Chapitre 20 : Espaces vectoriels de dimension finie

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et n un entier naturel non nul.

1 Dimension finie

Définition

On dit qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.
Dans le cas contraire, on dit que E est de dimension infinie.

Exemple :

- $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie puisqu'il admet une base finie (sa base canonique).
- $\mathbb{K}_n[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
- $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension finie.
- $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie : supposons avoir une famille génératrice $(P_1,\dots,P_n)$ de $\mathbb{K}[X]$ (non tous nuls car $\mathbb{K}[X] \neq \{0\}$). Alors tout polynôme est combinaison linéaire de $P_1,\dots,P_n$, donc de degré $\leq m = \max(d^\circ P_1,\dots,d^\circ P_n) \in \mathbb{N}$. En prenant X^{m+1}, on obtient $m+1 \leq m$... absurde!

1.1 Existence de bases

D'après la définition précédente un espace vectoriel réduit à $\{0\}$ est un espace vectoriel de dimension finie puisque (0) en est une famille génératrice. En revanche, comme il n'est pas possible d'y trouver de famille libre, un tel espace vectoriel ne peut posséder de base. C'est pourquoi dans la suite de cette partie nous allons supposer $E \neq \{0\}$.

Proposition Théorème de la base extraite

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$. De toute famille génératrice finie de E, on peut extraire une base de E.

Notations utilisées dans la suite : Si $\mathscr{F}_1 = (e_1,...,e_n)$ et $\mathscr{F}_2 = (f_1,...,f_p)$ sont deux familles finis d'éléments de E.
On note $\mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2 = (e_1,....,e_n,f_1,...,e_p)$.
On dit que $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$ si $\mathscr{F}_1$ est une sous famille de $\mathscr{F}_2$.
Enfin, on appelle Card $(\mathscr{F}_1)$ le nombre d'éléments (distincts ou non) de $\mathscr{F}_1$.

Démonstration. Puisque E est de dimension finie, il existe $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie de E. Notons :

$$A = \{\text{Card}\,(\mathscr{F}), \mathscr{F} \subset \mathscr{G} \text{ et } \mathscr{F} \text{ génératrice de } E\}.$$

La partie A de $\mathbb{N}$ est non vide (car contient Card (G)). Elle admet un plus petit élément p. Soit $\mathscr{F}$ une sous famille de $\mathscr{G}$ de cardinal p et génératrice de E. Notons $\mathscr{F} = (e_1,\dots,e_p)$.
Montrons que $\mathscr{F}$ est une base.
Elle est génératrice par définition. Montrons qu'elle est libre.
Par l'absurde, supposons $(e_1,\dots,e_p)$ liée. Alors l'un des vecteurs de $(e_1,\dots,e_p)$ est combinaison linéaire des autres. Ainsi, il existe $k \in [\![1,p]\!]$, tel que $e_k \in \text{Vect}\left((e_i)_{i\in[\![1,p]\!]\setminus\{k\}}\right)$.
Soit $x \in E$, comme $(e_1,\dots,e_p)$ est génératrice de E, il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = \sum_{i\in[\![1,p]\!]\setminus\{k\}} \lambda_i e_i + \lambda_k e_k$$

Or, $\displaystyle\sum_{i\in[\![1,p]\!]\setminus\{k\}} \lambda_i e_i \in \text{Vect}\left((e_i)_{i\in[\![1,p]\!]\setminus\{k\}}\right)$ et $\lambda_k e_k \in \text{Vect}\left((e_i)_{i\in[\![1,p]\!]\setminus\{k\}}\right)$. Donc $x \in \text{Vect}\left((e_i)_{i\in[\![1,p]\!]\setminus\{k\}}\right)$.
Ainsi $\text{Vect}\left((e_i)_{i\in[\![1,p]\!]\setminus\{k\}}\right) \subset E$. Donc $\text{Vect}\left((e_i)_{i\in[\![1,p]\!]\setminus\{k\}}\right) = E$. Donc $(e_i)_{i\in[\![1,p]\!]\setminus\{k\}}$ est génératrice de E donc $p-1 \in A$, ce qui est absurde.
Ainsi $(e_1,\dots,e_p)$ est libre et génératrice de E. C'est donc une base de E. $\square$

Corollaire Existence de base dans un espace vectoriel de dimension finie

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie non réduit à $\{0\}$ admet au moins une base.

