Chapitre 11 : Suites numériques

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition

Une suite réelle u est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$: $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u(n) \end{array}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u(n)$ est généralement noté u_n et est appelé terme d'indice n.
La suite u est alors notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n).
L'ensemble des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Remarque : ⚠Attention à ne pas confondre la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec son terme d'indice n u_n.
Par extension, nous appellerons aussi suite réelle une famille de réels indexée par un intervalle d'entiers du type $[\![n_0, +\infty [\![$.
La suite u est dans ce cas notée $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Une suite peut être définie de trois manières différentes :

- De manière explicite : chaque terme de la suite est donné directement en fonction de n : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f(n)$ où $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
  Exemple : La suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{n^2+1}$
- Par récurrence : u_n est exprimé en fonction des termes précédents : u_{n-1}, ... u_0.
  Exemple :
  $$u_0 = 1 \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$$
  $$v_0 = 0, v_1 = 1 \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$$
  La suite (v_n) est la suite de Fibonacci.
- De manière implicite : u_n est défini par une propriété non explicite dépendant de n.
  Exemple : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est l'unique solution de l'équation $x^3 + x - 1 = n$.

1.2 Opérations sur les suites

Définition

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit la suite

- somme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ s_n = u_n + v_n.$$
- produit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \times (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = u_n \times v_n$$
- $\lambda \times (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \lambda \times u_n$$

1.3 Suites et relation d'ordre

Définition

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

- (strictement) croissante si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1}$ (resp. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < u_{n+1}$).
- (strictement) décroissante si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_{n+1}$ (resp. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > u_{n+1}$).
- (strictement) monotone si et seulement si elle est soit (strictement) croissante soit (strictement) décroissante.
- constante si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n$
  si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0$.

Remarque :

- Si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0$ alors, : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_0 = u_n$.
- Si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n$, on montre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0$.

Remarque : Une suite peut être ni croissante ni décroissante.
Exemple : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$ n'est ni croissante ni décroissante.

Remarque : Pour montrer qu'une suite est croissante, on pourra montrer, selon les cas :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$,
- **si pour tout n** $\in \mathbb{N}$, $\mathbf{u_n > 0}$, on pourra montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$. Cette caractérisation est particulièrement adaptée lorsque la définition de la suite fait intervenir des produits/quotients/puissances.

Exemple : Etudions la monotonie de la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{n!}{n^n}$:
On sait que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}.$$

Or, $\dfrac{n}{n+1} < 1$ donc $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n < 1$. D'où $u_{n+1} < u_n$ (car $u_n > 0$).
Ainsi, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.
Donc (u_n) est strictement décroissante.

Définition

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

- majorée si et seulement si : $\exists M \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.
- minorée si et seulement si :$\exists m \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n$.
- bornée si elle est majorée et minorée.

Exemple : La suite $(\cos(n^6 - 3n + 1))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Proposition

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée i.e si et seulement si : $\exists M \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$.

Démonstration.
- Supposons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée. Il existe alors m et $M \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n \leq M$.
  Posons $K = \max(|m|, |M|)$.
  Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \leq M \leq |M| \leq K$.
  De plus, $-m \leq |m| \leq K$ donc $-K \leq -|m| \leq m \leq u_n$.
  Ainsi : $|u_n| \leq K$.
- Réciproquement, supposons qu'il existe $M \in \mathbb{R}$, tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$. On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $-M \leq u_n \leq M$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par M et minorée par $-M$. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

□

Vocabulaire : On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété P à partir d'un certain rang s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier naturel $n \geq n_0$, u_n vérifie P.

Exemple :

- La suite $(-2+n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive à partir du rang 2.
- La suite $(u_n) = (n^2 - 2n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir du rang 1 :
  Soit $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)^2 - 2(n+1) - (n^2 - 2n) = 2n + 1 - 2n - 2 + 2n = 2n - 1$.
  Or, $2n - 1 \geq 0 \iff n \geq \dfrac{1}{2}$.
  Ainsi : $\forall n \geq 1,\ u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Définition

On dit qu'une suite est stationnaire si et seulement si elle est constante à partir d'un certain rang

si et seulement si : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ u_n = u_{n_0}$

Exemple : La suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(100-k)$ est stationnaire (constante à partir du rang 100).

1.4 Suites récurrentes

1.4.1 Suites arithmétiques, géométriques

Définition

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

- arithmétique si et seulement si il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$. r est appelé raison de la suite.
- géométrique si seulement si il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n$. q est appelé raison de la suite.

Proposition

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ alors : $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall n \geq p,\ u_n = u_p + (n-p)r$.
  En particulier : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr$.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ alors : $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall n \geq p,\ u_n = u_p q^{n-p}$.
  En particulier : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 q^n$.

Démonstration.

- Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$.
  Soit $p \in \mathbb{N}$ On prouve ceci par récurrence sur $n \geq p$.
  - Pour $n = p$, on a : $u_p = u_p + 0 \times r$.
  - Soit $n \geq p$. Supposons que $u_n = u_p + (n-p)r$.
    On a $u_{n+1} = u_n + r = u_p + (n-p)r + r = u_p + (n+1-p)r$.
  - On a donc : $\forall n \geq p,\ u_n = u_p + (n-p)r$.
- On procède de même dans le cas d'une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$.

□

Définition

Une suite (u_n) est dites arithmético-géométrique si et seulement si il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$.

Proposition

Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b \quad a, b \in \mathbb{R}$.

- Si $a = 1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison b. Donc, : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nb$.
- Si $a \neq 1$ alors, l'équation $x = ax + b$ admet une unique solution que l'on note α.
  La suite $(u_n - \alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors géométrique de raison a.
  On a alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha + a^n(u_0 - \alpha)$.

