Hoofdstuk 6

Recurrentievergelijkingen

In het voorgaande hoofdstuk hebben we met rijen formele machtreeksen geassocieerd die zeer handig bleken bij het oplossen van telproblemen. Deze genererende functies werden voor het eerst ingevoerd door Abraham De Moivre in 1718 toen hij een exacte formule in functie van $n \in \mathbb{N}$ (zoals $a_n = 3n + 2$ of $b_n = (n+1)(n+2)(n+3)$) wou voor de $n$de (of *algemene*) term van een rij die gegeven wordt door een zogenaamde **recurrentie relatie**.

Hierbij wordt rij gegeven door enkele begintermen en dan een **recursieve definitie** die a_n uitdrukt als functie van de voorgaande termen $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

Voorbeeld. $a_0 = 1, a_1 = 1$ en $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ voor de rij $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

We zullen nu onderzoeken wanneer zulke recursieve definitie kan 'vertaald' worden in een formule voor de algemene term a_n die enkel afhangt van n.

Homogene eerste orde lineaire recurrentievergelijkingen

Deze zijn van de vorm

$$a_n = ra_{n-1} \tag{1}$$

Eerste orde betekent dat a_n enkel afhangt van a_{n-1} en niet van de voorgaande termen in de rij;
lineair wil zeggen dat enkel de eerste macht van a_{n-1} voorkomt, niet a_{n-1}^5 of zo;
homogeen betekent dat a_n naast a_{n-1} niet afhangt van iets anders. Dus niet $a_n = ra_{n-1} + \sin n$ of zo.
Ook hangt r niet af van n. We zeggen dat het hier gaat om een recurrentievergelijking **met constante coëfficiënten**.

Die eerste orde homogene lineaire recurrentierelaties geven eigenlijk *meetkundige rijen*, die we reeds kennen vanuit het secundair onderwijs.

Voorbeeld. Los de vergelijking $a_{n+1} = 3a_n$ op met als **randvoorwaarde** $a_0 = 5$. We rekenen enkele elementen van de rij uit :

$$\begin{aligned}
a_0 &= 5 \\
a_1 &= 3 \cdot 5 = 15 \\
a_2 &= 3 \cdot 15 = 3^2 \cdot 5 \\
a_3 &= 3 \cdot a_2 = 3^3 \cdot 5 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

We zien dat

$$a_n = 3^n \cdot 5.$$

Stelling.

Zij $r \in \mathbb{C}$ en $a_0 \in \mathbb{C}$. De oplossing van de recurrentievergelijking $a_{n+1} = ra_n$ is steeds van de vorm $a_n = r^n a_0$.

Bewijs. Eenvoudige oefening. $\square$

Voorbeeld. Los de vergelijking $a_n = 7a_{n-1}$ op als je weet dat $a_2 = 98$. We weten dat $a_n = 7^n a_0$ zodat $a_2 = 7^2 a_0$. Hieruit volgt $a_0 = 2$ en dus $a_n = 7^n \cdot 2$.

Voorbeeld. De vergelijking $a_{n+1}^2 = 5a_n^2$ lijkt op het eerste gezicht niet lineair te zijn. Maar als je de *substitutie* $b_n := a_n^2$ uitvoert, krijg je dat b_n voldoet aan $b_{n+1} = 5b_n$. Als we de beginvoorwaarde $a_0 = 2$ meegeven, vinden we dat $b_n = 5^n b_0$ met $b_0 = 4$. Dus geldt $b_n = 5^n \cdot 4$ zodat de uiteindelijke oplossing $a_n = \left(\sqrt{5}\right)^n \cdot 2$ is.

