Chapitre 22 : Géométrie dans l'espace

Dans ce chapitre $\mathscr{E}$ désigne l'espace euclidien muni d'un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1 Espace euclidien et espace vectoriel

1.1 Généralités

Proposition

Tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace peut s'écrire de manière unique sous la forme $\vec{u} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}$, où α, β et γ sont des nombres réels appelé composantes ou encore coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Remarque : On vient d'établir une correspondance bijective entre l'espace euclidien $\mathscr{E}$ et l'espace vectoriel réel de dimensions trois $\mathbb{R}^3$.

Définition

Si A est un point de l'espace euclidien et $\vec{u}$ un vecteur de l'espace, on note $A + \vec{u}$ l'unique point B de l'espace tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

Définition

Deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires (ou proportionnels) si $\vec{u} = 0$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \vec{v} = \lambda \vec{u}$.

1.2 Coordonnées cartésiennes

Définition

Soit M un point de l'espace. Il existe un unique triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Les nombres réels x, y et z s'appellent les coordonnées cartésiennes de M dans le repère $\mathscr{R}$.

Remarque :

- Les coordonnées cartésiennes dans l'espace dépendent d'un repère orthonormé.
- Par abus ont écrit $M(x, y, z)$ ou encore $\overrightarrow{OM}(x, y, z)$ pour dire que M est un point dont les coordonnées cartésiennes dans le repère $\mathscr{R}$ sont x, y, et z.
- La définition précédente permet d'identifier l'espace $\mathscr{E}$ à $\mathbb{R}^3$. Cela justifie l'appellation d'espace vectoriel de dimension 3 pour désigner l'espace euclidien.

Définition

Soit $\vec{u}(x, y, z)$ un vecteur de l'espace. La norme euclidienne du vecteur $\vec{u}$ est le nombre réel $\|\vec{u}\|$ définit par

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Lorsque $\|\vec{u}\| = 1$ on dit que le vecteur $\vec{u}$ est normé ou unitaire.

Définition

Soient A et B deux points de l'espace euclidien $\mathscr{E}$. La distance entre les points A et B noté $\mathrm{d}(A, B)$ ou encore AB est la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

1.3 Produit scalaire

Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace E. Le produit scalaire entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel définit par

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right),$$

lorsque les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et sinon $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Remarque : Si l'on se place dans le plan engendré par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ la définition du produit scalaire dans l'espace correspond à la définiton du produit scalaire dans le plan.

Proposition

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, on a $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

Démonstration. Par définition, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \cos\left(\vec{u}, \vec{u}\right) = \|\vec{u}\|^2$. □

Proposition

Le produit scalaire est bilinéaire, symétrique. C'est-à-dire que l'on a

- **Bilinéaire.** Pour tout triplet de vecteurs de l'espace, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, pour tout nombre réel λ, on a

$$\left(\vec{u} + \lambda \vec{v}\right) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \lambda \vec{v} \cdot \vec{w} \quad \text{et} \quad \vec{w} \cdot \left(\vec{u} + \lambda \vec{v}\right) = \vec{w} \cdot \vec{u} + \lambda \vec{w} \cdot \vec{v}$$

- **Symétrie.** Pour tout couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$, on a l'égalité

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

Définition

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux lorsque $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. On dit de plus que ces vecteurs sont orthonormés s'ils sont à la fois orthogonaux et tous deux de norme égale à 1.

Proposition

Si $\vec{u}\,(a, b, c)$ et $\vec{v}\,(x, y, z)$ sont deux vecteurs de l'espace alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ax + by + cz.$$

Démonstration. Le repère $\mathscr{R}$ est orthonormé donc les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux et de norme égale à 1. Par bilinéarité et symétrie du produit scalaire, on a

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &= \left(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}\right) \cdot \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) \\
&= ax\,\vec{i} \cdot \vec{i} + by\,\vec{j} \cdot \vec{j} + cz\,\vec{k} \cdot \vec{k} \\
&\quad + \left(ay + bx\right) \vec{i} \cdot \vec{j} \\
&\quad + (az + cx)\,\vec{i} \cdot \vec{k} \\
&\quad + \left(bz + cy\right) \vec{j} \cdot \vec{k} \\
&= ax\,\vec{i} \cdot \vec{i} + by\,\vec{j} \cdot \vec{j} + cz\,\vec{k} \cdot \vec{k} \\
&= ax + by + cz.
\end{aligned}$$

□

Proposition

Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base orthonormée de l'espace. Tout vecteur $\vec{x}$ de l'espace peut s'écrire comme une unique combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
De plus, quelquesoit α, β et γ trois nombres réels,

$$\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} \iff \left\{\begin{array}{lcl} \alpha &=& \vec{u} \cdot \vec{x} \\ \beta &=& \vec{v} \cdot \vec{x} \\ \gamma &=& \vec{w} \cdot \vec{x} \end{array}\right.$$

Démonstration.