Démonstration.

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

$$a\alpha + b = \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = -\frac{b}{a-1}$$

- Posons $\alpha = -\dfrac{b}{a-1}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n - \alpha)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+a} - \alpha \\ &= au_n + b - (a\alpha + b) \\ &= a(u_n - \alpha) \\ &= av_n \end{aligned}$$

  Ainsi, (v_n) est géométrique de raison a.
  On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = a^n v_0 = a^n(u_0 - \alpha)$.
- Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a^n(u_0 - \alpha) + \alpha$.

□

Remarque : L'expression théorique n'est pas à connaitre par cœur, mais il faut savoir la retrouver en appliquant les étapes de la preuve.
Exemple : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n + 2$.
On reconnait une suite arithmético-géométrique.

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on a : $\alpha = 3\alpha + 2 \iff \alpha = -1$.
- Posons $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + 1)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = 3u_n + 2 + 1 = 3(u_n + 1) = 3v_n$.
  Ainsi, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 3.
  Par suite : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 3^n(u_0 + 1) = 2 \times 3^n$.
- On obtient finalement que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2 \times 3^n - 1$.

1.4.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Proposition Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (Cas complexe)

Soient $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.
L'équation $r^2 - ar - b = 0$ est appelée équation caractéristique.

- Si l'équation caractéristique admet deux solutions distinctes r_1, $r_2 \in \mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), alors il existe un unique $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.
- Si l'équation caractéristique admet une solution double $r \in \mathbb{R}$, alors il existe un unique $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda + \mu n)r^n$.

Remarque :

- L'hypothèse $b \neq 0$ assure qu'il s'agit bien d'une relation de récurrence
- On détermine λ, μ à l'aide de u_0, u_1.

Démonstration. Voir le chapitre espace vectoriel □

1.4.3 Suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

On s'intéresse ici aux suites récurrentes définies par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : I \to \mathbb{R}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition

On dit que $J \subset I$ est stable par f si $f(J) \subset J$.

Remarque : Pour montrer qu'un intervalle est stable, on pourra étudier les variations de f et déterminer les points fixes de f i.e les réels $x \in I$ tels que $f(x) = x$.

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $J \subset I$ un intervalle stable par f.
La suite définie par $\begin{cases} u_0 \in J \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ est bien définie et on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in J$.

Démonstration. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et appartient à J.

- u_0 est bien défini et $u_0 \in J$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que u_n soit bien défini et qu'il appartienne à J.
  Or, f est définie sur J donc $f(u_n) = u_{n+1}$ est bien défini. De plus, $u_{n+1} \in f(J) \subset J$. Donc $u_{n+1} \in J$.
- Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \in J$.

□

Proposition : Monotonie de (u_n)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $J \subset I$ un intervalle stable par f et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 \in J \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.
Si f est croissante sur J alors la suite (u_n) est monotone.

Démonstration. 1. 1er cas : Si $f(u_0) \geq u_0$. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$.
- On a $u_1 = f(u_0)$ donc $u_1 \geq u_0$

- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_{n+1} \geq u_n$.
  Par une propriété précédente, $u_{n+1} \in J$ et $u_n \in J$. Or, f est croissante sur J, donc par hypothèse de récurrence, on a : $f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$.
  Ainsi, $u_{n+2} \geq u_{n+1}$.
- On a donc prouvé que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$.
  Ainsi, (u_n) est croissante.

2. 2ème cas : Si $f(u_0) \leq u_0$. On prouve de même par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$.
   Ainsi, (u_n) est décroissante.

□

Méthode

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

- On cherche un intervalle J stable par f et contenant u_0.
- Si f est croissante sur J alors (u_n) est monotone.
  On détermine le signe de $u_1 - u_0$ pour connaitre la monotonie de (u_n).

Remarque : Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $J \subset I$ un intervalle stable par f, (u_n) définie par $u_0 \in J$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
Pour déterminer la monotonie de (u_n), il pourra être intéressant d'étudier le signe de $x \mapsto f(x) - x$ sur J.
Si : $\forall x \in J,\ f(x) - x \geq 0$ alors, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geq 0$ donc (u_n) est croissante.

2 Limite d'une suite réelle

Définition

- On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ ou tend vers l, et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0\,,\, \exists N \in \mathbb{N}\,,\, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies |u_n - l| \leq \epsilon.$$

- On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge sinon.
- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ ou tend vers $+\infty$, et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, si

$$\forall A \in \mathbb{R}\,,\, \exists N \in \mathbb{N}\,,\, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies u_n \geq A.$$

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge $-\infty$ ou tend vers $-\infty$, et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, si

$$\forall A \in \mathbb{R}\,,\, \exists N \in \mathbb{N}\,,\, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies u_n \leq A.$$

Remarque :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l si

$$\forall \epsilon > 0\,,\, \exists N \in \mathbb{N}\,,\, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies l - \epsilon \leq u_n \leq l + \epsilon.$$

  Autrement dit, ceci signifie que quelque soit $\epsilon > 0$, on peut trouver un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel tous les termes de la suite sont dans le segment $[l - \epsilon, l + \epsilon]$ i.e que tous les termes sont à une distance de l inférieure ou égale à ϵ à partir du rang N.
- La définition de la limite $+\infty$ se traduit par : pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont plus grands que A
- La définition de la limite $-\infty$ se traduit par : pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont inférieurs à A.

