 4\times 2^3 i + 6\times 2^2 i^2 - 4\times 2i^3 + i^4} = \frac{1-4i-6+4i+1}{16-32i-24+8i+1} = -\frac{4}{-7-24i} = \frac{4(7+24i)}{625} = \frac{28}{625} - \frac{96}{625}i$$

• En utilisant le binôme de Newton, on a :

$$z_5 = \frac{1+5i+10i^2+10i^3+5i^4+i^5-1}{1+5i+10i^2+10i^3+5i^4+i^5+1} = \frac{5i-10-10i+5+i}{2+5i-10-10i+5+i} = \frac{-5-4i}{-3-4i} = \frac{(-5-4i)(-3+4i)}{25} = \frac{31}{25} - \frac{8}{25}i$$

• En utilisant le binôme de Newton, on a :
$(1+i)^{2014} = \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^{2014} = (\sqrt{2})^{2014}e^{2014i\frac{\pi}{4}}$.
Or, $2014 = 251\times 8 + 6$.
Ainsi, $(1+i)^{2014} = 2^{1007}e^{6i\frac{\pi}{4}} = -2^{1007}i$.

Exercice 2. • $\overline{z_1} = -i(2+i)^2 = -i(4+4i-1) = -i(3+4i) = 4-3i$

• $\overline{z_2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2-i} = \dfrac{\sqrt{2}(2+i)}{5} = \dfrac{2\sqrt{2}}{5} + i\dfrac{\sqrt{2}}{5}$

Exercice 3. • $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{\overline{z}}{|z|^2}\right) = \dfrac{1}{|z|^2}\mathrm{Re}\,(\overline{z}) = \dfrac{\mathrm{Re}z}{(\mathrm{Re}z)^2 + (\mathrm{Im}z)^2}$

• $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right) = \mathrm{Im}\left(\dfrac{\overline{z}}{|z|^2}\right) = \dfrac{1}{|z|^2}\mathrm{Im}\,(\overline{z}) = -\dfrac{\mathrm{Im}z}{(\mathrm{Re}z)^2 + (\mathrm{Im}z)^2}$

Exercice 4. 1. Soit $z \in \mathbb{C}$. On écrit $z = x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
On a alors :

$$\begin{aligned} 2z + 3\overline{z} = 1 &\iff 5x - iy = 1 \\ &\iff \begin{cases} x = \frac{1}{5} \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\{\frac{1}{5}\}$.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. On écrit $z = x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On a alors :

$$\begin{aligned} 2z + 6\overline{z} = 3+2i &\iff 8x - 4iy = 3+2i \\ &\iff \begin{cases} x = \frac{3}{8} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\{\frac{3}{8} - \frac{1}{2}i\}$.

Exercice 5. • $z_1 = (2+i)(\cos(3\theta) + i\sin(3\theta)) = (2\cos(3\theta) - \sin(3\theta)) + i\,(\cos(3\theta) + 2\sin(3\theta))$

• $z_2 = (1-2i)(\cos(\theta) - i\sin(\theta)) = (\cos(\theta) - 2\sin(\theta)) - i\,(2\cos(\theta) + \sin(\theta))$

• $z_3 = \dfrac{(1+i)e^{2i\theta}}{2} = \dfrac{(1+i)(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta))}{2} = \dfrac{(\cos(2\theta) - \sin(2\theta))}{2} + i\dfrac{(\cos(2\theta) + \sin(2\theta))}{2}$

• Soit $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $\dfrac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta} = \dfrac{1+i\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-i\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \dfrac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} = \dfrac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{2i\theta} = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$.

• On factorise par l'argument moitié :
$(1+e^{i\theta})^n = e^{i\frac{n\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}})^n = e^{i\frac{n\theta}{2}}(2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right))^n = 2^n\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^n + i2^n\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^n$

2 Module

Exercice 6. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Raisonnons par double implication :

- Supposons que $|z| = 1$. On a alors :
  $Z = \dfrac{(z+1)(\overline{z-1})}{|z-1|^2} = \dfrac{(z+1)(\overline{z}-1)}{|z-1|^2} = \dfrac{|z|^2 - z + \overline{z} - 1}{|z-1|^2} = \dfrac{|z|^2 - 1 - 2i\mathrm{Im}(z)}{|z-1|^2} = -2i\dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|z-1|^2}$ car $|z| = 1$.
  Or, $\dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|z-1|^2} \in \mathbb{R}$ donc $Z \in i\mathbb{R}$.
- Supposons désormais que $Z \in i\mathbb{R}$. On a toujours :
  $Z = \dfrac{(z+1)(\overline{z-1})}{|z-1|^2} = \dfrac{(z+1)(\overline{z}-1)}{|z-1|^2} = \dfrac{|z|^2 - z + \overline{z} - 1}{|z-1|^2} = \dfrac{|z|^2 - 1 - 2i\mathrm{Im}(z)}{|z-1|^2}$. Or, $Z \in i\mathbb{R}$. Ainsi, $\mathrm{Re}(Z) = 0$.
  Donc $\dfrac{|z|^2 - 1}{|z-1|^2} = 0$ d'où $|z|^2 = 1$, comme un module est toujours positif, on en déduit que $|z| = 1$.

On a ainsi prouvé l'équivalence voulue.

Exercice 7. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$,
On a :

$$1 = 1 + a - a - b + b + c - c = 1 + a - (a + b) + (b + c) - c.$$

Donc, d'après l'inégalité triangulaire :

$$1 = |1 + a - (a + b) + (b + c) - c| \leq |1 + a| + |a + b| + |b + c| + |c|$$

Exercice 8. On a (comme $z \neq 1$ et $|z| \neq 1$) :

$$\left|\frac{1 - z^n}{1 - z}\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} z^k\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |z^k| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |z|^k \leq \frac{1 - |z|^n}{1 - |z|}.$$

On a utilisé deux propriétés qui se montrent par récurrence :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$.
  Pour $n = 0$, on a $|z^0| = 1 = |z|^0$.
  Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $|z^n| = |z|^n$
  $$\begin{aligned} |z^{n+1}| &= |z^n \times z| = |z^n| \times |z| \\ &\underset{HR}{=} |z|^n \times |z| = |z|^{n+1} \end{aligned}$$
  Ainsi, on a prouvé que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\sum\limits_{k=0}^{n-1} z^k\right| \leq \sum\limits_{k=0}^{n-1} |z^k|$.
  Pour $n = 1$, $\left|\sum\limits_{k=0}^{0} z^k\right| = |z^0| = 1 = \sum\limits_{k=0}^{0} |z^k|$.
  Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\left|\sum\limits_{k=0}^{n-1} z^k\right| \leq \sum\limits_{k=0}^{n-1} |z^k|$.
  On a alors :
  $$\begin{aligned} \left|\sum_{k=0}^{n} z^k\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1} z^k + z^n\right| \\ &\leq \left|\sum_{k=0}^{n-1} z^k\right| + |z^n| \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire} \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^{n-1} |z^k|\right) + |z^n| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} |z^k| \end{aligned}$$

Exercice 9. On procède par récurrence sur n.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\mathcal{P}(n)$: $\left|\prod\limits_{k=1}^{n} a_k - \prod\limits_{k=1}^{n} b_k\right| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k - b_k|$.

- Pour $n = 1$, $\left|\prod\limits_{k=1}^{1} a_k - \prod\limits_{k=1}^{1} b_k\right| = |a_1 - b_1| = \sum\limits_{k=1}^{1} |a_k - b_k|$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$\left|\prod_{k=1}^{n+1} a_k - \prod_{k=1}^{n+1} b_k\right| = \left|a_{n+1}\prod_{k=1}^{n} a_k - b_{n+1}\prod_{k=1}^{n} b_k\right|$$
$$= \left|(a_{n+1} - b_{n+1}) \times \prod_{k=1}^{n} a_k + b_{n+1}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k - \prod_{k=1}^{n} b_k\right)\right|$$
$$\leq |a_{n+1} - b_{n+1}| \times \prod_{k=1}^{n} |a_k| + |b_{n+1}|\left|\prod_{k=1}^{n} a_k - \prod_{k=1}^{n} b_k\right| \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire}$$
$$\leq |a_{n+1} - b_{n+1}| + \sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k| \quad \text{par l' hypothèse de récurrence et les hypothèses sur } a_k, b_k$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n+1} |a_k - b_k|$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- On a donc prouvé que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exercice 10.

3 Trigonométrie - Linéarisation - Sommes

Exercice 11. • Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\cos^2(x) = \dfrac{\cos(2x)+1}{2}$ (formule de trigonométrie).

- Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\sin^4 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{ix}}{2i}\right)^4\\ &= \frac{1}{16}(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix})\\ &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x).\end{aligned}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\cos^2 x \sin^3 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3\\ &= -\frac{1}{32i}(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix})(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix})\\ &= -\frac{1}{32i}(e^{5ix} - 3e^{3ix} + 3e^{ix} - e^{-ix} + 2e^{3ix} - 6e^{ix} + 6e^{-ix} - 2e^{-3ix} + e^{ix} - 3e^{ix} + 3e^{-3ix} - e^{-5ix})\\ &= -\frac{1}{32i}(e^{5ix} - e^{-5ix} - e^{3ix} + e^{-3ix} - 2e^{ix} + 2e^{ix})\\ &= \frac{1}{8}\sin x + \frac{1}{16}\sin(3x) - \frac{1}{16}\sin(5x).\end{aligned}$$

Exercice 12. Soit $x \in \mathbb{R}$, par la formule de Moivre, le binôme de Newton et les formules d'Euler, on a

$$\begin{aligned}\sin(5x) &= \mathrm{Im}(e^{5ix}) = \mathrm{Im}((\cos x + i\sin x)^5)\\ &= \mathrm{Im}(\cos^5 x + 5i\cos^4 x \sin x - 10\cos^3 x \sin^2 x - 10i\cos^2 x \sin^3 x + 5\cos x \sin^4 x + i\sin^5 x)\\ &= 5\cos^4 x \sin x - 10\cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x = 5(1-\sin^2 x)^2 \sin x - 10(1-\sin^2 x)\sin^3 x + \sin^5 x\\ &= 5\sin x - 10\sin^3 x + 5\sin^5 x - 10\sin^3 x + 10\sin^5 x + \sin^5 x\\ &= 16\sin^5 x - 20\sin^3(x) + 5\sin x.\end{aligned}$$

Posant $t = \sin\frac{\pi}{5}$. On a alors $16t^5 - 20t^3 + 5t = \sin\pi = 0$. Or, $\frac{\pi}{5} \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ donc $t \in]0, \frac{\sqrt{2}}{2}[$ (croissance de la fonction sinus).
En particulier, $t \neq 0$ et on peut diviser par t dans l'équation.
On pose $T = t^2$, On a donc $16T^2 - 20T + 5 = 0$.
Le discriminant de ce polynôme vaut $20^2 - 4 \times 16 \times 5 = 4^2 \times 5^2 - 4^2 \times 5 \times 4 = 4^2 \times 5(5-4) = 4^2 \times 5$.

Ainsi les solutions de l'équation $16T^2 - 20T + 5 = 0$ sont $\dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$.
Or, $T < \dfrac{1}{2}$, donc on a $T = \dfrac{5-\sqrt{5}}{8}$. Ainsi, $t = \pm\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}$. Or, $t > 0$, donc $t = \sin\dfrac{\pi}{5} = \sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}$.
Posons désormais $u = \cos\dfrac{\pi}{10}$. On a $u = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{10}\right) = \sin\dfrac{2\pi}{5}$. On a alors $16u^5 - 20u^3 + 5u = \sin 2\pi = 0$. Or, $\dfrac{2\pi}{5} \in \left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ donc $u \in]\frac{1}{2}, 1[$ (croissance de la fonction sinus).
En particulier, $u \neq 0$ et on peut diviser par u dans l'équation.
On pose $U = u^2$, On a donc $16U^2 - 20U + 5 = 0$.
Le discriminant de ce polynôme vaut $20^2 - 4 \times 16 \times 5 = 4^2 \times 5^2 - 4^2 \times 5 \times 4 = 4^2 \times 5(5-4) = 4^2 \times 5$.
Ainsi les solutions de l'équation $16U^2 - 20U + 5 = 0$ sont $\dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$.
Or, $U > \dfrac{1}{2}$, donc on a $U = \dfrac{5+\sqrt{5}}{8}$. Ainsi, $u = \pm\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}$. Or, $u > 0$, donc $u = \cos\dfrac{\pi}{10} = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}$.

