Feuille d'exercices 22 : Géométrie dans l'espace

1 Droites, plans et sphères

Exercice 1. Déterminer une équation cartésienne ainsi qu'une équation paramétrique des plans suivants :
1. passant par les points $A(1,1,1), B(0,1,0)$ et $C(1,0,1)$;
2. passant par $D(1,2,3)$ et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u}(0,1,1)$ et $\overrightarrow{v}(1,1,0)$;
3. passant par $E(0,0,0)$ dont un vecteur normal est $\overrightarrow{w}(0,1,0)$.

Exercice 2. Soient $\mathcal{P}|3x-4y+1=0$ et $\mathcal{Q}|2x-3y+6z-1=0$ deux plans de l'espace. Déterminer tous les points équidistants de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

Exercice 3. Caluler les distances suivantes :
1. distance du point $A(1,2,1)$ au plan $\mathcal{P} : x-2y+3z=1$
2. distance du point $B(1,2,-1)$ à la droite $D : \left\{\begin{array}{l} x=1+3t \\ y=2-t \\ z=2t \end{array}\right.$.
3. distance du point $C(1,0,2)$ à la droite $D : \left\{\begin{array}{l} 2x-y+z=1 \\ x-y+z=-1 \end{array}\right.$.

Exercice 4. Soit $\mathcal{P} : x+y+z-3=0$. Déterminer les caractéristiques des sphères suivantes ainsi que leur intersection avec $\mathcal{P}$ et leurs intersections deux à deux.
1. $x^2+y^2+z^2-2x-2y-z-1=0$
2. $x^2+y^2+z^2-4y+6z+12=0$
3. $x^2+y^2+z^2-x+3y-2z+\frac{17}{4}=0$

Exercice 5. L'espace est muni du repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Soit la sphère $\mathcal{S}$ de centre O et de rayon $R>0$.
1. Donner une équation cartésienne de $\mathcal{S}$.
2. Donner une équation cylindrique de $\mathcal{S}$.

Exercice 6. L'espace est muni du repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On considère le plan $\mathcal{P}=(ABC)$ où

$$A(1,0,1), \qquad B(-1,3,3), \qquad C(2,-1,2).$$

Soit D le point de coordonnées $(2,5,5)$.
1. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.
2. Déterminer les coordonnées cartésiennes de la projection orthogonale D' de D sur $\mathcal{P}$.
3. Déterminer les coordonnées cartésiennes du symétrique D'' de D par rapport à $\mathcal{P}$.

Exercice 7. L'espace est muni du repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On considère les points $A(1,2,3)$ et $B(-1,0,1)$.
1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
2. Déterminer une équation cartésienne du plan P médiateur du segment $[AB]$.
3. Déterminer les coordonnées des points d'intersections de la droite (AB) et du plan P' d'équation cartésienne $2x+y-z=3$ s'il en existe.

Exercice 8. L'espace est muni du repère orthonormé (non supposé direct) $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
1. Trouver une équation du plan passant par $A(2,-3,1)$ et contenant la droite d'équation $\left\{\begin{array}{l} 3x-y+1=0 \\ x+z+1=0 \end{array}\right.$.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan orthogonal à la droite $\left\{\begin{array}{l} z=x+1 \\ z=y \end{array}\right.$ et passant par le point $B(1,1,1)$.
3. Posons $\mathcal{P}_1$, le plan d'équation $x+y+z+1=0$ et $\mathcal{P}_2$ celui d'équation $x+2z=0$. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{Q}$ perpendiculaire à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ et passant par $C(1,0,0)$.

Exercice 9. On considère les points $A(3,-5,1)$ et $B(0,2,4)$. Soit $\mathcal{Q}$ le plan d'équation $2x-3y+z-10=0$. Déterminer une équation catésienne du plan orthogonal à $\mathcal{Q}$ contenant A et B.

Exercice 10. L'espace est muni du repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On appelle $\mathcal{S}$ la sphère de centre $\Omega(1,0,-1)$ et de rayon 3. Soit K le point $(2,2,1)$.

