Hoofdstuk 4

Inleiding tot de graffentheorie

Definitie.
Zij $\mathcal{G}$ *een graf en* $w : E(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *een functie die aan elke pijl een* **prijs** *of* **gewicht** *toekent en welke we een* **gewichtsfunctie** *noemen. Een graf samen met een gewichtsfunctie heet een* **gewogen graf***.*

Wat we meestal zoeken, is een opspannende deelgraf met minimaal gewicht in een ongerichte graf $\mathcal{G}$. Dit betekent dat de som van de gewichten van de pijlen van de opspannende deelgraf minimaal is. Deze is zeker een boom omdat hij minimaal samenhangend moet zijn.

Gierigheidsalgoritme (Kruskal).

Om een opspannende boom $\mathcal{T}$ van minimaal gewicht te vinden in een gewogen samenhangende ongerichte simpele graf $(\mathcal{G}, w)$:

1. Neem een boog met kleinste gewicht om $\mathcal{T}$ te starten;
2. Neem een boog met kleinste gewicht in $\mathcal{G}$ die nog niet tot $\mathcal{T}$ behoort en geen cyclus creëert als je hem aan $\mathcal{T}$ toevoegt.
3. Ga naar (2) tot $\mathcal{T}$ een opspannende boom is.

Lemma.
Zij $\mathcal{F}$ en $\mathcal{F}'$ twee bossen op dezelfde toppenverzameling en onderstel dat $\mathcal{F}$ minder bogen heeft dan $\mathcal{F}'$. Dan heeft $\mathcal{F}'$ een boog b die we kunnen toevoegen aan $\mathcal{F}$ zodanig dat $\mathcal{F} \cup \{b\}$ nog steeds een bos is.

Bewijs. Uit het ongerijmde : onderstel dat er zo geen boog is. Dus om het even welke boog van $\mathcal{F}'$ je toevoegt aan $\mathcal{F}$, je verkrijgt telkens weer een cyclus. Dus alle bogen van $\mathcal{F}'$ verbinden toppen van eenzelfde samenhangs-
component van $\mathcal{F}$. Dan moet $\mathcal{F}'$ minstens evenveel componenten hebben als $\mathcal{F}$. Als het aantal samenhangscomponenten van $\mathcal{F}$ gelijk is aan k, weten we dat $\mathcal{F}$ juist $n - k$ bogen heeft. Maar gegeven was dat $\mathcal{F}'$ *meer* bogen heeft dan $\mathcal{F}$, tegenspraak. $\square$

Stelling.

Het gierigheidsalgoritme vindt steeds een opspannende boom met minimaal gewicht.

Bewijs. Noem het resultaat van het gierigheidsalgoritme $\mathcal{T}$ en onderstel dat de graf $\mathcal{G}$ een lichtere opspannende boom $\mathcal{H}$ heeft. Orden de bogen van $\mathcal{H}$ zó dat $w(h_1) \leqslant w(h_2) \leqslant \cdots \leqslant w(h_{n-1})$. We doen hetzelfde voor $\mathcal{T}$ zodat $w(t_1) \leqslant w(t_2) \leqslant \cdots \leqslant w(t_{n-1})$. Vermits het gierigheidsalgoritme begint met een allerlichtste boog, moet gelden

$$w(t_1) \leqslant w(h_1)$$

Zij i de eerste index waar $\mathcal{H}$ lichter wordt dan $\mathcal{T}$. Dus i is het kleinste getal zodat

$$\sum_{j=1}^{i} w(h_j) < \sum_{j=1}^{i} w(t_j)$$

Door onze veronderstelling bestaat zulke $i > 1$. Vermits i de eerste index is waar $\mathcal{H}$ lichter wordt, geldt zeker $w(h_i) < w(t_i)$ en ook

$$\sum_{j=1}^{i-1} w(h_j) \geqslant \sum_{j=1}^{i-1} w(t_j)$$

Stel $\mathcal{T}_{i-1}$ gelijk aan het bos dat geleverd wordt door het gierigheidsalgoritme na $i-1$ stappen. Stel ook $\mathcal{H}_i$ gelijk aan het bos dat bestaat uit de bogen $h_1, h_2, \ldots, h_i$. Volgens voorgaand lemma kunnen we een boog van $\mathcal{H}_i$ toevoegen aan $\mathcal{T}_{i-1}$ zodanig dat het nog een bos blijft. Deze boog is een zekere h_j met $j \leqslant i$. Maar nu geldt

$$w(h_j) \leqslant w(h_i) < w(t_i)$$

Dit toont dat het gierigheidsalgoritme nooit t_i zou kiezen in de i-de stap, maar eerder h_j die lichter is, tegenspraak. $\square$

Gerelateerd: Handelsreizigersprobleem

Als er n steden gegeven zijn die een handelsreiziger moet bezoeken, samen met de afstand tussen ieder paar van deze steden, vind dan de kortste weg die kan worden gebruikt, waarbij iedere stad juist één keer wordt bezocht en die eindigt bij het beginpunt. Hier zoeken we dan eigenlijk een Hamilton cyclus met minimaal gewicht.

