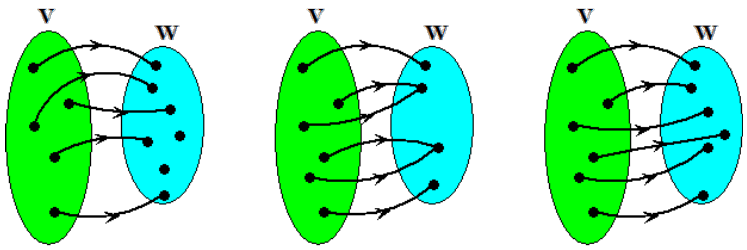
HOOFDSTUK 1: INLEIDENDE BEGRIPPEN

1.13 INJECTIES EN SURJECTIES

Injectief: Een functie f: A → B heet injectief indien elk element van B hoogstens één keer voorkomt als tweede component van een koppel in f.

Surjectief: Een functie f: A → B is surjectief indien Im f = B. (elk element van het codomein heeft minstens één origineel)

Bijectief: functie is zowel injectief als surjectief. (bijectie van een verzameling naar zichzelf heet een **permutatie**.)



injectief
evt. "legen" in W
geen dubbelen

surjectief
evt. dubbelen in W
geen legen

bijectief
1-op-1

1.15 INVERSE FUNCTIES

Invers: Zij f : A → B een functie. Indien een functie g : B → A voldoet aan: $f \circ g = 1_B$ en $g \circ f = 1_A$ dan heet g een invers voor f. We zeggen dan ook dat f inverteerbaar is.

HOOFDSTUK 2: EENVOUDIGE PRINCIPES VAN DISCRETE WISKUNDE

2.2 EENVOUDIGE TELTECHNIEKEN

Ordening: Een verzameling A heeft $n \in \mathbb{N}$ elementen indien er een bijectie bestaat van [n] naar A. Deze bepaalt een ordening of nummering van A.

HOOFDSTUK 3: GEHELE GETALLEN

3.2 WELORDE

Infinum: Zij $S \subset \mathbb{Z}$. $x \in \mathbb{Z}$ heet een ondergrens van S indien $\forall s \in S : x \leq s$. het infinum van S is de grootste ondergrens van S.

Minimum: Indien het infinum van een verzameling S zelf tot S behoort, dan noemen we het een minimum.

Definitie: We zeggen dat een geheel getal b een veelvoud is van $a \in \mathbb{Z}$ indien $\exists k \in \mathbb{Z} : b = ka$. We zeggen in dat geval ook dat a het getal b deelt en schrijven a | b. Ook zeggen we dat a een factor of een deler is van b of dat b deelbaar is door a. Als a , noteren we het getal $k \in \mathbb{Z}$ waarvoor b = ka met b/a . Natuurlijk bestaat b/a voor elke keuze $b \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Z}_0$ maar in het algemeen behoort b/a tot $\mathbb{Q}$ en niet tot $\mathbb{Z}$. Enkel als a | b hebben we b/a $\in \mathbb{Z}$.

3.5 GROOTSTE GEMENE DELER

Grootste gemene deler: stel $a,b \in \mathbb{Z}$. Een geheel getal d heet een grootste gemene deler (ggd) van a en b indien d|a en d|b (gemene deler) en $\forall c \in \mathbb{Z} : c|a \wedge c|b \Rightarrow c|d$ (grootste).

Definitie: De grootste gemene deler van a en b is de unieke positieve grootste gemene deler van a en b. We noteren hem ggd(a, b).

Relatief priem: $a, b \in \mathbb{Z}$ heten relatief priem indien ggd(a, b) = 1.

3.6 PRIEMGETALLEN

Priemgetal: een priemgetal is een natuurlijk getal met juist twee verschillende positieve delers. Dus een getal $m \geq 2$ is niet priem als en slechts als we $m = m_1 m_2$ kunnen schrijven met $1 < m_1, m_2 < m$.

