Feuille d'exercices 26 : Séries numériques

Exercice 1. 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, dt$.

2. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!}$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 2. 1. Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que : $\displaystyle\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$.

(b) En déduire que : $\displaystyle\left| \arctan x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \right| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$.

2. Montrer que : $\displaystyle\left| \pi - 4 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \right| \leq \frac{4}{2n+3}$.
Quel est l'intérêt de cette inégalité ?

Exercice 3. Soit (u_n) une suite décroissante à termes positifs telle que $\sum u_n$ converge.
Montrer que $(nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 4. Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

1. $\displaystyle\sum \frac{1}{n(n+1)}$
2. $\displaystyle\sum_{n \geq 2} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \right)$

Exercice 5. Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

1. $\displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 - 1}$
2. $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{6^n}{(3^{n+1} - 2^{n+1})(3^n - 2^n)}$.

Exercice 6. Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

1. $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{2}{n(n+3)} \right)$
2. $\displaystyle\sum_{n \geq 2} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$

Exercice 7. Montrer que la série suivante est convergente et calculer sa somme.

$$\sum_{n \geq 0} \arctan \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} \right)$$

Indication : On pourra montrer que arctan $\left(\dfrac{1}{n^2+n+1} \right)$ $=$ *arctan* $(n+1)$ $-$ *arctan* (n).

Exercice 8. Déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

Exercice 9. Soit $\alpha > 1$. Déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Exercice 10. Déterminer un équivalent de :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \sim \frac{2}{3} n\sqrt{n}$
2. $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 11. 1. Soit $\alpha \in]0,1[$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Déterminer un équivalent de (S_n).

2. Soit $\alpha > 1$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \quad \text{et} \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

   (a) Donner un équivalent (R_n).
   (b) Étudier la convergence de $\sum \frac{R_n}{S_n}$ suivant les valeurs de α.

Exercice 12. Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries réelles convergentes, soit $\sum_{n\geq 0} w_n$ une série réelle telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq w_n \leq v_n.$$

Montrer que $\sum_{n\geq 0} w_n$ converge.

Exercice 13. Déterminer la nature de la série de terme général :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \int_0^{\pi/n} \sqrt{\sin x}\, dx.$$

Exercice 14. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes à termes positifs.
Déterminer la nature des séries de terme général :

a. $\max(u_n, v_n)$ b. u_n^2 c. $\dfrac{\sqrt{u_n}}{n}$

Pour le c., on pourra prouver et utiliser l'inégalité : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy \leq \dfrac{x^2+y^2}{2}$

Exercice 15. Etudier la nature des séries de terme général :

1. $u_n = \dfrac{1}{n^2 - \ln n}$
2. $u_n = n - \sin \dfrac{1}{n}$
3. $u_n = n.\sin \dfrac{1}{n^2}$

Exercice 16. Etudier la nature des séries de terme général :

1. $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n - e$
2. $u_n = \sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2+3}$
3. $u_n = \left(1 - \cos \dfrac{\pi}{n}\right) (\ln n)^{1000}$

Exercice 17. Déterminer la nature des séries de terme général :

1. $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$
2. $u_n = \dfrac{\operatorname{ch}(n)}{\operatorname{ch}(2n)}$
3. $u_n = \dfrac{n^2 \ln n}{e^n}$
4. $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{\ln^3(n) n^2}$
5. $u_n = \dfrac{\arctan n}{n^2}$
6. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$
7. $u_n = 2\ln(n^3+1) - 3\ln(n^2+1)$

Exercice 18. Etudier la nature des séries de termes généraux suivantes :
1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sqrt{n^4+2n+1} - \sqrt{n^4+kn}$, où $k \in \mathbb{N}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^{2n} - \left(1 + \dfrac{2}{n+a^2}\right)^n$, où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 19. 1. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$

2. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$

   Le réel γ est appelé la constante d'Euler.

3. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

   Indication : On pourra utiliser le résultat de l'exercice 26, question 1.b et le résultat de l'exercice 10 question 2.

Exercice 20. Prouver qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $n! \sim \lambda\sqrt{n}n^n e^{-n}$.

Indication : Ôn pourra poser : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n!e^n}{\sqrt{n}n^n}$ et $v_n = \ln(u_n)$. Puis commencer par prouver que (v_n) converge.

Exercice 21. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, montrer que la série : $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge ssi $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

La série $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ est appelée série de Bertrand.

Exercice 22.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} - \ln n$.

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Exercice 23. Soit $p \in \mathbb{N}$, étudier, selon la valeur de p la nature de la série de terme général :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{(n+p)!}.$$

Exercice 24. Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$.

Montrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum v_n$ converge.

Exercice 25. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k^2 + (n-k)^2)^a}$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\frac{n^2}{2} \leq k^2 + (n-k)^2 \leq 2n^2$.
2. En déduire pour $a \in \mathbb{R}$ fixé, la nature de la série $\sum u_n$

Exercice 26. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels positifs. On suppose de plus que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$.

1. On suppose que $\sum v_n$ converge.
   (a) Si $u_n = o(v_n)$, montrer que $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right)$.
   (b) Si $u_n \sim v_n$, montrer que $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$.
2. On suppose que $\sum v_n$ diverge.
   (a) Si $u_n = o(v_n)$, montrer que $\sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.
   (b) Si $u_n \sim v_n$, montrer que $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$.

Exercice 27. Etudier la convergence des séries de terme général :

1. $u_n = \frac{e^{in}}{n^2}$
2. $u_n = \frac{(-1)^n \ln n}{e^n}$.

Exercice 28. Etudier la nature de la série $\sum u_n$ dans les cas suivants :

1. $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ 2. $u_n = \cos n \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$ 3. $u_n = \frac{\sin n}{n^2}$ 4. $u_n = \frac{(1+n)\sin n}{n^2\sqrt{n}}$

Exercice 29. Etudier la nature de la série $\sum \frac{\sin n}{n^{3/2} + \cos n}$.

Exercice 30 (Critère de d'Alembert)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$

1. Si $l > 1$, montrer que $\sum u_n$ diverge.
2. Si $l \in [0, 1[$, montrer que $\sum u_n$ converge.
3. Etudier alors la nature des séries de terme général :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{2^n (\sin\alpha)^{2n}}{n^2}$ où $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{\prod_{k=1}^{n}(2k)}{n^n}$
   (c) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{\ln n}{n!}$
   (d) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{\ln n}{2^n}$

Exercice 31 (Critère des séries alternées)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ décroissante, qui converge vers 0.

1. Montrer que $\sum(-1)^n u_n$ converge (on pourra étudier les suites extraites paires et impaires de la suite des sommes partielles).
2. Etudier la convergence de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$. Cette série est-elle absolument convergente ?

Exercice 32. L'objectif est de démontrer la règle de Raabe-Duhamel : soit $a \in \mathbb{R}$, soit (u_n) une suite à termes strictement positifs telle que, au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \ln(n^a u_n)$ et $w_n = v_{n+1} - v_n$. Montrer que $w_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
2. En déduire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que, au voisinage de $+\infty$:

$$u_n \sim \frac{\lambda}{n^a}.$$

3. Pour quelles valeurs de a la série $\sum u_n$ converge ?
4. Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$, soit u_n la suite définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}.$$

   Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.