Théorème Théorème de la base incomplète

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$. Toute famille libre finie de E peut être complétée en une base de E.

Démonstration. Soit $\mathscr{L}$ une famille libre de E.
Comme E est un espace vectoriel de dimension finie, il possède une famille génératrice finie $\mathscr{G}$.
Notons $A = \{\mathrm{Card}(\mathscr{F}),\ \mathscr{L} \subset \mathscr{F} \subset \mathscr{L} \cup \mathscr{G} \text{ et } \mathscr{F} \text{ libre}\}$. La partie A de $\mathbb{N}$ est non vide (car contient $\mathrm{Card}(\mathscr{L})$) et majoré (par $\mathrm{Card}(\mathscr{L} \cup \mathscr{G})$). Elle admet donc un plus grand élément $p \in \mathbb{N}$. Soit $\mathscr{F}$ une famille libre de E de cardinal p telle que $\mathscr{L} \subset \mathscr{F} \subset \mathscr{L} \cup \mathscr{G}$. Notons $\mathscr{F} = (e_1, \ldots, e_p)$. Montrons que $\mathscr{F}$ est une base. On sait par définition qu'elle est libre. Reste donc à montrer qu'elle est génératrice. Pour cela on va montrer que tout élément de $\mathscr{G}$ s'écrit comme combinaison linéaire de $e_1, ..., e_p$.
Par l'absurde. Supposons qu'il existe $x \in \mathscr{G}$ tel que $x \notin \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$. La famille $\mathscr{L}' = (e_1, \ldots, e_p, x)$ est alors libre et vérifie $\mathscr{L} \subset \mathscr{L}' \subset \mathscr{L} \cup \mathscr{G}$ (puisque $x \in \mathscr{G}$). Ainsi $p+1 \in A$... absurde! Ainsi tout élément de $\mathscr{G}$ appartient à $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ donc $\mathrm{Vect}(\mathscr{G} \Subset \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_p)$. Or, $\mathscr{G}$ est génératrice de E donc $E = \mathrm{Vect}(\mathscr{G}) \subset \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_p)$. Ainsi, $\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_p) = E$. Donc $\mathscr{F} = (e_1, \ldots, e_p)$ est génératrice de E. Comme elle est libre, c'est donc une base de E. □

Corollaire

Soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E. Si $\mathscr{L}$ est une famille libre finie de E, alors, on peut à l'aide d'éléments de $\mathscr{G}$ la compléter en une base de E.

1.2 Dimension d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Lemme

Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.

Démonstration. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille génératrice de E.
Pour tout $j \in [\![1, n+1]\!]$, on pose $x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$.
Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_{n+1} x_{n+1} = 0$.

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j x_j = 0_E \\
\iff\ & \sum_{i=j}^{n+1} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i \right) = 0_E \\
\iff\ & \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j a_{i,j} \right) e_i = 0_E \\
\iff\ & \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{n} \lambda_j a_{i,j} e_i = 0_E
\end{aligned}$$

Or,

$$\left\{ \begin{array}{c} \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j a_{1,j} = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j a_{i,j} = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} \lambda_1 a_{1,1} + \lambda_2 a_{1,2} + \cdots + \lambda_{n+1} a_{1,n+1} = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1 a_{1,n} + \lambda_2 a_{1,2} + \cdots + \lambda_{n+1} a_{n,n+1} = 0 \end{array} \right. \qquad (S)$$

(S) est un système homogène à n équations et $n+1$ inconnues. Ainsi, il admet une infinité de solutions donc au moins une non nulle. Ainsi, il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{(0, ..., 0)\}$ tel que : $\left\{ \begin{array}{c} \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j a_{1,j} = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j a_{i,j} = 0 \end{array} \right.$,

donc tel que : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j a_{i,j} = 0$, donc tel que : $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j = 0$.
Ainsi la famille $(x_1, ..., x_{n+1})$ est liée. □

Corollaire

Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases ont même nombre d'éléments.

Démonstration. Soient B_1 et B_2 deux bases de E, de cardinaux respectifs n et p. Supposons $n \neq p$. Par exemple $p > n$. D'après la proposition précédente, B_1 est liée (surfamille d'une famille liée). Contradiction avec le fait que ce soit une base. □

Définition

- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$. On appelle dimension de E et on note $\dim(E)$ le cardinal de chacune de ses bases.
- Si $E = \{0\}$, on pose par convention $\dim(E) = 0$.

