Chapitre 4 : Fonctions usuelles

1 Fonctions logarithmes, exponentielles, puissance

1.1 La fonction logarithme népérien

Définition

On appelle fonction logarithme népérien et l'on note ln l'unique primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1, ce qui s'écrit aussi :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

Remarque : La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on sait qu'elle admet des primitives et que celles-ci diffèrent d'une constante. En choisissant la valeur en 1 de la fonction logarithme népérien, on fixe cette constante.

Proposition

- ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
- ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

Proposition

Pour tout $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a : $ab > 0$ et $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Démonstration. Si $a > 0$ et $b > 0$ alors $ab > 0$, ce qui assure la bonne définition de chacun des termes.
Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $g_b : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \ln(bt) - \ln(t) - \ln(b) \end{array}$. g_b est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme combinaison linéaire et composée de fonctions qui le sont, et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ g_b'(t) = \frac{b}{bt} - \frac{1}{t} = 0.$$

Ainsi, g_b est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $g_b(1) = \ln(b) - \ln(1) - \ln(b) = 0$, g_b est constante nulle.
On en déduit : $\forall a \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln(ab) - \ln(a) - \ln(b) = 0$. □

Corollaire

Soient $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $n \in \mathbb{Z}$. On a :

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a); \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b); \qquad \ln(a^n) = n\ln(a).$$

Démonstration.

- On a $\ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right) = \ln\left(\frac{a}{a}\right) = \ln(1) = 0$ par la proposition précédente. Ainsi $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.
- On a avec la proposition précédente, $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
- Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(a^n) = n\ln(a)$.
  - Pour $n = 0$, $\ln(a^0) = \ln(1) = 0 = 0 \times \ln(a)$.
  - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\ln(a^n) = n\ln(a)$. On a $\ln(a^{n+1}) = \ln(a^n \times a) = \ln(a^n) + \ln(a)$. Ainsi, par hypothèse de récurrence, on obtient : $\ln(a^{n+1}) = n\ln(a) + \ln(a) = (n+1)\ln(a)$.

  On a donc montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(a^n) = n\ln(a)$.
  Soit $n \in \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$. D'après ce qui précède. On a donc $\ln(a^n) = \ln\left(\frac{1}{a^{-n}}\right) = -\ln(a^{-n})$. Or, $-n > 0$ donc en utilisant la récurrence précédente, on obtient : $\ln(a^n) = -(-n)\ln(a) = n\ln(a)$.

□

Proposition

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Démonstration.

- La fonction ln est croissante, donc, par le théorème de la limite monotone, soit elle admet une limite finie L en $+\infty$, soit elle tend vers $+\infty$ (si elle n'est pas majorée).Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\ln(2^n) = n\ln(2)$ et $\ln(2) > 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(2^n) = +\infty$. La fonction ln n'est donc pas majorée. On a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} ln(x) = +\infty$
- On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$ donc par composition des limites $\lim\limits_{x\to 0} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$.
Or, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$.
- La fonction ln est dérivable en 1 donc on a : $\frac{\ln x}{x-1} = \frac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \ln'(1) = 1$
- La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable en 0 donc on a : $\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+x)-\ln(1+0)}{x-0} = 1$

□

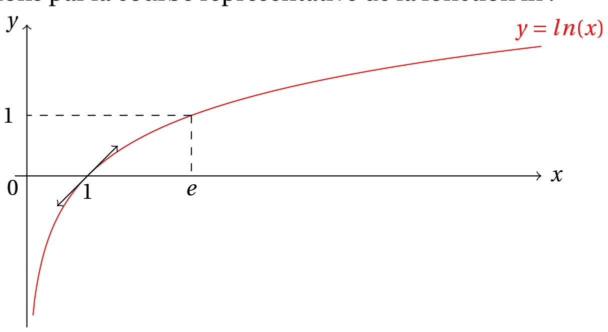
Corollaire

La fonction logarithme népérien est bijective de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. ln est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc ln est bijective de $]0;+\infty[$ dans $\left]\lim\limits_{x\to 0^+} ln(x); \lim\limits_{x\to+\infty} ln(x)\right[= \mathbb{R}$. □

Remarque : Il existe donc un unique réel strictement positif, noté e, tel que $\ln e = 1$. On a $e \simeq 2,72$.

Terminons par la courbe représentative de la fonction ln :



x	0		1		e		$+\infty$
$\ln'(x)$	‖			+			
ln	‖ $-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$

1.2 La fonction logarithme décimal

Définition

On appelle logarithme décimal (ou logarithme de base 10) et on note log (ou $\log_{10}$) la fonction
$$\log : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\ln x}{\ln(10)} \end{array}$$

Remarque :

- log vérifie les même propriétés que ln, la seule différence est que $\log(10) = 1$ ce qui permet d'avoir $\log(10^n) = n$ pour tout$n \in \mathbb{Z}$.
- Cette fonction est très utilisée en physique et en chimie (pH). Le pH par exemple, est lié au logarithme décimal des concentrations.
- La courbe représentative de log se déduit de celle de ln par la transformation : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x, \frac{y}{\ln(10)}) \end{array}$.

Proposition

La fonction log est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \log'(x) = \frac{1}{x\ln(10)}$.

