Het beeld: voor $f: A \to B,\ S \subset A$, dan defenieren we het beeld als $f(S) = \{f(s) |\ s \in S\} = \{b \in B \mid \exists s \in S: f(s) = B\}$

Het invers beeld: voor $f: A \to B, T \subset B$ dan definieren we het invers beeld als

$f^{-1}(T) = \{a \in A \,|f(a) \in T\}$

Injectiviteit: $f : A \to B$ is injectief <=> $\forall a_1, a_2 \in A: a_1 \neq a_2 => f(a_1) \neq f(a_2)$

een element uit het codomein is het beeld van HOOGSTENS 1 element uit het domein (maw: verschillende elementen in het domein hebben verschillende beelden)
Met andere woorden: $f(a_1) = f(a_2) => a_1 = a_2$ (gebruik dit om aan te tonen dat een functie al dan niet injectief is)

Beeld van een functie: $f : A \to B$ dan $f(A) = Im(f)$

Surjectiviteit: f is surjectief<=> $Im(f) = B <=> \forall b \in B \exists a \in A: f(a) = b$

Elk element van het codomein heeft MINSTENS 1 origineel(= element uit het domein)

Nagaan of een functie surjectief is: vind het beeld van de functie en kijk of die gelijk is aan het codomein van de functie

Het beeld vinden: los $y = f(x)$ op

- Bij een kwadratische vergelijking: de discriminant moet groter of gelijk zijn aan 0. Bvb
  $2x^2 - x - y = 0$
  $D = 1 - 8y \geq 0$
  $y \geq -\frac{1}{8}$
  Dus $Im(y) = [-\frac{1}{8}, +\infty[$
- Bij een rationale functie: kijk waar y niet mag zijn
  bvb. $y = \frac{2x-3}{x}$
  $<=>\ yx = 2x - 3$
  $<=> x(y-2) + 3 = 0$
  $<=> als\ y \neq 2 => x = \frac{3}{2-y}$
  dus $Im(f) =\ IR\ \setminus \{2\}$

Bijectiviteit: f is zowel injectief als surjectief

Inverse functies: Enkel bijectieve functies hebben een inverse

Inverse vinden: $y = f(x)$ oplossen naar x

Duiventilprincipe: $f: A \to B\ \ met\ |A| = k,\ \ |B| = n$ en $k > n => f\ niet\ injectief$

$|A| = k$ en $|B| = n$

(dubbeltelling, inclusive en exclusie, bewijs per inductie: zie wpos :p)

Herhaling toegestaan, volgorde van belang	$\#f : A \to B = n^k$
Herhaling niet toegestaan, volgorde van belang (#injective functies) (ervan uitgaande dat $k \leq n$)	$\#f : A \to B = \frac{n!}{(n-k)!}$
(#bijectieve functies) ($k = n$)	$\#f : A \to B = n!$
#k-deelverzamelingen van B ($k \leq n$) Herhaling niet toegestaan, volgorde niet van belang.	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$
#herhalingscombinaties van k uit n	$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}$

Herhaling toegestaan?			
Ja		Nee	
Is de volgorde van belang?		Is de volgorde van belang?	
Ja	Nee	Ja	Nee
$\#f : A \to B = n^k$	$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}$	$\#f : A \to B = \frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

WPO 5

Deling: $a \in \mathbb{Z}$, b $\in \mathbb{N}_0$ $\exists!\, q, r \in \mathbb{Z}$: $\quad a = bq + r\ met\ 0 \leq r < b$

Als $r = 0$ dan $b \mid a$ (b is een deler van a, a is deelbaar door b, b deelt a)

Stelling van Bezout: $d = ggd(a,b), \exists k, l \in \mathbb{Z}: d = k * a + l * b$

Een interessante eigenschap van de ggd: $a = bq + r \Rightarrow ggd(a,b) = ggd(b,r)$ $\quad (a > b\ dus\ ook\ b > r)$.