Exemple :

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$. Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
  Soit $\epsilon > 0$.
  Brouillon : On cherche $N \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \geq N$, $|u_n| \leq \epsilon$ i.e tel que : $\forall n \geq N,\ \frac{1}{n} \leq \epsilon$ ou encore : $\forall n \geq N,\ n \geq \frac{1}{\epsilon}$.
  Rédaction : Posons $N = \lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor + 1$.
  Soit $n \geq N$, $n \geq N \geq \frac{1}{\epsilon}$, donc $\frac{1}{n} \leq \epsilon$ et $|u_n| \leq \epsilon$.
  Ainsi : $\forall \epsilon \leq 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad n \geq N \Longrightarrow |u_n| \leq \epsilon$.

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $q \in]-1,1[$. Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
  Soit $\epsilon > 0$.
  Brouillon : On cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N$, $|u_n| \leq \epsilon$, i.e tel que : $\forall n \geq N$, $|q|^n \leq \epsilon$ ou encore : $\forall n \geq N$, $\ln(|q|)n \leq \ln(\epsilon)$ i.e. $\forall n \geq N,\ n \geq \dfrac{\ln(\epsilon)}{\ln(|q|)}$ ($\ln(|q|) < 0$ puisque $|q| < 1$).
  Rédaction :
  Posons $N = \left\lfloor \dfrac{\ln(\epsilon)}{\ln(|q|)} \right\rfloor + 1$.
  Soit $n \geq N$, $n \geq N \geq \dfrac{\ln(\epsilon)}{\ln(|q|)}$, donc $\ln(|q|)n \leq \ln(\epsilon)$.
  Ainsi, $|q|^n \leq \epsilon$.
  On a donc prouvé que : $\forall \epsilon \leq 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\quad n \geq N \Longrightarrow |u_n| \leq \epsilon$.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge $+\infty$.
  Soit $A \in \mathbb{R}$. Posons $N = \lfloor A \rfloor + 1$ si $A \geq 0$, $N = 0$ sinon.
  Alors : $\forall n \geq N$, $n \geq N \geq A$.

Remarque : Le fait qu'une suite converge (ou diverge) ne dépend que du comportement de la suite à partir d'un certain rang.

Remarque :

- ⚠ Si $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0, on ne peut pas dire en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
  Contre-exemple : $(\ln(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ ou $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$.
- ⚠ Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, on n'a pas nécessairement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
  Contre-exemple : $(u_n) = ((-1)^n n))$.

2.1 Propriétés

Proposition

Si la limite d'une suite (u_n) existe alors elle est unique. On la note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Démonstration. Soit (u_n) une suite telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l_1$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l_2$

- Supposons $l_1 \in \mathbb{R}$ et $l_2 = +\infty$.
  Par définition de la limite, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_1 \quad \Longrightarrow \quad |u_n - l_1| \leq 1.$$
  Et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que :
  $$\forall n \geq N_2, n \geq N_2 \quad \Longrightarrow \quad u_n \geq l_1 + 10$$
  Posons $N = \max(N_1, N_2)$, on a : $\forall n \geq N$, $l_1 - 1 \leq u_n \leq l_1 + 1$ et $l_1 + 10 \leq u_n$... Absurde.
- On montre de même que $l_1 \in \mathbb{R}$ et $l_2 = -\infty$ est absurde.
- Supposons $l_1 = -\infty$ et $l_2 = +\infty$.
  Par définition de la limite, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_1 \quad \Longrightarrow \quad u_n \leq -10.$$
  Et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que :
  $$\forall n \geq N_2, n \geq N_2 \quad \Longrightarrow \quad u_n \geq 10.$$
  Posons $N = \max(N_1, N_2)$, alors : $\forall n \geq N$, $u_n \leq -10$ et $u_n \geq 10$ Absurde .
- Par symétrie on ne peut avoir $l_1 = \pm\infty$ et $l_2 \in \mathbb{R}$ ou $l_1 = +\infty$ et $l_2 = -\infty$.
- Supposons $l_1 \in \mathbb{R}$ et $l_2 \in \mathbb{R}$. Montrons que $l_1 = l_2$ par l'absurde. On suppose donc que $l_1 \neq l_2$.
  Posons $\epsilon = \dfrac{|l_1 - l_2|}{3}$. On a $\epsilon > 0$, par définition de la limite, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_1 \quad \Longrightarrow \quad |u_n - l_1| \leq \epsilon$$
  Et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_2 \quad \Longrightarrow \quad |u_n - l_2| \leq \epsilon$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Soit $n \geq N$, on a : $|u_n - l_1| \leq \epsilon$ et $|u_n - l_2| \leq \epsilon$.
Ainsi, par l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}|l_1 - l_2| &= |l_1 - u_n + u_n - l_2| \\ &\leq |l_1 - u_n| + |u_n - l_2| \\ &\leq 2\epsilon \\ &\leq \frac{2|l_1 - l_2|}{3}\end{aligned}$$

D'où : $1 \leq \frac{2}{3}$ car $|l_1 - l_2| \neq 0$. Absurde.
Ainsi, $l_1 = l_2$.

□

Remarque : Cette idée de se placer au-delà du maximum des deux rangs pour pouvoir utiliser les deux définitions de la limite servira souvent.

Proposition

Soit $l \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite réelle.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l si et seulement si $(u_n - l)$ converge vers 0 si et seulement si $(|u_n - l|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
En particulier, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 si et seulement si $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Démonstration. Découle directement de la définition de la limite. □

Proposition

Soient (u_n) une suite et $l \in \mathbb{R}$.
S'il existe une suite (v_n) qui converge vers 0 et tel que $|u_n - l| \leq v_n$ à partir d'un certain rang alors (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Par définition de la convergence, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N_1$, $|v_n| \leq \epsilon$. De plus, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N_2$, $|u_n - l| \leq v_n$. Posons, $N = \max(N_1, N_2)$. Soit $n \geq N$, on a : $|u_n - l| \leq v_n \leq \epsilon$.
Ainsi, (u_n) converge vers l. □

Exemple : Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$. Si $a = 0$, le résultat est immédiat.
Supposons $a \neq 0$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{a^n}{n!}$.
On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{n+1} = 0$.
Ainsi, par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N$, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq \frac{1}{2}$.
On montre ensuite par récurrence que : $\forall n \geq N$, $|u_n| \leq \frac{1}{2^{n-N}}|u_N|$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n-N}}|u_N| = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Corollaire

Soient (u_n) une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l alors $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|l|$.