- **Unicité.** Si $\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$, alors par linéarité,

$$\begin{aligned} \vec{u}\cdot\vec{x} &= \alpha\vec{u}\cdot\vec{u} + \beta\vec{u}\cdot\vec{v} + \gamma\vec{u}\cdot\vec{w} \\ &= \alpha\|\vec{u}\|^2 \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

  De même, on obtient

$$\beta = \vec{v}\cdot\vec{x} \;\text{ et }\; \gamma = \vec{w}\cdot\vec{x}$$

- **Existence.** En notant

$$\vec{y} = (\vec{u}\cdot\vec{x})\vec{u} + (\vec{v}\cdot\vec{x})\vec{v} + (\vec{w}\cdot\vec{x})\vec{w},$$

  on a comme précédemment

$$\vec{u}\cdot\vec{y} = \vec{u}\cdot\vec{x}, \quad \vec{v}\cdot\vec{y} = \vec{v}\cdot\vec{x}, \quad \vec{w}\cdot\vec{y} = \vec{w}\cdot\vec{x},$$

  et donc $\vec{x} - \vec{y}$ est orthogonal à $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Par suite, $\vec{x} = \vec{y}$.

□

Remarque :

- Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base orthonormée de l'espace. Par bilinéarité si

$$\vec{u_1} = x_1\vec{u} + y_1\vec{v} + z_1\vec{w} \;\text{ et }\; \vec{u_2} = x_2\vec{u} + y_2\vec{v} + z_2\vec{w},$$

  alors $\vec{u_1}\cdot\vec{u_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.
  L'expression du produit scalaire en fonction des composantes est toujours la même peu importe la base orthonormée choisie.
- Tout point admet dans un repère orthonormé $(\Omega, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ un unique système de coordonnées cartésiennes, c'est-à-dire un unique triplet (x, y, z) de réels tels que :

$$\overrightarrow{\Omega M} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}.$$

2 Modes de repérage

2.1 Coordonnées cylindriques

Dans la suite si $\theta \in \mathbb{R}$, on note

$$\vec{u}(\theta) = \cos(\theta)\,\vec{i} + \sin(\theta)\,\vec{j} \;\text{ et }\; \vec{v}(\theta) = -\sin(\theta)\,\vec{i} + \cos(\theta)\,\vec{j}.$$

Proposition

Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace. Il existe $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}(\theta) + z\,\vec{k}$.

Démonstration. Soit $P(x, y, 0)$ le projeté orthogonal de M dans le plan (Oxy) muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Dans ce cas, P est donc un point du plan euclidien (Oxy). Soit $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ un système de coordonnées polaires de P dans ce plan. On a donc

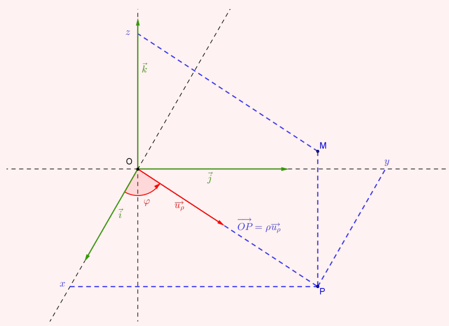
$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} \\ &= r\,\vec{u}(\theta) + z\,\vec{k}. \end{aligned}$$

□

Définition

Étant donné un point M de l'espace $\mathscr{E}$, on appelle système de coordonnées cylindriques de M par rapport au repère $\mathscr{R}$ tout triplet $(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}(\theta) + z\,\vec{k}.$$



Obtention des coordonnées cylindriques

Étant donné un point M de coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans l'espace, pour obtenir les coordonnées cylindriques de ce même point :

- On détermine un système de coordonnées polaires du point $P(x, y, 0)$ dans le plan (Oxy).
- Par la relation de Chasles, on remarque que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$.

