Chapitre 21 : Intégration

Sauf mention contraire, a et b désignerons deux réels tels que $a < b$.

1 Fonctions en escalier

1.1 Fonctions en escalier

Définition

On appelle **subdivision** s d'un segment $[a, b]$ toute famille $s = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ de nombres réels tels que :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

On appelle pas de la subdivision s l'écart maximal entre deux points consécutifs de la subdivision :

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} (x_{k+1} - x_k)$$

Exemple : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$.

La suite finie $(a_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une subdivision de $[a, b]$ de pas $\dfrac{b-a}{n}$. Cette subdivision est dite régulière i.e que l'écart entre deux point consécutifs est constant (et égal au pas) :

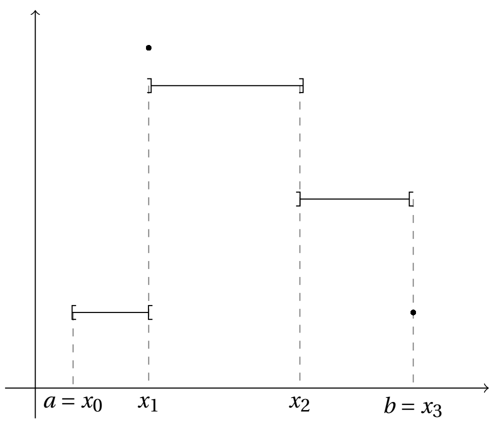
$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ a_{k+1} - a_k = \frac{b-a}{n}$$

Définition

Soit $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction. La fonction ϕ est dite **en escalier** sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $s = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, ϕ soit constante sur $]x_k, x_{k+1}[$.
Une telle subdivision s est dite adaptée à la fonction en escalier ϕ.
On note $\mathscr{E}([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

Exemple :

- Une fonction constante est en escalier sur tout segment $[a, b]$. Toute subdivision de $[a, b]$ est adaptée à la fonction constante..
- La fonction partie entière est en escalier sur tout segment $[a, b]$. La subdivision de $[a, b]$ constituée de a, b et de tous les entiers du segment $[a, b]$ est une subdivision adaptée à la fonction partie entière.
- La fonction $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ suivante est en escalier et la subdivision $s = (a, x_1, x_2, b)$ est adaptée à ϕ.



Proposition

$\mathscr{E}([a, b], \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}([a, b], \mathbb{R})$, donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Ainsi, $\mathscr{E}([a, b], \mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire.

Démonstration. $\mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})$ est non vide car contient la fonction constante égale à 0.
Soient $(\phi,\psi)\in\mathscr{E}([a,b],R)^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. Quitte à faire l'union d'une subdivision de $[a,b]$ adaptée à ϕ et d'une subdivision de $[a,b]$ adaptée à ψ, on peut considérer une subdivision $u=(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ adaptée à ϕ et ψ. Pour tout $i\in[\![0,n-1]\!]$, il existe γ_i, $\delta_i\in\mathbb{R}$ tels que : $\forall x\in]c_i,c_{i+1}[,\ \phi(x)=\gamma_i$ et $\psi(x)=\delta_i$.
Soit $i\in[\![1,n]\!]$, on a : $\forall x\in]c_i,c_{i+1}[,\ (\lambda\phi+\mu\psi)(x)=\lambda\phi(x)+\mu\psi(x)=\lambda\gamma_i+\mu\delta_i$. Ainsi, $\lambda\phi+\mu\psi$ est constante sur $]c_i,c_{i+1}[$. Donc $\lambda\phi+\mu\psi$ est en escaliers et $\mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}([a,b],\mathbb{R})$. □

1.2 Intégrale des fonctions en escalier

Définition

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction en escalier sur $[a,b]$ et $s=(x_0,x_1,\dots,x_n)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f.
Pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, notons y_k la valeur prise pas f sur $]x_k,x_{k+1}[$.
On appelle **intégrale de f sur** $[a,b]$ le réel noté $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ ou $\displaystyle\int_a^b f$ ou $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ défini par :

$$\int_{[a,b]} f=\sum_{k=0}^{n-1} y_k(x_{k+1}-x_k).$$

Remarque :

- L'intégrale ne dépend pas des valeurs de f aux points de la subdivision.
- Le réel définissant l'intégrale de f est indépendant du choix de la subdivision de $[a,b]$ adaptée à f.

Démonstration.

- Montrons que la définition de l'intégrale est invariante si on ajoute un nombre fini de points à une subdivision $s=(x_0,\dots,x_n)$ de $[a,b]$ adaptée à f.
  On reprend les notations de la définition. On a donc : $\displaystyle\int_{[a,b]} f=\sum_{k=0}^{n-1} y_k(x_{k+1}-x_k)$.
  Considérons $s'=(x_0,\dots,x_m,y,x_{m+1},\dots,x_n)$. s' est subdivision de $]a,b[$ adaptée à f. On a : $\forall x\in]x_m,x_{m+1}[,\ f(x)=y_k$.
  De plus : $y\in]x_m,x_{m+1}[$ donc : $\forall x\in]x_m,y[,\ f(x)=y_k$ et $\forall x\in]y,x_{m+1}[,\ f(x)=y_k$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m-1} y_k(x_{k+1}-x_k)+y_m(y-x_m)+y_m(x_{m+1}-y)+\sum_{k=m+1}^{n-1} y_k(x_{k+1}-x_k)&=\sum_{k=0}^{m-1} y_k(x_{k+1}-x_k)+y_m(x_{m+1}-x_m)+\sum_{k=m+1}^{n-1} y_k(x_{k+1}-x_k)\\&=\sum_{k=0}^{n-1} y_k(x_{k+1}-x_k)\\&=\int_{[a,b]} f\end{aligned}$$

- Montrons désormais que l'intégrale ne dépend pas de la subdivision choisie
  Soient s et t deux subdivisions de $[a,b]$ adaptées à f. D'après ce qui précède, le calcul de $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ conduit au même résultat sur les subdivisions s et $s\cup t$, sur t et $s\cup t$, et donc sur les subdivisions s et t.

