Chapitre 24 : Probabilités

1 Généralités

1.1 Expérience aléatoire et univers

Définition

- Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut prédire pas avec certitude la résultat.
- L'ensemble des **issues** (ou **résultats possibles** ou **réalisations**) d'une expérience aléatoire est appelé **univers** et souvent noté Ω.

Dans toute la suite, on se limite au cas où l'univers Ω est fini.

Exemple :

- On lance un dé à 6 face et on note le numéro de la face supérieure.
  On peut associer à cette expérience l'univers $\Omega = [\![1,6]\!]$.
- On lance une pièce et on note le résultat obtenu P pour pile et F pour face.
  On peut associer à cette expérience l'univers $\Omega = \{P, F\}$.
- On s'intéresse au tiercé d'arrivée d'une course de n chevaux (numérotés de 1 à n).
  On peut associer à cette expérience l'univers Ω égal à l'ensemble des 3 listes d'éléments distincts de $[\![1,n]\!]$.
- On pioche simultanément p bonbons dans un sac de n bonbons. On suppose que les bonbons sont numérotés de 1 à n et on note les numéros des bonbons piochés.
  On peut associer à cette expérience aléatoire l'univers Ω égal à l'ensemble des parties à p éléments de $[\![1,n]\!]$.

Définition

Soit Ω un univers fini.
Toute partie de Ω est appelée **événement**. L'ensemble des événements est donc $\mathscr{P}(\Omega)$.

- L'ensemble Ω est appelé **événement certain**.
- L'ensemble vide est appelé **événement impossible**.
- Un singleton $\{\omega\}$, où $\omega \in \Omega$, est appelé **événement élémentaire**.

Exemple : On lance un dé à 6 faces et on note le numéro de la face supérieure.
On associe à cette expérience l'univers $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.
L'événement $A = \{2,4,6\}$ signifie alors obtenir un résultat pair.

Définition : Opérations sur les événements

Soit Ω un univers fini, A et B deux événements de Ω.

- Le complémentaire de A dans Ω est noté $\overline{A}$, et est appelé **événement contraire** de A.
- La réunion $A \cup B$ de A et B est un événement, appelé événement « A ou B »
- L'intersection $A \cap B$ de A et B est un événement, appelé événement « A et B »

Exemple : Considérons l'expérience consistant à lancer une pièce deux fois de suite. Pour chaque lancer, on note le résultat obtenu P pour pile et F pour face. On associe à cette expérience l'univers : $\Omega = \{(P,P),(P,F),(F,P),(F,F)\}$.
Notons A l'événement : « le premier lancer donne pile »
B l'événement : « le deuxième lancer donne pile ».
On a alors : $A = \{(P,P),(P,F)\}$ et $B = \{(F,P),(P,P)\}$.

- L'événement $A \cup B$ est « une des deux pièces montre pile » :

$$A \cup B = \{(F, P), (P, F), (P, P)\}$$

- L'événement $A \cap B$ est « les deux pièces montrent pile » :

$$A \cup B = \{(P, P)\}$$

- L'événement contraire de A est « la première pièce montre face » :

$$\overline{A} = \{(F, P), (F, F)\}$$

Définition

Soit Ω un univers, A et B deux événements de Ω.

- Les événements A et B sont dits **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$.
- On dit que **l'événement** A **implique l'événement** B si $A \subset B$.

Exemple : Si A est un événement, alors A et $\overline{A}$ sont incompatibles.

Définition

Soit Ω un univers fini.
On appelle **système complet d'événements** de Ω toute famille $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) d'événements telle que :

- pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de $[\![1, n]\!]$, on ait $A_i \cap A_j = \emptyset$.
- $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Proposition

Soit Ω un univers fini.

- Pour tout événement $A \subset \Omega$, la famille $(A, \overline{A})$ est un système complet d'événements de Ω.
- La famille $(\{\omega\})_{\omega \in \Omega}$ formée des événements élémentaires, est un système complet d'événements de Ω.

