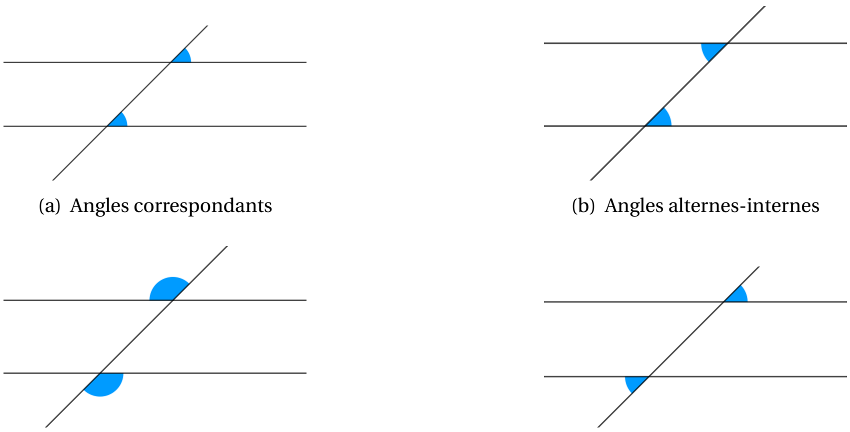
Chapitre 16 : Géométrie plane

1 Modes de repérage d'un point

1.1 Géométrie du triangle

Proposition

Soient d et d' deux droites parallèles du plan. Soit Δ une droite du plan.
Si Δ et d sont sécantes alors Δ et d' le sont aussi. Dans ce cas, les angles correspondants, les angles alternes-internes et les angles alternes-externes sont de même mesure.



(a) Angles correspondants

(b) Angles alternes-internes

(c) Angles alternes-externes

(d) Angles alternes-externes

FIGURE 1 – Droites parallèles et angles

Proposition

La somme des mesures des angles d'un triangle est égal à π (modulo 2π).

Démonstration. On considère la figure suivante :

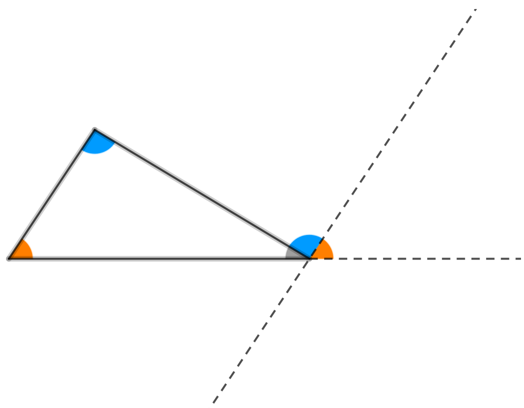


FIGURE 2 – Sommes des angles d'un triangle

Dans l'idée, on trace la parallèle à un côté passant par le sommet opposé. En analysant les angles alternes-internes et les angles correspondants, on obtient alors un angle plat. $\square$

Proposition (Égalité de Pythagore)

Soient A, B et C trois points distincts non alignés. Si le triangle ABC est rectangle en C alors $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Démonstration. En considérant l'aire des figures ci-dessous, on remarque l'égalité souhaitée.

(a) Copies d'un triangle rectangle

(b) Arrangement des surfaces

FIGURE 3 – Droites parallèles et angles

□

Définition

Soient A et B deux points distincts du plan. On appelle médiatrice du segment $[AB]$ et l'on note $\text{med}([AB])$, la droite perpendiculaire à $[AB]$ passant par le milieu de $[AB]$.

Proposition

Soient A et B deux points distincts du plan.

$$\forall M \in \text{med}([AB]),\ MA = MB.$$

Démonstration. Soit M un point de la médiatrice du segment $[AB]$. Notons O le milieu de $[AB]$.

Par définition $(OM) \perp (AB)$. Ainsi, les triangles AOM et BOM sont rectangles en O.

En utilisant l'égalité de Pythagore, on a

$$AM^2 = OA^2 + OM^2 \text{ et } BM^2 = OB^2 + OM^2.$$

Or O est le milieu de AB donc $OA = OB$. On en déduit l'égalité $AM^2 = BM^2$ et donc $MA = MB$ puisque les distances sont des nombres positifs. □

Définition

La bissectrice d'un angle est la demi-droite qui coupe un angle en deux angles égaux.

Remarque : On confond par abus la bissectrice qui est une demi-droite avec son prolongement en une droite du plan.

Théorème (de Pythagore)

Soient A, B et C trois points distincts non alignés.
Le triangle ABC est rectangle en C si et seulement si $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Démonstration. Le sens direct de l'implication est donné par la proposition précédente.

Sens réciproque. Par hypothèse sur les points A, B et C, on peut considérer la figure suivante

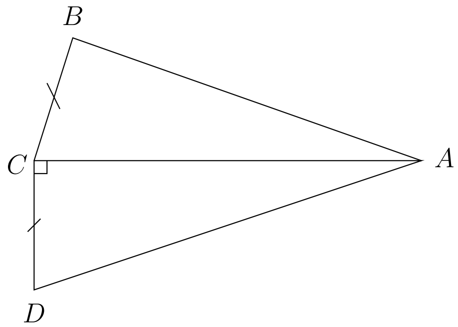


FIGURE 4 – Sommes des angles d'un triangle

La médiatrice de $[BD]$ est une droite qui contient tous les points à égale distance de B et de D. Or A et C sont à égale distance de B et D. Ainsi, (AC) est la médiatrice de $[BD]$. Par suite les droites (AC) et (BD) sont donc perpendiculaires. On introduit I le point d'intersection des droites (AC) et (BD). Ainsi, $(BD) = (BI)$ et donc les triangles CBI et AIB sont resctangles en I.

D'une part
$$AC^2 = AI^2 + IC^2 + 2AI\,AC,$$
et d'autre part
$$\begin{array}{rcl} AC^2 & = & AB^2 - BC^2 \\ & = & BI^2 + IA^2 - \left(IC^2 + BI^2\right) \\ & = & IA^2 - IC^2. \end{array}$$

Ainsi,
$$IC^2 + IA\,IC = 0,$$
et donc
$$IC = 0 \text{ ou } IC + IA = 0.$$
Or $IC \geq 0$ et $IA \geq 0$ donc $IC + IA = 0 \implies IC = IA = 0$. Dans tous les cas $IC = 0$ et donc $C \in (BD)$. Par suite, le triangle ABC est donc rectangle en C. □

Théorème (de Thalès)

Si ABC un triangle, D et E sont deux points respectifs des droites (AB) et (AC) tels que les droites (DE) et (BC) soient parallèles alors
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

Remarque : En pratique, le théorème de Thalès permet de calculer des rapports de longueur et de mettre en évidence des relations de proportionnalité en présence de parallélisme.

1.2 Coordonnées cartésiennes

Définition

Un vecteur du plan est défini par une direction, un sens et une norme.

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur. Si le sens de $\vec{u}$ est positif, on définit $\mathrm{sg}(\vec{u}) = 1$ sinon on définit $\mathrm{sg}(\vec{u}) = -1$.
On note $\|\vec{u}\|$ le nombre réel positif qui est la norme du vecteur $\vec{u}$.

Remarque :

- À tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ on peut associer la translation du plan qui transforme A en B. On notera $B = A + \overrightarrow{AB}$ pour signifier que B est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

- Soit O un point du plan. À tout point M du plan, on peut associer le vecteur $\overrightarrow{OM}$. Réciproquement à tout vecteur $\overrightarrow{u}$, on peut associer un unique point M du point tel que $M = O + \overrightarrow{OM}$.
Ainsi lorsqu'un point du plan est donné. On peut définir une bijection entre les points du plan et les vecteurs.
- Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. Soit M un point du plan. Le point $(M+\overrightarrow{u})+\overrightarrow{v}$ est le point du plan obtenu en effectuant une translation de M de vecteur $\overrightarrow{u}$ suivie d'une translation de vecteur $\overrightarrow{v}$. On définit la somme $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ comme le vecteur tel que pour tout point du plan M, $M+(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = (M+\overrightarrow{u})+\overrightarrow{v}$.

