VUB

VRIJE
UNIVERSITEIT
BRUSSEL

Discrete Wiskunde

Prof. Dr. Ann Dooms

Discrete mathematics *is the study of mathematical structures that are fundamentally discrete rather than continuous. In contrast to real numbers that have the property of varying "smoothly", the objects studied in discrete mathematics - such as statements in logic, integers and graphs - do not vary smoothly in this way, but have distinct, separated values.*

Wikipedia

Hoofdstuk 1

Inleidende begrippen

Logica

Logica

- **Propositie**: een bewering p die ofwel **waar**, ofwel **onwaar** is

Logica

- **Propositie**: een bewering p die ofwel **waar**, ofwel **onwaar** is
- **Conjunctie**: $p \wedge q$ ("p en q") en **Disjunctie**: $p \vee q$ ("p of q")

Logica

- **Propositie**: een bewering p die ofwel **waar**, ofwel **onwaar** is
- **Conjunctie**: $p \wedge q$ ("p en q") en **Disjunctie**: $p \vee q$ ("p of q")
- **Implicatie**: $p \Rightarrow q$ ("Als p dan q")

Logica

- **Propositie**: een bewering p die ofwel **waar**, ofwel **onwaar** is
- **Conjunctie**: $p \wedge q$ ("p en q") en **Disjunctie**: $p \vee q$ ("p of q")
- **Implicatie**: $p \Rightarrow q$ ("Als p dan q")

  Voorbeeld. "x is deelbaar door $10 \Rightarrow x$ is even"

Logica

- **Propositie**: een bewering p die ofwel **waar**, ofwel **onwaar** is
- **Conjunctie**: $p \wedge q$ ("p en q") en **Disjunctie**: $p \vee q$ ("p of q")
- **Implicatie**: $p \Rightarrow q$ ("Als p dan q")

  Voorbeeld. "x is deelbaar door $10 \Rightarrow x$ is even"
- **Equivalentie**: $p \Leftrightarrow q$ ("p is equivalent met q") betekent $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

Logica

- **Propositie**: een bewering p die ofwel **waar**, ofwel **onwaar** is
- **Conjunctie**: $p \wedge q$ ("p en q") en **Disjunctie**: $p \vee q$ ("p of q")
- **Implicatie**: $p \Rightarrow q$ ("Als p dan q")

  Voorbeeld. "x is deelbaar door $10 \Rightarrow x$ is even"
- **Equivalentie**: $p \Leftrightarrow q$ ("p is equivalent met q") betekent $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

  Voorbeeld. "n^2 even $\Leftrightarrow n$ even"

Logica

- **Propositie**: een bewering p die ofwel **waar**, ofwel **onwaar** is
- **Conjunctie**: $p \wedge q$ ("p en q") en **Disjunctie**: $p \vee q$ ("p of q")
- **Implicatie**: $p \Rightarrow q$ ("Als p dan q")

  Voorbeeld. "x is deelbaar door 10 $\Rightarrow x$ is even"
- **Equivalentie**: $p \Leftrightarrow q$ ("p is equivalent met q") betekent $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

  Voorbeeld. "n^2 even $\Leftrightarrow n$ even"
- **Negatie**: $\neg p$

Logica

- **Propositie**: een bewering p die ofwel **waar**, ofwel **onwaar** is
- **Conjunctie**: $p \wedge q$ ("p en q") en **Disjunctie**: $p \vee q$ ("p of q")
- **Implicatie**: $p \Rightarrow q$ ("Als p dan q")

  Voorbeeld. "x is deelbaar door $10 \Rightarrow x$ is even"

- **Equivalentie**: $p \Leftrightarrow q$ ("p is equivalent met q") betekent $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

  Voorbeeld. "n^2 even $\Leftrightarrow$ n even"

- **Negatie**: $\neg p$

  Voorbeeld. "Het regent niet."

Logica

Opmerking.
De negatie van de implicatie is niet hetzelfde als contrapositie!

Opmerking.
De negatie van de implicatie is niet hetzelfde als contrapositie!