Exercice 13. • On a $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}\left(e^{i(a+kb)}\right) = \mathrm{Re}(\sum_{k=0}^{n} e^{i(a+kb)}) = \mathrm{Re}(e^{ia}\sum_{k=0}^{n}(e^{ib})^k)$.

Or, $e^{ib} = 1 \iff b \equiv 0 \quad [2\pi]$.

- Si $b \equiv 0 \quad [2\pi]$, alors $e^{ib} = 1$ donc :

$$A_n = \mathrm{Re}(e^{ia}\sum_{k=0}^{n} 1) = \mathrm{Re}((n+1)e^{ia}) = (n+1)\mathrm{Re}(e^{ia}) = (n+1)\cos a$$

- Si $b \not\equiv 0 \quad [2\pi]$. On a alors :

$$\begin{aligned}
A_n &= \mathrm{Re}\left(e^{ia}\sum_{k=0}^{n}(e^{ib})^k\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{ia}\frac{1-e^{i(n+1)b}}{1-e^{ib}}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{ia}\frac{e^{i\frac{(n+1)b}{2}}}{e^{i\frac{b}{2}}}\frac{-2i\sin\frac{(n+1)b}{2}}{-2i\sin\frac{b}{2}}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{i(a+\frac{nb}{2}}\frac{\sin\frac{(n+1)b}{2}}{\sin\frac{b}{2}}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{i(a+\frac{nb}{2}}\right)\frac{\sin\frac{(n+1)b}{2}}{\sin\frac{b}{2}} \\
&= \cos\left(a+\frac{nb}{2}\right)\frac{\sin\frac{(n+1)b}{2}}{\sin\frac{b}{2}}
\end{aligned}$$

• On procède de même.

On a $B_n = \mathrm{Im}(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{i(a+kb)}) = \mathrm{Im}(e^{ia}\sum_{k=0}^{n}(e^{ib})^k)$.

Or, $e^{ib} = 1 \iff b \equiv 0 \quad [2\pi]$.

- Si $b \equiv 0 \quad [2\pi]$, alors $e^{ib} = 1$ donc :

$$B_n = \mathrm{Im}(e^{ia}\sum_{k=0}^{n} 1) = \mathrm{Im}((n+1)e^{ia}) = (n+1)\mathrm{Im}(e^{ia}) = (n+1)\sin a$$

- Si $b \not\equiv 0 \quad [2\pi]$. On a alors :

$$\begin{aligned}
B_n &= \mathrm{Im}\left(e^{ia}\sum_{k=0}^{n}(e^{ib})^k\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(e^{ia}\frac{1-e^{i(n+1)b}}{1-e^{ib}}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(e^{ia}\frac{e^{i\frac{(n+1)b}{2}}}{e^{i\frac{b}{2}}}\times\frac{-2i\sin\frac{(n+1)b}{2}}{-2i\sin\frac{b}{2}}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(e^{i(a+\frac{nb}{2}}\frac{\sin\frac{(n+1)b}{2}}{\sin\frac{b}{2}}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(e^{i(a+\frac{nb}{2}}\right)\frac{\sin\frac{(n+1)b}{2}}{\sin\frac{b}{2}}\\
&= \sin\left(a+\frac{nb}{2}\right)\frac{\sin\frac{(n+1)b}{2}}{\sin\frac{b}{2}}
\end{aligned}$$

- On a

$$\begin{aligned}
C_n &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ia+ikb})\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(e^{ia}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^{ib})^k)\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(e^{ia}(1+e^{ib})^n\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(e^{ia}\times\left(2e^{ib/2}\cos\frac{b}{2}\right)^n\right)\\
&= 2^n\left(\cos\left(\frac{b}{2}\right)\right)^n\mathrm{Re}(e^{ia+\frac{inb}{2}})\\
&= 2^n\left(\cos\left(\frac{b}{2}\right)\right)^n\cos\left(a+\frac{nb}{2}\right)
\end{aligned}$$

Exercice 14. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, soit $x\in\mathbb{R}$.

- $$\begin{aligned}
S_1 &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}e^{\frac{ik\pi}{3}}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{2}\right)^k\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{1-\frac{e^{\frac{i(n+1)\pi}{3}}}{2^{n+1}}}{1-\frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{2}}\right)
\end{aligned}$$

  Or, $\frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{2}=\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}$ donc $1-\frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{2}=\frac{3}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}=-i\sqrt{3}\left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=-i\sqrt{3}\times\frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{2}$.

  Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}e^{\frac{ik\pi}{3}} &= \frac{\left(1-\frac{e^{\frac{i(n+1)\pi}{3}}}{2^{n+1}}\right)}{-\frac{i\sqrt{3}e^{i\pi/3}}{2}}\\
&= 2\frac{ie^{-i\pi/3}}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{e^{i\left(\frac{(n+1)\pi}{3}\right)}}{2^{n+1}}\right)\\
&= \frac{2i}{\sqrt{3}}\times\left(e^{-i\pi/3}-\frac{e^{in\pi/3}}{2^{n+1}}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
S_1 &= \mathrm{Re}\left(\frac{2i}{\sqrt{3}} \times \left(e^{-i\pi/3} - \frac{e^{in\pi/3}}{2^{n+1}}\right)\right) \\
&= -\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Im}\left(e^{-i\pi/3} - \frac{e^{in\pi/3}}{2^{n+1}}\right) \\
&= -\frac{2}{\sqrt{3}}\left(-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{2^{n+1}}\right) \\
&= -\frac{2}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{2^{n+1}}\right) \\
&= 1 + \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{2^n\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

- $S_2 = \sum\limits_{k=0}^{n} \cos^k(x)\sin(kx) = \mathrm{Im}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \cos^k(x)e^{ikx}\right)$.
  Or, $\cos(x)e^{ikx} = 1 \iff x \equiv 0 \quad [2\pi]$.
  - Si $x \equiv 0[\pi]$, alors, $S_2 = \mathrm{Im}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} 1\right) = \mathrm{Im}(n+1) = 0$.
  - Si $x \not\equiv 0 \quad [2\pi]$, on a :

$$\begin{aligned}
S_2 &= \mathrm{Im}\left(\frac{1-\cos(x)^{n+1}e^{i(n+1)x}}{1-\cos(x)e^{ix}}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{e^{-ix}-\cos(x)^{n+1}e^{inx}}{e^{-ix}-\cos(x)}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{\cos x - i\sin x - \cos(x)^{n+1}(\cos(nx)+i\sin(nx))}{-i\sin x}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{i\left(\cos x - \cos(x)^{n+1}\cos(nx)\right) + \left(\sin x + \cos(x)^{n+1}\sin(nx)\right)}{\sin x}\right) \\
&= \frac{\cos x - \cos(x)^{n+1}\cos(nx)}{\sin x}
\end{aligned}$$

Exercice 15.

- On a

$$\begin{aligned}
A_n + iB_n &= \sum_{0\le 2k\le n}\binom{n}{k}(-1)^k + i\sum_{0\le 2k+1\le n}\binom{n}{k}(-1)^k \\
&= \sum_{0\le 2k\le n}\binom{n}{2k}i^{2k} + \sum_{0\le 2k+1\le n}\binom{n}{2k+1}i^{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}i^k = (1+i)^n = (\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}})^n = 2^{n/2}e^{\frac{i\pi n}{4}}
\end{aligned}$$

  donc $A_n = \mathrm{Re}(2^{n/2}e^{\frac{i\pi n}{4}}) = 2^{n/2}\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$ et de $B_n = \mathrm{Im}(2^{n/2}e^{\frac{i\pi n}{4}}) = 2^{n/2}\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$.
- Supposons $a \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$. Par le binôme de Newton, on a alors :

$$C_n = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\frac{e^{ika}}{\cos^k a}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\left(\frac{e^{ia}}{\cos a}\right)^k\right) = \mathrm{Re}\left(\left(-1+\frac{e^{ia}}{\cos a}\right)^n\right) = \mathrm{Re}((i\tan a)^n)$$

  et donc $C_n = 0$ si n est impair, $C_n = (-1)^{n/2}\tan^n a$ si n est pair.

Exercice 16. L'équation a un sens pour $x \not\equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$.
Supposons $x \not\equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$.
On remarque que

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)} = \sum_{k=0}^{n}\frac{\mathrm{Re}(e^{ikx})}{\cos^k(x)} = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{ikx}}{\cos^k(x)}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{e^{ix}}{\cos(x)}\right)^k\right)$$

ce qui apparaît comme une somme géométrique.

- Si $x \not\equiv 0[\pi]$ alors $\dfrac{e^{ix}}{\cos(x)} \neq 1$ et on a :

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{e^{ix}}{\cos(x)}\right)^k = \frac{1-\dfrac{e^{i(n+1)x}}{(\cos x)^{n+1}}}{1-\dfrac{e^{ix}}{\cos(x)}} = \frac{1}{\cos^n(x)} \times \frac{(\cos x)^{n+1}-e^{i(n+1)x}}{\cos(x)-e^{ix}}$$

Il reste à en déterminer la partie réelle. Or,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{e^{ix}}{\cos(x)}\right)^k &= \frac{1}{(\cos x)^n} \times \frac{(\cos x)^{n+1}-\cos((n+1)x)-i\sin((n+1)x)}{-i\sin(x)}\\ &= \frac{i}{(\cos x)^n} \times \frac{((\cos x)^{n+1}-\cos((n+1)x)-i\sin((n+1)x))}{\sin(x)}\\ &= \frac{1}{(\cos x)^n} \times \frac{\sin((n+1)x)+i((\cos x)^{n+1}-\cos((n+1)x))}{\sin(x)}\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos(kx)}{\cos^k x} = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)(\cos x)^n}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)} = 0 &\iff \sin((n+1)x) = 0\\ &\iff (n+1)x \equiv 0 \;\; [\pi]\\ &\iff x \equiv 0 \;\; [\frac{\pi}{n+1}]\end{aligned}$$

- Si $x \equiv 0[2\pi]$ alors x n'est pas solution car $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\cos(kx)}{\cos^k(x)} = n+1$.
- Si $x \equiv \pi[2\pi]$ alors x n'est pas solution car on a :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos(k\pi)}{\cos^k(\pi)} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(-1)^k} = \sum_{k=0}^{n}1 = n+1.$$

Soit $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned}\frac{k\pi}{(n+1)} \equiv 0 \;\; \left[\frac{\pi}{2}\right] &\iff k \equiv 0 \;\; \left[\frac{(n+1)}{2}\right]\\ &\iff 2k \equiv 0 \;\; [(n+1)]\end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions est $\{\dfrac{k\pi}{(n+1)} \mid k \in \mathbb{Z} \text{ et } (n+1) \nmid (2k)\}$

Exercice 17. 1. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Soit $k \in [\![0,n]\!]$, $\cos^2(kx) = \dfrac{1+\cos(2kx)}{2}$, d'où (en utilisant la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{n}\cos(2kx)$ vue dans un exercice du cours) :

$$\begin{aligned}S_n(x) &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1+\cos(2kx)}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}1 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\cos(2kx)\\ &= \begin{cases}\dfrac{n+1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos(nx)\dfrac{\sin(n+1)x}{\sin x} & \text{si } x \not\equiv 0 \;\; [\pi]\\ \dfrac{n+1}{2}+\dfrac{n+1}{2} & \text{sinon.}\end{cases}\\ &= \begin{cases}\dfrac{n+1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos(nx)\dfrac{\sin(n+1)x}{\sin x} & \text{si } x \not\equiv 0 \;\; [\pi]\\ n+1 & \text{sinon.}\end{cases}\end{aligned}$$

2. On applique ce qui précède avec $n = 9$ et $x = \dfrac{\pi}{9}$. Alors :

$$S_9(x) = 5 + \frac{1}{2}\cos(9x)\frac{\sin(10x)}{\sin x} = 5 + \frac{1}{2}\cos\pi\frac{\sin(\pi + \frac{\pi}{9})}{\sin\frac{\pi}{9}} = 5 + \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\cos^2\left(\frac{9\pi}{9}\right) &= \cos^2(\pi) = 1 = \cos(0),\\
\cos^2(\frac{8\pi}{9}) &= \cos^2(\pi - \frac{\pi}{9}) = \cos^2\frac{\pi}{9},\\
\cos^2(\frac{7\pi}{9}) &= \cos^2(\pi - \frac{2\pi}{9}) = \cos^2\frac{2\pi}{9},\\
\cos^2(\frac{6\pi}{9}) &= \cos^2(\pi - \frac{3\pi}{9}) = \cos^2\frac{3\pi}{9},\\
\cos^2(\frac{5\pi}{9}) &= \cos^2(\pi - \frac{4\pi}{9}) = \cos^2\frac{4\pi}{9}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\frac{11}{2} = S_9(x) = \sum_{k=0}^{9}\cos^2\left(\frac{k\pi}{9}\right) = 2\sum_{k=0}^{4}\cos^2\left(\frac{k\pi}{9}\right) = 2\left(1 + \cos^2\frac{\pi}{9} + \cos^2\frac{2\pi}{9} + \cos^2\frac{3\pi}{9} + \cos^2\frac{4\pi}{9}\right).$$

Donc :

$$\cos^2\frac{\pi}{9} + \cos^2\frac{2\pi}{9} + \cos^2\frac{3\pi}{9} + \cos^2\frac{4\pi}{9} = \frac{11}{4} - 1 = \frac{7}{4}$$

et $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{9}\right) + \cos^2\left(\dfrac{2\pi}{9}\right) + \cos^2\left(\dfrac{3\pi}{9}\right) + \cos^2\left(\dfrac{4\pi}{9}\right)$ est bien rationnel.

