Corrigé de la feuille d'exercices 8

Exercice 1. 1. Raisonnons par double inclusion.

- Montrons que : $]-\infty,0] \subset \{x\in\mathbb{R}, \forall\epsilon>0, x<\epsilon\}$.
Soit $x\in]-\infty,0]$, on a : $x\in\mathbb{R}$.
Soit $\epsilon>0$, on a : $x\leq 0<\epsilon$. Donc $x<\epsilon$.
Ainsi : $\forall\epsilon>0$, $x<\epsilon$. Donc :
$$]-\infty,0] \subset \{x\in\mathbb{R}, \forall\epsilon>0, x<\epsilon\}\}$$
- Montrons que $\{x\in\mathbb{R}, \forall\epsilon>0, x<\epsilon\} \subset]-\infty,0]$.
Soit $x\in\mathbb{R}$ tel que : $\forall\epsilon>0, x<\epsilon$.
Par l'absurde. Supposons $x\in\mathbb{R}_+^*$ et posons $\epsilon_0=\dfrac{x}{2}$.
On a alors : $\epsilon_0>0$ et $\epsilon_0<x$ (car $x>0$), ce qui est absurde.
Ainsi, $x\in]-\infty,0]$.
Par conséquent, $\{x\in\mathbb{R}, \forall\epsilon>0, x<\epsilon\} \subset]-\infty,0]$.

Et finalement, $\{x\in\mathbb{R}, \forall\epsilon>0, x<\epsilon\} =]-\infty,0]$.

2. Raisonnons par double inclusion.
- On a immédiatement que $\{x\in\mathbb{R}, \exists\epsilon>0, x<\epsilon\}\subset\mathbb{R}$.
- Montrons que : $\mathbb{R}\subset\{x\in\mathbb{R}, \exists\epsilon>0, x<\epsilon\}$
Soit $x\in\mathbb{R}$. Posons, $\epsilon=|x|+1$. On a alors : $\epsilon>0$ et $\epsilon>x$.
Donc $\mathbb{R}\subset\{x\in\mathbb{R}, \exists>0, x<\epsilon\}$.

D'où $\mathbb{R}=\{x\in\mathbb{R}, \exists>0, x<\epsilon\}$

3. Raisonnons par double inclusion.
- Montrons que : $\{0\}\subset\{x\in\mathbb{R}, \forall\epsilon>0, x<\epsilon\}$.
$0\in\mathbb{R}$ et $|0|=0$.
Soit $\epsilon>0$, $|0|<\epsilon$.
Donc : $\forall\epsilon>0,\ \ x<\epsilon$.
D'où $\{0\}\subset\{x\in\mathbb{R}, \forall\epsilon>0, x<\epsilon\}\}$.
- Montrons que $\{x\in\mathbb{R}, \forall\epsilon>0, x<\epsilon\} \subset]-\infty,0]$.
Soit $x\in\mathbb{R}$ tel que : $\forall\epsilon>0, |x|<\epsilon$.
Raisonnons par l'absurde.
Supposons $x\neq 0$.
Posons $\epsilon=\dfrac{|x|}{2}$.
On a $\epsilon>0$ et $\epsilon<|x|$. Absurde.
Ainsi, $x=0$.
Par conséquent, $\{x\in\mathbb{R}, \forall\epsilon>0, x<\epsilon\}\subset\{0\}$.

Et finalement, $\{x\in\mathbb{R}, \forall\epsilon>0, x<\epsilon\}=\{0\}$.

Exercice 2. 1. Raisonnons par double implication.

- Supposons $E\subset F$. Montrons que $\mathcal{P}(E)\subset\mathcal{P}(F)$.
Soit $X\in\mathcal{P}(E)$. On a : $X\subset E\subset F$ donc $X\subset F$ d'où $X\in\mathcal{P}(F)$.
Ceci montre : $\mathcal{P}(E)\subset\mathcal{P}(F)$.
Ainsi : $E\subset F \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{P}(E)\subset\mathcal{P}(F)$.
- Réciproquement, supposons $\mathcal{P}(E)\subset\mathcal{P}(F)$. Montrons que $E\subset F$.
Soit $x\in E$.
On a : $\{x\}\in\mathcal{P}(E)\subset\mathcal{P}(F)$, donc $\{x\}\subset F$ d'où $x\in F$.
Ceci montre : $E\subset F$.
Ainsi : $\mathcal{P}(E)\subset\mathcal{P}(F) \quad\Longrightarrow\quad E\subset F$.

On a donc bien équivalence.

2. Soit $X\in\mathcal{P}(A)$,
$$\begin{aligned} X\in\mathcal{P}(E\cap F) &\iff X\subset E\cap F\\ &\iff X\subset E \text{ et } X\subset F\\ &\iff X\in\mathcal{P}(E) \text{ et } X\in\mathcal{P}(F)\\ &\iff X\in\mathcal{P}(E)\cap\mathcal{P}(F)\end{aligned}$$

On conclut donc $\mathcal{P}(E\cap F)=\mathcal{P}(E)\cap\mathcal{P}(F)$.

3. Soit $X \in \mathcal{P}(E \cup F)$, alors $X \subset E \cup F$. Donc :
   - soit $X \subset E$ donc $X \in \mathcal{P}(E)$ d'où $X \in \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$.
   - soit $X \subset F$ donc $X \in \mathcal{P}(F)$ d'où $X \in \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$.

   Ainsi, dans tous les cas, $X \in \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$. Donc : $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \cup F)$.
   La réciproque est fausse en général. En effet, si un ensemble est inclus dans une réunion $E \cup F$, cela n'implique pas, en général, que X soit dans E ou que X soit dans F. En effet, X peut contenir des éléments de E qui ne sont pas dans F et des éléments de F qui ne sont pas dans E.
   Pour montrer la non-inclusion, donnons un contre-exemple :
   $E = \{1\}$, $F = \{2\}$. On a ici : $\mathcal{P}(E \cup F) = \mathcal{P}(\{1, 2\} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$,
   $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) = \{\emptyset, \{1\}\} \cup \{\emptyset, \{2\}\} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$.
   Dans cet exemple, on n'a pas égalité entre $\mathcal{P}(E \cup F)$ et $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$.

Exercice 3. On raisonne par double implication.

- Supposons $A = B$.
  On a alors $A \cap B = A = A \cup B$.
- Réciproquement, supposons $A \cup B = A \cap B$.
  Montrons par double inclusion que $A = B$.
  - Montrons que $A \subset B$.
    Soit $x \in A$. Alors, $x \in A \cup B$ donc $x \in A \cap B$ donc $x \in B$.
    Ainsi, $A \subset B$.
  - Par symétrie entre A et B, on obtient de même $B \subset A$.