Démonstration. On sait que pour tout $n \geq N$, $||u_n| - |l|| \leq |u_n - l|$. Or, $(|u_n - l|)$ converge vers 0. Ainsi, la proposition précédente donne le résultat. □

Remarque : La réciproque est fausse dans le cas général pour $l \neq 0$ (prendre par exemple la suite $(-1)^n$.

Proposition

Toute suite réelle convergente est bornée.

Démonstration. Soit (u_n) une suite convergente vers un réel $l \in \mathbb{R}$.
Posons $\epsilon = 1 > 0$, par définition de la convergence, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |u_n - l| \leq 1.$$

Ainsi : $\forall n \geq N$, $|u_n| \leq |u_n - l| + |l| \leq |l| + 1$.
Posons $M = \max(|u_0|, \ldots, |u_{N-1}|, 1 + |l|)$. On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$. □

Remarque : La réciproque est fausse. La suite $((-1)^n)_{n\geq 0}$ est bornée mais ne converge pas.

Proposition

Soient (u_n) une suite réelle e $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Si (u_n) admet une limite l alors :

- Pour tout $M > l$, (u_n) est majorée par M à partir d'un certain rang.
- Pour tout $m < l$, (u_n) est minorée par m à partir d'un certain rang.

Démonstration.
- Si $l = -\infty$, soit $M \in \mathbb{R}$, par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \quad \Longrightarrow u_n \leq M.$$

- Supposons désormais que $l \in \mathbb{R}$.
  Soit $M > l$. Posons $\epsilon = M - l$.
  On a $\epsilon > 0$.
  Par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |u_n - l| \leq \epsilon.$$

  Soit $n \geq N$, on a : $|u_n - l| \leq \epsilon$ d'où $|u_n \leq l - \epsilon$.
  Ainsi : $\forall n \geq N,\ u_n \leq M$.

Le second point se montre de même. □

Remarque : Une suite tend vers $\mathfrak{l} \in \mathbb{R}^* \cup \{\pm\infty\}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

Démonstration.
- Si $l = \pm\infty$ alors $|u_n|$ tend vers $+\infty$, par la propriété précédente, $(|u_n|)$ est minorée par 1 à partir d'un certain rang donc ne s'annule pas à partir d'un certain rang.
- Si $l \in \mathbb{R}^*$. Alors, $(|u_n|)$ converge vers $|l| \in \mathbb{R}_+^*$. Par la propriété précédente, $(|u_n|)$ est minorée par $\frac{|l|}{2} > 0$ à partir d'un certain rang donc ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

□

2.2 Opérations sur les limites

Proposition

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers 0 et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. Alors $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0

Démonstration. (v_n) est bornée donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leq M$.
Soit $\epsilon > 0$, par définition de la convergence, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in\ N,\ n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |u_n| \leq \frac{\epsilon}{M+1}.$$

Soit $n \geq N$, on a alors :

$$|u_n v_n| = |u_n| \times |v_n| \leq \frac{\epsilon}{M+1} \times M \leq \epsilon$$

(en multipliant les inégalités entre nombres positifs).
On a donc montré que $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. □

Proposition : Opérations sur les limites finies

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites qui convergent respectivement vers $l, l' \in \mathbb{R}$.

- Alors $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l + l'$.
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λl.
- $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ll'.

Démonstration.

- Soit $\epsilon > 0$, par définition de la convergence, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n \in N_1,\ n \geq N_1 \quad \Longrightarrow \quad |u_n - l| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$
De même, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n \in N_2,\ n \geq N_2 \quad \Longrightarrow \quad |v_n - l'| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$
Posons $N = \max(N_1, N_2)$.
Soit $n \geq N$, on a :
$$\begin{aligned} |u_n + v_n - (l + l')| &= |(u_n - l) + (v_n - l')| \\ &\leq |u_n - l| + |v_n - l'| \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$
Ainsi : $\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |(u_n + v_n) - (l + l')| \leq \epsilon$.
Donc $(u_n + v_n)$ converge vers $l + l'$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Soit $\epsilon > 0$, par définition de la convergence, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n \in N_1,\ n \geq N_1 \quad \Longrightarrow \quad |u_n - l| \leq \frac{\epsilon}{|\lambda| + 1}.$$
Soit $n \geq N_1$, on a :
$$\begin{aligned} |\lambda u_n - (\lambda l)| &= |\lambda(u_n - l)| \\ &\leq |\lambda| \times |u_n - l| \\ &\leq |\lambda| \times \frac{\epsilon}{|\lambda| + 1} \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$
Donc $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λl.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, on a
$$|u_n v_n - ll'| = |u_n v_n - l v_n + l v_n - ll'| = |(u_n - l) v_n + l(v_n - l')| \leq |u_n - l| \times |v_n| + |v_n - l'| \times |l|$$
Or, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l donc $(|v_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|l|$ donc est bornée. De plus, $(|u_n - l|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Ainsi, $(|u_n - l| \times |v_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
De plus, $(|v_n - l|)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0. Ainsi, par les points précédents, $\big(|u_n - l| \times |v_n| + |v_n - l'| \times |l|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
Donc $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ll'.

