# Feuille d'exercices 4 : Fonctions usuelles

## 1 Logarithme - Exponentielle - Puissances

**Exercice 1.** Soit $f : x \mapsto \ln(e^x + 1)$.
Montrer que $f$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer sa bijection réciproque.

**Exercice 2.** On pose $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$.
1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f$.
2. Montrer que la fonction $f$ est impaire.
3. Étudier les variations de la fonction $f$.

**Exercice 3.** Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \ln(x)\ln(\ln(x))$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{2x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{e^x-1}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{a^{(b^x)}}{b^{(a^x)}}$ avec $1 < a < b$

**Exercice 4.** Montrer que : $\forall x \in ]0,1[,\ x^x(1-x)^{1-x} \geq \dfrac{1}{2}$.

**Exercice 5.** Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ :
1. $2^{x+4} + 3^x = 2^{x+2} + 3^{x+2}$
2. $4^{x+1} + 2^{2-x} = 65$
3. $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$
4. $2^{(\sin x)^2} = \cos(x)$

**Exercice 6.** Résoudre l'inéquation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ :

$$\ln(x-1) + \ln(x+1) < 2\ln(x) - 1$$

**Exercice 7.** On pose $f : x \mapsto x^x$.
1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de $f$, et étudier les variations de la fonction $f$.
2. Déterminer les limites de $f$ aux bornes de $\mathcal{D}$.
3. Montrer que l'on peut prolonger $f$ par continuité en 0. Déterminer la limite du taux d'accroissement en 0. La fonction $f$ est-elle dérivable en 0 ?
4. Tracer la courbe représentative de $f$.

**Exercice 8.** Étudier et tracer l'allure approximative du graphe de la fonction suivante :

$$f : x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

## 2 Fonctions hyperboliques

**Exercice 9.** Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ :

1. $\mathrm{sh}\,(x) \leq 2$
2. $\mathrm{ch}\,(x) = 3$
3. $\mathrm{ch}\,(x) \leq 3$

**Exercice 10.** Simplifier l'expression : $\dfrac{\mathrm{ch}\,(\ln x) + \mathrm{sh}\,(\ln x)}{x}$, $x \in \mathbb{R}_+^*$

**Exercice 11.** Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, $7\mathrm{ch}\, x + 2\mathrm{sh}\, x = 9$.

**Exercice 12.**
1. (a) Montrer que sh est bijective.
   On note $Argsh$ sa bijection réciproque.
   (b) Etudier la dérivabilité et calculer la dérivée de $Argsh$.
   (c) Représenter graphiquement $Argsh$.
   (d) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Argsh(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.
2. (a) Montrer de même que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & [1,+\infty[ \\ x & \mapsto & \mathrm{ch}\,(x) \end{array}$ est bijective. On note $Argch$ sa bijection réciproque.

(b) Etudier la dérivabilité et calculer la dérivée de $Argch$.
(c) Représenter graphiquement $Argch$.
(d) Trouver une expression de $Argch$.

**Exercice 13.** Montrer que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\mathrm{ch}\,(a+b)+\mathrm{sh}\,(a+b) = (\mathrm{ch}\,(a)+\mathrm{sh}\,(a))(\mathrm{ch}\,(b)+\mathrm{sh}\,(b)) \quad \text{et} \quad \mathrm{ch}\,(a+b)-\mathrm{sh}\,(a+b) = (\mathrm{ch}\,(a)-\mathrm{sh}\,(a))(\mathrm{ch}\,(b)-\mathrm{sh}\,(b)).$$

En déduire les formules d'addition de trigonométrie hyperbolique ($\mathrm{ch}\,(a+b)$, $\mathrm{sh}\,(a+b)$, $\mathrm{ch}\,(a-b)$, $\mathrm{sh}\,(a-b)$, $\mathrm{ch}\,(2a)$ et $\mathrm{sh}\,(2a)$ en fonction de $\mathrm{ch}\,(a)$, $\mathrm{ch}\,(b)$, $\mathrm{sh}\,(a)$, $\mathrm{sh}\,(b)$).

**Exercice 14.** Etudier et tracer l'allure du graphe de la fonction suivante :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\mathrm{ch}\,(x) \end{array} \right.$$

# 3 Fonctions circulaires

**Exercice 15.** Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ :

1. $\cos x > 0$ 2. $\sin x \leq \dfrac{1}{2}$ 3. $\tan x > \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

**Exercice 16.** Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ :

1. $\cos x = \frac{1}{2}$
2. $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 1$
3. $2\cos(2x) = \sqrt{3}$
4. $2\cos^2(2x) - 3\cos(2x) = -1$
5. $\cos(2x) = \cos(x)$
6. $\sin(2x) + \sin x = 0$
7. $\sin(2x) + \sin\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) = 0$
8. $\cos(3x) + \sin x = 0$
9. $\cos x - \cos(2x) = \sin(3x)$
10. $\cos x + \sin x = 2$
11. $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$

**Exercice 17.** 1. Calculer les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(\sqrt{3}+1)\cos(2x) + (\sqrt{3}-1)\sin(2x) = \sqrt{2}$.

**Exercice 18.** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z},\ |\sin(nx)| < n|\sin(x)|$

# 4 Fonctions circulaires réciproques

**Exercice 19.** Simplifier les expressions suivantes :

1. $\arccos\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}\right)$
2. $\arccos\left(\cos(4\pi)\right)$
3. $\arccos\left(\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$
4. $\arctan\left(\tan\dfrac{3\pi}{4}\right)$
5. $\cos(\arctan x),\ x \in \mathbb{R}$
6. $\sin(3\arctan x),\ x \in \mathbb{R}$
7. $\tan(\arcsin x),\ x \in ]-1,1[$
8. $\arccos x + \arccos(-x)$, $x \in [-1,1]$

**Exercice 20.** Montrer la formule de Machin : $4\arctan\dfrac{1}{5} - \arctan\dfrac{1}{239} = \dfrac{\pi}{4}$.

**Exercice 21.** Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ :

1. $\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13} = \arcsin x$
2. $\arccos x = \arcsin x$
3. $\arccos x = \arcsin(2x)$
4. $\arcsin x + \arcsin\sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2}$
5. $2\arcsin x = \arccos|2x^2 - 1|$
6. $2\arcsin(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$
7. $\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$
8. $\arcsin(2x) - \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin(x)$

**Exercice 22.** Après avoir précisé le domaine de validité, montrer les formules :

1. $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$
2. $2\arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right) + \arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$
3. $2\arctan(\sqrt{1+x^2} - x) + \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$
4. $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ sur $]0,+\infty[$ et $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$ sur $]-\infty,0[$

**Exercice 23.** Etudier les variations de la fonction suivante et tracer sa courbe représentative : $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$

**Exercice 24.** Représenter la fonction : $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arcsin\left(\sin(x)\right) \end{array} \right.$.

**Exercice 25.** Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \arctan x > \dfrac{x}{1+x^2}$.

**Exercice 26.** On pose $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de $f$.
2. Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathcal{D}$ et calculer sa dérivée.
3. En déduire une expression simple de $f$.
4. Retrouver ce résultat par une méthode directe.