1.3 La fonction exponentielle

Définition

On appelle fonction exponentielle et on note exp la fonction réciproque de la fonction ln.

Remarque : On a donc : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*,\ y = \exp x \Longleftrightarrow x = \ln y$.

Proposition

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(\exp(x)) = x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\exp(\ln(x)) = x$.
- La fonction exponentielle est une bijection continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$.

Démonstration. • Les deux premiers points sont des conséquences du fait que exp est la réciproque de la fonction ln : $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ qui est bijective, continue et strictement croissante. La fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est bijective, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$. Ainsi exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ par le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\exp'(x) = \frac{1}{\ln'(\exp(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\exp(x)}} = \exp(x).$$

□

Proposition

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{Z}$.

$$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b) \qquad \exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)} \qquad \exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)} \qquad \exp(na) = (\exp(a))^n.$$

Démonstration. On a $\ln(\exp(a+b)) = a+b$ et $\ln(\exp(a)\exp(b)) = \ln(\exp(a)) + \ln(\exp(b)) = a+b$. Par unicité de l'antécédent de $a+b$ par la fonction ln, $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$. Les trois autres propriétés se démontrent de même. □

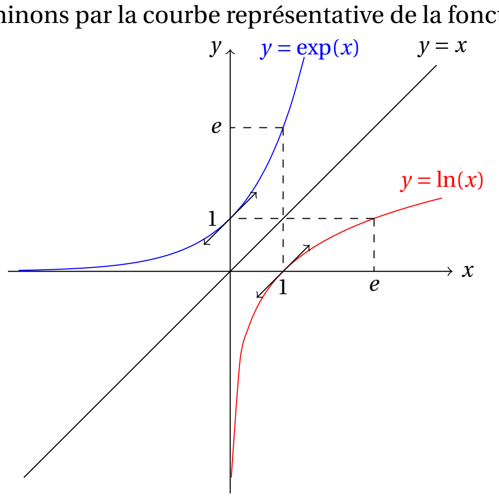
Remarque : Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\exp(n) = (\exp(1))^n = e^n$.

Proposition

$$\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1.$$

Démonstration. Les deux premières se déduisent des limites de ln en 0^+ et en $+\infty$. La dernière limite est une conséquence du fait que exp est dérivable en 0. On reconnait alors le taux d'accroissement en 0 de la fonction exp. □

Terminons par la courbe représentative de la fonction exp :



x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$(\exp)'(x)$				$+$			
exp	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

1.4 Fonctions trigonométriques hyperboliques

Définition

On définit les fonctions cosinus hyperbolique, noté ch, et sinus hyperbolique, noté sh, par :

$$\mathrm{ch} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\exp(x)+\exp(-x)}{2} \end{array} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\exp(x)-\exp(-x)}{2} \end{array}.$$

Remarque :

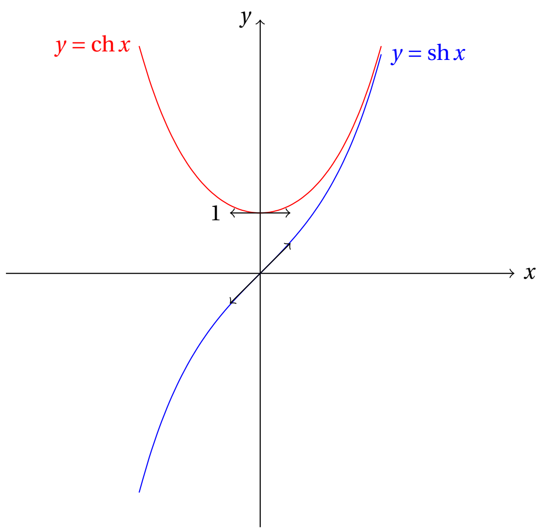
- Ces deux fonctions sont appelées ainsi par analogie avec les formules d'Euler.
- La courbe de la fonction ch correspond à la forme d'une chainette (corde fixée à ses extrémités) et soumis à la pesanteur. Elle apparait donc dans certaines équations physique.

Proposition

- ch et sh sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$, avec $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$.
- ch est paire, sh est impaire.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{ch}\,(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{ch}\,(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{sh}\,(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{sh}\,(x) = +\infty$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{ch}\,(x) + \mathrm{sh}\,(x) = \exp(x), \qquad \mathrm{ch}\,(x) - \mathrm{sh}\,(x) = \exp(-x), \qquad \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1.$$

Démonstration. En multipliant entre elles les deux égalités précédentes, on reconnait une identité remarquable et on utilise le fait que $\exp(x)\exp(-x) = \exp(x-x) = \exp(0) = 1$. □



Cosinus hyperbolique :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{ch}'(x)$		$-$	0	$+$	
ch	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Sinus hyperbolique :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{sh}'(x)$			$+$		
sh	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}\,(x) > 0$. Ainsi, sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}\,(x) = \dfrac{\exp(x)-\exp(-x)}{2}$. Or,

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}'(x) \geq 0 &\iff \exp(x) \geq \exp(-x) \\ &\iff \exp(2x) \geq 1 \quad \text{car } \exp(-x) \geq 0 \\ &\iff x \geq 0 \end{aligned}$$

et ch$'$ ne s'annule qu'en 0. Ainsi, ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$. Elle admet donc un minimum en 0 valant $\mathrm{ch}\,(0) = 1$. □

1.5 Fonctions puissances

On connait déjà la fonction $x \mapsto x^\alpha$ dans les cas suivants :

- si $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^n = \underbrace{x \times \ldots \times x}_{n \text{ fois}}$. La fonction $x \mapsto x^n$ est alors définie sur $\mathbb{R}$.