Voorbeeld. We komen terug op het raadsel van vorig hoofdstuk: vul de rij 0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, ... aan.
Neem de verschillen

$$\begin{aligned} a_1 - a_0 &= 2 \\ a_2 - a_1 &= 4 \\ a_3 - a_2 &= 6 \\ a_4 - a_3 &= 8 \\ &\vdots \end{aligned}$$

We zien dus dat $a_n - a_{n-1} = 2n$. Dit is een niet-homogene lineaire eerste orde recurrentievergelijking die we later zullen leren oplossen in het algemeen. Toch kunnen we hier reeds een oplossing bedenken:

$$\begin{aligned} &(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + (a_1 - a_0) \\ = \quad &2n + 2(n-1) + \cdots + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \end{aligned}$$

zodat

$$a_n - a_0 = 2(1 + 2 + 3 + \cdots + n),$$

waaruit we vinden dat

$$a_n - 0 = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \text{ of } a_n = n^2 + n.$$

Voorbeeld. Ook met niet-constante coëfficiënten kan gezond verstand tot een oplossing leiden.

$$a_n = na_{n-1} \qquad \text{met } a_0 = 1$$

geeft onmiddellijk $a_n = n!$.

Homogene tweede orde lineaire recurrentievergelijkingen

Definitie.
Zij $k \in \mathbb{N}_0$ *en* $0 \neq c_0, c_1, \ldots, c_k \neq 0$ *reële getallen en* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ *een functie. Een* **lineaire recurrentievergelijking van orde** k **met constante coëfficiënten** *is een uitdrukking*

$$c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k} = f(n).$$

Om een eenduidige oplossing te hebben voor a_n, *zijn* **beginvoorwaarden** $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ *nodig. Als* $\forall n \in \mathbb{N}$ *geldt dat* $f(n) = 0$, *heet de vergelijking* **homogeen**.

Wij concentreren ons op homogene van orde 2:

$$c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} = 0. \tag{2}$$

Geïnspireerd door het geval van orde 1 proberen we een oplossing te vinden van de vorm $a_n = cr^n$ voor constanten $c \neq 0$ en $r \neq 0$. We substitueren dit in (2) en bekomen

$$c_0 cr^n + c_1 cr^{n-1} + c_2 cr^{n-2} = 0. \tag{3}$$

We delen dit alles door $cr^{n-2} \neq 0$ en krijgen

$$c_0 r^2 + c_1 r + c_2 = 0. \tag{4}$$

Dit is een kwadratische vergelijking die we de **karakteristieke vergelijking** van de gegeven recurrentievergelijking noemen. De algemene methode voor het oplossen van kwadratische vergelijkingen leert ons dat er drie soorten oplossingen mogelijk zijn, naargelang de discriminant, $c_1^2 - 4c_0c_2$, positief, nul of negatief is. Er zijn dan respectievelijk twee reële oplossingen, één reële wortel met multipliciteit twee of twee complex toegevoegde oplossingen.

Twee reële wortels

Los volgende recurrentievergelijking op als je weet dat $a_0 = 1$ en $a_1 = 2$.

$$a_n + a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0$$

De karakteristieke vergelijking is

$$r^2 + r - 6 = 0 \qquad \iff \qquad (r-2)(r+3) = 0.$$

De wortels zijn dus 2 en -3. Bijgevolg zijn $a_n = 2^n$ en $a_n = (-3)^n$ oplossingen van de recurrentievergelijking, maar ook alle combinaties

$$a_n = c_1 2^n + c_2(-3)^n$$

van deze twee zijn oplossingen. De beginvoorwaarden laten ons toe de constanten c_1 en c_2 te expliciteren. We krijgen een stelsel

$$\begin{cases} 1 = & a_0 & = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 \\ 2 = & a_1 & = c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot (-3) \end{cases}$$

We lossen dit stelsel op:

$$\begin{cases} c_2 &= 1 - c_1 \\ 2 &= 2c_1 - 3c_2 \end{cases} \iff \begin{cases} c_2 &= 1 - c_1 \\ 5c_1 &= 5 \end{cases} \iff \begin{cases} c_2 &= 0 \\ c_1 &= 1 \end{cases}$$

Bijgevolg is een oplossing van de recurrentievergelijking, met beginvoorwaarden,

$$a_n = 2^n.$$

We stellen nu een formule op voor de beroemde rij van Fibonacci: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... die voldoet aan

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{met } F_0 = 0 \text{ en } F_1 = 1.$$

De karakteristieke vergelijking is

$$r^2 - r - 1 = 0.$$

De discriminant is 5 zodat we als oplossingen

$$r_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ en}$$
$$r_- = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

vinden.

