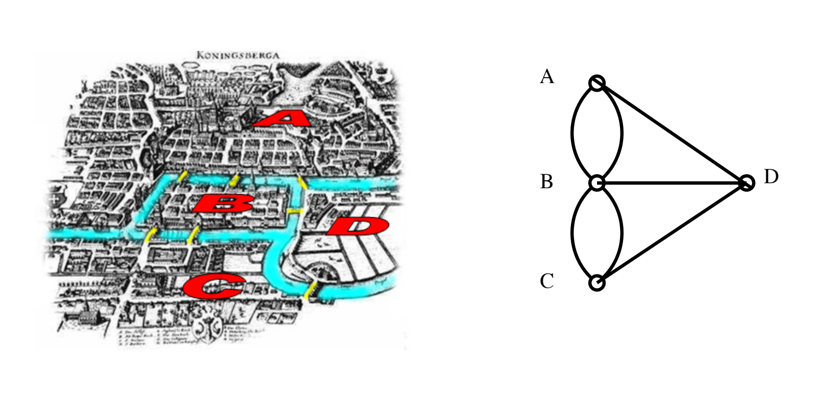
Hoofdstuk 4

Inleiding tot de graffentheorie

Eulerpaden

Graffen werden uitgevonden door Leonhard Euler (1707–1783). Hij leefde op dat moment in Königsberg (nu Kaliningrad, Rusland) in Pruisen. De stad wordt in vier stukken verdeeld door de Pregel-rivier. Er zijn ook zeven bruggen over de rivier om de verschillende stadsgedeelten te verbinden. Op een dag was er een stoet die door de hele stad ging en Euler vroeg zich af of er een wandeling bestond voor de stoet zodanig dat elke brug juist één maal overgestoken werd en bovendien de wandeling terug zou komen naar het startpunt.
Euler stelde het probleem grafisch voor met zeven bogen en vier toppen, welke overeenkomen met de zeven bruggen en de vier stadsgedeelten. Het resultaat is geen graf aangezien er “dubbele” bogen zijn en in een relatie komen de koppels immers hoogstens één keer voor.



Een plattegrond van Königsberg ten tijde van Euler en daarnaast zijn grafische voorstelling.

Definitie.
Een **multigraf** *is een graf $\mathcal{G} = (V, \to)$ uitgebreid door middel van een functie $\mu\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{N}$ die een* **multipliciteit** *toekent aan elke pijl. We interpreteren de functie μ als volgt:*

- *$\mu(u, v) = 0$ betekent u en v niet adjacent zijn;*
- *$\mu(u, v) = k > 0$ betekent dat er k pijlen zijn van u naar v.*

Pijlen die hetzelfde begin- en eindpunt hebben worden **parallel** *genoemd.*

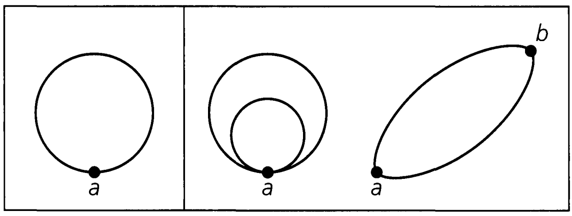
Een multigraf zonder parallelle pijlen is een graf.

Definitie.
Een pad in een ongerichte multigraf $\mathcal{G}$ *heet een* **Eulerpad** *indien het elke boog van* $\mathcal{G}$ *precies één maal bevat. Een gesloten Eulerpad is een* **Eulercyclus**. *Een multigraf die een Eulercyclus bevat heet een* **Eulergraf**.

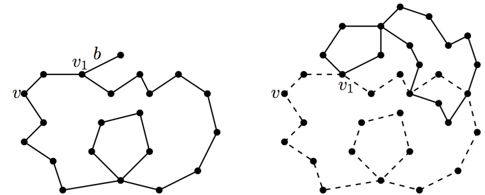
Stelling. (Euler, 1736)
Zij $\mathcal{G}$ een ongerichte multigraf zonder geïsoleerde toppen. Dan geldt dat $\mathcal{G}$ een Eulergraf is **als en slechts als** *$\mathcal{G}$ samenhangend is en alle toppen van $\mathcal{G}$ even graad hebben.*

Bewijs.
$\boxed{\Rightarrow}$ Omdat $\mathcal{G}$ een Eulercyclus heeft, bestaat er $\forall a, b \in V$ een pad van a naar b, namelijk dat deel van de cyclus dat start in a en aankomt in b. Dus $\mathcal{G}$ is samenhangend.
Kies een willekeurige top v in $\mathcal{G}$. Als we de Eulercyclus volgen, passeren we verschillende keren in v. Elke doorgang in v gebruikt twee bogen : één om binnen te komen en één om terug buiten te gaan. Ook doorlopen we elke boog die v bevat juist één keer zodat $\deg(v)$ gelijk is aan tweemaal het aantal keer dat we in v komen, wat een even getal is.