□

Interprétation géométrique :
L'intégrale de ϕ entre a et b représente l'aire algébrique du domaine compris entre la courbe représentative de ϕ, l'axe des abscisses, les droites $x=a$ et $x=b$, en comptant positivement les parties situées au dessus de l'axe (Ox) et négativement celles qui sont en dessous.
Ainsi, l'intégrale de φ est la différence R_+-R_- où :

- R_+ est la somme des aires des rectangles situés au dessus de l'axe Ox ;
- R_- est la somme des aires des rectangles situés en dessous de l'axe Ox.

Exemple :

- On a $\displaystyle\int_{[a,b]} k=k(b-a)$ avec $k\in\mathbb{R}$.
- Calculer $\int_{[0,n]} E$ où E désigne la fonction partie entière et $n\in\mathbb{N}^*$.
  On a $\forall k\in[\![0,n-1]\!],\ \forall x\in]k,k+1[,\ E(x)=k$.
  On a donc : $\displaystyle\int_{[0,n]} E=\sum_{k=0}^{n-1} k=\frac{n(n-1)}{2}$.

Proposition

1. Linéarité de l'intégrale : $\forall \varphi, \psi \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})$, $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $\displaystyle\int_{[a,b]} (\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda \int_{[a,b]} \varphi + \mu \int_{[a,b]} \psi$.
2. Relation de Chasles : $\forall \varphi \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})$, $\forall c \in]a,b[$, $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi = \int_{[a,c]} \varphi + \int_{[c,b]} \varphi$.
3. Positivité de l'intégrale : $\forall \varphi \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})$, $\quad \varphi \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \displaystyle\int_{[a,b]} \varphi \geq 0$.
4. Croissance de l'intégrale : $\forall \varphi, \psi \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})$, $\quad \varphi \geq \psi \quad \Longrightarrow \quad \displaystyle\int_{[a,b]} \varphi \geq \int_{[a,b]} \psi$.

Démonstration.

1. Soient $\varphi, \psi \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
   Quitte à faire l'union d'une subdivision de $[a,b]$ adaptée à ϕ et d'une subdivision de $[a,b]$ adaptée à ψ, on considère une subdivision $s = (a_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ de $[a,b]$ adaptée à ϕ et ψ. Il existe donc $(k_0, ..., k_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ et $(l_0, ..., l_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tels que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$:
   $$\forall x \in]a_i, a_{i+1}[,\ \phi(x) = k_i \text{ et } \psi(x) = l_i.$$
   Ainsi, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $\lambda\phi + \mu\psi$ est constante sur $]a_i, a_{i+1}[$ et on a : $\forall x \in]a_i, a_{i+1}[$, $(\lambda\phi + \mu\psi)(x) = \lambda k_i + \mu l_i$.
   Ainsi, s est adaptée à $\lambda\phi + \mu\psi$ et on a :
   $$\int_a^b (\lambda\phi + \mu\psi) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)(\lambda k_i + \mu l_i) = \lambda \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) k_i + \mu \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) l_i = \lambda \int_a^b \phi + \mu \int_a^b \psi.$$
2. Soit $\varphi \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})$, soit $c \in]a,b[$.
   Soit $s = (a_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à φ. Quitte à rajouter un point, on peut supposer que c est un point de s.
   Soit alors $p \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $a_p = c$.
   Il existe $(k_0, ..., k_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$: $\forall x \in]a_i, a_{i+1}[$, $\phi(x) = k_i$.
   De plus, $(a_i)_{i \in [\![0,p]\!]}$ est une subdivision de $[a,c]$ adaptée à $\phi_{|[a,c]}$ et $(a_i)_{i \in [\![p,n]\!]}$ est une subdivision de $[c,b]$ adaptée à $\phi_{|[c,b]}$.
   Ainsi
   $$\int_a^c \phi + \int_c^b \phi = \sum_{i=0}^{p-1} (a_{i+1} - a_i) k_i + \sum_{i=p}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) k_i = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{+1} - a_i) k_i = \int_a^b \phi$$
3. Soit $\varphi \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})$. Supposons $\phi \geq 0$.
   Soit $s = (a_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ une subdivision adaptée à ϕ.
   Il existe donc $(k_0, ..., k_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$: $\forall x \in]a_i, a_{i+1}[$, $\phi(x) = k_i$.
   Or, ϕ est positive donc : $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $k_i \geq 0$.
   Ainsi, $\displaystyle\int_a^b \phi = \sum_{i=0}^{n-1} k_i (a_{i+1} - a_i) \geq 0$.
4. Soit $\varphi, \psi \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})$. Supposons $\phi \geq \psi$. Alors : $\varphi - \psi \geq 0$. Par positivité de l'intégrale, on a : $\displaystyle\int_{[a,b]} (\phi - \psi) \geq 0$. Puis par linéarité de l'intégrale, on a $\displaystyle\int_{[a,b]} \phi - \int_{[a,b]} \psi \geq 0$. Donc $\displaystyle\int_{[a,b]} \phi \geq \int_{[a,b]} \psi$.

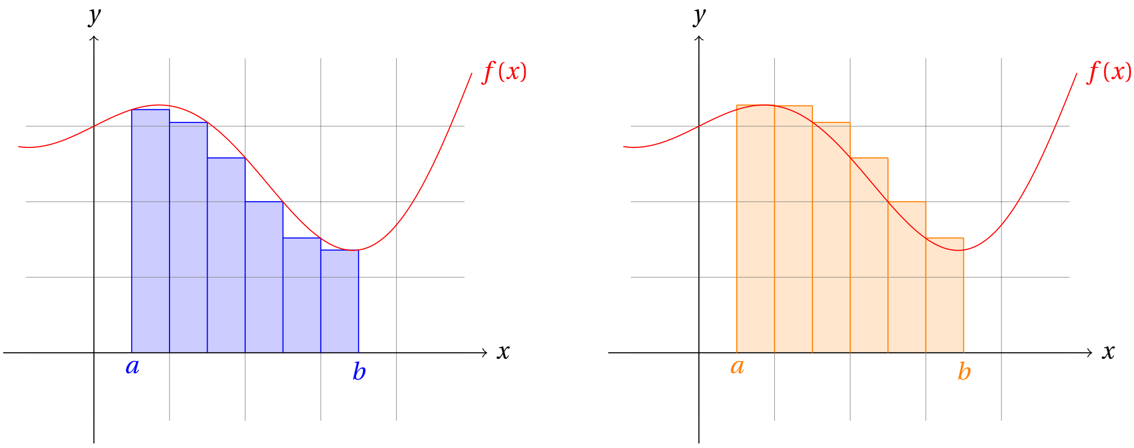
□

2 Intégrale des fonctions continues

2.1 Construction

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Si φ, ψ sont des fonctions en escalier sur $[a,b]$ telles que $\varphi \leq f \leq \psi$, alors les nombres $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi$ et $\displaystyle\int_{[a,b]} \psi$ donnent intuitivement des approximations par défaut et excès de l'aire algébrique du domaine compris entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses, les droites $x = a$ et $x = b$



