Hoofdstuk 4

# Inleiding tot de graffentheorie

**Definitie.**
*Een multigraf heet* **bipartiet** *indien zijn toppenverzameling kan gepartitioneerd worden in twee delen zodat er geen enkele pijl is die toppen verbindt in hetzelfde deel.*

We kunnen de toppen van de graf kleuren met twee kleuren zodat geen adjacente toppen dezelfde kleur hebben.

**Stelling.**
*Een ongerichte multigraf $\mathcal{G}$ is bipartiet* **als en slechts als** $\mathcal{G}$ *geen cyclus bevat van oneven lengte.*

# Bogen in een bipartiete graf

**Stelling.**

*Zij $\mathcal{G}$ een bipartiete ongerichte graf met $n$ toppen. Dan heeft $\mathcal{G}$ ten hoogste $\frac{n^2}{4}$ bogen als $n$ even is en ten hoogste $\frac{n^2-1}{4}$ als $n$ oneven is.*

*Bewijs.* Kies $\mathcal{G}$ zó dat geen andere bipartiete graf met $n$ toppen meer bogen heeft. Stel $r$ gelijk aan het aantal rode toppen en $b$ het aantal blauwe. Doordat $\mathcal{G}$ maximaal is, is het duidelijk dat elke rode top verbonden is met elke blauwe. Dus heeft $\mathcal{G}$ juist $rb$ bogen. Dit is gelijk aan $r(n-r)$. Zoek nu zelf $r \in [n]$ zodat de functie $f(r) = r(n-r)$ een maximum bereikt. $\square$

Als een graf meer bogen heeft, is hij niet bipartiet en bevat hij dus een cyclus van oneven lengte. Wij bewijzen meer.

**Stelling.**

*Zij $\mathcal{H}$ een ongerichte simpele graf met $2m$ toppen ($m \geqslant 2$) en minstens $m^2+1$ bogen. Dan bevat $\mathcal{H}$ een driehoeksgraf.*

*Bewijs.* Per inductie op $m$.
Voor $m = 2$ krijgen we dat $\mathcal{H}$ een deelgraf is van $K_4$ met minstens 5 bogen. Vorige stelling zegt dat $\mathcal{H}$ niet bipartiet is en dus een cyclus heeft van oneven lengte. Dit moet een driehoek zijn omdat $\mathcal{H}$ maar vier toppen heeft.
Als de stelling waar is voor alle graffen met minder dan $2m$ toppen, nemen we in $\mathcal{H}$ twee adjacente toppen $u$ en $v$. Als $\deg(u)+\deg(v) > 2m$ hebben deze toppen een gemeenschappelijke buur die een driehoek geeft. Als $\deg(u)+\deg(v) \leqslant 2m$, zal het verwijderen van $u$ en $v$, samen met alle bogen waartoe ze behoren, het aantal bogen doen afnemen met ten hoogste $2m-1$. Het resultaat is dus een graf met $2m-2$ toppen en minstens $m^2+1-(2m-1) = m^2-2m+2 = (m-1)^2+1$ bogen. Deze graf bevat wegens de inductiehypothese een driehoek. $\square$

We kunnen zonder teveel moeite het hoogste aantal bogen tellen voor een iets grotere klasse van graffen.
We weten dat een bipartiete graf nooit een driehoeksgraf kan bevatten. Een driehoeksgraf komt voor in elke complete graf $K_r$ voor $r > 2$ zodat een bipartiete graf geen deelgraf $K_r$ kan hebben voor $r > 2$. Er bestaan wel graffen zonder $K_r$ die niet bipartiet zijn (denk aan $C_5$).

