Corrigé de la feuille d'exercices 3

1 Equations - Inéquations - Valeurs absolues

Exercice 1. 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} x^2 - 2x \geq 0 &\iff x(x-2) \geq 0 \\ &\iff x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2 \end{aligned}$$

et :

$$2x - 3 \geq 0 \iff x \geq \frac{3}{2}$$

L'équation a donc un sens pour $x \in [2, +\infty[$.
Soit $x \in]2, +\infty[$,

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 2x} < \sqrt{2x-3} &\iff x^2 - 2x < 2x - 3 \\ &\iff x^2 - 4x + 3 < 0 \\ &\iff (x-1)(x-3) < 0. \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble solution est $[2, 3[$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |2x-4| = |x-1| &\iff \begin{cases} 2x - 4 = x - 1 \\ \text{ou} \\ 2x - 4 = -x + 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 3 \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{5}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, les solutions sont donc 3 et $\frac{5}{3}$.

3. L'équation a un sens pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}\}$.
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}\}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} - \frac{1}{2x-1} < \frac{1}{4x^2} &\iff \frac{4x(2x-1) - 4x^2 - (2x-1)}{4x^2(2x-1)} < 0 \\ &\iff \frac{4x^2 - 6x + 1}{4x^2(2x-1)} < 0 \end{aligned}$$

Les racines du numérateur sont : $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{3+\sqrt{5}}{4}$. De plus, on a $\dfrac{1}{2} < \dfrac{3}{4} < \dfrac{3+\sqrt{5}}{4}$ et $\dfrac{3-\sqrt{5}}{4} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4} < 0$ donc $\dfrac{3-\sqrt{5}}{4} < \dfrac{1}{2}$/ En faisant un tableau de signes, on trouve que l'ensemble des solutions est $]-\infty, 0[\cup]0, \frac{3-\sqrt{5}}{4}[\cup]\frac{1}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{4}[$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-4		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$x+4$		-	0	+		+	
$2x+1$		-		-	0	+	

Ainsi, Raisonnons par disjonction de cas :

- Si $x \leq -4$, on a :

$$\begin{aligned} |x+4| \leq |2x+1| &\iff -(x+4) \leq -(2x+1) \\ &\iff x \leq 3 \end{aligned}$$

- Si $x \in \left]-4, -\frac{1}{2}\right]$.

$$\begin{aligned} |x+4| \leq |2x+1| &\iff x+4 \leq -(2x+1) \\ &\iff 3x \leq -5 \\ &\iff x \leq -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

- Si $-\frac{1}{2} < x$, on a :

$$\begin{aligned} |x+4| \leq |2x+1| &\iff x+4 \leq 2x+1 \\ &\iff 3 \leq x \end{aligned}$$

Comme $-4 < -\frac{5}{3} < -\frac{1}{2}$.

L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc $\left]-\infty, -\frac{5}{3}\right] \cup [3, +\infty[$.

5. L'équation a un sens pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$,

$$\begin{aligned} \left|\frac{x-1}{x+3}\right| \leq 2 &\iff -2 \leq \frac{x-1}{x+3} \leq 2 \\ &\iff \begin{cases} 0 \leq \dfrac{3x+5}{x+3} \\ \dfrac{-x-7}{x+3} \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-7		-3		$-\frac{5}{3}$		$+\infty$
$3x+5$		-		-		-	0	+	
$x+3$		-		-	0	+	0	+	
$-x-7$		+	0	-		-		-	
$\frac{3x+5}{x+3}$		+		+	$\|$	-	0	+	
$\frac{-x-7}{x+3}$		-	0	+	$\|$	-		-	

On obtient que :

$$\left|\frac{x-1}{x+3}\right| \leq 2 \iff \left(x \in]-\infty, -3[\cup \left[-\frac{5}{3}, +\infty\right[\quad \text{et} \quad x \in]-\infty, -7] \cup]-3, +\infty[\right).$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $]-\infty, -7] \cup \left[-\frac{5}{3}, +\infty\right[$.

Exercice 2. Pour que l'équation ait un sens, il faut que $x \in \mathbb{R}_+$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$, on a $x + 4 - 4\sqrt{x} = (\sqrt{x} - 2)^2 \geq 0$ et $x + 9 - 6\sqrt{x} = (\sqrt{x} - 3)^2 \geq 0$. Ainsi, l'équation a un sens pour $x \in \mathbb{R}_+$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} \sqrt{x+4-4\sqrt{x}} + \sqrt{x+9-6\sqrt{x}} = 1 &\iff \sqrt{(\sqrt{x}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x}-3)^2} = 1 \\ &\iff |\sqrt{x}-2| + |\sqrt{x}-3| = 1 \end{aligned}$$

On procède ensuite par disjonction de cas.

x	0		4		9		$+\infty$
$\sqrt{x}-2$		-	0	+		+	
$\sqrt{x}-3$		-		-	0	+	

- Si $x \in [0, 4]$, on a :

$$\begin{aligned} |\sqrt{x}-2| + |\sqrt{x}-3| = 1 &\iff -(\sqrt{x}-2) - (\sqrt{x}-3) = 1 \\ &\iff -2\sqrt{x} = -4 \\ &\iff \sqrt{x} = 2 \\ &\iff x = 4 \end{aligned}$$

- Si $x \in]4,9]$, on a :

$$\begin{aligned} |\sqrt{x}-2|+|\sqrt{x}-3|=1 &\iff (\sqrt{x}-2)-(\sqrt{x}-3)=1 \\ &\iff 1=1 \end{aligned}$$

- Si $x \in]9,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} |\sqrt{x}-2|+|\sqrt{x}-3|=1 &\iff (\sqrt{x}-2)+(\sqrt{x}-3)=1 \\ &\iff 2\sqrt{x}=6 \\ &\iff x=9 \end{aligned}$$