Kleinste gemeen veelvoud: Voor twee niet-nulle natuurlijke getallen m en n definieren we het kleinste gemeen veelvoud van m en n als het kleinste niet-nul natuurlijk getal dat een veelvoud is van zowel m als n. We noteren dit getal kgv(m, n). We hebben dus dat elk gemeen veelvoud van m en n deelbaar is door kgv(m, n)

3.7 DE Φ-FUNCTIE VAN EULER (PHI)

Definitie: Voor een $n \in \mathbb{N}_0$ definiëren we $\varphi(n)$ als het aantal getallen in [n] die relatief priem zijn met n.

3.8 EQUIVALENTIERELATIES EN PARTITIES

Equivalentierelatie: Een relatie $R \subset X \times X$ is een equivalentierelatie als ze

1) Reflexief is: $\forall x \in X : x\mathcal{R}x$ (voor alle elementen een relatie tussen dat element en zichzelf.
2) Symmetrisch is: $\forall x, y \in X : x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$
3) Transitief is: $\forall x, y, z \in X : x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z.$

Partitie: gegeven een verzameling V, definiëren we een partitie van V als een verzameling A van deelverzameling van V die voldoen aan volgende twee voorwaarden:

(P1) $\forall A \neq B \in \mathcal{A}\colon A \cap B = \emptyset$

(P2) $\bigcup \mathcal{A} = V$

3.9 CONGRUENTIES

Congruent modulo: Zij $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}_0$. x_1 en x_2 heten **congruent modulo** m indien $m \mid x_2 - x_1$. Het natuurlijk getal m heet de modulus. We schrijven $x_1 \equiv_m x_2$ of $x_1 \equiv x_2 \pmod{m}$.

Inverteerbaar: $x \in \mathbb{Z}_m$ heet inverteerbaar indien er een $y \in \mathbb{Z}_m$ bestaat met $x \times y = 1$ (dus $x \times y \equiv_m 1$).

Lichaam & veld: Een ring met eenheid waarin elk niet-nul element inverteerbaar is, heet een lichaam. Indien de vermenigvuldiging bovendien commutatief is, spreekt men van een veld.

HOOFDSTUK 4: GRAFFENTHEORIE

4.1 DEFINITIES EN TERMINOLOGIE

Graf: Een graf bestaat uit een verzameling V wiens elementen we toppen noemen en een relatie → op V die we adjacentierelatie noemen. Een koppel (u, v) dat behoort tot de relatie → (d.w.z. u → v) heet een pijl. De verzameling van pijlen noteren we met E.

Definities: Zij G = (V, →) een graf. Indien de relatie → symmetrisch is, zegt men dat de graf ongericht is. In dat geval schrijven we dikwijls ~ in plaats van →. Indien we willen benadrukken dat de graf niet ongericht is, spreken we van een gerichte graf. Indien v → v zeggen we dat de graf een lus heeft in v. Een graf zonder lussen noemen we simpel of enkelvoudig.

4.3 VERDERE DEFINITIES EN EIGENSCHAPPEN

Graad (valentie): De graad van een top v in een ongerichte graf G is het aantal bogen die v bevatten. Een lus tellen we twee keer. We noteren dit met deg(v) zodat geldt: $\deg(v) = |\mathcal{G}_v|$. (aantal buren)

Reguliere graf: Alle toppen hebben dezelfde graad, k-reguliere graf heeft elke top graad k.

Ingraad en uitgraad: In een gerichte graf G defini¨eren we voor elke top v de ingraad en de uitgraad als het aantal pijlen dat in v respectievelijk aankomt en vertrekt. We noteren deze graden respectievelijk deg+(v) en deg−(v). Een gerichte graf heet gebalanceerd indien voor elke top v geldt dat deg+(v) = deg−(v).

Simpel/enkelvoudig pad: een pad met geen twee gelijke toppen

Sterk samenhangend: gericht pad tussen elke 2 toppen in de gerichte graf

4.4 BIJZONDERE PADEN

Multigraf: Een multigraf is een graf G = (V, →) uitgebreid door middel van een functie µ: V × V → N die een multipliciteit toekent aan elke pijl. We interpreteren de functie µ als volgt:

1) µ(u, v) = 0 betekent dat u en v niet adjacent zijn; (geen buren)
2) µ(u, v) = k > 0 betekent dat er k pijlen zijn van u naar v.

Parallele pijlen: zelfde begin en eindpunt.