**Stelling.** (Turán)

*Zij $\mathcal{G}$ een ongerichte simpele graf met n toppen die geen deelgraf $K_r$ omvat voor een zekere $r \geqslant 2$. Dan is het aantal bogen in $\mathcal{G}$ ten hoogste $(r-2)n^2/(2r-2)$.*

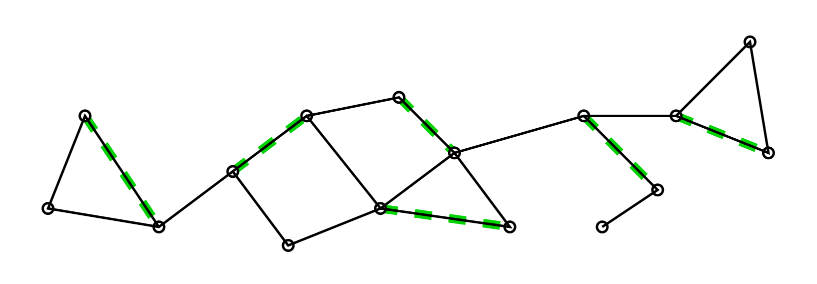
*Bewijs.* Per inductie op $r$.
Voor $r = 2$ is $\mathcal{G}$ een graf zonder bogen. De bovengrens $(r-2)n^2/(2r-2)$ is in dit geval ook gelijk aan nul.
Voor de inductiestap gaan we van $r$ naar $r+1$. We nemen dus een graf $\mathcal{G}$ die geen deelgraf $K_{r+1}$ bevat en $n$ toppen heeft. Stel $\mathcal{H}$ gelijk aan de grootste deelgraf van $\mathcal{G}$ die geen deelgraf $K_r$ heeft. Noteer $x$ voor het aantal toppen in $\mathcal{H}$.
Beschouw een top $v$ van $\mathcal{G}$. Vermits $\mathcal{G}$ geen $K_{r+1}$ omvat, kan er in de buurt $\mathcal{G}_v$ zeker geen $K_r$ voorkomen (samen met $v$ zouden we anders een $K_{r+1}$ hebben). Vermits de grootste deelgraf van $\mathcal{G}$ die geen $K_r$ omvat $x$ toppen heeft, weten we dat $\mathcal{G}_v$ niet meer toppen kan hebben dan $x$. Met andere woorden geldt voor elke top $\deg v \leqslant x$. We beschouwen nu de bogen die niet volledig in $\mathcal{H}$ liggen. Dit zijn dus bogen met minstens één top buiten $\mathcal{H}$. We zullen dit aantal bogen afschatten. Er zijn $n-x$ toppen buiten $\mathcal{H}$ en elk van die toppen heeft graad ten hoogste $x$. Dus kunnen er niet meer bogen zijn dan $(n-x)x$ buiten $\mathcal{H}$.

De inductiehypothese, toegepast op $\mathcal{H}$, geeft dat het aantal bogen binnen $\mathcal{H}$ niet meer is dan $(r-2)x^2/(2r-2)$. In totaal is het aantal bogen in $\mathcal{G}$ dus ten hoogste $((r-2)x^2/(2r-2))+x(n-x)$. Vermits

$$\frac{r-2}{2r-2}x^2+x(n-x)=\frac{r-1}{2r}n^2-\frac{r}{2r-2}\left(x-\frac{(r-1)n}{r}\right)^2\leqslant\frac{r-1}{2r}n^2$$

is de stelling bewezen. $\square$

**Definitie.**
*Een* **koppeling** *(Engels: "matching") in een ongerichte (multi)graf $\mathcal{G}$ is een verzameling van bogen van $\mathcal{G}$ waarin geen twee een top gemeenschappelijk hebben.*



In het algemeen kan je in een gegeven graf vele verschillende koppelingen vinden. Eén enkele boog bijvoorbeeld vormt reeds een koppeling op zich.