Exemples de références :

On connait les bases canoniques des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels suivants ce qui permet de déterminer leur dimension.

- $\dim(\mathbb{K}^n) = n$ car admet pour base $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$, ..., $e_n = (0, 0, ..., 1)$.
- $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$ car admet pour base $(1, X, \ldots, X^n)$.
- $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$ admet pour base $(E_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$
- Une droite vectorielle est un espace vectoriel de dimension 1.
- Un plan vectoriel est un espace vectoriel de dimension 2.

Méthode :

- Si $F = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_p)$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ alors F est un espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à p.
- Si de plus la famille $(e_1, ..., e_p)$ est libre, on a $\dim(F) = p$ puisqu'alors $(e_1, ..., e_p)$ est une base.

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Alors :

- Toute famille libre de E admet au plus n éléments.
- Toute famille génératrice de E admet au moins n éléments.

Démonstration.

- C'est une conséquence d'une proposition précédente.
- Soit $\mathcal{F}$ une famille génératrice de E de cardinal p. D'après le théorème de la base extraite, on peut a extraire de $\mathcal{F}$ une base de E. Son cardinal vérifie donc $n \leq p$.

□

Corollaire

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F}$ une famille formée de n éléments. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $\mathcal{F}$ est libre.
- $\mathcal{F}$ est génératrice de E.
- $\mathcal{F}$ est une base de E.

Démonstration.

- Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, elle est libre et génératrice (par définition).
- Supposons $(e_1, \ldots, e_n)$ libre. Par le théorème de la base incomplète, on peut la compléter en une base $(e_1, \ldots, e_p)$ de E. Or $p = \dim(E) = n$, donc $(e_1, \ldots, e_n) = (e_1, \ldots, e_p)$ est une base de E.
- Supposons $(e_1, \ldots, e_n)$ génératrice. Par le théorème de la base extraite, on peut en extraire une base $(e_i)_{i \in I}$ avec $I \subset [\![1, n]\!]$. Or $\mathrm{Card}(I) = \dim(E) = n$, donc $(e_1, \ldots, e_n) = (e_1, \ldots, e_p)$ est une base de E.

□

Méthode

Pour montrer qu'une famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, on ne montre généralement que la liberté.

Exemple : Dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$, considérons $n+1$ polynômes P_0, P_1, ..., P_n tels que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on ait $\deg(P_k) = k$. Montrer que la famille $(P_0, ..., P_n)$ forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

- Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg(P_k) \geq 0$ donc $(P_0, ..., P_n)$ est une famille de polynômes non nuls.
- Comme la famille est de degrés échelonnées, elle est libre.
- Etant donné que $\dim(K_n[X]) = n+1$, on en déduit que cette famille de $n+1$ éléments en est une base.

Par exemple, si l'on note $T_i \in \mathbb{R}[X]$ le i-ième polynôme de Tchebytchev. $(T_0, \ldots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. En effet, on a prouvé en TD que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $\deg(T_i) = i$.

1.3 Rang d'une famille de vecteurs

Définition

Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ est une famille de vecteurs de E, on appelle rang de $(e_1, \ldots, e_p)$ et on note $\mathrm{rg}(e_1, \ldots, e_p)$ la dimension de $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$.

Remarque : Le rang est bien défini puisque $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ est de dimension finie : il admet $(e_1, \ldots, e_p)$ comme famille génératrice finie.

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dimension finie n. Soit $(e_1, ..., e_p)$ une famille d'éléments de E. On a :

- $\mathrm{rg}(e_1, \ldots, e_p) \leq \min(n, p)$.
- La famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est libre si et seulement si $\mathrm{rg}(e_1, \ldots, e_p) = p$.

Démonstration.

- La famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est génératrice de $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ donc on peut extraire de cette famille une base. Ainsi $\mathrm{rg}(e_1, \ldots, e_p) \leq p$.
  Soit $(f_1, \ldots, f_r)$ une base de $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ (avec $r = \mathrm{rg}(e_1, \ldots, e_p)$). Alors $(f_1, \ldots, f_r)$ est libre dans E, donc a moins d'éléments qu'une base de E. Ainsi $r \leq n$.
- Supposons $(e_1, \ldots, e_p)$ libre. Comme elle est génératrice de $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$, c'est alors une base de $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathrm{rg}(e_1, \ldots, e_p) = p$. Réciproquement supposons que $\mathrm{rg}(e_1, \ldots, e_p) = p$. Alors $(e_1, \ldots, e_p)$ est génératrice de $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ et a autant d'éléments que $\dim(\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p))$, donc c'en est une base. En particulier c'est une famille libre.