- si $\alpha = 0$, par convention, on pose : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^0 = 1$. La fonction $x \mapsto x^0$ est alors définie sur $\mathbb{R}$.
- si $\alpha = n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, on pose : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $x^n = \dfrac{1}{x^{-n}}$. La fonction $x \mapsto x^n$ est alors définie sur $\mathbb{R}^*$.

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a $x^n = (\exp(\ln(x)))^n = \exp(n\ln(x))$. Cette propriété permet de généraliser la notion de puissance à des exposants réels.

Définition

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle fonction puissance d'exposant α la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^\alpha = \exp(\alpha\ln(x)) \end{array}.$$

Remarque :

- Si $\alpha \notin \mathbb{Z}$, la définition précédente impose une définition sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Si $\alpha \in \mathbb{Z}$, cette définition est compatible avec celle que l'on connaissait déjà (sur un domaine plus large).
- Si $\alpha > 0$, on a $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha = 0$. On peut donc prolonger la fonction $x \mapsto x^\alpha$ par continuité en 0, en posant $0^\alpha = 0$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. La constante $e > 0$ est strictement positive et par définition $e^x = \exp(x\ln(e)) = \exp(x)$. La fonction exponentielle évaluée en $x \in \mathbb{R}$ est la fonction puissance d'exposant x évaluée en la constante e.
- La fonction racine carrée n'est autre que $x \mapsto x^{1/2}$: soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $(x^{1/2})^2 = \left(e^{\frac{1}{2}\ln(x)}\right)^2 = e^{\ln(x)} = x$ et $x^{1/2} > 0$ donc $x^{1/2} = \sqrt{x}$ et ceci reste vrai en 0.

Proposition

Soient $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha, \qquad x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta, \qquad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}, \qquad \ln\left(x^\alpha\right) = \alpha\ln(x)$$

Démonstration. Ces propriétés sont des conséquences des propriétés de la fonction exponentielle. □

Proposition

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^\alpha \end{array}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \alpha x^{\alpha-1} \end{array}$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^\alpha \end{array}$ est donc strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa monotonie dépend du signe de α.

Démonstration. On pose $p_\alpha \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^\alpha \end{array}$.

p_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions qui le sont et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a
$p'_\alpha(x) = \exp(\alpha\ln(x))\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$.
Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, p_α est donc strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa monotonie dépend du signe de α. □

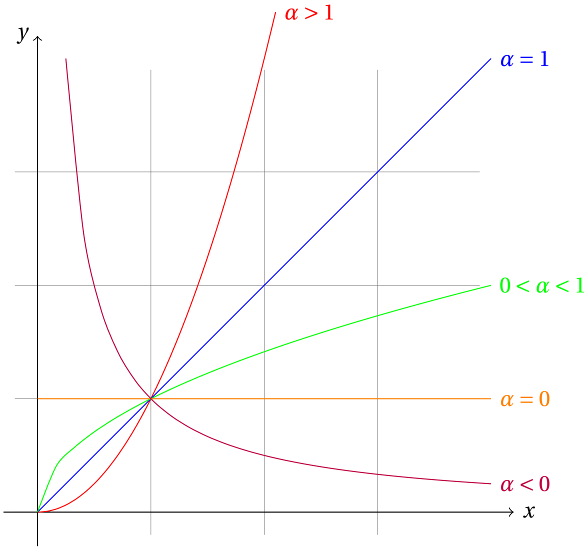
Remarque : Si $\alpha > 0$, la fonction $p_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ peut être prolongé en 0. Etudions la dérivabilité de ce prolongement.

- Si $\alpha > 1$, $\dfrac{p_\alpha(x) - p_\alpha(0)}{x - 0} = \dfrac{x^\alpha}{x} = x^{\alpha-1} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Donc $x \mapsto x^\alpha$ est également dérivable en 0 et sa dérivée en 0 vaut 0.
- Si $\alpha \in]0, 1[$, $\dfrac{p_\alpha(x) - p_\alpha(0)}{x - 0} = \dfrac{x^\alpha}{x} = x^{\alpha-1} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$. La courbe présente donc une tangente verticale en (0,0).

Proposition

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

- Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha = 0$.
- Si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha = +\infty$.



Cas $\alpha > 0$:

x	0	1	$+\infty$
p_α	0	$\nearrow$ 1 $\nearrow$	$+\infty$

Cas $\alpha < 0$:

x	0	1	$+\infty$
p_α	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$ 1 $\searrow$	0

Méthode

Si une fonction est donnée sous la forme $u(x)^{v(x)}$ (où u est une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs strictement positives). On se ramène a toujours à une écriture $u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln(u(x))}$.

Théorème de croissances comparées

Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On a :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0$.

