Chapitre 10 : Ensembles usuels de nombres

1 Nombres entiers, décimaux et rationnels

Définition

- On appelle ensemble des entiers naturels, l'ensemble $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \ldots\}$
- On appelle ensemble des entiers relatifs l'ensemble $\mathbb{Z}$ constitué des entiers naturels et de leurs opposés.
- On appelle nombre décimal tout nombre de la forme $\frac{p}{10^n}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux.
- On appelle nombre rationnel tout quotient d'entiers relatifs, c'est-à-dire tout nombre de la forme $\frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels.
  Un réel qui n'est pas rationnel est dit irrationnel.

Remarque :

- On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$. Chacune des inclusions étant strictes.
- Les inclusions sont strictes. Un nombre rationnel n'est pas forcément décimal : $\frac{1}{3}$ par exemple ne peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{10^n}$. Si c'était le cas, on aurait $3p = 10^n$, donc 3 divise 10^n... absurde !

2 Nombres réels

Habituellement, l'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$ se représente géométriquement à l'aide d'un axe $\mathscr{D}$, appelé droite numérique, muni d'une origine 0 et dirigé par un vecteur unitaire $\overrightarrow{i}$. Ainsi, pour tout réel x, il existe un unique point M de $\mathscr{D}$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i}$.

Rappel : $\mathbb{R}$ est muni d'une relation de comparaison $\leq$ qui est dite relation d'ordre total.

Définition

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que :

- $M \in \mathbb{R}$ est un majorant de A si : $\forall a \in A,\ a \leq M$.
- $m \in \mathbb{R}$ un minorant de A si : $\forall a \in A,\ m \leq a$.
- $M \in \mathbb{R}$ est le plus grand élément de A (ou maximum) si : $M \in A$ et M est un majorant de A. Un tel élément est unique, noté $M = \max(A)$.
- $m \in \mathbb{R}$ est le plus petit élément de A (ou minimum) si : $m \in A$ et m est un minorant de A. Un tel élément est unique, noté $m = \min(A)$.

2.1 Borne supérieure, borne inférieure

Définition

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- On appelle **borne supérieure de** A le plus petit, s'il existe, des majorants de A. Elle est alors unique et on le note $\sup(A)$.
- On appelle **borne inférieure de** A le plus grand, s'il existe, des minorants de A. Elle est alors unique et on le note $\inf(A)$.

Remarque :

- L'unicité de la borne supérieure (resp. inférieure), lorsqu'elle existe, est une conséquence de l'unicité du plus petit (resp. plus grand) élément d'un ensemble.
- ⚠Contrairement au plus petit élément ou au plus grand élément, la borne inférieure ou supérieure d'un ensemble n'appartient pas nécessairement à l'ensemble !

- Une partie peut admettre une borne supérieure sans avoir de plus grand élément.
  Inversement, si A possède un plus grand élément, alors A admet une borne supérieure et on a : $\max(A) = \sup(A)$. En effet :
  Supposons que A admette un maximum M.
  - M est un majorant de A;
  - si M' est un majorant de A, alors pour tout $b \in A$, $b \leq M'$. Comme $M \in A$, on a $M \leq M'$.

  Donc A admet une borne supérieure et $\sup(A) = a$.
  De même, si A possède un plus petit élément (i.e un minimum), on a : $\min A = \inf A$.

Exemple :
Compléter :

	$\min(A)$	$\inf(A)$	$\max(A)$	$\sup(A)$
$A = \{1\}$	1	1	1	1
$A = \{2, 4\}$	2	2	4	4
$A =]1, 5[$	$\times$	1	$\times$	5
$A = [-5, 0[$	-5	-5	$\times$	0
$A = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$	$\times$	0	1	1

▷ Direct

▷ Direct

▷ L'ensemble des majorants de $]-1, 5[$ est $[5, +\infty[$. Cet ensemble admet un plus petit élément 5 donc $]-1, 5[$ admet une borne supérieure 5.
De plus, si A admet un plus grand élément M. Alors, $M \in]-1, 5[$ et :$\forall a \in A$, $a < M$. Or, $-1 < M < \frac{M+5}{2} < 5$ donc $\frac{M+5}{2} \in A$ et $M < \frac{M+5}{2}$. Absurde.
Ainsi, A n'admet pas de plus grand élément.
On procède de même pour la borne inférieure.