$\boxed{\Leftarrow}$ We moeten een Eulercyclus construeren.
Als het aantal bogen in $\mathcal{G}$ 1 of 2 is, dan ziet $\mathcal{G}$ er als volgt uit:



We gaan nu verder per inductie en onderstellen dat het resultaat waar is wanneer er minder dan n bogen zijn. Wanneer $\mathcal{G}$ n bogen heeft, neem dan v een willekeurige top. Kies een boog die v bevat. Die heeft een ander uiteinde u. Kies nu een boog die u bevat, maar niet de boog die je juist gebruikte om uit v te vertrekken. Blijf zo bogen toevoegen, zonder tweemaal dezelfde te gebruiken. Doordat de graad van elke top even is, kunnen we steeds verder (telkens we in een top binnenkomen, is er nog een ongebruikte boog om buiten te gaan). Doe dit tot we terug in v aankomen, dan hebben we een gesloten pad P gemaakt dat vertrekt en aankomt in v en geen enkele boog tweemaal gebruikt. Als alle bogen van $\mathcal{G}$ tot P behoren, hebben we een Eulercyclus.



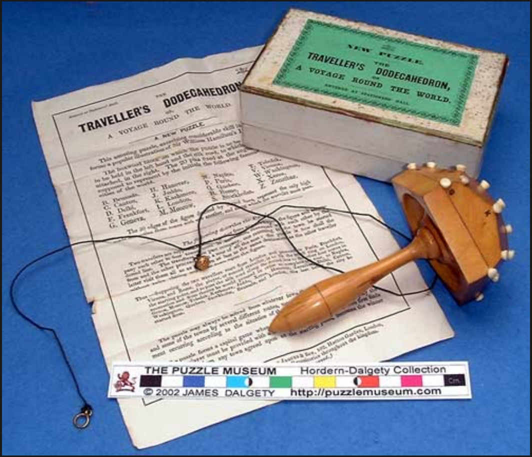
Als er nog bogen zijn die niet tot P behoren, moet er, wegens de samenhang van $\mathcal{G}$, een boog b bestaan die niet tot P behoort maar wel een top v_1 van P bevat. Laten we nu alle bogen van P weg uit de graf $\mathcal{G}$, dan houden we een graf $\mathcal{G}'$ over waarin alle toppen nog steeds even graad hebben (we lieten per top een even aantal bogen weg). Misschien is $\mathcal{G}'$ niet samenhangend, maar dan beschouwen we de samenhangscomponent die v_1 bevat. Deze bevat een Eulercyclus P_1. Hetzelfde geldt voor alle resterende samenhangscomponenten. Zo krijgen we verschillende paden P_i in $\mathcal{G}$ die geen boog gemeenschappelijk hebben met P, maar wel allen een top v_i op P hebben. We kunnen alle paden combineren door in v te beginnen, het pad P te volgen tot in v_1, dan het pad P_1 te nemen tot we weer in v_1 komen, waar we weer het pad P volgen tot in v_2 waar we P_2 volgen, enzovoort. Omdat $\mathcal{G}$ eindig is, stopt het proces en bekomen we een Eulercyclus voor $\mathcal{G}$. $\square$

Gevolg.

Een samenhangende ongerichte multigraf $\mathcal{G}$ heeft een Eulerpad dat niet gesloten is **als en slechts als** $\mathcal{G}$ *juist twee toppen heeft van oneven graad.*