□

2 Sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie

2.1 Dimension

Théorème

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors

- F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$
- $\dim E = \dim F$ si et seulement si $F = E$.

Démonstration. Notons $n = \dim(E)$.

- Soit $A = \{\mathrm{Card}(\mathscr{F}) \ / \ \mathscr{F}$ est une famille libre de $F\}$. Tout élément de A est le cardinal d'une famille libre de F donc en particulier une famille libre de E. Par suite A est majoré par n.
  - Cas n°1 : $F = \{0\}$. Dans ce cas, $\dim(F) = 0 \leq n = \dim(E)$.
  - Cas n°2 : $F \neq \{0\}$. Dans ce cas on peut trouver une famille libre dans F (tout vecteur de $F \setminus \{0\}$ forme une famille libre de F). On en déduit que A est une partie non vide de $\mathbb{N}$ qui possède donc un plus grand élément noté $p = \max(A)$. Par définition de p, il existe une famille libre $(x_1, \cdots, x_p)$ dans F. Pour tout $x \in F$, la famille $(x_1, \cdots, x_p, x)$ est liée car de cardinal $p+1$. Or puisque $(x_1, \cdots, x_p)$ est libre, on en déduit que $x \in \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_p)$ ce qui montre que $(x_1, \cdots, x_p)$ engendre F et donc $(x_1, \cdots, x_p)$ est une base de F. On en déduit que $\dim(F) = p$. On a déjà montré que A est majorée par n donc $p \leq n$.
- Supposons que $\dim(E) = \dim(F)$. Par définition de F, on a $F \subset E$. En notant $\mathscr{F} = (f_1, \cdots, f_n)$ une base de F, on en déduit que c'est aussi une famille libre de E consituée de $n = \dim(E)$ vecteur(s). Par suite $\mathscr{F}$ est une base de E et donc le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathscr{F}$ est E d'où $\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) = F = E$. Réciproquement il est évident que $E = F \implies \dim(E) = \dim(F)$.

□

Méthode

Ce deuxième théorème permet d'affirmer que, si $\dim(F) = \dim(G)$, une seule inclusion suffit à montrer $F = G$.

Exemple : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.
Montrer que le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ est de dimension infinie.
Supposons que E soit de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.
Notons F l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.
On sait que $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$ donc de la même manière, $\dim(F) = n+1$.
De plus, $F \subset \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$. Ainsi, $\dim(F) \leq \dim(\mathscr{F}(I,\mathbb{R}))$. Donc $n+1 \leq n$. Absurde.
Ainsi, $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ est de dimension infinie.

2.2 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Proposition

Tout sous espace vectoriel F d'un espace vectoriel E de dimension finie admet au moins un supplémentaire.

Démonstration. Comme F est un sous-espace d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F est de dimension finie. Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une base de F. C'est une famille libre de E, donc on peut la compléter en une base $(e_1,\dots,e_n)$ de E (par le théorème de la base incomplète). On a $F = \operatorname{Vect}(e_1,\dots,e_p)$, posons $G = \operatorname{Vect}(e_{p+1},\dots,e_n)$. Alors $F \oplus G = E$ (cf chapitre 14). □

Proposition

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel quelconque E tels que $F+G$ soit directe. Alors $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$.

Démonstration. Posons $E_1 = F \oplus G$. Alors F et G sont supplémentaires dans E_1. En concaténant une base de F et une base de G, on obtient donc une base de E_1. Ainsi $\dim(E_1) = \dim(F) + \dim(G)$. □

Corollaire

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soit F un sous-espace vectoriel de E . Alors tout supplémentaire de F est de dimension $\dim(E) - \dim(F)$.

Démonstration. Soit G un supplémentaire de F, on a $F \oplus G = E$ donc $\dim(E) = \dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$. □

Proposition Formule de Grassman

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque E . Alors $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

Remarque : Cet énoncé généralise le précédent, puisque F et G sont supplémentaires si et seulement si $F+G = E$ et $F \cap G = \{0\}$.

