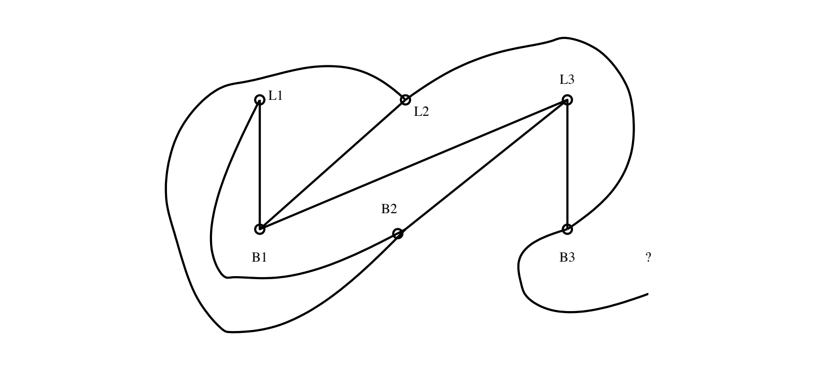
Hoofdstuk 4

Inleiding tot de graffentheorie

Drie professoren willen niet praten met elkaar. Ze moeten regelmatig les geven in drie leslokalen L_1, L_2 en L_3. Is het mogelijk om op de campus wegen te bedenken tussen elk van de drie leslokalen en de drie bureaus B_1, B_2 en B_3 van de proffen zodanig dat die wegen nooit kruisen?

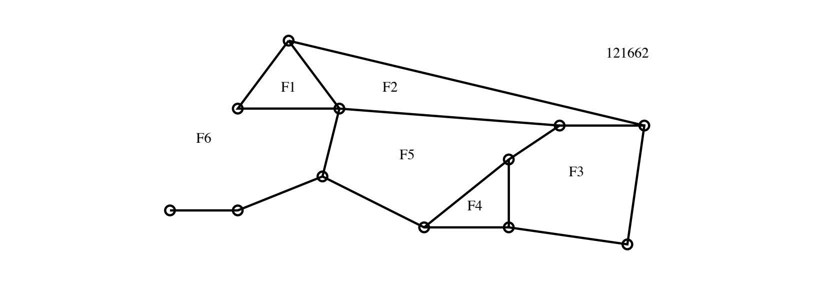


We zien geen mogelijkheid om $B3$ met $L1$ te verbinden. Misschien moeten we harder proberen? Misschien hangt het af van de ligging van de bureaus en de lokalen?

Wiskundig stelt men zich de vraag of de compleet bipartiete graf $K_{3,3}$ in het vlak (of op een blad papier) kan getekend worden zodanig dat twee bogen elkaar nooit snijden.

Definitie.
Een multigraf heet **planair** *indien hij in een vlak kan getekend worden zonder dat twee bogen elkaar snijden.*
Als we een planaire multigraf in het vlak tekenen zodanig dat geen twee bogen snijden, wordt het vlak verdeeld in **gebieden** *(Engels: "faces").*

Er bestaat een verband tussen het aantal toppen, bogen en gebieden van een planaire multigraf. We noteren deze aantallen respectievelijk met v, e en f.



$12 - 16 + 6 = 2$

Stelling. (weeral van Euler)

Voor een samenhangende planaire ongerichte multigraf $\mathcal{G}$ geldt steeds

$$v - e + f = 2.$$

Bewijs. We geven een bewijs per inductie op e, het aantal bogen in $\mathcal{G}$.
Als $e = 1$, dan is de graf ofwel isomorf met het pad P_2 ofwel een lus. In het eerste geval hebben we $v = 2$ en $f = 1$ en in het tweede geldt $v = 1$ en $f = 2$. In beide gevallen is de formule van Euler voldaan.
Onderstel dat de stelling geldt voor alle planaire graffen met $e - 1$ bogen. Er zijn twee gevallen.
$\boxed{1}$ We kunnen uit $\mathcal{G}$ een boog b weglaten zodat $\mathcal{G}' := \mathcal{G} - b$ nog steeds samenhangend is. Dan maakt b deel uit van een cyclus in $\mathcal{G}$. Daarom behoort b tot de rand van twee gebieden. De graf $\mathcal{G}'$ heeft dan $e - 1$ bogen, $f - 1$ gebieden en v toppen. De inductiehypothese geeft $v - (e - 1) + (f - 1) = 2$.
$\boxed{2}$ Er is geen boog die we kunnen weglaten zonder de samenhang te verliezen. Dan is $\mathcal{G}$ een boom. Bijgevolg geldt $f = 1$ en