Théorème (approximation en escalier des fonctions continues)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.
Pour tout $\epsilon > 0$, il existe deux fonctions φ, $\psi \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})$ telles que :

$$\varphi \leq f \leq \psi \quad \text{et} \quad \psi - \varphi \leq \epsilon.$$

Démonstration. Admis □

Théorème

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors

- $\left\{ \int_a^b \varphi \mid \varphi \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R}) \text{ et } \varphi \leq f \right\}$ admet une borne supérieure que l'on note $I^-_{[a,b]}(f)$
- $\left\{ \int_a^b \psi \mid \psi \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R}) \text{ et } f \leq \psi \right\}$ admet une borne inférieure que l'on note $I^+_{[a,b]}(f)$

Et on a :

$$I^-_{[a,b]}(f) = I^+_{[a,b]}(f).$$

Démonstration. La fonction f étant continue sur le segment $[a,b]$, elle est bornée et atteint ses bornes sur $[a,b]$: posons $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$.
Pour faciliter la lecture, on définit $\mathscr{E}^-_{[a,b]}(f) = \{\varphi \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R}),\ \varphi \leq f\}$ et $\mathscr{E}^+_{[a,b]}(f) = \{\psi \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R}),\ f \leq \psi\}$.
De même on définit

$$A^-_{[a,b]}(f) = \left\{ \int_a^b \varphi \mid \varphi \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R}) \text{ et } \varphi \leq f \right\} = \left\{ \int_a^b \varphi \mid \varphi \in \mathscr{E}^-_{[a,b]}(f) \right\},$$

et

$$A^+_{[a,b]}(f) = \left\{ \int_a^b \psi \mid \psi \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R}) \text{ et } f \leq \psi \right\} = \left\{ \int_a^b \psi \mid \psi \in \mathscr{E}^+_{[a,b]}(f) \right\}.$$

Dans un premier temps, montrons que la borne supérieure de $A^-_{[a,b]}(f)$ et la borne inférieure de $A^+_{[a,b]}(f)$ existent.

- L'ensemble $\mathscr{E}^-_{[a,b]}(f)$ est non vide puisqu'il contient la fonction constante égale à m. Ainsi, $A^-_{[a,b]}(f)$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $\varphi \in \mathscr{E}^-_{[a,b]}(f)$, on a : $\forall x \in [a,b]$, $\varphi(x) \leq f(x) \leq M$.
  Donc, $\int_{[a,b]} \varphi \leq \int_{[a,b]} M = M(b-a)$, par croissance de l'intégrale sur les fonctions en escalier.
  Par suite, $A^-_{[a,b]}(f)$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et majorée par $M(b-a)$. Elle possède donc une borne supérieure que l'on note $I^-_{[a,b]}$.

- De même, $A^+_{[a,b]}(f)$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et minorée par $m(b-a)$. Elle possède donc une borne inférieure que l'on note $I^+_{[a,b]}$.

Montrons maintenant que $I^-_{[a,b]}(f) = I^+_{[a,b]}(f)$.

- Soit $\psi \in \mathscr{E}^+_{[a,b]}(f)$. Pour tout $\varphi \in \mathscr{E}^-_{[a,b]}(f)$, on a $\varphi \leq \psi$ donc par croissance de l'intégrale sur les fonctions en escalier, on a $\int_a^b \varphi \leq \int_a^b \psi$. Et donc
$$\forall \varphi \in \mathscr{E}^-_{[a,b]}(f),\ \int_a^b \varphi \leq \int_a^b \psi.$$
Ainsi, $\int_{[a,b]} \psi$ est un majorant de $A^-_{[a,b]}(f)$, sa borne supérieure $I^-_{[a,b]}(f)$ est donc plus petite que $\int_{[a,b]} \psi$.
D'où,
$$I^-_{[a,b]}(f) \leq \int_a^b \psi.$$
Or, ceci est vraie pour tout $\psi \in \mathscr{E}^+_{[a,b]}(f)$. On obtient donc :
$$\forall \psi \in \mathscr{E}^+_{[a,b]}(f), \quad I^-_{[a,b]}(f) \leq \int_{[a,b]} \psi.$$
$I^-_{[a,b]}(f)$ est ainsi un minorant de $A^+_{[a,b]}(f)$, et $I^+_{[a,b]}(f)$ est le plus grand des minorants de $A^+_{[a,b]}(f)$.
Donc :
$$I^-_{[a,b]}(f) \leq I^+_{[a,b]}(f).$$
- Soit $\epsilon > 0$. Il existe $\varphi \in \mathscr{E}^-_{[a,b]}(f)$ et $\psi \in \mathscr{E}^+_{[a,b]}(f)$ telles que : $\forall x \in [a,b]$, $\psi(x) - \varphi(x) \leq \epsilon$. On a alors :
$$\int_{[a,b]} \psi - \int_{[a,b]} \varphi \leq \epsilon(b-a)$$
par croissance de l'intégrale sur les fonctions en escalier.
Or par définition de $I^-_{[a,b]}(f)$ et $I^+_{[a,b]}(f)$, on a :
$$\int_{[a,b]} \varphi \leq I^-_{[a,b]}(f) \leq I^+_{[a,b]}(f) \leq \int_{[a,b]} \psi.$$
D'où $0 \leq I^+_{[a,b]}(f) - I^-_{[a,b]}(f) \leq \int_{[a,b]} \psi - \int_{[a,b]} \varphi \leq \epsilon(b-a)$.
Ainsi :
$$\forall \epsilon > 0,\ I^+_{[a,b]}(f) - I^-_{[a,b]}(f) \leq \epsilon(b-a).$$
Donc $I^+_{[a,b]}(f) \leq I^-_{[a,b]}(f)$.
On obtient finalement $I^-_{[a,b]}(f) = I^+_{[a,b]}(f)$.