Remarque :

- Il faut surtout retenir la philosophie de ce théorème : les fonctions exponentielles l'emportent sur les fonctions puissances qui l'emportent sur les fonctions logarithmes.
- Le cas $\alpha \leq 0$ et $\beta \geq 0$ peut s'étudier directement (il n'y a pas d'indétermination) ; de même pour $\alpha \geq 0$ et $\beta \leq 0$. Le cas $\alpha < 0$ et $\beta < 0$ s'obtient en passant à l'inverse dans le cas précédent.

Démonstration. • **Préliminaire :** montrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$:

Soit $x > 1$. Soit $t \in [1, x]$, on a $0 < \sqrt{t} \leq t$ et donc $0 \leq \dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ puis en intégrant (les bornes étant dans le bon sens),

$$0 \leq \ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \leq \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{t}]_1^x = 2\sqrt{x} - 2 \leq 2\sqrt{x}.$$

En divisant par x ($x > 0$), il vient $0 \leq \dfrac{\ln x}{x} \leq \dfrac{2\sqrt{x}}{x} = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$. Par le théorème d'encadrement, on a alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

- Soit $x > 1$. On a : $\dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = \left(\dfrac{\ln x}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta = \left(\dfrac{\frac{\beta}{\alpha}\ln\left(x^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta = \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^\beta \left(\dfrac{\ln\left(x^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{\alpha}{\beta}} = +\infty$ (car $\frac{\alpha}{\beta} > 0$), on en déduit (par composition) que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln\left(x^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}} = 0$. De plus, $\lim\limits_{T \to 0} T^\beta = 0$ (car $\beta > 0$) et donc par composition $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$.

- On a $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{(\ln X)^\beta}{X^\alpha} = 0$. Ainsi, par composition, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^\beta}{\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha} = 0$.

Soit $x \in]0, 1[$, on a : $\dfrac{\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^\beta}{\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha} = x^\alpha \left(-(\ln x)\right)^\beta = x^\alpha |\ln x|^\beta$. Donc $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{(\ln X)^\beta}{X^\alpha} = 0$ donc par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln(e^x))^\beta}{(e^x)^\alpha} = 0$ c'est à dire $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\beta}{e^{\alpha x}} = 0$. De plus, pour tout $x>0$, $\dfrac{x^\beta}{e^{\alpha x}} > 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x =$ et $\lim\limits_{X\to 0} |X|^\alpha |\ln X|^\beta = 0$ donc par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^x)^\alpha |\ln(e^x)|^\beta = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\alpha x}|x|^\beta = 0$.

$\square$

2 Fonctions trigonométriques

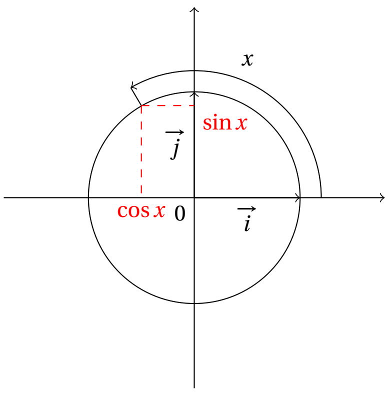
2.1 Fonctions circulaires

2.1.1 Cosinus - Sinus

Définition

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $(0, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct. On note M le point du cercle trigonométrique (cercle de centre O et de rayon 1) tel que l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ a pour mesure x radians. On note alors $(\cos x, \sin x)$ les coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On appelle cosinus la fonction $\cos : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array}$ et sinus la fonction $\sin : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$.



Proposition

- La fonction cos est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, paire , continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\cos' = -\sin$.
- La fonction sin est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, impaire , continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\sin' = \cos$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
- Leurs variations sur $[0, \pi]$ sont donnés par :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$(\sin)'(x)$		$+$	0	$-$	
$\sin$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$(\cos)'(x)$	0		$-$		0
$\cos$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	1

Remarque : Revoir le formulaire pour les valeurs usuelles, les formules d'additions, de duplication, de transformations de produits en sommes.

Proposition

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Démonstration.
- On reconnait le taux d'accroissement de la fonction sin en 0. Or, sin est dérivable en 0 et $\sin'(0) = \cos(0) = 1$. Ce qui donne le résultat.

- Soit $x \in \mathbb{R}^*$. $\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{2\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2$. Ainsi, par composition et produit, on obtient que $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \times 1^2 = \frac{1}{2}$.

□

Définition

Soient $x, y, a \in \mathbb{R}$. On dit que x est congru à y modulo a, que l'on note $x \equiv y \quad [a]$ s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = y + ka$.

Proposition

Soient $x, y, u, v, a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$.

- Si $x \equiv y \quad [a]$ alors $y \equiv x \quad [a]$.
- Si $x \equiv y \quad [a]$ et $u \equiv v \quad [a]$, $x + u \equiv y + v \quad [a]$.
- $x \equiv y \quad [a] \iff xb \equiv yb \quad [ab]$.

Démonstration.