- **Negatie van de implicatie**: $\neg(p \Rightarrow q)$ is equivalent met $p \wedge \neg q$

Opmerking.
De negatie van de implicatie is niet hetzelfde als contrapositie!

- **Negatie van de implicatie**: $\neg(p \Rightarrow q)$ is equivalent met $p \wedge \neg q$
- **Contrapositie van de implicatie**: $p \Rightarrow q$ is equivalent met $\neg q \Rightarrow \neg p$

  Voorbeeld. Om te bewijzen dat "n^2 even $\Rightarrow$ n even" is het gemakkelijker te bewijzen dat "n oneven $\Rightarrow$ n^2 oneven".

Verzamelingen

Verzamelingen laten toe alle (wiskundige) objecten met dezelfde kenmerken te groeperen of te verzamelen.

Verzamelingen

Verzamelingen laten toe alle (wiskundige) objecten met dezelfde kenmerken te groeperen of te verzamelen. Een object uit een gegeven verzameling heet een **element**.

Verzamelingen

Verzamelingen laten toe alle (wiskundige) objecten met dezelfde kenmerken te groeperen of te verzamelen. Een object uit een gegeven verzameling heet een **element**.

Voorbeelden.

- De verzameling **priemgetallen** groepeert alle positieve gehele getallen die juist twee verschillende delers bezitten.

Verzamelingen

Verzamelingen laten toe alle (wiskundige) objecten met dezelfde kenmerken te groeperen of te verzamelen. Een object uit een gegeven verzameling heet een **element**.

Voorbeelden.

- De verzameling **priemgetallen** groepeert alle positieve gehele getallen die juist twee verschillende delers bezitten.
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$: de natuurlijke getallen
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$: de gehele getallen
- $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \land b \neq 0\}$: de rationale getallen
- $\mathbb{R}$: de reële getallen
- $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$: de complexe getallen

Kwantoren

Sommige uitspraken of eigenschappen zijn geldig *voor alle* objecten in een gegeven verzameling. Om dit te noteren gebruiken we de **kwantor** "voor alle": $\forall$.

Voorbeeld. $\forall\, x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$.

Kwantoren

Sommige uitspraken of eigenschappen zijn geldig *voor alle* objecten in een gegeven verzameling. Om dit te noteren gebruiken we de **kwantor** "voor alle": $\forall$.

Voorbeeld. $\forall\, x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0.$

Het dubbelpunt ":" betekent in een logische uitspraak "geldt".

Kwantoren

Sommige uitspraken of eigenschappen zijn geldig *voor alle* objecten in een gegeven verzameling. Om dit te noteren gebruiken we de **kwantor** "voor alle": $\forall$.

Voorbeeld. $\forall\, x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$.

Het dubbelpunt ":" betekent in een logische uitspraak "geldt".

Er is ook een kwantor "er bestaat" indien men wil zeggen dat een eigenschap geldt *voor minstens één* element in een gegeven verzameling.

Voorbeeld. $\exists\, x \in \mathbb{R} : x^2 = x$.

Kwantoren

Sommige uitspraken of eigenschappen zijn geldig *voor alle* objecten in een gegeven verzameling. Om dit te noteren gebruiken we de **kwantor** “voor alle”: $\forall$.

Voorbeeld. $\forall\, x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0.$

Het dubbelpunt “:” betekent in een logische uitspraak “geldt”.

Er is ook een kwantor “er bestaat” indien men wil zeggen dat een eigenschap geldt *voor minstens één* element in een gegeven verzameling.

Voorbeeld. $\exists\, x \in \mathbb{R} : x^2 = x.$

Soms wil men benadrukken dat er *slechts één element* bestaat met de gegeven eigenschap.

Voorbeeld. $\exists!\, x \in \mathbb{R}_0^+ : x^2 = x.$

Kwantoren

De volgorde van kwantoren heeft belang!

Kwantoren

De volgorde van kwantoren heeft belang! Bijvoorbeeld

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \exists\, y \in \mathbb{R}^+ : x^2 = y$$

is waar, terwijl

$$\exists\, y \in \mathbb{R}^+ : \forall\, x \in \mathbb{R} : x^2 = y$$

onwaar is.

