

Unidade IV:


Ordenação Parcial



PUC Minas

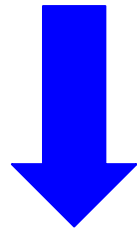
Instituto de Ciências Exatas e Informática
Departamento de Ciência da Computação

- Introdução
- Seleção Parcial
- Inserção Parcial
- Quicksort Parcial
- Heapsort Parcial

- **Introdução** 
- Seleção Parcial
- Inserção Parcial
- Quicksort Parcial
- Heapsort Parcial

- Dado um *array* com n elementos, desejamos que os k primeiros (menores) fiquem ordenados
- Seja $n = 16$ e $k = 3$

7	10	11	3	16	6	14	4	9	13	5	2	15	8	1	12
---	----	----	---	----	---	----	---	---	----	---	---	----	---	---	----



Ordenação parcial

1	2	3	11	16	6	14	4	9	13	5	10	15	8	7	12
---	---	---	----	----	---	----	---	---	----	---	----	----	---	---	----

Introdução

- Quando $k = 1$, o problema se reduz a encontrar o mínimo (ou o máximo) de um conjunto de elementos
- Quando $k = n$ caímos no problema clássico de ordenação
- Normalmente, $n \gg k$

Exemplo de Aplicação

Google

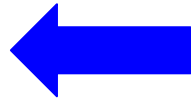
Bing

yahoo!

Exemplo de Aplicação



- Introdução
- **Seleção Parcial**
- Inserção Parcial
- Quicksort Parcial
- Heapsort Parcial



Seleção Parcial: Adaptação

- Seleccionamos apenas os k menores

Seleção Parcial: Código em C-like

//Original

```
for (int i = 0; i < (n - 1); i++) {
    int menor = i;
    for (int j = (i + 1); j < n; j++){
        if (array[menor] > array[j]){
            menor = j;
        }
    }
    swap(menor, i);
}
```

//Parcial

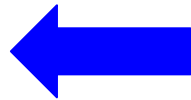
```
for (int i = 0; i < k; i++) {
    int menor = i;
    for (int j = (i + 1); j < n; j++){
        if (array[menor] > array[j]){
            menor = j;
        }
    }
    swap(menor, i);
}
```

Seleção Parcial: Análise de Complexidade

$$C(n) = kn - \frac{k^2}{2} - \frac{k}{2}$$

$$M(n) = 3k$$

- Introdução
- Seleção Parcial
- **Inserção Parcial**
- Quicksort Parcial
- Heapsort Parcial



Inserção Parcial: Adaptação

- Os k primeiros elementos são ordenados normalmente
- Para os demais elementos, se algum for menor que o valor da k -ésima posição, ele será inserido no conjunto já ordenado. Caso contrário, descartado
- Exemplo ($n = 16$ e $k = 4$)

0	1	2	3	4	6	14	4	9	13	5	10	15	8	7	0
---	---	---	---	---	---	----	---	---	----	---	----	----	---	---	---



Inserção Parcial: Algoritmo em C-like

//Original

```
for (int i = 1; i < n; i++) {
    int tmp = array[i];
    int j = i - 1;
    while ( (j >= 0) && (array[j] > tmp) ){
        array[j + 1] = array[j];
        j--;
    }
    array[j + 1] = tmp;
}
```

//Parcial

```
for (int i = 1; i < n; i++) {
    int tmp = array[i];
    int j = (i < k) ? i - 1 : k - 1;
    while ( (j >= 0) && (array[j] > tmp) ){
        array[j + 1] = array[j];
        j--;
    }
    array[j + 1] = tmp;
}
```

Inserção Parcial: Algoritmo em C-like

//Original

```
for (int i = 1; i < n; i++) {
    int tmp = array[i];
    int j = i - 1;
    while ( (j >= 0) && (array[j] > tmp) ){
        array[j + 1] = array[j];
        j--;
    }
    array[j + 1] = tmp;
}
```

Observação: Neste caso, podemos ter a perda de elementos “desnecessários”

//Parcial

```
for (int i = 1; i < n; i++) {
    int tmp = array[i];
    int j = (i < k) ? i - 1 : k - 1;
    while ( (j >= 0) && (array[j] > tmp) ){
        array[j + 1] = array[j];
        j--;
    }
    array[j + 1] = tmp;
}
```

Inserção Parcial: Análise de Complexidade

- No anel mais interno, na i -ésima iteração o valor de C_i é:

$$\text{Melhor caso} : C_i(n) = 1$$

$$\text{Pior caso} : C_i(n) = i$$

$$\text{Caso médio} : C_i(n) = \frac{1}{i}(1 + 2 + \dots + i) = \frac{i+1}{2}$$

- Assumindo que todas as permutações de n são igualmente prováveis, o número de comparações é:

$$\text{Melhor caso} : C(n) = (1 + 1 + \dots + 1) = n - 1$$

$$\begin{aligned} \text{Pior caso} : C(n) &= (2 + 3 + \dots + k + (k + 1)(n - k)) \\ &= kn + n - \frac{k^2}{2} - \frac{k}{2} - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Caso médio} : C(n) &= \frac{1}{2}(3 + 4 + \dots + k + 1 + (k + 1)(n - k)) \\ &= \frac{kn}{2} + \frac{n}{2} - \frac{k^2}{4} + \frac{k}{4} - 1 \end{aligned}$$