1.2 Espaces probabilisés finis

Définition

Soit Ω un univers fini.
On appelle **probabilité** sur Ω toute application $P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0, 1]$ vérifiant :

- $P(\Omega) = 1$;
- pour tous événements A et B incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

On appelle **espace probabilisé fini** un couple (Ω, P) où Ω est un univers fini et P une probabilité sur Ω.

Remarque : Un même univers peut être muni de plusieurs probabilités.
Exemple : On lance un dé à 6 faces et on note le numéro de la face supérieure.
On associe à cette expérience l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- On peut définir : $\begin{array}{rccl} P_1 : & \mathscr{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & A & \to & \dfrac{1}{6}\text{Card}\,(A) \end{array}$.

  P_1 est une probabilité sur Ω (correspondant au cas d'un dé non pipé).
- On peut aussi définir : $\begin{array}{rccl} P_2 : & \mathscr{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & A & \to & \begin{cases} 0 & \text{si } 6 \notin A \\ 1 & \text{si } 6 \in A \end{cases} \end{array}$.

  P_2 est également une probabilité sur Ω (correspondant au cas d'un dé pipé pour tomber sur 6 à tous les coups).

Théorème

Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, A et B deux événements. On a :

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- $P(\emptyset) = 0$.
- Si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$ (Croissance).
  Si $A \subset B$, alors $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Démonstration.

- Comme A et $\overline{A}$ sont incompatibles, $P(A) + P(\overline{A}) = P(A \cup \overline{A}) = P(\Omega) = 1$ et donc $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- On a $P(\emptyset) = P(\overline{\Omega}) = 1 - 1 = 0$.
- Si $A \subset B$ alors B est la réunion des événements incompatibles A et $B \setminus A$ et donc $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$.
  Comme $P(B \setminus A) \geq 0$, on en déduit que $P(A) \leq P(B)$.
  De plus, $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.
- L'événement $A \cup B$ est la réunion des deux événements incompatibles A et $B \setminus A$; d'autre part, B est la réunion des événements incompatibles $A \cap B$ et $B \setminus A$. On a donc :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A) \quad \text{et} \quad P(B) = P(A \cap B) + P(B \setminus A)$$

On en déduit que :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

□

Théorème

Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, et $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille d'événement deux à deux incompatibles, alors :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Démonstration. Ce résultat se prouve par récurrence. □

Remarque : Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, et $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ un système complet d'événements, on a : $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$.

Proposition

Soit Ω un univers fini et $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ une famille de réels positifs tels que $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$.
Il existe une unique probabilité P sur Ω telle que : $\forall \omega \in \Omega,\ P(\{\omega\}) = p_\omega$.

Démonstration. Raisonnons par analyse-synthèse :
Analyse : Supposons qu'il existe $P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ tel que : $\forall \omega \in \Omega,\ p(\{\omega\}) = p_\omega$.
Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$. On a $A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}$ et les événements $\{\omega\}$ sont 2 à 2 incompatibles.
Ainsi, on a : $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$.
Synthèse : Posons $\begin{array}{rccc} P: & \mathscr{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & A & \mapsto & \sum_{\omega \in A} p_\omega \end{array}$.

- Comme : $\forall \omega \in \Omega,\ p_\omega \geq 0$ et $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$, on a :

$$\forall A \in \mathscr{P}(\Omega),\ 0 \leq \sum_{\omega \in A} p_\omega \leq \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega \leq 1.$$

Ainsi, P est une application bien définie de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$.

- Soient $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ deux événements incompatibles, on a :

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= \sum_{\omega \in A \cup B} p_\omega \\ &= \sum_{\omega \in A \text{ ou } \omega \in B} p_\omega \\ &= \sum_{\omega \in A} p_\omega + \sum_{\omega \in B} p_\omega \quad \text{car } A \cap B = \emptyset \\ &= P(A) + P(B) \end{aligned}$$

- $P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$.