Finalement, on obtient que l'ensemble des solutions est : $\mathcal{S}=[4,9]$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la quantité conjuguée, on obtient :

$$\sqrt{n^2+n+2}-\sqrt{n^2+1}=\frac{\left(\sqrt{n^2+n+2}-\sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{n^2+n+2}+\sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^2+n+2}+\sqrt{n^2+1}}=\frac{n^2+n+2-n^2-1}{\sqrt{n^2+n+2}+\sqrt{n^2+1}}=\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+2}+\sqrt{n^2+1}}$$

Or, on a $\sqrt{n^2+n+2} \geq \sqrt{n^2}=n$ et $\sqrt{n^2+1} \geq n$.
Ainsi, $0 \leq \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+2}+\sqrt{n^2+1}} \leq \dfrac{1}{2n}$. De plus, $0 \leq n+1 \leq 2n$ donc $0 \leq \dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+n+2}+\sqrt{n^2+1}} \leq \dfrac{2n}{2n}=1$.
Par ailleurs, $u_0=\sqrt{2}-1 \in [0,1]$.
On peut donc conclure que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n^2+n+2}-\sqrt{n^2+1} \in [0,1]$ donc E est borné.

Exercice 4. 1. Soient x et y deux réels positifs tels que $x \geq y$, on a :

- $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 = x+y+2\sqrt{x}\sqrt{y}$ et $(\sqrt{x+y})^2 = x+y$. Ainsi, $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 \geq (\sqrt{x+y})^2$. La racine carrée étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a $\sqrt{x}+\sqrt{y} \geq \sqrt{x+y}$ $\quad (\sqrt{x+y} \geq 0$ et $\sqrt{x}+\sqrt{y} \geq 0)$.
- On a : $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 = x+y+2\sqrt{x}\sqrt{y} \geq x \geq x-y$ car $y \geq 0$. Ainsi, $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 \geq (\sqrt{x-y})^2$ donc $\sqrt{x}+\sqrt{y} \geq \sqrt{x-y}$ car $\sqrt{x}+\sqrt{y} \geq 0$ et $\sqrt{x-y} \geq 0$.
- Enfin, on a $x=x-y+y$ avec $x-y \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$. Avec la première inégalité, on a : $\sqrt{x}=\sqrt{x-y+y} \leq \sqrt{x-y}+\sqrt{y}$. D'où $\sqrt{x}-\sqrt{y} \leq \sqrt{x-y}$

2. Soit x, $y \in \mathbb{R}$
   - 1er cas : si $|x| \geq |y|$:
     On peut appliquer les résultats de la question précédente à $|x|$ et $|y|$. Ainsi :

     $$\sqrt{|x|+|y|} \leq \sqrt{|x|}+\sqrt{|y|} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{|x|}-\sqrt{|y|} \leq \sqrt{|x|-|y|} \leq \sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}$$

     De plus, d'après l'inégalité triangulaire, on a : $|x+y| \leq |x|+|y|$ et $||x|-|y|| \leq |x-y| \leq |x|+|y|$.
     En combinant ces résultats, on a : $\sqrt{|x+y|} \leq \sqrt{|x|+|y|} \leq \sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}$ et
     $\left|\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}\right| = \sqrt{|x|}-\sqrt{|y|} \leq \sqrt{|x|-|y|} \leq \sqrt{||x|-|y||} \leq \sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{|x|+|y|} \leq \sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}$.
     Ce qui prouve les inégalités demandées.
   - 2ème cas : si $|y| \geq |x|$:
     En intervertissant les variables x et y, on a, d'après le 1er cas :
     $\sqrt{|y+x|} \leq \sqrt{|y|}+\sqrt{|x|}$.
     $\left|\sqrt{|y|}-\sqrt{|x|}\right| \leq \sqrt{|y-x|} \leq \sqrt{|y|}+\sqrt{|x|}$.
     Or, $\left|\sqrt{|y|}-\sqrt{|x|}\right| = \left|\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}\right|$ et $|y-x|=|x-y|$.
     D'où : $\sqrt{|x+y|} \leq \sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}$ et $\left|\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}\right| \leq \sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}$

   On a donc prouvé le résultat voulu.

Exercice 5. Soient x, $y \in \mathbb{R}$.
On remarque que $x=\dfrac{(x+y)+(x-y)}{2}$ et $y=\dfrac{(x+y)-(x-y)}{2}$.
Ainsi, d'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$|x|+|y| = \left|\frac{(x+y)+(x-y)}{2}\right| + \left|\frac{(x+y)-(x-y)}{2}\right| \leq \frac{|x+y|+|x-y|}{2} + \frac{|x+y|-|x-y|}{2} = |x+y|+|x-y|.$$

Ainsi, $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $|x|+|y| \leq |x+y|+|x-y|$.
On remarque également que $xy-1=(x-1)(y-1)+(x-1)+(y-1)$.
Donc d'après l'inégalité triangulaire, $1+|xy-1| \leq 1+|x-1||y-1|+|x-1|+|y-1| = (1+|x-1|)(1+|y-1|)$

2 Parité - Périodicité

Exercice 6. 1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{x} = 0 &\iff \frac{x^2-1}{x} = 0 \\ &\iff x^2 - 1 = 0 \\ &\iff x = \pm 1 \end{aligned}$$

Ainsi, f_1 est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.
$\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ est symétrique par rapport à 0.
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, $f_1(-x) = \dfrac{1}{-x + \dfrac{1}{x}} = \dfrac{-1}{x - \dfrac{1}{x}} = -f_1(x)$.
Ainsi, f_1 est impaire.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_2(x) \text{ est défini } &\text{ si et seulement si } \left\{ \begin{array}{l} x+1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{array} \right. \\ &\text{ si et seulement si } x \in [1, +\infty[\end{aligned}$$

Ainsi, f_2 est définie sur $[1, +\infty[$. $[1, +\infty[$ n'est pas symétrique par rapport à 0 donc f_2 n'est ni paire, ni impaire.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_3(x) \text{ est défini } &\text{ si et seulement si } (x-1)^2 \neq (x+1)^2 \\ &\text{ si et seulement si } 4x \neq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, f_3 est définie sur $\mathbb{R}^*$.
$\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à 0.
Soit $x \in \mathbb{R}^*$, $f_3(-x) = \dfrac{(x+1)^2 + (1-x)^2}{(x+1)^2 - (1-x)^2} = -\dfrac{(x+1)^2 + (x-1)^2}{(x-1)^2 - (x+1)^2} = -f_3(x)$.
Ainsi, f_3 est impaire.