Kwantoren

De volgorde van kwantoren heeft belang! Bijvoorbeeld

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \exists\, y \in \mathbb{R}^{+} : x^2 = y$$

is waar, terwijl

$$\exists\, y \in \mathbb{R}^{+} : \forall\, x \in \mathbb{R} : x^2 = y$$

onwaar is.

Negaties van uitspraken zijn zeer belangrijk. Denk bijvoorbeeld aan het bewijs door contrapositie.

Kwantoren

De volgorde van kwantoren heeft belang! Bijvoorbeeld

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \exists\, y \in \mathbb{R}^+ : x^2 = y$$

is waar, terwijl

$$\exists\, y \in \mathbb{R}^+ : \forall\, x \in \mathbb{R} : x^2 = y$$

onwaar is.

Negaties van uitspraken zijn zeer belangrijk. Denk bijvoorbeeld aan het bewijs door contrapositie.

De negatie van $\forall\, x \in X : p(x)$ is $\exists\, x \in X : \neg p(x)$ en de negatie van $\exists\, x \in X : p(x)$ is $\forall\, x \in X : \neg p(x)$.

Deelverzamelingen

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall\, a \in A : a \in B$$

Deelverzamelingen

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall\, a \in A : a \in B$$

Voorbeelden.

- $\{1,2,3\} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{R}^+$

Deelverzamelingen

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall\, a \in A : a \in B$$

Voorbeelden.

- $\{1, 2, 3\} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{R}^+$

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$$

Deelverzamelingen

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall\, a \in A : a \in B$$

Voorbeelden.

- $\{1, 2, 3\} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{R}^+$

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$$

Gevolg: $A \neq B$ indien $(A \not\subset B) \vee (B \not\subset A)$, d.w.z.
$(\exists\, a \in A : a \notin B) \vee (\exists\, b \in B : b \notin A)$.

Deelverzamelingen

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall\, a \in A : a \in B$$

Voorbeelden.

- $\{1,2,3\} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{R}^+$

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$$

Gevolg: $A \neq B$ indien $(A \not\subset B) \vee (B \not\subset A)$, d.w.z. $(\exists\, a \in A : a \notin B) \vee (\exists\, b \in B : b \notin A)$.

De verzameling van alle deelverzamelingen van een gegeven verzameling X noteren we

$$\mathcal{P}(X) = \{S \text{ verzameling } \mid S \subset X\}$$

Bewerkingen met verzamelingen

Bewerkingen met verzamelingen

$$A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\}$$

Bewerkingen met verzamelingen

$$A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\}$$

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

Bewerkingen met verzamelingen

$$A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\}$$

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

$$A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$

Bewerkingen met verzamelingen

$$A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\}$$

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

$$A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$

Voorbeeld. Stel $A = \{1, 2, 3\}$ en $B = \{2, 3, 4, 5\}$. Dan geldt:
$A \cap B = \{2, 3\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \setminus B = \{1\}$ en $B \setminus A = \{4, 5\}$

Bewerkingen met verzamelingen

$$A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\}$$

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

$$A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$

Voorbeeld. Stel $A = \{1, 2, 3\}$ en $B = \{2, 3, 4, 5\}$. Dan geldt:
$A \cap B = \{2, 3\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \setminus B = \{1\}$ en $B \setminus A = \{4, 5\}$

Als $A \subset B$, dan heet $B \setminus A$ het **complement** van A t.o.v. B.

Oneindige unies en doorsneden

Zij $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ een verzameling van verzamelingen **geïndexeerd** door I.

Oneindige unies en doorsneden

Zij $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ een verzameling van verzamelingen **geïndexeerd** door I.

Voorbeeld.
Stel $I = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ en $A_i = \{1, 2, 3, \ldots, i\}$. Dan is $A_3 = \{1, 2, 3\}$, $A_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ enz.
Stel $J = \mathbb{N}_0$, $B_j = [0, \frac{1}{j}]$, een gesloten interval in $\mathbb{R}$. Dan is $B_1 = [0, 1]$, $B_2 = [0, \frac{1}{2}]$ enz.

Oneindige unies en doorsneden

Zij $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ een verzameling van verzamelingen **geïndexeerd** door I.