□

Définition

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle **intégrale de** f **sur** $[a,b]$ le réel noté $\int_{[a,b]} f$ ou $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(x)dx$ définit par :
$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f = \int_a^b f(x)dx = I^-_{[a,b]}(f) = I^+_{[a,b]}(f).$$

Remarque : Les fonctions constantes sont les seules fonctions à la fois continues et en escalier. Si f est une fonction constante, les deux définitions coïncident car $f \in \mathscr{E}^-_{[a,b]}(f)$ et $f \in \mathscr{E}^+_{[a,b]}(f)$.

Interprétation géométrique :
$\int_{[a,b]} f$ est l'aire algébrique du domaine du plan situé entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses, les droites $x = a$ et $x = b$.

Théorème

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.
Il deux suites $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi_n \leq f \leq \psi_n \quad \text{et} \quad \int_a^b \varphi_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f,\ \int_a^b \psi_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f.$$

Démonstration. Découle de la caractérisation séquentielle de la borne supérieure. □

2.2 Propriétés de l'intégrale

Proposition : Linéarité de l'intégrale

Soient $f, g \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$$

Démonstration. On sait que f est une fonction continue sur le segment $[a,b]$. Il existe donc quatre suites de fonctions en escalier $(\varphi_n), (\psi_n), (u_n), (v_n) \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi_n \le f \le \psi_n \quad \text{et} \quad \int_{[a,b]} \varphi_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{[a,b]} f \ \text{ et } \int_{[a,b]} \psi_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{[a,b]} f,$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \le f \le v_n \quad \text{et} \quad \int_{[a,b]} u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{[a,b]} g \ \text{ et } \int_{[a,b]} v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{[a,b]} g.$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $\varphi_n + u_n,\ \psi_n + v_n \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})$ et $\varphi_n + u_n \le f + g \le \psi_n + v_n$.
  Ainsi :
  $$\int_{[a,b]} (\varphi_n + u_n) \le \sup\left(\left\{\int_a^b \varphi \mid \varphi \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R}) \text{ et } \varphi \le f + g\right\}\right) = \int_{[a,b]} (f+g),$$
  et :
  $$\int_{[a,b]} (f+g) = \inf\left(\left\{\int_a^b \psi \mid \psi \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R}) \text{ et } f + g \le \psi\right\}\right) \le \int_{[a,b]} (\psi_n + v_n).$$
  Or, par linéarité de l'intégrale pour les fonctions en escalier, on a :
  $$\int_{[a,b]} (\varphi_n + u_n) = \int_{[a,b]} \varphi_n + \int_{[a,b]} u_n$$
  et :
  $$\int_{[a,b]} (\psi_n + v_n) = \int_{[a,b]} \psi_n + \int_{[a,b]} v_n.$$
  Donc :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_{[a,b]} \varphi_n + \int_{[a,b]} u_n \le \int_{[a,b]} (f+g) \le \int_{[a,b]} \psi_n + \int_{[a,b]} v_n \qquad (*).$$
  De plus :
  $$\int_{[a,b]} \varphi_n + \int_{[a,b]} u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g,$$
  et :
  $$\int_{[a,b]} \psi_n + \int_{[a,b]} v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g.$$
  En passant à la limite dans $(*)$, on obtient :
  $$\int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g \le \int_{[a,b]} (f+g) \le \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g.$$
  Ainsi :
  $$\int_{[a,b]} (f+g) = \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g.$$
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$.
  Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $\lambda\varphi_n, \lambda\psi_n \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})$ et : $\lambda\varphi_n \le \lambda f \le \lambda\psi_n$ car $\lambda \ge 0$.
  Ainsi :
  $$\int_{[a,b]} (\lambda\varphi_n) \le \sup\left(\left\{\int_a^b \varphi \mid \varphi \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R}) \text{ et } \varphi \le \lambda f\right\}\right) = \int_{[a,b]} (\lambda f),$$
  et :
  $$\int_{[a,b]} (\lambda f) = \inf\left(\left\{\int_a^b \psi \mid \psi \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R}) \text{ et } \lambda f \le \psi\right\}\right) \le \int_{[a,b]} (\lambda\psi_n).$$
  Or, par linéarité de l'intégrale pour les fonctions en escalier, on a :
  $$\int_{[a,b]} (\lambda\varphi_n) = \lambda \int_{[a,b]} \varphi_n$$

et :

$$\int_{[a,b]} (\lambda\psi_n) = \lambda \int_{[a,b]} \psi_n.$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda \int_{[a,b]} \varphi_n \leq \int_{[a,b]} (\lambda f) \leq \lambda \int_{[a,b]} \psi_n \qquad (**).$$

De plus :

$$\lambda \int_{[a,b]} \varphi_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \int_{[a,b]} f$$

et :

$$\lambda \int_{[a,b]} \psi_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \int_{[a,b]} f.$$

En passant à la limite dans $(**)$, on obtient :

$$\lambda \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} (\lambda f) \leq \lambda \int_{[a,b]} f.$$

Ainsi :

$$\int_{[a,b]} (\lambda f) = \lambda \int_{[a,b]} f.$$

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$.
  Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $\lambda\varphi_n, \lambda\psi_n \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})$ et : $\lambda\psi_n \leq \lambda f \leq \lambda\varphi_n \quad$ car $\lambda \leq 0$.
  Ainsi :

$$\int_{[a,b]} (\lambda\psi_n) \leq \sup\left(\left\{\int_a^b \varphi \mid \varphi \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R}) \text{ et } \varphi \leq \lambda f\right\}\right) = \int_{[a,b]} (\lambda f),$$

et :

$$\int_{[a,b]} (\lambda f) = \inf\left(\left\{\int_a^b \psi \mid \psi \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R}) \text{ et } \lambda f \leq \psi\right\}\right) \leq \int_{[a,b]} (\lambda\varphi_n).$$

Or, par linéarité de l'intégrale pour les fonctions en escalier, on a :

$$\int_{[a,b]} (\lambda\varphi_n) = \lambda \int_{[a,b]} \varphi_n$$

et :

$$\int_{[a,b]} (\lambda\psi_n + v_n) = \lambda \int_{[a,b]} \psi_n.$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda \int_{[a,b]} \psi_n \leq \int_{[a,b]} (\lambda f) \leq \lambda \int_{[a,b]} \varphi_n \qquad (***).$$