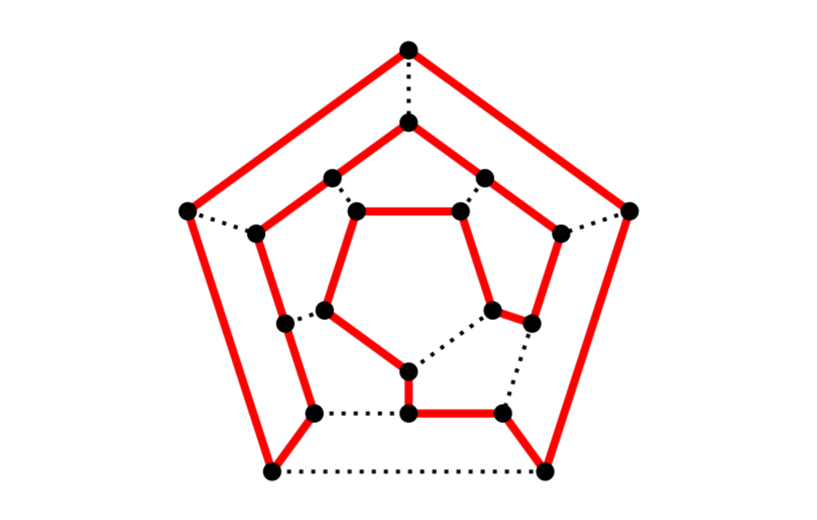
Bewijs. $\boxed{\Rightarrow}$ Zij u en v de begin- en eindtop van het Eulerpad. De eerste boog van het pad geeft een bijdrage 1 tot de graad van u. Telkens het pad weer langs u gaat, neemt de graad met 2 toe. Dus zal de graad van u in het totaal oneven zijn. Analoog zal de graad van v oneven zijn omdat de laatste boog van het pad de graad met 1 laat toenemen. Alle overige toppen hebben duidelijk even graad.
$\boxed{\Leftarrow}$ Zij u en v de twee toppen met oneven graad. Voeg aan $\mathcal{G}$ de boog $\{u, v\}$ toe. Dan heeft elke top even graad en is vorige stelling van toepassing. We krijgen dus een gesloten Eulerpad. Als we hierin de boog $\{u, v\}$ weglaten, hebben we een Eulerpad in $\mathcal{G}$. $\square$

Hamiltonpaden



Hamiltonpaden

Hamiltonpaden



Definitie.
Een simpel pad dat alle toppen van een multigraf $\mathcal{G}$ bevat heet een **Hamiltonpad**. *Een* **Hamiltoncyclus** *is een gesloten Hamiltonpad. Een multigraf die een Hamiltoncyclus bevat heet een* **Hamiltongraf**.

Lemma.
Als je k toppen uit een Hamiltongraf $\mathcal{G}$ weglaat, samen met de aangrenzende bogen, dan valt $\mathcal{G}$ uiteen in hoogstens k samenhangscomponenten.

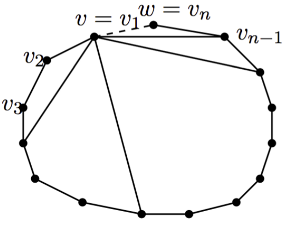
Bewijs. Zij $\mathcal{H}$ een Hamiltoncyclus in $\mathcal{G}$. Noem de graffen die uit $\mathcal{G}$ en $\mathcal{H}$ respectievelijk ontstaan door weglaten van k toppen resp. $\mathcal{G}'$ en $\mathcal{H}'$. Voor $\mathcal{H}$ is de bewering zeker waar omdat $\mathcal{H}$ een cyclus is (en die valt uiteen in hoogstens k componenten). Maar $\mathcal{G}'$ bevat meer bogen dan $\mathcal{H}'$. Dus kan het aantal samenhangscomponenten van $\mathcal{G}'$ niet groter zijn dan dat van $\mathcal{H}'$. $\square$

Stelling.
Zij $\mathcal{G}$ een multigraf waarbij het verwijderen van n toppen leidt tot $m > n$ samenhangscomponenten, dan is $\mathcal{G}$ geen Hamiltongraf.

Stelling. (Dirac, 1952)

Zij $\mathcal{G}$ een ongerichte simpele graf met $n \geqslant 3$ toppen. Als alle toppen van $\mathcal{G}$ minstens graad $\frac{n}{2}$ hebben, dan heeft $\mathcal{G}$ een Hamiltoncyclus.

Bewijs. Uit het ongerijmde.
Als de bewering uit de stelling onwaar is, moet er minstens één tegenvoorbeeld bestaan. Zij $\mathcal{G}'$ zo een tegenvoorbeeld met n toppen. Dus geldt voor elke $v \in V(\mathcal{G}')$ dat $\deg(v) \geqslant \frac{n}{2}$, maar er is geen Hamiltoncyclus. Voeg aan $\mathcal{G}'$ zoveel mogelijk bogen toe (door toppen te verbinden die niet adjacent zijn in $\mathcal{G}'$) zonder een Hamiltoncyclus te vormen. Noem deze graf $\mathcal{G}$. Vermits er geen Hamiltoncyclus is in $\mathcal{G}$, is $\mathcal{G}$ zeker niet de complete graf. Er moeten dus twee toppen v en w bestaan die niet verbonden zijn in $\mathcal{G}$. Vanwege de constructie van $\mathcal{G}$ zou het toevoegen van de boog $\{v, w\}$ een Hamiltoncyclus doen ontstaan. Dus bevat $\mathcal{G}$ een Hamiltonpad $v = v_1 \sim v_2 \sim \cdots \sim v_n = w$.