Définition

Un repère du plan $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est la donnée d'un point O du plan et de deux vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$.

- On dit que $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est un repère orthogonal du plan si, $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est un repère et que le triangle formé par les points O, $O+\overrightarrow{i}$ et $O+\overrightarrow{j}$ est rectangle en O.
- On dit que $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est un repère orthonormal du plan (ou encore orthonormé du plan) si, $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est un repère et que le triangle formé par les points O, $O+\overrightarrow{i}$ et $O+\overrightarrow{j}$ est rectangle et isocèle en O et $\|\overrightarrow{i}\| = \|\overrightarrow{j}\| = 1$.

Définition

Soit d une droite du plan. Soit A un point du plan. On appelle projection orthogonale de A sur la droite d le point d'intersection entre la droite d et la droite perpendiculaire à d passant par A. En notant P ce point d'intersection, on écrit $P = p_d(A)$.

Remarque : Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé du plan. Soit M un point du plan. Notons $I = O+\overrightarrow{i}$ et $J = O+\overrightarrow{j}$.

Soit M un point du plan. Soient X_M la projection orthogonale de M sur (OI) et Y_M la projection orthogonale de M sur (OJ). D'après les remarques précédentes, il existe deux uniques vecteurs $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ tels que

$$X_M = O+\overrightarrow{x} \quad \text{et} \quad Y_M = O+\overrightarrow{y}.$$

$(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé du plan. Soit M un point du plan. L'unicité de ces vecteurs est donnée par le caractère bijectif de la relation entre un point et un vecteur du plan (par l'intermédiaire de O).

On appelle abscisse du point M dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ le nombre réel $\mathrm{sg}(\overrightarrow{x}) \times \|\overrightarrow{x}\|$.

On appelle ordonnée du point M dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ le nombre réel $\mathrm{sg}(\overrightarrow{y}) \times \|\overrightarrow{y}\|$.

Définition

Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé du plan. Soit M un point du plan. On appelle les coordonnées cartésiennes du point M dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ le couple (x, y) où x est l'abscisse du point M dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et y est l'ordonnée du point M dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Remarque :

- On se place dans un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Soit $\overrightarrow{u}$ le vecteur de même direction que $\overrightarrow{i}$ dont le sens est identique au signe de x et la norme vaut $|x|$. Soit $\overrightarrow{v}$ le vecteur de même direction que $\overrightarrow{j}$ dont le sens est identique au signe de y et la norme vaut $|y|$. Soit $M = O+(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})$. Par construction, les coordonnées cartésiennes du point M sont (x, y).
- À tout couple de nombres réels (x, y) on peut associer un point du plan de coordonnées cartésiennes (x, y).
- Lorsqu'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est définit. On écrit par abus $M(x, y)$ le point M dont les coordonnées cartésiennes dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ sont (x, y). Le repère est souvent sous-entendu sans être explicité.

Proposition

Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points du plan. Soit $M(x_M, y_M)$ le milieu du segment $[AB]$. On alors

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Démonstration. On considère le point $O'(x_A, y_B)$, le point $I = \mathrm{m}[O'B]$, le point J d'intersection entre la médiatrice de $[O'B]$ et (AB). Alors, en appliquant le théorème de Pythagore aux triangles $O'BA$ et IBJ, on a

$$\begin{cases} AB^2 = O'A^2 + O'B^2 \\ JB^2 = IJ^2 + IB^2 \end{cases}.$$

Les droites (OA) et (IJ) sont parallèles donc d'après le théorème de Thalès,

$$\frac{IB}{OB} = \frac{IJ}{O'A}.$$

or I est le milieu de $[O'B]$ donc

$$O'A = 2 \times IJ \text{ et } O'B = 2 \times IB.$$

Par suite, on a les égalités

$$\begin{array}{rcll} AB^2 & = & O'A^2 + O'B^2 & \\ & = & 4IJ^2 + 4IB^2 & \\ & = & 4JB^2 & \textit{(Pythagore)} \\ & = & (2 \times JB)^2. & \end{array}$$

En passant à la racine carrée puisque les longueurs sont positives, on obtient que $AB = 2 \times JB$. Or J est un point du segment $[AB]$ donc J est le milieu de $[AB]$. Autrement dit $M = J$ par définiton.

Par construction les vecteurs $\overrightarrow{O'B}$ et $\overrightarrow{i}$ ont même la direction. De plus I et M sont sur une droite perpendiculaire à $(O'B)$. En particulier les points M et I sont sur une droite perpendiculaire à $(O, O + \overrightarrow{i})$. Donc l'abscisse du point M est égale à celle du point I.

En notant A', X_M, B' la projection orthogonale respectivement de A, M, B sur l'axe des abscisses, on a

$$OA' = x_A \text{ et } OX_M = x_M\frac{A'B'}{2} \text{ et } OB' = x_B.$$

Or les points O, A', X_M et B' sont alignés donc $A'B' = OB' - OA' = x_B - x_A$. Par suite

$$x_M = \frac{x_B - x_A}{2}.$$

On procède de même pour obtenir l'ordonnée du point M en projetant M sur l'axe des ordonnées et en montrant que la droite passant par M et son projeté passe par le milieu du segment $O'A$. □

Définition

Soit $F : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$. On dit que $F(x, y) = 0$ est une équation cartésienne d'une partie A du plan si,

$$\forall (x, y) \in E,\ \big(M(x, y) \in A\big) \Longleftrightarrow F(x, y) = 0.$$

Remarque :

- Sous les hypothèses de la définition précédente, si $F(x, y) = 0$ est une équation cartésienne d'une partie A du plan alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\lambda F(x, y) = 0$ est encore une équation cartésienne de cette même partie A.
- dans la définition précédente, F peut ne pas être définie sur $\mathbb{R}^2$.
- On parle d'équation cartésienne pour $F(x, y) = 0$ parcequ'on met en relation les coordonnées cartésiennes d'un point du plan. Ceci étant dépendant d'un repère orthonormé choisi.

Exemple :

- On définit $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points distincts du plan. On s'intéresse à la médiatrice du segment $[AB]$ qu'on notera $\mathscr{D} = \mathrm{med}([AB])$. On souhaite exhiber une équation cartésienne de $\mathscr{D}$. Soit $M(x, y)$ un point du plan.

$$\begin{array}{rcll} M \in \mathscr{D} & \Longleftrightarrow & AM = BM & \\ & \Longleftrightarrow & \sqrt{(x - x_A)^2 + \big(y - y_A\big)^2} = \sqrt{(x - x_B)^2 + \big(y - y_B\big)^2} & \textit{(Pythagore)} \\ & \Longleftrightarrow & (x - x_A)^2 + \big(y - y_A\big)^2 = (x - x_B)^2 + \big(y - y_B\big)^2 & \textit{(un carré est toujours positif)} \\ & \Longleftrightarrow & x^2 - 2x_A x + x_A^2 + y^2 - 2y_A y + y_A^2 = x^2 - 2x_B x + x_B^2 + y^2 - 2y_B y + y_B^2 & \\ & \Longleftrightarrow & -2x_A x + x_A^2 - 2y_A y + y_A^2 = -2x_B x + x_B^2 - 2y_B y + y_B^2 & \\ & \Longleftrightarrow & (2x_B - 2x_A)x + (2y_B - 2y_A)y + (x_A^2 - x_B^2 + y_A^2 - y_B^2) = 0 & \\ & \Longleftrightarrow & F(x, y) = 0 & \end{array}$$

où $F : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (2x_B - 2x_A)x + (2y_B - 2y_A)y + (x_A^2 - x_B^2 + y_A^2 - y_B^2) \in \mathbb{R}$. En divisant par 2,

$$(x_B - x_A)x + (y_B - y_A)y + (\frac{x_A^2 - x_B^2}{2} + \frac{y_A^2 - y_B^2}{2}) = 0,$$

est encore une équation cartésienne de $\mathscr{D}$.