Théorème Propriété de la borne supérieure

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Théorème Caractérisation de la borne supérieure

Soient A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
s = \sup(A) &\Leftrightarrow \begin{cases} s \text{ est un majorant de } A : \forall x \in A,\ x \leq s \\ \text{pour tout } M \text{ majorant de } A, s \leq M \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} s \text{ est un majorant de } A : \forall x \in A,\ x \leq s \\ \text{pour tout } b < s, b \text{ n'est pas un majorant de } A \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} s \text{ est un majorant de } A : \forall x \in A,\ x \leq s \\ \forall \epsilon > 0,\ \exists x \in A \text{ tel que } s - \epsilon < x \end{cases}
\end{aligned}
$$

Démonstration. • Supposons que $s = \sup(A)$.
Alors s est un majorant de A.
Soit $\epsilon > 0$, comme $s - \epsilon < s$, $s - \epsilon$ ne majore pas A (sinon on aurait $s - \epsilon \geq s$ car s est le plus petit des majorants de A). Ainsi, il existe $x \in A$ tel que $s - \epsilon < x$.
• Réciproquement, supposons que s majore A et que : $\forall \epsilon > 0$, $\exists x \in A$ tel que $s - \epsilon < x$.
Soit M un majorant de A.
Par l'absurde, supposons $s > M$. Posons $\epsilon = s - M$. On a $\epsilon > 0$. Ainsi, par hypothèse, il existe $x \in A$ tel que $s - \epsilon < x$ donc $M < x$.
Absurde car M majore A! Ainsi $s \leq M$.
s est donc le plus petit des majorants de A, donc $s = \sup(A)$. □

Théorème Caractérisation de la borne inférieure

Soit B une partie minorée non vide et $i \in \mathbb{R}$.

$$i = \inf(B) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} i \text{ est un minorant de } B : \forall x \in B,\ x \geq i \\ \text{pour tout } m \text{ minorant de } B, m \leq i \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} i \text{ est un minorant de } B : \forall x \in B,\ x \geq i \\ \text{pour tout } a > i, a \text{ n'est pas un minorant de } B \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} i \text{ est un minorant de } B : \forall x \in B,\ x \geq i \\ \forall \epsilon > 0,\ \exists x \in B \text{ tel que } x < i + \epsilon \end{array} \right.$$

Démonstration. Preuve similaire à celle précédente. □

Méthode :

- Pour montrer qu'une partie de $\mathbb{R}$ admet une borne sup (resp. inf), on montrera qu'elle est non vide et majorée (resp. minorée).
- Pour montrer qu'un réel $s = \sup(A)$ (resp. $i = \inf(A)$), il faut montrer que :
  - s est un majorant de A (resp. i est un minorant de A).
  - s est le plus petit des majorants de A (resp. i est le plus grand des minorants).

Exemple : Soient A et B deux parties majorées non vides de $\mathbb{R}$. On note $A + B = \{a + b\,;\, (a, b) \in A \times B\}$.
A et B sont des parties non vides de $\mathbb{R}$ donc admettent des bornes supérieures.

- Montrons que $A + B$ admet une borne sup.
  Comme A et B sont non vides, $A + B$ est non vide.
  Soit $x \in A+B$, il existe $(a, b) \in A \times B$ tels que $x = a+b$. De plus, $a \leq \sup(A)$ et $b \leq \sup(B)$ donc $x \leq \sup(A)+\sup(B)$. Ainsi : $\forall x \in A + B,\ x \leq \sup(A) + \sup(B)$.
  Donc $A + B$ est majorée par $\sup(A) + \sup(B)$, donc admet une borne supérieure.
- Montrons que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.
  - On a vu que $\sup(A) + \sup(B)$ est un majorant de $A + B$.
  - Montrons que c'est le plus petit des majorants de $A + B$:
    Soit $\epsilon > 0$. Par caractérisation de la borne supérieure, il existe $x \in A$ tel que $\sup(A) - \frac{\epsilon}{2} < x$ et il existe $y \in B$ tel que $\sup(B) - \frac{\epsilon}{2} < y$. Alors $\big(\sup(A) + \sup(B)\big) - \epsilon < x + y$, avec $x + y \in A + B$. Par caractérisation de la borne supérieure, on obtient $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$ (on a déjà montré que $\sup(A) + \sup(B)$ majore $A + B$.)

Méthode :

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Pour montrer que :

- $x \leq \sup(A)$, on essaie généralement de prouver que $x \in A$.
- Pour prouver que $\sup(A) \leq x$. On essaie généralement de prouver que x majore A donc est supérieur au plus petit des majorants.