We komen nu terug naar het probleem van de drie proffen. Is $K_{3,3}$ planair? Indien wel, moet $v - e + f = 2$. We weten dat $v = 6$ en $e = 9$. Dus moet $f = 5$. Maar doordat $K_{3,3}$ compleet bipartiet is, moeten de gebieden cyclussen zijn van lengte 4. Om 5 zulke cycli te maken hebben we in principe 20 bogen nodig, maar in een planaire graf ligt elke boog op de grens van één of twee gebieden. De zuinigste manier om planair 5 vierhoeken te maken is dus met 10 bogen. Maar $K_{3,3}$ heeft er maar 9 en kan dus niet planair zijn. Het professorenprobleem heeft bijgevolg geen oplossing.

Stelling.

Zij $\mathcal{G}$ een samenhangende planaire ongerichte simpele graf met minstens twee bogen. Dan geldt $3f \leqslant 2e$ en $e \leqslant 3v - 6$.

Bewijs. De stelling is duidelijk waar wanneer er maar één gebied is. Onderstel $f > 1$. Vermits de graf simpel is, bestaat de rand van elk gebied uit minstens 3 bogen. Elke boog kan hoogstens twee keer optreden als rand van een gebied zodat

$$2e \geqslant 3f$$

Samen met $v - e + f = 2$ krijgen we $2 \leqslant v - e + \frac{2}{3}e = v - \frac{e}{3}$. $\square$

Gevolg.

Elke samenhangende planaire ongerichte simpele graf $\mathcal{G}$ heeft een top van graad $\leqslant 5$.

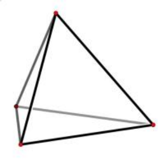
Bewijs. We weten $e \leqslant 3v - 6$. Dus moet

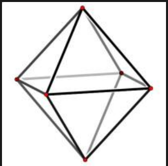
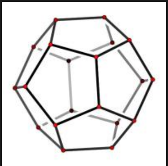
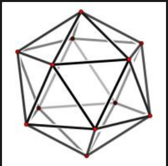
$$\sum_{x \in V(\mathcal{G})} \deg(x) = 2e \leqslant 6v - 12.$$

Mocht elke top x graad $\geqslant 6$ hebben, zou $\sum_{x \in V(\mathcal{G})} \deg(x) \geqslant 6v$, tegenspraak. $\square$

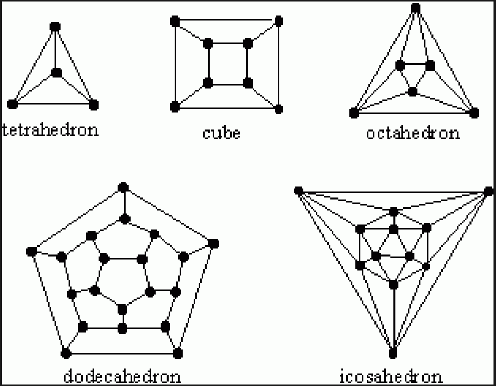
Platonische lichamen

We kennen allemaal de vijf regelmatige veelvlakken die soms ook "platonische lichamen" worden genoemd: de tetraëder, de kubus, de octaëder, de dodecaëder en de icosaëder. Waarom zijn er maar vijf zulke regelmatige veelvlakken?