Voorbeeld.
Stel $I = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ en $A_i = \{1, 2, 3, \ldots, i\}$. Dan is $A_3 = \{1, 2, 3\}$, $A_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ enz.
Stel $J = \mathbb{N}_0$, $B_j = [0, \frac{1}{j}]$, een gesloten interval in $\mathbb{R}$. Dan is $B_1 = [0, 1]$, $B_2 = [0, \frac{1}{2}]$ enz.

De doorsnede van alle verzamelingen geïndexeerd door I definiëren we als

$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall\, i \in I : x \in A_i\}$$

en analoog definiëren we de unie

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists\, i \in I : x \in A_i\}.$$

Cartesisch product

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

De elementen van $A \times B$ heten **koppels**.

Cartesisch product

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

De elementen van $A \times B$ heten **koppels**.

Als $(a, b), (c, d) \in A \times B$ dan geldt
$(a, b) = (c, d) \iff (a = c) \wedge (b = d)$.

Cartesisch product

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

De elementen van $A \times B$ heten **koppels**.

Als $(a, b), (c, d) \in A \times B$ dan geldt
$(a, b) = (c, d) \iff (a = c) \land (b = d)$.

Als $a \neq b$ geldt $(a, b) \neq (b, a)$.

Cartesisch product

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

De elementen van $A \times B$ heten **koppels**.

Als $(a, b), (c, d) \in A \times B$ dan geldt
$(a, b) = (c, d) \iff (a = c) \wedge (b = d)$.

Als $a \neq b$ geldt $(a, b) \neq (b, a)$.

Als A en B eindig zijn geldt $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Cartesisch product

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

De elementen van $A \times B$ heten **koppels**.

Als $(a, b), (c, d) \in A \times B$ dan geldt
$(a, b) = (c, d) \iff (a = c) \wedge (b = d)$.

Als $a \neq b$ geldt $(a, b) \neq (b, a)$.

Als A en B eindig zijn geldt $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Notatie. $A \times A$ noteren we kort A^2. Ook het Cartesisch product $A \times A \times \cdots \times A$ van n keer dezelfde verzameling schrijven we A^n.

Relaties

Een **relatie** van een verzameling A naar een verzameling B is per definitie een deelverzameling $\mathcal{R}$ van het cartesisch product $A \times B$.

Notatie. Als $(a, b) \in \mathcal{R}$, schrijven we $a\mathcal{R}b$.

Relaties

Een **relatie** van een verzameling A naar een verzameling B is per definitie een deelverzameling $\mathcal{R}$ van het cartesisch product $A \times B$.
Notatie. Als $(a, b) \in \mathcal{R}$, schrijven we $a\mathcal{R}b$.

Voorbeeld. Beschouw de verzameling $A = \{1, 2, 3, 4\}$ en de relatie “is kleiner dan of gelijk aan” op A. Dan is:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \{(a, b) \in A \times A \mid a \leq b\} \\ &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\} \end{aligned}$$

Relaties

Een **relatie** van een verzameling A naar een verzameling B is per definitie een deelverzameling $\mathcal{R}$ van het cartesisch product $A \times B$.
Notatie. Als $(a, b) \in \mathcal{R}$, schrijven we $a\mathcal{R}b$.

Voorbeeld. Beschouw de verzameling $A = \{1, 2, 3, 4\}$ en de relatie "is kleiner dan of gelijk aan" op A. Dan is:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \{(a,b) \in A \times A \mid a \leq b\} \\ &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\} \end{aligned}$$

De **inverse relatie** $\mathcal{R}^{-1}$ van $\mathcal{R}$ is per definitie

$$\mathcal{R}^{-1} := \{(b,a) \mid (a,b) \in \mathcal{R}\}.$$

Dit is een relatie van B naar A.

Functies

Een **functie** van A naar B is een relatie van A naar B waarbij elk element van A **precies één keer** voorkomt als eerste component van een koppel in de relatie.

Functies

Een **functie** van A naar B is een relatie van A naar B waarbij elk element van A **precies één keer** voorkomt als eerste component van een koppel in de relatie.