$v = v_1$
$w = v_n$
v_{n-1}
v_2
v_3
v_1
v_n
v_2
v_3
v_j
v_{j-1}

Bekijk de verzameling $\mathcal{G}_v$ van buren van v. Deze heeft minstens $\frac{n}{2}$ elementen. Dan bekijken we de verzameling van opvolgers van een buur van w op het Hamiltonpad. Dus

$$S' := \{v_{i+1} \mid v_i \in \mathcal{G}_w\}.$$

We hebben zeker $w \in S'$ en stellen daarom $S := S' \setminus \{w\}$. Er geldt dan $|S| \geqslant \frac{n}{2} - 1$. De verzamelingen $\mathcal{G}_v$ en S zijn deelverzamelingen van $\{v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}\}$ vermits v en w niet adjacent zijn.
De duiventil leert ons dat $|S \cap \mathcal{G}_v| \geqslant 1$. Dus bestaat er een top v_j met $v_j \sim v$ en $v_j \in S$, wat betekent dat $w = v_n \sim v_{j-1} \sim v_j$.
Neem nu het pad
$v = v_1 \sim v_j \sim v_{j+1} \sim \cdots \sim v_n \sim v_{j-1} \sim v_{j-2} \sim \cdots \sim v_1$. Dit is een Hamiltoncyclus, tegenspraak. $\square$

Gerichte graffen

Definitie.
Een gerichte (multi)graf heet een **gerichte Eulergraf** *indien er een gesloten gericht pad is dat elke boog juist één keer gebruikt.*

Stelling.
Een samenhangende gerichte (multi)graf $\mathcal{G}$ is een gerichte Eulergraf **als en slechts als** *$\mathcal{G}$ sterk samenhangend en gebalanceerd is.*

Bewijs.
$\boxed{\Rightarrow}$ Als er een Eulercyclus bestaat in $\mathcal{G}$ is het duidelijk dat dat de graf gebalanceerd moet zijn omdat de cyclus in elke top evenveel moet binnenkomen als buitengaan. De Eulercyclus zorgt er ook voor dat er tussen elke twee toppen een gericht pad bestaat.
$\boxed{\Leftarrow}$ Je kan gewoon het ongerichte bewijs van Stelling 1 aanpassen. Doe dit zelf! $\square$

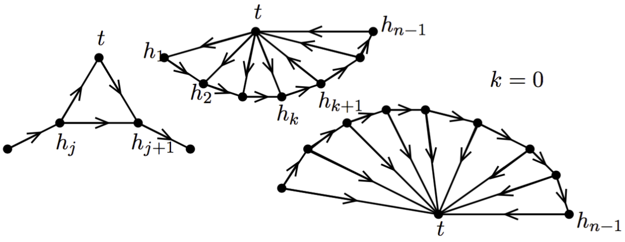
Hamiltoncyclussen in gerichte graffen (dus gerichte cycli die elke top juist één keer bezoeken) zijn wat moeilijker. Hier beperken we ons tot een bijzondere soort gerichte graffen.
Een toernooi (bijvoorbeeld een schaaktoernooi, voetbaltoernooi, ...) kan aan de hand van een gerichte graf gemodelleerd worden. We trekken een pijl van speler (of ploeg) u naar speler v indien u gewonnen heeft van v. Als iedereen tegen iedereen speelt, hebben we dus een complete graf waar elke boog een oriëntatie krijgt.

Definitie.
Een **toernooi** *is een gerichte simpele graf die ontstaat door alle bogen van een complete graf te oriënteren.*

Stelling.

Elk toernooi heeft een gericht Hamiltonpad.