1. Vérifier que K appartient à $\mathcal{S}$.
2. Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ tangent à $\mathcal{S}$ en K.
3. Déterminer une équation de la sphère de rayon 2 qui est tangente extérieurement à $\mathcal{S}$ en K.
4. Montrer que l'intersection de $\mathcal{S}$ et du plan $\mathcal{Q}$ d'équation $2x+y+z+1=0$ est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 11. Déterminer $a \in \mathbb{R}^*$ tel que la droite d'équation $\frac{x+2}{3} = y-1 = \frac{z+4}{a}$ soit parallèle au plan d'équation $2x-y+3z-1=0$.

Exercice 12. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ les plans d'équations respectives $x+3y-5z+4=0$ et $2x-y-z-1=0$.
1. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ne sont pas parallèles.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan contenant $A(1,0,2)$ et $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$.

2 Produit scalaire, produit vectoriel et produit mixte

Exercice 13. Soient $A(0,1,2); B(-1,1,1); C(2,-1,2); D(4,0,-1)$ et $E(1,2,-2)$ cinq points de l'espace.
1. Déterminer les longueurs AB, AD, BC et BE.
2. Déterminer les produits scalaires $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CE}$.
3. Déterminer les produits vectoriels $\overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{CE}$.
4. Déterminer les produits mixtes $[\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}]$ et $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]$. En déduire le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

Exercice 14. Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs du plan.
1. Montrer que $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} = (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w})\overrightarrow{u}$.
2. En déduire l'identité
$$(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} + (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) \wedge \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}.$$

Exercice 15. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs fixés. Résoudre l'équation $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{x} = \overrightarrow{v}$.

Exercice 16. Soient $A(1,2,3), B(2,-1,2)$ et $C(0,1,-2)$ trois point de l'espace.
On considère les deux droites D_1 et D_2 définies par

$$D_1 : \begin{cases} x = 3-t \\ y = 1+2t \\ z = -1+t \end{cases} \quad \text{et} \quad D_2 : \begin{cases} x = 1+3t \\ y = -2t \\ z = 3+5t \end{cases},$$

ainsi que les trois plans P_1, P_2 et P_3 définis par

$$P_1 : \begin{cases} x = 1-2t+3u \\ y = -2+t+u \\ z = 4-t-2u \end{cases}, P_2 : 2x-y+3z-1=0, P_3 : x+2z-4=0.$$

1. Déterminer une équation cartésienne de P_1.
2. Déterminer une équation paramétrique de $P_2 \cap P_3$.
3. Donner une équation cartésienne du plan contenant les points A, B et C.
4. Déterminer l'intersection de la droites D_1 avec le plan P_2.
5. Donner une équation cartésienne du plan Q contenant D_1 et tel que $D_2 \parallel Q$.
6. Déterminer $P_1 \cap P_2 \cap P_3$.
7. Déterminer l'intersection de P_2 avec (AB).
8. Donner une équation paramétrique de la droite passant par A, parallèle à P_2 et coupant D_1.
9. Donner une équation cartésienne du plan passsant par C et contenant D_1.
10. Donner une équation paramétrique de la droite, si elle existe, passant par A et sécante avec les deux droites D_1 et D_2.

Exercice 17. Soit D définie par l'équation paramétrique $\begin{cases} x = 4+2t \\ y = 3+t \\ z = 1+t \end{cases}$.
1. Calculer la distance du point $M(t,t,t)$ à la droite D, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Déterminer la valeur de t pour laquelle la distance est minimale.
2. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de O sur la droite D.
3. Montrer que le plan $P | x-2z=2$ contient la droite D. Déterminer une équation cartésienne du plan Q perpendiculaire à P et contenant D.
4. Calculer la distance de O à P.

