Chapitre 6 : Primitives

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

1 Calcul de primitives

1.1 Généralités

Définition

Soit $f : I \mapsto \mathbb{K}$. Soit $F : I \mapsto \mathbb{K}$. On dit que F est une primitive de f sur I si,

- F est dérivable sur I.
- $\forall x \in I,\ \ F'(x) = f(x)$.

Remarque : Si $f : I \to \mathbb{C}$ et si F_1 est une primitive de $\mathrm{Re}(f)$ et F_2 une primitive de $\mathrm{Im}(f)$ alors $F_1 + iF_2$ est une primitive de f.
Exemple :

- Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto 1 + ix$ est $x \mapsto x + i\dfrac{x^2}{2}$
- Une primitive de $x \mapsto x^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto \dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ si $\alpha \neq -1$ et $x \mapsto \ln(x)$ si $\alpha = -1$.
- Une primitive de $x \mapsto e^{\omega x}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{\omega}e^{\omega x}$ pour $\omega \in \mathbb{C}^*$.

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{K}$. Soient F et G deux primitives de f sur I. On a alors

$$\exists C \in \mathbb{K},\ \ \forall x \in I,\ \ F(x) = G(x) + C.$$

Démonstration. Si G est une primitive de f sur I alors G est dérivable sur I et $(G-F)' = G' - F' = f - f = 0$ donc la fonction $G - F$ est constante sur I (intervalle). Donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $G - F = C$.
Réciproquement, soit $C \in \mathbb{K}$. Posons $G = F + C$. La fonction G est dérivable sur I et $G' = F' = f$. Ainsi, G est une primitive de f sur I. □

Remarque : La connaissance d'une primitive d'une fonction sur un intervalle permet de déterminer l'ensemble des primitives de cette même fonction.

1.2 Existence de primitives

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue sur I et $a, b \in I$. On pose :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))dt + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))dt.$$

Remarque : On a donc : $\mathrm{Re}\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))dt$ et $\mathrm{Im}\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b \mathrm{Im}(f(t))dt$.

Théorème (fondamental de l'analyse)

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. Soit $a \in I$ un élément de l'intervalle I. Soit F l'application définie par l'expression

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

pour tout nombre réel x. On a alors : F est l'unique primitive de f s'annulant en a.

On admet ce théorème pour le moment, il sera démontré plus tard dans l'année.
Remarque : Cela justifie la définition de la fonction ln comme l'unique primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

Corollaire

Toute fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet au moins une primitive sur I.

Remarque : Soient f une fonction continue sur I et $a \in I$. L'ensemble des primitives de f sur I est :

$$\left\{ \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)dt + C \end{array} \right. \Big/ \; C \in \mathbb{K} \right\}$$

Proposition

Soit f une fonction continue sur I. Soit F une primitive de f sur I. On a alors

$$\forall (a,b) \in I^2, \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Démonstration. Soit $(a,b) \in I^2$. Comme F et $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ sont deux primitives de f sur I, il existe $C \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\forall x \in I,\ F(x) = \int_a^x f(t)dt + C.$$

En évaluant cette égalité en a, on obtient : $C = F(a)$ et donc :

$$\forall x \in I,\ F(x) = \int_a^x f(t)dt + F(a)$$

ce qui donne le résultat en évaluant cette relation en b. $\square$

Remarque : La quantité $F(b) - F(a)$ est généralement noté sous la forme $\Big[F(t)\Big]_a^b$.
Le calcul d'une intégrale se ramène donc souvent au calcul d'une primitive.

Application : Étude de $x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$

Proposition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Soit $u : I \to J$ une fonction dérivable sur I. Soit $v : I \to J$ une fonction dérivable sur I. Soit $f : J \to \mathbb{K}$ une fonction continue. L'application $g : x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ est alors définie et dérivable sur I, et :

$$\forall x \in I,\ g'(x) = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x).$$

Démonstration. Soit $x \in I$, on a $u(x), v(x) \in J$ et J est un intervalle. Donc $[u(x), v(x)] \subset J$ (ou $[v(x), u(x)] \subset J$). De plus, f est continue sur J donc sur $[u(x), v(x)] \subset J$ (ou $[v(x), u(x)] \subset J$). Ainsi, $g(x)$ existe pour tout $x \in I$.
La fonction $f : J \to \mathbb{K}$ étant continue sur J, elle admet une primitive F sur J. On a alors :

$$\forall x \in I,\ g(x) = F(v(x)) - F(u(x)).$$

La fonction g est donc dérivable sur I en tant que différence et composées de fonctions dérivables. Soit $x \in I$,

$$g'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$$

$\square$

1.3 Primitives usuelles

cf. Formulaire.