Een algemene oplossing is dus

$$a_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

De beginvoorwaarden geven

$$\left\{ \begin{array}{lll} 0 = & F_0 & = c_1 + c_2 \\ 1 = & F_1 & = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{cl} c_2 & = -c_1 \\ 1 & = c_1 \sqrt{5} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} c_1 & = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ c_2 & = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{array} \right.$$

zodat

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right). \tag{5}$$

Opmerking. Het is verbazend dat Formule (5) voor elke waarde van *n* een geheel getal geeft. Dat ligt aan de zeer speciale eigenschappen van het getal $(1+\sqrt{5})/2$. Dit getal komt nog voor op andere plaatsen in de Wiskunde en in de natuur. Het is de zogenaamde *Gulden snede'* (Engels: "Golden ratio").

Voorbeeld. Voor $n \in \mathbb{N}$ stellen we a_n gelijk aan het aantal deelverzamelingen van $[n]$ die geen opeenvolgende getallen bevatten. De toegelaten deelverzamelingen van $[3]$ zijn bijvoorbeeld $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ en $\{1, 3\}$. Je kan zelf nagaan dat $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$ en $a_4 = 8$. We bepalen een recurrentievergelijking voor de rij $(a_n)_n$.
Een toegelaten deelverzameling A van $[n]$ valt in één van volgende gevallen:

1. $n \in A$: dan moet $n-1 \notin A$ en is $A \setminus \{n\}$ een toegelaten deelverzameling voor $[n-2]$. Het aantal deelverzamelingen A in deze situatie is dus a_{n-2};
2. $n \notin A$: dan is A een toegelaten deelverzameling van $[n-1]$. Zo zijn er juist a_{n-1}.

We krijgen dus de recurrentievergelijking

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \qquad \text{met } a_0 = 1 \text{ en } a_1 = 2.$$

Dit lijkt op de Fibonacci-rij F_n uit vorig voorbeeld. We hebben $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n = F_{n+2}$ zodat

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right]$$

We tonen even dat de methode met de karakteristieke vergelijking ook werkt voor recurrentievergelijkingen van hogere orde.

Voorbeeld. Los op :

$$2a_{n+3} = a_{n+2} + 2a_{n+1} - a_n \qquad \text{met } a_0 = 0, a_1 = 1 \text{ en } a_2 = 2.$$

De karakteristieke vergelijking is

$$2r^3 - r^2 - 2r + 1 = 0.$$

Gelukkig kunnen we deze veelterm op zicht ontbinden tot $(2r-1)(r-1)(r+1)$. De wortels zijn nu duidelijk $\frac{1}{2}$, 1 en -1. Bijgevolg is de oplossing van de vorm

$$a_n = c_1(1)^n + c_2(-1)^n + c_3\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Met de beginvoorwaarden vinden we

$$a_n = \frac{5}{2} + \frac{1}{6}(-1)^n - \frac{8}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Twee complex toegevoegde wortels

Aan de hand van de goniometrische vorm van een complex getal kunnen we gemakkelijk machten berekenen, want de stelling van De Moivre zegt

$$\Big(r(\cos\theta + i\sin\theta)\Big)^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

Voorbeeld. Bepaal $(1+\sqrt{3}i)^{10}$.
We bepalen eerst de goniometrische vorm van $1+\sqrt{3}i$. Dat is $2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$. Hieruit volgt

$$\begin{aligned}
(1+\sqrt{3}i)^{10} &= 2^{10}(\cos\frac{10}{3}\pi + i\sin\frac{10}{3}\pi) \\
&= 2^{10}(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi) \\
&= 2^{10}(-\frac{1}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i) \\
&= -2^9(1+\sqrt{3}i)
\end{aligned}$$