Euler: Een pad in een ongerichte multigraf G heet een Eulerpad indien het elke boog van G precies ´e´en maal bevat. Een gesloten Eulerpad is een Eulercyclus. Een multigraf die een Eulercyclus bevat heet een **Eulergraf**.

Hamilton: Een simpel pad dat alle toppen van een multigraf G bevat heet een **Hamiltonpad**. Een Hamiltoncyclus is een gesloten **Hamiltonpad**. Een multigraf die een Hamiltoncyclus bevat heet een **Hamiltongraf**.

Gerichte Eulergraf: Een gerichte (multi)graf heet een gerichte Eulergraf indien er een gesloten gericht pad is dat elke pijl juist ´e´en keer gebruikt.

Toernooi: Een toernooi is een gerichte simpele graf die ontstaat door alle bogen van een complete graf te oriënteren.

4.5 ISOMORFEN TUSSEN GRAFFEN

Morfisme: Zij (V, µ) en (W, φ) twee multigraffen. Een afbeelding f : V → W heet een morfisme indien zij voldoet aan ∀(u, v) ∈ V × V geldt dat φ(f(u), f(v)) = µ(u, v).

Isomorfisme: Twee multigraffen (V, µ) en (W, φ) zijn isomorf als er een bijectief morfisme V → W bestaat. Zulk een morfisme heet dan ook een isomorfisme tussen (V, µ) en (W, φ).

4.6 BOMEN EN BOSSEN

Boom: een samenhangende ongerichte simpele graf zonder cyclus noemen we een boom.

Blad: een top van graad 1 in een boom noemt men een blad

Gerichte boom: Wanneer G een gerichte graf is, dan wordt G een gerichte boom genoemd als de ongerichte graf geassocieerd met G een boom is. Een gerichte boom noemen we een gewortelde boom als er een unieke top t is waarvoor de ingraad nul is en alle andere toppen ingraad ´e´en hebben. We noteren (G, t).

Bos: Een bos is een ongerichte simpele graf zonder cyclus. Een geworteld bos is een bos waarin elke samenhangscomponent geworteld is.

Genummerde boom: Een genummerde (of gelabelde) boom is een boom met als toppenverzameling [n] voor n ∈ $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

Definitie 34. *Zij $\mathcal{G}$ een graf en $w : E(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ een functie die aan elke pijl een* ***prijs*** *of* ***gewicht*** *toekent en welke we een* ***gewichtsfunctie*** *noemen. Een graf samen met een gewichtsfunctie heet een* ***gewogen graf****.*

4.7 BIPARTIETE GRAFFEN

Bipartiet: Een multigraf heet bipartiet indien zijn toppenverzameling kan gepartitioneerd worden in twee delen zodat er geen enkele pijl is die toppen verbindt in hetzelfde deel.

4.8 KOPPELINGEN

Koppeling: Een koppeling (Engels: "matching") in een ongerichte (multi) graf G is een verzameling van bogen van G waarin geen twee een top gemeenschappelijk hebben.

Maximaal: Een koppeling heet maximaal indien we ze niet kunnen uitbreiden tot een koppeling met meer bogen. Een **maximumkoppeling** in een graf G is een koppeling van maximale grootte. Dit wil zeggen dat er in G geen koppeling met meer bogen bestaat.

k-wisselpad: Zij (V, E) een graf met een koppeling K. Een K-wisselpad is een pad waarvan de opeenvolgende bogen afwisselend wel en niet tot K behoren. Een vergrotend K-wisselpad is een K-wisselpad waarvan de eerste en laatste top K-onverzadigd zijn.

4.9 TOEWIJZINGEN EN HET LESSENROOSTERPROBLEEM

Compleet bipartiete graf:

Definitie 40. *Zij $\mathcal{G} = (V_1 \cup V_2, E)$ een bipartiete ongerichte graf. Indien elke top van V_1 adjacent is met elke top van V_2, spreekt men van een **compleet bipartiete graf**. Als $|V_1| = m$ en $|V_2| = n$ noteren we zulke graf $K_{m,n}$.*

Toewijzing: Stel G = (V1 ∪ V2, E) bipartiet ongericht en W ⊂ V1. Een toewijzing (Engels: "assignment") van W in V2 is een koppeling K tussen toppen van W en V2 die alle toppen van W verzadigt. Als W' de deelverzameling is van V2 die door K verzadigd wordt, is K ook een toewijzing van W' in V1.