Remarque : Si $M(r, \theta, z)$ est un point de l'espace alors M' l'image par la rotation d'axe (Oz) d'angle φ admet un système de coordonnées cylindrique égale à $(r, \theta + \varphi, z)$. En utilisant les coordonnées cartésiennes avec $M(x, y, z)$ et $M'(x', y', z')$, on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} x' = r\cos(\theta+\varphi) = \cos(\varphi)x - \sin(\varphi)y \\ y' = r\sin(\theta+\varphi) = \sin(\varphi)x + \cos(\varphi)y \\ z' = z \end{array}\right. .$$

Matriciellement, si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = X'.$$

2.2 Coordonnées sphériques

Proposition

Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace. Il existe un triplet $(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3$ de nombres réels tel que

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & r\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ y & = & r\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ z & = & r\cos(\theta) \end{array}\right. .$$

Démonstration. Soit $(\rho, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3$ un système de coordonnées cylindriques du point M. On définit $r = \|\overrightarrow{OM}\|$.

On a alors $\overrightarrow{OM} = \rho r \overrightarrow{u}(\theta) + z\overrightarrow{k} = \rho\cos(\varphi)\overrightarrow{i} + \rho\sin(\varphi)\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ et donc

$$r^2 = \rho^2 + z^2.$$

On en déduit qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\left\{\begin{array}{lcl} \rho & = & r\sin(\theta) \\ z & = & r\cos(\theta) \end{array}\right. .$$

Finalement, en identifiant les coordonnées cartésiennes, on a

$$\left\{\begin{array}{lclcl} x & = & \rho\cos(\varphi) & = & r\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ y & = & \rho\sin(\varphi) & = & r\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ z & = & r\cos(\theta) & & \end{array}\right. .$$

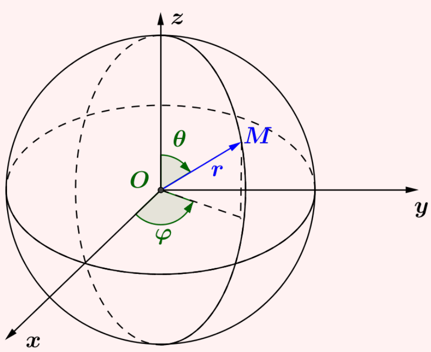
□

Définition

Étant donné un point M de l'espace E, on appelle système de coordonnées sphériques de M par rapport au repère $\mathscr{R}$ tout triplet $(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3$ tel que $r \geq 0$, $\theta \in [0, \pi]$.

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & r\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ y & = & r\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ z & = & r\cos(\theta) \end{array}\right. .$$

Dans ce cas, on dit que r est le rayon de M, φ est la longitude de M et θ est la colatitude de M.



Remarque :

- On utilise parfois le vocabulaire de latitude pour désigner $\frac{\pi}{2}-\theta$ au lieu de la colatitude (en particulier pour la manipulation des coordonnées terrestres).
- Dans le plan $(O, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{u}(\varphi))$, le point M admet (r,θ) comme système de coordonnées polaires.
- Un système de coordonnées polaires du projeté orthogonal de M sur le plan (Oxy) est $(r\sin(\theta),\varphi)$.

3 Produit vectoriel et produit mixte

3.1 Orthogonalité à deux vecteurs non colinéaires

Lemme

Deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}(x_1,y_1,z_1)$ et $\overrightarrow{u_2}(x_2,y_2,z_2)$ sont colinaires si et seulement si

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Démonstration.

- Si les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont colinéaires alors il existe un réel $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u_1} = \lambda\overrightarrow{u_2}$ ou $\overrightarrow{u_2} = \lambda\overrightarrow{u_1}$. Par un simple calcul, on montre que les trois produits mixtes dans le plan sont nuls.
- Réciproquement, supposons que
$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = 0.$$
  - Si l'un des vecteurs est nul, ils sont évidemment colinéaires.
  - Sinon, on peut par exemple supposer que $x_1 \neq 0$. Ainsi le vecteur (x_1,y_1) n'est pas nul et donc les vecteurs du plan (x_1,y_1) et (x_2,y_2) sont colinéaires et donc puisque $(x_1,y_1)\neq(0,0)$, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $(x_2,y_2)=\lambda(x_1,y_1)$.
    De même, il existe $\mu\in\mathbb{R}$ tel que $(x_2,z_2)=\mu(x_1,z_1)$.
    Ainsi $\lambda x_1 = x_2 = \mu x_1$ et donc $\lambda=\mu$ car $x_1\neq 0$.
    Par suite, $(x_2,y_2,z_2)=\lambda(x_1,y_1,z_1)$ et donc les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont colinéaires.

□

Proposition

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace.