Bij de platonische lichamen behoort elke ribbe tot juist twee zijvlakken en alle zijvlakken hebben evenveel ribben op hun rand. Bovendien liggen ook alle hoekpunten op eenzelfde aantal ribben. Merk op dat de platonische lichamen aanleiding geven tot planaire graffen gevormd door de hoekpunten en ribben:



We bestuderen nu de planaire graffen waarin elke boog in de rand zit van twee gebieden, elke top graad n heeft en alle gebieden m bogen hebben in hun rand. Het is duidelijk dat we ook $n, m \geqslant 3$ moeten nemen.
Vermits elke boog op twee gebieden ligt, hebben we $2e = mf$.
Vermits elke top graad n heeft en elke boog twee toppen verbindt, geldt ook $2e = nv$. De planariteit impliceert

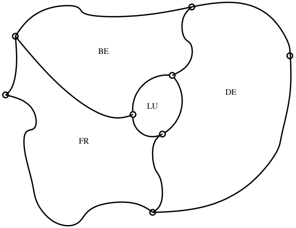
$$0 < 2 = v - e + f = \frac{2e}{n} - e + \frac{2e}{m} = e\left(\frac{2m - nm + 2n}{nm}\right)$$

Vermits zowel e als m en n strikt positief zijn, moet $2m - nm + 2n > 0$ of $nm - 2n - 2m < 0$. Dit is equivalent met $nm - 2m - 2n + 4 < 4$ of $(n-2)(m-2) < 4$. Doordat $m, n \geqslant 3$, zijn zowel $n - 2$ als $m - 2$ positief. Er zijn maar vijf koppels (m, n) die voldoen aan alle voorwaarden. Deze geven aanleiding tot de vijf gekende platonische lichamen.

Kleuren van planaire graffen

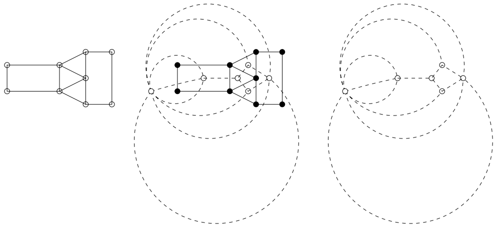
In een atlas worden de landen meestal ingekleurd met verschillende kleuren zodat twee buurlanden nooit dezelfde kleur krijgen. Zo zie je duidelijk de grens tussen twee landen. Hoeveel kleuren heb je hiervoor minstens nodig?

Luxemburg toont dat het antwoord minstens 4 is.



We moeten voor een planaire graf dus bepalen hoeveel kleuren er minstens nodig zijn om de gebieden zó te kleuren dat aangrenzende gebieden nooit dezelfde kleur krijgen. Om dit probleem te vertalen naar een kleuring van toppen in een graf, voeren we het zeer belangrijke begrip *dualiteit* in.

Definitie.
Zij $\mathcal{G}$ een planaire ongerichte mulitgraf. De **duale graf** $\mathcal{G}^*$ *heeft als toppen de gebieden van $\mathcal{G}$ en twee toppen zijn adjacent als en slechts als de overeenkomstige gebieden een boog delen. De figuur hieronder toont een voorbeeld van een graf en zijn duale (in streepjeslijn).*



Opmerking. De duale van een planaire graf is opnieuw een planaire graf.

Het probleem wordt nu: wat is het minimaal aantal kleuren nodig om de toppen van een planaire graf te kleuren zodanig dat adjacente toppen nooit dezelfde kleur hebben?

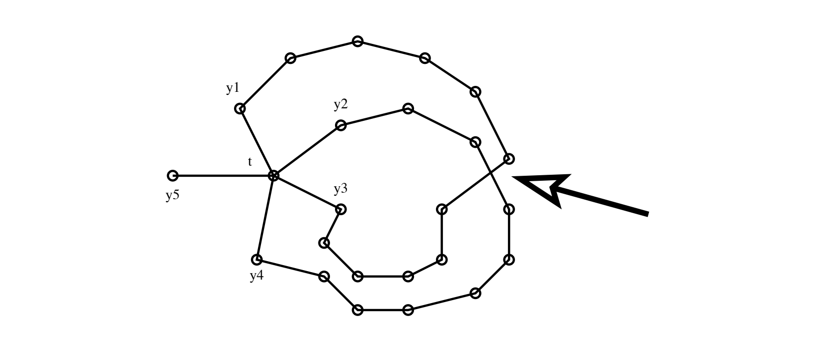
Stelling.
Elke samenhangende planaire ongerichte simpele graf $\mathcal{G}$ kan met 6 kleuren gekleurd worden.