Los op:

$$a_n = 2(a_{n-1} - a_{n-2}) \qquad \text{met } a_0 = 1 \text{ en } a_1 = 2.$$

De karakteristieke vergelijking is

$$r^2 - 2r + 2 = 0.$$

De discriminant is $4 - 8 = -4 = (2i)^2$ zodat de twee oplossingen $r_+ = 1 + i$ en $r_- = 1 - i$ zijn. We krijgen dus

$$a_n = c_1(1+i)^n + c_2(1-i)^n$$

als algemene oplossing.
We gaan over naar de goniometrische vorm :

$$\begin{aligned} 1+i &= \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) \\ 1-i &= \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}) \end{aligned}$$

en krijgen

$$\begin{aligned} a_n &= c_1(\sqrt{2})^n(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}) + c_2(\sqrt{2})^n(\cos\frac{n\pi}{4} - i\sin\frac{n\pi}{4}) \\ &= (\sqrt{2})^n\left(k_1\cos\frac{n\pi}{4} + k_2\sin\frac{n\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

met $k_1 = c_1 + c_2$ en $k_2 = i(c_1 - c_2)$.
De beginvoorwaarden geven

$$\begin{cases} 1 = & a_0 & = k_1 \\ 2 = & a_1 & = (\sqrt{2})(k_1\cos\frac{\pi}{4} + k_2\sin\frac{\pi}{4}) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} k_1 & = 1 \\ 2 & = 1 + k_2 \end{cases} \iff \begin{cases} k_1 & = 1 \\ k_2 & = 1 \end{cases}$$

zodat de oplossing $a_n = (\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} + \sin\frac{n\pi}{4}\right)$ is.

Opmerking. Ook hier is het opmerkelijk dat een formule met vierkantswortels, sinussen en cosinussen steeds leidt tot gehele getallen.

Eén reële wortel met multipliciteit twee

Los op:

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n \qquad \text{met } a_0 = 1 \text{ en } a_1 = 3.$$

De karakteristieke vergelijking is

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \iff (r-2)^2 = 0$$

zodat we als enige oplossing $r = 2$ krijgen. Dus is $a_n = c_1 2^n$ een oplossing. We merken op dat $a_n = n2^n$ ook een oplossing is omdat

$$\begin{aligned} & (n+2)2^{n+2} = 4(n+1)2^{n+1} - 4n2^n \\ \Leftrightarrow \quad & 4(n+2) = 8(n+1) - 4n \\ \Leftrightarrow \quad & 4n + 8 = 8n + 8 - 4n. \end{aligned}$$

We nemen nu als algemene oplossing

$$a_n = c_1 2^n + n c_2 2^n$$

en bepalen de constanten aan de hand van de beginvoorwaarden :

$$\left\{ \begin{array}{lll} 1 = & a_0 & = c_1 \\ 3 = & a_1 & = 2c_1 + 2c_2 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} c_1 & = 1 \\ 3 & = 2 + 2c_2 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} c_1 & = 1 \\ c_2 & = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

zodat de oplossing $a_n = 2^n + \frac{1}{2} n 2^n = 2^{n-1}(2+n)$ is.

In het algemeen kunnen we zeggen dat we in het geval van een meervoudige wortel r van multipliciteit m voor de karakteristieke veelterm als stuk met r in de algemene oplossing moeten nemen

$$c_0 r^n + c_1 n r^n + c_2 n^2 r^n + \cdots + c_{m-1} n^{m-1} r^n$$

Niet-homogene recurrentievergelijkingen

We bekijken enkel de gevallen

$$a_n + ca_{n-1} = f(n) \qquad \text{en} \qquad a_n + ba_{n-1} + ca_{n-2} = f(n).$$

De methode bestaat erin om eerst de vergelijking homogeen te maken door nul te schrijven in plaats van $f(n)$.
Als $a_n^{(h)}$ de algemene oplossing is voor de **gehomogeniseerde** recurrentievergelijking en $a_n^{(p)}$ is een willekeurige oplossing van de oorspronkelijke recurrentievergelijking die we de **particuliere** oplossing noemen, dan is $a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$ de algemene oplossing van de oorspronkelijke recurrentievergelijking.
De methodes die hoger beschreven werden, laten ons toe om $a_n^{(h)}$ te vinden. Voor $a_n^{(p)}$ laten we ons inspireren door de functie $f(n)$ in het rechterlid. We illustreren de methode op twee voorbeelden.