Eucledische algoritme om ggd te berekenen:

$$ggd(a,b)$$

$$a = bq + r \qquad = ggd(b,r)$$

$$b = rq_1 + r_2 \qquad = ggd(r, r_2)$$

.. tot je eventueel een rest nul tegenkomt dan is het antwoord $ggd(laatste\ b, 0)$ en das dan $laatste\ b$

(anders gezegd: eens je een rest 0 tegenkomt, is de vorige rest de ggd)

Hoe vind je bezout lineaire combinatie:

- je begint vanaf de voorlaatste vergelijking waar de rest niet nul is.
- Je lost die op naar de rest

- Je vervangt het getal dat als rest voorkomt in de voorgaande vergelijking met de oplossing van de voorgaande vergelijking naar dat getal

9. ○ Zoek de grootste gemene deler van 721 en 448 en schrijf hem in de vorm $721m + 448n$ met $n, m \in \mathbb{Z}$.

$721 = 1 \times 448 + 273$	$7 = 21 - 14 = 21 - (77 - 3 \times 21)$
$448 = 1 \times 273 + 175$	$= 4 \times 21 - 77 = 4 \times (98 - 77) - 77$
$273 = 1 \times 175 + 98$	$= 4 \times 98 - 5 \times 77 = 4 \times 98 - 5 \times (175 - 98)$
$175 = 1 \times 98 + 77$	$= 9 \times 98 - 5 \times 175 = 9 \times (273 - 175) - 5 \times 175$
$98 = 1 \times 77 + 21$	$= 9 \times 273 - 14 \times 175 = 9 \times 273 - 14 \times (448 - 273)$
$77 = 3 \times 21 + 14$	$= 23 \times 273 - 14 \times 448$
$21 = 1 \times 14 + 7$	$= 23 \times (721 - 448) - 14 \times 448$
$14 = 2 \times 7 + 0$	$= 23 \times 721 - 37 \times 448$

Modulo relaties: $n \in \mathbb{N}_0 \quad a, b \in \mathbb{Z} \quad a \equiv_n b \leftrightarrow n \mid a - b$

$\leftrightarrow$ a en b hebben dezelfde rest bij deling door n

Handige eigenschappen: $a \equiv_n b,\ a' \equiv_n b' => a + a' \equiv_n b + b'$ en $a * a' \equiv_n b * b'$

$(a_n\, a_{n-1} \,..\, a_0)_{10} = a_n * 10^n + a_{n-1} * 10^{n-1} + .. + a_0 \equiv_9 a_n + a_{n-1} + .. + a_0$ (de negenproef)

Testen of som/product correct is: som van cijfers arg1 +/* som van cijfers arg2 $\equiv_9$ som van cijfers van antwoord

Testen of een getal deelbaar is door 11: alterende som van cijfers$\equiv_{11}$ 0

Een getal tot de macht modulo een ander getal berkenen: (bvb. 3^{15} $(mod\ 17)$)

- De macht schrijven in machten van 2
  $15 = 8 + 4 + 2 + 1$
- Schrijf het getal als een product
  $3^{15} = 3^8 * 3^4 * 3^2 * 3$
- Alle machten van drie die je hebt uitrekenen maar telkens modulo 17 (ga naar kleinste getal in absolute waarde)
  (als een macht van 2 niet in voorkomt, rekent het toch uit, anders moet je veel springen en rekenfouten)
  $3 = 3$
  $3^2 = 9 \equiv_{17} - 8$
  $3^4 \equiv_{17} (-8)^2 = 64 \equiv_{17} - 4$
  $3^8 \equiv_{17} (-4)^2 = 16 \equiv_{17} - 1$
- Vul ze in
  $3^{15} = 3^8 * 3^4 * 3^2 * 3 \equiv_{17} (-1) * (-4) * (-8) * 3 = 12 * (-8) \equiv_{17} - 5 * (-8) = 40 \equiv_{17} 6$

Aantonen dat een getal priem is is moeilijk, soms gemakkelijker om het omgekeerde te tonen (zoals oef 15)

WPO 6

Equivalentiekalsses: voor $n = 3$ is E_0 de verzameling gehele getallen die gelijk zijn aan $0 \ mod \ 3$ (dus elke a waarvoor geldt $a \equiv_3 0$)