4 Forme trigonométrique

Exercice 18. $\overline{z} = e^{-i\theta}$, $-z = e^{i\pi}e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$, $iz = e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\theta} = e^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)}$, $z^2 = e^{2i\theta}$.
$|z| + z = 1 + e^{i\theta} = 2\cos(\dfrac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}}$. On remarque tout d'abord que $\cos(\dfrac{\theta}{2})$ est 4π périodique.
Ainsi,

- si $\theta \in]-\pi + 4k\pi, \pi + 4k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$, $2\cos(\dfrac{\theta}{2}) > 0$ donc l'écriture $2\cos(\dfrac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}}$ est bien la forme trigonométrique de $z + |z|$.
- si $\theta \in]\pi + 4k\pi, 3\pi + 4k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$, $2\cos(\dfrac{\theta}{2}) < 0$ donc $z + |z| = -2\cos(\frac{\theta}{2})e^{i\pi}e^{i\frac{\theta}{2}} = -2\cos(\frac{\theta}{2})e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}$.
- si $\theta \equiv \pi \quad [2\pi]$, $|z| + z = 0$, on ne parle donc pas de l'écriture trigonométrique de $|z| + z$.

Exercice 19. 1. $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Ainsi, $\dfrac{\pi}{4}$ est un argument de $1 + i$.

2. $(1+i)^{2014} = \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^{2014} = (\sqrt{2})^{2014}e^{2014i\frac{\pi}{4}}$.
Or, $2014 = 251 \times 8 + 6$.
Ainsi, $(1+i)^{2014} = 2^{1007}e^{6i\frac{\pi}{4}} = -2^{1007}i$.

Exercice 20. Soit $\theta \in]-\pi, 2\pi[$, $1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\theta/2}$.

- Si $\theta \in]-\pi, \pi[$, $|1 + e^{i\theta}| = \left|2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right| = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ car $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) > 0$. Ainsi, un argument de $1 + e^{i\theta}$ est $\dfrac{\theta}{2}$.
- Si $\theta \in]\pi, 2\pi[$, $|1 + e^{i\theta}| = \left|2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right| = -2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ car $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) < 0$.
Ainsi, $1 + e^{i\theta} = -2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\left(-e^{i(\theta/2)}\right) = -2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i(\theta/2+\pi)}$. Ainsi, un argument de $1 + e^{i\theta}$ est $\dfrac{\theta}{2} + \pi$.

Exercice 21. 1. $1 + i$ a pour module $\sqrt{2}$ et un argument est $\dfrac{\pi}{4}$.
$\sqrt{3} - i$ a pour module 2 et un argument est $-\dfrac{\pi}{6}$.
Ainsi z_1 a pour module $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et un argument est $\dfrac{5\pi}{12}$ (en utilisant les opérations sur les modules et arguments).

2. $-2i(2+2i) = -4i(1+i)$ donc $|z_2| = 4\sqrt{2}$. De plus, un argument de $-i$ est $-\dfrac{\pi}{2}$ et un argument de $1+i$ est $\dfrac{\pi}{4}$. Ainsi, un argument de z_2 est $-\dfrac{\pi}{4}$.
3. $|z_3| = \dfrac{(\sqrt{3}+2)}{|\sqrt{6}+i\sqrt{2}|} = \dfrac{(\sqrt{3}+2)}{\sqrt{2}|\sqrt{3}+i|} = \dfrac{(\sqrt{3}+2)}{2\sqrt{2}}$. Ainsi, $\dfrac{z_3}{|z_3|} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}+i\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}+i} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{-i\frac{\pi}{6}}$. Ainsi, un argument de z_3 est $-\dfrac{\pi}{6}$.
4. Soit $\theta \not\equiv \dfrac{\pi}{2} \quad [\pi]$. $z_4 = \dfrac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta}$. Ainsi, le module de z_4 est alors $\dfrac{1}{|\cos\theta|}$.
   - Si $\theta \in]-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, \dfrac{\pi}{2}+2k\pi[$, avec $k\in\mathbb{Z}$, le module de z_4 est $\dfrac{1}{\cos\theta}$. De plus, $z_4 = \dfrac{e^{i\theta}}{\cos\theta}$. Ainsi, sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, \dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right[$, un argument est θ.
   - Si $\theta \in \left]-\pi+2k\pi, -\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right[$, avec $k\in\mathbb{Z}$, le module de z_4 est $\dfrac{-1}{\cos\theta}$. De plus, $z_4 = \dfrac{-e^{i\theta}}{-\cos\theta} = \dfrac{e^{i(\theta+\pi)}}{-\cos\theta}$. Ainsi, sur $\left]-\pi+2k\pi, -\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right[$, un argument est $\theta+\pi$.
   - Si $\theta \in \left]\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, \pi\right]$, avec $k\in\mathbb{Z}$, le module de z_4 est $\dfrac{-1}{\cos\theta}$ et un argument est $\theta+\pi$.
5. Soit $\theta \not\equiv 0 \quad [2\pi]$ (pour que z_5 soit bien défini) :

$$|z_6| = \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}} = \sqrt{\frac{2+2\cos\theta}{2-2\cos\theta}} = \sqrt{\frac{4\cos^2(\frac{\theta}{2})}{4\sin^2(\frac{\theta}{2})}} = \left|\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right|.$$

Pour l'argument, on a :

$$1+\cos\theta+i\sin\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} + 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right) = 2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$$

Par un calcul similaire, on a :

$$\begin{aligned}1-\cos\theta-i\sin\theta &= 2\sin^2\frac{\theta}{2} - 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}-i\cos\frac{\theta}{2}\right)\\ &= 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right)\\ &= 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right)\\ &= 2\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{(\theta-\pi)}{2}}\end{aligned}$$

   - Si $\theta\in]2k\pi, \pi+2k\pi[$ avec $k\in\mathbb{Z}$, on a $\cos\dfrac{\theta}{2}>0$ donc un argument de $1+\cos\theta+i\sin\theta$ est $\dfrac{\theta}{2}$. De plus, $\sin\dfrac{\theta}{2}>0$. Ainsi, un argument de $1-\cos\theta-i\sin\theta$ est $\dfrac{(\theta-\pi)}{2}$. Finalement, un argument de z_6 est $\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{(\theta-\pi)}{2}=\dfrac{\pi}{2}$.
   - Si $\theta\in]-\pi+2k\pi, 2k\pi[$ avec $k\in\mathbb{Z}$, on a $\cos\dfrac{\theta}{2}>0$ donc un argument de $1+\cos\theta+i\sin\theta$ est $\dfrac{\theta}{2}$. De plus, $\sin\dfrac{\theta}{2}<0$. Ainsi, un argument de $1-\cos\theta-i\sin\theta$ est $\dfrac{(\theta-\pi)}{2}+\pi=\dfrac{(\theta+\pi)}{2}$. Finalement, un argument de z_6 est $\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{(\theta+\pi)}{2}=-\dfrac{\pi}{2}$.
   - Si $\theta\equiv\pi \quad [2\pi]$, $z_6=0$, on ne peut pas trouver d'argument.
6. $1+i$ a pour module $\sqrt{2}$ et un argument de $1+i$ est $\dfrac{\pi}{4}$. Donc z_7 a pour module $2^{\frac{n}{2}}$ et un argument est $n\dfrac{\pi}{4}$, d'après la formule de Moivre.

Exercice 22.
- $z_1 = -\sin a + i\cos a = \cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+a\right) = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+a\right)}$
- $z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}$
- $z_3 = \cos(\pi+a)+i\sin(\pi+a) = e^{i(\pi+a)}$
- $z_4 = \left(\dfrac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}}\right)^{10} = \dfrac{1}{2^5}\left(e^{\frac{-7i\pi}{12}}\right)^{10} = \dfrac{1}{2^5}e^{\frac{-35i\pi}{6}}$. Or, $35 = 12\times 2+11$ donc $z_4 = \dfrac{1}{2^5}e^{-4i\pi}e^{-\frac{11\pi}{6}} = \dfrac{1}{2^5}e^{i\frac{\pi}{6}}$

Exercice 23. Soit $n \in \mathbb{N}$, $1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. Ainsi, $(1+i\sqrt{3})^n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{3}}$, d'après la formule de Moivre.

Ainsi,

$$\begin{aligned} 2^n e^{i\frac{n\pi}{3}} \in \mathbb{R}_+ &\iff \frac{n\pi}{3} \equiv 0[2\pi] \\ &\iff n \equiv 0[6] \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\{6k, k \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 24.

1. $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$ donc $z_3 = \sqrt{2}e^{\frac{7i}{12}}$.
   De plus, $z_3 = \dfrac{(1+i\sqrt{3})(1+i)}{2} = \dfrac{(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})}{2}$.
2. En utilisant les deux écritures précédentes, on en déduit que : $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \dfrac{\mathrm{Re}(z_3)}{\sqrt{2}} = \dfrac{(1-\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}$ et
   $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \dfrac{\mathrm{Im}(z_3)}{\sqrt{2}} = \dfrac{(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}$

Exercice 25.

1. $z = 0$ est solution.
   Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On écrit $z = re^{i\theta}$ avec $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} r^5 e^{5i\theta} = re^{-i\theta} &\iff r^4 e^{5i\theta} = e^{-i\theta} \quad (\text{car } r \neq 0) \\ &\iff \left\{\begin{array}{l} r^4 = 1 \\ 5\theta \equiv -\theta\ [2\pi] \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{l} r = 1 \ (\text{car } r \in \mathbb{R}_+^*) \\ \theta \equiv 0\ [\frac{\pi}{3}] \end{array}\right. \end{aligned}$$

   Ainsi, les solutions de l'équation sont 0, 1, $e^{\frac{i\pi}{3}}$, $e^{\frac{2i\pi}{3}}$, -1, $e^{\frac{4i\pi}{3}}$, $e^{-\frac{i\pi}{3}}$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$. On écrit $z = x+iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a alors :

$$\begin{aligned} z^2 = -(\overline{z})^2 &\iff (x+iy)^2 = -(x-iy)^2 \\ &\iff x^2 - y^2 + 2ixy = -x^2 + y^2 + 2ixy \\ &\iff \left\{\begin{array}{l} x^2 - y^2 = -x^2 + y^2 \\ 2xy = 2xy \end{array}\right. \\ &\iff x^2 = y^2 \\ &\iff x = \pm y \end{aligned}$$

   L'ensemble des solutions est donc $\{a \pm ia,\ a \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 26. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $z = \sqrt{3} - i$.
On a :

$$\begin{aligned} z &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) \\ &= 2e^{-i\frac{\pi}{6}} \\ &= 2\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + 2i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - 2i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1 &\iff 2\cos\frac{\pi}{6}\cos x - 2\sin\frac{\pi}{6}\sin x = 1\\
&\iff 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x - \sin\frac{\pi}{6}\sin x\right) = 1\\
&\iff 2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = 1\\
&\iff \cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right) = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}\\
&\iff \frac{\pi}{6}+x \equiv \pm\frac{\pi}{3}\ [2\pi]\\
&\iff \begin{cases} x \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]\\ \text{ou}\\ x \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\end{cases}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\{\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}\cup\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

Exercice 27. 1. Par analogie avec la démonstration de cours, on pose $z = 1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
Soit $x\in\mathbb{R}$. On a :

$$\cos(x)+\sin(x) = \sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(x)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(x)\right) = \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

Ainsi, $A=\sqrt{2}$ et $\omega = \frac{\pi}{4}$ conviennent.

2. On pose $z = 1-\sqrt{3}i = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
Soit $x\in\mathbb{R}$. On a :

$$\cos(x)-\sqrt{3}\sin(x) = 2\times\frac{1}{2}\cos x - 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cos(x)+\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\sin(x)\right) = 2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right).$$

Ainsi, $A=2$ et $\omega = -\frac{\pi}{3}$ conviennent.