Bewijs. We doen dit bij inductie op v, het aantal toppen van de planaire graf $\mathcal{G}$.
Voor $v = 1$ is het duidelijk in orde.
Onderstel nu dat de stelling geldt voor alle planaire graffen met $v - 1$ toppen. Uit vorig gevolg weten we dat $\mathcal{G}$ een top t heeft met $\deg(t) \leqslant 5$. Als we t weglaten, krijgen we een graf $\mathcal{G}'$ met $v - 1$ toppen. Deze kan dus gekleurd worden met 6 kleuren. Vermits t hoogstens 5 buren heeft (die in $\mathcal{G}'$ elk een kleur krijgen), is er zeker een kleur over voor t. $\square$

Stelling.

Elke samenhangende planaire ongerichte simpele graf $\mathcal{G}$ kan met 5 kleuren gekleurd worden.

Bewijs. Ook per inductie op v, zoals in het vorige bewijs. Dat bewijs kan trouwens alleen maar mis gaan voor vijf kleuren als t echt 5 buren heeft, elk van een andere kleur in de kleuring van $\mathcal{G}'$. We bekijken dit geval van nabij.



Noteer de 5 buren van t met y_1, y_2, y_3, y_4 en y_5, genummerd in wijzerzin. Zij $\mathcal{G}'$ de graf die uit $\mathcal{G}$ ontstaat als je t weglaat, alsook de 5 bogen op t. Als $\mathcal{G}'$ kan gekleurd worden met 5 kleuren waarbij y_1 en y_3 dezelfde kleur hebben, is er een kleur over voor t. Anders moet elke kleuring van $\mathcal{G}'$ met 5 kleuren een pad van y_1 tot y_3 hebben dat alternerend de kleuren van y_1 en y_3 gebruikt.
Op dezelfde manier is er een pad van y_2 naar y_4 dat alleen de kleuren van y_2 en y_4 gebruikt (die verschillend zijn van die van y_1 en y_3). Dus kunnen de twee gevonden paden geen top gemeenschappelijk hebben. Maar door de ligging van y_2 tussen y_1 en y_3, moeten de twee paden kruisen. Dit spreekt de planariteit tegen. $\square$

Lang heeft men als conjectuur gehad dat 4 kleuren voldoende moeten zijn. In 1976 bewezen Appel en Haken met een computer (door eerst "met de hand" het probleem te herleiden tot 1800 gevallen en die dan door de computer te laten oplossen) dat 4 kleuren inderdaad volstaan. Momenteel is hiervoor nog steeds geen bewijs gekend dat niet steunt op computerberekeningen. Sommige wiskundigen zijn hierdoor van mening dat de "4-kleurenstelling" nog niet bewezen is en blijven ze een conjectuur of vermoeden noemen.

Hoofdstuk 5

Genererende functies

Eerste voorbeeld

Een moeder koopt 12 snoepjes en wil die verdelen onder haar drie kinderen: Piet, Andres en Jan. Wèl zó dat Piet er minstens 4 krijgt, Andres en Jan minstens 2 en Jan hoogstens 5.
Noteren we c_P, c_A en c_J voor het aantal snoepjes dat Piet, Andres en Jan respectievelijk krijgen, hebben we $c_P + c_A + c_J = 12$ en $c_P \geqslant 4$, $c_A \geqslant 2$ en $5 \geqslant c_J \geqslant 2$.
We kunnen alle oplossingen opschrijven:

c_P	4	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6	7	7	8
c_A	3	4	5	6	2	3	4	5	2	3	4	2	3	2
c_J	5	4	3	2	5	4	3	2	4	3	2	3	2	2

We hebben dus 12 op alle mogelijke manieren geschreven als som van drie natuurlijke getallen die voldoen aan de voorwaarden. Dit doen we eigenlijk ook als we de distributiviteit toepassen bij het uitwerken van volgend product van veeltermen :

$$(x^4+x^5+x^6+x^7+x^8)(x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)(x^2+x^3+x^4+x^5) \quad (1)$$

De eerste factor komt overeen met het feit dat de toegelaten waarden voor c_P enkel 4, 5, 6, 7 en 8 zijn. De tweede factor ontstaat uit de opmerking dat een oplossing steeds een c_A zal hebben in $\{2, 3, 4, 5, 6\}$.