$E_0 = \{0, 3, -3, 6, -6, 9, -9, \ldots\}$
$E_1 = \{1, -2, 4, 7, -5, -8, 10, ..\}$ (verz. van alle a waarvoor geldt $a \equiv_3 1$)
$E_2 = \{2, 5, -1, 8, -4, 4, -7, ..\}$
$E_3 = E_0, \ E_4 = E_1, E_5 = E_2, \ldots$

$E_i + E_j = \ E_{i+j}$ en $E_i * E_j = E_{i*j}$

Verzamelingen van equivalentieklassen bij $mod \ n$ relatie: $\mathbb{Z}_n = \{E_1, E_2, .. E_{n-1}\}$ (de E's worden weggelaten want minder schrijfwerk)

Inverteerbaarheid: $k \in \mathbb{Z}_n$ is inverteerbaar $\leftrightarrow ggd(k, n) = 1$ (k en n zijn relatief priem)

Wegens Bezout: $\exists l, l' \in \mathbb{Z}: l * k + l' * n = 1$
Als we dit bekijken in de ring van $\mathbb{Z}_n$: $l' * n$ is 0 want n in $\mathbb{Z}_n$ is 0
Dus deze gelijkheid in $\mathbb{Z}_n$ is: $l * k = 1$, m.a.w. l is een inverse van k.
Dus wegens Bezout weten we: als $ggd(k, n) = 1$ dat er dan zeker een inverse bestaat (omgekeerd geldt ook).

Hoe inverteerbare elementen vinden: (bvb voor $\mathbb{Z}_6$)

- Noteer de getallen van 0 tot n-1 (dit zijn de equivalentieklassen)
  $\mathbb{Z}_6 = 0, 1, 2, 3, 4, 5$
- 1 is altijd inverteerbaar(heeft zichzelf als een invers), 0 is nooit inverteerbaar(gelijk met welk getal we vermingvuldigen krijgen we altijd 0 en niet 1)
- Kijk uit de resterende getallen welke van hen relatief priem is met n
  2 is niet relatief priem (ggd(2, 6) = 2), idem voor 3 en 4.
  5 is relatief priem, dus 5 heeft ook een invers
  Dus: 1 en 5 hebben een inverse.
- (extra. Of hier toch :p) hoe inverse berekenen:
  - Bewering: $5^{-1} = 5$
    Er zijn twee inversen: 1 en 5. Het inverse van een inverteerbaar element is uniek. 1 heeft altijd zichzelf als inverse, dus 5 kan 1 niet als inverse hebben, dus moet 5 zichzelf als inverse hebben.

(Het laatste getal van de verzamelingen is altijd inverteerbaar (want gelijk aan -1))

Hoe het inverse van inverteerbare elementen vinden:
je wil het inverse vinden van a in $\mathbb{Z}_n$
We zoeken $k, l \in \mathbb{Z}$ zodat $7 * k + l * 16 = 1$ (we kunnen ze vinden want 7 en 16 zijn zeker relatief priem).

- Bepaal $ggd(n, a)$ met het eucledische algoritme (zie boven) (grootste van de twee delen door kleinste)
  $16 = 2 * 7 + 2$
  $7 = 3 * 2 + 1$
  $2 = 2 * 1 + 0$
- Schrijf 1 als een lineaire combinatie van n en a
  $1 = 7 - 3 * 2 = 7 - 3 * (16 - 2 * 7) = 7 - 3 * 16 + 6 * 7 = 7 * 7 - 3 * 16$
- Het inverse is dan gelijk aan k (herinner $1 = k * a + l * n$)
  k is hier gelijk aan 7, het inverse van 7 in $\mathbb{Z}_{16}$ is dus gelijk aan 7 ($7^{-1} = 7\ in\ \mathbb{Z}_{16}$)

Het RSA algoritme:
kies p, q die priem zijn. Stel $n = pq$ en $b = (p-1)(q-1)$

Kies e die relatief priem is met b, dus $e : ggd(e, b) = 1$
stel $d = e^{-1}\ in\ \mathbb{Z}_b$

m is onze boodschap die we willen ver/ontsleutelen: $m \xrightarrow{versleutelen} m^e\ mod(n) = c \xrightarrow{ontsleutelen} c^d\ mod(n)$

m is ALTIJD positief.