5 Equations de second degré

Exercice 28. Soit $x,y\in\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
(x+iy)^2 = 1+i &\iff \begin{cases} x^2-y^2 = 1\\ 2xy = 1\\ x^2+y^2 = |1+i| = \sqrt{2}\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x^2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}\\ y^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}\\ 2xy = 1\end{cases}\\
&\iff x+iy = \pm\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, les racines carrées de $1+i$ sont $\pm\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)$.
De plus, $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Ainsi, ses racines carrées sont $2^{1/4}e^{i\frac{\pi}{8}}$ et $2^{1/4}e^{i\frac{\pi}{8}}$. Comme $\mathrm{Re}(e^{i\frac{\pi}{8}}) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ (car $\frac{\pi}{8}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, on a $2^{1/4}e^{i\frac{\pi}{8}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$.
Donc $\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}$ et $\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$

Exercice 29. • Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

$$(x+iy)^2 = 1+6i \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 6 \\ x^2 + y^2 = |1+6i| = \sqrt{37} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x^2 = \frac{1+\sqrt{37}}{2} \\ y^2 = \frac{\sqrt{37}-1}{2} \\ 2xy = 6 \end{cases}$$
$$\iff x+iy = \pm\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{37}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{37}-1}{2}}\right)$$

Ainsi, les racines carrées de $1+6i$ sont $\pm\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{37}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{37}-1}{2}}\right)$.

• Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

$$(x+iy)^2 = -7+24i \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = -7 \\ 2xy = 24 \\ x^2 + y^2 = |-7+24i| = \sqrt{625} = 25 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 16 \\ 2xy = 24 \end{cases}$$
$$\iff x+iy = \pm(3+4i)$$

Ainsi, les racines carrées de $-7+24i$ sont $\pm(3+4i)$.

Exercice 30. 1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, **Méthode 1 :**
$z^2 - 2\cos\theta z + 1 = z^2 - (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + e^{i\theta} \times e^{-i\theta} = (z - e^{i\theta})(z - e^{-i\theta})$.
Donc les solutions sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$. **Méthode 2 :**
Le discriminant associé à $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$ vaut $\Delta = 4\cos^2(\theta) - 4 = -4\sin^2(\theta)$. $2i\sin(\theta)$ est une racine carrée de Δ.
Ainsi, les solutions de l'équation sont $\dfrac{2\cos(\theta) \pm 2i\sin(\theta)}{2} = \cos(\theta) \pm \sin(\theta)$.

2. Le discriminant de cette équation est $-2i$. Or, $-2i = 2e^{-i\pi/2}$.
Ainsi, les racines carrées de $-2i$ sont $\pm\sqrt{2}e^{-i\pi/4} = \pm(1-i)$.
On en déduit que les solutions sont $\dfrac{-(5-i)-(1-i)}{2(2+i)} = \dfrac{(-6+2i)(2-i)}{10} = -1+i$ et
$\dfrac{-(5-i)+(1-i)}{2(2+i)} = \dfrac{(-4(2-i)}{10} = -\dfrac{4}{5} + \dfrac{2}{5}i.$

3. Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $u = z^n$. On a :

$$z^{2n} - 2z^n\cos(n\theta) + 1 = 0 \iff u^2 - 2u\cos\theta + 1 = 0$$
$$\iff u = e^{\pm i\theta}$$
$$\iff z^n = e^{i\theta} \text{ ou } z^n = e^{-i\theta}$$

Or,

$$z^n = e^{i\theta} \iff \left(\frac{z}{e^{i\theta/n}}\right)^n = 1$$
$$\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ \frac{z}{e^{i\theta/n}} = e^{2ik\pi/n}$$
$$\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!], z = e^{i(2k\pi/n+\theta/n)}$$

De même,

$$z^n = e^{-i\theta} \iff \left(\frac{z}{e^{-i\theta/n}}\right)^n = 1$$
$$\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ \frac{z}{e^{-i\theta/n}} = e^{2ik\pi/n}$$
$$\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!], z = e^{i(2k\pi/n-\theta/n)}$$

l'ensemble des solutions : $\{e^{\frac{-i\theta}{n}+\frac{2ik\pi}{n}}, 0 \leq k \leq n-1\} \cup \{e^{\frac{i\theta}{n}+\frac{2ik\pi}{n}}, 0 \leq k \leq n-1\}$.

4. Le discriminant de cette équation vaut $4(2+i)^2 - 4(6+8i) = 4(4+4i-1) - 4(6+8i) = -4(3+4i)$.
   Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
(x+iy)^2 = -12-16i \quad &\iff \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = -12 \\ 2xy = -16 \\ x^2 + y^2 = |-12-16i| = \sqrt{144+256} = 20 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 16 \\ 2xy = -16 \end{cases} \\
&\iff \quad x + iy = \pm\,(2-4i)
\end{aligned}$$

   Ainsi, les racines carrées de $-12-16i$ sont $\pm\,(2-4i)$.
   On en déduit que les solutions de l'équation sont $1+3i$ et $3-i$.
5. Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $u = z^2$. On a :

$$z^4 + (3-6i)z^2 - 2(4+3i) = 0 \quad \iff \quad u^2 + (3-6i)u - 2(4+3i) = 0$$

   Le discriminant de l'équation $u^2+(3-6i)u-2(4+3i) = 0$ vaut $(3-6i)^2+8(4+3i) = 9-36i-36+32+24i = 5-12i$.
   On cherche donc les racines carrées de ce complexe. Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
(x+iy)^2 = 5-12i \quad &\iff \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ 2xy = -12 \\ x^2 + y^2 = |5-12i| = \sqrt{25+144} = 13 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 4 \\ 2xy = -12 \end{cases} \\
&\iff \quad x + iy = \pm\,(3-2i)
\end{aligned}$$

   Ainsi, les racines carrées de $5-12i$ sont $\pm\,(3-2i)$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
z^4 + (3-6i)z^2 - 2(4+3i) = 0 \quad &\iff \quad u = \frac{-(3-6i) \pm (3-2i)}{2} \\
&\iff \quad z^2 = 2i \text{ ou } z^2 = -3+4i
\end{aligned}$$

   On sait que $2i = 2e^{i\pi/2}$. Ainsi, les racines carrées de $2i$ sont $\pm\sqrt{2}e^{i\pi/4} = \pm(1+i)$.
   Cherchons les racines carrées de $-3+4i$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
(a+ib)^2 = -3+4i \quad &\iff \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = 4 \\ x^2 + y^2 = |5-12i| = \sqrt{9+16} = 5 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \\ 2xy = 4 \end{cases} \\
&\iff \quad x + iy = \pm\,(1+2i)
\end{aligned}$$

   Ainsi, les racines carrées de $-3+4i$ sont $\pm\,(1+2i)$.
   Les solutions de l'équation sont donc $1+i$, $-1-i$, $1+2i$ et $-1-2i$.
6. Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $u = z^3$. On a :

$$z^6 + (-1+2i)z^3 - 1 - i) = 0 \quad \iff \quad u^2 + (-1+2i)u - 1 - i = 0$$

   Le discriminant de l'équation $u^2 + (-1+2i)u - 1 - i = 0$ vaut $(-1+2i)^2 + 4(1+i) = 1-4-4i+4+4i = 1$.
   Ainsi, les solutions de $u^2 + (-1+2i)u - 1 - i = 0$ sont $-i$ et $1-i$.
   Ainsi,

$$z^6 + (-1+2i)z^3 - 1 - i) = 0 \quad \iff \quad \begin{cases} z^3 = -i \\ \text{ou} \\ z^3 = 1-i \end{cases}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
z^3 = -i &\iff z^3 = e^{i\frac{\pi}{2}} \\
&\iff \frac{z^3}{e^{i\frac{\pi}{2}}} = 1 \\
&\iff \left(\frac{z}{e^{i\frac{\pi}{6}}}\right)^3 = 1 \\
&\iff \exists k \in [\![0,2]\!],\ \frac{z}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{\frac{2ik\pi}{3}} \\
&\iff \exists k \in [\![0,2]\!],\ z = e^{i\left(\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)}
\end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}
z^3 = 1-i &\iff z^3 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \\
&\iff \frac{z^3}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = 1 \\
&\iff \left(\frac{z}{2^{\frac{1}{6}}e^{-i\frac{\pi}{12}}}\right)^3 = 1 \\
&\iff \exists k \in [\![0,2]\!],\ \frac{z}{2^{\frac{1}{6}}}e^{-i\frac{\pi}{12}} = e^{\frac{2ik\pi}{3}} \\
&\iff \exists k \in [\![0,2]\!],\ z = 2^{\frac{1}{6}}e^{i\left(\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{12}\right)}
\end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation est : $\{e^{i(-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3})},\ k \in [\![0,2]\!]\} \cup \{2^{\frac{1}{6}}e^{i(-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3})},\ k \in [\![0,2]\!]\}$.

Exercice 31. 1. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$2t^3 - (3+4i)t^2 - (4-7i)t + 4 + 2i = 0 \iff \begin{cases} 2t^3 - 3t^2 - 4t + 4 = 0 \\ -4t^2 + 7t + 2 = 0 \end{cases}$$

$-4t^2 + 7t + 2 = 0$ a pour discriminant $49 + 32 = 81$. Ainsi, ses solutions sont $\dfrac{-7-9}{-8} = 2$ et $\dfrac{-7+9}{-8} = -\dfrac{1}{4}$.
Or, 2 est solution de $2t^3 - 3t^2 - 4t + 4 = 0$.
Ainsi, 2 est une solution réelle de l'équation $2t^3 - (3+4i)t^2 - (4-7i)t + 4 + 2i = 0$.

(b) D'après la question 1, il existe $(a,b,c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$ tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ 2z^3 - (3+4i)z^2 - (4-7i)z + 4 + 2i = (z-2)(az^2+bz+c) = az^3 + z^2(b-2a) + z(c-2b) - 2c.$$

Or,

$$\begin{aligned}
&\forall z \in \mathbb{C},\ 2z^3 - (3+4i)z^2 - (4-7i)z + 4 + 2i = (z-2)(az^2+bz+c) \\
\iff &\forall z \in \mathbb{C},\ 2z^3 - (3+4i)z^2 - (4-7i)z + 4 + 2i = az^3 + z^2(b-2a) + z(c-2b) - 2c \\
\iff &\begin{cases} a = 2 \\ b - 2a = -3 - 4i \\ c - 2b = -4 + 7i \\ -2c = 4 + 2i \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 - 4i \\ c = -2 - i \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ 2z^3 - (3+4i)z^2 - (4-7i)z + 4 + 2i = (z-2)(2z^2 + (1-4i)z - 2 - i).$$

Il reste maintenant à résoudre l'équation $2z^2+(1-4i)z-2-i = 0$. Son discriminant vaut $(1-4i)^2+8(2+i) = 1 - 16 - 8i + 16 + 8i = 1$ et les solutions de $2z^2 + (1-4i)z - 2 - i = 0$ sont donc $\dfrac{-(1-4i)+1}{4} = i$ et $\dfrac{-(1-4i)-1}{4} = -\dfrac{1}{2} + i$.
En conclusion l'ensemble des solutions est $\{2, i, -\dfrac{1}{2} + i\}$.

2. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$. Posons $z = it$.

$$\begin{aligned} z^3 + (1-2i)z^2 + (1-i)z - 2i = 0 &\iff -it^3 - (1-2i)t^2 + (1+i)t - 2i = 0 \\ &\iff \begin{cases} t - t^2 = 0 \\ -t^3 + 2t^2 + t - 2 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} t(1-t) = 0 \\ -t^3 + 2t^2 + t - 2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

1 est solution de $-t^3 + 2t^2 + t - 2 = 0$.
Ainsi, i est solution de $z^3 + (1-2i)z^2 + (1-i)z - 2i = 0$.

