Feuille d'exercices 5 : Calcul algébrique

1 Sommes

Exercice 1. Soit (y_k) une suite de nombres complexes telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} y_k = n(n+1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer les valeurs de :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{3} y_k \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{n+2} y_k \qquad S_3 = \sum_{k=0}^{2n} y_k \qquad S_4 = \sum_{k=0}^{n} 3y_k \qquad S_5 = \sum_{k=n+4}^{2n} y_k$$

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \quad B_n = \sum_{i=2}^{n} \frac{2^i}{3^{i+1}} \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} (2k+1) \quad D_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{2k} \quad E_n = \sum_{k=4}^{n} 3$$

$$F_n = \sum_{k=0}^{n} (2^k + 4k + n - 3) \quad H_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} \quad I_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \quad J_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$$

Exercice 3. Soit $n \geq 2$.

1. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, simplifier l'expression : $(p+1)^2 - p^2$
2. En déduire une expression plus simple de $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{2p+1}{(p^2+p)^2}$

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. (a) Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$

   (b) Exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

Exercice 5.
1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\mathrm{ch}\,(x) = \dfrac{\mathrm{sh}\,(2x)}{2\mathrm{sh}\,(x)}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \mathrm{ch}\,\left(\frac{x}{2^k}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 6. Soit $a \in \mathbb{R}$ telle que les quantités ci-dessous existent :

1. Calculer $\dfrac{1}{\tan a} - \dfrac{2}{\tan 2a}$ en précisant l'ensemble de validité.
2. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \tan(2^k a)$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7. Calculer par regroupement de termes les sommes suivantes :

$$A_n = \sum_{k=0}^{2n} \min(k,n) \qquad B_n = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^2$$

Exercice 8. Montrer que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)! \geq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k!$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$

2 Produits

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer :

$$\prod_{k=-1000}^{1000} k\ln(1+|k|) \qquad \prod_{k=0}^{n} 2^k \qquad \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) \qquad \prod_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}} (i\times j) \qquad \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$$

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Exprimer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k)$ et $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k-1)$ en fonction de n.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(n+k) = 2^n\prod_{k=1}^{n}(2k-1)$

Exercice 11. Soit $n \geq 2$. Simplifier l'expression : $\prod_{p=1}^{n} \dfrac{(2p+1)(2p-1)}{(2p+3)(2p+5)}$

Exercice 12. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\prod_{k=1}^{n}\left(k^k \times k!\right) = (n!)^{n+1}$.

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $a_1, \dots, a_n \in [1, +\infty[$. Montrer que :

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \leq 2^{n-1}(1+\prod_{i=1}^{n} a_i).$$

3 Coefficients binomiaux et binôme de Newton

Exercice 14. Déterminer tous les $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ avec $p < n$ tels que :

$$\begin{cases} \binom{n}{p} = \binom{n}{p+1} \\ 4\binom{n}{p} = 5\binom{n}{p-1} \end{cases}$$

Exercice 15. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

1. En remarquant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N+1} n^3 = \sum_{n=0}^{N}(n+1)^3$, déduire la valeur de : $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} n^2$.
2. Par la même méthode , calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} n^3$

Exercice 16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}}$

Exercice 17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{\frac{k}{2}} \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{k+1}$$

Exercice 18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. En utilisant la fonction polynomiale $f : x \mapsto (1+x)^n$, calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \qquad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k} \qquad \sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{k+1} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$$

2. Retrouver la valeur de la première somme en utilisant une autre méthode.
   On pourra chercher à réécrire différemment $k\binom{n}{k}$ *pour* $k \in [\![0, n]\!]$.

Exercice 19. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$.

1. En effectuant le changement d'indice $j = 2n+1-k$, déterminer une autre expression de S_n.
2. En déduire la valeur de $2S_n$, puis celle de S_n.

Exercice 20. Soit $p \in \mathbb{N}$.

1. En utilisant un télescopage, démontrer que pour tout entier $n \geq p$, $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$
2. A l'aide de cette formule, retrouver les valeurs des sommes classiques : $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$

Exercice 21. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k}$ et $B_n = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$.
Calculer $A_n + B_n$ et $A_n - B_n$, en déduire A_n et B_n.

Exercice 22. Soient $n, p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \geq n+q+1$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p-k}{q} = \binom{p+1}{q+1} - \binom{p-n}{q+1}.$$

Exercice 23. On considère la suite définie par :

$$S_0 = 1 \text{ et : } \forall n \in \mathbb{N},\ S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_k$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n \leq n!$

4 Sommes doubles

Exercice 24. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, On admettra que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Calculer les sommes suivantes.
On admettra que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

$$A_n = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} 2^{2i-j} \qquad B_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2^j \qquad C_n = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} \frac{j}{in} \qquad D_n = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (i+j) \qquad E_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (i+j)$$

$$F_n = \sum_{0 \leq i < j \leq n} \min(i,j) \qquad G_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 2^{i+j} \qquad H_n = \sum_{0 \leq k \leq l \leq n} \binom{l}{k} \qquad I_n = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} ij$$

Exercice 25. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On admettra que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1. Calculer $\sum_{i,j \in [\![1,n]\!]} \min(i,j)$ où $\min(i,j)$ désigne le minimum de i et j.
2. En déduire : $\sum_{i,j \in [\![1,n]\!]} \max(i,j)$ où $\max(i,j)$ désigne le maximum de i et j.
3. En déduire $\sum_{i,j \in [\![1,n]\!]} |i-j|$

Exercice 26. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer : $\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} \binom{i}{k}$.

Exercice 27. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Vérifier que $\sum_{k=1}^{n} k2^k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{k} 2^k$.
2. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k2^k$.