Exercice 7. Soient f, $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

1. $g \circ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.
Soit $x \in \mathbb{R}$, $(g \circ f)(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$.
Ainsi, $g \circ f$ est paire.
2. $g \circ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.
Soit $x \in \mathbb{R}$, $(g \circ f)(-x) = g(f(-x)) = g(-f(x)) = -(g \circ f)(x)$.
Ainsi, $g \circ f$ est impaire.
3. $g \circ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.
Soit $x \in \mathbb{R}$, $(g \circ f)(-x) = g(f(-x)) = g(-f(x)) = (g \circ f)(x)$.
Ainsi, $g \circ f$ est paire.

Exercice 8. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Raisonnons par analyse-synthèse :
Analyse : Supposons qu'il existe $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, paire et $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, impaire telles que $f = g + h$.
Alors, on obtient que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x) + h(x)$
On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$,
ce qui donne, par somme et différence :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Existence : posons $\begin{array}{rccc} g : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} \end{array}$ et $\begin{array}{rccc} h : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{f(x)-f(-x)}{2} \end{array}$

- $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0
Soit $x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = \dfrac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \dfrac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x)$.
Donc g est paire.
- Soit $x \in \mathbb{R}$, $h(-x) = \dfrac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \dfrac{f(-x) - f(x)}{2} = -h(x)$.
Donc h est impaire.

- Enfin, soit $x \in \mathbb{R}$, $g(x) + h(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} + \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x)$.

On a donc $f = g + h$ avec g paire et h impaire.
Conclusion : f se décompose de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 9.
- La fonction f est 2π périodique car sin et cos le sont. Il suffit donc d'étudier f sur un intervalle de longueur 2π. Choisissons $[-\pi, \pi]$. On obtient le reste de la courbe en effectuant des translations de la courbe de vecteurs $(2k\pi, 0)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- De plus, f est impaire. En effet, $[-\pi, \pi]$ est symétrique par rapport à 0. Soit $x \in [-\pi, \pi]$, $f(-x) = -\sin x \cos^2(x) = -f(x)$. On peut donc réduire l'intervalle d'étude de f à $[0, \pi]$ puis on réalise une symétrie centrale de centre O.
- Enfin : Soit $x \in [0, \pi]$, on a $\pi - x \in [0, \pi]$. On a : $f(\pi - x) = \sin(\pi - x)\cos^2(\pi - x) = \sin(x)\cos^2(x) = f(x)$. Ainsi, il suffit d'étudier f sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Puis on effectue une symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$.

Il faut procéder aux différentes transformations en remontant les opérations. Ainsi après avoir tracé la courbe représentative de f sur $[0, \frac{\pi}{2}]$:

- on commence par effectuer une symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$;
- puis on réalise une symétrie centrale de centre O ;
- enfin, on effectue des translations de la courbe de vecteurs $(2k\pi, 0)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 10. Le domaine de définition des différentes fonctions est $\mathbb{R}$. Ainsi, il est symétrique par rapport à 0.
Soit $x \in \mathbb{R}$, $(f + g)(x + T_1 \times T_2) = f(x + T_1 \times T_2) + g(x + T_1 \times T_2) = f(x) + g(x)$ car $T_1 \in \mathbb{Z}$ et $T_2 \in \mathbb{Z}$. Donc $f + g$ est périodique et $T_1 \times T_2$ est une période.
La plus petite période serait $ppcm(T_1, T_2)$.
On montre de même que $f - g$ et fg sont périodiques de période $ppcm(T_1, T_2)$.

Exercice 11. On remarque que les fonctions constantes sont solutions.
Montrons que ce sont les seuls.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante et périodique. Alors il existe $T \in \mathbb{R}_+^*$ tel que f est T périodique. Par l'absurde, supposons que f n'est pas constante. Alors, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ tels que $f(a) \neq f(b)$.
Comme f est croissante, on a $f(a) \leq f(b)$.
Par T-périodicité de f, on obtient :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ f(a + nT) = f(a)$$
Or, comme $T > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $a + pT \geq b$. Toujours par croissance de f, on a $f(b) \leq f(a + pT)$ et donc $f(b) \leq f(a)$.
Ainsi, $f(b) = f(a)$. Absurde.
f est donc constante.
Ainsi, les seules solutions sont les fonctions constantes.

3 Limites

Exercice 12.
- On a une FI. On cherche à factoriser numérateur et dénominateur par $x - 1$.
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\dfrac{3x^2 - x - 2}{x^4 - 1} = \dfrac{(3x+2)(x-1)}{(x^2-1)(x^2+1)} = \dfrac{3x+2}{(x+1)(x^2+1)}$.
On obtient alors par produit et quotient : $\lim\limits_{x \to 1} f_1(x) = \dfrac{5}{4}$.
De plus, soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, $\dfrac{3x^2 - x - 2}{x^4 - 1} = \dfrac{x^2}{x^4} \times \dfrac{3 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^4}} = \dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{3 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^4}}$. Or, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^4}} = \dfrac{3}{1} = 3$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_1(x) = 0$.
- On a une FI. On va utiliser la quantité conjuguée.
Soit x un réel suffisamment grand, $f_2(x) = \dfrac{\left(\sqrt{x^2 - 4x + 1} - x + 2\right)\left(\sqrt{x^2 - 4x + 1} + x - 2\right)}{\sqrt{x^2 - 4x + 1} + x - 2}$.
$$= \frac{x^2 - 4x + 1 - (x-2)^2}{\sqrt{x^2 - 4x + 1} + x - 2}$$
$$= \frac{-3}{\sqrt{x^2 - 4x + 1} + x - 2}$$
Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 4x + 1} + x - 2\right) = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = 0$.