- On s'intéresse à l'ensemble $\mathscr{H}$ des points du plan dont les coordonnées cartésiennes (x, y) vérifient $xy = 3$. Par définition, $xy - 3 = 0$ est une équation cartésienne de $\mathscr{H}$.
  Soit $M(x, y)$. Si $x = 0$ ou $y = 0$ alors $xy = 0$ et donc $m \notin \mathscr{H}$. On suppose maintenant que $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{H} &\iff xy = 3 \\ &\iff y = \frac{3}{x} \qquad (x \neq 0) \\ &\iff y - \frac{3}{x} = 0. \end{aligned}$$

  Un équation cartésienne de $\mathscr{H}$ est donnée par la fonction $F : (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \mapsto y - \frac{3}{x}$.

1.3 Affixe complexe

Définition

On munit le plan euclidien d'un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe. Soit $M(x, y)$ un point du plan.
On dit que M est d'affixe z dans le repère $\mathscr{R}$ et l'on note $M(z)$ ou encore $\mathrm{aff}_{\mathscr{R}}(M) = z$ si,

$$\begin{cases} x = \mathrm{Re}(z) \\ y = \mathrm{Im}(z) \end{cases}$$

On dit aussi que M est l'image de z dans le repère $\mathscr{R}$ si M est d'affixe z.

Remarque :

- Attention à ne pas confondre le nombre complexe i et le vecteur $\vec{i}$.
- La définition précédente dépend d'un repère orthonormé du plan. Si l'on change la représentation du plan alors on change l'interprétation en terme d'affixe des points du plan.
- Par abus lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on parlera d'affixe d'un point sans préciser le repère orthonormé.
- Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé, l'affixe du point O est $0 + i \times 0 = 0$, l'affixe du point $O + \vec{i}$ est 1 et l'affixe du point $O + \vec{j}$ est i.
- Attention dans le repère $(O + \vec{i}, \vec{i}, \vec{j})$, l'affixe du point $O + \vec{i}$ est nulle alors que l'affixe du point O est -1 car $O = (O + \vec{i}) - \vec{i}$.

Définition

Soit $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé. Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe.
On dit que $\vec{u}$ est d'affixe z dans le repère $\mathscr{R}$ et l'on note $\vec{u}(z)$ ou encore $\mathrm{aff}(\vec{u}) = z$ si

$$\mathrm{aff}_{\mathscr{R}}(O + \vec{u}) = z.$$

Remarque : On fixe un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. À tout nombre complexe $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on peut associer le point $M(x, y)$ par la définition $M = O + (x\vec{i} + y\vec{j})$. Cette application permet d'identifier les points du plan avec l'ensemble des nombres complexes. On parle de plan complexe (ou encore de plan d'Argand).

Proposition

Soient A et B deux points du plan. On a l'égalité

$$\mathrm{aff}(\overrightarrow{AB}) = \mathrm{aff}(B) - \mathrm{aff}(A).$$

Démonstration. Soit $M = O + \overrightarrow{AB}$. Par définition, $\mathrm{aff}(\overrightarrow{AB}) = \mathrm{aff}(M)$. Par construction, les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont égaux. Ainsi $\mathrm{aff}(\overrightarrow{AB}) = \mathrm{aff}(\overrightarrow{OM})$. Or $M = O + \overrightarrow{OM}$. On obtient donc $\mathrm{aff}(M) = \mathrm{aff}(\overrightarrow{OM})$. □

Proposition

Soit $M(z)$ un point du plan d'affixe $z \in \mathbb{C}$ dans un repère d'origine O. La norme $\|\overrightarrow{OM}\|$ est égale au module $|z|$.

Démonstration. Le triangle formé par les points O, $O + \mathrm{Re}(z)\vec{i}$ et M est rectangle en $O + \mathrm{Re}(z)\vec{i}$. Par le théorème de Pythagore, $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} = |z|$. □

Remarque : Soient A et B deux points du plan. On définit la distance entre deux points A et B par $\mathrm{d}(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\|$. À l'aide de la représentation complexe du plan, on obtient $\mathrm{d}(A,B) = |\mathrm{aff}(B) - \mathrm{aff}(A)|$.

Exemple :

- L'ensemble des nombres complexes de module 1 a pour image le cercle de centre O et de rayon 1.
- Le cercle de centre A d'affixe a et de rayon $r > 0$ est l'ensemble des points dont l'affixe z vérifie $|z - a| = r$.
- Le disque ouvert de centre A d'affixe a et de rayon r est l'ensemble des points du plan d'affixe z vérifiant $|z - a| < r$.

Proposition (relation de Chasles)

Soient A et B deux points du plan euclidien $\mathscr{P}$.

$$\forall M \in \mathscr{P},\ \ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}.$$

Démonstration. On note $a = \mathrm{aff}(A)$ et $b = \mathrm{aff}(B)$. Pour tout point M d'affixe z,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{aff}(\overrightarrow{AB}) & = & b - a \\ & = & b - z + z - a \\ & = & z - a + b - z \\ & = & \mathrm{aff}(\overrightarrow{AM}) + \mathrm{aff}(\overrightarrow{MB}) \end{array}$$

Par suite, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$. □

Proposition (changement d'origine)

Soit $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé. Soit Ω un point du plan. Soit $\mathscr{R}' = (\Omega, \vec{i}, \vec{j})$. Soit M un point du plan.

$$\mathrm{aff}_{\mathscr{R}'}(M) = \mathrm{aff}_{\mathscr{R}}(M) - \mathrm{aff}_{\mathscr{R}}(\Omega).$$

Démonstration. On note $z = x + iy$ l'affixe du point M dans $\mathscr{R}$. Soit $w = a + ib$ l'affixe du point Ω dans $\mathscr{R}$.

La relation de Chalses donne l'égalité

$$\begin{array}{rcl} x\vec{i} + y\vec{j} & = & \overrightarrow{OM} \\ & = & \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M} \\ & = & a\vec{i} + b\vec{j} + \overrightarrow{\Omega M} \end{array}$$

D'où $\overrightarrow{\Omega M} = (x - a)\vec{i} + (y - b)\vec{j}$. Autrement dit, dans le repère $\mathscr{R}'$, les coordonnées cartésiennes de M sont $(x - a, y - b)$. On en déduit que

$$\mathrm{aff}_{\mathscr{R}'}(M) = x - a + i(y - b) = \mathrm{aff}_{\mathscr{R}}(M) - \mathrm{aff}_{\mathscr{R}}(\Omega).$$

□

1.4 Coordonnées polaires

Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe.

- Si $z = 0$ alors $z = 0 \times e^{0i}$.
- Si $z \neq 0$ alors il existe un nombre réel $r \in \mathbb{R}$ et un nombre réel $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = re^{i\theta}$.

Définition

Soit $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé. Soit M un point du plan. Soit $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$. On dit que (r, θ) est un système de coordonnées polaires de M dans le repère $\mathscr{R}$ si,

$$\overrightarrow{OM} = r\left(\cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}\right).$$

Remarque : Si (r, θ) est un système de coordonnées polaires d'un point M du plan. Alors les coordonnées cartésiennes de M sont $(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.

Déterminer les coordonnées polaires

Soit M de coordonnées cartésiennes (x, y) dans un repère orthonormé $\mathscr{R}$. Pour déterminer un système de coordonnées polaires du point M dans le repère $\mathscr{R}$

- on introduit $z = x + iy$.
- on détermine $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = re^{i\theta} = r\cos(\theta) + ir\sin(\theta)$.
- un système de coordonnées polaires de M est donc donné par (r, θ).

Exemple : Soit $M(1,1)$ un point du plan. Soit $z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Ainsi $(\sqrt{2}, \pi/4)$ est un système de coordonnées polaires de M. De même $1 + i = -\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$ et donc $(-\sqrt{2}, 5\pi/4)$ est un autre système de coordonnées polaires du point M.