- Il existe un vecteur $\overrightarrow{w}$ non nul qui est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
- Les vecteurs orthogonaux à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de la forme $\lambda\overrightarrow{w}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$.
- Les vecteurs orthogonaux à $\overrightarrow{w}$ sont les combinaisons linéaires de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Démonstration. Soient x_1,x_2,y_1,y_2,z_1 et z_2 six nombres réels tels que

$$\overrightarrow{u} = x_1\overrightarrow{i} + y_1\overrightarrow{j} + z_1\overrightarrow{k} \quad\text{et}\quad \overrightarrow{v} = x_2\overrightarrow{i} + y_2\overrightarrow{j} + z_2\overrightarrow{k}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires donc on peut supposer par exemple que

$$D = [(x_1,y_1),(x_2,y_2)] \neq 0.$$

Soit $\overrightarrow{w}(x,y,z)$.

$$\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{u} = \overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v} = 0 \iff \begin{cases} xx_1+yy_1+zz_1=0 \\ xx_2+yy_2+zz_2=0. \end{cases}$$

En appliquant l'algorithme du pivot de Gauss-Jordan, puisque $D\neq 0$, à z fixé, le système précédent admet un unique couple de solution (x,y) et

$$\begin{aligned} \overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{u} = \overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v} = 0 &\iff \begin{cases} xx_1+yy_1+zz_1=0 \\ xx_2+yy_2+zz_2=0. \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = z\frac{[(y_1,z_1),(y_2,z_2)]}{[(x_1,y_1),(x_2,y_2)]} \\ x = -z\frac{[(x_1,z_1),(x_2,z_2)]}{[(x_1,y_1),(x_2,y_2)]} \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement, si

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & [(y_1,z_1),(y_2,z_2)] \\ y & = & -[(x_1,z_1),(x_2,z_2)] \\ z & = & [(x_1,y_1),(x_2,y_2)] \end{array}\right. ,$$

alors le vecteur $\overrightarrow{w}$ est non nul et orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Tous les vecteurs $\lambda\overrightarrow{w}$ sont clairement orthogonaux à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et si (x,y,z) est solution du système précédent alors $(x,y,z) = \frac{z}{D}\overrightarrow{w}$.

Par bilinéarité du produit scalaire, toute combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{w}$.

Réciproquement, soit $\overrightarrow{a}(x,y,z)$ un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{w}$. Pour tout $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$,

$$\overrightarrow{a} = \lambda_1\overrightarrow{u} + \lambda_2\overrightarrow{v} \iff \left\{\begin{array}{lcl} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 & = & x \\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 & = & y \\ \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 & = & z \end{array}\right.$$

Comme $\gamma = [(x_1,y_1),(x_2,y_2)] \neq 0$ il existe un unique couple (λ_1,λ_2) vérifiant les deux premières équations. D'autre part les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{a} = \lambda_1\overrightarrow{u} + \lambda_2\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux à $\overrightarrow{w}(\alpha,\beta,\gamma)$ et donc

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 = \alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma z_2 = 0.$$

En ajoutant les deux premières équations du système respectivement multipliées par $-\alpha$ et $-\beta$, on obtient :

$$\gamma(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) = \gamma z,$$

et donc la dernière équation est vraie car $\gamma \neq 0$. □

Remarque : D'après la proposition précédente, il existe un unique vecteur orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ si l'on impose une norme et une direction.

Définition

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires de l'espace, on appelle produit vectoriel de $\overrightarrow{u}$ par $\overrightarrow{v}$ et l'on note $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$ le vecteur

- orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$;
- de norme égale à $\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\||\sin(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})|$;
- tel que $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})$ est directe.

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires on appelle produit vectoriel de $\overrightarrow{u}$ par $\overrightarrow{v}$ et l'on note $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$ le vecteur $\overrightarrow{0}$.

Proposition

Soient $\overrightarrow{u_1}(x_1,y_1,z_1)$ et $\overrightarrow{u_2}(x_2,y_2,z_2)$ deux vecteurs de l'espace dans un repère orthonormé direct. Dans le même repère,

$$\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}\left(\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\right).$$

Remarque :

- Par construction dans la proposition précédente, $\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}$ est nul si et seulement si $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont colinéaires.
- Par construction, $\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.
- À un facteur multiplicatif près, si $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas orthogonaux, $\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}$ est l'unique vecteur orthogonal à $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.
- Les composantes de $\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}$ peuvent s'écrire

$$\left(\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\right).$$

Dans ce cas les composantes se déduisent par permutation circulaires des lettres x, y et z.