- Introdução
- Seleção Parcial
- Inserção Parcial
- **Quicksort Parcial**
- Heapsort Parcial



Quicksort Parcial: Modificação

- Assim como o Quicksort, sua versão parcial é o algoritmo de ordenação parcial mais rápido em várias situações
- Basta abandonar a partição à direita quando a da esquerda tiver k ou mais itens

Quicksort Parcial: Algoritmo em C-like

//Original

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq,
        j = dir,
        pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
            { swap(i, j); i++; j--; }
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

//Parcial, sendo k variável da classe

```
void quicksort(int esq, int dir) {
    int i = esq,
        j = dir,
        pivo = array[(esq+dir)/2];
    while (i <= j) {
        while (array[i] < pivo)
            i++;
        while (array[j] > pivo)
            j--;
        if (i <= j)
            { swap(i, j); i++; j--; }
    }
    if (esq < j)
        quicksort(esq, j);
    if (i < k && i < dir)
        quicksort(i, dir);
}
```

Quicksort Parcial: Análise de Complexidade

- A análise do Quicksort é difícil
- O comportamento é muito sensível à escolha do pivô
- Podendo cair no melhor caso $\Theta(k \times \lg(k))$
- Ou em algum valor entre o melhor caso e $\Theta(n \times \lg(n))$

Agenda

- Introdução
- Seleção Parcial
- Inserção Parcial
- Quicksort Parcial
- **Heapsort Parcial**



Heapsort Parcial (V1): Modificação

- Utiliza um *heap* para informar o menor item do conjunto
- Na primeira iteração, o menor item que está em **A[1]** (raiz do *heap*) é trocado com o item que está em **A[n]**
- Em seguida, o *heap* é refeito
- Novamente, o menor está em **A[1]**, troque-o com **A[n-1]**
- Repita as duas últimas operações até que o k -ésimo menor seja trocado com **A[n - k]**
- Ao final, os k menores estão nas k últimas posições do vetor **A**

Heapsort Parcial (V1): Algoritmo em *C-like*

```
void heapsortParcial(int *A, int n, int k) {  
    int esq = 1, dir, Aux = 0;  
    construir (A, n) ;    /* construir o heap */  
    dir = n;  
    while (Aux < k) { /* ordena o vetor */  
        x = A[1] ;  
        A[1] = A[n - Aux] ;  
        A[n - Aux] = x;  
        dir--; Aux++;  
        refaz(esq, dir , A) ;  
    }  
}
```

Heapsort Parcial (V1): Análise de Complexidade

- construir um heap com custo $O(n)$
- O procedimento refaz tem custo $O(\lg(n))$
- O procedimento heapParcial chama o refaz k vezes
- Logo, o algoritmo apresenta a complexidade:

$$O(n + k \log n) = \begin{cases} O(n) & \text{se } k \leq \frac{n}{\log n} \\ O(k \log n) & \text{se } k > \frac{n}{\log n} \end{cases}$$

Heapsort Parcial (V2): Modificação

- Primeira etapa: Construção do *Heap*
 - Construa o *heap* invertido com apenas os k primeiros elementos
 - Para cada um dos $(n-k)$ demais elementos, se ele for menor que a cabeça do heap, troque esses elementos e reorganize o *heap*
- A segunda etapa (destruição do *heap*) acontece normalmente com nosso *heap* tem tamanho k

Heapsort Parcial (V2): Algoritmo em C-like

//Original

```
void heapsort() {

    //Construção do heap
    for (int tam = 2; tam <= n; tam++)
        construir(tam);

    //Ordenação propriamente dita
    int tam = n;
    while (tam > 1){
        swap(1, tam--);
        reconstruir(tam);
    }
}
```

//Parcial, k é uma variável da classe

```
void heapsort() {

    //Construção do heap
    for (int tam = 2; tam <= k; tam++)
        construir(tam);

    for (int i = k + 1; i <= n; i++)
        if (array[i] < array[1]){
            swap(i, 1);
            reconstruir(k);
        }

    //Ordenação propriamente dita
    int tam = k;
    while (tam > 1){
        swap(1, tam--);
        reconstruir(tam);
    }
}
```

Heapsort Parcial (V1): Análise de Complexidade

- construir um heap com custo $O(n)$
- O procedimento refaz tem custo $O(\lg(n))$
- O procedimento heapParcial chama o refaz k vezes
- Logo, o algoritmo apresenta a complexidade:

$$O(n + k \log n) = \begin{cases} O(n) & \text{se } k \leq \frac{n}{\log n} \\ O(k \log n) & \text{se } k > \frac{n}{\log n} \end{cases}$$