Bewijs. Bij inductie op n, het aantal toppen in het toernooi $\mathcal{T}$. Als $n = 1$ of $n = 2$ is de stelling duidelijk waar. Onderstel nu dat de stelling geldt voor alle toernooien met $n-1$ toppen. Kies een willekeurige top t en stel $\mathcal{T}'$ gelijk aan de graf die ontstaat als je t en alle bogen waartoe t behoort verwijdert uit $\mathcal{T}$. Deze $\mathcal{T}'$ is een toernooi met $n-1$ toppen en heeft dus een Hamiltonpad $h_1 \to h_2 \to \cdots \to h_{n-1}$ wegens de inductiehypothese. Als er nu een $j \in [n-2]$ bestaat met $h_j \to t \to h_{j+1}$, dan is $h_1 \to h_2 \to \cdots \to h_j \to t \to h_{j+1} \to \cdots \to h_{n-1}$ een Hamiltonpad in $\mathcal{T}$. Als er zo geen j bestaat, dan is er zeker een $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ met $\forall j \leqslant k \colon t \to h_j$ en $\forall j > k \colon t \leftarrow h_j$. Maar dan is $t \to h_1$ (indien $k \neq 0$) een boog die een Hamiltonpad $t \to h_1 \to h_2 \to \cdots$ toelaat. In het geval $k = 0$ kunnen we t op het einde toevoegen: $h_1 \to h_2 \to \cdots \to h_{n-1} \to t$. $\square$


t
h_j
h_{j+1}
t
h_1
h_2
h_k
h_{k+1}
h_{n-1}
$k = 0$
t
h_{n-1}

Stelling.

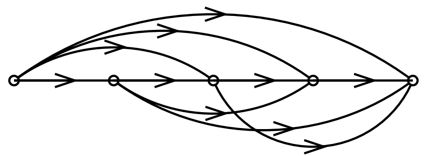
Een toernooi $\mathcal{T}$ heeft een gerichte Hamiltoncyclus **als en slechts als** *$\mathcal{T}$ sterk samenhangend is.*

Bewijs.

$\boxed{\Rightarrow}$ Als $\mathcal{T}$ een Hamiltoncyclus heeft, dan levert deze een gericht pad tussen elke twee toppen.

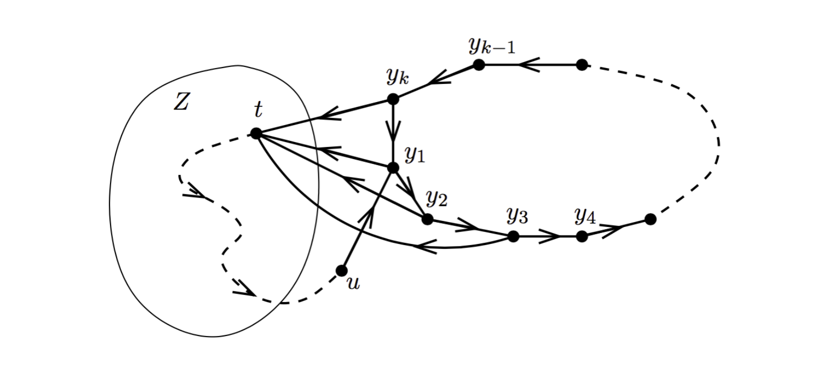
$\boxed{\Leftarrow}$ Onderstel dat $\mathcal{T}$ sterk samenhangend is. We bewijzen eerst dat $\mathcal{T}$ een gerichte cyclus bevat. Dit doen we uit het ongerijmde. Als $\mathcal{T}$ geen cyclus bevat dan geldt

$\forall x, y, z \in \mathcal{T} \colon (x \to y \text{ en } y \to z) \Rightarrow x \to z$. Dan heet $\mathcal{T}$ een **transitief toernooi**. In zulk een toernooi kan je de punten van links naar rechts rangschikken zodat alle pijlen naar rechts wijzen. Zulk toernooi is duidelijk niet sterk samenhangend omdat er geen pad van rechts naar links gaat, tegenspraak.