In het product (1) komt de coëfficiënt van x^{12} overeen met alle mogelijke manieren om x^{12} te bekomen door een term te nemen in elk van de drie factoren. Dus is de oplossing van het vraagstuk ook de coëfficiënt van x^{12} in het product (1) van veeltermen.

Tweede voorbeeld

We hebben grote hoeveelheden knikkers van vier kleuren : rood, groen, wit en zwart. Op hoeveel manieren kan je 24 knikkers kiezen zó dat er een even aantal witte is en minstens 6 zwarte.
We maken een veelterm die een factor heeft voor elke kleur. Op de rode of groene knikkers is er geen beperking : er kunnen geen, 1, 2, . . . , 17 of 18 (niet meer want minstens 6 knikkers zijn zwart) knikkers zijn van die kleur. Dit geeft voor beide kleuren een factor $(1 + x + x^2 + \cdots + x^{18})$. De factor van de witte knikkers bevat enkel even machten : $(1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{18})$. Aangezien er minstens 6 zwarte knikkers zijn, krijgen we een factor $(x^6 + x^7 + \cdots + x^{24})$.
Het antwoord op de vraag is dus gelijk aan de coëfficiënt van x^{24} in het product

$$\left(1+x+x^2+\cdots+x^{18}\right)^2\left(1+x^2+x^4+\cdots+x^{18}\right)\left(x^6+x^7+\cdots+x^{24}\right).$$

Definitie.
Zij $a_0, a_1, a_2, \ldots$ een rij van reële getallen. De **genererende functie** *voor die rij is per definitie*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

Voorbeeld. De genererende functie van de rij $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}, 0, 0, \ldots$ is $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i = (1+x)^n$.

Voorbeeld. We weten zeer goed dat $(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n) = 1-x^{n+1}$, waaruit volgt

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n.$$

Bijgevolg is $\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ een genererende functie voor de rij $\underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1}_{n+1 \text{ keer}}, 0, 0, \ldots$.

Voorbeeld. Ook de rij $1, 1, 1, \ldots$ kunnen we genereren omdat $(1-x)(1+x+x^2+\cdots) = 1$ zodat

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots \tag{2}$$

Als we beide leden afleiden krijgen we

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 0 + 1 + 2x + 3x^2 + \cdots \tag{3}$$

zodat $1/(1-x)^2$ een genererende functie is voor de rij $1, 2, 3, \ldots$
Als we nu beide leden van (3) vermenigvuldigen met x, krijgen we

$$\frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots \tag{4}$$

zodat $x/(1-x)^2$ een genererende functie is voor de rij $0, 1, 2, 3, \ldots$.
Nog eens beide leden van (4) afleiden geeft

$$\frac{1+x}{(1-x)^3} = 1 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots$$

zodat deze functie de rij $1^2, 2^2, 3^2, \ldots$ genereert.
We zien nu ook gemakkelijk dat de rij $0^2, 1^2, 2^2, \ldots$ genereerd wordt door

$$x(1+x)/(1-x)^3 \tag{5}$$

Voorbeeld. Willen we nu de rij $1, 1, 0, 1, 1, 1, \dots$ genereren, starten we met (2) en trekken we gewoon x^2 af. We hebben inderdaad

$$\frac{1}{1-x} - x^2 = 1 + x + x^3 + x^4 + \cdots$$

Analoog genereert $1/(1-x) + 2x^3$ de rij $1, 1, 1, 3, 1, 1, \dots$

Veralgemeende binomiaalcoëfficiënten

Wat is het volgende getal in de rij $0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, ?$
Merk op dat

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 + 0^2 \\ a_1 &= 1 + 1^2 \\ a_2 &= 2 + 2^2 \\ a_3 &= 3 + 3^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

De genererende functie van die rij kunnen we nu gemakkelijk opstellen door (4) en (5) te combineren:

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{2x}{(1-x)^3}$$

Het antwoord is dus de coëfficiënt van x^7 in $2x/(1-x)^3$. Hoe bepalen we die coëfficiënt?