De verzameling A heet het **domein** van de functie en B is het **codomein**.

Functies

Een **functie** van A naar B is een relatie van A naar B waarbij elk element van A **precies één keer** voorkomt als eerste component van een koppel in de relatie.

De verzameling A heet het **domein** van de functie en B is het **codomein**.

Als $f \subset A \times B$ een functie is, noteren we $f : A \longrightarrow B$.

Functies

Een **functie** van A naar B is een relatie van A naar B waarbij elk element van A **precies één keer** voorkomt als eerste component van een koppel in de relatie.

De verzameling A heet het **domein** van de functie en B is het **codomein**.

Als $f \subset A \times B$ een functie is, noteren we $f : A \longrightarrow B$.

Voorbeeld. Als $A = \{1, 2, 3\}$ en $B = \{a, b, c, d\}$, dan is $f = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$ een functie en $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, b), (2, a), (3, d)\}$ is een relatie, maar geen functie.

Functies

Zij $f : A \longrightarrow B$ een functie. Indien $(a, b) \in f$ noteren we $f(a) = b$. Het element $b \in B$ heet **beeld** van a door f en a heet een **origineel** van b voor f.

Functies

Zij $f : A \longrightarrow B$ een functie. Indien $(a, b) \in f$ noteren we $f(a) = b$. Het element $b \in B$ heet **beeld** van a door f en a heet een **origineel** van b voor f.
Voor vele functies bestaat er een **functievoorschrift**. We noteren dan:

$$f : A \longrightarrow B : a \longmapsto f(a)$$

waarbij $f(a)$ het functievoorschrift voorstelt.

Functies

Zij $f : A \longrightarrow B$ een functie. Indien $(a, b) \in f$ noteren we $f(a) = b$. Het element $b \in B$ heet **beeld** van a door f en a heet een **origineel** van b voor f.
Voor vele functies bestaat er een **functievoorschrift**. We noteren dan:

$$f : A \longrightarrow B : a \longmapsto f(a)$$

waarbij $f(a)$ het functievoorschrift voorstelt.

Voorbeelden.

- $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\colon x \longmapsto x^2 + 5$
- $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\colon x \longmapsto \begin{cases} 5x & \text{als} \quad x \geq 0 \\ -2x & \text{als} \quad x < 0 \end{cases}$

Beeld

Voor een functie $f : A \longrightarrow B$ en $S \subset A$ definiëren we het **beeld van** S door f als

$$\begin{aligned} f(S) &:= \{f(s) \mid s \in S\} \\ &:= \{b \in B \mid \exists\, s \in S, f(s) = b\} \end{aligned}$$

Beeld

Voor een functie $f : A \longrightarrow B$ en $S \subset A$ definiëren we het **beeld van** S door f als

$$\begin{aligned} f(S) &:= \{f(s) \mid s \in S\} \\ &:= \{b \in B \mid \exists\, s \in S, f(s) = b\} \end{aligned}$$

Dus geldt zeker $f(S) \subset B$.

Beeld

Voor een functie $f : A \longrightarrow B$ en $S \subset A$ definiëren we het **beeld van** S door f als

$$\begin{aligned} f(S) &:= \{f(s) \mid s \in S\} \\ &:= \{b \in B \mid \exists\, s \in S, f(s) = b\} \end{aligned}$$

Dus geldt zeker $f(S) \subset B$.

De verzameling $f(A)$, het beeld van het hele domein van f, noemen we het **beeld van** f en noteren we ook als $\operatorname{Im} f$.

Beeld

Voor een functie $f : A \longrightarrow B$ en $S \subset A$ definiëren we het **beeld van** S door f als

$$\begin{aligned} f(S) &:= \{f(s) \mid s \in S\} \\ &:= \{b \in B \mid \exists\, s \in S, f(s) = b\} \end{aligned}$$

Dus geldt zeker $f(S) \subset B$.

De verzameling $f(A)$, het beeld van het hele domein van f, noemen we het **beeld van** f en noteren we ook als $\operatorname{Im} f$.