Exercice 18. Dans l'espace rapporté à la base orthonormée directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ on considère les vecteurs

$$\overrightarrow{I} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}\right), \qquad \overrightarrow{J} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}\right)$$

$$\overrightarrow{K} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}\right).$$

1. Démontrer que $\left(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\right)$ est une base orthonormée de l'espace.
2. Calculer $\overrightarrow{I} \wedge \overrightarrow{J}$. La base est-elle directe ?

Exercice 19. Soient (AB) et (CD) deux droites sécantes en un unique point I. Trouver l'ensemble des points M tels que

$$\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD}.$$

Exercice 20. Soient A, B, C, D des points non coplanaires. Trouver l'ensemble des points M tels que

$$\left(\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\right) \wedge \left(\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD}\right) = \overrightarrow{0}.$$

3 Transformations

Exercice 21. Soit r la rotation vectorielle de $\mathbb{R}^3$ d'angle π par rapport à la droite engendrée par le vecteur $(1, 2, 1)$. Soit r' la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et d'axe dirigé par $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ où $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est la base canonique de l'espace.
1. Donner les matrices représentatives de r et r' dans la base $\mathcal{B}$.
2. Trouver les images du plan d'équation $x - y + z = 0$ par r et r'.

Exercice 22. On considère les matrices suivantes :

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 1 & -4 \\ 1 & -8 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}, B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Quelles sont les matrices correspondant à des rotations vectorielle ? On précisera les caractéristiques de ces rotations.
2. Quelles sont les matrices correspondant à des réflexions ? On précisera les caractéristiques de ces réflexions.

Exercice 23. On considère les matrices suivantes :

$$A = \frac{1}{70}\begin{pmatrix} -42 & 4\sqrt{70} & 12\sqrt{14} \\ 4\sqrt{70} & 60 & -6\sqrt{5} \\ 12\sqrt{14} & -6\sqrt{5} & 52 \end{pmatrix},$$

$$B = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & -2 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Quelles sont les matrices correspondant à des rotations vectorielle ? On précisera les caractéristiques de ces rotations.
2. Quelles sont les matrices correspondant à des réflexions ? On précisera les caractéristiques de ces réflexions (par exemple on donnera une équation cartésienne du plan de reflexion ou un vecteur directeur de la droite de reflexion suivant les cas).

Exercice 24. Soit r la rotation vectorielle d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ et d'axe dirigé par $\overrightarrow{u}$. Montrer que

$$r(\overrightarrow{x}) = \cos(\theta)\overrightarrow{x} + \sin(\theta)\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{x} + (1 - \cos(\theta))\,\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}.$$

4 Géométrie pure

Exercice 25. On considère un carré $(ABCD)$ de l'espace euclidien. On note $\mathcal{P}$ le plan du carré et $\mathcal{D}$ la droite perpendiculaire à $\mathcal{P}$ en A ($\mathcal{D}$ est arbitrairement orientée). Sur $\mathcal{D}$, on considère un point M différent de A.
La perpendiculaire en M au plan (MBC) rencontre le plan $\mathcal{P}$ en un point R.
La perpendiculaire en M au plan (MCD) rencontre le plan $\mathcal{P}$ en un point S.

1. Faire une figure réunissant les données précédentes où la droite $\mathcal{D}$ apparaît comme verticale. *Par la suite (et pas uniquement dans ce problème), on n'hésitera pas à faire des schémas intermédiaires pour illustrer les preuves ; notamment, on pourra faire des schémas dans certains plans particuliers.*
2. Montrer que R appartient à la droite (AB).
3. Préciser un plan de réflexion échangeant R et S et en déduire que S appartient à la droite (AD). Donner alors la nature du triangle ARS.
4. Établir que la droite (MC) est perpendiculaire au plan du triangle MRS.
5. On note K le milieu du segment $[RS]$. Quel est le lieu géométrique du point K lorsque M décrit la droite $\mathcal{D}$ privée de A.
6. La hauteur issue de A du triangle MAK rencontre le côté $[MK]$ en H. Montrer que (AH) est la hauteur issue de A du tétraèdre $ARMS$.
7. Conclure que le point H est l'orthocentre du triangle MRS.