Incidentiematrix

Zij $\mathcal{G}$ een gerichte simpele graf. Zij $V(\mathcal{G}) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ en $E(\mathcal{G}) = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ nummeringen van de toppen en pijlen van $\mathcal{G}$. De **incidentiematrix** van $\mathcal{G}$ is de $(n \times m)$-matrix $B_{\mathcal{G}}$ met

$$\begin{cases} b_{ij} := 1 & \text{als } v_i \text{ het eindpunt is van } b_j \\ b_{ij} := -1 & \text{als } v_i \text{ het beginpunt is van } b_j \\ b_{ij} := 0 & \text{in alle andere gevallen} \end{cases}$$

Opspannende bomen in gerichte graf

Stelling. (Kirchhoff)
Zij $\mathcal{G}$ een gerichte simpele graf en zij B de incidentiematrix van $\mathcal{G}$. Stel B_0 gelijk aan de matrix die ontstaat na verwijdering van om het even welke rij van B. Het aantal opspannende bomen in $\mathcal{G}$ is dan gelijk aan $\det B_0 B_0^\top$.

Bewijs. Door hernummering van de n toppen kan je er steeds voor zorgen dat de weggelaten rij de laatste is. Als $m < n - 1$ kan $\mathcal{G}$ zeker niet samenhangend zijn en zijn er dus geen opspannende bomen. Neem C een willekeurige $(n-1 \times n-1)$-deelmatrix van B_0. We bewijzen nu dat $|\det C| = 1$ als en slechts als de deelgraf $\mathcal{G}_C$ bepaald door de kolommen van C (dit zijn juist $n-1$ pijlen van $\mathcal{G}$) een opspannende boom is. Anders is $\det C = 0$. We doen dit per inductie op n.

De basisstap van de inductie is voor $n = 2$. Voor zulke kleine graffen is de stelling duidelijk waar.
Onderstel in een eerste geval dat er in $\mathcal{G}_C$ een top v_i is van graad (=in- + uitgraad) 1. Dit betekent dat de i-de rij van C juist één niet-nul element bevat (en dat element is ± 1). We kunnen det C ontwikkelen volgens de i-de rij. Nu kunnen we de inductiehypothese gebruiken, want de cofactor die we moeten uitrekenen is de determinant van de matrix die overeenkomt met de graf $\mathcal{G}_C$ waar we v_i uit hebben weggelaten. We noteren deze graf $\mathcal{G}_C - v_i$. Dit is duidelijk een opspannende boom van $\mathcal{G} - v_i$ als en slechts als $\mathcal{G}_C$ een opspannende boom was van $\mathcal{G}$.

Als er nu geen top is van graad 1 in $\mathcal{G}_C$ (behalve misschien v_n, de top die we weglieten in B_0), dan kan $\mathcal{G}_C$ geen boom zijn en nog minder een opspannende boom. Maar $\mathcal{G}_C$ heeft wel $n-1$ pijlen en $n-1$ toppen. Dus moet $\mathcal{G}_C$ een top van graad nul hebben. Als dit niet v_n, de top van de weggelaten rij, is, dan heeft C een nulle rij zodat $\det C = 0$. Als v_n de geïsoleerde top is, bevat elke kolom van C een $+1$ en een -1. Bijgevolg is de som van alle rijen van C de nulrij zodat de rijen van C lineair afhankelijk zijn en $\det C = 0$.
Nu gebruiken we de formule van Cauchy-Binet (zie Appendix) die zegt dat

$$\det B_0 B_0^\top = \sum_{C \text{ een } (n-1 \times n-1)\text{-deelmatrix van } B_0} (\det C)^2.$$

Maar we weten dat $(\det C)^2 = 1$ of 0, naargelang de kolommen van C een opspannende boom bepalen of niet. $\square$

Laplaciaanse matrix

Zij $\mathcal{G}$ een ongerichte simpele graf met genummerde toppen en bogen $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ en $\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ respectievelijk.
De **Laplaciaanse matrix** $L_\mathcal{G}$ is de $(n-1 \times n-1)$-matrix met

$$\begin{cases} l_{ij} := \deg(v_i) & \text{als } i = j \\ l_{ij} := -1 & \text{als } i \neq j \text{ en } v_i \sim v_j \\ l_{ij} := 0 & \text{in alle andere gevallen} \end{cases}$$

Opspannende bomen in ongerichte graf

Stelling.