**Definitie.**
*Een koppeling heet* **maximaal** *indien we ze niet kunnen uitbreiden tot een koppeling met meer bogen. Een* **maximumkoppeling** *in een ongerichte multigraf $\mathcal{G}$ is een koppeling van maximale grootte. Dit wil zeggen dat er in $\mathcal{G}$ geen koppeling met meer bogen bestaat.*

*Zij $K$ een koppeling in $\mathcal{G}$. Een top van $\mathcal{G}$ heet $K$-***verzadigd** *indien hij bevat is in een boog van $K$. Anders heet hij $K$-onverzadigd. Als het duidelijk is over welke koppeling $K$ het gaat, spreken we gewoon van verzadigd en onverzadigd.*
*Een koppeling die alle toppen van een graf verzadigt wordt een* **volledige koppeling** *genoemd.*

Een volledige koppeling is duidelijk een maximumkoppeling. Ook kan een graf alleen maar een volledige koppeling hebben als zijn aantal toppen even is.

Hoe kunnen we nu koppelingen vinden met zoveel mogelijk bogen in een gegeven ongerichte graf?

Een strategie zou kunnen zijn om een willekeurige boog te nemen, dan een boog te nemen die daar geen top mee gemeenschappelijk heeft, enz. We krijgen zo zeker een koppeling en van zodra we geen nieuwe boog meer kunnen toevoegen, is de koppeling maximaal. Er is echter geen garantie dat de gevonden koppeling een maximumkoppeling is. We hebben dus een betere manier nodig.

**Definitie.**
*Zij* $(V, E)$ *een ongerichte graf met een koppeling* $K$*. Een* $K$-**wisselpad** *is een pad waarvan de opeenvolgende bogen afwisselend wel en niet tot* $K$ *behoren. Een* **vergrotend** $K$-**wisselpad** *is een* $K$*-wisselpad waarvan de eerste en laatste top* $K$*-onverzadigd zijn.*

Elke boog vormt een wisselpad. Een boog waarvan beide toppen onverzadigd zijn vormt een vergrotend wisselpad.

Als we in een graf een koppeling $K$ hebben en een vergrotend $K$-wisselpad $P$, dan kunnen we in $K$ de bogen die op $P$ liggen vervangen door de bogen van $P$ die niet in $K$ zitten. Het resultaat is een koppeling $K'$ die een boog meer heeft dan $K$. Vandaar de naam *vergrotend* wisselpad.

Willen we nu een maximumkoppeling vinden in een ongerichte graf $\mathcal{G}$, dan kunnen we als volgt te werk gaan.
Eerst maken we een maximale koppeling volgens de methode van hierboven. We maken nu uit deze koppeling een koppeling met meer bogen door een vergrotend wisselpad te zoeken en bogen uit te wisselen. Dit kunnen we herhalen tot er geen vergrotend wisselpad meer kan gevonden worden.

Dat we op deze manier een koppeling van maximale grootte bekomen, wordt door volgende stelling van de Deen PETERSEN gegarandeerd. Hoewel PETERSEN zijn stelling reeds in 1891 bewees, geraakte ze in vergetelheid. In 1957 bewees de Fransman BERGE de stelling opnieuw. Daarom wordt deze stelling soms "de stelling van Berge" genoemd.

**Stelling.** (Petersen, 1891)

*Gegeven een ongerichte graf $\mathcal{G}$. Een koppeling $K$ in $\mathcal{G}$ is een maximumkoppeling* **als en slechts als** *er in $\mathcal{G}$ geen vergrotend $K$-wisselpad bestaat.*

*Bewijs.* $\boxed{\Rightarrow}$ Als $K$ een maximumkoppeling is, kan er natuurlijk geen vergrotend $K$-wisselpad bestaan omdat de koppeling anders kan vergroot worden via de hierboven beschreven methode.