Voorbeeld. Los op:

$$a_n - 3a_{n-1} = 5 \cdot 7^n \qquad \text{met } a_0 = 2.$$

De homogene vergelijking is $a_n = 3a_{n-1}$ zodat $a_n^{(h)} = c \cdot 3^n$. Voor de particuliere oplossing proberen we $a_n^{(p)} := A \cdot 7^n$. Substitutie in de vergelijking geeft

$$\begin{aligned} & A \cdot 7^n - 3A \cdot 7^{n-1} = 5 \cdot 7^n \\ \Leftrightarrow \quad & 7A - 3A = 5 \cdot 7 \text{ zodat } A = \frac{35}{4} \end{aligned}$$

Dus hebben we als algemene oplossing $a_n = c \cdot 3^n + \frac{35}{4} \cdot 7^n$.

We bepalen c met de beginvoorwaarden : $2 = a_0 = c + \frac{35}{4}$ dus $c = -\frac{27}{4}$. De uiteindelijke oplossing is

$$a_n = -\frac{27}{4} \cdot 3^n + \frac{35}{4} \cdot 7^n.$$

Voorbeeld. We krijgen ook een niet-homogene eerste orde recurrentievergelijking voor het beroemde probleem van de torens van Hanoi voor n schijven.
De vergelijking is $a_{n+1} = 2a_n + 1$ met $a_0 = 0$ en we zien direct dat $a_n^{(h)} = c \cdot 2^n$. Als particuliere oplossing proberen we $a_n^{(p)} = A \cdot 1^n$.
Substitutie geeft $A = 2A + 1$ zodat $A = -1$ en dus $a_n = c \cdot 2^n - 1$.
De beginvoorwaarde geeft $0 = c - 1$ zodat $c = 1$ en de oplossing wordt dus

$$a_n = 2^n - 1.$$

Voor tweede orde niet-homogene recurrentievergelijkingen verwijzen we naar de oefeningen.

Beroemde particuliere oplossingen

$f(n)$	$a_n^{(p)}$
c	A
n	$A_1 n + A_0$
n^2	$A_2 n^2 + A_1 n + A_0$
$n^t, t \in \mathbb{N}$	$A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \cdots + A_1 n + A_0$
$r^n, r \in \mathbb{R}$	$A r^n$
$n^t r^n$	$r^n(A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \cdots + A_1 n + A_0)$

Een methode met genererende functies

We geven enkel een voorbeeld om de methode te illustreren:

$$a_n - 3a_{n-1} = n, \qquad \text{voor } n \geqslant 1 \text{ en met } a_0 = 1.$$

Deze recurrentievergelijking stelt eigenlijk een oneindig aantal vergelijkingen voor als we alle waarden van n invullen:

$$\begin{array}{ll} \text{voor } n = 1 & a_1 - 3a_0 = 1 \\ \text{voor } n = 2 & a_2 - 3a_1 = 2 \\ \text{voor } n = 3 & a_3 - 3a_2 = 3 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

We vermenigvuldigen nu de n-de vergelijking met x^n en krijgen

$$\begin{array}{ll} \text{voor } n = 1 & a_1x^1 - 3a_0x^1 = 1x^1 \\ \text{voor } n = 2 & a_2x^2 - 3a_1x^2 = 2x^2 \\ \text{voor } n = 3 & a_3x^3 - 3a_2x^3 = 3x^3 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Als we alle vergelijkingen optellen vinden we

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - 3\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n. \tag{6}$$

We stellen $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, de genererende functie van $a_0, a_1, a_2, \ldots$ Dan kan vergelijking (6) herschreven worden als

$$(f(x) - a_0) - 3x\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

of

$$f(x) - 1 - 3xf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n.$$

We herinneren ons van het voorbeeld op blz. **??** dat de genererende functie van de rij $0, 1, 2, 3, \ldots$ gelijk is aan $x/(1-x)^2$ zodat

$$f(x) - 3xf(x) = 1 + \frac{x}{(1-x)^2} \qquad \text{of} \qquad f(x) = \frac{1}{1-3x} + \frac{x}{(1-x)^2(1-3x)}$$