  Ainsi, $A = B$.

Finalement, on a bien prouvé que $A \cup B = A \cap B \iff A = B$.

Exercice 4. 1. On raisonne par double implication.
   - Supposons $A \cup B = B$. Montrons que $A \subset B$.
     Soit $x \in A$, alors $x \in A \cup B = B$ donc $x \in B$.
     Ainsi, $A \subset B$.
   - Réciproquement, supposons que $A \subset B$.
     Montrons par double inclusion que $A \cup B = B$.
     - On sait déjà que $B \subset A \cup B$.
     - Montrons $A \cup B \subset B$.
       Soit $x \in A \cup B$, alors $\Big(x \in A \text{ ou } x \in B\Big)$.
       * Si $x \in B$. Il n'y a rien à prouver.
       * Si $x \in A$ alors, $x \in B$ car $A \subset B$.

       Ainsi, dans tous les cas $x \in B$. Donc $A \cup B \subset B$.

     Donc par double inclusion $A \cup B = B$.

   Finalement, on a bien prouvé que $A \cup B = B \iff A \subset B$.
2. On raisonne par double implication.
   - Supposons $A \cap B = \emptyset$.
     Soit $x \in A$, on a $x \notin \emptyset$ donc $x \notin A \cap B$. Or, $x \in A$, Ainsi, $x \notin B$.
     Ainsi, $x \in C_E^B$.
     Donc $A \subset C_E^B$.
   - Supposons désormais $A \subset C_E^B$.
     Supposons qu'il existe $x \in A \cap B$. Alors, $x \in A$ donc $x \in C_E^B$. De plus, $x \in B$. Ainsi, $x \in B \cap C_E^B = \emptyset$.
     Absurde.
     Ainsi, $A \cap B = \emptyset$.

   On a finalement bien prouvé : $A \cap B = \emptyset \iff A \subset C_E^B$.
3. On raisonne par double implication.
   - Supposons $A \cup B = E$.
     Soit $x \in C_E^A$. On a $x \in E$ donc $x \in A \cup B$. Or, $x \notin A$ donc $x \in B$.
     Ainsi, $C_E^A \subset B$.
   - Supposons $C_E^A \subset B$.
     Montrons par double inclusion que $A \cup B = E$.
     - On sait déjà que $A \cup B \subset E$.

- Soit $x \in E$.
  - * si $x \in A$ alors $x \in A \cup B$.
  - * sinon $x \in C_E^A$ donc $x \in B$ d'où $x \in A \cup B$.

  Ainsi, $E \subset A \cup B$.

On a donc $E = A \cup B$.

Finalement, on a prouvé que $A \cup B = E \iff C_E^A \subset B$

4. On raisonne par double implication.
   - Supposons $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$.
     Montrons par double inclusion que $B = C$.
     - Montrons que $B \subset C$.
       Soit $x \in B$.
       - * Si $x \in A$ alors $x \in A \cap B = A \cap C$ donc $x \in C$.
       - * Si $x \notin A$, alors, $x \in A \cup B$ donc $x \in A \cup C$. Or, $x \notin A$ donc $x \in C$.
         Ainsi, $B \subset C$
     - Par symétrie entre B et C, on montre de même que $C \subset B$.

     Ainsi, $B = C$.
   - Réciproquement, si $B = C$, on a directement que $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$.

   Finalement, on a bien prouvé que : $\big(A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C \iff B = C$.
5. $$\begin{aligned} A \setminus (B \cap C) &= A \cap C_E^{B \cap C} \\ &= A \cap \left(C_E^B \cup C_E^C\right) \\ &= (A \cap C_E^B) \cup (A \cap C_E^C) \\ &= (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \end{aligned}$$

Exercice 5. 1. Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

$$\begin{aligned} A \Delta B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ &= (A \cap C_E^B) \cup (B \cap C_E^A) \\ &= \left(A \cup \left(B \cap C_E^A\right)\right) \cap \left(C_E^B \cup \left(B \cap C_E^A\right)\right) \\ &= (A \cup B) \cap (A \cup C_E^A) \cap (C_E^B \cup B) \cap (C_E^B \cup C_E^A) \\ &= (A \cup B) \cap E \cap E \cap C_E^{A \cap B} \\ &= (A \cup B) \cap C_E^{A \cap B} \\ &= (A \cup B) \setminus [A \cap B) \end{aligned}$$

2. Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

$$\begin{aligned} C_E^A \Delta C_E^B &= (C_E^A \cup C_E^B) \setminus (C_E^A \cap C_E^B) \\ &= (C_E^A \cup C_E^B) \cap C_E^{C_E^A \cap C_E^B} \\ &= C_E^{A \cap B} \cap C_E^{C_E^{A \cup B}} \\ &= C_E^{A \cap B} \cap (A \cup B) \\ &= (A \cup B) \cap C_E^{A \cap B} \\ &= (A \cup B) \setminus \{A \cap B) \\ &= A \Delta B \end{aligned}$$

3. Soient $A, B, C \in \mathcal{P}[E)$. Raisonnons par double implication.
   - Supposons que $B = C$. Alors, on a directement que $A \Delta B = A \Delta C$.
   - Supposons que $A \Delta B = A \Delta C$.
     Montrons par double inclusion que $B = C$.
     - Montrons que $B \subset C$.
       Soit $x \in B$.

* Si $x \in A$ alors $x \in A \cup B$ et $x \in A \cap B$ donc $x \notin A\Delta B$. Ainsi, $x \notin A\Delta C$.
  Or, $x \in A \cup C$. Donc $x \in A \cap C$. Ainsi, $x \in C$.
* Si $x \notin A$ alors $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$ donc $x \in A\Delta B$. Ainsi, $x \in A\Delta C$ donc $x \in A \cup C$.
  Or, $x \notin A$ ainsi, $x \in C$.

Ainsi, dans tous les cas, $x \in C$.
Donc $B \subset C$.

- Par symétrie entre B et C, on montre de même que $C \subset B$.

Ainsi, $B = C$.

On a donc montré que $A\Delta B = A\Delta C \iff B = C$.

Exercice 6. Raisonnons par analyse-synthèse.
Analyse :Supposons qu'il existe $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $X \cup A = B$.

- Montrons $A \subset B$.
  Soit $x \in A$ alors $x \in X \cup A$ donc $x \in B$ d'où $A \subset B$.
  Ainsi, si $A \not\subset B$, l'équation $X \cup A = B$ n'admet pas de solution.
- Montrons $X \subset B$.
  Soit $x \in X$ alors $x \in X \cup A$ donc $x \in B$ d'où $X \subset B$.
  Ainsi, $B \setminus A \subset X \subset B$.
- Montrons que $B \setminus A \subset X$.
  Soit $x \in B \setminus A$, alors $x \in B$ et $x \notin A$.
  Or, $B = X \cup A$ donc $x \in X \cup A$ d'où $x \in X$ ou $x \in A$. Or, $x \notin A$ donc $x \in X$.
  Ainsi, $B \setminus A \subset X$.