$\boxed{\Leftarrow}$ Veronderstel dat $K$ een koppeling is die geen maximumkoppeling is. We moeten tonen dat er een vergrotend $K$-wisselpad bestaat. Omdat $K$ geen maximumkoppeling is, moet er in $\mathcal{G}$ een koppeling $K'$ bestaan die meer bogen heeft dan $K$. Stel nu $E' := K \setminus K' \cup K' \setminus K$, dit zijn de bogen die in $K$ of $K'$ zitten, maar niet in $K \cap K'$. Noteer $\mathcal{H}$ de deelgraf van $\mathcal{G}$ met als bogenverzameling $E'$ en als toppenverzameling de uiteinden van de bogen in $E'$. Omdat $K$ en $K'$ koppelingen zijn, moet elke samenhangscomponent van $\mathcal{H}$ een cyclus of pad zijn waarvan de bogen afwisselend in $K$ en in $K'$ zitten. Componenten met maar één boog kunnen ook voorkomen. Aangezien $K'$ groter is dan $K$, moet er tenminste één component van $\mathcal{H}$ zijn die meer bogen van $K'$ bevat dan van $K$. Deze component is dan een pad waarvan de eerste en laatste top $K$-onverzadigd zijn. Het is dus een vergrotend $K$-wisselpad. $\square$

We hebben nu een manier om na te gaan of een koppeling een maximumkoppeling is en hebben ook gezien dat vergrotende wisselpaden helpen bij het vinden van een maximumkoppeling.

Kunnen we ook iets zeggen over de grootte van een maximumkoppeling in een gegeven graf? Algemene uitspraken zijn hierover moeilijk te doen. Een cyclus van even lengte en een complete graf met een even aantal toppen hebben beide een volledige koppeling.

Voor bipartiete graffen kunnen we echter meer zeggen.

**Definitie.**
*Zij* $\mathcal{G} = (V_1 \cup V_2, E)$ *een bipartiete ongerichte graf. Indien elke top van* $V_1$ *adjacent is met elke top van* $V_2$*, spreekt men van een* **compleet bipartiete graf**. *Als* $|V_1| = m$ *en* $|V_2| = n$ *noteren we zulke graf* $K_{m,n}$.

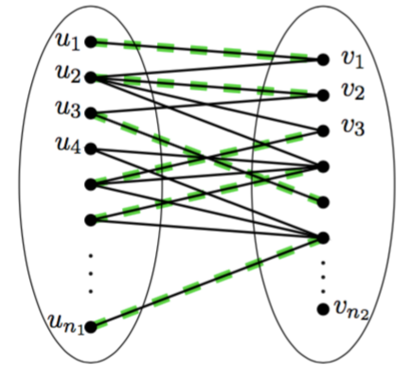
**Opmerking.** De ster $S_n$ is eigenlijk $K_{1,n}$.

# Lessenroosterprobleem

Veronderstel dat we een universiteit hebben met $n_1$ docenten $u_1, u_2, \ldots, u_{n_1}$ en $n_2$ (disjuncte) studierichtingen die we $v_1, v_2, \ldots, v_{n_2}$ noteren. We kunnen een bipartiete graf opstellen met als toppen de docenten en de studierichtingen. Twee toppen $u_i$ en $v_j$ zijn adjacent als en slechts als docent $u_i$ lesgeeft in richting $v_j$. Indien we een lessenrooster willen opstellen zodanig

dat zoveel mogelijk simultaan wordt lesgegeven, kunnen we het probleem formuleren met koppelingen in een bipartiete graf. Elke koppeling komt overeen met een bepaald tijdslot waarin de docenten lesgeven aan een bepaalde groep studenten zodat het probleem herleid wordt tot het bepalen van een maximumkoppeling per tijdslot rekening houdend met de gestelde randvoorwaarden.

# Lessenroosterprobleem




Wanneer elke docent alvast les zou willen geven in het tijdslot $10 - 12$, zouden we dus al zeker een koppeling moet vinden bestaande uit $n_1$ bogen. Het zal duidelijk zijn dat dergelijke voorwaarde niet altijd kan voldaan zijn.