(Voir exercice 8 du TD)

2.2 Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$

Définition : Intervalles de $\mathbb{R}$

On appelle intervalle de $\mathbb{R}$ toute partie de $\mathbb{R}$ ayant l'une des formes suivantes :

- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $a \leq b$
(intervalle fermé et borné ou segment) ;
- $[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$ avec $a \in \mathbb{R}$
(intervalle fermé non-majoré) ;
- $]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$ avec $b \in \mathbb{R}$
(intervalle fermé non-minoré) ;
- $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b$
(intervalle borné ouvert) ;
- $]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ avec $b \in \mathbb{R}$
(intervalle ouvert non-minoré) ;
- $]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ avec $a \in \mathbb{R}$
(intervalle ouvert non-majoré) ;
- $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b$
(intervalle borné semi-ouvert à droite) ;
- $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b$
(intervalle borné semi-ouvert à gauche) ;
- l'ensemble vide $\emptyset$
- $\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$
(intervalle non-majoré et non-minoré)

Proposition Caractérisation des intervalles

Soit I une partie de $\mathbb{R}$. Alors :

$$I \text{ est un intervalle si et seulement si pour tout } (a,b) \in I^2,\ [a,b] \subset I$$

Démonstration. ▷ Soit $c, d \in \mathbb{R}$ avec $c \leq d$. Posons $I = [c,d]$.
Soit $a, b \in [c,d]$ tels que $a \leq b$. Soit $x \in [a,b]$, on a : $c \leq a \leq x \leq b \leq d$ donc $x \in [c,d]$. D'où $[a,b] \subset [c,d]$.
On procède de même pour les types d'intervalles.

▷ Soit I une partie de $\mathbb{R}$ telle que : $\forall (\alpha,\beta) \in I^2$, $[\alpha,\beta] \subset I$.

- Si $I = \emptyset$, I est un intervalle.
- Supposons désormais $I \neq \emptyset$. Soit $a \in I$.
  - Si I est majorée alors $I \cap [a,+\infty[$ est majorée car $I \cap [a,+\infty[\subset I$ donc $I \cap [a,+\infty[$ est une partie non vide ($a \in I \cap [a,+\infty[$) et majorée donc admet une borne supérieure que l'on note b.
    - Montrons que $[a,b[\subset I \cap [a,+\infty[$ si $a < b$.
    Soit $x \in [a,b[$ alors x n'est pas un majorant car b est le plus petit des majorants. Ainsi, il existe $z \in I \cap [a,+\infty[$ tel que $x < z$.
    On a alors $(a,z) \in I^2$ donc $[a,z] \subset I$.
    Or, $x \in [a,z]$ donc $x \in I$. De plus, $x \in [a,+\infty[$ donc $x \in I \cap [a,+\infty[$.
    Ainsi, $x \in I \cap [a,+\infty[$.
    - Montrons que $I \cap [a,+\infty[\subset [a,b]$.
    Comme $b = \sup(I \cap [a,+\infty[)$, on a : $\forall x \in I \cap [a,+\infty[$, $x \leq b$.
    De plus : $\forall x \in I \cap [a,+\infty[$, $x \in [a,+\infty[$. Donc : $\forall x \in I \cap [a,+\infty[$, $x \in [a,b]$.

    Ainsi $I \cap [a,+\infty[= [a,b[$ ou $I \cap [a,+\infty[= [a,b[$.
  - Si I est non majorée alors $I \cap [a,+\infty[$ est non-majorée.
    - On sait déjà que $I \cap [a,+\infty[\subset [a,+\infty[$.
    - Soit $x \in [a,+\infty[$. x n'est pas un majorant de $I \cap [a,+\infty[$ donc il existe $y \in I \cap [a,+\infty[$ tel que $x < y$.
    Or, $(a,y) \in I^2$ donc $[a,y] \subset I$. Or, $x \in [a,y]$ donc $x \in I$.
    D'où $x \in I \cap [a,+\infty[$.

    Ainsi, $I \cap [a,+\infty[= [a,+\infty[$.

- De la même manière, si I est minorée alors $I\cap]-\infty,a]$ est non vide ($a \in I\cap]-\infty,a]$) et minorée donc admet une borne inférieure que l'on note c. On a :
  - $]c,a] \subset I\cap]-\infty,a]$ (si $c<a$).
  - $I\cap]-\infty,a] \subset [c,a]$

  donc $I\cap]-\infty,a] = [c,a]$ ou $I\cap]-\infty,a] =]c,a]$
- si I est non-minorée alors $I\cap]-\infty,a] =]-\infty,a]$.
- Au final, comme $I = (I\cap]-\infty,a]) \cup (I \cap [a,+\infty[)$. On a :
  - Si I est borné (majoré et minoré) alors (en gardant les notations précédentes), on a :

$$\begin{aligned} I &= [c,a] \cup [a,b] = [c,b] \\ \text{ou } I &=]c,a] \cup [a,b] =]c,b] \\ \text{ou } I &= [c,a] \cup [a,b[= [c,b[\\ \text{ou } I &=]c,a] \cup [a,b[=]c,b[\end{aligned}$$

  - Si I est majorée non-minorée, on a :

$$\begin{aligned} I &=]-\infty,a] \cup [a,b] =]-\infty,b] \\ \text{ou } I &=]-\infty,a] \cup [a,b[=]-\infty,b[\end{aligned}$$

  - Si I est minorée non-majorée , on a :

$$\begin{aligned} I &= [c,a] \cup [a,+\infty[= [c,+\infty[\\ \text{ou } I &=]c,a] \cup [a,+\infty[= []c,+\infty[\end{aligned}$$

  - Si I est non-minorée et non-majorée , on a :

$$I =]-\infty,a] \cup [a,+\infty[=]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$$

□

2.3 Partie entière

Définition

Soit $x \in \mathbb{R}$ On appelle partie entière de x le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x. On le note $\lfloor x \rfloor$.