Démonstration. Soit C un supplémentaire de $F \cap G$ dans G (existe car $F \cap G$ est un sous espace vectoriel de G de dimension finie). D'après ce qui précède, on a $\dim(F \cap G) + \dim(C) = \dim(G)$. Montrons que $F \oplus C = F + G$.
Soit $x \in F \cap C$, alors $x \in C$ donc $x \in G$. Comme $x \in F$, on a $x \in F \cap G$ puis $x \in (F \cap G) \cap C = \{0\}$. Ainsi $x = 0$ et $F \cap C = \{0\}$ donc la somme est directe.
Comme $C \subset G$, on a $F + C \subset F + G$.
Réciproquement, soit $x \in F + G$, il existe $(y,z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$. De plus, $z \in G$ donc il existe $(a,b) \in (F \cap G) \times C$ tel que $z = a + b$. Ainsi $x = (y+a) + b$ avec $b \in C$ et $y + a \in F$ (car $y, a \in F$ et F est un sous espace vectoriel), donc $F + G \subset F \oplus C$ puis $F \oplus C = F + G$.
On a donc $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(C) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$. □

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer l'intersection de deux plans vectoriels P_1, P_2 non confondues.
Comme $P_1 \cap P_2 \subset P_1$, $\dim(P_1 \cap P_2) \leq \dim(P_1) = 2$.
Comme $P_1 + P_2 \subset \mathbb{R}^3$, on a $\dim(P_1 + P_2) \leq 3$, donc :

$$\dim(P_1 \cap P_2) = \dim(P_1) + \dim(P_2) - \dim(P_1 + P_2) \geq 2 + 2 - 3 = 1$$

ce qui prouve que $P_1 \cap P_2$ n'est pas réduit à $\{0\}$.
Ainsi, $\dim(P_1 \cap P_2) \in \{1,2\}$.
Si $\dim(P_1 \cap P_2) = 2$ alors, $P_1 \cap P_2 \subset P_1$ et $\dim(P_1 \cap P_2) = \dim P_1$. Ainsi, $P_1 \cap P_2 = P_1$ et de même $P_1 \cap P_2 = P_2$ donc $P_2 = P_1$ contraire à l'hypothèse.
Ainsi, $\dim(P_1 \cap P_2) = 1$. Ainsi, $P_1 \cap P_2$ est une droite vectoriel.

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous espaces vectoriels de E. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $E = F \oplus G$

(ii) $F \cap G = \{0\}$ et $\dim E = \dim F + \dim G$

(iii) $F + G = E$ et $\dim E = \dim F + \dim G$

Démonstration.

- (i) $\Rightarrow$ (iii) : Supposons (i) alors $E = F + G$ et $\dim(E) = \dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$. Ainsi, (i) $\Rightarrow$ (iii).
- (iii) $\Rightarrow$ (ii) : Supposons (iii). D'après la formule de Grassmann, on a :

$$\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(\underbrace{F + G}_{=E}) = 0$$

  et donc $F \cap G = \{0\}$.
- (ii) $\Rightarrow$ (i) : Supposons (ii). D'après la formule de Grassmann, on a :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \underbrace{\dim(F \cap G)}_{=0} = \dim(E)$$

  Comme $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E, on en déduit que $F + G = E$.
  De plus $F \cap G = \{0\}$ donc la somme $F + G$ est directe. Ainsi, $F \oplus G = E$.

□

Méthode

Pour montrer que deux espaces F et G sont supplémentaires, si $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$, il est généralement plus simple de montrer que $F \cap G = \{0\}$.

Exemple : Soit $n \geq 1$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit H un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$. Si $a \in E \backslash H$, on a $H \oplus \text{Vect}(a) = E$. En effet, $\dim(H) + \dim(\text{Vect}(a)) = n = \dim(E)$ (car $a \neq 0$ sinon $a \in H$) et si $x \in H \cap \text{Vect}(a)$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda.a$. Si $\lambda \neq 0$, $a = \lambda^{-1}.x \in H$... absurde! Ainsi $\lambda = 0$ et $x = 0$. Par suite $H \cap \text{Vect}(a) = \{0\}$ et $H \oplus \text{Vect}(a) = E$.