**Definitie.**
*Stel $\mathcal{G} = (V_1 \cup V_2, E)$ bipartiet ongericht en $W \subset V_1$.*
*Een* **toewijzing** *(Engels: "assignment") van $W$ in $V_2$ is een koppeling $K$ tussen toppen van $W$ en $V_2$ die alle toppen van $W$ verzadigt. Als $W'$ de deelverzameling is van $V_2$ die door $K$ verzadigd wordt, is $K$ ook een toewijzing van $W'$ in $V_1$.*

*Een toewijzing is* **maximaal** *als de bijhorende koppeling maximaal is. We spreken van een* **maximumtoewijzing** *(respectievelijk* **volledige toewijzing***) wanneer de bijhorende koppeling een maximumkoppeling (resp. volledige koppeling) is.*

Wij zijn vooral geïnteresseerd in toewijzingen van de volledige verzameling $V_1$ in $V_2$. We kunnen ons afvragen wanneer zulke toewijzing bestaat. Het antwoord wordt gegeven door een stelling van Philip HALL (1904–1982).

We zullen volgende notatie gebruiken: voor $W \subset V_1$ noteren we met $H(W)$ de **verzameling van buren van toppen** van $W$. Dit zijn dus toppen van $V_2$ die verbonden zijn met minstens één top in $W$.

**Stelling.** (P. Hall, 1935)

*Zij $\mathcal{G} = (V_1 \cup V_2, E)$ een bipartiete ongerichte graf. Een toewijzing van $V_1$ in $V_2$ bestaat* **als en slechts als** *voor elke deelverzameling $W$ van $V_1$ geldt dat $|H(W)| \geqslant |W|$.*

*Bewijs.*
Het is duidelijk dat de voorwaarde nodig is. Inderdaad: elke deelverzameling van $V_1$ moet genoeg buren hebben, dit wil zeggen ten minste evenveel elementen als het aantal elementen in de verzameling zelf.
We bewijzen nu dat deze voorwaarde ook voldoende is. Neem dus aan dat de *voorwaarde van Hall* voldaan is (dus $\forall\, W \subset V_1 \colon |H(W)| \geqslant |W|$). We bewijzen per inductie op $|V_1|$ dat er een toewijzing van $V_1$ in $V_2$ bestaat. Als $|V_1| = 1$, dan is $V_1$ een singleton $\{u\}$. De voorwaarde van Hall geeft $|H(\{u\})| \geqslant 1$. De top $u$ heeft dus ten minste één buur in $V_2$. Neem zo een buur en noem hem $v$. De boog $u \sim v$ vormt dan een toewijzing van $V_1$ in $V_2$.

We nemen nu aan dat de stelling waar is voor alle bipartiete graffen met $|V_1| \leqslant k$. We onderscheiden twee gevallen voor een bipartiete graf $\mathcal{G} = (V_1 \cup V_2, E)$ met $|V_1| = k + 1$. Het eerste geval is dat elke echte deelverzameling van $V_1$ meer buren heeft dan de voorwaarde van Hall vereist. Dit is het zogenaamde “niet-kritisch geval”.

$\boxed{\text{Niet-kritisch geval}}$ We hebben dus

$$|H(W)| \geqslant |W| + 1$$

voor elke echte deelverzameling $W$ van $V_1$. Voor een willekeurige top $u \in V_1$ hebben we dus minstens twee buren in $V_2$. Noem één van die buren $v$. We wijzen $v$ alvast toe aan $u$ en bekijken de bipartiete graf $\mathcal{G}'$ die ontstaat wanneer we $u \sim v$ uit $\mathcal{G}$ weglaten. Deze graf heeft $k$ toppen in $V_1$ en elke deelverzameling $W$ van $V_1$ heeft tenminste $|W| + 1$ buren in $V_2$ en bijgevolg tenminste $|W|$ buren in $V_2 \setminus \{v\}$. Voor de graf $\mathcal{G}'$ geldt dus de voorwaarde van Hall zodat we uit de inductiehypothese een toewijzing krijgen van $V_1 \setminus \{u\}$ in $V_2 \setminus \{v\}$. Samen met de boog $u \sim v$ vormt deze een toewijzing van $V_1$ in $V_2$.