Synthèse : Supposons $A \subset B$. Soit $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $B \setminus A \subset X \subset B$.
Montrons par double inclusion que $A \cup X = B$.

- Montrons que $B \subset A \cup X$.
  Soit $x \in B$.
  - si $x \in A$ alors $x \in A \cup X$.
  - si $x \notin A$ alors $x \in B \setminus A$. Or, $B \setminus A \subset X$ donc $x \in X$.
    D'où $x \in A \cup X$.

  Ainsi, $B \subset A \cup X$.
- Montrons que $A \cup X \subset B$.
  Soit $x \in A \cup X$, alors $x \in A$ ou $x \in X$.
  - si $x \in A$ alors $x \in B$ car $A \subset B$.
  - si $x \in X$ alors $x \in B$ car $X \subset B$.

  Ainsi, $A \cup X \subset B$. Donc $A \cup X = B$.

Finalement, si A est inclus dans B, l'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\{X \in \mathcal{P}(E), B \setminus A \subset X \subset B\}.$$

Et si A n'est pas inclus dans B, l'équation n'admet aucun solution.

Exercice 7. Raisonnons par analyse-synthèse.
Analyse :Supposons qu'il existe $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $X \cup A = B$.

- Montrons que $B \subset A$.
  Soit $x \in B$, alors $x \in A \cap X$ donc $x \in A$.
  Ainsi, $B \subset A$. Ainsi, si $B \not\subset A$, l'équation n'admet pas de solution.
- Montrons que $B \subset X$.
  Soit $x \in B$, alors $x \in A \cap X$ donc $x \in X$.
  Ainsi, $B \subset X$.
- Montrons $X \subset B \cup C_E^A$.
  Soit $x \in X$.
  - si $x \in C_E^A$ alors $x \in B \cup C_E^A$.
  - si $x \in A$ alors $x \in X \cap A$ donc $x \in B$ d'où $x \in B \cup C_E^A$.

  Ainsi, dans tous les cas $x \in B \cup C_E^A$.
  Donc $X \subset B \cup C_E^A$.
  Ainsi, $B \subset X \subset B \cup C_E^A$.

Synthèse : Supposons $B \subset A$. Soit $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $B \subset X \subset B \cup C_E^A$.
Montrons par double inclusion que $A \cap X = B$.

- Montrons que $B \subset A \cap X$.
  Soit $x \in B$. Alors, $x \in X$ car $B \subset X$ et $x \in A$ car $B \subset A$.
  Donc $B \subset A \cap X$.
- Montrons que $A \cap X \subset B$.
  Soit $x \in A \cap X$, alors $x \in A$ et $x \in X$.
  Comme $x \in X$ alors $x \in B \cup C_E^A$ car $X \subset B \cup C_E^A$. Or, $x \in A$ donc $x \notin C_E^A$.
  Ainsi, $x \in B$.
  D'où $A \cap X \subset B$.
  On a donc $A \cap X = B$.

Finalement, si B est inclus dans A, l'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\{X \in \mathcal{P}(E), B \subset X \subset B \subset C_E^A\}.$$

Si B n'est pas inclus dans A, l'équation n'admet aucune solution.

1 Applications

Exercice 8.

$$\begin{aligned}
A \cup B = A \cap B &\iff \mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_{A\cap B} \\
&\iff \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_{A\cap B} \\
&\iff \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_{A\cap B} = 0 \\
&\iff \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B = 0 \\
&\iff \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B = 0 \quad \text{car } \mathbb{1}_A \text{ et } \mathbb{1}_B \text{ sont à valeurs dans } \{0,1\} \\
&\iff (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2 = 0 \\
&\iff \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B = 0 \\
&\iff \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \\
&\iff A = B
\end{aligned}$$

Exercice 9. 1.

$$\begin{aligned}
\begin{cases} A \cap B = A \cap C \\ A \cup B = A \cup C \end{cases} &\iff \begin{cases} \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_{A\cap C} \\ \mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_{A\cup C} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_C \\ \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_C - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_C \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_C \\ \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_C \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\
&\iff \begin{cases} \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_C \\ \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_C \end{cases} \\
&\iff \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_C \\
&\iff B = C
\end{aligned}$$

2. Montrons tout d'abord que : $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, $A \subset B \iff \mathbb{1}_1 \leq \mathbb{1}_B$.
   Soient $A, B \in \mathcal{P}[E)$.
   Raisonnons par double implication.
   * Supposons $A \subset B$.
     Soit $x \in E$.
     - si $x \in A$, alors $\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x) = 1$. Donc $\mathbb{1}_A(x) \leq \mathbb{1}_B(x)$.
     - si $x \notin A$, alors $\mathbb{1}_A(x) = 0 \leq \mathbb{1}_B(x)$.

     Ainsi, $\forall x \in E$, $\mathbb{1}_A(x) \leq \mathbb{1}_B(x)$.
     Donc $\mathbb{1}_A \leq \mathbb{A}_B$
   * Supposons $\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$. Montrons que $A \subset B$.
     Soit $x \in A$. Alors $\mathbb{1}_A(x) = 1$ donc $\mathbb{1}_B(x) \geq 1$.
     D'où $\mathbb{1}_B(x) = 1$.
     Ainsi, $x \in B$.
     D'où $A \subset B$.

Ainsi, $\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B \iff A \subset B$.

$$\left\{\begin{array}{l} A\cap B \subset A\cap C \\ A\cup B\subset A\cup C\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \mathbb{1}_{A\cap B} \leq \mathbb{1}_{A\cap C} \\ \mathbb{1}_{A\cup B} \leq \mathbb{1}_{A\cup C}\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l} \mathbb{1}_A\times\mathbb{1}_B \leq \mathbb{1}_A\times\mathbb{1}_C \\ \mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B \leq \mathbb{1}_A+\mathbb{1}_C-\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l} \mathbb{1}_A\times(\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_C) \leq 0 \\ \mathbb{1}_B-\mathbb{1}_C-\mathbb{1}_A\times(\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_C) \leq 0\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l} \mathbb{1}_B-\mathbb{1}_C \leq 0 \\ (1-\mathbb{1}_A)(\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_C) \leq 0\end{array}\right. \quad \text{car } \mathbb{1}_A \geq 0$$
$$\iff \mathbb{1}_B \leq \mathbb{1}_C \quad \text{car } 1-\mathbb{1}_A \geq 0$$
$$\iff B \subset C$$

2 Image directe - Image réciproque

Exercice 10. • Montrons que : $f^{-1}(\{1\}) = \{-1,1\}$:

- Soit $x \in f^{-1}(\{1\})$ alors, $f(x) = 1$ donc $x^2 = 1$. Ainsi,$x = \pm 1$. Donc $x \in \{-1,1\}$. Ainsi, $f^{-1}(\{1\}) \subset \{-1,1\}$.
- Soit $x \in \{-1,1\}$. Alors $x^2 = 1$ donc $f(x) \in \{1\}$. Ainsi, $x \in f^{-1}(\{1\})$. Donc $\{-1,1\} \subset f^{-1}(\{1\})$.