- $x \equiv y[a]$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = ka$. On a alors $y - x = (-k)a$ avec $-k \in \mathbb{Z}$ donc $y \equiv x[a]$.
- Si $x \equiv y[a]$ et $u \equiv v[a]$ alors, il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tels que $x - y = ka$ et $u - v = k'a$. Donc $(x+u)-(y+v) = (k+k')a$ avec $k + k' \in \mathbb{Z}$ donc $x + u \equiv y + v[a]$.
- $$\begin{aligned} x \equiv y[a] &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x - y = ka \\ &\underset{b\neq 0}{\iff} \exists k \in \mathbb{Z},\ xb - yb = kab \\ &\iff xb \equiv yb[ab] \end{aligned}$$

□

Proposition

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\cos x = 0 \iff x \equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$$
$$\sin x = 0 \iff x \equiv 0 \quad [\pi]$$

Démonstration. Voir cercle trigonométrique. □

Proposition : Cas d'égalité des fonctions trigonométriques

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors,

- $\cos x = \cos y \iff \begin{cases} x \equiv y \quad [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv -y \quad [2\pi] \end{cases}$.
- $\sin x = \sin y \iff \begin{cases} x \equiv y \quad [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv \pi - y \quad [2\pi] \end{cases}$.

Démonstration.

- On sait que :

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ \cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\sin a \sin b$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Posons, $a = \frac{x+y}{2}$ et $b = \frac{x-y}{2}$.
On a alors :

$$\begin{aligned} \cos x - \cos y &= \cos(a+b) - \cos(a-b) \\ &= -2\sin a \sin b \\ &= -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\cos x = \cos y &\iff \cos x - \cos y = 0 \\
&\iff -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) = 0 \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) = 0 \\ \text{ou} \\ \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) = 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} \frac{x+y}{2} \equiv 0 \quad [\pi] \\ \text{ou} \\ \frac{x-y}{2} \equiv 0 \quad [\pi] \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x \equiv -y \quad [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv y \quad [2\pi] \end{array}\right.
\end{aligned}$$

- On sait que :

$$\forall c, d \in \mathbb{R},\ \sin(c+d) - \sin(c-d) = 2\sin d \cos c$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Posons, $c = \dfrac{x+y}{2}$ et $d = \dfrac{x-y}{2}$.
On a alors :

$$\begin{aligned}
\sin x - \sin y &= \sin(c+d) - \sin(c-d) \\
&= 2\sin d \cos c \\
&= 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sin x = \sin y &\iff \sin x - \sin y = 0 \\
&\iff 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) = 0 \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) = 0 \\ \text{ou} \\ \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) = 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} \frac{x-y}{2} \equiv 0 \quad [\pi] \\ \text{ou} \\ \frac{x+y}{2} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi] \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x \equiv y \quad [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv \pi - y \quad [2\pi] \end{array}\right.
\end{aligned}$$

□

Exemple : Résolvons les équations $\cos(2x) = \frac{1}{2}$ et $\cos(x) + \sin(-3x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\cos(2x) = \frac{1}{2} &\iff \cos(2x) = \cos(\frac{\pi}{3}) \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} 2x \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ 2x \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x \equiv \frac{\pi}{6}\ [\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv -\frac{\pi}{6}\ [\pi] \end{array}\right.
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\dfrac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\cos(x)+\sin(-3x)=0 &\iff \cos(x)=-\sin(-3x)\\
&\iff \cos(x)=\sin(3x)\\
&\iff \cos(x)=\cos(\frac{\pi}{2}-3x)\\
&\iff \begin{cases} x\equiv \frac{\pi}{2}-3x\ [2\pi]\\ \text{ou}\\ x\equiv -\frac{\pi}{2}+3x\ [2\pi]\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} 4x\equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]\\ \text{ou}\\ 2x\equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x\equiv \frac{\pi}{8}\ [\frac{\pi}{2}]\\ \text{ou}\\ x\equiv \frac{\pi}{4}\ [\pi]\end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\left\{\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

2.1.2 Tangente

Définition

On appelle fonction tangente et on note tan, la fonction $x\mapsto \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

Proposition

- tan est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.
- tan est π-périodique et impaire.
- $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\tan(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to(-\frac{\pi}{2})^+}\tan(x)=-\infty$.
- tan est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$ et on a : $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$, $\tan'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$.

Remarque : ⚠ tan n'est pas strictement croissante sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$, car $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$ n'est pas un intervalle ! Elle est strictement croissante sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$, par exemple $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

Démonstration.