Donc P est une probabilité sur Ω. □

Théorème

Soit Ω un univers fini. Il existe une unique probabilité P telle que : $\forall \omega \in \Omega,\ P(\{\omega\}) = \dfrac{1}{\operatorname{Card}(\Omega)}$.
Cette probabilité est appelée **probabilité uniforme** sur Ω.
On a alors pour tout événement A, $P(A) = \dfrac{\operatorname{Card}(A)}{\operatorname{Card}(\Omega)}$.

Démonstration. On pose : $\forall \omega \in \Omega,\ p_\omega = \dfrac{1}{\operatorname{Card}(\Omega)}$.
On a : $\forall \omega \in \Omega,\ p_\omega \geq 0$ et $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = \sum_{\omega \in \Omega} \dfrac{1}{\operatorname{Card}(\Omega)} = \dfrac{\operatorname{Card}(\Omega)}{\operatorname{Card}(\Omega)} = 1$.
Ainsi, il existe une unique probabilité P telle que : $\forall \omega \in \Omega,\ P(\{\omega\}) = \dfrac{1}{\operatorname{Card}(\Omega)}$.
Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, en décomposant A comme la réunion disjointe d'événements élémentaires :

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) \\ &= \sum_{\omega \in A} \frac{1}{\operatorname{Card}(\Omega)} \\ &= \sum_{\omega \in A} \frac{\operatorname{Card}(A)}{\operatorname{Card}(\Omega)} \end{aligned}$$

□

Remarque :

- La probabilité P est uniforme si et seulement si les événements élémentaires sont équiprobables.
  On parle de situation d'**équiprobabilité**.
- Les éléments de A sont les issues favorables (pour lesquelles A est réalisé), ceux de Ω sont les issues possibles. Lorsque la probabilité est uniforme, on obtient la probabilité d'un événement en calculant le rapport du nombre d'issues favorables sur le nombre d'issues possibles.
- Quand on parle de lancers d'une pièce ou d'un dé *équilibré* ou de tirages *au hasard* dans une urne, on signifie implicitement que l'on est dans un cas d'équiprobabilité. On munit alors l'univers de la probabilité uniforme.

Exemple : On lance un dé équilibré à 6 faces et on note le numéro de la face supérieure.
Calculer la probabilité d'obtenir un nombre pair.
L'univers est l'ensemble $\Omega = [\![1, 6]\!]$. Le dé étant équilibré, on munit Ω de la probabilité uniforme. La probabilité d'obtenir un nombre pair est $\dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

2 Probabilités conditionnelles

2.1 Définition

Remarque : Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini où P est la probabilité uniforme.
Supposons que l'événement B soit réalisé. Un événement A est réalisé si et seulement $A \cap B$ est réalisé. On dira que la probabilité que A soit réalisé sachant que B est réalisé est

$$\frac{\text{nombre de cas favorables à } A \cap B}{\text{nombre de cas possibles pour } B} = \frac{\operatorname{Card}(A \cap B)}{\operatorname{Card}(B)} = \frac{\frac{\operatorname{Card}(A \cap B)}{\operatorname{Card}(\Omega)}}{\frac{\operatorname{Card}(B)}{\operatorname{Card}(\Omega)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Définition

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit A et B deux événements tels que $P(B) > 0$.
On appelle **probabilité conditionnelle de** A **sachant** B le réel, noté $P_B(A)$ ou $P(A|B)$, défini par :

$$P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Proposition

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit B un événements tel que $P(B) > 0$.
L'application

$$\begin{array}{rccc} P_B: & \mathscr{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & A & \mapsto & P_B(A) \end{array}$$

est une probabilité sur Ω.

Démonstration.