De plus :

$$\lambda \int_{[a,b]} \varphi_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \int_{[a,b]} f$$

et :

$$\lambda \int_{[a,b]} \psi_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \int_{[a,b]} f.$$

En passant à la limite dans $(***)$, on obtient :

$$\lambda \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} (\lambda f) \leq \lambda \int_{[a,b]} f.$$

Ainsi :

$$\int_{[a,b]} (\lambda f) = \lambda \int_{[a,b]} f.$$

□

Proposition : Relation de Chasles

Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ et $c \in]a,b[$. Alors

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Démonstration. Il existe $(\varphi_n^1), (\psi_n^1) \in \mathscr{E}([a,c],\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ et $(\varphi_n^2), (\psi_n^2) \in \mathscr{E}([c,b],\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi_n^1 \le f \le \psi_n^1 \quad \text{sur } [a,c] \quad \text{et} \quad \int_{[a,c]} \varphi_n^1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{[a,c]} f,\quad \int_{[a,c]} \psi_n^1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{[a,b]} f$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi_n^2 \le f \le \psi_n^2 \quad \text{sur } [c,b] \quad \text{et} \quad \int_{[c,b]} \varphi_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{[c,b]} f,\quad \int_{[c,b]} \psi_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{[c,b]} f$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\varphi_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \varphi_n^1(x) & \text{si } x \in [a,c] \\ \varphi_n^2(x) & \text{si } x \in]c,b] \end{array} \right. \end{array} \right.$ et $\psi_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \psi_n^1(x) & \text{si } x \in [a,c] \\ \psi_n^2(x) & \text{si } x \in]c,b] \end{array} \right. \end{array} \right.$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. En concaténant une subdivision de $[a,c]$ adaptée à φ_n^1 et une subdivision de $[c,b]$ adaptée à φ_n^2 on obtient une subdivision de $[a,b]$ adaptée à φ_n. On a donc $\varphi_n \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})$. De même, $\psi_n \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})$. Par définition,

$$\varphi_n^1 \le f \le \psi_n^1 \quad \text{sur } [a,c] \text{ et } \varphi_n^2 \le f \le \psi_n^2 \quad \text{sur } [c,b],$$

donc $\varphi_n \le f \le \psi_n \quad \text{sur } [a,b]$.
Ainsi :

$$\int_{[a,b]} \varphi_n \le \sup\left(\left\{\int_a^b \varphi \mid \varphi \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R}) \text{ et } \varphi \le f\right\}\right) = \int_{[a,b]} f,$$

et :

$$\int_{[a,b]} f = \inf\left(\left\{\int_a^b \psi \mid \psi \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R}) \text{ et } f+g \le \psi\right\}\right) \le \int_{[a,b]} \psi_n.$$

Donc

$$\int_{[a,b]} \varphi_n \le \int_{[a,b]} f \le \int_{[a,b]} \psi_n.$$

Or, d'après la relation de Chasles pour les fonctions en escalier, on a :

$$\int_{[a,b]} \varphi_n = \int_{[a,c]} \varphi_n + \int_{[c,b]} \varphi_n = \int_{[a,c]} \varphi_n^1 + \int_{[c,b]} \varphi_n^2$$

et :

$$\int_{[a,b]} \psi_n = \int_{[a,c]} \psi_n + \int_{[c,b]} \psi_n = \int_{[a,c]} \psi_n^1 + \int_{[c,b]} \psi_n^2.$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_{[a,c]} \varphi_n^1 + \int_{[c,b]} \varphi_n^2 \le \int_{[a,b]} f \le \int_{[a,c]} \psi_n^1 + \int_{[c,b]} \psi_n^2 \qquad (*).$$

De plus :

$$\int_{[a,c]} \varphi_n^1 + \int_{[c,b]} \varphi_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f,$$

et :

$$\int_{[a,c]} \psi_n^1 + \int_{[c,b]} \psi_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

En passant à la limite dans $(*)$, on obtient :

$$\int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f \le \int_{[a,b]} f \le \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

Ainsi :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

□

Proposition

Soient $f, g \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

- Si $f \ge 0$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f \ge 0$ **(positivité de l'intégrale)**
- Si $f \le g$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f \le \int_a^b g$ **(croissance de l'intégrale)**
- $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$;
- Soit m et M des constantes telles que $m \le f \le M$ sur $[a,b]$ alors $m(b-a) \le \displaystyle\int_a^b f \le M(b-a)$

Démonstration. • On a : $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\varphi = 0$ est une fonction en escalier sur $[a,b]$ telle que $\varphi \leq f$. Par définition de l'intégrale de f sur $[a,b]$, on en déduit que

$$\int_{[a,b]} f \geq \int_{[a,b]} \varphi = 0.$$

- On applique le point précédent à la fonction $g - f \geq 0$: $\int_{[a,b]} (g-f)$ d'où $\int_{[a,b]} g - \int_{[a,b]} f \geq 0$ par linéarité de l'intégrale. Donc $\int_{[a,b]} g \geq \int_{[a,b]} f$.
- On a : $-|f| \leq f \leq |f|$. D'où par croissance de l'intégrale :

$$-\int_{[a,b]} |f| \leq \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} |f|.$$

  Ainsi, on obtient $\left|\int_{[a,b]} f\right| \leq \int_{[a,b]} |f|$.
- Découle de la croissance de l'intégrale.

□

Définition

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. On appelle valeur moyenne de f le réel $\mu = \dfrac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f$.

Remarque : La valeur moyenne est la constante μ qui vérifie $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mu$.

Proposition

Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ une fonction continue sur $[a,b]$ de signe constant.
Alors $\int_a^b f = 0$ si et seulement si f est nulle sur $[a,b]$.

Démonstration. $\Leftarrow$ Si f est nulle, son intégrale est nulle.