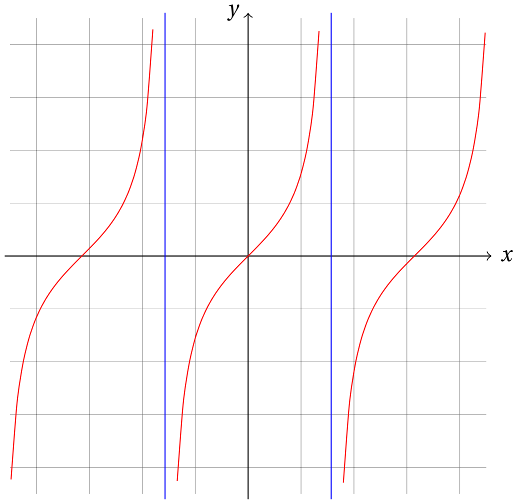
- Soit $x\in\mathbb{R}$. On a : $\cos(x)=0 \iff x\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$. Ainsi, tan est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.
- Montrons que tan est π périodique.
  Soit $x\in\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$. Montrons que $x+\pi\in\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.
  Par l'absurde. Supposons que $x+\pi\in\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$. Ainsi, il existe $p\in\mathbb{Z}$ tel que $x+\pi=p\pi+\dfrac{\pi}{2}$.
  On a alors : $x=\dfrac{\pi}{2}+(p-1)\pi$ donc $x\in\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$. Contradiction avec le fait que $x\in\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.
  Ainsi, $x+\pi\in\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$. De même, on prouve que $x-\pi\in\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.
  De plus, $\tan(x+\pi)=\dfrac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}=\dfrac{-\sin x}{-\cos x}=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\tan x$.
  Ainsi, tan est π périodique.
- Montrons que tan est impaire.
  Soit $x\in\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$. On a $-x\in\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$ (prouvé comme précédemment). De plus,
  $\tan(-x)=\dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)}=\dfrac{-\sin x}{\cos x}=-\tan(x)$.
  Ainsi, tan est impaire.
- On a $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x=0$. De plus, pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\cos(x)>0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\tan x=+\infty$. Par imparité, on a $\lim\limits_{x\to(-\frac{\pi}{2})^+}=-\infty$.
- tan est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$ comme quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas.
  Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$,

$$\tan'(x)=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

□

Tableau de variations de tan sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et son graphe :

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$(\tan)'(x)$	||	$+$	||
tan	|| $-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$ ||



Proposition : Cas d'égalité de tan

Soient $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$, on a :

$$\tan x = \tan y \quad \Longleftrightarrow \quad x \equiv y \quad [\pi].$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}
\tan x = \tan y \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin y}{\cos y} \\
&\Longleftrightarrow \quad \sin x \cos y = \sin y \cos x \\
&\Longleftrightarrow \quad \sin x \cos y - \sin y \cos x = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \sin(x-y) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad x - y \equiv 0 \quad [\pi] \\
&\Longleftrightarrow \quad x \equiv y \quad [\pi]
\end{aligned}$$

□

2.2 Fonctions circulaires réciproques

Théorème

- La fonction sin réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$.
  On appelle Arc sinus et on note arcsin : $[-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ sa bijection réciproque.
- La fonction cos réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$.
  On appelle Arc cosinus et on note arccos : $[-1,1] \to [0,\pi]$ sa bijection réciproque.
- La fonction tan réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.
  On appelle Arc tangente et on note arctan : $\mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sa bijection réciproque.

Démonstration. On a vu que cos est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$. Ainsi, cos est bijective de $[0,\pi]$ sur $[\cos(\pi),\cos(0)] = [-1,1]$.
Les autres points se montrent de même. □

Corollaire

On a les équivalences suivantes :

- $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], \forall y \in [-1,1], \Big(y = \sin(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x = \arcsin(y)\Big).$
- $\forall x \in [0,\pi], \forall y \in [-1,1], \Big(y = \cos(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x = \arccos(y)\Big).$
- $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[, \forall y \in \mathbb{R}, \Big(y = \tan(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x = \arctan(y)\Big).$

Proposition : Arcsin

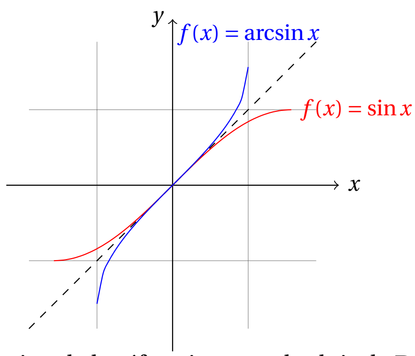
- arcsin est continue et strictement croissante sur $[-1;1]$.
- arcsin est dérivable sur $]-1;1[$ et on a : $\forall x \in]-1,1[,\ \arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- arcsin est impaire.
- Pour tout $x \in [-1,1]$, $\sin(\arcsin(x)) = x$
- Soit $x \in \mathbb{R}$. $\arcsin(\sin(x)) = x$ si et seulement si $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$

Démonstration.

- $\sin : \left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ est continue et strictement croissante. Il en est donc de même de sa bijection réciproque arcsin.
- $\sin : \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ est bijective et dérivable et : $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin'(x) = \cos(x)$.
  Ainsi, on a : $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\sin'(x) \neq 0$ et $\sin'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \sin'\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.
  Par le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque, arcsin est dérivable sur $\left]\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right),\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right[$. Ainsi, arcsin est dérivable sur $]-1,1[$.
  Soit $x \in]-1,1[$. On a $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\cos(\arcsin x)}$.
  D'autre part, $\cos^2(\arcsin x) + \sin^2(\arcsin x) = 1$, donc $\cos^2(\arcsin x) = 1 - x^2$ puis $\cos(\arcsin x) = \pm\sqrt{1-x^2}$.
  Comme $\arcsin x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, on a $\cos(\arcsin x) \geq 0$ et donc $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.
  Finalement, on obtient que $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $[-1,1]$ est symétrique par rapport à 0.
  Soit $y \in [-1,1]$. Il existe $x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $y = \sin x$. Ainsi, $\arcsin(y) = \arcsin(\sin(x)) = x$.
  On a de plus $\arcsin(-y) = \arcsin(-\sin(x)) = \arcsin(\sin(-x))$ (car sin est impaire). De plus, $-x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\arcsin(-y) = -x$.
  Finalement, $\arcsin(-y) = -x = -\arcsin(y)$. Ainsi, arcsin est impaire.
- Propriété de la fonction réciproque.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  Si $x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, alors $\arcsin(\sin x)) = x$ propriété des fonctions réciproques.
  Réciproquement, si $\arcsin(\sin x) = x$ alors, comme arcsin est à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que $x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

□

x	-1	0	1
arcsin	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$



Remarque : La fonction arcsin est utilisé en physique notamment dans le domaine de la réfraction avec les lois de Descartes, réflexion avec la 3ème loi de Kepler.