Définition

On dit que $F(r, \theta) = 0$ est une équation polaire d'une partie A du plan lorsqu'un point M du plan appartient à A si et seulement si l'un de ses couples de coordonnées polaires vérifie $F(r, \theta) = 0$.

Remarque :

- Un point du plan admet plusieurs couples de coordonnées polaires. Dans la définition précédente, on demande uniquement que l'un d'entre eux vérifie l'équation $F(r, \theta) = 0$. Il s'agit d'une différence fondamentale avec les équations cartésiennes.
- Si $F(r, \theta) = 0$ est une équation polaire d'une partie du plan alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\lambda F(r, \theta) = 0$ est encore une équation polaire de cette même partie A.

Exemple : Dans un repère $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on définit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1. Soit M un point M du plan.

On note (x, y) les coordonnées cartésiennes de M. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{C} &\iff OM = 1 \\ &\iff x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ est donc $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

On note $(r, \ \theta)$ un couple de coordonnées polaires de M. Pour des raisons algébriques $(-r, \ \theta + \pi)$ est encore un couple de coordonnées polaires de M. Puisque $r \geq 0$ ou $-r \geq 0$, on peut supposer qu'un des couples de coordonnées polaires de M vérifie $r \geq 0$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{C} &\iff \|\overrightarrow{OM}\| = 1 \\ &\iff |\text{aff}(\overrightarrow{OM})| = 1 \\ &\iff |\text{aff}(M)| = 1 \\ &\iff |re^{i\theta}| = 1 \\ &\iff |r| = 1 \\ &\iff r = 1 \qquad (r \geq 0) \end{aligned}$$

Une équation polaire de $\mathscr{C}$ est $r - 1 = 0$ ou encore $|r| - 1 = 0$.

2 Produit scalaire et produit mixte dans le plan

2.1 Produit scalaire

Définition

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. On appelle produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et l'on note $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ ou encore $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ le nombre réel défini par

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \|\overrightarrow{v}\| \cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right),$$

lorsque les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls et sinon $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

Remarque : Si H est le projeté orthogonal sur la droite (AB) d'un point M du plan,

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

En effet, le triangle AHM étant rectangle en H,

$$\begin{array}{rcll} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} & = & \|\overrightarrow{AM}\| \|\overrightarrow{AB}\| \cos\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right) & \\ & = & \|\overrightarrow{AM}\| \|\overrightarrow{AB}\| \cos\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AH}\right) & \\ & = & \|\overrightarrow{AM}\| \|\overrightarrow{AB}\| \times \dfrac{\|\overrightarrow{AH}\|}{\|\overrightarrow{AM}\|} \cos\left(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AB}\right) & \textit{(selon le signe du produit scalaire)} \\ & = & \|\overrightarrow{AH}\| \overrightarrow{AB}\| \| \cos\left(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AB}\right) & \textit{(car A, B et H sont alignés.)} \\ & = & \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} & \end{array}$$

Proposition

Le produit scalaire est bilinéaire, symétrique. C'est-à-dire que l'on a

- **Bilinéaire.** Pour tout triplet de vecteurs du plan, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, pour tout nombre réel λ, on a

$$\left(\vec{u} + \lambda \vec{v}\right) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \lambda \vec{v} \cdot \vec{w} \quad \text{et} \quad \vec{w} \cdot \left(\vec{u} + \lambda \vec{v}\right) = \vec{w} \cdot \vec{u} + \lambda \vec{w} \cdot \vec{v}$$

- **Symétrie.** Pour tout couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$, on a l'égalité

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

Remarque :

- Cette proposition est essentiellement calculatoire et permet donc d'observer des propriétés calculatoires. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan et x_1, y_1, x_2, y_2 quatre nombres réels alors

$$(x_1 \vec{u} + y_1 \vec{v}) \cdot (x_2 \vec{u} + y_2 \vec{v}) = x_1 x_2 \vec{u} \cdot \vec{u} + (x_1 y_2 + x_2 y_1) \vec{u} \cdot \vec{v} + y_1 y_2 \vec{v} \cdot \vec{v}$$

- On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on respectivement $a \neq 0$ et b pour affixe.
On peut alors donner une mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ à l'aide de a et b. En effet,

$$\begin{array}{rcll} (\vec{u}, \vec{v}) & \equiv & \arg\left(\dfrac{b}{a}\right) \ [2\pi] & \\ & \equiv & \arg\left(\dfrac{\bar{a}b}{|a|^2}\right) \ [2\pi] & \\ & \equiv & \arg(\bar{a}b) \ [2\pi] & \textit{car } |a| > 0 \\ & \equiv & \arg(\bar{a}) + \arg(b) \ [2\pi] & \end{array}$$

En utilisant l'interprétation complexe des vecteurs, on en déduit que

$$\begin{array}{rcl} \vec{u} \cdot \vec{v} & = & \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) \\ & = & |a||b| \cos\left(\arg(\bar{a}) + \arg(b)\right) \\ & = & \mathrm{Re}\left(|a||b| e^{i\arg(\bar{a}) + i\arg(b)}\right) \\ & = & \mathrm{Re}\left(|\bar{a}| e^{i\arg(\bar{a})} \times |b| e^{i\arg(b)}\right) \\ & = & \mathrm{Re}(\bar{a}b). \end{array}$$

Proposition

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. Le carré scalaire $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$.

Démonstration. En écrivant la définition du produit scalaire,

$$\begin{array}{rcl} \vec{u} \cdot \vec{u} & = & \|\vec{u}\| \|\vec{u}\| \cos(\vec{u}, \vec{u}) \\ & = & \|\vec{u}\|^2 \cos(0) \\ & = & \|\vec{u}\|^2. \end{array}$$

□

Définition

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux lorsque $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. On dit de plus que ces vecteurs sont orthonormés s'ils sont à la fois orthogonaux et tous deux de norme égale à 1.

Proposition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. Il y a équivalence entre les énoncés :
(i) : Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
(ii) : Pour tout point O du plan, le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est orthogonal.

Démonstration. Montrons l'équivalence par double implication.

- $(i) \Longrightarrow (ii)$: Supposons que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
  Soit O un point du plan. On définit $I = O + \vec{u}$ et $J = O + \vec{v}$. Puisque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, on a l'égalité
  $$\begin{aligned} \vec{u}\cdot\vec{v} &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v}) \\ &= \|\overrightarrow{OI}\|\|\overrightarrow{OJ}\|\cos(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}) \end{aligned}$$
  Or les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont supposés orthogonaux. On en déduit que
  $$\cos(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}) = 0,$$
  et donc que l'angle orienté $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$. Autrement dit le triangle OIJ est rectangle en O.

  Par suite le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est orthogonal.

- $(ii) \Longrightarrow (i)$: Supposons que pour tout point O du plan, le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est orthogonal.
  Le plan étant non vide, on peut choisir un point O du plan. Soit $I = O + \vec{u}$ et $J = O + \vec{v}$.
  Par hypothèse le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est orthogonal. Ainsi le triangle formé par les points O, I et J est rectangle en O. On en déduit que $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ et donc que
  $$\cos(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}) = 0.$$
  Finalement, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

□

Théorème (de décomposition dans une base orthonormée)

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthonormés non nuls du plan. Soit $\vec{w}$ un vecteur du plan.