- L'application P_B est bien définie par $P(B) \neq 0$. Pour tout événement A, on a $A \cap B \subset B$, donc $P(A \cap B) \leq P(B)$ et par suite
$0 \leq P_B(A) \leq 1$.
- On a $P_B(\Omega) = \dfrac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$.
- Soient A et A' deux événements incompatibles. Alors $(A \cap B) \cap (A' \cap B) = (A \cap A') \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset$.
Donc $A \cap B$ et $A' \cap B$ sont également incompatibles, donc

$$\frac{P((A \cup A') \cap B)}{P(B)} = \frac{P((A \cap B) \cup (A' \cap B))}{P(B)} = \frac{P(A \cap B) + P(A' \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A' \cap B)}{P(B)} = P_B(A) + P_B(A').$$

Ainsi P_B définit une probabilité sur Ω. □

Remarque : La probabilité $P_B(A)$ est à distinguer de $P(B \cap A)$. En effet, dans le calcul de $P_B(A)$, on suppose implicitement que l'événement B est réalisé et on cherche la probabilité qu'alors A le soit. En revanche, dans le calcul de $P(A \cap B)$, on cherche la probabilité de l'événement « A et B » où l'événement B n'est pas à priori réalisé.

Exemple : On tire deux dés à 6 faces, non pipés.
Soit A l'événement « obtenir au moins un 6 »
B l'événement « la somme des faces est supérieure ou égale à 10 ».
Déterminer la probabilité de A sachant B.
L'univers est l'ensemble $\Omega = [\![1,6]\!]^2$. Comme les dés ne sont pas pipés, on considère Ω muni de la probabilité uniforme.
$A = [\![1,6]\!] \times \{6\} \cup \{6\} \times [\![1,5]\!]$.
Ainsi, $\text{Card}\,(A) = 6 + 5 = 11$.
$B = \{(4,6), (6,4), (5,5), (5,6), (6,5), (6,6)\}$.
Ainsi, $\text{Card}\,(B) = 6$.
Et $A \cap B = \{(4,6), (6,4), (5,6), (6,5), (6,6)\}$ donc $\text{Card}\,(A \cap B) = 5$.
Ainsi, $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{5}{6}$.
Remarque : $P(1) = \dfrac{\text{Card}\,(A)}{\text{Card}\,(\Omega)} = \dfrac{11}{36}$. Savoir que B est réalisé constitue une information qui modifie les probabilités.

2.2 Formules fondamentales

2.2.1 Formule des probabilités composées

Le plus souvent, on ne calcule pas $P_B(A)$ à partir de $P(A \cap B)$ et $P(B)$. Au contraire, c'est la connaissance de $P_B(A)$ et $P(B)$ qui permet le calcul de $P(A \cap B)$.

Proposition

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soient A, B deux événements tels que $P(B) \neq 0$ alors, :

$$P(A \cap B) = P(B) P_B(A)$$

Proposition : Formule des probabilités composées

Soit (Ω, P) un espace probabilité fini. Soit $n \geq 2$. Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements tels que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$. Alors :

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\ldots P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Remarque : Toutes les probabilités conditionnelles sont bien définies grâce à l'hypothèse $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$ par croissance de l'application $\mathbb{P}$.

Démonstration. Pour tout $n \geq 2$, on pose $\mathscr{P}(n)$: « quelques soit $A_1, ..., A_n$ des événements de l'espace (Ω, P) tels que $P(A_1 \cap ... A_n) > 0$, on a : $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\ldots P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$.

- Pour $n = 2$: soient A_1 et A_2 des événements tels que $P(A_1) > 0$. Alors $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1)$ par définition des probabilités conditionnelles, donc $\mathscr{P}(2)$ est vraie.
- Soit $n \geq 2$, supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Soient $A_1, \ldots, A_{n+1}$ des événements tels que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) > 0$. On a :

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n+1}) &= P(A_1 \cap \cdots \cap A_n)P(A_{n+1}|A_1 \cap \cdots \cap A_n) \\ &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\ldots P(A_{n+1}|A_1 \cap \cdots \cap A_n) \end{aligned}$$

  par hypothèse de récurrence.
  Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- En conclusion, pour tout $n \geq 2$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

□

Méthode

Cette formule est utilisée quand les événements $A_1, ..., A_n$ suivent un ordre chronologique.