2 Intégration par parties et changement de variable

2.1 Intégration par parties

Définition

On dit qu'une fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I si :

- elle est dérivable sur I
- et sa dérivée est continue sur I.

Remarque : Une primitive d'une fonction continue est de classe $\mathscr{C}^1$ car F est dérivable et $F' = f$ continue.

Proposition

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. Alors :

$$\forall (a,b) \in I^2,\ f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt$$

Démonstration. Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, f' est continue sur I et f est une primitive de f' sur I. Le résultat découle alors d'une proposition précédente. □

Théorème (Intégration par parties)

Soient $u : I \to \mathbb{K}$ et $v : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

$$\forall (a,b) \in I^2,\ \int_a^b u(t)v'(t)dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt.$$

Démonstration. $u'v$ et uv' sont continues sur I donc les intégrales sont bien définies.
uv est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I en tant que produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. On a alors :

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt + \int_a^b u(t)v'(t)dt = \int_a^b (u'(t)v(t) + u(t)v'(t))dt = \int_a^b (uv)'(t)dt = \Big[(uv)(t)\Big]_a^b$$

puisque □

Applications de la formule d'intégration par parties

1. Calcul d'intégrales ou de certaines primitives

Méthode :

- Pour calculer les intégrales/primitives de fonctions de la forme $x \mapsto P(x)e^{ax}$, $x \mapsto P(x)\cos(ax)$, $x \mapsto P(x)\sin(ax)$, $x \mapsto P(x)\mathrm{ch}(ax)$, $x \mapsto P(x)\mathrm{sh}(ax)$ où P est une fonction polynomiale, on effectue des intégrations par parties successives (autant que le degré de P) et on dérive P.
- L'intégration par parties est aussi utile pour calculer des intégrales/primitives de fonctions dont on connait surtout la dérivée (ln, arctan, arcsin, ...) L'autre fonction est alors choisie égale à 1.

Exemple : Calculer $I = \displaystyle\int_0^\pi (t^2 - t + 1)\cos t\,dt$:
On effectue l'intégration par parties :

$$\begin{aligned} u_1(t) &= t^2 - t + 1 \qquad & v_1'(t) &= \cos(t) \\ u_1'(t) &= 2t - 1 \qquad & v_1(t) &= \sin(t) \end{aligned}$$

u_1 et v_1 sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$. On a alors :

$$\begin{aligned} I &= \Big[(t^2 - t + 1)\sin t\Big]_0^\pi - \int_0^\pi (2t-1)\sin t\,dt \\ &= -\int_0^\pi (2t-1)\sin t\,dt \end{aligned}$$

On effectue l'intégration par parties :

$$\begin{array}{ll} u_2(t) = 2t-1 & v_2'(t) = \sin(t) \\ u_2'(t) = 2 & v_2(t) = -\cos(t) \end{array}$$

u_2 et v_2 sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$. On a alors :

$$\begin{aligned} I &= -\Big[(2t-1)(-\cos t)\Big]_0^\pi + \int_0^\pi 2(-\cos t)\,dt \\ &= -(2\pi-1-1) - 2\Big[\sin t\Big]_0^\pi \\ &= 2-2\pi. \end{aligned}$$

2. Obtention de relations de récurrence entre des intégrales dépendant d'un entier naturel

Intégrales de Wallis (1616-1703) :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit l'intégrale de Wallis par :$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n\,dt$

1. Etablir une relation de récurrence liant I_n et I_{n-2}.
2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, calculer I_{2p} et I_{2p+1}.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n-1} \times \sin t\,dt$.
On effectue l'intégration par parties :

$$\begin{array}{ll} u'(t) = \sin(t), & v(t) = (\sin(t))^{n-1} \\ u(t) = -\cos(t) & v'(t) = (n-1)(\sin(t))^{n-2}\cos(t) \end{array}$$

$\sin^{n-1}$ et $-\cos$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On a alors :

$$\begin{aligned} I_n &= \Big[(\sin t)^{n-1}(-\cos t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)(\sin t)^{n-2}\cos t(-\cos t)\,dt = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n-2}\cos^2 t\,dt \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n-2}(1-\sin^2 t)\,dt = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \end{aligned}$$

Ainsi, $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.
Donc : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ I_n = \dfrac{(n-1)}{n} I_{n-2}$.
Soit $p \in \mathbb{N}$.