We ontbinden de laatste term van $f(x)$ in partieelbreuken :

$$\frac{x}{(1-x)^2(1-3x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{1-3x}$$

$$\Updownarrow$$

$$x = A(1-x)(1-3x) + B(1-3x) + C(1-x)^2$$

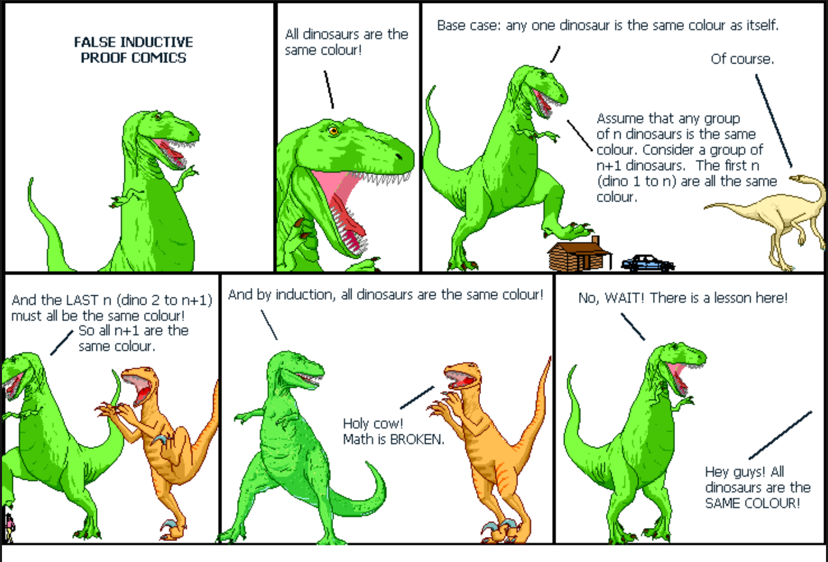
zodat we (door $x = 1$, $x = 1/3$ en $x = 0$ te stellen bijvoorbeeld) krijgen

$$f(x) = \frac{-1/4}{1-x} + \frac{-1/2}{(1-x)^2} + \frac{7/4}{1-3x}$$

Nu kunnen we a_n vinden als de coëfficiënt van x^n in $f(x)$. Dit is de som van de coëfficiënten van x^n in de drie termen van $f(x)$.

1. $\frac{-1/4}{1-x} = -\frac{1}{4}(1 + x + x^2 + \cdots)$ zodat de coëfficiënt van x^n hier $-\frac{1}{4}$ is.
2. $\frac{-1/2}{(1-x)^2} = \frac{1}{2}(1-x)^{-2} = -\frac{1}{2}\left(\binom{-2}{0} + \binom{-2}{1}(-x) + \binom{-2}{2}(-x)^2 + \cdots\right)$ zodat de coëfficiënt van x^n hier $-\frac{1}{2}\binom{-2}{n}(-1)^n = -\frac{1}{2}\binom{2+n-1}{n} = -\frac{1}{2}(n+1)$ is.
3. $\frac{7/4}{1-3x} = \frac{7}{4}(1 + (3x) + (3x)^2 + \cdots)$ zodat de coëfficiënt van x^n hier $\frac{7}{4}3^n$ is.

Bijgevolg hebben we als algemene formule voor $a_n = \frac{7}{4}3^n - \frac{1}{2}n - \frac{3}{4}$.


FALSE INDUCTIVE PROOF COMICS
All dinosaurs are the same colour!
Base case: any one dinosaur is the same colour as itself.
Of course.
Assume that any group of n dinosaurs is the same colour. Consider a group of n+1 dinosaurs. The first n (dino 1 to n) are all the same colour.
And the LAST n (dino 2 to n+1) must all be the same colour!
So all n+1 are the same colour.
And by induction, all dinosaurs are the same colour!
Holy cow! Math is BROKEN.
No, WAIT! There is a lesson here!
Hey guys! All dinosaurs are the SAME COLOUR!