Het aantal opspannende bomen in een ongerichte simpele graf is juist $\det L_{\mathcal{G}}$.

Bewijs. We maken van $\mathcal{G}$ een gerichte graf $\mathcal{H}$ door elke boog $u \sim v$ te vervangen door twee pijlen $u \to v$ en $u \leftarrow v$.
Zij B_0 de incidentiematrix van $\mathcal{H}$, met de laatste rij weggelaten.
We bewijzen dat $B_0 B_0^\top = 2L_{\mathcal{G}}$. Op plaats (i, j) van $B_0 B_0^\top$ staat het scalair product van de i-de en de j-de rij van B_0, i.e. $\sum_{k=1}^m b_{ik} b_{jk}$.
Als $i = j$ zal elke pijl die in v_i vertrekt of aankomt een bijdrage 1 hebben in dit product. In totaal hebben we dus $2\deg(v_i)$ op plaats (i, i). Voor $i \neq j$ zal elke pijl $v_i \to v_j$ en elke pijl $v_i \leftarrow v_j$ een bijdrage -1 hebben. Dit geeft dus -2 of 0 op plaats (i, j), naargelang v_i en v_j adjacent zijn of niet.
Nu geldt dus dat $\det B_0 B_0^\top = \det 2L_{\mathcal{G}} = 2^{n-1} \det L_{\mathcal{G}}$. Maar elke opspannende boom van $\mathcal{G}$ geeft aanleiding tot 2^{n-1} opspannende bomen in $\mathcal{H}$ omdat er 2^{n-1} manieren zijn om de bogen te oriënteren. $\square$

Toepassing. Het aantal opspannende bomen in een complete graf K_n met genummerde toppen is n^{n-2}.
Dit volgt uit

$$L_{K_n} = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}$$

Dit geeft ons een alternatief bewijs van de stelling van Cayley.

Adjacentiematrix

Definitie.
Zij $\mathcal{G}$ een multigraf van orde n met genummerde toppen. Definieer de **adjacentiematrix** *$A_{\mathcal{G}}$ van $\mathcal{G}$ als de $(n \times n)$-matrix met a_{ij} gelijk aan het aantal pijlen van de i-de naar de j-de top. Een lus wordt tweemaal geteld in een ongerichte graf en éénmaal in een gerichte.*

Stelling.
Zij $k > 0$. Het element op plaats (i, j) in de k-de macht $A_{\mathcal{G}}^k$ geeft het aantal (gerichte) wandelingen van lengte k van top i naar top j.

Bewijs. Per inductie op k.
Voor $k = 1$ tellen we wandelingen van lengte 1, dus pijlen. De definitie van $A_{\mathcal{G}}$ doet de rest.
Onderstel dat de stelling waar is voor de k-de macht. Zij l een top van $\mathcal{G}$. Als er b_{il} wandelingen zijn van lengte k van i tot l en a_{lj} wandelingen van lengte 1 (t.t.z. pijlen) van l naar j, dan zijn er $b_{il}a_{lj}$ wandelingen van lengte $k+1$ van i tot j die langs l gaan.
Dus is het aantal wandelingen van lengte $k+1$ tussen i en j in totaal gelijk aan

$$\sum_{l \in V(\mathcal{G})} b_{il}a_{lj} =: c_{ij}$$

De inductiehypothese levert dat b_{il} het element is op plaats (i, l) in $A_{\mathcal{G}}^k$ zodat c_{ij} juist het element is op plaats (i, j) van het matrixproduct

$$A_{\mathcal{G}}^k A_{\mathcal{G}} = A_{\mathcal{G}}^{k+1}$$

□

Stelling.
Zij $\mathcal{G}$ een ongerichte multigraf op n toppen met adjacentiematrix $A_{\mathcal{G}}$. Dan is $\mathcal{G}$ samenhangend **als en slechts als** *$(I_n + A_{\mathcal{G}})^{n-1}$ enkel strikt positieve elementen heeft.*

Bewijs. Merk op dat een pad tussen twee toppen van $\mathcal{G}$ ten hoogste $n-1$ bogen heeft. Dus is $\mathcal{G}$ samenhangend als en slechts als er $\forall i, j \in V(\mathcal{G})$ een $k \leqslant n-1$ is met een pad van lengte k van de i-de naar de j-de top. Dus $\forall i, j \in V(\mathcal{G})$: $\exists k < n$: $(A_{\mathcal{G}}^k)_{ij} > 0$. Vermits $(I_n + A_{\mathcal{G}})^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} A_{\mathcal{G}}^k$, is de stelling bewezen. $\square$