2.2.2 Formule des probabilités totales

Proposition : Formule des probabilités totales

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements. Alors :

- pour tout événement B, on a :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$$

- Si, de plus pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(A_i) \neq 0$, on a :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B)P(A_i)$$

Démonstration. Soient $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a $(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = B \cap (A_i \cap A_j) = \emptyset$ car les (A_i) sont 2 à 2 incompatibles. Donc les $(B \cap A_i)$ sont 2 à 2 incompatibles. Ainsi

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\frac{P(B \cap A_i)}{P(A_i)} = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n}(B \cap A_i)\right) = P\left(B \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P(B \Cap \Omega) = P(B).$$

□

Méthode

Cette formule est très utile lorsqu'on cherche à calculer la probabilité d'un événement en faisant une distinction de cas, les événements A_i représentant les différents cas possibles.

Méthode

Cette formule est très utile lorsqu'on cherche à calculer la probabilité d'un événement en faisant une distinction de cas, les événements A_i représentant les différents cas possibles.

Corollaire

Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soient A, B deux événements.
On a :
$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$$
Si de plus, $P(A) \neq 0$ et $P(A) \neq 1$:
$$P(B) = P_A(B)P(A) + P_{\overline{A}}(B)P(\overline{A})$$

Démonstration. Conséquence du résultat précédent avec le système complet d'événements $(A\overline{A})$. □

2.2.3 Formule de Bayes

Proposition : Formule de Bayes

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.

- Soient A et B deux événements tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$. Alors
$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}.$$
- Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système complet d'événements tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(A_i) \neq 0$.
Pour tout événement B tel que $P(B) \neq 0$, on a :
$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}.$$

Démonstration.

- On a $P(B)P(A|B) = P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(B|A)P(A)$, d'où la première formule.
- Soit $j \in [\![1, n]\!]$, $P(A_j|B) = \dfrac{P(B|A_j)P(A_j)}{P(B)}$. Comme $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)$ par la formule des probabilités totales, la seconde formule s'en déduit immédiatement.
- La dernière égalité est un cas particulier de la précédente où le système d'événements est $(A, \overline{A})$.

□

Corollaire

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soient A et B deux événements tels que $0 < P(A) < 1$ et $P(B) > 0$. Alors :
$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})}$$

Méthode

Cette formule permet en quelque sorte de « remonter le temps ». En effet, si l'événement B se produit après l'événement A, elle nous permet de déduire de la probabilité $P_A(B)$ qui respecte la chronologie, la probabilité $P_B(A)$ qui elle, remonte cette chronologie.

3 Indépendance

Définition

Deux événements A et B de l'espace probabilisé (Ω, P) sont dits **indépendants** si :
$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Remarque : Si $P(B)>0$, A et B sont indépendants si et seulement si $P(A|B)=P(A)$ (la connaissance de B ne change pas la probabilité de A).

Remarque :

- Contrairement à l'incompatibilité qui est une notion ensembliste, l'indépendance est une notion probabiliste. Elle dépend de la probabilité dont est muni l'univers.
- Intuitivement, l'indépendance de deux événements signifie qu'aucun d'entre eux ne donne d'information sur l'autre. Par exemple, la probabilité d'obtenir pile après 10 lancers d'une pièce équilibrée est toujours $\frac{1}{2}$, quel que soit le résultat des tirages précédents.