- $\vec{w} = (\vec{w}\cdot\vec{u})\vec{u} + (\vec{w}\cdot\vec{v})\vec{v}$;
- pour tout couple de nombres réels $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
  $$\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v} \Longrightarrow \begin{cases} x = (\vec{w}\cdot\vec{u}) \\ y = (\vec{w}\cdot\vec{v}) \end{cases}.$$

Démonstration. Considérons le vecteur $\vec{s} = \vec{w} - (\vec{w}\cdot\vec{u})\vec{u} - (\vec{w}\cdot\vec{v})\vec{v}$. Par linéarité du produit scalaire,
$$\begin{aligned} \vec{s}\cdot\vec{u} &= \left(\vec{w} - (\vec{w}\cdot\vec{u})\vec{u} - (\vec{w}\cdot\vec{v})\vec{v}\right)\cdot\vec{u} \\ &= \vec{w}\cdot\vec{u} - (\vec{w}\cdot\vec{u})\vec{u}\cdot\vec{u} - (\vec{w}\cdot\vec{v})\vec{v}\cdot\vec{u} \\ &= \vec{w}\cdot\vec{u} - (\vec{w}\cdot\vec{u})\|\vec{u}\|^2 - 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$
De même on montre que $\vec{s}\cdot\vec{v} = 0$. De ce fait, $\vec{s}$ est orthogonal à $\vec{u}$ mais aussi orthogonal à $\vec{v}$. Par suite, $\vec{s}$ est le vecteur nul et donc
$$\vec{w} = (\vec{w}\cdot\vec{u})\vec{u} + (\vec{w}\cdot\vec{v})\vec{v}.$$

Montrons maintenant l'unicité de cette décomposition. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ un couple de nombres réels tel que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$. À nouveau par linéarité du produit scalaire,

$$\begin{array}{rcl} \vec{w} \cdot \vec{u} & = & \left(x\vec{u} + y\vec{v}\right) \cdot \vec{u} \\ & = & x\vec{u} \cdot \vec{u} + y\vec{v} \cdot \vec{u} \\ & = & x\|\vec{u}\|^2 + y \times 0 \\ & = & x. \end{array}$$

De même, en considérant $\vec{w} \cdot \vec{v}$, on montre que $\vec{w} \cdot \vec{v} = y$. □

Remarque : On peut traduire le théorème précédent en affirmant que tout vecteur peut se décomposer de manière unique comme une combinaison linéaire des vecteurs orthonormés $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Proposition

Soit $\mathscr{R} = (\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé du plan. Soit M un point du plan. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ un couple de nombres réels. il y a équivalence entre les énoncés :

(i) : Les coordonnées cartésiennes de M sont (x, y).

(ii) : $\overrightarrow{\Omega M} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

(iii) : $x = \overrightarrow{\Omega M} \cdot \vec{u}$ et $y = \overrightarrow{\Omega M} \cdot \vec{v}$.

Démonstration. L'équivalence $(ii) \iff (iii)$ est donnée par le théorème précédent.

- $(i) \Longrightarrow (ii)$: Supposons que les coordonnées cartésiennes de M sont données par le couple (x, y). Par définition des coordonnées cartésiennes, il existe deux vecteurs $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} M = \Omega + (\vec{X} + \vec{Y}) \\ \vec{X} \perp \vec{v} \text{ et } \vec{Y} \perp \vec{u} \\ \|\vec{X}\| = |x| \text{ et } \|\vec{Y}\| = |y| \end{array} \right. .$$

  Ainsi $\vec{X} \perp \vec{v}$ et donc puisqu'on est dans le plan, $\vec{X} \mathbin{/\!/} \vec{u}$. Par suite $\vec{X} = x\vec{u}$. De même puisque $\vec{Y} \perp \vec{u}$ et que $\|\vec{Y}\| = |y|$, on a $\vec{Y} = y\vec{v}$. Finalement,

$$M = \Omega + (x\vec{u} + y\vec{v}),$$

  et donc $\overrightarrow{\Omega M} = x\vec{u} + y\vec{v}$.
- $(ii) \Longrightarrow (i)$: En remarquant que le point $X_M = \Omega + x\vec{u}$ est le projeté orthogonal du point M sur l'axe des abscisses, on montre que x est l'abscisse du point M dans le repère orthonormé $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$. De même en considérant le point $Y_M = \Omega + y\vec{v}$, on montre que y est l'ordonnée du point M dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$. Ainsi, les coorodnnées cartésiennes de M sont données par le couple (x, y).

□

Proposition

On munit le plan d'un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan de coordonnées cartésiennes respectives $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xa + yb.$$

Démonstration. D'après la proposition précédente,

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} \text{ et } \vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}.$$

Par bilinéarité,

$$\begin{array}{rcl} \vec{u} \cdot \vec{v} & = & \left(x\vec{i} + y\vec{j}\right) \cdot \left(a\vec{i} + b\vec{j}\right) \\ & = & xa\vec{i} \cdot \vec{i} + (xb + ya)\vec{i} \cdot \vec{j} + yb\vec{j} \cdot \vec{j} \\ & = & xa + yb \qquad (\vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \quad et \ \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1) \end{array}$$

□

Exemple : Si les coordonnées cartésiennes d'un vecteur $\vec{u}$ sont $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ alors

$$x \times (-y) + y \times x = 0,$$

et donc le vecteur $\vec{v}(-y, x)$ est orthogonal à $\vec{u}$.

Théorème (d'Al-Kashi)

Soient A, B et C trois points distincts du plan. Soit θ une mesure de l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. On a alors

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\ AC\cos(\theta).$$

En particulier si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, on a

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Démonstration. Par la relation de Chasles, on a $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. En calculant le carré scalaire, on a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} &= \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) \\ &= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

D'où l'égalité annoncée. De plus si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux on a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ et on retrouve le théorème de Pythagore. □

Proposition (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan alors

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|.$$

Démonstration. En notant $a = x_1 + iy_1$ et $b = x_2 + iy_2$ les affixes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \mathrm{Re}(\bar{a}b) = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Donc $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\bar{a}b| = |a||b| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$. □

2.2 Produit mixte

Définition

On appelle produit mixte du vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$ par le vecteur $\vec{v} \neq \vec{0}$ et l'on note $[\vec{u}, \vec{v}]$ le nombre réel

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}).$$

si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul on définit $[\vec{u}, \vec{v}] = 0$.

Proposition

Deux vecteurs du plan $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $[\vec{u}, \vec{v}] = 0$.

Démonstration. Selon la définition du produit mixte,

- Si l'un des deux vecteurs est nul alors ils sont colinéaires et leur produit mixte est aussi nul.
- Si θ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\theta \equiv 0[\pi]$ si et seulement si $\sin(\theta) = 0$ et donc si et seulement si $[\vec{u}, \vec{v}] = 0$.

□

Corollaire

Trois points du plan A, B et C sont alignés si et seulement si $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = 0$.

Remarque : Si deux vecteurs du plan $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux alors $\left|[\vec{u}, \vec{v}]\right| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$.

Proposition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Soient a et b les affixes respectives des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \operatorname{Im}(\bar{a}b)$$

Démonstration. En remarquant que $\arg(b) - \arg(a) = \arg(b) + \arg(\bar{a})\,[2\pi]$, on a

$$\begin{array}{rcl} [\vec{u}, \vec{v}] & = & \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin(\vec{u}, \vec{v}) \\ & = & |a||b|\sin(\arg(b) - \arg(a)) \\ & = & |\bar{a}||b|\sin(\arg(b) + \arg(\bar{a})) \\ & = & \operatorname{Im}\left(|\bar{a}||b|e^{i(\arg(b)+\arg(\bar{a}))}\right) \\ & = & \operatorname{Im}\left(|\bar{a}|e^{i\arg(\bar{a})}|b|e^{i\arg(b)}\right) \\ & = & \operatorname{Im}(\bar{a}b). \end{array}$$

□

Corollaire

Soit $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé. Si $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ et $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ alors

$$[\vec{u}, \vec{v}] = x_1y_2 - x_2y_1.$$

Remarque : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan d'affixe respective a et b alors

$$\bar{a}b = \vec{u}\cdot\vec{v} + i[\vec{u}, \vec{v}].$$

Proposition

Le produit mixte est bilinéaire, antisymétrie. C'est-à-dire que l'on a

- **Bilinéaire.** Pour tout triplet de vecteurs du plan, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, pour tout nombre réel λ, on a

$$[(\vec{u} + \lambda\vec{v}), \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{w}] + \lambda[\vec{v}, \vec{w}] \quad \text{et} \quad [\vec{w}, (\vec{u} + \lambda\vec{v})] = [\vec{w}, \vec{u}] + \lambda[\vec{w}, \vec{v}]$$

- **Antisymétrie.** Pour tout couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$, on a l'égalité

$$[\vec{u}, \vec{v}] = -[\vec{v}, \vec{u}].$$

3 Droites et cercles du plan

3.1 Droites

Définition

On dit que d est une droite du plan s'il existe un point A et un vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$ du plan tels que pour tout point M du plan,

$$M \in d \iff [\overrightarrow{AM}, \vec{u}] = 0.$$

Dans ce cas, on dit que d est une droite passant par A dirigée par $\vec{u}$. Le vecteur $\vec{u}$ est appelé un vecteur directeur de la droite d.