□

Proposition : Limites infinies

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers $+\infty$.

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite minorée alors $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite minorée par un réel strictement positif à partir d'un certain rang alors $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Démonstration.

- (u_n) est minorée donc il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq m$.
Soit $A \in \mathbb{R}$. Par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N,\ v_n \geq A - m$.
Alors on a : $\forall n \geq N,\ u_n + v_n \geq A$.
Ainsi, $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
- (u_n) est minorée à partir d'un certain rang donc il existe $m > 0$ et $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N_1,\ u_n \geq m$.
Soit $A \in \mathbb{R}$. Par définition de la limite, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N_2,\ v_n \geq \dfrac{|A|}{m}$.
Par produit, on obtient : $\forall n \geq \max(N_1, N_2),\ u_n v_n \geq |A| \geq A$.
Donc $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$.

□

Proposition : Inverse

- Si (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ et (v_n) converge vers $l' \in \mathbb{R}^*$, $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est définie à partir d'un certain rang et converge vers $\dfrac{l}{l'}$.
- Si $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, alors $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ est définie à partir d'un certain rang et converge vers 0.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et est strictement positif (resp. strictement négatif) à partir d'un certain rang, alors $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ est définie à partir d'un certain rang et diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Démonstration.

- Comme $(|v_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|l'|>0$ et $\dfrac{|l'|}{2}<|l'|$, $(|v_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par un réel $\dfrac{|l'|}{2}>0$ à partir d'un certain

  Soit $n\geq N$, on a $|v_n|\geq\dfrac{|l'|}{2}>0$ donc $v_n\neq 0$, et $\dfrac{u_n}{v_n}$ existe.

  De plus :
$$\left|\frac{u_n}{v_n}-\frac{l}{l'}\right|=\left|\frac{u_n l'-v_n l}{l' v_n}\right|=\frac{|u_n l'-ll'+ll'-v_n l|}{|l'|\times|v_n|}\leq 2\left(\frac{|u_n-l|\times|l'|+|v_n-l'|\times|l|}{|l'|^2}\right)$$

  Or, d'après les résultats précédents, $\left(2\left(\dfrac{|u_n-l|\times|l'|+|v_n-l'|\times|l|}{|l'|^2}\right)\right)$ converge vers 0. donc $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{l}{l'}$.

- Comme $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, elle est minorée par un réel strictement positif à partir d'un certain rang N_1.

  Ainsi, on a :$\forall n\geq N_1,\ u_n\neq 0$. Donc pour tout $n\geq N_1$, $\dfrac{1}{u_n}$ est bien défini.

  Soit $\epsilon>0$. Par définition de la limite, il existe $N_2\in\mathbb{N}$ tel que : $\forall n\geq N_2$, $|u_n|\geq\dfrac{1}{\epsilon}$. On a alors : $\forall n\geq\max(N_1,N_2)$, $\left|\dfrac{1}{u_n}\right|\leq\epsilon$.

  On a montré que $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ converge vers 0.

- Par hypothèse, il existe $N_1\in\mathbb{N}$ tel que : $\forall n\geq N_1$, $u_n>0$. Ainsi, pour tout $n\geq N_1$, $\dfrac{1}{u_n}$ est bien défini.

  Soit $A\in\mathbb{R}$.

  Par définition de la limite, il existe $N_2\in\mathbb{N}$ tel que : $\forall n\geq N_2$, $|u_n|\leq\dfrac{1}{|A|+1}$.

  Soit $n\geq\max(N_1,N_2)$, on a :
$$\frac{1}{u_n}=\frac{1}{|u_n|}\geq|A|+1\geq A.$$

  Ainsi : $\forall n\geq\max(N_1,N_2)$, $\dfrac{1}{u_n}\geq A$. Ainsi on a montré que $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

□

Les tableaux ci-dessous résument les opérations sur les limites connues.
Soient (u_n) et (v_n) des suites à valeurs réelles. Soient $\lambda, l, l' \in \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathbf{u_n}+\mathbf{v_n})$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	forme indéterminée
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$	$-\infty$	forme indéterminée	$-\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda\mathbf{u_n})$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
$\lambda > 0$	λl	$+\infty$	$-\infty$
$\lambda < 0$	λl	$-\infty$	$+\infty$
$\lambda = 0$	0	0	0

$\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathbf{u_n}.\mathbf{v_n})$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \neq 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l' \neq 0$	$l.l'$	0	$+\infty$ si $l' > 0$ $-\infty$ si $l' < 0$	$-\infty$ si $l' > 0$ $+\infty$ si $l' < 0$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$	0	0	forme indéterminée	forme indéterminée
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$	$+\infty$ si $l > 0$ $-\infty$ si $l < 0$	forme indéterminée	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$	$-\infty$ si $l > 0$ $+\infty$ si $l < 0$	forme indéterminée	$-\infty$	$+\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\mathbf{u_n}}{\mathbf{v_n}}$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \neq 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l' \neq 0$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$ si $l' > 0$ $-\infty$ si $l' < 0$	$-\infty$ si $l' > 0$ $+\infty$ si $l' < 0$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$	$\pm\infty(*)$	forme indéterminée	$\pm\infty(*)$	$\pm\infty(*)$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$	0	0	forme indéterminée	forme indéterminée
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$	0	0	forme indéterminée	forme indéterminée

$(*)$ La règle des signes donne le signe de la limite du quotient.

2.3 Passage à la limite des inégalités larges

Proposition

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes, vers l et l'. Soient m et M deux réels.
Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors $l \leq l'$.
En particulier, si $u_n \leq M$ à partir d'un certain rang alors $l \leq M$.
si $m \leq v_n$ à partir d'un certain rang alors $m \leq l'$.