Exemple : Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace non colinéaires. Le vecteur $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$ est non nul et orthogonal à $\overrightarrow{u}$ donc non colinéaire à $\overrightarrow{u}$. En définissant $\overrightarrow{v'} = \overrightarrow{w}\wedge\overrightarrow{u}$, on obtient un vecteur non nul qui est orthogonal à $\overrightarrow{w}$. Ainsi $\overrightarrow{v'}$ est dans le plan dirigé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. De plus, $\overrightarrow{v'}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ donc quitte à normer on obtient une base orthonormée du plan dirigé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

3.2 Propriétés du produit vectoriel

Proposition

Le produit vectoriel est bilinéaire, antisysmétrique. C'est-à-dire que l'on a

- **Bilinéaire.** Pour tout triplet de vecteurs du plan, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, pour tout nombre réel λ, on a

$$\left(\vec{u}+\lambda\vec{v}\right)\wedge\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{w}+\lambda\vec{v}\wedge\vec{w} \quad \text{et} \quad \vec{w}\wedge\left(\vec{u}+\lambda\vec{v}\right)=\vec{w}\wedge\vec{u}+\lambda\vec{w}\wedge\vec{v}$$

- **Atisymétrie.** Pour tout couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$, on a l'égalité

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=-\vec{v}\wedge\vec{u}$$

Démonstration. En appliquant les propriétés de bilinéarité et d'antisymétrie du produit mixte dans le plan, on obtient directement les égalités souhaitées. □

Proposition

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de l'espace,

$$\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2+\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)^2=\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2.$$

Démonstration. Notons (x, y, z) et (a, b, c) les composantes respectives des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le repère $\mathscr{R}$. Par le calcul, on a

$$\begin{aligned}
\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2+\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)^2 &= (bx-ay)^2+(cy-bz)^2+(az-cx)^2+(ax+by+cz)^2\\
&= b^2x^2+a^2y^2+c^2y^2+b^2z^2+a^2z^2+c^2x^2+a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2\\
&\quad -2abxy-2bcyz-2acxz+2(abxy+acxz+bcyz)\\
&= b^2x^2+a^2y^2+c^2y^2+b^2z^2+a^2z^2+c^2x^2+a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2\\
&= x^2(b^2+c^2+a^2)+y^2(a^2+c^2+b^2)+z^2(b^2+a^2+c^2)\\
&= (x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)\\
&= \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2.
\end{aligned}$$

□

Remarque :

- En particulier si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux alors $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$.
- D'après l'égalité précédente, on en déduit que l'aire du paralélogramme formé par les vecteurs $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$ est égale à

$$\sqrt{\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2-\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)^2}.$$

- La proposition précédente traduit le théorème de Pythagore dans l'espace.

Proposition (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de l'espace alors

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}|\leq\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|.$$

Démonstration. Cette inégalité découle de la proposition précédente. □

Proposition

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de l'espace alors

$$\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)\wedge\vec{w}=(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{v}\cdot\vec{w})\vec{u}$$

Démonstration. On se place dans une base orthonormée $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ directe dans laquelle

$$\left\{\begin{array}{lll} \overrightarrow{u} & = & a\overrightarrow{u_1} \\ \overrightarrow{v} & = & b\overrightarrow{u_1} + c\overrightarrow{u_2} \\ \overrightarrow{w} & = & d\overrightarrow{u_1} + e\overrightarrow{u_2} + f\overrightarrow{u_3} \end{array}\right. .$$

Puisque la base est directe, $\overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}$. On a alors

$$\begin{array}{rcl} \left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right) \wedge \overrightarrow{w} & = & \left(a\overrightarrow{u_1} \wedge (b\overrightarrow{u_1} + c\overrightarrow{u_2})\right) \wedge \overrightarrow{w} \\ & = & ac\left(\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}\right) \wedge \overrightarrow{w} \\ & = & ac\overrightarrow{u_3} \wedge \left(d\overrightarrow{u_1} + e\overrightarrow{u_2} + f\overrightarrow{u_3}\right) \\ & = & acd\overrightarrow{u_2} - ace\overrightarrow{u_1} \\ & = & ad(\overrightarrow{v} - b\overrightarrow{u_1}) - ace\overrightarrow{u_1} \\ & = & ad\overrightarrow{v} - a(bd + ce)\overrightarrow{u_1} \\ & = & (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w})\overrightarrow{u}. \end{array}$$

□

3.3 Produit mixte dans l'espace orienté

Définition

Le produit mixte ou encore déterminant des trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de l'espace est le nombre réel défini par

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w}$$

Proposition

- Le produit mixte est trilinéaire, c'est-à-dire que $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$ est linéaire par rapport à chacun des trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.
- Le poduit mixte est antisymétrique, c'est-à-dire qu'il est multiplié par -1 lorsqu'on échange deux vecteurs.