$\Rightarrow$ Quitte à changer f en $-f$, on suppose $f \geq 0$.
Supposons $\int_{[a,b]} f = 0$.
Raisonnons par l'absurde.
Supposons que f n'est pas la fonction nulle sur $[a,b]$. Alors, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) \neq 0$. De plus, $f \geq 0$ donc $f(c) > 0$.
De plus, f est continue sur $[a,b]$ donc continue en c.
Posons $\epsilon = \dfrac{f(c)}{2} > 0$.
Il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in [a,b],\ |x-c| \leq \eta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(c)| \leq \epsilon.$$

Ainsi :

$$\forall x \in [a,b],\ |x-c| \leq \eta \quad \Longrightarrow \quad \frac{f(c)}{2} \leq f(x).$$

- Cas 1 : $c = a$.
  Posons $\eta' = \min(\eta, b-a) > 0$. On a : $\forall x \in [a, a+\eta']$, $|x-c| \leq \eta$ et $f(x) \geq \dfrac{f(c)}{2}$.
  Ainsi, par la relation de Chasles, on obtient :

$$\int_a^b f = \int_a^{a+\eta'} f + \int_{a+\eta'}^b f.$$

  Or, par positivité de l'intégrale, $\int_{a+\eta'}^b f \geq 0$.
  Donc :

$$\int_a^b f \geq \int_a^{a+\eta'} f \geq \int_a^{a+\eta'} \frac{f(c)}{2} = \eta' \frac{f(c)}{2} > 0.$$

  Absurde.

- Cas 2 : $c=b$.
Posons $\eta'=\min(\eta,b-a)>0$. On a : $\forall x\in[b-\eta',b]$, $|x-c|\leq\eta$ et $f(x)\geq\dfrac{f(c)}{2}$.
Ainsi, par la relation de Chasles, on obtient :
$$\int_a^b f=\int_a^{b-\eta'}f+\int_{b-\eta'}^b f.$$
Or, par positivité de l'intégrale, $\displaystyle\int_a^{b-\eta'}f\geq 0$.
Donc :
$$\int_a^b f\geq\int_{b-\eta'}^b f\geq\int_{b-\eta'}^b\frac{f(c)}{2}=\eta'\frac{f(c)}{2}>0.$$
Absurde.
- Cas 3 : $c\in]a,b[$.
Posons $\eta'=\min(\eta,c-a,b-c)>0$. On a : $\forall x\in[c-\eta',c+\eta']$, $|x-c|\leq\eta$ et $f(x)\geq\dfrac{f(c)}{2}$.
Ainsi, par la relation de Chasles, on obtient :
$$\int_a^b f=\int_a^{c-\eta'}f+\int_{c-\eta'}^{c+\eta'}f+\int_{c+\eta'}^b f.$$
Or, par positivité de l'intégrale, $\displaystyle\int_a^{c-\eta'}f\geq 0$, $\int_{c+\eta'}^b f\geq 0$.
Donc :
$$\int_a^b f\geq\int_{c-\eta'}^{c+\eta'}f\geq\int_{c-\eta'}^{c+\eta'}\frac{f(c)}{2}=\eta' f(c)>0.$$
Absurde.

Ainsi, $f=0$.

□

Remarque : Si f n'est pas supposée continue, le résultat est faux : par exemple $f:\begin{array}{ccc}[0,1] & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \begin{cases}0 & \text{si } x\in]0,1[\\ 1 & \text{si } x\in\{0,1\}\end{cases}\end{array}$ est positive, non nulle mais $\displaystyle\int_0^1 f=0$ (on a une fonction en escalier).

Notation : Soient a et b deux réels quelconques (en particulier on ne suppose plus nécessairement $a<b$).
Soit f une fonction continue entre a et b.
Si $a\leq b$, on définit le réel $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ par :

- si $a=b$, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=0$;
- si $b<a$, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f$.

Remarque :

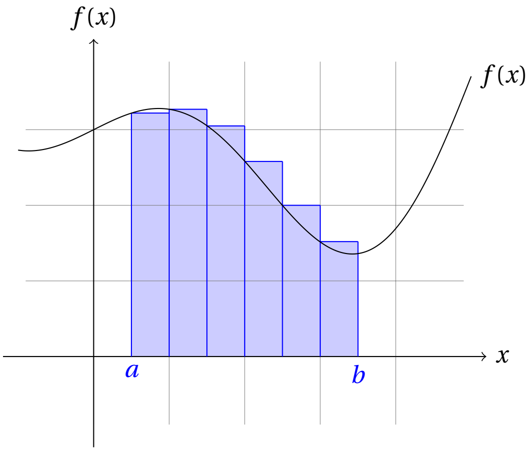
- La relation de Chasles est alors vraie pour a, b et c quelconques.
- La linéarité reste vraie pour a et b quelconque.
- ⚠La positivité, la croissance et leurs corollaires **ne sont pas vraies** pour des bornes dans le "mauvais sens".
- On a pour tout $a,b\in\mathbb{R}$ (quelconque) : $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\left|\int_a^b|f(x)|dx\right|$

3 Sommes de Riemann

Définition

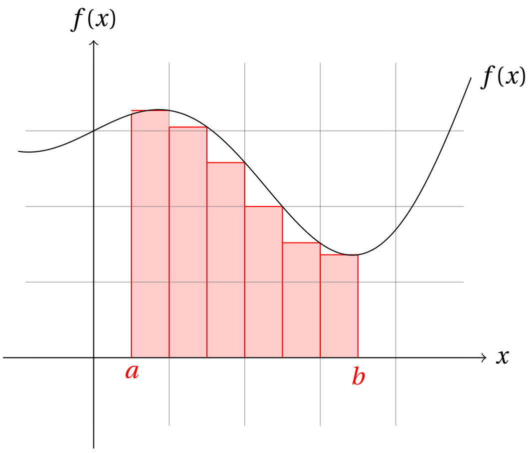
Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue et $n\in\mathbb{N}^*$. La somme :
$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$
est appelée **somme de Riemann d'ordre n** associée à f.

Remarque : La somme de Riemann (à gauche) introduit dans la définition précédente est l'intégrale de la fonction en escalier φ qui pour tout $0 \leq k \leq n-1$ vaut $f(x_k)$ sur $]x_k, x_{k+1}[$ où l'on a posé : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$.



Sur le dessin, la somme de Riemann correspond à l'aire en bleu.

Remarque : La somme $\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ est également appelée somme de Riemann.



Théorème

Si f est continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f$$

Démonstration. On fait la preuve dans le cas où f est lipschitzienne. Notons L la constante de lipschitz associée à f sur $[a,b]$. On a alors : $(x,y) \in [a,b]^2$, $|f(x)-f(y)| \leq L|x-y|$. Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ alors f' est continue sur le segment $[a,b]$ donc f' est bornée. On pose $L = \max\limits_{x\in[a,b]} \left(|f'(x)|\right)$. D'après l'inégalité des accroissements finis, f est L-lispchitzienne.