We weten dat voor $n, r \in \mathbb{N}_0$ geldt

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

Definitie.
We stellen nu voor alle niet-nulle natuurlijke getallen n en r

$$\binom{-n}{r} := \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-r+1)}{r!}.$$

Dan geldt

$$\begin{aligned}\binom{-n}{r} &= (-1)^r \, \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{r!} \\ &= (-1)^r \, \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} \\ &= (-1)^r \binom{n+r-1}{r}\end{aligned}$$

We stellen ook $\forall n \in \mathbb{Z}$: $\binom{n}{0} := 1$.

Uit de analyse weet je dat de McLaurin-reeks voor $(1+x)^{-n}$ gelijk is aan

$$1 + (-n)x + \frac{(-n)(-n-1)}{2!}x^2 + \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

zodat

$$(1+x)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r} x^r.$$

Dit is een veralgemening van het binomium van Newton. Nog anders gezegd : $(1+x)^{-n}$ is een genererende functie voor $\binom{-n}{0}, \binom{-n}{1}, \binom{-n}{2}, \ldots$.

Voorbeeld. Bepaal de coëfficiënt van x^5 in $(1-2x)^{-7}$?
Pas het veralgemeend binomium van Newton toe :

$$(1+(-2x))^{-7} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-7}{r} (-2x)^r$$

Dus is de coëfficiënt die we zoeken gelijk aan

$$\binom{-7}{5}(-2)^5 = (-32)(-1)^5\binom{11}{5} = 14784.$$

Voorbeeld. Op hoeveel manieren kunnen we 24 snoepjes verdelen onder 4 kinderen zodat iedereen minstens 3 snoepjes krijgt en hoogstens 8?
De genererende functie is

$$f(x) = (x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8)^4$$

en we zoeken de coëfficiënt van x^{24}. We hebben

$$f(x) = x^{12}(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^4 = x^{12}\left(\frac{1 - x^6}{1 - x}\right)^4$$

zodat we eigenlijk de coëfficiënt van x^{12} in $\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^4$ nodig hebben. Dit is niet moeilijk :

$$\begin{aligned}\left(\frac{1 - x^6}{1 - x}\right)^4 &= (1 - x^6)^4(1 - x)^{-4} \\ &= \left[1 - \binom{4}{1}x^6 + \binom{4}{2}x^{12} - \binom{4}{3}x^{18} + \binom{4}{4}x^{24}\right]\left[\binom{-4}{0} + \binom{-4}{1}(\end{aligned}$$

zodat de coëfficiënt van x^{12} gelijk is aan

$$\binom{15}{12} - \binom{4}{1}\binom{9}{6} + \binom{4}{2} \cdot 1 = 125$$

Partities van natuurlijke getallen

Een bekende waspoederfabrikant wil reclame maken via de televisie. Hij kan bij een bepaalde zender reclamespots kopen van 15, 30 en 60 seconden. Op hoeveel manieren kan hij zendtijd kopen als hij in totaal n minuten reclame wil maken?
Laat ons 15 seconden als tijdseenheid beschouwen. Dan is het antwoord het aantal mogelijke combinaties van natuurlijke getallen a, b en c zodanig dat $a + 2b + 4c = 4n$. De genererende functie die hiermee overeen komt is

$$\begin{aligned} f(x) :=& (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x^4 + x^8 + \cdots) \\ =& \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^4} \end{aligned}$$

Het antwoord vinden we terug als de coëfficiënt van x^{4n} in $f(x)$.
We merken ook op dat dit antwoord het aantal manieren is om het natuurlijk getal $4n$ te schrijven als som van enen, tweeën en vieren.