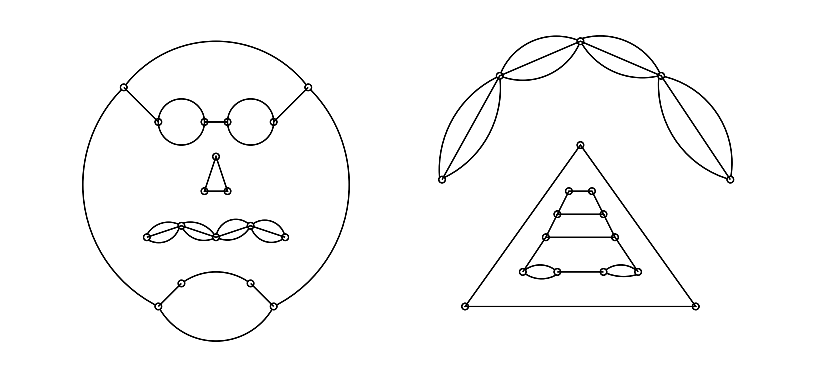
Dus hebben we een cyclus $C = y_1 \to y_2 \to \cdots \to y_k \to y_1$. We veronderstellen dat hij maximale lengte heeft in $\mathcal{T}$ en toch geen Hamiltoncyclus is. Vermits $\mathcal{T}$ sterk samenhangend is, moet er een top t buiten C zijn die verbonden is met een top in C. Zonder de algemeenheid te schaden mogen we ervan uitgaan dat $y_1 \to t$ een pijl is. Als $t \to y_2$, zou $y_1 \to t \to y_2 \to y_3 \to \cdots$ een langere cyclus geven, tegenspraak. Dus moet de boog tussen t en y_2 anders gericht zijn: $y_2 \to t$. Analoog moet $\forall i \in [k]$: $y_i \to t$.

Stel nu even $Z := \{z \in V(\mathcal{T}) \setminus \{y_2\} \mid y_1 \to z\}$. Dan geldt, analoog aan voorgaande redenering, dat $\forall z \in Z \colon \forall i \in [k] \colon y_i \to z$. Maar vermits $\mathcal{T}$ sterk samenhangend is, moet er een pad van t naar y_1 bestaan. Dit pad moet minstens één top u buiten Z bevatten omdat je vanuit Z nooit (rechtstreeks) verbonden bent met y_1. Maar een top buiten Z is, door de definitie van Z en van toernooi, onmiddellijk verbonden met y_1 zodat $t \to \cdots \to u \to y_1 \to y_2 \to \cdots \to y_k \to t$ een cyclus is die langer is (minstens twee toppen meer) dan C. Dit is een tegenspraak.



Definitie.
Zij (V, μ) *en* (W, φ) *twee multigraffen. Een afbeelding* $f : V \longrightarrow W$ *heet een* **morfisme** *indien zij voldoet aan* $\forall (u, v) \in V \times V$ *geldt dat* $\varphi(f(u), f(v)) = \mu(u, v)$.

Definitie.
Twee multigraffen (V, μ) *en* (W, φ) *zijn* **isomorf** *als er een bijectief morfisme* $V \longrightarrow W$ *bestaat. Zulk een morfisme heet dan ook een* **isomorfisme** *tussen* (V, μ) *en* (W, φ).



Voor twee ongerichte simpele graffen $\mathcal{G} = (V, \sim_{\mathcal{G}})$ en $\mathcal{H} = (W, \sim_{\mathcal{H}})$ hebben we dus dat een isomorfisme een bijectie f is tussen de toppenverzamelingen V en W zodanig dat voor elk paar toppen $u, v \in V$ geldt $u \sim_{\mathcal{G}} v \Leftrightarrow f(u) \sim_{\mathcal{H}} f(v)$.

Notatie. Als twee graffen $\mathcal{G}$ en $\mathcal{H}$ isomorf zijn, noteren we $\mathcal{G} \cong \mathcal{H}$.

Bomen en bossen

Stelling.

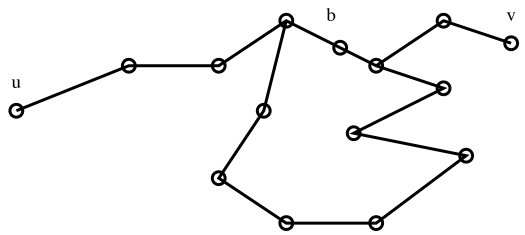
Zij $\mathcal{G}$ een samenhangende simpele graf. Dan zijn volgende twee eigenschappen equivalent

(1) *$\mathcal{G}$ is* **minimaal samenhangend**
(d.w.z. dat als je een boog weglaat, $\mathcal{G}$ niet meer samenhangend is)

(2) *$\mathcal{G}$ heeft geen cyclus*

Bewijs.

$\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ Als $\mathcal{G}$ minimaal samenhangend is en toch een cyclus zou bevatten, dan kan je een boog b van deze cyclus weglaten zonder de samenhang te verliezen. Inderdaad : zij u en v toppen van $\mathcal{G}$. Ofwel was u met v verbonden via een pad dat b niet bevat en dan blijven ze verbonden. Indien het pad wel de boog b bevatte, kunnen we een nieuw pad maken door de rest van de cyclus te volgen, wat tot een tegenspraak leidt.


u
b
v

$\boxed{(2) \Rightarrow (1)}$ Bij contrapositie : $\neg(1) \Rightarrow \neg(2)$.
Onderstel dat $\mathcal{G}$ niet minimaal samenhangend is. Dan is er een boog $b = \{u, v\}$ die we niet nodig hebben voor de samenhang. Dus is er in de graf $\mathcal{G}'$ die ontstaat uit $\mathcal{G}$ door het weglaten van de boog b, een pad van u naar v. Samen met b vormt dit pad een cyclus in $\mathcal{G}$. $\square$

Definitie.
Een samenhangende ongerichte simpele graf zonder cyclus noemen we een **boom**.