Remarque :

- Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite d alors pour tout $\lambda \neq 0$, $\lambda\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de la droite d.
- Si A et B sont deux points distincts d'une même droite alors $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur. On appelle espace vectoriel engendré par $\vec{u}$ et l'on note $\operatorname{Vect}(\vec{u})$ l'ensemble définit par

$$\operatorname{Vect}(\vec{u}) = \{\lambda\vec{u} \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Remarque : Si d est une droite du plan orientée par le vecteur $\vec{u}$ alors $\text{Vect}(\vec{u})\setminus\{\vec{0}\}$ est l'ensemble des vecteurs directeur de d. Cela explique pourquoi on dit aussi qu'une droite passe par un point et est dirigée par $\text{Vect}(\vec{u})$.

Proposition

Si d une droite passant par A dirigé par $\vec{u}$ alors $d = \{A + k\vec{u} \;/\; k \in \mathbb{R}\}$. On écrit aussi pour simplifier la lecture $d = A + \text{Vect}(\vec{u})$.

Démonstration. Soit M un point du plan.

$$\begin{aligned} M \in d &\iff [\overrightarrow{AM}, \vec{u}] = 0 \\ &\iff \exists k \in \mathbb{R},\ \ \overrightarrow{AM} = k\vec{u} \qquad (\textit{car } \vec{u} \neq \vec{0}\,) \\ &\iff \exists k \in \mathbb{R},\ \ M = A + k\vec{u} \\ &\iff M \in A + \text{Vect}(\vec{u}) \end{aligned}$$

□

Équation paramétrique d'une droite

Soit $A(x_A, y_A)$ un point du plan. Soit $\vec{u}(a, b)$ un vecteur non nul qui dirige une droite d passant par A.
Pour obtenir une équation paramétrée de la droite d, on remarque que pour tout point $M(x, y)$,

$$\begin{aligned} M \in d &\iff [\overrightarrow{AM}, \vec{u}] = 0 \\ &\iff \exists t \in \mathbb{R},\ \left\{ \begin{array}{l} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \end{array} \right. . \end{aligned}$$

Ce système d'équations avec trois inconnues (x, y, t) est appelé paramétrage de la droite d.

Proposition

Soient A et B deux points distincts du plan. Il existe une unique droite passant par A et B.

Démonstration. Assez clairement la droite (AB) est une droite passant par A et B.
Soit d une droite passant par A et B. Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de d alors $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires et donc

$$\text{Vect}(\overrightarrow{AB}) = \text{Vect}(\vec{u}).$$

Par suite, $(AB) = A + \text{Vect}(\overrightarrow{AB}) = A + \text{Vect}(\vec{u}) = d$. Finalement, d est la droite (AB). □

Proposition

Soit d la droite passant le point $A(x_A, y_A)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(a, b)$. Une équation cartésienne de d est donnée par

$$bx - ay = bx_A - ay_A.$$

Démonstration. Soit $M(x, y)$ un point du plan. Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées cartésiennes $(x - x_A, y - y_A)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} M \in d &\iff [\overrightarrow{AM}, \vec{u}] = 0 \\ &\iff b(x - x_A) - a(y - y_A) = 0 \\ &\iff bx - ay - bx_A + ay_A = 0 \\ &\iff bx - ay = bx_A - ay_A. \end{aligned}$$

□

Remarque : Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ sont deux points distincts du plan. Alors $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$ est un vecteur directeur de la droite (AB). Ainsi d'après la proposition précédente, une équation cartésienne de la droite (AB) est

$$(y_B - y_A)x - (x_B - x_A)y = (y_B - y_A)x_A - (x_B - x_A)y_A.$$

Proposition

Toute équation cartésienne de la forme $ax+by=c$ avec $(a,b)\neq 0$ et $c\in\mathbb{R}$ représente une droite du plan dirigée par le vecteur $(-b,a)$.

Démonstration. Soit $\vec{u}(-b,a)$. Soit $M(x,y)$ un point du plan. Puisque $a\neq 0$ ou $b\neq 0$, on peut construire $A(x_A,y_A)$ tel que $ax_A+by_A=c$. Soit d la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$.

$$\begin{aligned}
ax+by=c &\iff ax+by=ax_A+by_A\\
&\iff a(x-x_A)+b(y-y_A)=0\\
&\iff a(x-x_A)-(-b)(y-y_A)=0\\
&\iff [\overrightarrow{AM},\vec{u}]=0\\
&\iff M\in d.
\end{aligned}$$

□

Définition

On dit qu'un vecteur $\vec{u}$ est un vecteur normal à d une droite du plan s'il existe $\vec{v}$ un vecteur qui dirige d tel que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Remarque : Le vecteur nul est un vecteur normal de toute droite du plan.

Proposition

Soit d_0 une droite dirigée par $\vec{u_0}$. Soit d_1 une droite dirigée par $\vec{u_1}$. Il y a équivalence entre les énoncés :
(i) : $d_0\perp d_1$
(ii) : $\vec{u_0}\cdot\vec{u_1}=0$.

Démonstration. Soit $A\in d_0$. Soit $B\in d_1$.

- $(i)\implies(ii)$: Supposons que $d_0\perp d_1$. En notant $A'=A+\vec{u_0}$, on obtient l'égalité $(AA')=d_0$. De même, en notant $B'=B+\vec{u_1}$, on a $d_1=(BB')$. Puisque les droites d_0 et d_1 sont perpendiculaires alors les vecteurs $\overrightarrow{AA'}=\vec{u_0}$ et $\overrightarrow{BB'}=\vec{u_1}$ sont orthogonaux c'est-à-dire $\vec{u_0}\cdot\vec{u_1}=0$.
- $(ii)\implies(i)$: Supposons que $\vec{u_0}\cdot\vec{u_1}=0$. À nouveau en notant, $A'=A+\vec{u_0}$ et $B'=B+\vec{u_1}$ de sorte que $d_0=(AA')$ et $d_1=(BB')$, puisque les vecteurs $\vec{u_0}$ et $\vec{u_1}$ sont orthogonaux, on en déduit que les droites (AA') et (BB') sont perpendiculaires. Par suite $d_0\perp d_1$.

□

Remarque : Tout vecteur normal non nul à une droite dirige une droite perpendiculaire à la première droite.

Proposition

Soit $A(x_A,y_A)$ un point du plan. Soit $\vec{n}(a,b)$ un vecteur non nul. Si d est une doite qui passe par A et que $\vec{n}$ est un vecteur normal à d alors une équation cartésienne de d est

$$ax+by=ax_A+by_A.$$

Démonstration. Soit $\vec{u}(x,y)$ un vecteur non nul directeur de d tel que $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$. Quitte à échanger (x,a) et (y,b), on suppose que $a\neq 0$. Puisque $\vec{u}$ est un vecteur normal à $\vec{n}$,

$$x\frac{a}{a}+y\frac{b}{a}=\frac{0}{a},$$

et donc $x=-\frac{b}{a}y$. Or $\vec{u}$ n'est pas nul donc $y\neq 0$ (car sinon $x=0$). Donc le vecteur $\frac{a}{y}\vec{u}(-b,a)$ est encore un vecteur directeur de d. On en déduit qu'une équation cartésienne de d est

$$ax-(-b)y=ax_A+by_A.$$

□

Remarque : Si d est une droite dont une équation cartésienne est donnée par l'équation $ax + by = c$ alors on peut définir deux ensembles

$$d_+ = \left\{M(x,y) \ / \ ax+by>c\right\} \text{ et } d_- = \left\{M(x,y) \ / \ ax+by<c\right\}.$$

Ces deux ensembles permettent de décomposer le plan en deux parties. La première étant la partie supérieure (positive) du plan par rapport à la droite d notée d_+ et la seconde la partie inférieure (négative) du plan par rapport à la droite d notée d_-.