- Réflexion :
  D'après la relation de récurrence précédente, on a :

$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = \frac{(2p)(2p-2)}{(2p+1)(2p-1)} I_{2p-3}$$

  En répétant l'opération, on obtient :

$$I_{2p+1} = \frac{2p(2p-2)\cdots\times 2}{(2p+1)(2p-1)\cdots\times 3} I_1$$

  Or, $2p(2p-2)\ldots\times 2 = 2^p p!$ et $(2p+1)(2p-1)\cdots\times 3 = \dfrac{(2p+1)!}{2p(2p-2)\cdots 2} = \dfrac{(2p+1)!}{2^p p!}$.
  Enfin, $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\,dt = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}}$.
  Finalement, on obtient :

$$I_{2p+1} = \frac{\left(2^p p!\right)^2}{(2p+1)!}.$$

  Rédaction :

  Montrons par récurrence que : $\forall p \in \mathbb{N},\ I_{2p+1} = \dfrac{\left(2^p p!\right)^2}{(2p+1)!}$.

  - Pour $p = 0$, $I_1 = 1$ et $\dfrac{\left(2^0 0!\right)^2}{1!} = 1$ donc la propriété est vraie pour $p = 0$.

- Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons que $I_{2p+1} = \dfrac{\left(2^p p!\right)^2}{(2p+1)!}$.
  D'après la formule de récurrence démontré en 1., on a :

$$\begin{aligned}
I_{2(p+1)+1} = I_{2p+3} &= \frac{2p+2}{2p+3} I_{2p+1} \\
&= \frac{(2p+2)}{2p+3} \times \frac{\left(2^p p!\right)^2}{(2p+1)!} \\
&= \frac{\left(2(p+1)\right)^2}{(2p+3)(2p+2)} \times \frac{\left(2^p p!\right)^2}{(2p+1)!} \\
&= \frac{\left(2^{p+1}(p+1)!\right)^2}{(2p+3)!}
\end{aligned}$$

- On a donc montré par récurrence que : $\forall p \in \mathbb{N},\ I_{2p+1} = \dfrac{\left(2^p p!\right)^2}{(2p+1)!}$.

- <u>Réflexion :</u>
  De façon analogue, d'après la relation de récurrence, on a :

$$I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)}{2p(2p-2)} I_{2p-4}$$

Ainsi, en itérant, on obtient :

$$\begin{aligned}
I_{2p} &= \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}{2p(2p-2)\cdots \times 2} I_0 \\
&= \frac{(2p)!}{\left(2^p p!\right)^2} I_0
\end{aligned}$$

Or, $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$. Ainsi,

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{\left(2^p p!\right)^2} \times \frac{\pi}{2}.$$

<u>Rédaction :</u> Montrons par récurrence que : $\forall p \in \mathbb{N},\ I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{\left(2^p p!\right)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.

- Pour $p = 0$, $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{0!}{\left(2^0 0!\right)^2} \times \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$ donc la propriété est vraie pour $p = 0$.

- Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons que $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{\left(2^p p!\right)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.
  D'après la formule de récurrence démontré en 1., on a :

$$\begin{aligned}
I_{2(p+1)} = I_{2p+2} &= \frac{2p+1}{2p+2} I_{2p} \\
&= \frac{(2p+1)}{2p+2} \times \frac{(2p)!}{\left(2^p p!\right)^2} \times \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2p+1)(2p+2)}{(2p+2)(2p+2)} \times \frac{(2p)!}{\left(2^p p!\right)^2} \times \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2p+1)(2p+2)}{2^2(p+1)^2} \times \frac{(2p)!}{\left(2^p p!\right)^2} \times \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2p+2)!}{\left(2^{p+1}(p+1)!\right)^2} \times \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

- On a donc montré par récurrence que : $\forall p \in \mathbb{N},\ I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{\left(2^p p!\right)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.

2.2 Changement de variable

Théorème (Changement de variable)

Soient I, J deux intervalles non vides non réduits à un point. Soient $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur I. et $\varphi : J \to I$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur J. Alors :

$$\forall a, b \in J, \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

On dit qu'on a effectué le changement de variable $x = \varphi(t)$.