(deze twee operaties zijn elkaars invers)

Hoe een bericht ontcijferen: (bvb. De boodschap is $c = 2$, de publieke sleutel vd ontvanger is $n = 55, e = 7$

- Ontbind n in twee priemfactoren en bereken b.
  $n = 5 * 11,\ b = (5-1) * (11-1) = 4 * 10 = 40$
- Bereken d (herinner: $d = e^{-1}\ in\ \mathbb{Z}_b$)
  $d = 7^{-1}\ in\ \mathbb{Z}_{40}$
  - Ga opzoek naar d (zie methode invese vinden hierboven)
    $40 = 7 * 5 + 5$
    $7 = 5 * 1 + 2$
    $5 = 2 * 2 + 1$
    $2 = 2 * 1 + 0$

    $1 = 5 - 2 * 2 = 5 - 2 * (7 - 5) = 5 - 2 * 7 + 2 * 5$
    $= 3 * 5 - 2 * 7 = 3 * (40 - 7 * 5) - 2 * 7$
    $= 3 * 40 - 15 * 7 - 2 * 7 = 3 * 40 - 17 * 7$
    Dus $d = -17 = 23$ **(zet d om naar een positief getal!)**
- Bereken m (herinner: $m = c^d\ mod\ n$)
  $2^{23} mod\ 55$
  - Reken dat getal uit met de methode van een getal tot macht modulo een ander getal (zie boven)
    $23 = 16 + 4 + 2 + 1$
    $2^{23} = 2^{16+4+2+1} = 2^{16} * 2^4 * 2^2 * 2^1$

    $2 = 2$

$2^2 = 4$
$2^4 = 4^2 = 16$
$2^8 = 16^2 = 256 \equiv_{55} -19\ (4 * 55 = 275\ en\ 275 - 256 = 19)$
$2^{16} = (-19)^2 = 361 \equiv_{55} 31 \equiv_{55} -24$

$$2^{23} mod 55 = 2 * 4 * 16 * (-24) mod\ 55 \equiv_{55} 7 * 16 * 4 \equiv_{55} 9 * 7 = 63 \equiv_{55} 8$$

- (eventueel) test: $m^e\ = c\ mod(n)$
  $8^7 = 2\ mod\ 55$

Chinese reststelling (wordt gebruikt om een stelsel in vss moduli op te lossen)

Hoe zo een stelsel oplossen (bvb oef 55):

- Schrijf het stelsel op
  $n \equiv_{17} 3$
  $n \equiv_{16} 10$
  $n \equiv_{15} 0$
- Bepaal de a's, m's, M's en y's
  $a_1 = 3, a_2 = 10, a_3 = 0$
  $m_1 = 17, m_2 = 16, m_3 = 15$
  $M_1 = m_2 * m_3 = 240\ , M_2 = m_1 * m_3 = 255, M_3 = m_1 * m_2 = 272$
  $y_1 = M_1^{-1}\ in\ \mathbb{Z}_{m1} = 240^{-1}\ in\ \mathbb{Z}_{17} = 70^{-1}\ in\ \mathbb{Z}_{17} = 2^{-1} = 9$
  $y_2 = M_2^{-1} in\ \mathbb{Z}_{m_2} = 255^{-1} in\ \mathbb{Z}_{16} = -1$
  $y_3 = M_3^{-1}\ \ in\ \mathbb{Z}_{m_3} = 272^{-1}\ in\ \mathbb{Z}_{15}$ (overbodig want a_3 is 0 en de term waar y_3 in voorkomt wordt met a_3 vermenigvuldigd (zie hieronder))
- Bepaal n met de formule $n = a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2 + a_3 M_3 y_3 + k m_1 m_2 m_3 \quad (k \in \mathbb{Z})$
  $n = 3 * 240 * 9 + 10 * 255 * (-1) + 4080 * k = 3930 + k * 4080$
- Vind het kleinste natuurlijke getal (indien gevraagd)
  Hier in deze oef: als $k = 0$ dan is 3930 het kleinste natuurlijke getal.

WPO 7

Graad van een top in een graf: aantal bogen dat vertrekt/toekomt in/uit de top.

Het handshake principe: $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2\ |E(G)|$ (de som van de graden van de toppen is gelijk aan twee keer het aantal bogen)
Gevolg: de som van de graden in een graf is altijd even.