Exemple : Si l'on note $D = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$ alors

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}] = [\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = D$$

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}] = [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}] = -D$$

Proposition

Étant donné trois vecteurs dont les composantes dans une base orthonormée directe sont données par

$$\overrightarrow{u_1}(x_1, y_1, z_1) \text{ et } \overrightarrow{u_2}(x_2, y_2, z_2) \text{ et } \overrightarrow{u_3}(x_3, y_3, z_3),$$

on a une expression du produit mixte de ces trois vecteurs

$$\begin{array}{rcl} [\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}] & = & x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 \\ & & -x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3 - x_3 y_2 z_1. \end{array}$$

On écrit aussi

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}]$$

Démonstration. En utilisant la définition du produit mixte, on a

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}] = x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} - y_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix},$$

et donc on obtient le résultat en développant. □

Remarque : Soient A, B, C et D quatre points de l'espace deux à deux distincts. Si P est un plan contenant A, B et C alors l'aire $\mathscr{A}$ de la base du parallélépipède construit à partir des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ vérifie $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \mathscr{A}\,\overrightarrow{w}$ où $\overrightarrow{w}$ est un vecteur unitaire normal à P. La hauteur du parallélépipède étant égale à $h = |\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{w}|$, on en déduit que

$$|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]| = \mathscr{A}\,|\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{AD}| = \mathscr{A}\,h.$$

L'aire du parallélépipède construit à partir des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ est égale à

$$|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|.$$

Définition

Trois vecteurs sont dit copolanaires si l'un d'entre eux est une combinaison linéaire des deux autres.

Remarque : Une famille de trois vecteurs coplanaires est de rang au plus deux.

Proposition

Trois vecteurs du plan sont coplanaires si et seulement si leur produit mixte est nul.

Démonstration. Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace. Si ces vecteurs sont colinéaires alors ils sont clairement coplanaires et le produit mixte est nul.

Supposons par exemple que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas coplanaires. On a $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right) \cdot \overrightarrow{w}$ et donc le produit mixte est nul si et seulement si $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ sont orthogonaux c'est-à-dire, si et seulement si $\overrightarrow{w}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. □

4 Droites, plans et sphères

4.1 Droites

Définition

On dit que d est une droite de l'espace s'il existe un point A et un vecteur $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ du plan tels que pour tout point M de l'espace,

$$M \in d \iff \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}.$$

Dans ce cas, on dit que d est une droite passant par A dirigée par $\overrightarrow{u}$. Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est appelé un vecteur directeur de la droite d.

Remarque : Si d est une droite de l'espace dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$ alors $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}) \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ est l'ensemble des vecteurs directeur de d. Cela explique pourquoi on dit aussi qu'une droite passe par un point et est dirigée par $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})$.

Dans ce cas, on écrit aussi $d = A + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})$.

Représentation paramétrique d'une droite

On considère Δ la droite passant par le points $A(x_0, y_0, z_0)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ non nul.
Alors pour tout point $M(x, y, z)$ de l'espace, on a

$$\begin{aligned} M \in \Delta &\iff \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \\ &\iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{u} \text{ sont colinéaires.} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta \\ z = z_0 + \lambda\gamma \end{cases} \end{aligned}$$

Remarque : Par deux points distincts A et B de l'espace il passe une unique droite notée (AB) passant par A et dirigée par $\overrightarrow{AB}$.

4.2 Plans

Définition

On dit que P est un plan de l'espace s'il existe A un point de l'espace et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires tel que
$$\forall M \in E, \quad M \in P \iff \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}.$$
Dans ce cas, on dit que P est le plan passant par A dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Remarque : Si P est le plan passant par A dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x\vec{u} + y\vec{v} \in \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$. On assimile donc le plan à un espace vectoriel (de dimension deux puisque les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires).

On note $P = (A, \vec{u}, \vec{v})$ ou encore $P = A + \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$. Dans ce cas, on dit que P est vectoriellement dirigé par $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$.