Démonstration. Comme f est continue sur I, elle admet une primitive F sur I. F est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. La fonction $F \circ \varphi$ est dérivable sur J et sa dérivée est $(f \circ \varphi) \times \varphi'$ continue. Donc $F \circ \phi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
Soient $a, b \in J$. On a :

$$\int_a^b f(\phi(t))\varphi'(t)dt = \int_a^b (F \circ \varphi)'(t)dt = \Big[(F \circ \varphi)(t)\Big]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} F'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

□

Méthode :

Dans la pratique, on pose $x = \phi(t)$ et on déduit : $dx = \phi'(t)dt$.
Dans l'intégrale :

- on remplace x par $\phi(t)$ dans l'expression de la fonction
- dx devient $\phi'(t)dt$
- on modifie les bornes de l'intégrale.

- Calculer l'intégrale $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2t}dt}{1+e^t}$.
  On effectue le changement de variable $u = e^t$. On a $du = e^t dt$, $dt = \frac{du}{u}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^e \frac{u^2}{u(1+u)}du \\ &= \int_1^e \frac{u}{1+u}du \\ &= \int_1^e \left(1 - \frac{1}{1+u}\right)du \\ &= e - 1 - (\ln(1+e) - \ln(2)) \\ &= \ln(2) + e - 1 - \ln(1+e). \end{aligned}$$

- Calculer l'intégrale : $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$.
  On effectue le changement de variable : $x = \cos t$. On a $dx = -\sin t dt$.
  Ainsi :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1-\cos^2 t}(-\sin t)dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin t| \sin t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2t)}{2}dt \\ &= \frac{\pi}{4} - \left[\frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

- Calculer l'intégrale : $I_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^4}{x^{10}+1}\,dx$.
  On effectue le changement de variable : $t = x^5$. On a $dt = 5x^4\,dx$, $\frac{1}{5}dt = x^4\,dx$.
  Ainsi :

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^1 \frac{1}{5} \times \frac{1}{t^2+1}\,dt \\
&= \frac{1}{5}\int_0^1 | \frac{1}{t^2+1}\,dt \\
&= \frac{1}{5}\Big[\arctan(t)\Big]_0^1 \\
&= \frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) \\
&= \frac{\pi}{20}
\end{aligned}$$

- $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ est continue sur $]-a, a[$.
  Soit $\alpha, X \in]-a, a[$. On calcule $\displaystyle\int_\alpha^X \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$.
  On effectue le changement de variable : $x = at$. On a $dx = a\,dt$.
  Ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^X \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx &= a\int_{\frac{\alpha}{a}}^{\frac{X}{a}} \frac{1}{\sqrt{a^2-a^2t^2}}\,dt \\
&= \frac{a}{|a|}\int_{\frac{\alpha}{a}}^{\frac{X}{a}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \\
&= \Big[\arcsin(t)\Big]_{\frac{\alpha}{a}}^{\frac{X}{a}} \\
&= \arcsin\left(\frac{X}{a}\right) + C
\end{aligned}$$

  où $C \in \mathbb{R}$.
  Ainsi, $x \mapsto \arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ sur $]-a, a[$.

- $x \mapsto \dfrac{1}{a^2+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
  Soit $\alpha, X \in \mathbb{R}$. On calcule $\displaystyle\int_\alpha^X \frac{1}{a^2+x^2}\,dx$.
  On effectue le changement de variable : $x = at$. On a $dx = a\,dt$.
  Ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^X \frac{1}{a^2+x^2}\,dx &= a\int_{\frac{\alpha}{a}}^{\frac{X}{a}} \frac{1}{a^2+a^2t^2}\,dt \\
&= \frac{1}{a}\int_{\frac{\alpha}{a}}^{\frac{X}{a}} \frac{1}{1+t^2}\,dt \\
&= \frac{1}{a}\Big[\arctan(t)\Big]_{\frac{\alpha}{a}}^{\frac{X}{a}} \\
&= \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{X}{a}\right) + C
\end{aligned}$$

  où $C \in \mathbb{R}$.
  Ainsi, $x \mapsto \dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{a^2+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

3 Quelques techniques classiques de calculs de primitives

• Primitive de fonctions de la forme $x \mapsto g'(u(x))u'(x)$

Soit u une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I à valeurs dans J et g une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur J.
Alors, $g \circ u$ est une primitive de $x \mapsto g'(u(x))u'(x)$ sur I.
cf formulaire.