Proposition : Arccos

- arccos est continue et strictement décroissante sur $[-1;1]$.
- arccos est dérivable sur $]-1;1[$ et on a : $\forall x \in]-1;1[,\ \arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- Pour tout $x \in [-1,1]$, $\cos(\arccos(x)) = x$
- Soit $x \in \mathbb{R}$, $\arccos(\cos(x)) = x$ si et seulement si $x \in [0;\pi]$

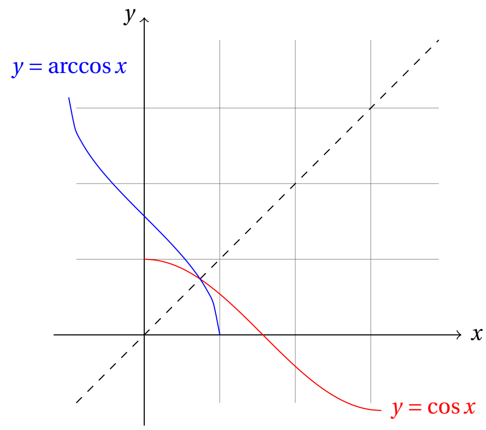
Démonstration.

- $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ est continue et strictement décroissante. Il en est donc de même de sa bijection réciproque arccos.

- $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ est dérivable et : $\forall x \in [0,\pi]$, $\cos'(x) = -\sin(x)$.
Ainsi, on a : $\forall x \in]0,\pi[$, $\cos'(x) \neq 0$ et $\cos'(0) = \cos'(\pi) = 0$. Par le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque, arcsin est dérivable sur $]\cos(\pi),\cos(0)[$. Ainsi, arccos est dérivable sur $]-1,1[$.
Soit $x \in]-1,1[$. On a $\arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sin(\arccos x)}$.
D'autre part, $\cos^2(\arccos x) + \sin^2(\arccos x) = 1$, donc $\sin^2(\arccos x) = 1 - x^2$ puis $\sin(\arccos x) = \pm\sqrt{1-x^2}$.
Comme $\arccos x \in]0,\pi[$, on a $\sin(\arccos x) \geq 0$ et donc $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$.
Finalement, on obtient que $\arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- Propriété de la fonction réciproque.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.
Si $x \in [0,\pi]$, alors $\arccos(\cos x)) = x$ propriété des fonctions réciproques.
Réciproquement, si $\arccos(\cos x) = x$ alors, comme arccos est à valeurs dans $[0,\pi]$, on en déduit que $x \in [0,\pi]$.

$\square$

x	-1	0	1
arccos	π $\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$ 0



Proposition : Arctan

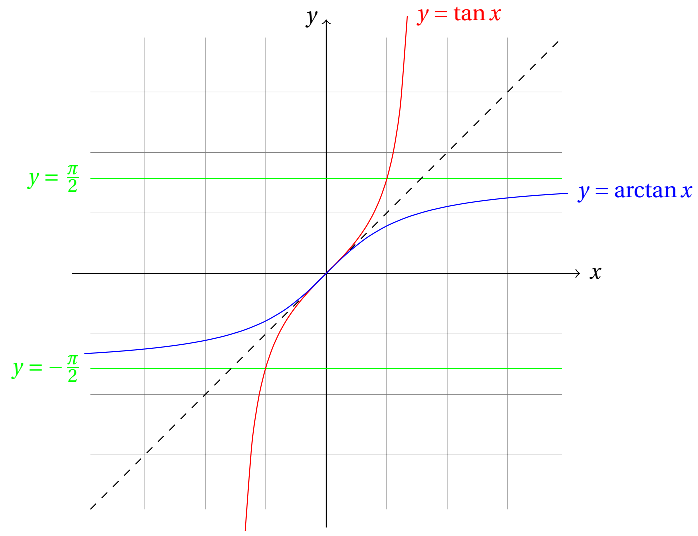
1. arctan est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
3. arctan est impaire.
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$.
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x)) = x$
6. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{y \in \mathbb{R} \ / \ \cos(y) = 0\}$. $\arctan(\tan(x)) = x$ si et seulement si $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$

Démonstration.