- On a $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ Et pour tout $X \in \mathbb{R}$, on a : $\dfrac{X^2+2X}{X^2+1} = \dfrac{1+2\frac{1}{X}}{1+\frac{1}{X^2}}$. Ainsi $\lim\limits_{X\to-\infty} \dfrac{X^2+2X}{X^2+1} = 1$ puis par composition $\lim\limits_{x\to 0} f_3(x) = 1$.

Exercice 13. • $\lim\limits_{x\to -5}(1-5x) = 26 > 0$, $\lim\limits_{x\to -5^-} \dfrac{1}{5+x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -5^+} \dfrac{1}{5+x} = +\infty$.
Ainsi, par produit, $\lim\limits_{x\to -5^-} f_1(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to -5^+} f_1(x) = +\infty$.
Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{-5,0\}$. On a : $\dfrac{1-5x}{5+x} = \dfrac{-5x}{x} \times \dfrac{\frac{-1}{5x}+1}{\frac{5}{x}+1} = -5\dfrac{\frac{-1}{5x}+1}{\frac{5}{x}+1}$. Or, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_1(x) = -5$.

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3}{1+x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{x^3}{x} \times \dfrac{1}{\frac{1}{x}+1}\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(x^2 \times \dfrac{1}{\frac{1}{x}+1}\right)$. Or, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{x}+1} = 1$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3}{1+x} = +\infty$.
Par composition, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_2(x) = +\infty$.
- Comme précédemment, on a une FI.
Soit x réel négatif suffisamment grand en valeurs absolues, $f_3(x) = \dfrac{\left(\sqrt{x^2-4x+9}+x-3\right)\left(\sqrt{x^2-4x+9}-x+3\right)}{\sqrt{x^2-4x+9}-x+3}$.
$$= \frac{x^2-4x+9-(x-3)^2}{\sqrt{x^2-4x+1}-x+3}$$
$$= \frac{2x}{\sqrt{x^2-4x+9}-x+3}$$
On a toujours une FI. On factorise par le terme prépondérant. $f_3(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{9}{x^2}}-x+3}$.
Or, $x<0$ donc $\sqrt{x^2} = |x| = -x$. Ainsi, $f_3(x) = \dfrac{2}{-\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{9}{x^2}}-1+\frac{3}{x}}$
Or, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{9}{x^2}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{9}{x^2}}-1+\frac{3}{x}\right) = -2$. Par quotient, on obtient : $\lim\limits_{x\to-\infty} f_3(x) = -1$.

Exercice 14. 1. On a une FI. Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $\dfrac{\sin(\pi x)}{x-1} = \dfrac{\sin(\pi x)-\sin(\pi)}{x-1}$. En posant, $g : x \mapsto \sin(\pi x)$, on obtient : $\dfrac{\sin(\pi x)}{x-1} = \dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$. On reconnait donc le taux d'accroissement de g en 1. Or, g est dérivable en 1 et
$g'(1) = \pi\cos(\pi) = -\pi$. Ainsi, par définition de la dérivabilité, $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(\pi x)}{x-1} = -\pi$.

2. On a une FI. On va utiliser la composition des limites et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.
En effet, soit $x \in \mathbb{R}^*$, $x\sin\left(\dfrac{3}{x}\right) = \dfrac{\sin\left(\dfrac{3}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}} = 3\dfrac{\sin\left(\dfrac{3}{x}\right)}{\dfrac{3}{x}}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x} = 0$. Donc par composition des limites,
$\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\dfrac{3}{x}\right) = 3$.
3. La fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est dérivable en 0 et sa dérivée en 0 vaut $\dfrac{1}{2\sqrt{1+0}} = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \dfrac{1}{2}$.
On aurait aussi pu utiliser la quantité conjuguée.
4. On a $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1+x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$. Ainsi, par quotient $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)} = 0$.

4 Etude de fonctions

Exercice 15. • Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} f_1(x) \text{ est défini } & \text{ si et seulement si } x^2-3x+2 \neq 0 \\ & \text{ si et seulement si } x \neq 1 \text{ et } x \neq 2 \end{aligned}$$
Ainsi, f_1 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$. Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{1,2\}$, $f_1'(x) = \frac{x^2-3x+2-(2x-3)x}{(x^2-3x+2)^2} = \frac{-x^2+2}{(x^2-3x+2)^2}$.
- f_2 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, $f_2'(x) = (3x+7)e^{3x}$.

- f_3 est définie sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_3'(x) = -3x^2 \sin(x^3)$
- f_4 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, $f_4'(x) = -3(\cos(x))^2 \sin(x)$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \geq 0$. Ainsi, f_5 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_5'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} e^{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$, $f_6(x)$ est définie si et seulement si $x + \sqrt{1+x^2} \geq 0$. Cette inégalité est directement vraie sur $\mathbb{R}_+$. De plus, soit $x \in \mathbb{R}_-$,

$$\begin{aligned} x + \sqrt{1+x^2} \geq 0 &\iff \sqrt{1+x^2} \geq -x \geq 0 \\ &\iff 1 + x^2 \geq x^2 \\ &\iff 1 \geq 0 \end{aligned}$$

La dernière inégalité étant trivialement vraie, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, $x + \sqrt{1+x^2} \geq 0$.
Ainsi, f_6 est définie sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{1+x^2} = 0$ si et seulement si $\sqrt{1+x^2} = -x$. En élevant cette égalité au carré, on obtient : $1 + x^2 = x^2$ qui n'admet aucune solution. Ainsi, l'équation $x + \sqrt{1+x^2} = 0$ n'admet aucune solution.
Ainsi, f_6 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_6'(x) = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}$

Exercice 16. • f est définie et dérivable sur $]-\infty, 2[$. Soit $x \in \in]-\infty, 2[$, $f'(x) = \frac{\sqrt{2-x}+\frac{x}{2\sqrt{2-x}}}{2-x} = \frac{2(2-x)+x}{2(2-x)\sqrt{2-x}} = \frac{4-x}{2(2-x)\sqrt{2-x}}$.

- Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 > 0$, g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \ln(x^2+1) + \dfrac{2x^2}{x^2+1}$.
- h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \cos\left(\ln\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}+3}\right)\right) \times \frac{1}{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}+3}} \times \frac{2e^{2x}(e^{2x}+3) - 2e^{2x}(e^{2x}+1)}{(e^{2x}+3)^2} \\ &= \cos\left(\ln\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}+3}\right)\right) \times \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)(e^{2x}+3)} \end{aligned}$$

Exercice 17. Soit $x \in]1, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} &= \frac{(x-2)\sqrt{x-1}}{x-1} \\ &= \frac{x-2}{\sqrt{x-1}} \end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{x \to 1} (x-2) = -1$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty$.
Ainsi, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = -\infty$.
f n'est pas dérivable en 1. Sa courbe représentative admet une tangente verticale en $(1, 0)$.

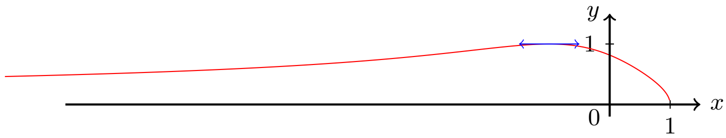
Exercice 18. Soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est définie si et seulement si $2 - 2x \geq 0$. Ainsi, f est définie sur $]-\infty, 1]$.
f est dérivable sur $]-\infty, 1[$. Soit $x \in]-\infty, 1[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{2-2x}{3+x^2}}} \times \frac{-2(3+x^2) - 2x(2-2x)}{(3+x^2)^2} \\ &= \frac{\sqrt{3+x^2}}{\sqrt{2-2x}} \times \frac{x^2-2x-3}{(3+x^2)^2} \\ &= \frac{\sqrt{3+x^2}}{\sqrt{2-2x}} \times \frac{(x+1)(x-3)}{(3+x^2)^2} \end{aligned}$$

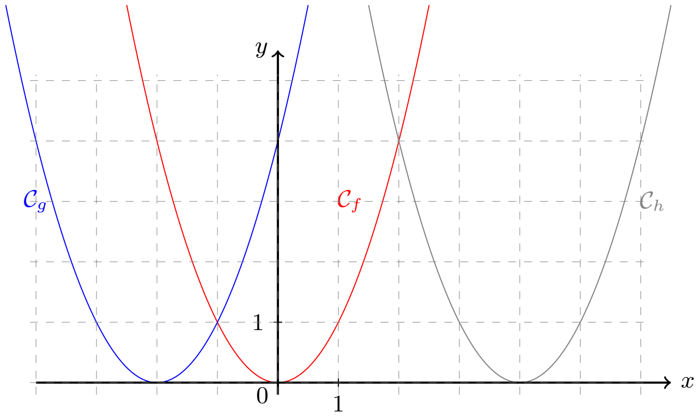
Le dénominateur s'annule en -1 et 3.
Ainsi, le tableau de variations de f est :

x	$-\infty$		-1		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2-2x}{3+x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{-2x}{x^2} \times \dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x^2}} \right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{-2}{x} \times \dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x^2}} \right) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
On obtient donc que f est bornée. Elle admet un maximum en -1 valant 1 et un minimum en 1 valant 0.



Exercice 19. 1.



2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Graphiquement :
$f(x) \leq 4$ si et seulement si $x \in [-2, 2]$. $g(x) \geq 1$ si et seulement si $x \in]-\infty, -3] \cup [-1, +\infty[$. $h(x) = 1$ si et seulement si $x \in \{3, 5\}$

Exercice 20. 1. • On a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1-x} = 0$ Par produit, on obtient que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Ainsi, $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$ d'équation $y = 0$.

• $\lim\limits_{x\to 1} e^{-x} = e^{-1} > 0$. De plus, $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{1-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{1-x} = -\infty$ donc par produit, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$. $\mathcal{C}_f$ admet donc une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

2. f est dérivable sur $]0+\infty[\setminus\{1\}$. Soit $x \in]0+\infty[\setminus\{1\}$,

$$f'(x) = \frac{-e^{-x} \times (1-x) - (-e^{-x})}{(1-x)^2} = \frac{e^{-x}(-1+x+1)}{(1-x)^2} = \frac{xe^{-x}}{(1-x)^2}.$$

On a donc le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	$\Vert$	$+$	
f	1	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	0

Ainsi, la fonction f est croissante sur $[0; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.
En revanche, elle n'est pas croissante sur son ensemble de définition. En effet, $f(0) = 1$ mais $f(2) < 0$ donc $f(2) < f(0)$.

3. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 a pour équation : $y = f'(0)x + f(0)$. Or, $f'(0) = 0$ et $f(0) = 1$. Ainsi, l'équation de la tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 1$.
4. f est continue et strictement croissante sur $]1, +\infty[$.
Ainsi, f est bijective de $]1, +\infty[$ sur $f(]1, +\infty[) = \left] \lim_{x \to 1^+} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x) \right[=]-\infty, 0[$. Or, $-2 \in]-\infty, 0[$. Ainsi, l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution sur $]1, +\infty[$.
Pour tout $x \in [0, 1[$, $f(x) \geq 1$. Ainsi, l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$.
Finalement, l'équation $f(x) = -2$ admet donc bien une unique solution sur $[0, +\infty[\setminus\{1\}$.