Proposition

Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{Z}$.

$$n = \lfloor x \rfloor \quad \Longleftrightarrow \quad n \leq x < n+1.$$

Démonstration.
- Si $\lfloor x \rfloor = n$ alors $n \leq x$. De plus, $n+1 > n$ donc $n+1 > x$.
- Si $n \leq x < n+1$ alors $n \leq x$.
  De plus, soit $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p \leq x$ alors $p < n+1$ donc $p \leq n$ car $p, n \in \mathbb{Z}$.
  Ainsi, n est le plus grand entier inférieur ou égal à x donc $n = \lfloor x \rfloor$.

□

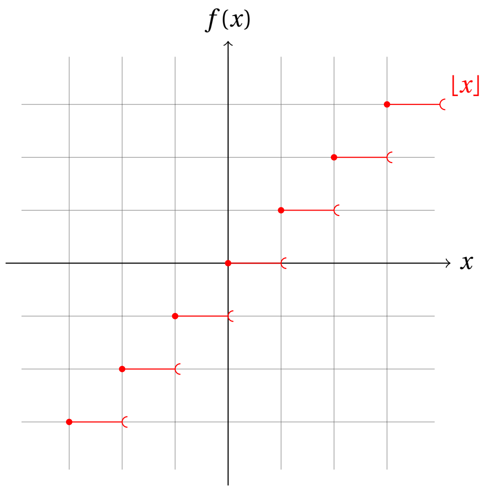
Exemple : $\lfloor 1.2 \rfloor = 1$, $\lfloor 5 \rfloor = 5$, $\lfloor -2 \rfloor = -2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$ ⚠ $\lfloor -2.3 \rfloor = -3$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$

Proposition

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante.

Démonstration. soient $x, y \in \mathbb{R}$. Supposons $x \leq y$. D'après la caractérisation de la partie entière, on a : $[x] \leq x < [x]+1$ et $[y] \leq y < [y]+1$, donc $[x] \leq x \leq y < [y]+1$. Ainsi, $[x] < [y]+1$ et comme ce sont des entiers, $[x] \leq [y]$. □

Remarque : Pour montrer une inégalité faisant intervenir des parties entières, on utilise les inégalités de définitions des parties entières, et, lorsqu'on est ramené à des inégalités strictes entre entiers, on peut enlever 1 au membre le plus grand en transformant le strict en large.



Proposition

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$, soit $x \in \mathbb{R}$.
Par caractérisation de la partie entière, on a : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$
Ainsi : $\lfloor x \rfloor + n \leq x + n < \lfloor x \rfloor + n + 1$ avec $\lfloor x \rfloor + n \in \mathbb{Z}$. Ainsi, toujours par caractérisation de la partie entière, $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$. □

Remarque : $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ n'est pas vrai pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.
Contre-exemple : $x = 0.3$, $y = 0.8$, on a $\lfloor 1.1 \rfloor = 1$ alors que $\lfloor 0.7 \rfloor + \lfloor 0.3 \rfloor = 0$.
De même, l'égalité suivante $\lfloor nx \rfloor = n\lfloor x \rfloor$ n'est pas vrai dans le cas général :
Contre-exemple : $x = 0.7$ et $n = 2$, on a $\lfloor 1.4 \rfloor = 1$ alors que $2\lfloor 0.7 \rfloor = 0$.

2.4 Approximations décimales

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x \leq \lfloor 10^n x \rfloor + 1$$

donc

$$\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leq x \leq \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}.$$

Définition

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Le nombre décimal $\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ est appelé **approximation décimale par défaut de x à la précision** 10^{-n}.
Le nombre $\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$ est appelé approximation décimale par excès de x à la précision 10^{-n}.

Exemple : $1,414 \leq \sqrt{2} < 1,415$ à 10^{-3} près, $3,1415 \leq \pi < 3,1416$ à 10^{-4} près.

Remarque : Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $u_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$. On a alors $0 \leq x - u_n \leq 10^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par théorème de convergence par encadrement $\lim\limits_{n \to +\infty} (x - u_n) = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x$. On a ainsi obtenu une suite (u_n) de nombres décimaux (et donc de rationnels) qui tend vers $x \in \mathbb{R}$.