Démonstration. Par l'absurde. Supposons $l > l'$, on pose alors $\epsilon = \frac{l-l'}{3} > 0$. Par définition de la limite, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_1 \quad \Longrightarrow \quad |u_n - l| \leq \epsilon$$

et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \geq N_1 \quad \Longrightarrow \quad |v_n - l'| \leq \epsilon$$

De plus, il existe également $N_3 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N_3,\ u_n \leq v_n.$$

Posons $N = \max(N_1, N_2, N_3)$. Soit $n \geq N$, on a : $l - \epsilon \leq u_n \leq v_n \leq l' + \epsilon$.
Ainsi, $l - l' \leq 2\epsilon = \frac{2}{3}(l-l')$. Donc $1 \leq \frac{2}{3}$ car $l \neq l'$. Absurde.
Ainsi $l \leq l'$. □

Remarque : Les inégalités strictes deviennent larges en passant à la limite.
Exemple : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n+1} > 0$, mais on n'a pas $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} > 0$.

3 Théorèmes d'existence de limites

3.1 Existence et inégalité

Théorème Théorème de convergence par encadrement

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites vérifiant :

- $\forall n \geq N,\ u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang
- Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite l

Alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.

Démonstration. D'après le premier point, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N,\ u_n \leq v_n \leq w_n$.
Soit $\epsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe $(N_1, N_2) \in \mathbb{N}^2$ tels que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_1 & \Longrightarrow \quad |u_n - l| \leq \epsilon \\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_2, & \Longrightarrow \quad |w_n - l| \leq \epsilon \end{cases}$$

Posons $N_3 = \max(N_1, N_2, N)$.
Soit $n \geq N_3$, on a : $-\epsilon \leq u_n - l \leq \epsilon$, $-\epsilon \leq w_n - l \leq \epsilon$.
Ainsi, $-\epsilon \leq u_n - l \leq v_n - l \leq w_n - l \leq \epsilon$.
Donc : $\forall n \geq N_3$, $|v_n - l| \leq \epsilon$.
On a donc montré que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. □

Remarque : Il faut bien comprendre la différence de nature qu'il y a entre le théorème de convergence par encadrement et la proposition de passage à la limite dans les inégalités.

- Lors d'un passage à la limite dans une inégalité, toutes les suites intervenant sont déjà supposés convergentes.
- Dans le théorème de convergence par encadrement, la suite que l'on encadre n'est pas supposée convergente, c'est dans la conclusion du théorème qu'on obtient sa convergence.

Théorème de divergence par minoration ou majoration

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

1. Si $\begin{cases} u_n \leq v_n \text{ à partir d'un certain rang} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \end{cases}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
2. Si $\begin{cases} u_n \leq v_n \text{ à partir d'un certain rang} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \end{cases}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration. Montrons le point 1. (la preuve du second étant analogue).
Soit $A \in \mathbb{R}$. Par définition de la limite, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$, tel que : $\forall n \geq N_1,\ u_n \geq A$.
Posons $N_2 = \max(N, N_1)$, on a : $\forall n \geq N_2,\ v_n \geq A$. La suite (v_n) tend donc vers $+\infty$. □

Exemple : Posons : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.
Soit $n \in \mathbb{N}*$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$, on a : $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$.
En sommant pour k allant de 1 à n, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Or, $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$. Donc par théorème de minoration, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = +\infty$.

3.2 Théorème de la limite monotone

Théorème de la limite monotone

- Toute suite (u_n) croissante et majorée de réels converge. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup(\{u_n | n \in \mathbb{N}\})$
  Toute suite croissante non-majorée de réels diverge vers $+\infty$.
- Toute suite décroissante et minorée de réels converge. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \inf(\{u_n | n \in \mathbb{N}\})$
  Toute suite décroissante et non-minorée de réels diverge vers $-\infty$.

Démonstration. 1. (a) Supposons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ majorée. Posons $A = \{u_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$. A est non vide car contient u_0, et majoré (car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ majorée). Ainsi A admet une borne supérieure, notée L.
Soit $\epsilon > 0$. Par caractérisation de la borne supérieure, il existe $x \in A$ tel que $L-\epsilon < x$. Or, $x \in A$, donc il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $x = u_N$. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a : $\forall n \geq N,\ L-\epsilon < u_N \leq u_n \leq L$ (car L majore A).
Ainsi : $\forall n \geq N,\ |u_n - L| \leq \epsilon$.
On a montré que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L.

(b) Supposons maintenant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non majorée. On a donc :

$$\text{non } (\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M) \quad \text{c'est à dire} \quad (\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ u_n > M)$$

Soit $A > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > A$. Puisque la suite (u_n) est croissante, on en déduit que :

$$\forall n \geq N,\ u_n \geq u_N > A.$$

On a montré que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

□

Remarque : Ce théorème permet de démontrer que (u_n) converge sans déterminer explicitement sa limite. Il est particulièrement adapté aux suites définies de manière implicite. On peut ensuite noter l la limite et raisonner sur celle-ci en passant à la limite dans des inégalités larges par exemple.

3.3 Suites récurrentes

Proposition Convergence de (u_n)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $J \subset I$ un intervalle stable par f et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 \in J \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.
Si f est continue sur J et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in J$ alors $f(l) = l$. On dit que l est un point fixe de f.