Exercice 21. • f est définie sur $\mathbb{R}$ et est paire. Ainsi, il suffit d'étudier f sur $[0, +\infty[$. Pour obtenir la courbe représentative de f sur $\mathbb{R}$, on effectuera ensuite une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} & \text{si } x \geq 1 \text{ ou } x \leq -1 \\ \sqrt{1 - x^2} & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}.$$

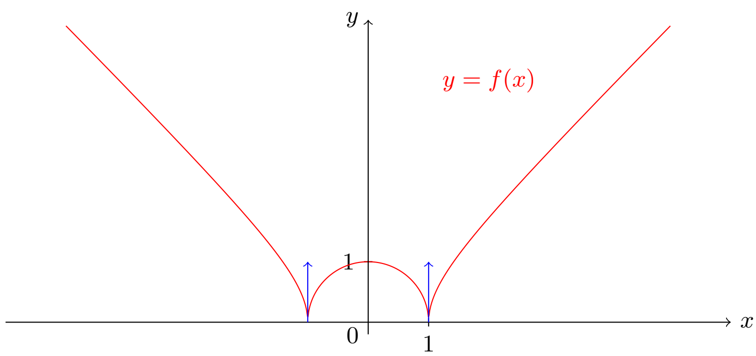
f est continue sur $\mathbb{R}_+$ en tant que composée de fonctions continues et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} & \text{si } x > 1 \\ \dfrac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}.$
De plus, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ par composition. Ainsi, le tableau de variations de f est le suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	
f	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Etudions la dérivabilité de f en 1 et les conséquences graphiques.
Soit $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \dfrac{\sqrt{|x - 1|(x + 1)}}{x - 1}$.

- Si $x > 1$, $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \dfrac{\sqrt{x + 1}}{\sqrt{x - 1}} \underset{x \to 1^+}{\longrightarrow} +\infty$.
- Si $0 \leq x < 1$, $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\dfrac{\sqrt{x + 1}}{\sqrt{1 - x}} \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} -\infty$.

Ainsi, f n'est donc pas dérivable en 1 et la courbe représentative de f admet deux demi-tangentes verticales.



Exercice 22. Posons $g : \begin{array}{ccc} [-2, 2] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^4 - x^2 - 2x - 2 \end{array}$.
f est dérivable sur $[-2, 2]$. Soit $x \in [-2, 2]$, $g'(x) = 4x^3 - 2x - 2$. On remarque que 1 annule g. Ainsi, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$

tels que pour : $\forall x \in [-2,2]$, $g'(x) = (x-1)(ax^2+bx+c)$. Or,

$$\begin{aligned}
\forall x \in [-2,2],\ 4x^3-2x-2 = (x-1)(ax^2+bx+c) &\iff \forall x \in [-2,2],\ 4x^3-2x-2 = ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c \\
&\iff \begin{cases} a = 4 \\ b-a = 0 \\ c-b = -2 \\ -c = -2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a = 4 \\ b = 4 \\ c = 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a : $\forall x \in [-2,2]$, $g'(x) = (x-1)(4x^2+4x+2)$.
De plus, la fonction polynomiale $x \mapsto 4x^2+4x+2$ est positive sur $\mathbb{R}$. On obtient ainsi le tableau de variations suivants :

x	-2		1		2
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	14	$\searrow$	-4	$\nearrow$	6

Ainsi :$\forall x \in \mathbb{R}$, $g(1) \leq g(x) \leq g(-2)$. D'où : $\forall x \in \mathbb{R}$, $-4 \leq g(x) \leq 14$.

Exercice 23. Méthode 1 :
Posons $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{x^2+(x-1)^2}+\sqrt{(x+1)^2+x^2} \end{array}$.
$\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.
Soit $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \sqrt{(-x)^2+(-x-1)^2}+\sqrt{(-x+1)^2+(-x)^2} = \sqrt{x^2+(x+1)^2}+\sqrt{(x-1)^2+x^2} = f(x)$.
Ainsi, f est paire. Il suffit donc de l'étudier sur $[0,+\infty[$.
$x \mapsto x^2+(x-1)^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ (en effet, la somme des deux carrés est nulle si et seulement si $x^2 = (x-1)^2 = 0$ qui n'admet aucune solution réelle). De même, $x \mapsto x^2+(x+1)^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. De plus, la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (en tant que composée et somme de fonctions dérivables). Soit $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+(x-1)^2}}+\frac{2x+1}{\sqrt{(x+1)^2+x^2}}$$

Ainsi : $\forall x \in [\frac{1}{2},+\infty[$, $f'(x) \geq 0$ comme somme de termes positifs.
Etudions désormais le signe de la dérivée sur $[0,\frac{1}{2}[$.
Soit $x \in [0,\frac{1}{2}[$,

$$\begin{aligned}
& f'(x) \geq 0 \\
\iff\ & \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+(x-1)^2}}+\frac{2x+1}{\sqrt{(x+1)^2+x^2}} \geq 0 \\
\iff\ & \frac{2x+1}{\sqrt{(x+1)^2+x^2}} \geq \frac{1-2x}{\sqrt{x^2+(x-1)^2}} \\
\iff\ & \frac{(2x+1)^2}{(x+1)^2+x^2} \geq \frac{(1-2x)^2}{x^2+(x-1)^2} \quad \text{car } 1-2x > 0 \\
\iff\ & (2x+1)^2((x-1)^2+x^2) \geq (1-2x)^2(x^2+(x+1)^2) \\
\iff\ & (4x^2+4x+1)(2x^2-2x+1) \geq (1-4x+4x^2)(2x^2+2x+1) \\
\iff\ & ((4x^2+1)+4x)((2x^2+1)-2x) \geq ((4x^2+1)-4x)((2x^2+1)+2x) \\
\iff\ & -2x(4x^2+1)+4x(2x^2+1) \geq 2x(4x^2+1)-4x(2x^2+1) \\
\iff\ & 2x \geq -2x \\
\iff\ & 4x \geq 0 \\
\iff\ & x \geq 0
\end{aligned}$$

Ainsi : $\forall x \in [0,\frac{1}{2}[$, $f'(x) \geq 0$.
Finalement, on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) \geq 0$ donc f est croissante sur $[0,+\infty[$.