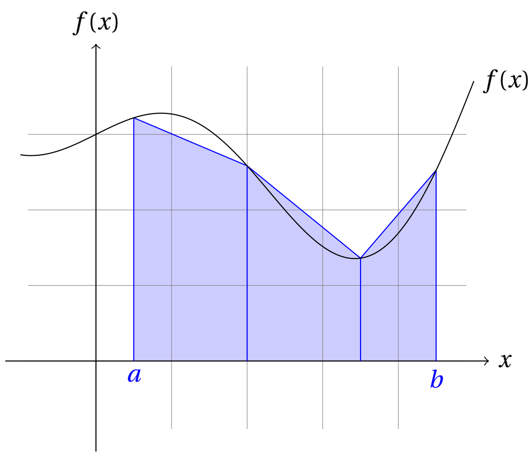
Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on pose : $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ pour $k \in [\![0,n]\!]$. On a :

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{b-a}{n} f(a_k)\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(a_k)\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) - f(a_k)\,dx\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) - f(a_k)\,dx\right| \text{ par inégalité triangulaire} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} \left|f(x) - f(a_k)\right| dx \quad \forall k \in [\![0,n-1]\!],\ a_k \leq a_{k+1} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} L|x-a_k|dx \text{ car } f \text{ est lipschitzienne et pas croissance de lintégrale} \\
&\leq L\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} (x-a_k)dx \\
&\leq L\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(a_{k+1}-a_k)^2}{2} \\
&\leq L\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(a_{k+1}-a_k)^2}{2} \\
&\leq L\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^2}{2n^2} \\
&\leq L\frac{(b-a)^2}{2n}
\end{aligned}$$

Comme enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} L\dfrac{(b-a)^2}{2n} = 0$, on obtient par théorème d'encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\right) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$. □

Remarque :

- On a de même :
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f$$
- On reconnait la méthode des rectangles. En particulier, ce résultat signifie qu'une somme de Riemann constitue une bonne approximation de l'intégrale pourvu que le pas soit petit.
  De plus, l'approximation obtenue est en $O\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
- On peut améliorer la précision en utilisant la méthode des trapèzes. On approche alors $\displaystyle\int_a^b f$ par
$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}$$



  On obtient alors une approximation en $O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$.

4 Extension aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Définition

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue.
On appelle **intégrale de f sur** $[a,b]$ le nombre complexe défini par :

$$\int_a^b f = \int_a^b \mathrm{Re}(f) + i\int_a^b \mathrm{Im}(f).$$

Remarque : Les principales propriétés (linéarité, relation de Chasles, $\left|\int_{[a,b]} f\right| \leq \int_{[a,b]} |f|$, intégration par parties, formule de changement de variable) sont conservées. En revanche, les propriétés liées à l'ordre (croissance et positivité) n'ont plus de sens dans le cas complexe.

5 Calcul intégral

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Théorème fondamental de l'analyse

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue et $a \in I$. Alors, la fonction : $F : \left\{\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)dt \end{array}\right.$ est dérivable sur I et a pour dérivée la fonction f.
Plus précisément, F est l'unique primitive de f s'annulant en a.

Démonstration. La fonction F est définie pour tout $x \in I$ car f est continue sur $[a,x]$ ou $[x,a]$ (selon que $x \geq a$ ou $x \leq a$). Soit $x_0 \in I$, montrons que F est dérivable en x_0 et que $F'(x_0) = f(x_0)$. On a pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$:

$$\begin{aligned}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0) &= \frac{1}{x-x_0}\left(\int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt\right) - f(x_0) \\ &= \frac{1}{x-x_0}\left(\int_a^x f(t)dt + \int_{x_0}^a f(t)dt\right) - \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(x_0)dt \\ &= \frac{1}{x-x_0}\left(\int_{x_0}^x f(t)dt - \int_{x_0}^x f(x_0)dt\right) \quad \text{d'après la relation de Chasles} \\ &= \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)-f(x_0)dt\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| \leq \frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^x |f(t)-f(x_0)|dt\right| \quad (1)$$

Soit $\epsilon > 0$. Par continuité de f en x_0, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall t \in I,\ |t-x_0| \leq \eta \Rightarrow |f(t)-f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Soit $x \in I$ tel que $|x-x_0| \leq \eta$, on a pour tout $t \in [x_0,x]$ (ou $[x,x_0]$), $|t-x_0| \leq |x-x_0| \leq \eta$ donc $|f(t)-f(x_0)| \leq \varepsilon$ et en reportant dans (1)

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| \leq \frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^x \varepsilon dt\right| \leq \varepsilon\frac{|x-x_0|}{|x-x_0|} \leq \varepsilon.$$

Ainsi on a montré que $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$. Donc F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$. Puisque c'est vrai pour tout $x_0 \in I$, on en déduit finalement que F est dérivable sur I et que $F' = f$.
Unicité : Reste à montrer que F est l'unique primitive de f qui s'annule en a. Si G satisfait aussi ces propriétés, alors on a vu qu'il existe $C \in \mathbb{K}$ tel que $F = G + C$. En évaluant en $x = a$, on obtient $C = 0$, et donc $F = G$. □

Corollaire

- Toute fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet des primitives sur I.
- Si f est une fonction continue sur I et F une primitive de f sur I alors :

$$\forall a, b \in I, \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

- Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$.

Démonstration.
- Le premier point découle directement du théorème précédent.
- Posons $G : x \mapsto F(x) - F(a)$. G est dérivable sur I comme combinaison linéaire de fonctions qui le sont et pour $x \in I$, $G'(x) = F'(x) = f(x)$. Ainsi, G est encore une primitive de F et $G(a) = 0$. D'après l'unicité du théorème précédent, $G(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ pour $x \in I$. En prenant la valeur en b, on a le résultat.
- Le troisième point découle directement du deuxième.

□

Remarque : Une primitive d'une fonction continue est de classe $\mathscr{C}^1$ car F est dérivable et $F' = f$ continue.

5.1 Calcul d'intégrales

Proposition : Intégration par parties

Soient $u : I \to \mathbb{K}$ et $v; I \to \mathbb{K}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

$$\forall a, b \in I, \int_a^b u'(t)v(t)dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

Proposition : Changement de variable

Soient I, J deux intervalles non vides non réduits à un point. Soient $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur I. et $\varphi : J \to I$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur J. Alors :

$$\forall a, b \in J, \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

On dit qu'on a effectué le changement de variable $x = \varphi(t)$.