Représentation paramétrique d'un plan

On considère le plan P passant par le points $A(x_0, y_0, z_0)$, dirigé par les vecteurs non colinéaires $\vec{u_1}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ et $\vec{u_2}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$.
Alors pour tout point $M(x, y, z)$ de l'espace, on a
$$\begin{aligned} M \in P \quad &\iff \quad \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \ \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u_1} + \mu \vec{u_2}. \\ &\iff \quad \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \ \left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + \lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2 \\ y = y_0 + \lambda\beta_1 + \mu\beta_2 \\ z = z_0 + \lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2 \end{array} \right. . \end{aligned}$$

Proposition

Une équation cartésienne du plan passant par A et dirigé par deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donnée par
$$[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AM}] = 0.$$

Démonstration. Un point $M(x, y, z)$ de l'espace est dans le plan passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si et seulement si, $[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AM}] = 0$. □

Définition

Soit P un plan dirigé par l'espace vectoriel F. On dit que $\vec{u}$ est un vecteur normal à P lorsque $\vec{u}$ est orthogonal avec tous les vecteurs de F.
Dans ce cas, on dit aussi que P est orthogonal à $\vec{u}$.

Proposition

Dans un repère orthonormé direct, tout plan P admet une équation cartésienne de la forme
$$ax + by + cz + d = 0,$$
où a, b, c et d sont quatre nombres réels et $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.
De plus (a, b, c) est un vecteur normal au plan P.

Démonstration. Soient $A(x_0, y_0, z_0) \in P$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires qui dirigent P. En notant $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}(a, b, c)$, une équation cartésienne de P est donnée par
$$\begin{aligned} 0 &= [\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AM}] \\ &= \vec{w} \cdot \overrightarrow{AM} \\ &= a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0). \end{aligned}$$
De plus, le vecteur $\vec{w}(a, b, c)$ est orthogonal à P par définition. □

Définition

Deux plans sont dit parallèles s'ils ont la même direction vectorielle.

Remarque : Deux plans sont parallèles si et seulement si ils ont un vecteur normal non nul en commun.

Proposition

Soient P_1 et P_2 deux plans définis par

$$P_1 \mid a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \text{ et } P_2 \mid a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

Il y a équivalence entre les énoncés :
(i) : P_1 et P_2 sont parallèles.
(ii) : (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) sont proportionnels.

Démonstration. Les deux plans sont parallèles si et seulement si, ils admettent des vecteurs normaux colinéaires. Il s'agit ici d'une retraduction de la définition. □

Remarque : Si les plans P_1 et P_2 sont égaux alors ils sont parallèles et donc il existe λ tel que $(a_1, b_1, c_1) = \lambda(a_2, b_2, c_2)$. Les deux plans, admettent de plus un point en commun donc $d_1 = \lambda d_2$.

Réciproquement, si les équations cartésiennes des plans P_1 et P_2 sont proportionnels alors ils sont égaux.

Définition

Soient P_1 et P_2 deux plans définis par

$$P_1 \mid a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \text{ et } P_2 \mid a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

On dit que P_1 et P_2 sont orthogonaux et l'on note $P_1 \perp P_2$ si

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$$

Remarque : Sous les hypothèses de la proposition précédente, si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur normal à P_1 et $\overrightarrow{v}$ est un vecteur normal à P_2 alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

Proposition

L'intersection de deux plans P_1 et P_2 non parallèles est une droite dirigée par le produit vectoriel de deux vecteurs non nuls normaux respectivement à P_1 et P_2.

Démonstration. On représente P_1 et P_2 à l'aide d'une équation cartésienne

$$P_1 \mid a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \text{ et } P_2 \mid a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

Les vecteurs (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) ne sont pas proportionnels. On peut donc supposer par exemple que $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Ainsi pour tout nombre réel $z_0 \in \mathbb{R}$, le système

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1x + b_1y = -c_1z_0 - d_1 \\ a_2x + b_2y = -c_2z_0 - d_2 \end{array} \right. ,$$

admet au moins une solution et donc $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$.

On note $\overrightarrow{u}$ un vecteur normal à P_1, $\overrightarrow{v}$ un vecteur normal à P_2, et $A \in P_1 \cap P_2$. Pour tout point M de l'espace,

$$\begin{aligned} M \in P_1 \cap P_2 &\iff \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{v} \\ &\iff \overrightarrow{AM} \parallel \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}. \end{aligned}$$

On en déduit que $P_1 \cap P_2$ est une droite passant par A dirigée par $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$. □

Remarque : Sous les hypothèses de la proposition précédente, $\mathscr{D} = P_1 \cap P_2$ est une droite dont une équation cartésienne

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{array} \right. .$$

Réciproquement, si $\mathscr{D}$ est une droite passant par A et dirigée par un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$. On peut construire une base orthonormée directe $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ où $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$. En considérant P_1 le plan passant par A normal à $\overrightarrow{v}$ et P_2 le plan passant par A dirigé par $\overrightarrow{w}$, on a $P_1 \cap P_2$ est une droite dirigée par $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}$ passant par A donc égale à $\mathscr{D}$.