Ainsi, $f^{-1}(\{1\}) = \{-1,1\}$.

- Montrons que $f^{-1}([-1,4]) = [-2,2]$.
  - Soit $x \in f^{-1}([-1,4])$. Alors, $f(x) \in [-1,4]$ donc $x^2 \in [-1,4]$ D'où $x^2 \in [0,4]$. Donc $x \in [-2,2]$. Ainsi, $f^{-1}([-1,4]) \subset [-2,2]$.
  - Soit $x \in [-2,2]$. Alors $x^2 \in [0,4]$ donc $f(x) \in [0,4]$ donc $f(x) \in [-1,4]$. Ainsi, $x \in f^{-1}([-1,4])$. Ainsi, $[-2,2] \subset f^{-1}([-1,4])$.

  Donc $f^{-1}([-1,4]) = [-2,2]$.
- Montrons que $f([-1,4]) = [0,16]$
  - Soit $y \in f([-1,4])$. Alors, il existe $x \in [-1,4]$ tel que $y = f(x)$. Ainsi, $y = x^2$.
    Si $x \in [-1,0]$ alors $x^2 \in [0,1]$.
    Si $x \in [0,4]$ alors $x^2 \in [0,16]$.
    Ainsi, dans tous les cas $x^2 \in [0,16]$ donc $y \in [0,16]$.
    Ainsi, $f([-1,4]) \subset [0,16]$
  - Soit $y \in [0,16]$. Posons $x = \sqrt{y}$. Alors $f(x) = f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$ et $x \in [0,4]$ donc $x \in [-1,4]$ donc $y \in f([-1,4])$. Ainsi, $[0,16] \subset f([-1,4])$

  Donc $f([-1,4]) = [0,16]$.
- Montrons que $f(f^{-1}([-1,4])) = f([-2,2]) = [0,4]$
  On a vu que $f^{-1}([-1,4]) = [-2,2]$ donc $f(f^{-1}([-1,4]) = f([-2,2])$.
  - Soit $y \in f([-2,2])$, alors, il existe $x \in [-2,2]$ tel que $f(x) = y$. Si $x \in [-2,2]$ alors $x^2 \in [0,4]$. Ainsi, $y \in [0,4]$ donc $f([-2,2]) \subset [0,4]$.
  - Soit $y \in [0,4]$. Posons $x = \sqrt{y}$. Alors $f(x) = f(\sqrt{y}) = y$. De plus, $x \in [0,2]$ donc $x \in [-2,2]$. Donc $y \in f([-2,2])$. Ainsi, $[0,16] \subset f([-2,2])$ donc $f([-2,2]) = [0,4]$.
- Montrons que $f^{-1}(f([-1,4])) = f^{-1}([0,16]) = [-4,4]$
  - Soit $x \in f^{-1}([0,16])$. Alors $f(x) \in [0,16]$ donc $x^2 \in [0,16]$ donc $x \in [-4,4]$. Ainsi, $f^{-1}([0,16]) \subset [-4,4]$.
  - Soit $x \in [-4,4]$.
    Si $x \in [-4,0]$, $x^2 \in [0,16]$.
    Si $x \in [0,4]$ alors $x^2 \in [0,16]$.
    Ainsi dans tous les cas $x^2 \in [0,16]$ donc $f(x) \in [0,16]$. Ainsi, $x \in f^{-1}([0,16])$ donc $[-4,4] \subset f^{-1}([0,16])$.
    D'où $f^{-1}([0,16]) = [-4,4]$.

Exercice 11. 1. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
Soit $x \in A$, alors $f(x) \in f(A)$ par définition. Donc $x \in f^{-1}(f(A))$. Ainsi $A \subset f^{-1}(f(A))$.

2. Soit $x \in f(f^{-1}(B))$, alors il existe $y \in f^{-1}(B)$ tel que $x = f(y)$. Comme $y \in f^{-1}(B)$, $f(y) \in B$, donc $x \in B$. Ainsi $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

Exercice 12. 1. Soient A et B deux parties de F.

- Supposons $A \subset B$. Montrons que $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.
  Soit $x \in f^{-1}(A)$, on a $f(x) \in A$ donc $f(x) \in B$ car $A \subset B$, puis $x \in f^{-1}(B)$.
  On conclut : $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.
- Procédons par double inclusion.
  - Montrons que $f^{-1}(A \cup B) \subset f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
    Soit $x \in f^{-1}(A \cup B)$. Alors $x \in f^{-1}(A)$ ou $x \in f^{-1}(B)$. Donc $f(x) \in A \cup B$ donc $f(x) \in A$ ou $f(x) \in B$.
    Ainsi, $x \in f^{-1}(A)$ ou $x \in f^{-1}(B)$.
    Donc $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Ainsi, $f^{-1}(A \cup B) \subset f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
  - Montrons que $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cup B)$.
    Soit $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Alors, $f(x) \in A$ ou $f(x) \in B$. Ainsi, $f(x) \in A \cup B$ donc $x \in f^{-1}(A \cup B)$.
    Ainsi, $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B)$.

  On a donc prouvé que $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cup B)$.
- Raisonnons par double inclusion.
  - Montrons que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
    Soit $x \in f^{-1}(A \cap B)$. Alors, $f(x) \in A \cap B$ donc $f(x) \in A$ et $f(x) \in B$. Ainsi, $x \in f^{-1}(A)$ et $x \in f^{-1}(B)$.
    D'où $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Ainsi, $f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
  - Montrons que $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B)$.
    Soit $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Alors, $f(x) \in A$ et $f(x) \in B$. Ainsi, $f(x) \in A \cap B$. Donc $x \in f^{-1}(A \cap B)$.
    D'où $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cap B)$.

  On conclut : $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
- Raisonnons par double inclusion :
  - Montrons que $f^{-1}(C_F^A) \subset C_E^{f^{-1}(A)}$.
    Soit $x \in f^{-1}(C_F^A)$, alors $f(x) \in C_F^A$ donc $f(x) \notin A$ donc $x \notin f^{-1}(A)$ d'où $x \in C_E^{f^{-1}(A)}$.
  - Montrons que $C_E^{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(C_F^A)$.
    Soit $x \in C_E^{f^{-1}(A)}$, alors $x \notin f^{-1}(A)$. Donc $f(x) \notin A$. Ainsi, $f(x) \in C_F^A$ donc $x \in f^{-1}(C_F^A)$.