Exemple : Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^3}dx$. On pourra poser $x = \tan(t)$.

On effectue un changement de variable $x = \tan(t)$ et $dx = (1+\tan(t)^2)dt$. Ainsi : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\tan(t)^2)^2}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4(t)dt$.

Soit $t \in \mathbb{R}$, linéarisons $\cos^4(t)$:

$$\begin{aligned}\cos^4(t) &= \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^4 \\ &= \frac{e^{4it}+4e^{2it}+6+4e^{-2it}+e^{-4it}}{16} \\ &= \frac{2\cos(4t)+8\cos(2t)+6}{16} \\ &= \frac{1}{8}\cos(4t)+\frac{1}{2}\cos(2t)+\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

Ainsi, $I = \left[\frac{1}{32}\sin(4t)+\frac{1}{4}\sin(2t)+\frac{3}{8}t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}+\frac{3\pi}{32}$.

6 Formules de Taylor

Dans toute cette section I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème Formule de Taylor avec reste intégral au point a à l'ordre n

Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $f : I \to \mathbb{K}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I, soit $a \in I$.
On a :

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété :
$\mathscr{P}(n)$: « Pour tout $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I,\mathbb{K})$ et pour tout $(x,a) \in I^2$, on a $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$ ».
Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

- Pour $n = 0$, soit f est $\mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})$. Soit $(x,a) \in I^2$. On a :

$$\sum_{k=0}^{0} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^0}{0!} f'(t)dt = f(a) + \int_a^x f'(t)dt = f(a) + (f(x) - f(a)) = f(x)$$

  donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie.
  Soit $f \in \mathscr{C}^{n+2}(I,\mathbb{K})$, soient $x, a \in I$. On a $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I,\mathbb{K})$ donc par hypothèse de récurrence, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

  On effectue l'intégration par parties :

$$\begin{array}{lcl} u(t) = f^{(n+1)}(t) & \text{et} & v'(t) = \dfrac{(x-t)^n}{n!} \\ u'(t) = f^{(n+2)}(t), & \text{et} & v(t) = -\dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \end{array}.$$

  u et v sont bien $\mathscr{C}^1$ sur I. On a alors :

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt &= \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_a^x - \int_a^x -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt \\ &= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt. \end{aligned}$$

  On en déduit :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt \end{aligned}$$

  et $\mathscr{P}(n+1)$ est donc prouvé.

- En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

□

Exemple : Montrons que : $\forall x \in [0,\pi/2],\ x - \frac{x^3}{6} \le \sin(x) \le x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.
On applique la formule de Taylor avec reste intégral à sinus à l'ordre 4 entre 0 et $x \in [0,\pi/2]$.

On commence par remarquer que donc $\sin' = \cos$, $\sin^{(2)} = -\sin$, $\sin^{(3)} = -\cos$, $\sin^{(4)} = \sin$ puis $\sin^{(5)} = \cos$.
Ainsi, $\sin'(0) = \cos(0) = 1$, $\sin^{(2)}(0) = -\sin(0) = 0$, $\sin^{(3)}(0) = -\cos(0) = -1$, $\sin^{(4)}(0) = \sin(0) = 0$. On obtient alors :

$$\sin(x) - (x - x^3/6) = \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!} \cos(t)dt.$$

Or :

$$\forall t \in [0,x] \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ 0 \le \cos(t) \le 1.$$

Donc :

$$\forall t \in [0,x],\ 0 \le \cos(t)\frac{(x-t)^4}{4!} \le \frac{(x-t)^4}{4!} \quad \text{car } (x-t)^4 \ge 0.$$

Ainsi :

$$0 \le \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!}\cos(t)dt \le \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!}dt = \left[-\frac{(x-t)^5}{5!}\right]_0^x = \frac{x^5}{120}.$$

D'où : $\forall x \in [0,\pi/2],\ x - \frac{x^3}{6} \le \sin(x) \le x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

Remarque : Contrairement à la formule de Taylor-Young, qui donne un énoncé local au voisinage de a, cette formule est globale (car vraie pour tout $x \in I$).

Proposition : Formule de Taylor-Young

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ de classe $\mathscr{C}^n$ et soit $a \in I$. On a :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n).$$

Démonstration.

- Cas $n = 0$. On veut alors prouver que $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a)+o(1)$. Comme f est continue en a, on a $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Donc $\lim_{x\to a}(f(x)-f(a)) = 0$. D'où : $f(x)-f(a) \underset{x\to a}{=} o(1)$. Ainsi : $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) = o(1)$.
- Supposons $n \ge 1$.
  Puisque f est de classe $\mathscr{C}^n$, on a par la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\forall x \in I,\ f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt.$$

En retranchant le terme en $k = n$, on obtient :

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt - \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

On remarque que $\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt = \frac{(x-a)^n}{n!}$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) &= \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt - \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a)dt \\ &= \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}(f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a))dt \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \le \left| \int_a^x \frac{|x-t|^{n-1}}{(n-1)!} \left|(f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a))\right| dt \right|$$

Soit $\epsilon > 0$. Par continuité de $f^{(n)}$ en a, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall t \in I,\ |t-a| \le \eta \implies \left|f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)\right| \le \varepsilon.$$

Soit $x \in I$ tel que $|x-a| \le \eta$. On a : $\forall t \in [x,a]$ (ou $[a,x]$), $|t-a| \le |x-a| \le \eta$. Donc : $\forall t \in [x,a]$ (ou $[a,x]$), $\left|f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)\right| \le \epsilon$.

on obtient :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \le \left| \int_a^x \epsilon \frac{|x-t|^{n-1}}{(n-1)!}dt \right| = \epsilon \left| \pm \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt \right| = \epsilon \frac{|x-a|^n}{n!} \le \epsilon |x-a|^n$$

Ainsi :

$$\frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)}{(x-a)^n} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0.$$

Donc : $f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \underset{x\to a}{=} o((x-a)^n)$.

□

Remarque : C'est grâce à cette formule qu'on avait obtenu les développements limités des fonctions exp, cos, sin, $x \mapsto (1+x)^\alpha$ notamment.