Proposition

Soient A, B deux événements de l'espace probabilisé (Ω, P).
Si A et B sont indépendants alors les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants.
Il en est de même des événements A et $\overline{B}$ ainsi que des événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Démonstration. Comme A et B sont indépendants, $P(A\cap B)=P(A)P(B)$. De plus, $(A\cap B, A\cap\overline{B})$ est un système complet d'événements de A, on a donc : $P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A\cap B)$. On en déduit :

$$P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A)P(B)=P(A)(1-P(B))=P(A)P(\overline{B})$$

ce qui montre que A et $\overline{B}$ sont indépendants.
Comme B et A sont indépendants, le résultat précédent montre que B et $\overline{A}$ sont indépendants. Enfin, l'indépendance de $\overline{A}$ et B entraine celle de $\overline{A}$ et $\overline{B}$. □

Définition

Soient $A_1,\dots,A_n$ des événements de l'espace probabilisé (Ω,P). On dit que ces événements sont :

- **mutuellement indépendants** si et seulement si pour tout sous-ensemble I de $[\![1,n]\!]$, on a :

$$P\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)=\prod_{i\in I}P(A_i)$$

- **indépendants deux à deux** si et seulement si pour tout couple (i,j) d'éléments distincts de $[\![1,n]\!]$, on a :

$$P(A_i\cap A_j)=P(A_i)P(A_j)$$

Remarque :

- Si $n=2$, ces deux notions coïncident avec l'indépendance.
- L'indépendance mutuelle entraîne l'indépendance deux à deux (on prend successivement pour I tous les ensembles à 2 éléments de $[\![1,n]\!]$) mais la réciproque est fausse si $n\geq 3$.

Proposition

Soient $A_1,\dots,A_n$ des événements mutuellement (resp. deux à deux) indépendants.
Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on note $B_i=A_i$ ou $B_i=\overline{A_i}$.
Alors les événements $B_1,\dots,B_n$ sont mutuellement (resp. deux à deux) indépendants.

Démonstration. Pour tout $p\in[\![0,n]\!]$, on considère la propriété $\mathscr{P}(p)$: « si p des B_i sont $\overline{A_i}$ (et les autres A_i), $B_1,\dots,B_n$ sont mutuellement indépendants ».

- Les événements $A_1,\dots,A_n$ étant mutuellement indépendants, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- Soit $p\in[\![0,n-1]\!]$, supposon $\mathscr{P}(p)$vraie. On suppose que $p+1$ des B_i sont $\overline{A_i}$ (et les autres A_i). Quitte à remplacer $B_1,\dots,B_n$ par la sous-famille considérée, il faut montrer que $P(B_1\cap\dots B_n)=P(B_1)\dots P(B_n)$. Quitte à réordonner les B_i, on suppose que $B_i=A_i$ pour $i\in[\![1,n-p$ et que $B_i=\overline{A_i}$ pour $i\in[\![n-p,n]\!]$. On a

$$\begin{aligned}
&P(A_1\cap\dots\cap A_{n-p}\cap\overline{A_{n-p+1}}\cap\dots\cap\overline{A_n})+P(A_1\cap\dots\cap A_{n-p-1}\cap\overline{A_{n-p}}\cap\overline{A_{n-p+1}}\cap\dots\cap\overline{A_n})\\
=&P(A_1\cap\dots\cap A_{n-p-1}\cap\overline{A_{n-p+1}}\cap\dots\cap\overline{A_n})\\
=&P(A_1)\dots P(A_{n-p-1})P(\overline{A_{n-p+1}})\dots P(\overline{A_n})
\end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence. Ainsi

$$\begin{aligned}
&P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-p-1} \cap \overline{A_{n-p}} \cap \overline{A_{n-p+1}} \cap \dots \cap \overline{A_n}) \\
=&P(A_1)\dots P(A_{n-p-1})P(\overline{A_{n-p+1}})\dots P(\overline{A_n}) - P(A_1)\dots P(A_{n-p})P(\overline{A_{n-p+1}})\dots P(\overline{A_n}) \\
=&P(A_1)\dots P(A_{n-p-1})P(\overline{A_{n-p+1}})\dots P(\overline{A_n})(1-P(A_{n-p}) \\
=&P(A_1)\dots P(A_{n-p-1})P(\overline{A_{n-p}})P(\overline{A_{n-p+1}})\dots P(\overline{A_n})
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{P}(p+1)$ est vraie.

- En conclusion, pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, $\mathscr{P}(p)$ est vraie.

$\square$