  Ainsi, $f^{-1}(C_F^A) = C_E^{f^{-1}(A)}$.

2. Soient A et B des parties de E.

   (a)
   - Supposons $A \subset B$. Montrons que $f(A) \subset f(B)$.
     Soit $y \in f(A)$. Il existe $a \in A$ tel que $y = f(a)$.
     Or, $a \in B$ car $A \subset B$. Ainsi, $f(a) \in f(B)$ donc $y \in f(B)$.
     On obtient $f(A) \subset f(B)$.
   - Raisonnons par double inclusion.
     - Montrons que $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.
       On sait que $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$. Ainsi, d'après la question précédente, on obtient : $f(A) \subset f(A \cup B)$ et $f(B) \subset f(A \cup B)$ donc $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.
     - Montrons que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.
       Soit $y \in f(A \cup B)$.
       Il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$.
       On a : $x \in A$ ou $x \in B$.
       Si $x \in A$, alors $f(x) \in f(A)$ donc $x \in f(A) \cup f(B)$.
       Si $x \in B$, alors $f(x) \in f(B)$ donc $x \in f(A) \cup f(B)$.
       Ainsi, dans tous les cas, on a $x \in f(A) \cup f(B)$.
       Donc $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$

     On a donc prouvé que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
   - Soit $y \in f(A \cap B)$. Il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$. Or, $x \in A$ donc $y = f(x) \in f(A)$.
     De plus, $x \in B$ donc $y = f(x) \in f(B)$.
     Ainsi, $y \in f(A) \cap f(B)$.
     D'où $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

   (b) Prenons $A = \{-1, 2\}$, $B = \{2, 1\}$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$. On a : $f(A \cap B) = f(\{2\}) = \{4\}$, $f(A) = \{1, 4\}$ et $f(B) = \{1, 4\}$. Ainsi, $f(A) \cap f(B) = \{1, 4\}$. Donc $f(A) \cap f(B) \neq f(A \cap B)$.

   (c) Prenons $E = F = \mathbb{R}$, $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ et $A = \mathbb{R}_+$.
   On a $C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{R}_+} = \mathbb{R}_-^*$ et $f(C_R^{\mathbb{R}_+}) = f(\mathbb{R}_-^*) = \mathbb{R}_+^*$.
   De plus, $f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$. Ainsi, $C_{\mathbb{R}}^{f(\mathbb{R}_+)} = C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{R}_+} = \mathbb{R}_-^*$.
   Donc $C_{\mathbb{R}}^{f(\mathbb{R}_+)} \neq f(C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{R}_+})$.

3 Injections - Surjections - Bijections

Exercice 13. 1. L'application f_1 est injective.
Soit $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$. Supposons que $f_1(n_1) = f_1(n_2)$.
Alors $2n_1 = 2n_2$ d'où $n_1 = n_2$.
En revanche, f_1 n'est pas surjective (donc pas bijective) car par exemple, l'entier 1 (et plus généralement tout entier impair) n'admet aucun antécédent par f_1.

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} f_2(x,y) = (a,b) &\iff (2x+3y, x+2y) = (a,b) \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} 2x+3y = a \\ x+2y = b \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} x+2y = b \\ -y = a-2b \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} y = -a+2b \\ x = 2a-3b \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ainsi, tout élément $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ admet un unique antécédent par f_2 donné par $(x, y) = (2a - 3b, -a + 2b)$. On en déduit donc directement que f_2 est bijective donc injective et surjective.

3. f_3 n'est pas injective. En effet, $f_3(1, 2) = (3, 2)$ et $f_3(2, 1) = (3, 2)$. Donc $f_3(1, 2) = f_3(2, 1)$ avec $(1, 2) \neq (2, 1)$.
Supposons que f_3 est surjective alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f_3(x, y) = (0, 3)$.
Alors $f_3(x, y) = (0, 3) = (y + x, xy)$. Or, deux couples de réels sont égaux ssi leurs membres sont égaux.
D'où $x + y = 0$ et $xy = 3$. Ainsi, $x = -y$ et $y^2 = -3$ ce qui est absurde car $y^2 \geq 0$.
Ainsi, f_3 n'est pas surjective et a fortiori, f_3 n'est pas bijective.

4. f_4 n'est pas injective. En effet, $f_4(1, 1) = f_4(0, 0)$ et $(1, 1) \neq (0, 0)$.
f_4 est surjective.
Soit $x \in \mathbb{R}$, $f_4(x, 0) = x$. Ainsi, $(x, 0)$ est un antécédent de x.
Donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists (u, v) \in \mathbb{R}^2, f_4(u, v) = x$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Soit $(n, n') \in N^2$. Supposons $f(n) = f(n')$.
   - Si n et n' sont pairs alors $\dfrac{n}{2} = \dfrac{n'}{2}$ donc $n = n'$.
   - Si n et n' sont impairs alors $-\dfrac{(n+1)}{2} = -\dfrac{(n'+1)}{2}$ donc $n = n'$.
   - Si n est pair et n' impair alors $\dfrac{n}{2} = -\dfrac{(n'+1)}{2}$ d'où $n = -n' - 1 < 0$ Impossible.
   - Si n est impair et n' pair alors $-\dfrac{(n+1)}{2} = \dfrac{n'}{2}$ d'où $n' = -n - 1 < 0$ Impossible.

Ainsi, dans tous les cas (possible), $n = n'$. Donc, f_5 est injective.
Soit $m \in \mathbb{Z}$.
Si $m \geq 0$. Posons $n = 2m$, on a $n \in \mathbb{N}$ et $f_5(n) = \frac{2m}{2} = m$.
Si $m < 0$. Posons $n = -2m - 1$, on a $n \in \mathbb{N}$ et $f_5(n) = \frac{2m}{2} = m$.
Ainsi, f_5 est surjective.
Finalement, f_5 est bijective.

6. L'application f_6 n'est pas injective car on a par exemple $f_6(0) = f_6(2i\pi) = 1$, ni surjective car le complexe 0 n'admet pas d'antécédent par f_6.