Proposition

Soient A, B et M trois points distincts du plan. Si P est le projeté orthogonal de M sur la droite (AB) alors

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|^2}\overrightarrow{AB}.$$

Démonstration. Puisque P est le projeté orthogonal de M sur (AB), $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AP}\|\|\overrightarrow{AB}\|$. On en déduit que

$$\|\overrightarrow{AP}\| = \frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}.$$

De plus A, B et P sont alignés donc

$$\overrightarrow{AP} = \|\overrightarrow{AP}\|\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}\times\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}.$$

□

Proposition

Soit d une droite passant par A dirigée par $\vec{u}$. Soit M un point du plan. On peut alors donner une expression de la distance de M à d par

$$\mathrm{d}(M,d) = \frac{\left|[\overrightarrow{AM},\vec{u}]\right|}{\|\vec{u}\|}$$

Démonstration. Soit P le projeté orthogonal de M sur la droite d. On a

$$\begin{array}{rcl}
[\overrightarrow{AM},\ \vec{u}] & = & [\overrightarrow{AP},\ \vec{u}] + [\overrightarrow{PM},\ \vec{u}] \\
 & = & [\overrightarrow{PM},\ \vec{u}] \\
 & = & \|\overrightarrow{PM}\|\|\vec{u}\|\sin(\overrightarrow{PM},\ \vec{u}).
\end{array}$$

Or les vecteurs $\overrightarrow{PM}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux par définition donc $\left|\sin(\overrightarrow{PM},\ \vec{u})\right| = 1$. On en déduit que

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{d}(M,d) & = & \|\overrightarrow{PM}\| \\
 & = & \dfrac{\left|[\overrightarrow{PM},\ \vec{u}]\right|}{\|\vec{u}\|} \\
 & = & \dfrac{\left|[\overrightarrow{AM},\vec{u}]\right|}{\|\vec{u}\|}.
\end{array}$$

□

Proposition

Soit $M(x,y)$ un point du plan. Si d une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$, où a,b,c sont trois nombres réels alors

$$\mathrm{d}(M,d) = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

3.2 Cercles

Définition

On appelle cercle de centre Ω et de rayon $r>0$ l'ensemble

$$\left\{M \ / \ \|\overrightarrow{\Omega M}\| = r\right\}$$

Remarque :

- Si M est un point du cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω et de rayon $r>0$ alors son symétrique M' par rapport à Ω est aussi un point du cercle et l'on appelle $[MM']$ un diamètre de $\mathscr{C}$.
- Pour tout couple $(M,M')\in\mathscr{C}^2$,
$$\mathrm{d}(M,M') \leq \mathrm{d}(M,\Omega)+\mathrm{d}(\Omega,M') = 2r$$
- Si $(M,M')\in\mathscr{C}^2$ tel que $\|\overrightarrow{MM'}\| = 2r$ alors on dit que M et M' sont diamétralement opposés dans $\mathscr{C}$.
- On note (a,b) les coordonnées cartésiennes de Ω. Soit $M(x,y)$ un point du plan.
$$\begin{aligned} M\in\mathscr{C} &\iff \|\overrightarrow{\Omega M}\| = r \\ &\iff \|\overrightarrow{\Omega M}\|^2 = r^2 \qquad (\|\overrightarrow{\Omega M} \geq 0 \; et \; r\geq 0) \\ &\iff (x-a)^2+(y-b)^2 = r^2 \\ &\iff x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2 = 0. \end{aligned}$$
On en déduit plusieurs équations cartésiennes du cercle.

Proposition

Tout cercle du plan a une équation cartésienne de la forme $x^2+y^2+ax+by+c=0$ avec $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ et $a^2+b^2>4c$.

Démonstration. On a déjà montré qu'un cercle admet une équation cartésienne de la forme souhaitée. Réciproquement, notons $\mathscr{C}$ l'ensemble décrit par l'équation cartésienne $x^2+y^2+ax+by+c=0$, avec $a^2+b^2>4c$.

Soient x et y deux nombres réels.

$$\begin{aligned} M(x,y)\in\mathscr{C} &\iff x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ &\iff \left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2+c=0 \\ &\iff \left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{4c-a^2-b^2}{4}=0 \\ &\iff \left(x-\frac{-a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{-b}{2}\right)^2=\sqrt{\frac{a^2+b^2-4c}{4}}^2. \end{aligned}$$

On reconnait une équation cartésienne du cercle de centre $\left(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}>0$. $\square$

Remarque : On a montré qu'une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(a,b)$ et rayon $R>0$ est donnée par

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

Soit M un point du plan de coordonnées cartésiennes (x,y) a un système de coordonnée polaires (r,θ).

- Si $a=b=0$ alors
$$\begin{aligned} M\in\mathscr{C} &\iff (r\cos(\theta))^2+(r\sin(\theta))^2=R^2 \\ &\iff r^2\left(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\right)=R^2 \\ &\iff r^2=R^2 \\ &\iff |r|=R \end{aligned}$$
- Si $O(0,0)\in\mathscr{C}$ et $r\neq 0$ alors
$$\begin{aligned} M\in\mathscr{C} &\iff (r\cos(\theta))^2+(r\sin(\theta))^2-2ar\cos(\theta)-2br\sin(\theta)=0 \\ &\iff r=2a\cos(\theta)+2b\sin(\theta) \end{aligned}$$

- En analysant l'équation cartésienne initiale, on obtient

$$\begin{aligned}
M \in \mathscr{C} &\iff \left(\frac{x-a}{R}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{R}\right)^2 = 1 \\
&\iff \frac{x-a}{R} + i\frac{y-b}{R} \in \mathbb{U} \\
&\iff \exists \theta \in \mathbb{R},\ \frac{x-a}{R} + i\frac{y-b}{R} = e^{i\theta} \\
&\iff \exists \theta \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \frac{x-a}{R} = \cos(\theta) \\ \frac{y-b}{R} = \sin(\theta) \end{cases} \\
&\iff \exists \theta \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = a + R\cos(\theta) \\ y = b + R\sin(\theta) \end{cases}.
\end{aligned}$$

En exprimant $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ en fonction de $t = \tan(\theta/2)$, on a

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

et donc

$$M \in \mathscr{C} \iff \exists t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = a + R\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = b + R\frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

Proposition

Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon $R > 0$. Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan.

- Si $\mathrm{d}(A, \mathscr{D}) > R$, alors $\mathscr{D} \cap \mathscr{C} = \emptyset$.
- Si $\mathrm{d}(A, \mathscr{D}) < R$, alors $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$ ont deux points d'intersection distincts.
- Si $\mathrm{d}(A, \mathscr{D}) = R$, alors $\mathscr{D} \cap \mathscr{C} = \{M\}$ et $\mathscr{D}$ est appelée droite tangente au cercle $\mathscr{C}$ au point M.

Démonstration. Déterminer les points d'intersection entre la droite $\mathscr{D}$ et le cercle $\mathscr{C}$ revient à trouver les points de $\mathscr{D}$ qui sont à une distance R de A.