Een simpele graf met minstens 2 toppen heeft 2 toppen van dezelfde graad

Hoe nagaan of een graf waarvan de graden van de toppen gegeven zijn bestaat:

- Kijk naar de som van graden
  - Is die oneven? De graf bestaat niet.

- Is die even? Probeer om de graf te tekenen en te redeneren adhv het aantal topppen (zie bvb oef7b en c)
  Als de som van graden even dan wil het zeker NIET zeggen dat de graf bestaat. Alleen die voorwaarde is dus niet voldoende)
  inzichtjes:
  - Als de graf n toppen heeft, dan moet hij minstens 2 toppen hebben met dezelfde graad
  - Als de graf n toppen heeft, dan kan er geen top bestaan met graad n

Hamilton graf: een graf waarin een gesloten pad bestaat dat elk van de toppen van de graf juist 1 keer passeert.
Elke cyclus is een hamilton graf.

Euler graf: een graf waarin een gesloten pad bestaat dat elke boog precies 1 keer passeert.

Een graf zonder geisoleerde toppen is een euler graf ↔ elke top van de graf heeft een even graad en de graf is samenhangend.

Als de som van oneven getallen even is, da heb je even aantal oneven getallen (bvb. 3 + 5 + 7 + 11 = 26 is even. Je telt oneven getallen bij elkaar op en het aantal oneven getallen is 4 en das ook even)

Aantal buren van een top = graad van een top.

Een reguliere graf is een graf waarin elke top dezelfde graad heeft.

Afstand tss twee toppen: lengte van het kortste pad tss de twee toppen.

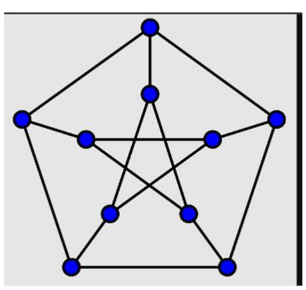
Als er voldoende bogen zijn in de graf, dan is de graf Hamilton (NIET OMGEKEERD)

Als elke top een graad heeft die minstens de helft is van het aantal toppen.

Een graf is NIET hamilton van zodra er een scharnierop is.

Een graf is NIET hamilton als er twee toppen bestaan waarbij de graf in minstens 3 samenhangende componenten uiteenvalt wanneer je die twee toppen wegneemt.

Petersengraf



eigenschappen:

- 3-regulier (graad van elke top is 3)
- Lengte kortste gesloten paden (kortste cycli) is 5
- Heeft 10 toppen

Hoe checken of een graf een eulergraf is:

- Ga na of graf samenhangend is
- Ga na of de graad van elke top even is

Hoe checken of een graf een hamiltongraf is:

- Probeer om een gesloten pad te vinden die alle toppen 1 keer passeert
- Pray to god dat je gok juist is.

Hoe checken dat een graf niet hamilton is:

- Check of er scharnierpunten zijn
- Check of er x toppen zijn die als je die weglaat dat je graf uiteenvalt in minstens x samenhangscomponenten.
- Als je een speciale graf hebt zoals de petersengraf probeer om de graf als een cyclus te tekenen en hem aanvullen met extra bogen en kijk of hij nog voldoet aan de eigenschappen van de originele graf.
- Pray again

Hamiltonpad: een pad dat elke top 1 keer passeert maar niet noodzakelijk gesloten hoeft te zijn

OPMERKING: hamiltonpad =/= hamiltongraf (idem euler)

Boom: bijzonder soort graffen; een samenhangende graf waarin geen gesloten pad bestaat (samenhangende graf zonder cycli)

Bos: een (mogelijk) onsamenhangende graf waarvan elk samenhangscomponent een boom is.

In een boom: $|E(G)| = |V(G)| - 1$

Hoe isomorfisme nagaan:

- Check de graden van de toppen. (isomorfisme bewaart de graden)
- Check de paden tussen de toppen (isomorfisme bewaart de paden/de lengtes)

Isomorfisme: een bijectie tussen de toppenverzamelingen van twee graffen die de volgende eigenschappen heeft: 2 toppen in de domeingraf zijn met elkaar verbonden ↔ overeenkomstige toppen, door de bijectie, met elkaar verbonden zijn in de beeldgraf. (als je de ene graf door een beetje anders te tekenen kan veranderen in de andere graf)

Opspannende boom: als we een samenhangende graf verkleinen tot een deelgraf door bogen uit te gooien totdat we geen bogen meer teveel hebben en dan een boom hebben. “opspannend” wil zeggen dat al onze toppen effectief nog er blijven staan en met elkaar verbonden zijn op een minimale manier.