(b) D'après la question précédente, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$ tels que :
$\forall z \in \mathbb{C},\ z^3 + (1-2i)z^2 + (1-i)z - 2i = (z-i)(az^2 + bz + c) = az^3 + z^2(b - ia) + z(c - ib) - ic$.
Or :

$$\begin{aligned} & \forall z \in \mathbb{C},\ z^3 + (1-2i)z^2 + (1-i)z - 2i = (z-i)(az^2 + bz + c) \\ \iff & \forall z \in \mathbb{C},\ z^3 + (1-2i)z^2 + (1-i)z - 2i = az^3 + z^2(b - ia) + z(c - ib) - ic \\ \iff & \begin{cases} a = 1 \\ b - ia = 1 - 2i \\ c - ib = 1 - i \\ -ic = -2i \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 - i \\ c = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ z^3 + (1-2i)z^2 + (1-i)z - 2i = (z-i)(z^2 + (1-i)z + 2).$$

Il reste maintenant à résoudre l'équation $z^2 + (1-i)z + 2 = 0$. Son discriminant vaut $(1-i)^2 - 8 = 1 - 1 - 2i - 8 = -8 - 2i$.
Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (x+iy)^2 = -8 - 2i &\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ 2xy = -2 \\ x^2 + y^2 = |-8-2i| = \sqrt{64+4} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 = -4 + \sqrt{17} \\ y^2 = 4 + \sqrt{17} \\ 2xy = -2 \end{cases} \\ &\iff x + iy = \pm\left(\sqrt{\sqrt{17} - 4} - i\sqrt{\sqrt{17} + 4}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, les racines carrées de $-8 - 2i$ sont $\pm\left(\sqrt{\sqrt{17} - 4} - i\sqrt{\sqrt{17} + 4}\right)$.
Les solutions de $z^2 + (1-i)z + 2 = 0$ sont donc $\dfrac{i-1}{2} \pm \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\sqrt{17} - 4} - i\sqrt{\sqrt{17} + 4}\right)$.
Finalement, les solutions de $z^3 + (1-2i)z^2 + (1-i)z - 2i = 0$ sont donc $\dfrac{i-1}{2} \pm \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\sqrt{17} - 4} - i\sqrt{\sqrt{17} + 4}\right)$ et i.

Exercice 32. • 0 n'est pas solution de $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
On peut donc diviser par $z^2 \neq 0$.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, posons $Z = z + z^{-1}$. On a :

$$\begin{aligned}
z^4+z^3+z^2+z+1=0 &\iff \frac{z^4+z^3+z^2+z+1}{z^2}=0 \quad \text{car } z\neq 0\\
&\iff z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0\\
&\iff Z^2-2+Z+1=0\\
&\iff Z^2+Z-1=0\\
&\iff Z=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\\
&\iff z+\frac{1}{z}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\\
&\iff z^2-\frac{(-1\pm\sqrt{5})}{2}z+1=0
\end{aligned}$$

- Le polynôme $z^2-\dfrac{(-1+\sqrt{5})}{2}z+1$ a pour discriminant : $\Delta=\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-4=\dfrac{6-2\sqrt{5}}{4}-4=\dfrac{-5-\sqrt{5}}{2}$.

  Comme $\Delta<0$, les racines du polynôme $z^2-\dfrac{(-1+\sqrt{5})}{2}z+1$ sont donc :

$$z_1=\frac{(-1+\sqrt{5})}{4}+\frac{i}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \quad \text{et} \quad z_2=\frac{(-1+\sqrt{5})}{4}-\frac{i}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$$

- De même, le polynôme $z^2-\dfrac{(-1-\sqrt{5})}{2}z+1$ a pour discriminant $\dfrac{6+2\sqrt{5}}{4}-4=\dfrac{-5+\sqrt{5}}{2}$.

  Comme $\Delta<0$, les racines du polynôme $z^2-\dfrac{(-1-\sqrt{5})}{2}z+1$ sont :

$$z_3=\frac{(-1-\sqrt{5})}{4}+\frac{i}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \quad \text{et} \quad z_4=\frac{(-1-\sqrt{5})}{4}-\frac{i}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$$

Ainsi, $z^4+z^3+z^2+z+1=0 \iff z\in\{z_1,z_2,z_3,z_4\}$.
Les solutions de $z^4+z^3+z^2+z+1$ sont donc z_1,z_2,z_3,z_4.

- 1 n'est pas solution de l'équation.
  Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$. On a :

$$\begin{aligned}
z^4+z^3+z^2+z+1=0 &\iff \frac{z^5-1}{z-1}=0\\
&\iff z^5-1=0\\
&\iff \exists k\in [\![0,4]\!],\ z=e^{\frac{2ik\pi}{5}}
\end{aligned}$$

Les solutions de $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ sont donc $\{e^{\frac{2ik\pi}{5}}, k\in[\![0,4]\!]\}$.

On a $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)=\mathrm{Re}(e^{\frac{2i\pi}{5}})$. Ainsi, d'après les résultats précédents, $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Or, $\dfrac{2\pi}{5}\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)>0$. Ainsi, $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Exercice 33. D'après les relations coefficients-racine, (x,y) est solution de ce système si et seulement si x et y sont les solutions de l'équation $z^2-4z+2=0$.
L'équation $z^2-4z+2=0$ a pour discriminant 8 et ses solutions sont $\frac{4\pm\sqrt{8}}{2}=2\pm\sqrt{2}$.
Ainsi, l'ensemble des solutions de ce système est donc $\{(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}),(2+\sqrt{2},2-\sqrt{2})\}$.

Exercice 34. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
(x,y) est solution de $\left\{\begin{array}{l} x+y=1+i\\ xy=2-i\end{array}\right.$ si et seulement si x et y sont les solutions de $z^2-(1+i)z+(2-i)=0$, d'après les relations coefficients-racines.
Le discriminant associé à l'équation $z^2-(1+i)z+(2-i)=0$ vaut $(1+i)^2-4(2-i)=1-1+2i-8+4i=-8+6i$.

Cherchons les racines carrées de ce discriminant.
Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

$$(x+iy)^2 = -8+6i \iff \begin{cases} x^2-y^2=-8 \\ 2xy=6 \\ x^2+y^2=|-8+6i|=\sqrt{64+36}=10 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x^2=1 \\ y^2=9 \\ 2xy=6 \end{cases}$$
$$\iff x+iy=\pm(1+3i)$$

Ainsi, les racines carrées de $-8+6i$ sont $\pm(1+3i)$ .. On en déduit que les solutions de $z^2-(1+i)z+(2-i)=0$ sont $\dfrac{1+i-(1+3i)}{2}=-i$ et $\dfrac{1+i+1+3i}{2}=1+2i$. Ainsi, les solutions du système sont $(-i, 1+2i)$ et $(1+2i, -i)$.

6 Racines n-ième

Exercice 35. $\dfrac{-4}{1+i\sqrt{3}} = \dfrac{-4}{2e^{\frac{i\pi}{3}}} = -2e^{-\frac{i\pi}{3}} = 2e^{-\frac{i\pi}{3}}e^{i\pi} = 2e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$z^6 = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}} \iff z^6 = 2e^{\frac{2i\pi}{3}}$$
$$\iff \frac{z^6}{2e^{\frac{2i\pi}{3}}} = 1$$
$$\iff \left(\frac{z}{2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{i\pi}{9}}}\right)^6 = 1$$
$$\iff \exists k \in [\![0,5]\!],\ \frac{z}{2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{i\pi}{9}}} = e^{\frac{2ik\pi}{6}}$$
$$\iff \exists k \in [\![0,5]\!],\ z = 2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{i\pi}{9}+\frac{ik\pi}{3}}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\{2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{i\pi}{9}+\frac{ik\pi}{3}}, k \in [\![0,5]\!]\}$.

Exercice 36. Tout d'abord, on remarque que i n'est pas solution de l'équation.
Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{i\}$. On a alors :

$$(z+i)^n = (z-i)^n \iff \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1$$
$$\iff \frac{z+i}{z-i} \in \mathbb{U}_n$$
$$\iff \exists k \in [\![0,n-1]\!],\ \frac{z+i}{z-i} = e^{2ik\pi/n}$$
$$\iff \exists k \in [\![0,n-1]\!],\ (z+i) = e^{2ik\pi/n}(z-i)$$
$$\iff \exists k \in [\![0,n-1]\!],\ z(1-e^{2ik\pi/n}) = -i(e^{2ik\pi/n}+1)$$

Pour $k=0$, l'équation devient : $0=-2i$ qui est impossible. On a donc

$$(z+i)^n = (z-i)^n \iff \exists k \in [\![1,n-1]\!],\ z(1-e^{2ik\pi/n}) = -i(e^{2ik\pi/n}+1)$$
$$\iff \exists k \in [\![1,n-1]\!],\ z = \frac{-i(e^{2ik\pi/n}+1)}{(1-e^{2ik\pi/n})}$$
$$\iff \exists k \in [\![1,n-1]\!],\ z = -i\frac{e^{ik\pi/n}(e^{ik\pi/n}+e^{-ik\pi/n})}{e^{ik\pi/n}(e^{-ik\pi/n}-e^{ik\pi/n})}$$
$$\iff \exists k \in [\![1,n-1]\!],\ z = -i\frac{2\cos(k\pi/n)}{-2i\sin(k\pi/n)}$$
$$\iff \exists k \in [\![1,n-1]\!],\ z = \frac{\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\left\{\frac{\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)}, k \in [\![1,n-1]\!]\right\}$

Exercice 37. 1. $4\sqrt{2}(1+i) = 8e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
z^3 = 4\sqrt{2}(1+i) &\iff z^3 = 2^3 e^{i\frac{\pi}{4}} \\
&\iff \frac{z^3}{2^3 e^{i\frac{\pi}{4}}} = 1 \\
&\iff \left(\frac{z}{2^3 e^{i\frac{\pi}{12}}}\right)^3 = 1 \\
&\iff \exists k \in [\![0,2]\!],\ \frac{z}{2^3 e^{i\frac{\pi}{12}}} = e^{\frac{2ik\pi}{3}} \\
&\iff \exists k \in [\![0,2]\!],\ z = 2e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)}
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\{2e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)}, k \in [\![0,2]\!]\}$.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
z^5 = -i &\iff z^5 = e^{-i\frac{\pi}{2}} \\
&\iff \frac{z^5}{e^{-i\frac{\pi}{2}}} = 1 \\
&\iff \left(\frac{z}{e^{-i\frac{\pi}{10}}}\right)^5 = 1 \\
&\iff \exists k \in [\![0,4]\!],\ \frac{z^5}{e^{-i\frac{\pi}{10}}} = e^{i\frac{2k\pi}{5}} \\
&\iff \exists k \in [\![0,4]\!],\ z = e^{i\left(-\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}\right)}
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\{e^{i\left(-\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}\right)}, k \in [\![0,4]\!]\}$.

3. Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$. On a :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = e^{in\theta} &\iff \left(\frac{z+1}{e^{i\theta}(z-1)}\right)^n = 1 \\
&\iff \exists k \in [\![0,n-1]\!],\ \frac{z+1}{e^{i\theta}(z-1)} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\
&\iff \exists k \in [\![0,n-1]\!],\ (z+1) = (z-1)e^{i\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right)} \\
&\iff \exists k \in [\![0,n-1]\!],\ z\left(e^{i(\theta+\frac{2k\pi}{n})}-1\right) = 1+e^{i(\theta+\frac{2k\pi}{n})}
\end{aligned}$$

Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$.

