Feuille d'exercices 6 : Primitives

Exercice 1. Soit Ψ définie par $\Psi(x) = \displaystyle\int_x^{3x} e^{-t^2}\,dt$

1. Déterminer l'ensemble de définition de Ψ.
2. Justifier que Ψ est dérivable sur son domaine de définition.
3. Etudier les variations de Ψ.
4. Déterminer sa limite en $+\infty$.

Exercice 2. Déterminer une primitive de :

$$x \mapsto \ln(x) \qquad x \mapsto \arctan(x) \qquad f : x \mapsto \frac{x}{\cos^2 x}.$$

Exercice 3. Intégrales de Wallis

Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit l'intégrale de Wallis par :$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n\,dt$

1. Soit $n \geq 2$. Etablir une relation de récurrence liant I_n et I_{n-2}.
2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, calculer I_{2p} et I_{2p+1}.

Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{e^{2t}}{1+e^t}dt \qquad \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \qquad \int_0^1 \frac{x^4}{x^{10}+1}dx.$$

Exercice 5. Soit $a > 0$. Déterminer une primitive de :

$$f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \qquad g : x \mapsto \frac{1}{a^2+x^2}.$$

Exercice 6.

1. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\},\ \sin(x) = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

2. Déterminer une primitive de :

$$f : x \mapsto \frac{1}{\sin x} \qquad g : x \mapsto \frac{1}{\cos x}.$$

Exercice 7.

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\},\ \sin(x) = \dfrac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\sin x}$.

Exercice 8. Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto x\sqrt{1-x^2} \qquad g : x \mapsto \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} \qquad h : x \mapsto \frac{(\ln(3x+6))^3}{x+2} \qquad l : x \mapsto \frac{2x-5}{(x^2-5x+9)^4}.$$

Exercice 9. Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2-5x+6} \qquad g : x \mapsto \frac{1}{x^2+2x+1} \qquad h : x \mapsto \frac{1}{1+x+x^2}.$$

Exercice 10. Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \qquad g : x \mapsto \frac{2x+1}{(x+1)^2}.$$

Exercice 11. Déterminer une primitive des fonctions suivantes et préciser le domaine de validité :

1. $x \mapsto \arcsin x$ sur $]-1,1[$
2. $x \mapsto (x^2+3x+1)e^{3x}$
3. $x \mapsto x^2\cos(x)$
4. $x \mapsto (x\mathrm{sh}\,(x))^2$
5. $x \mapsto \sin(\ln x)$
6. $x \mapsto \dfrac{x^7}{(x^4+1)^2}$
7. $x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}\,x}$
8. $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$
9. $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$
10. $x \mapsto \dfrac{x}{x^4-x^2-2}$
11. $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$
12. $x \mapsto \dfrac{e^{\tan(x)}}{\cos^2(x)}$
13. $x \mapsto xe^{x^2}$
14. $x \mapsto \dfrac{\arctan x}{1+x^2}$
15. $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16. $x \mapsto \sqrt{x}(1-x)$
17. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-x+4}$
18. $x \mapsto \dfrac{1}{2x^2+x+5}$
19. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-3x+2}$
20. $x \mapsto \dfrac{2x}{x^2-x+1}$
21. $x \mapsto e^{3x}\cos(2x)$
22. $x \mapsto (x+1)e^{2x}\cos x$
23. $x \mapsto \sin^3(x)$
24. $x \mapsto x^2\cos^3 x$

Exercice 12. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 t\arctan t\,dt$
2. $\displaystyle\int_{-1}^1 (t^3-1)\mathrm{ch}(t)dt$
3. $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x}dx$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}$
5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{2x^2+2x+1}$
6. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t)\sin^4(t)dt$
7. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t(t+1)(t+2)}$
8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{e^t+1}$

Exercice 13.

1. Montrer qu'il existe $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tels que :
$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\},\ \frac{1}{(x+1)(1+x^2)} = \frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{1+x^2}$$
2. En déduire les primitives de $x\mapsto \dfrac{1}{\tan x+1}$.

Exercice 14. On chercher à calculer l'intégrale : $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(t)+\tan(t)}dt$.

1. En effectuant le changement de variable $u=\cos t$, montrer que l'on peut écrire $I=\displaystyle\int_\alpha^\beta R(u)du$ où R est une fraction rationnelle.
2. Montrer qu'il existe $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tels que : $\forall u\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ R(u)=\dfrac{a}{1-u}+\dfrac{b}{1+u}+\dfrac{c}{(1+u)^2}$.
3. En déduire la valeur de l'intégrale I.

Exercice 15. Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $I_n=\displaystyle\int_1^e(\ln x)^n dx$.

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n=\displaystyle\int_0^1 t^ne^tdt$.
2. Donner une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
3. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
4. En déduire que $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 16. On considère la suite (I_n) définie par :
$$\forall n\in\mathbb{N},\ I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n\sin x dx$$

1. Etablir une formule de récurrence
2. Pour $p\in\mathbb{N}$, on pose $u_p=\dfrac{(-1)^pI_{2p}}{(2p)!}$ et $v_p=\dfrac{(-1)^pI_{2p+1}}{(2p+1)!}$.
3. Calculer u_p-u_{p-1} et v_p-v_{p-1}.
4. En sommant, en déduire, pour tout $p\in\mathbb{N}$, I_{2p} et I_{2p+1} sous forme de sommes.

Exercice 17. Soit $f\in\mathcal{C}^1([0,+\infty[,\mathbb{R})$ telle que $f(0)=0$ et : $\forall x\in[0;+\infty[,\ 0\le f'(x)\le 1$.

Montrer que : $\forall x\in[0,+\infty[,\ \displaystyle\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2 \ge \int_0^x f(t)^3dt$

Exercice 18. Soient $f,g\in\mathcal{C}^0([0,+\infty[,\mathbb{R})$, $f\ge 0$, $g\ge 0$ et soit $C>0$ tel que : $\forall x\in[0,\infty[,\ f(x)\le C+\displaystyle\int_0^x f(t)g(t)dt$.

Montrer que : $\forall x\in[0,\infty[,\ f(x)\le C\exp\left(\displaystyle\int_0^x g(t)dt\right)$.

Indication : On pourra poser : $\phi : x\mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)g(t)dt$ *et dériver* ϕ.