Démonstration. Voir chapitre continuité. □

4 Suites adjacentes

Définition

On dit que deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante
- $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Théorème des suites adjacentes

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes, avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante. Alors :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite l ;
- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq l \leq v_n$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$, $(v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) = (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n) \leq 0$, donc la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Comme elle converge vers 0, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n - u_n \geq 0$.
En effet : Soit $n \in \mathbb{N}$: $\forall p \geq n,\ v_n - u_n \geq v_p - u_p$. En faisant tendre p vers l'infini, on obtient : $u_n - v_n \geq 0$.
Donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$.
Par croissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et décroissance de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$.
Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par v_0 et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par u_0.
D'après le théorème de la limite monotone, ces deux suites convergent. Notons l_1 la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l_2 la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Par opérations sur les limites, $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l_2 - l_1$. Puis, par unicité de la limite, $l_2 - l_1 = 0$, donc $l_1 = l_2$.
- Comme (u_n) est croissante et converge vers l_1, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq l_1$.
De même, par décroissance de (v_n) et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l_1$, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ l_1 \leq v_n$.
Ainsi, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq l_1 \leq v_n$.

□

Remarque : On a : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq l - u_n \leq v_n - u_n$. u_n constitue donc une valeur approchée de l à $v_n - u_n$ près.
Exemple :

- Soit $x \in \mathbb{R}$, les approximations décimales par défaut et par excès de x, définies par :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{E(10^n x)}{10^n} \text{ et } v_n = \frac{E(10^n x)+1}{10^n}$$
forment deux suites adjacentes convergeant vers x.

  - Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{10^{n+1}}\left(\lfloor 10^{n+1}x \rfloor - 10\lfloor 10^n x\rfloor\right)$. Or, par définition de la partie entière, on sait que :
  $$\lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1$$
  Donc $10\lfloor 10^n x\rfloor \leq 10^{n+1}x < 10\lfloor 10^n x\rfloor + 10 \qquad (1)$.
  Or, $10\lfloor 10^n x\rfloor \in \mathbb{Z}$ donc $\lfloor 10^{n+1}x\rfloor \geq 10\lfloor 10^n x\rfloor$.
  On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n > 0$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
  - Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{10^{n+1}}\left(E(10^{n+1}x) + 1 - 10E(10^n x) - 10\right)$. D'après (1) et par définition de la fonction partie entière, on a :
  $$E(10^{n+1}x) \leq 10^{n+1}x < 10E(10^n x) + 10$$
  D'où : $\lfloor 10^{n+1}x\rfloor < 10\lfloor 10^n x\rfloor + 10$.
  Donc : $\lfloor 10^{n+1}x\rfloor \leq 10\lfloor 10^n x\rfloor + 9$ car $\lfloor 10^{n+1}x\rfloor,\ 10\lfloor 10^n x\rfloor$.
  On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n \leq 0$ donc (v_n) est décroissante.
  - Enfin, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n - u_n = \dfrac{1}{10^n}$. Donc $(u_n - v_n)$ converge vers 0.

  Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes. Ainsi, ces deux suites convergent vers la même limite que l'on note l.
  De plus : $\forall n \in \mathbb{N}, E(10^n x) \leq 10^n x < E(10^n x) + 1$.
  Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{E(10^n x)}{10^n} \leq x < \dfrac{E(10^n x)+1}{10^n}$.
  Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq x \leq v_n$.
  En passant à la limite, on obtient : $l \leq x \leq l$ d'où $l = x$.

5 Suites extraites

Définition

On appelle suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou encore sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite de la forme $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.

Remarque : Extraire une suite revient donc à sélectionner des termes dans l'ordre croissant des indices.
Exemple :

- $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{n^2})_{n\geq 1}$, $(u_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appelées suites extraites paire et impaire.

Remarque : On vérifie que si $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante, alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \phi(n) \geq n$.
Montrons cette propriété par récurrence.

- Pour $n = 0$, on sait que $\phi(0) \in \mathbb{N}$ donc $\phi(0) \geq 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\phi(n) \geq n$.
Comme ϕ est strictement croissante, on a $\phi(n+1) > \phi(n) \geq n$ par hypothèse de récurrence.
Or, $\phi(n+1), n \in \mathbb{N}$ donc $\phi(n+1) \geq n+1$.
- On a donc prouvé par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \phi(n) \geq n$.

Théorème

Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite l (finie ou infinie), alors toutes ses suites extraites convergent la même limite l.

Démonstration. Faisons la preuve dans le cas où $l \in \mathbb{R}$. Le raisonnement est identique dans le cas de limites infinies.
Soit $\epsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |u_n - l| \leq \epsilon.$$
Ainsi, on a : $\forall n \geq N, \phi(n) \geq n \geq N$ d'après la remarque qui précède.
Ainsi : $\forall n \geq N, |u_{\phi(n)} - l| \leq \epsilon$.
Ainsi $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. $\square$

Méthode

Pour montrer qu'une suite diverge, on se sert souvent de la contraposée de ce théorème : si on trouve deux suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui n'ont pas la même limite, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exemple :

- La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge : ses suites extraites paires $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et impaires $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 1 et -1.
- La suite des $v_n = \cos(n\pi/2)$ diverge. En effet, (v_{4n}) est la suite constante égale à 1 et (v_{4n+2}) est la suite constante égale à -1. Ainsi, ces deux suites extraites n'ont pas même limite. On aurait aussi pu choisir (v_{2n+1}) qui est la suite nulle.

Proposition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Si les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite finie $l\in\mathbb{R}$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers l.

Démonstration. L'idée est simple : si tous les termes pairs d'une suite sont proches d'un nombre réel fixe l à partir d'un certain rang, et que tous les termes impairs sont aussi proches de cette même valeur l à partir d'un certain (éventuellement autre) rang alors tous les termes de la suite initiale sont proches de la valeur l.