Voorbeeld. Zij $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$. Dan is $f([-1, 2]) = [0, 4]$ en $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^+$. Uit dit voorbeeld leren we dat $\operatorname{Im} f$ dus in het algemeen niet gelijk is aan het codomein van f. Verwar dus niet beeld en codomein!

Invers beeld

Nog steeds voor $f : A \longrightarrow B$ maar nu $T \subset B$, definiëren we het **invers beeld** van T onder f als

$$f^{-1}(T) := \{a \in A \mid f(a) \in T\}.$$

Invers beeld

Nog steeds voor $f : A \longrightarrow B$ maar nu $T \subset B$, definiëren we het **invers beeld** van T onder f als

$$f^{-1}(T) := \{a \in A \mid f(a) \in T\}.$$

Merk op dat $f^{-1}(T)$ een notatie is en niet impliceert dat er voor f een inverse functie bestaat.

Invers beeld

Nog steeds voor $f : A \longrightarrow B$ maar nu $T \subset B$, definiëren we het **invers beeld** van T onder f als

$$f^{-1}(T) := \{a \in A \mid f(a) \in T\}.$$

Merk op dat $f^{-1}(T)$ een notatie is en niet impliceert dat er voor f een inverse functie bestaat.

Als T een **singleton** $\{b\}$ is, schrijven we $f^{-1}(b)$ i.p.v. $f^{-1}(\{b\})$.

Invers beeld

Nog steeds voor $f : A \longrightarrow B$ maar nu $T \subset B$, definiëren we het **invers beeld** van T onder f als

$$f^{-1}(T) := \{a \in A \mid f(a) \in T\}.$$

Merk op dat $f^{-1}(T)$ een notatie is en niet impliceert dat er voor f een inverse functie bestaat.

Als T een **singleton** $\{b\}$ is, schrijven we $f^{-1}(b)$ i.p.v. $f^{-1}(\{b\})$.

Voorbeeld. Met f zoals in het vorige voorbeeld hebben we:
$f^{-1}(4) = \{-2, 2\}$, $f^{-1}(-1) = \emptyset$ en
$f^{-1}(f([0, 1])) = f^{-1}([0, 1]) = [-1, 1]$.

Invers beeld

Er geldt $\forall\, S \subset A : S \subset f^{-1}(f(S))$.

Invers beeld

Er geldt $\forall\, S \subset A : S \subset f^{-1}(f(S))$.
Bewijs. Zij $f : A \longrightarrow B$ een functie en $S \subset A$.

Invers beeld

Er geldt $\forall\, S \subset A : S \subset f^{-1}(f(S))$.

Bewijs. Zij $f : A \longrightarrow B$ een functie en $S \subset A$. We moeten bewijzen:

$$\forall\, s \in S : s \in f^{-1}(f(S)).$$

Invers beeld

Er geldt $\forall\, S \subset A : S \subset f^{-1}(f(S))$.

Bewijs. Zij $f : A \longrightarrow B$ een functie en $S \subset A$. We moeten bewijzen:

$$\forall\, s \in S : s \in f^{-1}(f(S)).$$

Dit is equivalent met

$$\forall\, s \in S : f(s) \in f(S) = \{f(t) \mid t \in S\},$$

wat duidelijk voldaan is. $\square$

Geïnduceerde functie, restrictie en corestrictie

Wanneer een functie $f\colon A \longrightarrow B$ gegeven is, kan je gemakkelijk een functie van $A \times A$ naar $B \times B$ definiëren: we beelden (a, a') gewoon af op $(f(a), f(a'))$.

Geïnduceerde functie, restrictie en corestrictie

Wanneer een functie $f\colon A \longrightarrow B$ gegeven is, kan je gemakkelijk een functie van $A \times A$ naar $B \times B$ definiëren: we beelden (a, a') gewoon af op $(f(a), f(a'))$.

Wanneer we de functie $f\colon A \longrightarrow B$ bekijken op een deelverzameling X van A, spreken we van de **restrictie** of **beperking** van f tot X. We noteren deze functie met $f|_X$. Er geldt dus

$$f|_X\colon X \longrightarrow B\colon x \longmapsto f(x)$$

Geïnduceerde functie, restrictie en corestrictie

Wanneer een functie $f\colon A \longrightarrow B$ gegeven is, kan je gemakkelijk een functie van $A \times A$ naar $B \times B$ definiëren: we beelden (a, a') gewoon af op $(f(a), f(a'))$.