- si $e^{i(\theta+\frac{2k\pi}{n})} = 1$ i.e $\theta \equiv -\dfrac{2k\pi}{n}\ [2\pi]$, alors, l'équation $z\left(e^{i(\theta+\frac{2k\pi}{n})}-1\right) = 1+e^{i(\theta+\frac{2k\pi}{n})}$ n'a pas de solution.
- si $e^{i(\theta+\frac{2k\pi}{n})} \neq 1$ i.e $\theta \not\equiv -\dfrac{2k\pi}{n}\ [2\pi]$ alors, on a :

$$\begin{aligned}
z\left(e^{i(\theta+\frac{2k\pi}{n})}-1\right) = 1+e^{i(\theta+\frac{2k\pi}{n})} &\iff z = \frac{e^{i(\theta+\frac{2k\pi}{n})}+1}{e^{i(\theta+\frac{2k\pi}{n})}-1} \\
&\iff z = \frac{e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{k\pi}{n}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{k\pi}{n}\right)}+e^{-i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{k\pi}{n}\right)}\right)}{e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{k\pi}{n}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{k\pi}{n}\right)}-e^{-i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{k\pi}{n}\right)}\right)} \\
&\iff z = \frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{k\pi}{n}\right)}{2i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{k\pi}{n}\right)} \\
&\iff z = -i\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{k\pi}{n}\right)}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

- Si : $\forall k \in [\![0,n-1]\!]$, $\theta \not\equiv -\dfrac{2k\pi}{n}\ [2\pi]$ (ce qui équivaut à $\dfrac{n\theta}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$), l'ensemble des solutions est :

$$\{-i\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{k\pi}{n}\right)},\ [\![0,n-1]\!]\}$$

- Si il existe $k_0 \in [\![0, n-1]\!]$, $\theta \equiv -\dfrac{2k_0\pi}{n}\ [2\pi]$ (ce qui équivaut à $\dfrac{n\theta}{2\pi} \in \mathbb{Z}$), l'ensemble des solutions est :

$$\{-i\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{k\pi}{n}\right)},\ [\![0, n-1]\!] \setminus \{k_0\}\}$$

4. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$. On pose $x = \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = 2\cos(n\theta) \quad &\iff \quad x + \frac{1}{x} = 2\cos(n\theta)\\ &\iff \quad x^2 - 2\cos(n\theta)x + 1 = 0\\ &\iff \quad x = e^{\pm in\theta}\end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = 2\cos(n\theta) \quad \iff \quad \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = e^{\pm in\theta}$$

Supposons que $\dfrac{n\theta}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$. Ainsi, on a :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \theta \not\equiv -\frac{2k\pi}{n}\ [2\pi] \quad \text{et } \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ -\theta \not\equiv -\frac{2k\pi}{n}\ [2\pi]$$

En utilisant les résultats de l'équation précédente, on trouve alors que l'ensemble des solutions est

$$\left\{-i\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{k\pi}{n}\right)}, k \in [\![0, n-1]\!]\right\} \cup \left\{-i\frac{\cos\left(-\frac{\theta}{2}+\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(-\frac{\theta}{2}+\frac{k\pi}{n}\right)}, k \in [\![0, n-1]\!]\right\}.$$

5. 1 n'est pas solutions de l'équation.
Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

$$\begin{aligned}(z+1)^n = (z-1)^n \quad &\iff \quad \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1\\ &\iff \quad \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ \frac{z+1}{z-1} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}\\ &\iff \quad \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ z+1 = (z-1)e^{2ik\pi/n}\\ &\iff \quad \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ z\left(e^{2ik\pi/n} - 1\right) = \left(1 + e^{2ik\pi/n}\right)\end{aligned}$$

Pour $k = 0$, l'équation devient : $0 = 2$ qui est impossible. On a donc :

$$\begin{aligned}(z+1)^n = (z-1)^n \quad &\iff \quad \exists k \in [\![1, n-1]\!],\ z = \frac{e^{2ik\pi/n}+1}{e^{2ik\pi/n}-1}\\ &\iff \quad \exists k \in [\![1, n-1]\!],\ z = \frac{e^{\frac{ik\pi}{n}}\left(e^{\frac{ik\pi}{n}} + e^{\frac{-ik\pi}{n}}\right)}{e^{\frac{ik\pi}{n}}\left(e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{\frac{-ik\pi}{n}}\right)}\\ &\iff \quad \exists k \in [\![1, n-1]\!],\ z = \frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \quad \iff \quad \exists k \in [\![1, n-1]\!],\ z = -i\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\{-i\dfrac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}, k \in [\![1, n-1]\!]\}$.

6. -1 n'est pas solution de l'équation.
Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$.

$$\begin{aligned}
4\left((z+i)\right)^4-(z+1)^4=0 &\iff \left(\sqrt{2}(z+i)\right)^4=(z+1)^4\\
&\iff \left(\frac{\sqrt{2}(z+i)}{z+1}\right)^4=1\\
&\iff \exists k\in[\![0,3]\!],\ \frac{\sqrt{2}(z+i)}{z+1}=e^{\frac{ik\pi}{2}}\\
&\iff \exists k\in[\![0,3]\!],\ \sqrt{2}(z+i)=(z+1)e^{\frac{ik\pi}{2}}\\
&\iff \exists k\in[\![0,3]\!],\ \sqrt{2}(z+i)=(z+1)e^{\frac{ik\pi}{2}}\\
&\iff \exists k\in[\![0,3]\!],\ z(\sqrt{2}-e^{\frac{ik\pi}{2}})=e^{\frac{ik\pi}{2}}-\sqrt{2}i\\
&\iff \exists k\in[\![0,3]\!],\ z=\frac{e^{\frac{ik\pi}{2}}-\sqrt{2}i}{\sqrt{2}-e^{\frac{ik\pi}{2}}} \quad \text{car :}\forall k\in[\![0,3]\!],\ \sqrt{2}-e^{\frac{ik\pi}{2}}\neq 0
\end{aligned}$$

Soit $k\in\{0,1,2,3\}$.
Pour $k=0$, on a : $\dfrac{e^{\frac{ik\pi}{2}}-\sqrt{2}i}{\sqrt{2}-e^{\frac{ik\pi}{2}}}=\dfrac{1-\sqrt{2}i}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}-i\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1-i(2+\sqrt{2})$
Pour $k=1$, on a : $\dfrac{e^{\frac{ik\pi}{2}}-\sqrt{2}i}{\sqrt{2}-e^{\frac{ik\pi}{2}}}=\dfrac{i(1-\sqrt{2})(\sqrt{2}+i)}{3}=\dfrac{(\sqrt{2}-1)}{3}+i\dfrac{(\sqrt{2}-2)}{3}$.
Pour $k=2$, on a : $\dfrac{e^{\frac{ik\pi}{2}}-\sqrt{2}i}{\sqrt{2}-e^{\frac{ik\pi}{2}}}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}+1}-i\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1-i(2-\sqrt{2})$.
Pour $k=3$, on a : $\dfrac{e^{\frac{ik\pi}{2}}-\sqrt{2}i}{\sqrt{2}-e^{\frac{ik\pi}{2}}}=\dfrac{-i(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-i)}{3}=\dfrac{-(1+\sqrt{2})}{3}-i\dfrac{(\sqrt{2}+2)}{3}$.
Ainsi, l'ensemble des solutions est

$$\left\{\sqrt{2}+1-i(2+\sqrt{2}),\frac{(\sqrt{2}-1)}{3}+i\frac{(\sqrt{2}-2)}{3},\sqrt{2}-1-i(2-\sqrt{2}),\frac{-(1+\sqrt{2})}{3}-i\frac{(\sqrt{2}+2)}{3}\right\}$$

Exercice 38.

1. On sait que la somme des racines 7-ièmes de l'unité est nulle donc $1+u+v=0$, puis $u+v=-1$.
D'autre part : $u^2=z^2+z^4+z^8+2z^3+2z^5+2z^6=z^2+z^4+z+2(z^3+z^5+z^6)=u+2v=2(u+v)-u=-2-u$.
2. Posons $t=\sin\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\dfrac{4\pi}{7}\right)+\sin\left(\dfrac{8\pi}{7}\right)$.
On a $t=\mathrm{Im}\left(e^{\frac{2i\pi}{7}}\right)+\mathrm{Im}\left(e^{\frac{4i\pi}{7}}\right)+\mathrm{Im}\left(e^{\frac{8i\pi}{7}}\right)=\mathrm{Im}\left(e^{\frac{2i\pi}{7}}+e^{\frac{4i\pi}{7}}+e^{\frac{8i\pi}{7}}\right)=\mathrm{Im}(u)$.
Or, u est solution de $u^2+u+2=0$. Le discriminant de cette équation vaut -7 et ses solutions sont $\dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$.
On a donc $t=\mathrm{Im}(u)=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}$. On a $\sin\left(\dfrac{8\pi}{7}\right)=-\sin\left(\dfrac{\pi}{7}\right)$. Or, la fonction sinus est croissante sur $[0,\dfrac{\pi}{2}]$, donc $\sin\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)\geq\sin\left(\dfrac{\pi}{7}\right)$. De plus, sin est positif sur $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ donc $\sin\left(\dfrac{4\pi}{7}\right)\geq 0$. Ainsi, $t\geq\sin\left(\dfrac{4\pi}{7}\right)\geq 0$, donc $t=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

Exercice 39. Soit $z\in\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
z^{11}=-1 &\iff z^{11}=e^{\pi}\\
&\iff \frac{z^{11}}{e^{\pi}}=1\\
&\iff \left(\frac{z}{e^{\frac{\pi}{11}}}\right)^{11}=1\\
&\iff \exists k\in[\![0,10]\!],\ \frac{z}{e^{\frac{\pi}{11}}}=e^{\frac{2ik\pi}{11}}\\
&\iff \exists k\in[\![0,10]\!],\ z=e^{i\left(\frac{(2k+1)\pi}{11}\right)}
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de $z^{11}=-1$ est $\{e^{i\left(\frac{(2k+1)\pi}{11}\right)},\ k\in[\![0,10]\!]\}$.
Pour tout $k\in[\![0,10]\!]$, posons $z_k=e^{i\left(\frac{(2k+1)\pi}{11}\right)}$.

On a alors : $\sum\limits_{k=0}^{10} z_k = \sum\limits_{k=0}^{10} e^{i\left(\frac{(2k+1)\pi}{11}\right)} = e^{i\frac{\pi}{11}} \times \sum\limits_{k=0}^{10}\left(e^{\frac{2i\pi}{11}}\right)^k = e^{i\frac{\pi}{11}} \times \dfrac{1-e^{\frac{2i\pi\times 11}{11}}}{1-e^{\frac{2i\pi}{11}}} = 0.$

Ainsi, $0 = \mathrm{Re}\left(\sum\limits_{k=0}^{10} z_k\right) = \sum\limits_{k=0}^{10}\mathrm{Re}(z_k) = \sum\limits_{k=0}^{10}\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{11}\right) = \sum\limits_{k=0}^{4}\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{11}\right) - 1 + \sum\limits_{k=6}^{10}\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{11}\right).$

Dans cette dernière somme, on effectue le changement de variable : $k = 10 - p$.

Ainsi, $\dfrac{(2k+1)\pi}{11} = \dfrac{22\pi}{11} - \dfrac{(2p+1)\pi}{11} = 2\pi - \dfrac{(2p+1)\pi}{11}.$

On obtient donc :
$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^{4}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{11}\right) - 1 + \sum_{p=0}^{4}\cos\left(2\pi - \frac{(2p+1)\pi}{11}\right). \\ &= \sum_{k=0}^{4}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{11}\right) - 1 + \sum_{p=0}^{4}\cos\left(\frac{(2p+1)\pi}{11}\right) \\ &= -1 + 2\left(\sum_{k=0}^{4}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{11}\right)\right) \end{aligned}$$

Ainsi, $\dfrac{1}{2} = \cos\left(\dfrac{\pi}{11}\right) + \cos\left(\dfrac{3\pi}{11}\right) + \cos\left(\dfrac{5\pi}{11}\right) + \cos\left(\dfrac{7\pi}{11}\right) + \cos\left(\dfrac{9\pi}{11}\right).$

Exercice 40. 1. Soit $p \in \mathbb{N}$:
$$S = \sum_{\omega\in\mathbb{U}_n} \omega^p = \sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{2ip\pi}{n}}\right)^k$$

On a :
$$\begin{aligned} e^{\frac{2ip\pi}{n}} &\iff \frac{2p\pi}{n} \equiv 0[2\pi] \\ &\iff p \equiv 0[n] \\ &\iff n|p \end{aligned}$$

Ainsi :
$$\begin{aligned} S = \sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\omega^p &= \begin{cases} \frac{1-e^{2ip\pi}}{1-e^{\frac{2ip\pi}{n}}} \text{ si } n \not| p \\ n \text{ sinon.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 \text{ si } n \not| p \\ n \text{ sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

2. Soit $n, p \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} S = \sum_{k=0}^{n-1}\omega^{kp} &= \sum_{k=0}^{n-1}(\omega^p)^k \\ &= \begin{cases} \frac{1-e^{2ip\pi}}{1-e^{\frac{2ip\pi}{n}}} \text{ si } n \not| p \\ n \text{ sinon.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 \text{ si } n \not| p \\ n \text{ sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Par suite,
$$\sum_{k=0}^{n-1}(1+\omega^k)^n = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\omega^{kj} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{kj} = \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{n}\right] \times n = 2n.$$

3. On a :
   - si $\omega \neq 1$:
$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{k}\omega^k$$

Soient $k, i \in \mathbb{N}$, on a :
$$\begin{cases} 0 \leq k \leq n-1 \\ 0 \leq i \leq k \end{cases} \iff \begin{cases} i \leq k \leq n-1 \\ 0 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k &= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=i}^{n-1}\omega^k \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\left(\omega^i \times \frac{(1-\omega^{n-i})}{1-\omega}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\frac{\omega^i-\omega^n}{1-\omega} \\
&= \frac{1}{1-\omega} \times \left(\sum_{i=0}^{n-1}\omega^i\right) - \left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{w^n}{1-\omega}\right) \\
&= 0 - \frac{n}{1-\omega} \\
&= -\frac{n}{1-\omega}
\end{aligned}$$

- si $\omega = 1$, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 41. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned}
(z+1)^n = e^{2ina} \quad &\iff \quad \frac{(z+1)^n}{e^{2ina}} = 1 \\
&\iff \quad \left(\frac{z+1}{e^{2ia}}\right)^n = 1 \\
&\iff \quad \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ \frac{z+1}{e^{2ia}} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\
&\iff \quad \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ z+1 = e^{2ia+\frac{2ik\pi}{n}} \\
&\iff \quad \exists k \in [\![0, n-1]\!], z = -1 + e^{2ia+\frac{2ik\pi}{n}} \\
&\iff \quad \exists k \in [\![0, n-1]\!], z = e^{ia+\frac{ik\pi}{n}}\left(-e^{-ia-\frac{ik\pi}{n}} + e^{ia+\frac{ik\pi}{n}}\right) \\
&\iff \quad \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ z = 2i\sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)e^{ia+\frac{ik\pi}{n}}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\{2i\sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)e^{ia+\frac{ik\pi}{n}}, k \in [\![0, n-1]\!]\}$.

2. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on pose $z_k = 2i\sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)e^{ia+\frac{ik\pi}{n}}$.
D'après la question précédente, on a :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \prod_{k=0}^{n-1}(z-z_k) = (z+1)^n - e^{2ina}.$$

Ainsi, en identifiant les termes constants, on trouve :
$\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(-z_k) = (-1)^n\prod_{k=0}^{n-1}z_k = 1-e^{2ina}$ ce qui s'écrit encore : $\displaystyle(-1)^n\prod_{k=0}^{n-1}\left(2i\sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)e^{ia+\frac{ik\pi}{n}}\right) = -e^{ina}2i\sin(na)$.
Calculons désormais $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}z_k$:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} z_k &= (-2i)^n e^{ina} \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right) \times \prod_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}} \\
&= (-2i)^n e^{ina} \left(\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)\right) \times e^{\frac{i\pi}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} k} \\
&= (-2i)^n e^{ina} \left(\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)\right) \times e^{\frac{i(n-1)\pi}{2}} \\
&= (-2i)^n e^{ina} \left(\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)\right) \times i^{n-1} \\
&= (-1)^n (i^2)^{n-1} \times i2^n e^{ina} \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right) \\
&= (-1)^n (-1)^{n-1} \times i2^n e^{ina} \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right) \\
&= -i2^n e^{ina} \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)
\end{aligned}$$

On a donc $-i2^n e^{ina} \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right) = -2ie^{ina}\sin(na)$.

Finalement, $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin(na)}{2^{n-1}}$

7 Exponentielle complexe

Exercice 42. 1. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned}
e^z = 3 \quad &\iff \quad e^z = e^{\ln 3} \\
&\iff \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ z - \ln 3 = 2k\pi i
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\{i\frac{\pi}{2} + 2ik\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned}
e^z = 3i \quad &\iff \quad e^z = 3e^{i\pi/2} \\
&\iff \quad e^z = e^{\ln(3)+i\pi/2} \\
&\iff \quad \exists k \in \mathbb{Z}, z - \ln 3 - i\frac{\pi}{2} = 2k\pi i
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\{\ln 3 + i\frac{\pi}{2} + 2ik\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

3. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned}
e^z = 1 + i\sqrt{3} \quad &\iff \quad e^z = 2e^{i\pi/3} \\
&\iff \quad e^z = e^{\ln(2)+i\pi/3} \\
&\iff \quad \exists k \in \mathbb{Z}, z - \ln 2 - i\frac{\pi}{3} = 2ik\pi
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\{\ln 2 + i\frac{\pi}{3} + 2ik\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

8 Nombres complexes et géométrie plane

Exercice 43. Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{2iz-1}{z+1}\right| = 1 \quad &\iff \quad \left|\frac{2i(x+iy)-1}{x+iy+1}\right|^2 = 1\\
&\iff \quad \frac{(-2y-1)^2+4x^2)}{(x+1)^2+y^2} = 1\\
&\iff \quad 4y^2+4y+1+4x^2 = x^2+2x+1+y^2\\
&\iff \quad 3y^2+3x^2+4y-2x = 0\\
&\iff \quad 3\left(y+\frac{2}{3}\right)^2+3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{3}-\frac{1}{3} = 0\\
&\iff \quad \left(y+\frac{2}{3}\right)^2+\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}\\
&\iff \quad \left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2\\
&\iff \quad |z-\omega| = \frac{\sqrt{5}}{3}
\end{aligned}$$

où $\omega = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}i$. L'ensemble E cherché est le cercle de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Exercice 44. 1. (a) Le triangle formé par les points d'affixe a, b et c est équilatéral direct
si et seulement si le point d'affixe c est l'image de celui d'affixe b par la rotation de centre a et d'angle $\frac{\pi}{3}$
si et seulement si $c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$
si et seulement si $c - e^{i\frac{\pi}{3}}b + (e^{i\frac{\pi}{3}} - 1)a = 0$

Comme précédemment, le triangle formé par les points d'affixe a, b et c est équilatéral indirect si et seulement si le point d'affixe c est l'image de celui d'affixe b par la rotation de centre a et d'angle $-\frac{\pi}{3}$
si et seulement si $c - a = e^{-i\frac{\pi}{3}}(b-a)$
si et seulement si $c - e^{-i\frac{\pi}{3}}b + (e^{-i\frac{\pi}{3}} - 1)a = 0$

Ainsi, le triangle formé par les points d'affixes a, b et c est équilatéral
si et seulement si $c - e^{i\frac{\pi}{3}}b + (e^{i\frac{\pi}{3}} - 1)a = 0$ ou $c - e^{-i\frac{\pi}{3}}b + (e^{-i\frac{\pi}{3}} - 1)a = 0$,
si et seulement si $0 = \left(c - e^{i\frac{\pi}{3}}b + (e^{i\frac{\pi}{3}} - 1)a\right)\left(c - e^{-i\frac{\pi}{3}}b + (e^{-i\frac{\pi}{3}} - 1)a\right)$
si et seulement si $c^2 - bce^{-i\frac{\pi}{3}} + ca(e^{-i\frac{\pi}{3}} - 1) - bce^{i\frac{\pi}{3}} + b^2 - ab(1-e^{i\frac{\pi}{3}}) + ac(e^{i\frac{\pi}{3}} - 1) - ab(1-e^{-i\frac{\pi}{3}}) + a^2|e^{-i\frac{\pi}{3}} - 1| = 0$
si et seulement si $\left|-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| a^2+b^2+c^2+ab(-1+e^{i\frac{\pi}{3}}-1+e^{-i\frac{\pi}{3}})+bc(-e^{-i\frac{\pi}{3}}-e^{i\frac{\pi}{3}})+ac(e^{-i\frac{\pi}{3}}-1+e^{i\frac{\pi}{3}}-1) = 0$
si et seulement si $a^2+b^2+c^2+ab\left(-2+2\mathrm{Re}\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\right) - 2bc\mathrm{Re}\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) + ac\left(2\mathrm{Re}\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) - 2\right) = 0$
si et seulement si $0 = a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$

(b) On suppose a, b, c deux à deux distincts.
a, b et c forment un triangle rectangle en a si et seulement si $\frac{b-a}{c-a} \in i\mathbb{R}$ si et seulement si $\mathrm{Re}\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = 0$

2. (a) Soit $z \in \mathbb{C}$. Les points $1, z, z^2$ sont deux à deux distincts si et seulement si $z \notin \{-1, 0, 1\}$.
On suppose désormais $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

- 1, z et z^2 forment un triangle rectangle en 1 si et seulement si $\frac{z^2-1}{z-1} \in i\mathbb{R}$.
  si et seulement si $z + 1 \in i\mathbb{R}$
  si et seulement si $\mathrm{Re}(z+1) = 0$
  si et seulement si $\mathrm{Re}z + 1 = 0$
  si et seulement si $\mathrm{Re}z = -1$
- 1, z et z^2 forment un triangle rectangle en z si et seulement si $\frac{z^2-z}{1-z} \in i\mathbb{R}$.
  si et seulement si $z \in i\mathbb{R}$
  si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = 0$

- 1, z et z^2 forment un triangle rectangle en z^2 si et seulement si $\dfrac{1-z^2}{z-z^2} \in i\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&\text{si et seulement si } \mathrm{Re}\left(\frac{1+z}{z}\right) = 0\\
&\text{si et seulement si } \mathrm{Re}\left(\frac{(1+z)\overline{z}}{|z|^2}\right) = 0\\
&\text{si et seulement si } \mathrm{Re}\left(\overline{z} + |z|^2\right) = 0\\
&\text{si et seulement si } \mathrm{Re}(\overline{z}) + |z|^2 = 0\\
&\text{si et seulement si } \mathrm{Re} z = -|z|^2.
\end{aligned}$$

On pose $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.
On a alors 1, z et z^2 forment un triangle rectangle en z^2 si et seulement si $x + x^2 + y^2 = 0$.

$$\begin{aligned}
&\text{si et seulement si } \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}\\
&\text{si et seulement si } \left|z + \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Finalement on trouve : $(\mathrm{Re} z = -1 \text{ ou } \mathrm{Re} z = 0 \text{ ou } \left|z + \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2})$ et $z \notin \{-1, 0, 1\}$.

(b) Soit $z \in \mathbb{C}$. Les points z, $\dfrac{1}{z}$ et $-i$ sont deux à deux distincts si et seulement si $z \notin \{-i, i, 1, -1\}$.
Supposons $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i, 1, -1\}$.
z, $\dfrac{1}{z}$ et $-i$ sont alignés si et seulement si $\dfrac{z+i}{\frac{1}{z}+i} \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&\text{si et seulement si } \frac{z(z+i)}{1+zi} \in \mathbb{R}\\
&\text{si et seulement si } \frac{z(z+i)(1-i\overline{z})}{|1+iz|^2} \in \mathbb{R}\\
&\text{si et seulement si } \frac{z(z+\overline{z}+i-i|z|^2}{|1+iz|^2} \in \mathbb{R}\\
&\text{si et seulement si } \frac{z(2\mathrm{Re}(z)+i-i|z|^2}{|1+iz|^2} \in \mathbb{R}\\
&\text{si et seulement si } z(2\mathrm{Re}(z)+i-i|z|^2 \in \mathbb{R}\\
&\text{si et seulement si } \mathrm{Im}\left(z(2\mathrm{Re}(z)+i-i|z|^2\right) = 0
\end{aligned}$$

On pose $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.
Ainsi, les points sont alignés si et seulement si si et seulement si $\mathrm{Im}\left((x+iy)(2x+i-i(x^2+y^2)\right) = 0$.

$$\begin{aligned}
&\text{si et seulement si } x - x(x^2+y^2) + 2xy = 0\\
&\text{si et seulement si } x(1-(x^2+y^2)+2y) = 0\\
&\text{si et seulement si } x = 0 \text{ ou } x^2+y^2-2y = 1\\
&\text{si et seulement si } x = 0 \text{ ou } x^2+(y-1)^2 = 2\\
&\text{si et seulement si } \mathrm{Re} z = 0 \text{ ou } |z-i|^2 = 2\\
&\text{si et seulement si } \mathrm{Re} z = 0 \text{ ou } |z-i| = \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Finalement, les points sont alignés si et seulement si $\mathrm{Re} z = 0$ ou $|z-i| = \sqrt{2}$.

(c) Soit $z \in \mathbb{C}$. Les points z, z^2, z^4 sont 2 à 2 distincts si et seulement si $z \notin \{0, 1, -1, e^{2i\pi/3}, e^{4i\pi/3}\}$.
Supposons $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, -1, e^{2i\pi/3}, e^{4i\pi/3}\}$.
Les points z, z^2 et z^4 sont alignés si et seulement si si et seulement si $\dfrac{z^4-z^2}{z-z^2} \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&\text{si et seulement si } \frac{z^2(z-1)(z+1)}{z(1-z)} \in \mathbb{R}\\
&\text{si et seulement si } -z(z+1) \in \mathbb{R}\\
&\text{si et seulement si } z(z+1) \in \mathbb{R}\\
&\text{si et seulement si } \mathrm{Im}\left(z(z+1)\right) = 0
\end{aligned}$$

On pose $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

Ainsi, les points z, z^2 et z^4 sont alignés si et seulement si
$$\begin{aligned}
&\text{si et seulement si } \operatorname{Im}\left((x+iy)(x+1+iy)\right)=0\\
&\text{si et seulement si } \operatorname{Im}\left(x(x+1)-y^2+iyx+yi(x+1)\right)=0\\
&\text{si et seulement si } y(2x+1)=0\\
&\text{si et seulement si } y=0 \text{ ou } x=\frac{-1}{2}\\
&\text{si et seulement si } \operatorname{Im}z=0 \text{ ou } \operatorname{Re}z=-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Finalement, les points sont alignés si et seulement si $\operatorname{Im}z=0$ ou $\operatorname{Re}z=-\frac{1}{2}$.

