

Nom et prénom :

Note : /20

Préparation n°4
07 février 2019

Exercice 1. Soient i, j, k, l, n cinq entiers naturels tels que $0 \leq i, j, k, l \leq n$. Déterminer une expression « simple » de $E_{i,j} E_{k,l}$.

Exercice 2. Inverser les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .
2. Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$ ainsi que les puissances de A .
3. On définit $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ trois nombres réels. Soit pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} x_{n+1} = -y_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n + 2y_n + 3z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n - 2z_n \end{cases}.$$

Déterminer une expression explicite des suites (x_n) , (y_n) et (z_n) .

Exercice 4. Déterminer le nombre d'anagrammes du mot « clavette ».

Exercice 5. On suppose qu'une particule quantique ne peut avoir que trois niveaux d'énergies E_1, E_2 et E_3 . On observe $n \in \mathbb{N}^*$ particules. On suppose qu'on est capable de distinguer deux particules distinctes.

1. Déterminer le nombre de configurations différentes observables.
2. Déterminer le nombre de configurations où il y a exactement $r \leq n$ particules dans le niveau d'énergie E_1 .