Par parité, f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et f admet un minimum en 0 valant $f(0)=2$. Finalement : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)\geq 2$.
Méthode 2 :
L'équation a un sens pour $x\in\mathbb{R}$. Soit $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
& \sqrt{x^2+(x-1)^2}+\sqrt{(x+1)^2+x^2}\geq 2\\
\iff\ & x^2+(x-1)^2+x^2+(x+1)^2+2\sqrt{x^2+(x-1)^2}\sqrt{(x+1)^2+x^2}\geq 4\\
\iff\ & 4x^2+2+2\sqrt{x^2+(x-1)^2}\sqrt{(x+1)^2+x^2}\geq 4\\
\iff\ & \sqrt{(x^2+(x-1)^2)((x+1)^2+x^2)}\geq 1-2x^2
\end{aligned}$$

Si $1-2x^2\leq 0$ c'est à dire $x\in]-\infty;-\frac{\sqrt{2}}{2}]\cup[\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty[$, la dernière inéquation est vraie donc celle de départ également (par équivalence).
Soit $x\in]-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}[$,

$$\begin{aligned}
& \sqrt{x^2+(x-1)^2}+\sqrt{(x+1)^2+x^2}\geq 2\\
\iff\ & \sqrt{(x^2+(x-1)^2)((x+1)^2+x^2)}\geq 1-2x^2\geq 0\\
\iff\ & (x^2+(x-1)^2)((x+1)^2+x^2)\geq (1-2x^2)^2\\
\iff\ & (2x^2-2x+1)(2x^2+2x+1)\geq 1-4x^2+4x^4\\
\iff\ & 4x^4+4x^3+2x^2-4x^3-4x^2-2x+2x^2+2x+1\geq 1-4x^2+4x^4\\
\iff\ & 4x^2\geq 0
\end{aligned}$$

Or, un carré est toujours positif donc $4x^2\geq 0$ est vraie pour tout $x\in[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]$. Par équivalence, l'inéquation de départ est vraie sur $[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]$.
On a donc bien prouvé que l'inéquation est vraie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 24. g est bien définie. En effet, soit $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $\dfrac{x+1}{x-2}$ est bien défini. De plus,

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{x-2}=1 \quad & \iff \quad x+1=x-2\\
& \iff \quad 1=-2
\end{aligned}$$

Ainsi, $\dfrac{x+1}{x-2}\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Soit $y\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$

$$\begin{aligned}
y=f(x) \quad & \iff \quad y=\frac{x+1}{x-2}\\
& \iff \quad (x-2)y=(x+1) \quad \text{car } x\neq 2\\
& \iff \quad x(y-1)=1+2y\\
& \iff \quad x=\frac{1+2y}{y-1} \quad \text{car } y\neq 1
\end{aligned}$$

Vérifions que $\dfrac{1+2y}{y-1}\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1+2y}{y-1}=2 \quad & \iff \quad 1+2y=2(y-1)\\
& \iff \quad 1=-2
\end{aligned}$$

Ainsi, $\dfrac{1+2y}{y-1}\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Finalement, f est bijective et $\begin{array}{rccc} f^{-1}: & \mathbb{R}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{R}\setminus\{2\}\\ & x & \mapsto & \dfrac{1+2x}{x-1}\end{array}$.

Exercice 25. 1. f est dérivable sur $]0,1]$. Soit $t\in]0,1]$, $f'(t)=\dfrac{-3t^3-(1-t^3)}{t^2}=-\dfrac{(2t^3+1)}{t^2}$.
Ainsi, $f'(t)<0$ donc f est strictement décroissante sur $]0,1]$. f est de plus continue sur $]0,1]$ ainsi, f est bijective de $]0,1]$ sur $[f(1),\lim\limits_{t\to 0}f(t)[=[0,+\infty[$.

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On sait que $f(g(x)) = x$. Ainsi, $x = \dfrac{1-(g(x))^3}{g(x)}$ d'où $xg(x) - 1 + (g(x))^3 = 0$.

   (b) f est bijective de $]0,1]$ sur $\mathbb{R}_+$ dérivable sur $[0,1[$ et telle que : $\forall t \in]0,1]$, $f'(t) \neq 0$. Ainsi, g est dérivable sur $[0,+\infty[$. Soit $x \in [0,+\infty[$, $g'(t) = \dfrac{1}{f'(g(t))} = -\dfrac{(g(t))^2}{2(g(t))^3+1}$. Or, $1 = tg(t) + (g(t))^3$.

   Ainsi, $g'(t) = -\dfrac{(g(t))^2}{3(g(t))^3 + tg(t)} = -\dfrac{g(t)}{3(g(t))^2+t}$.

Exercice 26. 1. g est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$ et on a :$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$, $g(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\left|\dfrac{2+x}{2-x}\right|\right)$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$.

On a : $\forall x \in]-2,2[$, $\left|\dfrac{2+x}{2-x}\right| = \dfrac{2+x}{2-x}$. D'où : $\forall x \in]-2,2[$, $g(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)$.

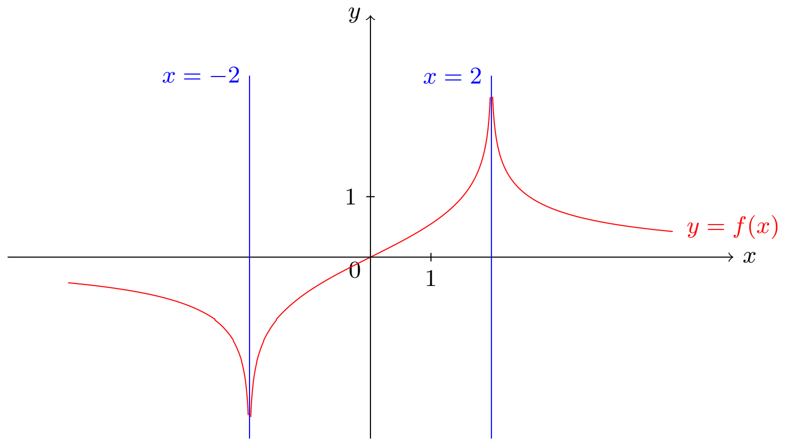
Soit $x \in]-2,2[$, $g'(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{\frac{2+x}{2-x}} \times \dfrac{2-x+2+x}{(2-x)^2} = \dfrac{2}{(2+x)(2-x)} > 0$.