$\boxed{\text{Kritisch geval}}$ Nu is er minstens één echte deelverzameling $W'$ van $V_1$ met $|H(W')| = |W'|$. Zulke $W'$ heet een **kritische verzameling**. Voor de deelgraf geïnduceerd op $W' \cup H(W')$ geldt uiteraard de voorwaarde van Hall. Omdat $|W'| \leqslant k$ kunnen we de inductiehypothese toepassen om een toewijzing van $W'$ in $H(W')$ te vinden.

Voor de deelgraf geïnduceerd op $V_1 \setminus W' \cup V_2 \setminus H(W')$ kunnen we de voorwaarde van Hall ook aantonen. Zij $W$ een deelverzameling van $V_1 \setminus W'$. Dan heeft $W' \cup W$ ten minste $|W \cup W'|$ buren in $V_2$ (door de voorwaarde van Hall). Maar vermits precies $|W'|$ van die buren in $H(W')$ liggen, moeten minstens $|W|$ van hen in $V_2 \setminus H(W')$ liggen. Omdat $|V_1 \setminus W'| \leqslant k$ is ook hier de inductiehypothese van toepassing zodat we een toewijzing van $V_1 \setminus W'$ in $V_2 \setminus H(W')$ krijgen die samen met de toewijzing van $W'$ in $H(W')$ uiteindelijk een toewijzing van $V_1$ in $V_2$ oplevert. $\square$

We weten nu wanneer er een (maximum)toewijzing bestaat. Om zulke (maximum)toewijzing te vinden, is deze stelling echter nog niet voldoende. Er bestaan algoritmes om een maximumtoewijzing te vinden. We geven als voorbeeld de *Hongaarse methode* die ook bruikbaar is om een maximumkoppeling te vinden.

**Algoritme voor een maximum toewijzing** (Hongaarse methode). We vertrekken van een (eventueel lege) toewijzing $K$ en proberen die uit te breiden door een vergrotend $K$-wisselpad te maken met volgend algoritme.

Neem een top $w$ van $V_1$ die $K$-onverzadigd is. Bouw een gewortelde **wisselboom** $\mathcal{T}$ met wortel $w$ (dit is een boom zodanig dat elk pad in $\mathcal{T}$ met beginpunt $w$ een wisselpad is) door steeds bogen van $\mathcal{G}$ toe te voegen aan $\mathcal{T}$. Stop met bogen toe te voegen als één van volgende voorwaarden voldaan is:

1. de boom $\mathcal{T}$ heeft een onverzadigd blad $u \in V_2$;
2. alle bladeren van $\mathcal{T}$ zijn verzadigde toppen van $V_1$ en $\mathcal{T}$ kan niet verder uitgebreid worden.

Indien aan 2 is voldaan, herbegin je met een andere onverzadigde top. In het andere geval hebben we een vergrotend $K$-wisselpad $P$ en wordt de toewijzing $K$ vervangen door $K \setminus P \cup P \setminus K$. We kunnen nu het algoritme opnieuw uitvoeren met deze nieuwe toewijzing. Uiteindelijk kunnen we geen wisselpaden meer vinden. We eindigen met een toewijzing $K_H$ waarvan we kunnen bewijzen dat dit een maximumtoewijzing is (cfr. Oefening 36).

We kunnen ons nu ook afvragen of we de grootte van een maximumtoewijzing kunnen bepalen zonder zo een toewijzing daadwerkelijk te construeren. De stelling van KÖNIG zegt dat dit inderdaad mogelijk is. We geven geen bewijs.