Hoe een opspannende boom met minimaal gewicht vinden(gierigheidsalgoritme):

- Begin met de boog met het laagste gewicht te kiezen
- Kies de volgende laagste boog als het **niet ervoor zorgt dat een gesloten pad onstaat**
- Recursie

Bipartiete graffen: graffen waarin gesloten paden wel mogen voorkomen, maar dan wel enkel in even lengte.(maw: een bipartiete graf is een graf waarin geen enkel gesloten pad met een oneven lengte voorkomt).

Een bipartiete graf is een graf waarbij de toppen van de graf ingedeeld kunnen worden in 2 groepen(ingekleurd in 2 kleuren) zodanig dat er nooit twee toppen van dezelfde groep(dezelfde kleur) met elkaar verbonden zijn.

Hoe aantonen dat een graf niet bipartiet is:

- Zoeken naar een gesloten pad met een oneven lengte.

Hoe aantonen dat een graf bipartiet is:

- De toppen kleuren

Even paden in een bipartiete graf altijd beginnen en eindigen in toppen met dezelfde kleur.

Een koppeling is een collectie van bogen die aan een voorwaarde voldoen: er mogen geen 2 bogen vasthangen aan dezelfde top.

1 enkele boog is altijd een koppeling.

Maximale koppeling: koppeling waar we geen extra bogen meer aan kunnen toevoegen.

Maximum koppeling: koppeling met grootst aantal mogelijk bogen voor die graf.

Een maximum (idem maximale) koppeling hoeft niet uniek te zijn.

Een volledige koppeling: als elke top van de graf verzadigd is.

Als je een oneven aantal toppen hebt in de graf, dan kan je onmogelijk een volledige koppeling vinden.

Het aantal toppen dat verzadigd is in elke koppeling moet altijd even zijn.

Hoe een maximale koppeling vinden:

- Kies een willekeurige boog uit de graf
- Kan je nog andere bogen kiezen die niet aan de toppen van de vorige boog hangen?
  - Ja? Teken ze en herhaal
  - Nee? Je hebt een maximale koppeling

$(X \cup Y, \sim)$ is een bipartiete graf (X zijn de toppen van de ene kleur, Y zijn de toppen van de andere kleur, ~ is de relatie)
W is een deelverzameling van X

Een toewijzing van W = koppeling die W verzadigt

De stelling van Hall (laat ons vooraf weten of zo een toewijzing bestaat):

Er bestaat een toewijzing van $W \leftrightarrow \forall\, W' \subset W: |H(W')| \geq |W'|$

$H(W')$ is een deelverzameling van de toppen. Het is de verzameling van de buren van de toppen van W'

In een bipartiete graf: als je het aantal bogen uit 1 vd twee verzamelingen ah tellen bent, dan ge je de bogen nooit dubbeltellen, omdat de toppen uit dezelfde verzameling niet met elkaat zijn verbonden.

Een planaire graf is een graf die je zodanig kan tekenen dat er geen kruisende bogen zijn.

Een graf is planair als je de tekening zodanig kunt maken dat er geen kruisende bogen zijn (dus het is niet alleen een graf zonder kruisen, ook een graf die kruisende bogen heeft en die je anders kan tekenen dat er geen kruisen meer zijn is ook een planaire graf)

Hoe boogequivalente graffen bekomen:

- Een top met graad 2 verwijderen en de bogen van die top vervangen door 1 boog
- Een boog verwijderen en vervangen door een top met graad 2 en waaruit 2 bogen vertrekken naar de toppen die verbonden waren met de verwijderde boog.

Boogequivalentie gaat nooit de graad van de bestaande toppen veranderen.

