Feuille d'exercices 10 : Ensembles usuels de nombres

1 Nombres entiers, décimaux, rationnels

Exercice 1. Soit $(a,b) \in \mathbb{Q}_+^2$ tels que $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$ et $\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$. Montrer que $\sqrt{a}+\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 2. Soient $x \in \mathbb{R}$, $a,b,c,d \in \mathbb{Q}$ tels que $x \notin \mathbb{Q}$ et $ad-bc \neq 0$. Montrer que $\dfrac{ax+b}{cx+d} \notin \mathbb{Q}$.

2 Borne supérieure

Exercice 3. Déterminer, si elles existent, les bornes supérieure et inférieure des ensembles suivants :

a. $\left\{\dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ b. $\left\{\dfrac{n+5}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ c. $\left\{(-1)^n\left(1-\dfrac{1}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ d. $\left\{\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{p},\ (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}$

Exercice 4. 1. Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que, si $A \subset B$, alors $\sup(A) \leq \sup(B)$.
   (b) Montrer que $A \cup B$ admet une borne supérieure et déterminer $\sup(A \cup B)$
   (c) Montrer que $A \cap B$ est majorée. Peut-on déterminer $\sup(A \cap B)$?

Exercice 5. Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$, soit $a \in \mathbb{R}$. On note :

$$A+B = \{x+y, x \in A, y \in B\},$$

Montrer que $\sup(A+B) = \sup(A)+\sup(B)$.

Exercice 6. Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$, soit $a \in \mathbb{R}$. On note :

$$-A = \{-x, x \in A\},$$

$$AB = \{xy, x \in A, y \in B\}.$$

1. Montrer que $\sup(-A) = -\inf(A)$.
2. A-t-on $\sup(AB) = \sup(A)\sup(B)$?

Exercice 7. Soit A une partie non vide bornée de $\mathbb{R}$.
1. Montrer que l'ensemble $\{|x-y|, x,y \in A\}$ possède une borne supérieure.
   On appelle ce nombre diamètre de A et on le note $\delta(A)$.
2. Montrer que $\delta(A) \leq \sup(A) - \inf(A)$.
3. Montrer que : $\forall \epsilon > 0,\ \exists (x,y) \in A^2,\ |x-y| > \sup(A) - \inf(A) - \epsilon$
4. Conclure

Exercice 8. Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction croissante.
1. Montrer que $\{x \in [a,b]\ ,\ f(x) \geq x\}$ admet une borne supérieure s dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f(s) \geq s$.
3. Montrer que s est un point fixe de f c'est à dire que $f(s) = s$.
4. Donner un exemple de fonction décroissante de $[0,1]$ dans $[0,1]$ sans point fixe.

3 Partie entière

Exercice 9. Montrer que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$$

Exercice 10. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\lfloor \sqrt{x} \rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor.$$

Exercice 11. Montrer que :

$$\forall x,y \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor + \lfloor x+y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$$

Exercice 12. 1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor.$$

Indication : Appliquer le résultat précédent en remplaçant x par $x + \frac{k}{n}$, puis effectuer la division euclidienne de $\lfloor nx \rfloor$ par n : $\lfloor nx \rfloor = nq + r$ avec $r \in [\![0, n-1]\!]$ et $q \in \mathbb{N}$.