Exercice 14. 1. g n'est pas injective car $f(1) = f(-1)$ et $1 \neq -1$.
f n'est pas non plus surjective. En effet, soit $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 - 1 < x^2 + 1$. De plus, $x^2 + 1 > 0$. Ainsi, $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} < 1$.
Donc par exemple 2 n'admet aucun antécédent par f.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 \neq 0$.
De plus, on a prouvé dans la question 1 que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} < 1$.
De plus, soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{x^2-1}{x^2+1} \geq -1 \quad &\iff \quad x^2 - 1 \geq -x^2 - 1 \\ &\iff \quad 2x^2 \geq 0 \end{aligned}$$

La dernière proposition étant toujours vraie, on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \dfrac{x^2-1}{x^2+1} \geq 1$.
Donc finalement : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \dfrac{x^2-1}{x^2+1} \in [-1,1[$.
Ainsi, g est bien définie.
Soit $y \in [-1,1[$, soit $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\begin{aligned}
& g(x) = y \\
\iff & \frac{x^2-1}{x^2+1} = y \\
\iff & x^2 - 1 = y(x^2+1) \\
\iff & x^2(1-y) = 1+y \\
\iff & x^2 = \frac{1+y}{1-y} \quad \text{car } 1 \neq y \\
\iff & x = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \quad , \frac{1+y}{1-y} \geq 0 \text{ car } y \in [-1,1[\\
\iff & x = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \quad , \text{ car } x \in \mathbb{R}_+
\end{aligned}$$

L'équation $g(x) = y$ admet donc une unique solution $x = \sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}$ dans $\mathbb{R}_+$.
Ainsi, g est bijective et :

$$g^{-1} : \begin{array}{ccc} [-1,1[& \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} \end{array}.$$

Exercice 15. f n'est pas injective. En effet, $f(1,0) = (1,0) = f(1,1)$ mais $(1,0) \neq (1,1)$.
Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
f(x,y) = (u,v) \quad & \iff \quad (x, xy - y^3) = (u,v) \\
& \iff \quad \begin{cases} x = u \\ xy - y^3 = v \end{cases}
\end{aligned}$$

Posons $g_u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & uy - y^3 \end{array}$.
g_u est continue sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{y\to+\infty} g_u(y) = \lim\limits_{y\to+\infty} \left(-y^3\left(1 - \frac{u}{y^2}\right)\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{y\to-\infty} g(y) = \lim\limits_{y\to-\infty} \left(-y^3\left(1 - \frac{u}{y^2}\right)\right) = +\infty$.
Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe (au moins un) $y_u \in \mathbb{R}_+$ tel que $g_u(y_u) = v$. Ainsi, le couple $(u, y_u) \in \mathbb{R}^2$ est un antécédent de (u,v).
f est donc surjective.

Exercice 16. 1. • Supposons $g \circ f$ injective.
Montrons que f est injective.
Soient $x, y \in E$. Supposons $f(x) = f(y)$. alors $g(f(x)) = g(f(y))$ donc $(g\circ f)(x) = (g \circ f)(y)$. Or, $g \circ f$ est injective donc $x = y$.
Ainsi, f est injective.

• Supposons $g \circ f$ surjective.
Montrons que g est surjective.
Soit $y \in H$. Comme $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = (g \circ f)(x)$ Donc $y = g(f(x))$. Posons $u = f(x)$. On a $u \in F$ et $y = g(u)$.
Ainsi, g est surjective.

2. Supposons $g \circ f$ et $h \circ g$ bijectives.
On a donc $g \circ f$ bijective donc surjective. Ainsi, g est surjective.
De même, $h \circ g$ est bijective donc injective. Ainsi, g est injective.
Donc g est injective et surjective donc bijective.
On peut donc considérer g^{-1}.
De plus, g^{-1} est bijective. Ainsi, par composition, $g^{-1} \circ (g \circ f)$ est bijective. Or, $g^{-1} \circ (g \circ f) = (g^{-1} \circ g) \circ f = Id_F \circ f = f$. Donc f est bijective.
De même, $(h \circ g) \circ g^{-1}$ est bijective. Or, $(h \circ g) \circ g^{-1} = h \circ (g \circ g^{-1}) = h \circ Id_G = h$. Donc h est bijective.

Exercice 17. 1. Raisonnons par double implication.

- Supposons f injective.
  Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, montrons que $A = f^{-1}(f(A))$.
  Raisonnons par double inclusion.
  - Montrons que $A \subset f^{-1}(f(A))$.
    Soit $x \in A$, alors $f(x) \in f(A)$ par définition, donc $x \in f^{-1}(f(A))$. Ainsi $A \subset f^{-1}(f(A))$.
  - Montrons que $f^{-1}(f(A)) \subset A$.
    Soit $x \in f^{-1}(f(A))$. Alors $f(x) \in f(A)$ donc il existe $a \in A$ tel que $f(x) = f(a)$. Or, par injectivité de f, on obtient $x = a$ donc $x \in A$. Ainsi $A \subset f^{-1}(f(A))$.

  D'où par double inclusion $A = f^{-1}(f(A))$.
- Réciproquement, supposons que : $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $A = f^{-1}(f(A))$. Montrons que f est injective.
  Soit $(x, y) \in E^2$. Supposons que $f(x) = f(y)$.
  Posons $A = \{x\}$. On a $f(y) = f(x) \in f(A)$, donc $y \in f^{-1}(f(A))$. Or, $f^{-1}(f(A)) = A$ par hypothèse donc $y \in A$. Ainsi, $y \in \{x\}$ donc $y = x$. Ainsi f est injective.

Finalement, on a prouvé que :

$$f \text{ injective} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall A \in \mathcal{P}(E), A = f^{-1}(f(A))$$

2. Raisonnons par double implication.
   - Supposons f surjective.
     Soit $B \in \mathcal{P}(F)$. Montrons par double inclusion que $B = f(f^{-1}(B))$.
     On raisonne par double inclusion.
     - Montrons que $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
       Soit $x \in f(f^{-1}(B))$, alors il existe $y \in f^{-1}(B)$ tel que $x = f(y)$. Comme $y \in f^{-1}(B)$, $f(y) \in B$, donc $x \in B$. Ainsi $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
     - Montrons que $B \subset f(f^{-1}(B))$.
       Soit $y \in B$, alors $y \in F$ et comme f surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Ainsi, $f(x) \in B$, donc $x \in f^{-1}(B)$, puis $f(x) \in f(f^{-1}(B))$ donc $y \in f(f^{-1}(B))$. Ainsi, $B = f(f^{-1}(B))$.

     Donc par double inclusion, $B = f(f^{-1}(B))$.
   - Réciproquement, supposons que : $\forall B \in \mathcal{P}(F)$, $B = f(f^{-1}(B))$ et montrons que f est surjective.
     Soit $y \in F$. On pose $B = \{y\}$. On sait que $B = f(f^{-1}(B))$. Ainsi, $f(f^{-1}(B))$ est non vide. Donc $f^{-1}(B)$ est non vide (car $f(\emptyset) = \emptyset$) donc il existe $x \in f^{-1}(B)$. Ainsi, $x \in E$ et $f(x) \in B$ donc $f(x) = y$. On a alors $f(x) \in B$ donc $f(x) = y$.
     Ainsi, f est surjective.