Soit $\epsilon > 0$. Puisque (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent,

$$\begin{cases} \exists n_0\in\mathbb{N},\ \ \forall k\in\mathbb{N},\ \ (k\geq n_0)\Rightarrow(|u_{2k}-l|\leq\epsilon) \\ \exists n_1\in\mathbb{N},\ \ \forall k\in\mathbb{N},\ \ (k\geq n_1)\Rightarrow(|u_{2k+1}-l|\leq\epsilon) \end{cases}$$

Soit $N = \max(2n_0, 2n_1+1)$. Soit $n\in\mathbb{N}$ un entier tel que $n\geq N$. L'entier naturel n est pair ou impair.

- Cas n°1 : n est pair. Dans ce cas, il existe un entier naturel $k\in\mathbb{N}$ tel que $n=2k$. Puisque $n\geq N\geq 2n_0$, on en déduit que $k\geq n_0$. Et donc
$$|u_{2k}-l| = |u_n - l| \leq \epsilon$$
- Cas n°2 : n impair. Dans ce cas, il existe un entier naturel $k\in\mathbb{N}$ tel que $n=2k+1$. Puisque $n\geq N\geq 2n_1+1$, on en déduit que $k\geq n_1$. Et donc
$$|u_{2k+1}-l| = |u_n - l| \leq \epsilon$$

Dans tous les cas, on a $|u_n - l|\leq\epsilon$.
Par suite (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

□

6 Brève extension aux suites complexes

Définition

Une suite complexe u est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$: $u:\begin{array}{ccc}\mathbb{N} & \to & \mathbb{C}\\ n & \mapsto & u(n)\end{array}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u(n)$ est noté u_n. La suite u est alors notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n).
L'ensemble des suites complexes est noté $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

On peut étendre aux suites complexes toutes les propriétés des suites réelles qui ne font pas référence à la relation d'ordre naturelle sur $\mathbb{R}$ $(\leq)$. Les notions de suites croissantes, décroissantes, majorées, minorées, ... ne pourront plus être utilisées pour les suites complexes !
Les propriétés faisant intervenir la valeur absolue seront étendues en la remplaçant pas le module.

Définition

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est bornée ssi :

$$\exists M\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ |u_n|\leq M.$$

Définition

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{C}$ ssi :
$$\forall \epsilon > 0\,,\, \exists N \in \mathbb{N}\,,\, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies |u_n - l| \leq \epsilon.$$
- On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ converge ssi il existe un réel $l \in \mathbb{C}$ tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge sinon.

Remarque : Il n'existe pas de limite infinie.
Exemple : Soit $q \in \mathbb{C}$ tel que $|q| < 1$ alors $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Proposition

Toute suite complexe convergente est bornée.

Démonstration. Même démonstration que pour les suites réelles en remplaçant les valeurs absolues par des modules. □

Proposition Opérations sur les limites

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes qui convergent respectivement vers $l \in \mathbb{C}$ et $l' \in \mathbb{C}$.

- Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda l + \mu l'$.
- $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ll'.
- Si (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ et (v_n) converge vers $l' \in \mathbb{R}^*$, $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie à partir d'un certain rang et converge vers $\frac{l}{l'}$.

Démonstration. Même démonstration que pour les suites réelles en remplaçant les valeurs absolues par des modules. □

Proposition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{C}$.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l si et seulement si $(\mathrm{Re}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $\mathrm{Re}(l)$ et $\mathrm{Im}(l)$.

Démonstration.

- Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. On a :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |\mathrm{Re}(u_n) - \mathrm{Re}(l)| = |\mathrm{Re}(u_n - l)| \leq |u_n - l|$$
Or, $(|u_n - l)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 donc $(\mathrm{Re}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathrm{Re}(l)$.
De même, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |\mathrm{Im}(u_n) - \mathrm{Im}(l)| = |\mathrm{Im}(u_n - l)| \leq |u_n - l|.$$
Donc $(\mathrm{Im}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathrm{Im}(l)$.

- Supposons que $(\mathrm{Re}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et notons a et b leurs limites respectives.
Posons $l = a + ib$. D'après l'inégalité triangulaire, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - l| = |\mathrm{Re}(u_n) + i\mathrm{Im}(u_n) - a - ib| \leq |\mathrm{Re}(u_n) - a| + |\mathrm{Im}(u_n) - b|.$$
Comme $(|\mathrm{Re}(u_n) - a| + |\mathrm{Im}(u_n) - b|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

□

Corollaire

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l si et seulement si $(\overline{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\overline{l}$.

Démonstration. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l si et seulement si $\mathrm{Re}(u_n)$ converge vers $\mathrm{Re}(l)$ et $\mathrm{Im}(u_n)$ converge vers $\mathrm{Im}(l)$ □

si et seulement si $\mathrm{Re}(u_n)$ converge vers $\mathrm{Re}(l)$ et $-\mathrm{Im}(u_n)$ converge vers $-\mathrm{Im}(l)$

si et seulement si $\mathrm{Re}(\overline{u_n})$ converge vers $\mathrm{Re}(\overline{l})$ et $\mathrm{Im}(\overline{u_n})$ converge vers $\mathrm{Im}(\overline{l})$

si et seulement si $\overline{u_n}$ converge vers $\overline{l}$

En résumé :

Ce qui reste valable :	**Ce qui n'est plus valable :**
Résultats sur les suites arithmétiques/géométriques/arithmético-géométriques	Monotonie
Résultats sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2	Majorant/minorant
Unicité de la limite	Limites infinies
Une suite convergente est bornée	Passage à la limite dans les inégalités larges
Opérations sur les limites	Théorème de convergence par encadrement
Résultats sur les suites extraites	Théorèmes de divergence par minoration/majoration
	Théorème de la limite monotone
	Suites adjacentes