4.3 Projection et distance

Proposition

Soit E une droite ou bien un plan de l'espace. Pour tout point A de l'espace, il existe un unique point $H \in E$ tel que $\overrightarrow{AH} \perp E$.
On dit que H est le projeté orthogonal de A sur E. C'est le point de E le plus proche de A au sens de la norme euclidienne. On appelle distance de A à E et l'on note $\mathrm{d}(A, E) = \|\overrightarrow{AH}\|$.

Démonstration. (Admis) □

Proposition

Soit P le plan passant par A et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$. Pour tout point M de l'espace

$$\mathrm{d}(M, P) = \frac{|(\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}) \cdot \overrightarrow{AM}|}{\|\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}\|} = \frac{|[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{AM}]|}{\|\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}\|}$$

Démonstration. Si M est un point de l'espace et H est le projeté orthogonal de M sur P alors les vecteurs $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}$ sont colinéaires et donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{MH} = \lambda \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}$. De plus,

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM},$$

donc

$$\overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}) = \overrightarrow{HM} \cdot (\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}) = \lambda \|\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}\|^2.$$

□

Proposition

Soit P un plan défini par l'équation cartésienne

$$P \mid ax + by + cz + d = 0,$$

avec a, b, c et d quatre nombres réels et $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Si $M(x, y, z)$ est un point de l'espace alors

$$\mathrm{d}(M, P) = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Démonstration. Soit $A(x_0, y_0, z_0) \in P$. Alors par définition, $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$. On note $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ deux vecteurs non colinaires qui dirigent P et (α, β, γ) les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}$. Si $M(x, y, z)$ est un point de l'espace alors la proposition précédente affirme que

$$\mathrm{d}(M, P) = \frac{|\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0)|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}.$$

Or (a, b, c) est un vecteur normal à P donc les vecteurs (α, β, γ) et (a, b, c) sont proportionnels et donc quitte à multiplier par une quantité non nulle au numérateur et au dénominateur, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(M, P) &= \frac{|a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \end{aligned}$$

□

Proposition

Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par un point A et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$. Si M est un point de l'espace alors

$$\mathrm{d}(M, \mathscr{D}) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}$$

Démonstration. Si M est un point de l'espace et H le projeté orthogonal de M sur la droite $\mathscr{D}$, on a

$$\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AH} \wedge \overrightarrow{u} + \overrightarrow{HM} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{HM} \wedge \overrightarrow{u}.$$

Or les vecteurs $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont perpendiculaires donc

$$\|\overrightarrow{HM} \wedge \overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{HM}\|\|\overrightarrow{u}\| = \mathrm{d}(M, \mathscr{D}) \times \|\overrightarrow{u}\|.$$

□

4.4 Sphères

Définition

On appelle sphère de centre A et de rayon $R > 0$ l'ensemble noté $\mathbb{S}(A, R)$ défini par

$$\mathbb{S}(A, R) = \left\{M \ / \ \|\overrightarrow{AM}\| = R\right\}.$$

Remarque : En notant $A(a, b, c)$, la définiton précédente, donne une équation cartésienne de la sphère $\mathbb{S}(A, R)$

$$\mathbb{S}(A, R) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

Proposition

Étant donné une sphère S de centre A et de rayon $R > 0$, un plan P et H le pojeté orthogonal de A sur H :

- si $\mathrm{d}(A, P) > R$ alors $P \cap S = \emptyset$,
- si $\mathrm{d}(A, P) = R$ alors $P \cap S = \{H\}$,
- si $\mathrm{d}(A, P) < R$ alors $P \cap S$ est le cercle de centre H et de rayon $\sqrt{R^2 - \mathrm{d}(A, P)^2}$ dans le plan P.

Démonstration. Si M est un point de P alors d'après le théorème de Pythagore,

$$AM^2 = AH^2 + HM^2.$$

Donc M est aussi dans la sphère si et seulement si

$$HM^2 = R^2 - \mathrm{d}(A, P)^2.$$

□