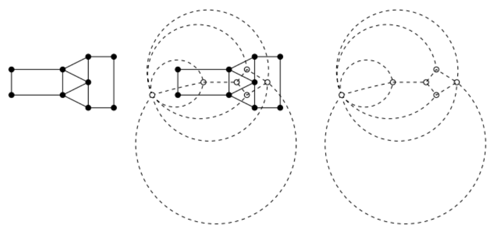
Toppenoverdekking: Een (toppen)overdekking (Engels: "vertex cover") van een ongerichte graf G is een deelverzameling U van toppen van G waarbij elke boog van G minstens ´e´en top van U bevat. Een minimale overdekking is een overdekking die geen echte deelverzameling heeft welke ook een overdekking is. Een minimumoverdekking is een overdekking waarnaast geen overdekking bestaat met minder toppen.

4.10 PLANAIRE GRAFFEN

Planair: Een multigraf heet planair indien hij in een vlak kan getekend worden zonder dat twee bogen elkaar snijden. Als we een planaire multigraf in het vlak tekenen zodanig dat geen twee bogen snijden, wordt het vlak verdeeld in gebieden (Engels: "faces").

Boogequivalent: Een graf H die ontstaat uit een graf G door (eventueel meermaals) toepassen van bovenstaande operaties heet boogequivalent met G. (zie wpo)

Duale graf: Zij G een planaire ongerichte mulitgraf. De duale graf G∗ heeft als toppen de gebieden van G en twee toppen zijn adjacent als en slechts als de overeenkomstige gebieden een boog delen. De figuur hieronder toont een voorbeeld van een graf en zijn duale (in streepjeslijn).



HOOFDSTUK 5: GENERERENDE FUNCTIES

5.1 VOORBEELDEN EN DEFINITIE

<u>Genererende functie:</u> Zij a0, a1, a2, . . . een rij van reële getallen. De genererende functie voor die rij is per definitie

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

(niet convergent persee)

5.2 VERALGEMEENDE BINOMINAALCOËFFICIËNTEN

We weten dat voor $n, r \in \mathbb{N}_0$ geldt

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

Definitie 47. *We stellen nu per definitie voor alle niet-nulle natuurlijke getallen n en r*

$$\binom{-n}{r} := \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-r+1)}{r!}.$$

Dan geldt

$$\begin{aligned}\binom{-n}{r} &= (-1)^r \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{r!} \\ &= (-1)^r \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} \\ &= (-1)^r \binom{n+r-1}{r}\end{aligned}$$

We stellen ook $\forall n \in \mathbb{Z}$: $\binom{n}{0} := 1$.

Uit de analyse weet je dat de McLaurin-reeks voor $(1+x)^{-n}$ gelijk is aan

$$1 + (-n)x + \frac{(-n)(-n-1)}{2!}x^2 + \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

zodat

$$(1+x)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r} x^r.$$

Dit is een veralgemening van het binomium van Newton. Nog anders gezegd : $(1+x)^{-n}$ is een genererende functie voor $\binom{-n}{0}, \binom{-n}{1}, \binom{-n}{2}, \ldots$.

We passen dit nieuw begrip toe.

5.3 PARTITIES VAN NATUURLIJKE GETALLEN

<u>Partitie</u>: Een partitie van een niet-nul natuurlijk getal n is een schrijfwijze van n als som van niet-nulle natuurlijke getallen

HOOFDSTUK 6

6.1 HOMOGENE EERSTE ORDE LINEAIRE RECURRENTIEVERGELIJKINGEN

$a_n = ra_{n-1}$

Eerste orde betekent dat a_n enkel afhangt van a_{n-1} en niet van de voorgaande termen in de rij;
lineair wil zeggen dat enkel de eerste macht van a_{n-1} voorkomt, niet a^5_{n-1} of zo;
homogeen betekent dat a_n naast a_{n-1} niet afhangt van iets anders. Dus niet $a_n = ra_{n-1} + \sin n$ of zo.

Check cursus