De même, on a : $\forall x \in]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$, $\left|\dfrac{2+x}{2-x}\right| = \dfrac{2+x}{x-2}$. D'où : $\forall x \in]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$, $g(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{2+x}{x-2}\right)$.

Soit $x \in]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{\frac{2+x}{x-2}} \times \dfrac{x-2-2-x}{(x-2)^2} = \dfrac{-2}{(2+x)(x-2)} = \dfrac{2}{(2+x)(2-x)} < 0$.

Le tableau de variations de g est donc :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	||	$+$	||	$-$	
g	0	$\searrow$	$-\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0



2. D'après la question précédente, g_1 est continue et strictement croissante sur $]-2,2[$ et continue. Ainsi, g_1 est bijective de $]-2,2[$ sur $g_1(]-2,2[) = g_1\left(\left]\lim\limits_{x\to-2} g_1(x), \lim\limits_{x\to 2} g_1(x)\right[\right) = \mathbb{R}$.
3. Soit $y \in \mathbb{R}$, Soit $x \in]-2,2[$.

$$\begin{aligned}
y = g_1(x) &\iff y = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right) \\
&\iff \frac{2+x}{2-x} = e^y \\
&\iff 2+x = e^y(2-x) \\
&\iff x(1+e^y) = 2(e^y-1) \\
&\iff x = 2\left(\frac{e^y-1}{e^y+1}\right)
\end{aligned}$$

Remarque : comme on sait que g_1 est bijective, on sait qu'il existe un unique x solution dans $]-2,2[$ donc le x trouvé appartient donc nécessairement à $]-2,2[$. On peut aussi le prouver à la main.

Ainsi, $\begin{array}{rccc} g_1^{-1}: & \mathbb{R} & \to &]-2,2[\\ & x & \mapsto & 2\dfrac{e^x-1}{e^x+1} \end{array}$.

Exercice 27. • Commençons par étudier f :

Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x) = \dfrac{x}{1-|x|}$. Ainsi, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x} & \text{si } x \in [0,1[\\ \dfrac{x}{1+x} & \text{si } x \in]-1,0[\end{cases}$

Ainsi, f est dérivable sur $]0,1[$ et sur $]-1,0[$ et on a : $\forall x \in]-1,0[,\ f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} > 0$

$$\forall x \in]0,1[,\ f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$$

Ainsi, on a le tableau de variations suivant :

x	-1		0		1
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

• Prouvons désormais que f est bijective et déterminons f^{-1} :

Soit $y \in \mathbb{R}_+$ et soit $x \in [0,1[$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) = y & \iff \frac{x}{1-x} = y \\ & \iff x = \frac{y}{1+y} \\ & \iff x = \frac{y}{1+|y|} \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall y \in \mathbb{R}_+, \exists! x \in [0,1[, y = f(x)$.
De plus : $\forall x \in]-1,0[, f(x) < 0$. Donc : $\forall y \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in]-1,0[, y \neq f(x)$.
Ainsi : $\forall y \in \mathbb{R}_+,\ \exists! x \in]-1,1[,\ y = f(x)$.
De même, soit $y \in \mathbb{R}_-^*$, soit $x \in]-1,0[$,

$$\begin{aligned} f(x) = y & \iff \frac{x}{1+x} = y \\ & \iff x = \frac{y}{1-y} \\ & \iff x = \frac{y}{1+|y|} \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall y \in \mathbb{R}_-^*, \exists! x \in]-1,0[, y = f(x)$.
De plus : $\forall x \in [0,1[, f(x) \geq 0$. Donc : $\forall y \in \mathbb{R}_-^*,\ \forall x \in [0,1[, y \neq f(x)$.
Ainsi : $\forall y \in \mathbb{R}_-^*,\ \exists! x \in]-1,1[,\ y = f(x)$.
Finalement, on a prouvé que : $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists! x \in]-1,1[,\ y = f(x)$.

Donc f est bijective de $]-1,1[$ sur $\mathbb{R}$ et $\begin{array}{rccc} f^{-1}: & \mathbb{R} & \to &]-1,1[\\ & x & \mapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array}$.

Exercice 28. Montrons que : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \implies f(x) > f(y)$.
Raisonnons par l'absurde.
Supposons qu'il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$ et $f(x) \leq f(y)$.
Comme $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante, on a $(f \circ f \circ f)(x) > (f \circ f \circ f)(y)$.
De plus, $f \circ f$ est croissante donc $(f \circ f)(f(x)) \leq (f \circ f)(f(y))$. Donc $(f \circ f \circ f)(x) \leq (f \circ f \circ f)(y)$.
Absurde.
Ainsi :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \implies f(x) > f(y).$$

Exercice 29. Raisonnons par analyse-synthèse.
Analyse : Supposons qu'il existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :$\forall g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ \ f \circ g = g \circ f$.
Soit $a \in \mathbb{R}$. Posons $\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & a \end{array}$. Utilisons l'hypothèse avec la fonction constante h. On a alors : $f(a) = a$.

Ainsi : $\forall a \in \mathbb{R},\ \ f(a) = a$ donc $f = Id_{\mathbb{R}}$.
Synthèse : Posons $\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x \end{array}$.
Soit $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x)$.
Et,$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x)$.
Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R},\ (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$. Donc $f \circ g = g \circ f$.
Donc f est bien solution.
Conclusion : Il existe une unique fonction f solution qui est $f = Id_{\mathbb{R}}$.