- $\tan : \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante. Il en est donc de même de sa bijection réciproque arctan.
- $\tan : \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ est dérivable et : $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan'(x) = 1 + (\tan(x))^2$.
Ainsi, on a : $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan'(x) \neq 0$. Par le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque, arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$
- $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.
Soit $y \in \mathbb{R}$. Il existe $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $y = \tan x$. Ainsi, $\arctan(y) = \arctan(\tan(x)) = x$.
On a de plus $\arctan(-y) = \arctan(-\tan(x)) = \arctan(\tan(-x))$ (car tan est impaire). De plus, $-x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\arctan(-y) = -x$.
Finalement, $\arctan(-y) = -x = -\arctan(y)$. Ainsi, arctan est impaire.
- Propriété de la fonction réciproque.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.
Si $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, alors $\arctan(\tan x)) = x$ propriété des fonctions réciproques.
Réciproquement, si $\arctan(\tan x) = x$ alors, comme arctan est à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, on en déduit que $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

$\square$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
arctan	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$



Méthode

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour montrer une égalité de la forme :

$$\forall x\in I,\ f(x)=g(x),$$

faisant intervenir les fonctions trigonométriques réciproques , on peut :

- montrer que f et g ont même dérivée sur I. On en déduit alors qu'il existe $C\in\mathbb{R}$ tel que : $\forall x\in I,\ f(x)=g(x)+C$. Puis, on détermine la valeur de C en évaluant cette dernière relation en un point.
- montrer que les cosinus/sinus/tangentes des deux membres sont égaux. Il faut ensuite avoir un encadrement des deux membres pour conclure à l'égalité souhaitée.

Par étude de fonction.

On pose $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\end{array}$.

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Soit $x\in\mathbb{R}^*$, $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}\times\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{1+x^2}=0$. Ainsi, il existe $C_1,C_2\in\mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x\in\mathbb{R}_-^*,\ f(x)=C_1$$

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f(x)=C_2$$

De plus,

- $f(1)=2\arctan(1)=\dfrac{\pi}{2}$ Donc $C_1=\dfrac{\pi}{2}$.
  $=C_1$
- $f(-1)=2\arctan(-1)=-\dfrac{\pi}{2}$ Donc $C_2=-\dfrac{\pi}{2}$.
  $=C_2$

Ainsi,

$$\arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x\in\mathbb{R}_-^*\\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x\in\mathbb{R}_+^*\end{cases}$$

Méthode directe :

Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. Montrons que $\arctan(x)=\dfrac{\pi}{2}-\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

$$\begin{aligned}
\tan\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)}\\
&= \frac{\cos\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)}\\
&= \frac{1}{\tan(\arctan(\frac{1}{x}))}\\
&= x\\
&= \tan(\arctan(x))
\end{aligned}$$

De plus, $\arctan(x) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ (car $x > 0$ et $\frac{1}{x} > 0$) donc $\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Ainsi, $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

Soit $x \in \mathbb{R}_-^*$. La fonction arctan étant impaire, on a : $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = -\left(\arctan(-x) + \arctan(\frac{1}{(-x)})\right)$ avec $-x \in \mathbb{R}_+^*$. Ainsi, $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{2}$.

Méthode : résolution d'une équation faisant intervenir les fonctions trigonométriques

Pour résoudre une équation faisant intervenir les fonctions trigonométriques réciproques, on procède souvent par analyse-synthèse. Dans la phase d'analyse, on applique la fonction cosinus/ sinus ou tangente afin d'obtenir les solutions éventuelles.

- L'équation a un sens pour $x \in [-1, 1]$.
- Analyse : supposons qu'il existe $x \in [-1, 1]$ tel que $\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13} = \arcsin x$.

  Alors, $\sin\left(\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13}\right) = \sin(\arcsin x)$.

  Or :

$$\begin{aligned}
\sin(\arcsin x) = \sin\left(\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13}\right) &\iff x = \sin\left(\arcsin \frac{4}{5}\right)\cos\left(\arcsin \frac{5}{13}\right) + \sin\left(\arcsin \frac{5}{13}\right)\cos\left(\arcsin \frac{4}{5}\right)\\
&\iff x = \frac{4}{5} \times \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} + \frac{5}{13}\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2}\\
&\iff x = \frac{4}{5}\sqrt{\frac{169-25}{13^2}} + \frac{5}{13}\sqrt{\frac{25-16}{5^5}}\\
&\iff x = \frac{4}{5} \times \frac{12}{13} + \frac{5}{13} \times \frac{3}{5}\\
&\iff x = \frac{48+15}{65})\\
&\iff x = \frac{63}{65}
\end{aligned}$$

  Donc $x = \frac{63}{65}$.

- Synthèse : Posons $x = \frac{63}{65}$.

  Alors, $\sin(\arcsin x) = \sin\left(\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13}\right)$, d'après l'équivalence de la phase d'analyse.

  - Or, $\arcsin(x) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ car $x \geq 0$
  - De plus, on a $0 \leq \frac{4}{5} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ car $\frac{16}{25} \leq \frac{3}{4}$ (car $64 \leq 75$) donc $0 \leq \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) \leq \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ (croissance de l'arcsinus).

    De même, $0 \leq \frac{5}{13} \leq \frac{1}{2}$ car $10 < 13$ donc $0 \leq \arcsin\left(\frac{5}{13}\right) \leq \frac{\pi}{6}$.

    On en déduit que $\arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{5}{13}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Donc $\arcsin x = \arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13}$.

- En conclusion, l'ensemble des solutions est $\left\{\frac{63}{65}\right\}$.