• Primitive de fractions rationnelles :

Soit $F : x \mapsto \dfrac{P(x)}{(x-a_1)^{m_1}\dots(x-a_n)^{m_n}}$, avec $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts, $m_1,\dots,m_n \in \mathbb{N}^*$ et P une fonction polynomiale telle que $\deg(P) < \sum_{i=1}^{n} m_i$. On cherche $\lambda_{1,1},\dots,\lambda_{1,m_1},\dots,\lambda_{n,1},\dots,\lambda_{n,m_n} \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{a_1,\dots,a_n\},\ F(x) = \frac{\lambda_{1,1}}{x-a_1} + \frac{\lambda_{1,2}}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{\lambda_{1,m_1}}{(x-a_1)^{m_1}} + \dots + \frac{\lambda_{n,1}}{x-a_n} + \dots + \frac{\lambda_{n,m_n}}{(x-a_n)^{m_n}}$$

On peut alors facilement calculer une primitive de F.

Exemple : Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x(x+1)^2}$.

Cherchons $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1\},\ \dfrac{2x+1}{x(x+1)^2} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{(x+1)^2} + \dfrac{c}{x}$.

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
& \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1\},\ \frac{2x+1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{x} \\
\iff\ & \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1\},\ \frac{2x+1}{x(x+1)^2} = \frac{ax(x+1)+bx+c(x+1)^2}{x(x+1)^2} \\
\iff\ & \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1\},\ \frac{2x+1}{x(x+1)^2} = \frac{(a+c)x^2+(a+b+2c)x+c}{x(x+1)^2} \\
\iff\ & \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1\},\ 2x+1 = (a+c)x^2+(a+b+2c)x+c \\
\iff\ & \begin{cases} a+c=0 \\ a+b+2c=2 \\ c=1 \end{cases} \\
\iff\ & \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1\},\ \frac{2x+1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x}.$$

Donc une primitive de f sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$ est $x \mapsto -\ln(|x+1|) - \frac{1}{x+1} + \ln(|x|)$.

• Fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $a \neq 0$. On souhaite calculer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ sur un intervalle où la fonction $P : x \mapsto ax^2+bx+c$ ne s'annule pas.

Envisageons trois cas suivant le signe du discriminant $\Delta = b^2-4ac$ de la fonction polynômiale P.

- Si $\Delta > 0$, la fonction polynômiale P admet deux racines réelles distinctes r_1, r_2 et on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = a(x-r_1)(x-r_2)$.
  On cherche alors deux réels λ_1 et λ_2 tels que : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{r_1,r_2\}$: $\dfrac{1}{ax^2+bx+c} = \dfrac{1}{a(x-r_1)(x-r_2)} = \dfrac{\lambda_1}{x-r_1} + \dfrac{\lambda_2}{x-r_2}$.
  La fonction $x \mapsto \lambda_1 \ln(|x-r_1|) + \lambda_2 \ln(|x-r_2|)$ est alors une primitive de f sur un intervalle où P ne s'annule pas.
- Si $\Delta = 0$, la fonction polynômiale P admet une racine double r_0 et on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = a(x-r_0)^2$.
  Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{r_0\},\ \dfrac{1}{ax^2+bx+c} = \dfrac{1}{a(x-r_0)^2}$.
  La fonction $x \mapsto \dfrac{-1}{a(x-r_0)}$ est une primitive de f sur $]-\infty, r_0[$, $]r_0, +\infty[$.
- Si $\Delta < 0$, la fonction polynomiale P n'admet aucune racine réelle.
  On écrit alors P sous forme canonique : Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = ax^2+bx+c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right).$$

  ($a \neq 0$).
  Posons $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ (possible car $-\Delta > 0$). On a donc :

$$ax^2+bx+c = a\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)$$

  Ainsi,

$$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{(x-\alpha)^2+\beta^2}.$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} \frac{1}{at^2+bt+c}\,dt &= \int_{x_0}^{x} \frac{1}{a} \times \frac{1}{(t-\alpha)^2+\beta^2}\,dt \\ &= \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{(t-\alpha)^2+\beta^2} \\ &= \frac{1}{a\beta^2}\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\left(\frac{t-\alpha}{\beta}\right)^2+1} \qquad (\text{ car } \beta \neq 0)\end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $u = \dfrac{t-\alpha}{\beta}$. On a : $du = \dfrac{dt}{\beta}$.
Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} \frac{1}{at^2+bt+c}\,dt &= \frac{1}{a\beta^2}\int_{x_0}^{x} \frac{\beta}{u^2+1}\,du \\ &= \frac{\beta}{a\beta^2}\int_{\frac{x_0-\alpha}{\beta}}^{\frac{x-\alpha}{\beta}} \frac{1}{u^2+1}\,du \\ &= \frac{1}{a\beta}\Big[\arctan(u)\Big]_{\frac{x_0-\alpha}{\beta}}^{\frac{x-\alpha}{\beta}} \\ &= \frac{1}{a\beta}\arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)+C\end{aligned}$$

où $C \in \mathbb{R}$. Ainsi, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{a\beta}\arctan\left(\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Méthode