Gevolg.

Een samenhangende ongerichte graf is een boom **als en slechts als** *elke twee toppen verbonden zijn door juist één pad.*

Bewijs. $\boxed{\Leftarrow}$ Als er voor elke twee toppen juist één verbinding is, is de graf in kwestie minimaal samenhangend. Inderdaad : als je na het verwijderen van een boog $b = \{u, v\}$ nog een samenhangende graf zou hebben, zou er buiten de boog b nog een pad van u naar v zijn, tegenspraak.

$\boxed{\Rightarrow}$ Zij $\mathcal{H}$ een boom en veronderstel dat er twee paden zijn tussen twee toppen u en v. Neem dan de stukken van die paden die niet samenvallen. Dit zijn cycli, tegenspraak. $\square$

Definitie.
Een top van graad 1 *in een boom heet een* **blad***.*

Lemma.
Een boom op $n \geqslant 2$ *toppen heeft minstens twee bladeren.*

Bewijs. Neem een top t van de boom. Dan zijn er twee mogelijkheden:
$\boxed{t \text{ is geen blad}}$ Wandel dan vanuit t naar een buur, dan nog een buur, enz. zonder ooit een top tweemaal te bezoeken. Omdat de boom eindig is, stopt dit in een zekere top s. Dit moet een blad zijn, want als het proces gestopt zou zijn omdat s meerdere buren zou hebben die reeds eerder bezocht werden, betekent dit dat er meerdere paden van t naar s zijn, tegenspraak.
Om het tweede blad te vinden gebruiken we dat t geen blad is en dus $\deg(t) > 1$ zodat we vanuit t nog een wandeling kunnen maken op zoek naar een ander blad.
$\boxed{t \text{ is een blad}}$ Neem dan de enige buur van t in plaats van t. Deze top heeft graad $\geqslant 2$ tenzij de boom bestaat uit twee toppen die één boog vormen. Maar in dit geval geldt het lemma duidelijk. $\square$

Stelling.

Een boom met n toppen heeft $n-1$ bogen.

Bewijs. Per inductie op n.
Voor $n = 1$ is de stelling duidelijk voldaan.
Onderstel dat de stelling waar is voor n toppen en zij $\mathcal{T}$ een boom met $n+1$ toppen. Het lemma verzekert ons het bestaan van een blad t. Uit $\mathcal{T}$ laten we t samen met de unieke boog op t weg. Dit levert een graf $\mathcal{T}'$ op die een boom is met n toppen en één boog minder dan $\mathcal{T}$. Deze heeft wegens de inductiehypothese $n-1$ bogen. $\square$

Definitie.
Wanneer $\mathcal{G}$ een gerichte graf is, dan wordt $\mathcal{G}$ een **gerichte boom** *genoemd als de ongerichte graf geassocieerd met $\mathcal{G}$ een boom is. Een gerichte boom noemen we een* **gewortelde boom** *als er een unieke top t is waarvoor de ingraad nul is en alle andere toppen ingraad één hebben. We noteren $(\mathcal{G}, t)$.*

We kunnen elke boom wortelen door een top als wortel te kiezen waardoor alle bogen een natuurlijke oriëntatie krijgen weg van die wortel.

Definitie.
Een **bos** *is een ongerichte simpele graf zonder cyclus.*
Een **geworteld bos** *is een bos waarin elke samenhangscomponent geworteld is.*

Opmerking. De samenhangscomponenten van een bos zijn dus bomen.

Eigenschap.

Zij $\mathcal{F}$ een bos met n toppen en k samenhangscomponenten. Dan heeft $\mathcal{F}$ juist $n - k$ bogen.

Bewijs. We hebben k bomen met respectievelijk $n_1, n_2, \ldots, n_k$ toppen. Die hebben dus elk $n_i - 1$ bogen zodat het totaal aantal bogen $n_1 - 1 + n_2 - 1 + \cdots + n_k - 1 = (\sum_{i=1}^{k} n_i) - k = n - k$. $\square$

Het aantal niet-isomorfe bomen tellen op *n* toppen is nogal moeilijk. Het aantal *genummerde bomen* tellen daarentegen is niet zo moeilijk.