   On a donc montré :
   $$f \text{ surjective} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall B \in \mathcal{P}(F),\ B = f(f^{-1}(B)).$$

Exercice 18. 1. Soit $v \in \mathcal{F}(E, E)$, soit $u \in \mathcal{F}(E, E)$, on a :

$$\begin{aligned} \Phi_f(u) = v \quad &\Longleftrightarrow \quad f \circ u \circ f^{-1} = v \\ &\Longleftrightarrow \quad u = f^{-1} \circ v \circ f \end{aligned}$$

Ainsi, Φ_f est bijective. Sa réciproque est $\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(E,E) & \to & \mathcal{F}(E,E) \\ v & \mapsto & f^{-1} \circ v \circ f \end{array}$.

2. Soit $u \in \mathcal{F}(E, E)$. On a

$$\Phi_f \circ \Phi_g(u) = \Phi_f(g \circ u \circ g^{-1}) = f \circ (g \circ u \circ g^{-1}) \circ f^{-1} = (f \circ g) \circ u \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = (f \circ g) \circ u \circ (f \circ g)^{-1} = \Phi_{f \circ g}(u)$$

donc $\Phi_f \circ \Phi_g = \Phi_{f \circ g}$.

3. - Montrons que $\Phi_f(\mathcal{I}) = \mathcal{I}$. On raisonne par double inclusion.
     - Montrons que $\Phi_f(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}$.
       Soit $v \in \Phi_f(\mathcal{I})$ alors il existe $u \in \mathcal{I}$ tel que $v = \Phi_f(u)$. Or, $\Phi_f(u) = f \circ u \circ f^{-1}$ est une composée d'injections, donc $\Phi_f(u)$ est injective.
       Ainsi, $v \in \mathcal{I}$.
       Ainsi $\Phi_f(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}$.
     - Montrons que $\mathcal{I} \subset \Phi_f(\mathcal{I})$.
       Soit $u \in \mathcal{I}$, on a $u = (\Phi_f \circ (\Phi_f)^{-1})(u) = (\Phi_f \circ \Phi_{f^{-1}})(u))$ par le 2.
       Ainsi, $u = \Phi_f(\Phi_{f^{-1}}(u))$. De plus, $\Phi_{f^{-1}}(u) = f^{-1} \circ u \circ f \in \mathcal{I}$ comme composée de fonctions injectives.
       Ainsi $u \in \Phi_f(\mathcal{I})$ et $\mathcal{I} \subset \Phi_f(\mathcal{I})$.

     Finalement, on a bien prouvé que $\Phi_f(\mathcal{I}) = \mathcal{I}$.

- Montrons que $\Phi_f(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$. On raisonne par double inclusion.
  - Montrons que $\Phi_f(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$.
    Soit $v \in \Phi_f(\mathcal{S})$. Alors, il existe $u \in \mathcal{S}$ tel que $v = \Phi_f(u)$. Or, $\Phi_f(u) = f \circ u \circ f^{-1}$ est une composée de surjections, donc est surjective. $\Phi_f(u) \in \mathcal{S}$. Donc $v \in \Phi_f(\mathcal{S})$.
    Ainsi $\Phi_f(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$.
  - Montrons que $\mathcal{S} \subset \Phi_f(\mathcal{S})$.
    Soit $u \in \mathcal{S}$, on a $u = (\Phi_f \circ (\Phi_f)^{-1})(u) = (\Phi_f \circ \Phi_{f^{-1}})(u))$ par le 2.
    Ainsi, $u = \Phi_f(\Phi_{f^{-1}}(u))$. De plus, $\Phi_{f^{-1}}(u) = f^{-1} \circ u \circ f \in \mathcal{S}$ comme composée d'applications surjectives.
    Ainsi $u \in \Phi_f(\mathcal{S})$ et $\mathcal{S} \subset \Phi_f(\mathcal{S})$.

  Ainsi $\Phi_f(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$.

Exercice 19. 1. Raisonnons par double implication.

- Supposons f est injective. Montrons que $A \cup B = E$.
  On a $f(E) = (A, B)$ et $f(A \cup B) = (A, B)$ donc par injectivité, $E = A \cup B$.
- Réciproquement, supposons $A \cup B = E$. Montrons que f est injective.
  Soit $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$. Supposons que $f(X) = f(Y)$.
  On a alors $(X \cap A, X \cap B) = (Y \cap A, Y \cap B)$. Ainsi, $X \cap A = Y \cap A$ et $X \cap B = Y \cap B$.
  D'où, $(X \cap A) \cup (X \cap B) = (Y \cap A) \cup (Y \cap B)$ donc $X \cap (A \cup B) = Y \cap (A \cup B)$ donc $X \cap E = Y \cap E$.
  Ainsi, $X = Y$.
  Donc f est injective.

On a donc prouvé que : f injective $\iff A \cup B = E$.

2. Raisonnons par double implication.
   - Supposons que f est surjective. Montrons que $A \cap B = \emptyset$.
     Il existe $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $f(X) = (A, \emptyset)$.
     Ainsi, $(X \cap A, X \cap B) = (A, \emptyset)$.
     On a alors $X \cap A = A$ et $X \cap B = \emptyset$.
     Montrons par l'absurde que $A \cap B = \emptyset$.
     Supposons qu'il existe $x \in A \cap B$, alors $x \in A = A \cap X$, donc $x \in X$, et $x \in B$, donc $x \in X \cap B = \emptyset$ Absurde.
     Ainsi, $A \cap B = \emptyset$.
   - Réciproquement, supposons que $A \cap B = \emptyset$. Montrons que f est surjective.
     Soit $(Y, Z) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$. Posons $X = Y \cup Z \in \mathcal{P}(E)$.
     On a : $X \cap A = (Y \cup Z) \cap A = (Y \cap A) \cup (Z \cap A) = Y \cup \emptyset = Y$ (car $Y \subset A$ donc $Y \cap A = Y$ et $A \cap B = \emptyset$, $Z \subset B$, donc $Z \cap A = \emptyset$).
     De même $X \cap B = (Y \cup Z) \cap B = (Y \cap B) \cup (Z \cap B) = \emptyset \cup Z = Z$ (car $Z \subset B$ donc $Z \cap B = Z$ et $A \cap B = \emptyset$, $Y \subset A$, donc $Y \cap A = \emptyset$).
     D'où $f(X) = (X \cap A, X \cap B) = (Y, Z)$.
     Ainsi, f est surjective.

