Feuille d'exercices 13 : Dérivation

1 Nombre dérivé - fonction dérivée

Exercice 1. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soient f et $g : I \to \mathbb{R}$ dérivables en $a \in I$. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(a+x)-f(a-x)}{2x}, \qquad \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{x-a} \qquad \text{et} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h^2)-f(a+h)}{h}$$

Exercice 2. Etudier la dérivabilité en 0 des fonctions suivantes :

1. $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x^{n+1}+x^n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$,
2. $g : x \mapsto \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$,
3. $h : x \mapsto \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Exercice 3. On considère la fonction définie par :

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[, \ f(x) = \frac{1}{\sin(x)}.$$

1. Montrer que f réalise une bijection vers un intervalle que l'on précisera.
2. Sans déterminer f^{-1}, montrer que f^{-1} est dérivable sur un intervalle que l'on précisera et calculer $(f^{-1})'$.

Exercice 4. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f est paire si et seulement si f' est impaire.
2. Montrer que si f est impaire, f' est paire, que dire de la réciproque ?
3. Montrer que si f est périodique, f' est périodique, que dire de la réciproque ?

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f \circ f)(x) = \dfrac{x}{2}$.

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{f(x)}{2}$.
2. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f'\left(\dfrac{x}{2}\right)$.
3. En déduire que f' est constante.
4. Déterminer l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f \circ f)(x) = \dfrac{x}{2}$.

2 Dérivées n-ièmes et fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ ou $\mathcal{C}^\infty$

Exercice 6. Soit $n > 2$, calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de : $\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & (x^2+1)e^{3x} \end{array}$.

Exercice 7. Calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f : x \mapsto x^n(1+x)^n$. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 8. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de :

$$f : x \mapsto (x^3+x^2+1)e^{-x}$$

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la dérivée $(n+1)$-ième de : $f_n : x \mapsto x^n e^{1/x}$.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la dérivée n-ième de $t \mapsto t^{n-1}\ln t$.

Exercice 11. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de :

$$x \mapsto \cos x \qquad\qquad x \mapsto \sin x$$

Exercice 12. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de :

$$f_1 : x \mapsto \cos^3 x \qquad f_2 : x \mapsto e^x \sin x$$

3 Propriétés des fonctions dérivables

Exercice 13. Soit f une fonction continue sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$ telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(0)$.
Montrer qu'il existe $x_0 \in]0,+\infty[$ tel que $f'(x_0) = 0$

Exercice 14. Soient $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$, soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que :

$$\exists c \in]a, b[,\ f'(c) = -\lambda \frac{f(c)}{c}.$$

Indication : on pourra appliquer le théorème de Rolle à $x \mapsto x^\lambda f(x)$.

Exercice 15. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, soient $n, k \in \mathbb{N}$, soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ n fois dérivable sur I.

1. On suppose que f admet au moins k zéros dans I. Montrer que pour tout $l \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq l \leq k$ et $0 \leq l \leq n$, $f^{(l)}$ admet au moins $k - l$ zéros dans I.
2. Montrer que si f s'annule $n + 1$ fois sur I, alors $f^{(n)}$ s'annule en au moins un point de I.

Exercice 16. Soit $T \in \mathbb{R}^*$. Soit f une fonction dérivable et T-périodique.
Montrer que f' s'annule une infinité de fois.

Exercice 17. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1, 1]$ et deux fois dérivable sur $]-1, 1[$ telle que $f(-1) = -1$, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que :

$$\exists c \in]-1, 1[,\ f''(c) = 0.$$

Exercice 18. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. On pose $M = \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$.

1. À quel type de fonction f correspond le cas $M = 0$? On suppose dans la suite que $M > 0$.
2. Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, il existe $c_x \in]a, b[$ tel que : $f(x) = \dfrac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c_x)$.
3. En déduire que : $\forall x \in [a, b],\ |f(x)| \leq \dfrac{M}{2}(x-a)(x-b)$, puis que : $|f'(a)| \leq \dfrac{M}{2}(b-a)$.

Exercice 19. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction continue sur $[a,+\infty[$ et dérivable sur $]a,+\infty[$ telle que : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$. On pose :

$$g : \begin{array}{ccl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f\left(\dfrac{1}{x} + a - 1\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(a) & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que g est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$.
2. En déduire qu'il existe $c \in]a,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 20.

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. Montrer que :
$$\exists c \in]a, b[,\ f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a)).$$
2. En déduire la règle de L'Hôpital :
si f et g sont deux fonctions continues sur $V =]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ et dérivables sur $V \setminus \{x_0\}$ telles que : $\forall x \in V \setminus \{x_0\}$, $g'(x) \neq 0$. Montrer que :
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = l.$$
3. Application : calculer les limites suivantes :
$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x) - x}{x^2}.$$

Exercice 21. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \ln x \end{array}$.
Montrons que f peut se prolonger en une fonction qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 22. On considère la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad e^x \text{ si } x < 0 \\ x & \mapsto \quad ax^2 + bx + c \text{ sinon.} \end{cases}$

Peut-on déterminer a, b, c pour que f soit de classe $\mathcal{C}^2$, $\mathcal{C}^3$?

Exercice 23. Soit :
$$f:\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-1/x^2} \end{array}$$
Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement par continuité en 0 est dérivable en 0.

Exercice 24. Résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$: $xy' - (1+x)y = -x^2$.

Exercice 25. Résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$: $xy' - 2y = (x-1)(x+1)^3$.

Exercice 26. Résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$: $xy' - 2y - x^4 = 0$.

Exercice 27. Résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$: $x(x-1)y' + (2x-1)y = 1$,

Exercice 28. Montrer que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k+1} \leq \ln\frac{k+1}{k} \leq \frac{1}{k}.$$

Exercice 29.
1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\left(\frac{1+x}{x}\right)^x \leq e \leq \left(\frac{1+x}{x}\right)^{x+1}$.
   On pourra appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction ln.
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{(n+1)^n}{n!} \leq e^n \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$.

Exercice 30. Montrer les inégalités suivantes :
1. $\forall x \in]-1,+\infty[$, $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$,
2. $\forall (x,y) \in [0,1[^2$, $x < y$, $\frac{y-x}{\sqrt{1-x^2}} < \arcsin y - \arcsin x < \frac{y-x}{\sqrt{1-y^2}}$.

Exercice 31. Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que si f' a une limite finie l en $+\infty$, alors $\frac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

Exercice 32.
1. On définit la suite (u_n) par : $u_0 \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{2}\sin u_n$.
   Etudier la convergence de (u_n).
2. On définit la suite (u_n) par : $u_0 \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \cos u_n$.
   Etudier la convergence de (u_n).

Exercice 33. On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{-u_n}$. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [\frac{1}{e}, 1].$$
Montrer que (u_n) converge. On note l sa limite. Comment obtenir une valeur approchée de l à 10^{-3} près ?

Exercice 34. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{u_n}\right)$.

On pose donc $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
1. Montrer que $f(x) > 0$ pour tout $x > 0$, en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $u_n \in [1, \frac{3}{2}]$.
3. Montrer que f admet un unique point fixe sur $[1, \frac{3}{2}]$.
4. Montrer que f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $[1, \frac{3}{2}]$ et déterminer la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.