Definitie.
Een **genummerde (of gelabelde) boom** *is een boom met als toppenverzameling* $[n]$ *voor* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

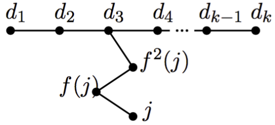
Stelling. (Cayley)
Voor elke $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ is het aantal genummerde bomen met n toppen gelijk aan n^{n-2}.

Bewijs.
Gegeven een boom met n toppen, dan kan je daarin twee (niet noodzakelijk verschillende) toppen als wortel kiezen (we noemen de boom **dubbel geworteld**). Er zijn n^2 manieren om de gegeven boom dubbel te wortelen. Als we t_n gelijk stellen aan het aantal bomen met n toppen, hebben we $n^2 t_n$ dubbel gewortelde bomen op n toppen.
We tonen nu dat het aantal dubbel gewortelde bomen n^n bedraagt. Dit doen we door een bijectie te maken tussen die dubbel gewortelde bomen en de verzameling functies van $[n]$ naar $[n]$.

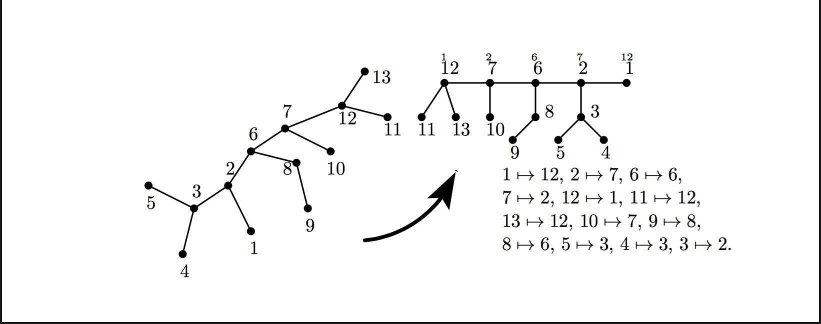
Zij $f\colon [n] \longrightarrow [n]$ een afbeelding en stel

$$C := \{x \in [n] \mid \exists i \in \mathbb{N}_0\colon f^i(x) = x\},$$

welke we de *cyclische punten* van f noemen. We ordenen $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ zó dat $c_1 < c_2 < \cdots < c_k$. Stel nu voor elke $j \in [k]$: $d_j := f(c_j)$. Schrijf nu de getallen d_i naast de toppen van een pad P_k van lengte k. We nemen d_1 als eerste wortel en d_k als tweede. Voor $j \notin C$ maken we bogen $j \sim f(j)$. Dit geeft een dubbel gewortelde genummerde boom. Inderdaad : als we f verschillende keren laten inwerken op $j \notin C$, komen we uiteindelijk in een cyclisch punt terecht. Het pad $d_1 \sim d_2 \sim \cdots \sim d_k$ verzekert de samenhang zonder dat er cyclussen komen omdat deze van cyclische punten zouden komen en we hebben er juist voor gezorgd dat die in de graf geen cyclus vormen.



Omgekeerd : een dubbel gewortelde genummerde boom tekenen we zó dat het pad tussen de twee wortels mooi recht ligt (dit zal overeenkomen met het pad P_k van hierboven). Voor j niet op dat rechte pad, stel je dan $f(j)$ gelijk aan de eerste buur van j op het unieke pad van j naar een top van het rechte pad. Op het rechte pad definiëren we het beeld van de i-de (te beginnen met de kleinste) top als die die op de i-de plaats staat op het rechte pad (te beginnen met de "linkse" wortel die nummer 1 krijgt).



$\square$

Gevolg.

Het aantal gewortelde genummerde bomen op n toppen is n^{n-1}.

Gevolg.

Het aantal gewortelde genummerde bossen op n toppen is $(n+1)^{n-1}$.

Bewijs. Voeg een top toe aan het bos en verbind die met alle wortels van de resp. bomen. Nu hebben we een genummerde boom op $n+1$ toppen.
(Dit gaat ook omgekeerd : vertrek van een genummerde boom met $n+1$ toppen en neem top nummer 1 weg. Alle buren van deze top maak je wortel van de samenhangscomponenten die overblijven. Dus is het aantal gewortelde genummerde bossen juist $(n+1)^{(n+1)-2} = (n+1)^{n-1}$). □