   On a donc prouvé que : f surjective $\iff A \cap B = \emptyset$.
3. f est bijective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = E$. Dans ce cas l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) & \to & \mathcal{P}(E) \\ (X, Y) & \mapsto & X \cup Y \end{array}$ est la réciproque de f, comme vu dans la question précédente.

Exercice 20. Supposons f strictement croissante (on procède de même dans le cas strictement décroissante).
Soit $x, t \in I$. Par l'absurde, supposons que $f(x) = f(t)$ et $x \neq t$.
Alors, $x < t$ ou $x > t$.

- Si $x < t$ alors $f(x) < f(t)$ par stricte croissance de f. Absurde.
- $x > t$ alors $f(x) > f(t)$ f par stricte croissante de f. Absurde.

Ainsi, $f(x) = f(t) \implies x = t$.
f est donc injective.

4 Relations d'équivalence

Exercice 21. 1. • Soit $X \in \mathcal{P}(E)$, on a $X \cup A = X \cup A$, donc $X \sim X$ et $\sim$ est réflexive.

- Soit $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$. Supposons que $X \sim Y$. Alors $X \cup A = Y \cup A$, donc $Y \cup A = X \cup A$ et $Y \sim X$ donc $\sim$ est symétrique.

- Soit $(X, Y, Z) \in \mathcal{P}(E)^3$. Supposons que $X \sim Y$ et $Y \sim Z$. Alors $X \cup A = Y \cup A$ et $Y \cup A = Z \cup A$ donc $X \cup A = Z \cup A$ ainsi $X \sim Z$ et $\sim$ est transitive.

En conclusion $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$.

2. Soit $X \in \mathcal{P}(E)$. Notons $cl_\sim(X)$ la classe d'équivalence de f_0 pour la relation $\sim$.
Soit $Y \in \mathcal{P}(E)$, on a :
$$X \sim Y \iff X \cup A = Y \cup A$$
Montrons que $cl_\sim(X) = \{(X \backslash A) \cup B,\ B \subset A\}$. On raisonne par double inclusion.
   - Montrons que $cl_\sim(X) \subset \{(X \backslash A) \cup B,\ B \subset A\}$.
   Soit $Y \in cl_\sim(X)$. Alors, $X \cup A = Y \cup A$. On a alors : $(X \cup A) \cap C_E^A = (Y \cup A) \cap C_E^A$.
   Or : $(X \cup A) \cap C_E^A = (X \cap C_E^A) \cup (A \cap C_E^A) = (X \cap C_E^A) \cup \emptyset = X \cap C_E^A = X \setminus A$.
   De même, $(Y \cup A) \cap C_E^A = Y \setminus A$.
   Donc $X \setminus A = Y \setminus A$.
   On a alors : $Y = Y \cap E = Y \cap (A \cup C_E^A) = (Y \cap A) \cup (Y \cap C_E^A) = (Y \cap A) \cup Y \setminus A$. Posons $B = Y \cap A$. On a $B \subset A$ et $Y = (X \setminus A) \cup B$.
   $cl_\sim(X) = \{(X \backslash A) \cup B,\ B \subset A\}$.
   - Montrons que $\{(X \backslash A) \cup B,\ B \subset A\} \subset cl_\sim(X)$.
   Soit $Y \in \{(X \backslash A) \cup B,\ B \subset A\}$. Il existe $B \subset A$ tel que $Y = (X \setminus A) \cup B$.
   On a alors :
   $$\begin{aligned} Y \cup A &= (X \setminus A) \cup B \cup A \\ &= (X \cap C_E^A) \cup A \quad \text{car } B \subset A \text{ donc } B \cup A = A \\ &= (X \cup A) \cap (C_E^A \cup A) \\ &= (X \cup A) \cap E \\ &= X \cup A \end{aligned}$$
   Donc $Y \sim X$. Ainsi, $Y \in cl_\sim(X)$.

Par double inclusion, on a donc : $cl_\sim(X) = \{(X \backslash A) \cup B,\ B \subset A\}$.

Exercice 22. 1.
- La relation $\mathcal{R}$ est réflexive : soit $f \in E$, on a $f' = f'$ donc $f \mathcal{R} f$.
- Elle est par ailleurs symétrique : soient $f, g \in E$. Supposons que $f' = g'$ alors $g' = f'$. Ainsi, $g \mathcal{R} f$.
- Enfin, elle est transitive : soient $f,\ g,\ h \in E$. Supposons que $f \mathcal{R} g$ et $g \mathcal{R} h$ alors $f' = g'$ et $g' = h'$ donc $f' = h'$ et $f \mathcal{R} h$.

La relation $\mathcal{R}$ est donc bien une relation d'équivalence.

2. Soit $f_0 \in E$. Notons $cl_{\mathcal{R}}(f_0)$ la classe d'équivalence de f_0 pour la relation $\mathcal{R}$. Soit $f \in E$, on a :
$$\begin{aligned} f \in cl_{\mathcal{R}}(f_0) &\iff f' = f_0' \\ &\iff (f - f_0)' = 0 \\ &\iff \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, (f - f_0)(x) = C \\ &\iff \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = C + f_0(x) \end{aligned}$$
Ainsi, on a :
$$cl_{\mathcal{R}}(f_0) = \{f_0 + C, C \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 23. 1.
- La relation $\mathcal{R}$ est réflexive : Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x^2 - x^2 = x - x = 0$, donc $x \mathcal{R} x$.
- Soient $x, y \in \mathbb{R}$, supposons que $x \mathcal{R} y$, alors $x^2 - y^2 = x - y$, donc $y^2 - x^2 = y - x$. Ainsi, $y \mathcal{R} x$ donc $\mathcal{R}$ est symétrique.
- Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$, supposons que $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$. On a $x^2 - y^2 = x - y$ et $y^2 - z^2 = y - z$. Ainsi :
$$x^2 - z^2 = (x^2 - y^2) + (y^2 - z^2) = x - y + y - z = x - z,$$
donc $x \mathcal{R} z$ et $\mathcal{R}$ est transitive.
En conclusion, $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $cl_{\mathcal{R}}(x)$ la classe d'équivalence de x pour la relation $\mathcal{R}$.
On a $cl_{\mathcal{R}}(x) = \{y \in \mathbb{R}, y \mathcal{R} x\} = \{y \in \mathbb{R}, x^2 - y^2 = x - y\}$. Soit $y \in \mathbb{R}$, on a :
$$\begin{aligned} x^2 - y^2 = x - y &\iff (x + y)(x - y) = x - y \\ &\iff (x + y - 1)(x - y) = 0 \\ &\iff y = x \text{ ou } y = 1 - x \end{aligned}$$
Ainsi, $cl_{\mathcal{R}}(x) = \{x, 1 - x\}$.
Remarque : si $x = \dfrac{1}{2}$, $cl_{\mathcal{R}}(x) = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.