Definitie.
Een **partitie** *van een niet-nul natuurlijk getal n is een schrijfwijze van n als som van niet-nulle natuurlijke getallen.*

Voorbeeld. $11 = 4 + 3 + 3 + 1$

Opmerking. Een partitie van een eindige verzameling V geeft aanleiding tot een partitie van het natuurlijk getal $|V|$.

Voorbeeld. Op hoeveel manieren kunnen we 6 schrijven als som van niet-nulle natuurlijke getallen?
Dit komt neer op het tellen van de partities van het getal 6. We schrijven ze eens alle neer.

1+1+1+1+1+1	2+2+2
1+1+1+1+2	1+5
1+1+1+3	2+4
1+1+2+2	3+3
1+1+4	6
1+2+3	

Er zijn in totaal dus 11 manieren.

Notatie. We noteren het aantal partities van een natuurlijk getal n met $p(n)$.
Ga zelf na dat $p(1) = 1$, $p(2) = 2$, $p(3) = 3$, $p(4) = 5$ en $p(5) = 7$.
Kunnen we voor $p(n)$ een genererende functie vinden? Het antwoord is JA!

We kunnen bijvoorbeeld $p(10)$ vinden als de coëfficiënt van x^{10} in het product

$$
\begin{aligned}
&(\underbrace{1 + x + x^2 + \cdots}_{\text{voor de enen}})(\underbrace{1 + x^2 + x^4 + \cdots}_{\text{voor de tweeën}}) \cdots (\underbrace{1 + x^{10} + x^{20} + \cdots}_{\text{voor de tienen}}) \\
&= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{1-x^{10}} \\
&= \prod_{i=1}^{10} (1 - x^i)^{-1}
\end{aligned}
$$

Hoeveel partities van 6 hebben alle termen verschillend?
Uit het voorbeeld hoger halen we dat dit aantal 4 is. We schrijven $p_{\neq}(6) = 4$.
In het algemeen hebben we een genererende functie

$$P_{\neq}(x) = (1+x)(1+x^2)\cdots = \prod_{i=1}^{\infty}(1+x^i)$$

Hoeveel partities van 6 gebruiken enkel oneven termen?
We zien weer uit ons voorbeeld dat dit aantal 4 is. We schrijven $p_o(6) = 4$. Dit is juist evenveel als $p_{\neq}(6)$. Is dit toeval?

Stelling.

Voor elk niet-nul natuurlijk getal n geldt $p_{\neq}(n) = p_o(n)$.

Bewijs. De genererende functie voor $p_o(n)$ is

$$\begin{aligned} P_o(x) &= (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + \cdots)\cdots \\ &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \cdots \end{aligned}$$

Merk op dat

$$1 + x = \frac{1-x^2}{1-x}, 1 + x^2 = \frac{1-x^4}{1-x^2}, \ldots$$

zodat

$$\begin{aligned} P_{\neq}(x) &= (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots \\ &= \frac{1-x^2}{1-x} \cdot \frac{1-x^4}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^6}{1-x^3} \cdot \frac{1-x^8}{1-x^4} \cdot \cdots \\ &= P_o(x) \end{aligned}$$

Vermits de genererende functies gelijk zijn, zijn ook de gegenereerde rijen gelijk. $\square$

Gekende genererende functies

Voor elke $n, m \in \mathbb{N}$ en elke $a \in \mathbb{R}$ geldt

- $(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}x^i$;
- $\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{i=0}^{n} x^i$;
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$;
- $$\begin{aligned}
\frac{1}{(1+x)^n} &= \binom{-n}{0} + \binom{-n}{1}x + \binom{-n}{2}x^2 + \cdots \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-n}{i} x^i \\
&= 1 + (-1)\binom{n+1-1}{1}x + (-1)^2\binom{n+2-1}{2}x^2 + \cdots \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{n+i-1}{i} x^i
\end{aligned}$$

-

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)^n} &= \binom{-n}{0} + \binom{-n}{1}(-x) + \binom{-n}{2}(-x)^2 + \cdots \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-n}{i}(-x)^i \\
&= 1 + (-1)\binom{n+1-1}{1}(-x) + (-1)^2\binom{n+2-1}{2}(-x \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i-1}{i} x^i
\end{aligned}
$$