Plus généralement, pour déterminer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}$ où $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$ avec $a_2 \neq 0$:

- On commence par faire apparaitre le polynôme du dénominateur au numérateur (« en englobant tous les x^2 ») :
$$f(x) = \frac{\frac{a_1}{a_2}(a_2x^2+b_2x+c_2)+\lambda x+\mu}{a_2x^2+b_2x+c_2} = \frac{a_1}{a_2} + \frac{\lambda x+\mu}{a_2x^2+b_2x+c_2}$$
où $\lambda = b_1 - \dfrac{a_1}{a_2}b_2$ et $\mu = c_1 - \dfrac{a_1}{a_2}c_2$.
- ► Si $b_2^2 - 4a_2c_2 \geq 0$, alors le trinôme du dénominateur se factorise et on utilise la méthode vue pour les fractions rationnelles de ce type.
  ► Si $b_2^2 - 4a_2c_2 < 0$:
  - On fait apparaitre la dérivée du dénominateur au numérateur (« en englobant tous les x ») :
  $$f(x) = \frac{a_1}{a_2} + \frac{\frac{\lambda}{2a_2}(2a_2x+b_2)+K}{a_2x^2+b_2x+c_2} = \frac{a_1}{a_2} + \frac{\lambda}{2a_2} \times \frac{2a_2x+b_2}{a_2x^2+b_2x+c_2} + \frac{K}{a_2x^2+b_2x+c_2}$$
  où $K = \mu - \dfrac{\lambda}{2a_2}b_2$.
  - En notant H une primitive de $x \mapsto \dfrac{K}{a_2x^2+b_2x+c_2}$ déterminée par la méthode décrite ci-dessus, on a alors que la fonction $x \mapsto \dfrac{a_1}{a_2}x + \dfrac{\lambda}{2a_2}\ln(|a_2x^2+b_2x+x_2|)+H(x)$ est une primitive de f.

• Fonctions de la forme $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ ou $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$

Méthode

Pour déterminer une primitive d'une fonction de la forme $f_1 : x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ ou $f_2 : x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$ (avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on remarque que $f_1(x) = \mathrm{Re}(e^{(a+ib)x})$ et $f_2(x) = \mathrm{Im}(e^{(a+ib)x})$.
Ainsi, on calcule une primitive de $x \mapsto e^{(a+ib)x}$ puis on en prend la partie réelle ou imaginaire.

Exemple : Déterminer une primitive de $f : x \mapsto e^{3x}\cos 2x$.
On remarque que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{Re}(e^{(3+2i)x})$.

Or, $x \mapsto \dfrac{1}{3+2i} e^{(3+2i)x}$ est une primitive de $x \mapsto e^{(2+i)x}$ sur $\mathbb{R}$. La fonction $F : x \mapsto \mathrm{Re}\left(\frac{e^{(3+2i)x}}{3+2i}\right)$ est donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
F(x) &= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{(3+2i)x}}{3+2i}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{(3-2i)}{13} e^{(3+2i)x}\right) = \frac{e^{3x}}{13} \mathrm{Re}\left((3-2i)e^{2ix}\right) \\
&= \frac{e^{3x}}{13} \mathrm{Re}\left((3-2i)(\cos(2x) + i\sin(2x))\right) \\
&= \frac{e^{3x}}{13} (3\cos(2x) + 2\sin(2x))
\end{aligned}$$

• Fonctions de la forme $x \mapsto \cos^p(x)\sin^q(x)$

On linéarise l'expression.
Exemple : Calculer une primitive de $f : x \mapsto \cos^3(x)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\cos^3(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 && \text{d'après les formules d'Euler} \\
&= \frac{e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}}{8} && \text{d'après la formule de Moivre et le binôme de Newton} \\
&= \frac{2\cos(3x)}{8} + \frac{6\cos(x)}{8} \\
&= \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)
\end{aligned}$$

Ainsi, $x \mapsto \dfrac{1}{12}\sin(3x) + \dfrac{3}{4}\sin(x)$ est une primitive de $x \mapsto \cos^3(x)$ sur $\mathbb{R}$.