**Stelling.** (König)

*Zij* $\mathcal{G} = (V_1 \cup V_2, E)$ *een bipartiete ongerichte graf en stel*

$$t := \max_{W \subset V_1} (|W| - |H(W)|)$$

*Dan is het aantal bogen van een maximumtoewijzing van* $V_1$ *in* $V_2$ *gelijk aan* $|V_1|$ *indien* $t \leqslant 0$ *en aan* $|V_1| - t$ *anders.*

**Definitie.**
*Een* **(toppen)overdekking** *(Engels: "vertex cover") van een ongerichte graf $\mathcal{G}$ is een deelverzameling $U$ van toppen van $\mathcal{G}$ waarbij elke boog van $\mathcal{G}$ minstens één top van $U$ bevat.*
*Een* **minimale overdekking** *is een overdekking die geen echte deelverzameling heeft welke ook een overdekking is. Een* **minimumoverdekking** *is een overdekking waarnaast geen overdekking bestaat met minder toppen.*

Merk op dat voor een bipartiete graf $\mathcal{G} = (V_1 \cup V_2, E)$ zowel $V_1$ als $V_2$ overdekkingen zijn, welke minimaal zijn als $\mathcal{G}$ geen geïsoleerde top heeft. In het algemeen zullen de minimale overdekkingen dus deelverzamelingen hiervan zijn.

Onderstel nu dat we in een (niet noodzakelijk bipartiete) ongerichte graf $\mathcal{G}$ een koppeling $K$ en een overdekking $U$ hebben. Dan moet elke boog van $K$ ten minste één van zijn uiteinden in $U$ hebben. Omdat de bogen van $K$ geen toppen gemeenschappelijk hebben, moeten er tenminste zoveel toppen in $U$ liggen als er bogen zijn in $K$. Dus geldt $|K| \leqslant |U|$ voor elke koppeling $K$ en elke overdekking $U$.
We krijgen dus

$$\max |K| \leqslant \min |U|,$$

waarbij $K$ de verzameling van alle koppelingen van $\mathcal{G}$ doorloopt en $U$ de verzameling van alle overdekkingen.
De vraag is of de gelijkheid geldt. Het antwoord is duidelijk negatief. In een vijfhoek $C_5$ bijvoorbeeld zal een maximumkoppeling bestaan uit 2 bogen, terwijl een minimumoverdekking moet bestaan uit 3 toppen. Voor een bipartiete graf geldt de gelijkheid daarentegen wel.

**Stelling.** (König–Egerváry, 1931)
*Voor een bipartiete ongerichte graf* $\mathcal{G} = (V_1 \cup V_2, E)$ *geldt*

$$\max |K| = \min |U|$$

*waarbij* $K$ *de verzameling van alle koppelingen van* $\mathcal{G}$ *doorloopt en* $U$ *de verzameling van alle overdekkingen van* $\mathcal{G}$*.*

*Bewijs.* We weten al dat $\max |K| \leqslant \min |U|$. Het is dus voldoende om een koppeling $K$ en een overdekking $U$ te vinden met $|K| = |U|$. Voor $K$ nemen we uiteraard een maximumkoppeling $K_{\mathrm{max}}$. Volgens de stelling van König hebben we ofwel

$$|K_{\mathrm{max}}| = |V_1|$$

ofwel

$$|K_{\mathrm{max}}| = |V_1| - \max_{W \subset V_1} (|W| - |H(W)|).$$

In het eerste geval kiezen we $U := V_1$. Dit is een overdekking.

In het andere geval nemen we $W^*$ gelijk aan een deelverzameling van $V_1$ waarvoor het "maximum burentekort" van bovenstaande gelijkheid bereikt wordt. Dan volgt

$$|K_{\max}| = |V_1| - (|W^*| - |H(W^*)|) = |(V_1 \setminus W^*) \cup H(W^*))|.$$

De verzameling

$$U := (V_1 \setminus W^*) \cup H(W^*))$$

heeft het gewenste aantal elementen en is een overdekking. Inderdaad: de verzameling $V_1 \setminus W^*$ overdekt alle bogen met een uiteinde in $V_1 \setminus W^*$ en $H(W^*)$ overdekt alle bogen met een uiteinde in $W^*$. $\square$