- Si $\mathrm{d}(A, \mathscr{D}) > R$ alors il n'y a aucun point de $\mathscr{D}$ qui peut se trouver à une distance égale à R de A. Ainsi, $\mathscr{D} \cap \mathscr{C} = \emptyset$.
- Supposons que $\mathrm{d}(A, \mathscr{D}) < R$. Soit H le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathscr{D}$ et $\vec{u}$ un vecteur unitaire qui dirige $\mathscr{D}$. Soit M un point du plan.

$$\begin{aligned}
M \in \mathscr{D} \cap \mathscr{C} &\iff \overrightarrow{HM} /\!/ \vec{u} \text{ et } AM^2 = R^2 \\
&\iff \overrightarrow{HM} = HM\vec{u} \text{ et } AM^2 = R^2 \\
&\iff \overrightarrow{HM} = HM\vec{u} \text{ et } R^2 = AH^2 + HM^2 \\
&\iff \overrightarrow{HM} = \sqrt{R^2 - \mathrm{d}(A, \mathscr{D})^2}\,\vec{u} \text{ ou } \overrightarrow{HM} = -\sqrt{R^2 - \mathrm{d}(A, \mathscr{D})^2}\,\vec{u}.
\end{aligned}$$

  Dans ce cas, on a donc deux points d'intersection.
- Supposons que $\mathrm{d}(A, \mathscr{D}) = R$. Dans ce cas, il n'y a qu'un seul point M de $\mathscr{D}$ tel que $\mathrm{d}(A, M) = R$, c'est le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{D}$.

$\square$

4 Transformations du plan

Définition

Si $\mathscr{P}$ est l'ensemble des points du plan, toute bijection $f : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ est appelée transformation du plan.

Remarque : Si f est une transformation du plan on peut lui associer une application $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bijective telle que pour tous points M et M' d'affixe respectives z et z', on ait :

$$M' = f(M) \iff z' = g(z).$$

Dans ce cas, on dit que f est représentée par g dans le plan complexe.

4.1 Translation

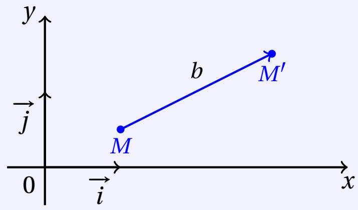
Définition

Si $\vec{u}$ est un vecteur du plan alors la translation de vecteur $\vec{u}$ est l'application qui à tout point M du plan associe l'unique point $M' = M + \vec{u}$.

Remarque : Si A' et B' sont les images par une même translation de vecteur $\vec{u}$ des points A et B alors $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$. On en déduit qu'une translation conserve les longeur. Plus généralement, on dit qu'une translation est une isométrie.

Proposition

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan d'affixe $b \in \mathbb{C}$.
L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z+b \end{array}\right.$ représente la translation de vecteur $\vec{u}$.



Démonstration. Soient $M, M' \in \mathscr{P}$ d'affixes respectives z, z'.
Notons $T_{\vec{u}} : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ la translation de vecteur $\vec{u}$ et $t_b : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z+b \end{array}\right.$.
On a :

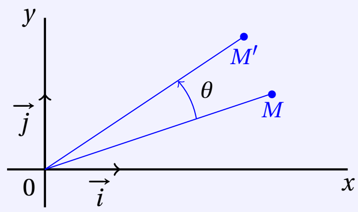
$$\begin{aligned} M' = T_{\vec{u}}(M) &\iff \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \\ &\iff z' - z = b \\ &\iff z' = z + b \\ &\iff z' = t_b(z) \end{aligned}$$

□

4.2 Rotation

Proposition

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & e^{i\theta} z \end{array}\right.$ représente la rotation de centre O et d'angle θ.



Démonstration. Soient $M, M' \in \mathscr{P}$ d'affixes respectives z, z'. Notons $R_\theta : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ la rotation d'angle θ et $r_\theta : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & ze^{i\theta} \end{array}\right.$.

- Cas 1 : si $z \neq 0$ i.e $M \neq O$:

$$\begin{aligned} M' = T_{\vec{u}}(M) &\iff \left\{\begin{array}{l} OM = OM' \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \theta[2\pi] \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{l} |z| = |z'| \\ \arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) \equiv \theta\ [2\pi] \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{l} \left|\dfrac{z'}{z}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) \equiv \theta\ [2\pi] \end{array}\right. \\ &\iff \frac{z'}{z} = e^{i\theta} \\ &\iff z' = ze^{i\theta} \\ &\iff z' = r_\theta(z) \end{aligned}$$

- Cas 2 : si $z = 0$ i.e $M = O$:

$$\begin{aligned} M' = R_\theta(M) &\iff M' = M = O \\ &\iff z' = z = 0 \\ &\iff z' = r_\theta(z) \end{aligned}$$

□

Remarque :

- Plus généralement, l'application $r_\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & e^{i\theta}(z-\omega)+\omega \end{array} \right.$ représente la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$.
- Si $\omega = 0$, on a $r_\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & e^{i\theta} z \end{array} \right.$. Dans ce cas si $M(x, y)$ et que $z = x + iy$ alors l'affixe de l'image de M par la rotation de centre O et d'angle θ est $e^{i\theta} z = (x\cos(\theta) - y\sin(\theta)) + i(x\sin(\theta) + y\cos(\theta))$. Autrement dit, en introduisant les matrices

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

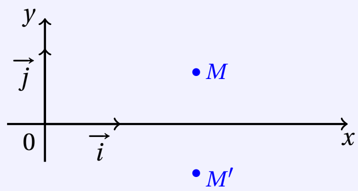
et $Z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on a

$$R_\theta Z = \begin{pmatrix} x\cos(\theta) - y\sin(\theta) \\ x\sin(\theta) + y\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

4.3 Symétrie axiale

Proposition

L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \overline{z} \end{array} \right.$ représente la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.



Démonstration. Soit $M, M' \in \mathscr{P}$ d'affixes respectives $z = a + ib$, $z' = a' + ib'$ avec $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$. Notons $S : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ la symétrie par rapport à l'axe des abscisses et $s : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \overline{z} \end{array} \right.$.
On a :

$$\begin{aligned} M' = S(M) &\iff \left\{ \begin{array}{l} a' = a \\ b' = -b \end{array} \right. \\ &\iff a + ib = a' + ib' \\ &\iff z' = \overline{z} \\ &\iff z' = s(z) \end{aligned}$$

□

Remarque : Si s est la symétrie d'axe des abscisses alors $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \bar{z} \end{array} \right.$ représente s dans le plan complexe. Si $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x + iy) = x - iy$. Autrement dit, en introduisant les matrices

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et $Z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on a

$$SZ = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

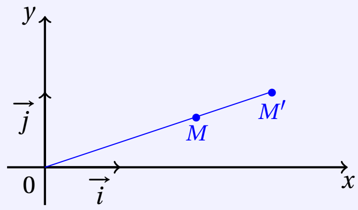
4.4 Homothétie

Définition

L'homothétie de centre $\Omega \in \mathscr{P}$ et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$ est l'application du plan dans lui même qui, à tout point M, associe le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$.

Proposition

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \lambda z \end{array} \right.$ représente l'homothétie de centre O et de rapport λ



Démonstration. Soit $M, M' \in \mathscr{P}$ d'affixes respectives z, z'.
Notons $H_\lambda : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ l'homothétie de centre O et de rapport λ et $h_\lambda : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \lambda z \end{array} \right.$.

$$\begin{aligned} M' = H_\lambda(M) &\iff \overrightarrow{OM'} = \lambda \overrightarrow{OM} \\ &\iff z' = \lambda z \\ &\iff z' = h_\lambda z \end{aligned}$$

□

Remarque :

- Plus généralement, l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \lambda(z-\omega)+\omega \end{array} \right.$ où $\lambda \in \mathbb{R}^*$ représente l'homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport λ.
- Si h est l'homothétie de centre O et de rapport λ alors $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \lambda z \end{array} \right.$ représente h dans le plan complexe. Si $\lambda = a + ib$ et $z = x + iy$ alors $f(z) = (ax - by) + i(bx + ay)$. Autrement dit en introduisant les matrices

$$H = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

et $Z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on a

$$HZ = \begin{pmatrix} xa - yb \\ xb + ya \end{pmatrix}.$$

D'autre part, on peut écrire $\lambda = re^{i\theta}$ où $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Ainsi, en utilisant les notations précédentes,

$$H = rR_\theta.$$