Hoe aantonen dat een graf al dan niet planair is:

- Probeer de graf anders te tekenen zodat er geen kruisende bogen zijn.
- Lukt het niet? Probeer om aan te tonen dat de graf niet planair is:
  - Zoek een deelgraf die boogequivalent is aan k_5 of $k_{3,3}$
    - Voor $k_{3,3}$: kijk of de bekomen graf 6 toppen heeft, bipartiet is (door 1 top te kleuren met een kleur(rood) en de buren met een andere kleur(blauw)), en elke blauwe top verbonden is met alle rode, en elke rode top verbonden is met alle blauwe.
    - Voor k_5: kijk of de bekomen graf 5 toppen heeft waarvan elke top een graad 4 heeft en elke top verbonden is met de resterende 4 toppen.

Homogene tweede orde lineaire recurrentievergelijkingen

$$c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} = 0$$

Kies $a_n = c * r^n$ waarbij $c \neq 0 \; en \; r \neq 0$

Vervang a_n in de vgl, dan krijg je: $c_0 * c * r^n + c_1 * c * r^{n-1} + c_2 * c * r^{n-2} = 0$

Beide leden delen door $c * r^{n-2}$: $c_0 r^2 + c_1 r + c_2 = 0$ (dit is de **karakteristieke vergelijking, afgekort als kvgl)**

We lossen de kvgl op:

je hebt twee wortels:

Bvb: $a_n + a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0$ met $a_0 = 1$ en $a_1 = 2$
kvgl: $r^2 + r - 6 = 0$

$D = 1 - 4 * 1 * (-6) = \; 1 + 24 = 25 = 5^2$

$r_1 = \frac{-1-5}{2} = -3, r_2 = \frac{-1+5}{2} = 2$
dus $a_n = c_1 2^n + c_2(-3)^n$ zijn de oplossingen van deze recurrentievgl ($c_1, c_2 \in \; IR$)

Nu moeten we c_1 en c_2 vinden (adhv de beginvoorwaarden)

$\begin{cases} 1 = a_0 = c_1 * 2^0 + c_2 * (-3)^0 = c_1 + c_2 \\ 2 = a_1 = c_1 2^1 + c_2(-3)^1 = 2c_1 - 3c_2 \end{cases} <=> \begin{cases} c_1 = 1 - c_2 \\ 2 = 2c_1 - 3c_2 \end{cases} <=> \begin{cases} c_1 = 1 - c_2 \\ 2 = 2 - 2c_2 + 3c_2 \end{cases} <=>$

$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \end{cases}$

Dus de oplossing is: $a_n = 2^n$

Je hebt 1 wortel:

Bvb: $a_{n+2} = 4 * a_{n+1} - 4a_n$

Kvgl: $r^2 - 4r + 4 = 0$ $(wortels: r = 2)$

Dus $a_n = c_1 2^n$ is een opl maar ook $a_n = n * 2^n$ is een opl

$a_n = c_1 2^n + n2^n$ is dus de verz van alle oplossingen (je moet nog de beginvoorwaarden enzo gebruiken om de conrete opl te vinden voor de oef maar je weet hoe :p) $(c_1, c_2 \in IR)$

Niet homogene tweede orde lineaire recurrentievgl

Bvb $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = n + 1$

1- Vind de opl van de homogene vgl
   $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$ (zie boven voor de methode)
   $a_n^h = c_1 2^n + n2^n$
2- Vind de particuliere oplossing
   het rechterlid is een veelterm van graad 1, dus $a_n^p = An + B$ (mocht het van de tweede graad zijn, dan was a_n^p gelijk aan $An^2 + Bn + C$)
   We vervangen ons voorstel in de vgl:
   $A(n + 2) + B - 4(A(n + 1) + B) + 4(A * n + B) = n + 1$
   $<=> A * n - 2A + B = n + 1 <=> \begin{cases} A = 1 \\ -2A + B = 1 \end{cases} <=> \begin{cases} A = 1 \\ B = 3 \end{cases}$
   $a_n^p = n + 3$
3- De algemene opl is de som van de homogene en de particuliere
   $a_n = a_n^h + a_n^p = c_1 2^n + n2^n + n + 3$ $(C_1, C_2 \in IR)$
4- Vind de concrete opl met de beginvoorwaarden