Exercice 45. 1. Soit $z\in\mathbb{C}$. On pose $z=x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
$$\begin{aligned}
|z+i|=|z-1| &\iff |x+i(y+1)|^2=|(x-1)+iy|^2\\
&\iff x^2+(y+1)^2=(x-1)^2+y^2\\
&\iff x^2+y^2+2y+1=x^2-2x+1+y^2\\
&\iff 2y=-2x\\
&\iff y=-x
\end{aligned}$$
Ainsi, l'ensemble E des points $M(z)$ recherché est la droite d'équation $y=-x$. Ainsi, $E=\{x(1-i),x\in\mathbb{R}\}$

2. Raisonnons par analyse synthèse.

Analyse : On suppose qu'il existe $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|=\left|\frac{1}{z}\right|=|1+z|$.

De la première égalité, on déduit que $|z|^2=1$, donc $|z|=1$.

De plus, avec la deuxième égalité, on a $|1+z|=|z-(-1)|=|z|=1$. Le point M d'affixe z appartient donc à la fois au cercle unité et au cercle de centre -1 et de rayon 1.

Ecrivons $z=x+iy$ avec $x,y\in\mathbb{R}$. On a :
$$\begin{aligned}
\begin{cases}|z|=1\\|1+z|=1\end{cases} &\iff \begin{cases}x^2+y^2=1\\(x+1)^2+y^2=1\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}x^2+y^2=1\\x^2+2x+1+y^2=1\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}x^2+y^2=1\\2x+1=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}y^2=\frac{3}{4}\\x=-\frac{1}{2}\end{cases}
\end{aligned}$$
On trouve donc $z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $z=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Synthèse : On vérifie que ces deux complexes vérifient bien $|z|=\left|\frac{1}{z}\right|=|1+z|$.

Les solutions sont donc les points $M_1\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $M_2\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3. Soit $z\in\mathbb{C}$. On pose $z=x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
$$\begin{aligned}
\frac{z+1}{z-1}&=\frac{(x+1)+iy}{(x-1)+iy}=\frac{((x+1)+iy)\left((x-1)-iy\right)}{(x-1)^2+y^2}\\
&=\frac{\left((x+1)(x-1)+y^2\right)+i\left(y(x-1)-y(x+1)\right)}{(x-1)^2+y^2}=\frac{\left((x+1)(x-1)+y^2\right)-2iy}{(x-1)^2+y^2}
\end{aligned}$$
Ainsi,
$$\begin{aligned}
\frac{z+1}{z-1}\in\mathbb{R} &\iff \operatorname{Im}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)=0\\
&\iff -2y=0.
\end{aligned}$$
Ainsi, l'ensemble des points $M(z)$ recherché est l'axe des abscisses.

Exercice 46. 1. Le module de a vaut 2. On a alors : $a=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ donc un argument de a est $-\frac{\pi}{6}$.

2. $f(z)=ze^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z$

3. $z_B=f(z_A)$ donc $z_B=2e^{-i\frac{\pi}{6}}e^{i\frac{\pi}{4}}=2e^{i\frac{\pi}{12}}$. Et, $z_B=f(z_A)=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(\sqrt{3}-i)=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2}+i\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}$.

4. On a alors $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\text{Re}(z_B)}{2} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\text{Im}(z_B)}{2} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$

Exercice 47. 1. D'après le cours, $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & -\frac{1}{3}(z-4i)+4i \end{array}$. Ainsi, f est donnée par $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & -\frac{1}{3}z+\frac{16}{3}i \end{array}$.

2. D'après le cours, $\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & e^{i\frac{3\pi}{4}}(z+2)-2 \end{array}$. Ainsi, g est définie par : $\begin{array}{rcc} g: & \mathbb{C} & \to \mathbb{C} \\ & z \mapsto e^{i\frac{3\pi}{4}}z-2-\sqrt{2}+i\sqrt{2} & \end{array}$.

3. D'après le cours, on peut dire directement que la translation h est définie par : $\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & z+4-2i \end{array}$.

9 Fonctions à valeurs complexes

Exercice 48. On remarque que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \text{Im}(e^x e^{\sqrt{3}ix})$.
Posons $g : x \mapsto e^x e^{\sqrt{3}ix} = e^{(1+i\sqrt{3})x}$. g est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a $f = \text{Im}(g))$ donc f est elle même infiniment dérivable.
De plus, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)} = (\text{Im}(g))^{(n)} = \text{Im}\left(g^{(n)}\right)$.
Calculons dans un premier temps les dérivées n-ièmes de $g : x \mapsto e^{(1+i\sqrt{3})x}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} g^{(n)}(x) &= (1+i\sqrt{3})^n e^{(1+i\sqrt{3})x} \quad \text{par récurrence} \\ &= 2^n e^{in\pi/3} e^{(1+i\sqrt{3})x} \\ &= 2^n e^x e^{i\left(n\pi/3+\sqrt{3}x\right)} \end{aligned}$$

Ainsi, $\text{Im}(g^{(n)}(x)) = \text{Im}\left(2^n e^x e^{i\left(n\pi/3+\sqrt{3}x\right)}\right) = 2^n e^x \text{Im}\left(e^{i\left(n\pi/3+\sqrt{3}x\right)}\right) = 2^n e^x \sin\left(n\pi/3+\sqrt{3}x\right)$.
Donc : $\begin{array}{rccc} f^{(n)}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2^n e^x \sin\left(n\pi/3+\sqrt{3}x\right) \end{array}$.

Exercice 49. 1. On remarque que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = \text{Re}\left(e^{ix}\right)$ et $\sin(x) = \text{Im}\left(e^{ix}\right)$.
Posons $f : x \mapsto e^{ix}$.
f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a : $\cos(\text{Re}(f))$ et $\sin = \text{Im}(f)$. Ainsi, cos et sin sont infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\cos^{(n)} = (\text{Re}(f))^{(n)} = \text{Re}\left(f^{(n)}\right)$ et $\sin^{(n)} = (\text{Im}(f))^{(n)} = \text{Im}\left(f^{(n)}\right)$.
Calculons dans un premier temps les dérivées n-ièmes de $f : x \mapsto e^{ix}$.
On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = i^n e^{ix}$.
En effet, ce résultat se prouve par récurrence :
- Pour $n = 0$: $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(0)}(x) = f(x) = i^0 e^{ix}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = i^n e^{ix}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = i^n \times i \times e^{ix} = i^{n+1}e^{ix}$.
- Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = i^n e^{ix}$.

En utilisant la formule de Moivre, on obtient finalement que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^n e^{ix} = e^{i\frac{n\pi}{2}} e^{ix} = e^{i\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)}.$$

Ainsi, en prenant les parties réelles et imaginaires, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rccc} \cos^{(n)}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \text{Re}\left(f^{(n)}(x)\right) = \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \sin^{(n)}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \text{Im}\left(f^{(n)}(x)\right) = \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) \end{array}.$$

2. On commence par linéariser $\cos^3$ et $\sin^3$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $\cos^3(x) = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos x$ et $\sin^3(x) = -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin x$.
Posons $g : x \mapsto e^{3ix}$. g est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g^{(n)}(x) = (3i)^n e^{3ix} = \left(3e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^n e^{3ix} = 3^n e^{i\frac{n\pi}{2}} e^{3ix}$ d'après la formule de Moivre.
On obtient finalement : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$, $g^{(n)}(x) = 3^n e^{i\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a alors

$$\begin{aligned} (\cos^3)^{(n)}(x) &= \text{Re}\left(\frac{1}{4} \times 3^n e^{i\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)}\right) + \frac{3}{4}\cos^{(n)}(x) \\ &= \frac{3^n}{4}\cos\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{3}{4}\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned}(\sin^3)^{(n)}(x) &= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{4}\times 3^n e^{i\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)}\right)+\frac{3}{4}\sin^{(n)}(x)\\ &= -\frac{3^n}{4}\sin\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{3}{4}\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

Exercice 50. 1. Notons $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{C}\setminus\{-i\} & \to & \mathbb{C}\setminus\{1\} \\ z & \mapsto & \dfrac{z-i}{z+i} \end{array}$.

- La fonction f est bien définie :
  - Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{-i\}$, alors $z+i\neq 0$. Ainsi, pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\{-i\}$, $f(z)$ est bien défini.
  - Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{-i\}$,

$$\begin{aligned}\frac{z-i}{z+i}=1 &\iff z-i=z+i\\ &\iff -i=i\end{aligned}$$

    Ainsi, pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\{-i\},\ f(z)\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$.
- Soit $a\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$, soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{-i\}$. On a :

$$\begin{aligned}\frac{z-i}{z+i}=a &\iff z-i=a(z+i)\\ &\iff z(1-a)=i(1+a)\\ &\iff z=\frac{i(1+a)}{1-a} \quad \text{car } a\neq 1\end{aligned}$$

  Pour tout $a\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$, il existe un unique $z\in\mathbb{C}$ tel que $\dfrac{z-i}{z+i}=a$.
- Vérifions que pour tout $a\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$, $\dfrac{i(1+a)}{1-a}\neq -i$.
  Or, $\dfrac{i(1+a)}{1-a}=-i \iff i(1+a)=-i(1-a) \iff 2=0$
  Or, cette dernière égalité n'est jamais vraie donc par équivalence : $\forall a\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$, $\dfrac{i(1+a)}{1-a}\in\mathbb{C}\setminus\{-i\}$.

La fonction f est donc bijective de $\mathbb{C}\setminus\{-i\}$ dans $\mathbb{C}\setminus\{1\}$.

2. Posons $\begin{array}{rcl} g: P & \to & D \\ z & \mapsto & \dfrac{z-i}{z+i} \end{array}$.
   - g est bien définie :
     - Soit $z\in P$, alors $\mathrm{Im}z>0$ et donc $\mathrm{Im}(z+i)=\mathrm{Im}(z)+1>1$. Donc $z+i\neq 0$.
       Ainsi, pour tout $z\in P$, $f(z)$ est bien défini.
     - Soit $z\in P$, on a : $\left|\frac{z-i}{z+i}\right|=\sqrt{\frac{\mathrm{Re}(z)^2+(\mathrm{Im}(z)-1)^2}{\mathrm{Re}(z)^2+(\mathrm{Im}(z)+1)^2}}$.
       Ainsi,

$$\begin{aligned}\left|\frac{z-i}{z+i}\right|<1 &\iff \sqrt{\frac{\mathrm{Re}(z)^2+(\mathrm{Im}(z)-1)^2}{\mathrm{Re}(z)^2+(\mathrm{Im}(z)+1)^2}}<1\\ &\iff \frac{\mathrm{Re}(z)^2+(\mathrm{Im}(z)-1)^2}{\mathrm{Re}(z)^2+(\mathrm{Im}(z)+1)^2}<1\\ &\iff \mathrm{Re}(z)^2+(\mathrm{Im}(z)-1)^2<\mathrm{Re}(z)^2+(\mathrm{Im}(z)+1)^2\\ &\iff \mathrm{Re}(z)^2+(\mathrm{Im}(z)-1)^2<\mathrm{Re}(z)^2+(\mathrm{Im}(z)+1)^2\\ &\iff -2\mathrm{Im}(z)<2\mathrm{Im}(z)\\ &\iff 0<4\mathrm{Im}(z)\end{aligned}$$

       Or, $z\in P$ donc $\mathrm{Im}(z)>0$. Ainsi, $f(z)\in D$.

- Soit $z \in D$ soit $\omega \in D$, on a :

$$\frac{\omega - i}{\omega + i} = z \quad \Longleftrightarrow \quad \omega = \frac{i(1+z)}{1-z}$$

d'après les calculs du 1.

- Il reste à montrer que cette solution $\dfrac{i(1+z)}{1-z} \in P$:
On a

$$\frac{i(1+z)}{1-z} = \frac{(i(z+1)(1-\overline{z}))}{|1-z|^2} = \frac{i(z+1-|z|^2-\overline{z})}{|1-z|^2} = \frac{i(1-|z|^2+2i\mathrm{Im}(z))}{|1-z|^2} = -2\frac{\mathrm{Im}(z)}{|1-z|^2} + i\frac{(1-|z|^2)}{|1-z|^2}$$

Ainsi, $\mathrm{Im}\left(\dfrac{i(1+z)}{1-z}\right) = \dfrac{1-|z|^2}{|1-z|^2} > 0$ car $|z| < 1$ (car $z \in D$).

Ainsi, g est donc bien une bijection de P sur D.