Wanneer we de functie $f\colon A \longrightarrow B$ bekijken op een deelverzameling X van A, spreken we van de **restrictie** of **beperking** van f tot X. We noteren deze functie met $f|_X$. Er geldt dus

$$f|_X\colon X \longrightarrow B\colon x \longmapsto f(x)$$

We kunnen ook het codomein van de functie f beperken. Zij $Y \subset B$ zó dat $\forall\, a \in A\colon f(a) \in Y$. Dan is de **corestrictie** van f tot Y de functie

$$f|^Y\colon A \longrightarrow Y\colon x \longmapsto f(x)$$

Injecties en surjecties

Definitie.
Een functie $f : A \longrightarrow B$ *heet* **injectief** *indien elk element van* B *hoogstens één keer voorkomt als tweede component van een koppel in* f.

Injecties en surjecties

Definitie.
Een functie $f : A \longrightarrow B$ *heet* **injectief** *indien elk element van* B *hoogstens één keer voorkomt als tweede component van een koppel in* f.

Voorbeeld. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ is *niet* injectief. Immers $1^2 = (-1)^2$ maar $1 \neq -1$. Anderzijds is $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ *wel* injectief want $a^2 = b^2 \iff a = \pm b$, maar aangezien $a, b \in \mathbb{R}^+$, geldt $a = b$.

Injecties en surjecties

Definitie.
Een functie $f : A \longrightarrow B$ heet **injectief** *indien elk element van B hoogstens één keer voorkomt als tweede component van een koppel in f.*

Voorbeeld. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ is *niet* injectief. Immers $1^2 = (-1)^2$ maar $1 \neq -1$. Anderzijds is $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ *wel* injectief want $a^2 = b^2 \iff a = \pm b$, maar aangezien $a, b \in \mathbb{R}^+$, geldt $a = b$.

Definitie.
Een functie $f : A \longrightarrow B$ is **surjectief** *indien* $\operatorname{Im} f = B$.

Injecties en surjecties

Definitie.
Een functie $f : A \longrightarrow B$ *heet* **injectief** *indien elk element van* B *hoogstens één keer voorkomt als tweede component van een koppel in* f.

Voorbeeld. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ is *niet* injectief. Immers $1^2 = (-1)^2$ maar $1 \neq -1$. Anderzijds is $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ *wel* injectief want $a^2 = b^2 \iff a = \pm b$, maar aangezien $a, b \in \mathbb{R}^+$, geldt $a = b$.

Definitie.
Een functie $f : A \longrightarrow B$ *is* **surjectief** *indien* $\operatorname{Im} f = B$.

Voorbeeld. $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^2$ is *niet* surjectief. De corestrictie $g|^{\mathbb{R}^+}$ is dat wel.

Bijecties

Een functie die tegelijk surjectief en injectief is, heet **bijectief**.

Bijecties

Een functie die tegelijk surjectief en injectief is, heet **bijectief**.
Een functie is bijectief $\iff \forall\, b \in B : \exists!\, a \in A : f(a) = b$.

Bijecties

Een functie die tegelijk surjectief en injectief is, heet **bijectief**.
Een functie is bijectief $\iff \forall\, b \in B : \exists!\, a \in A : f(a) = b$.

Voorbeeld. $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ : x \longmapsto x^2$ is bijectief.

Bijecties

Een functie die tegelijk surjectief en injectief is, heet **bijectief**.
Een functie is bijectief $\iff \forall\, b \in B : \exists!\, a \in A : f(a) = b$.

Voorbeeld. $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ : x \longmapsto x^2$ is bijectief.

Een bijectie van een verzameling naar zichzelf heet een **permutatie**.

Bijecties

Een functie die tegelijk surjectief en injectief is, heet **bijectief**.
Een functie is bijectief $\iff \forall\, b \in B : \exists!\, a \in A : f(a) = b$.

Voorbeeld. $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ : x \longmapsto x^2$ is bijectief.

Een bijectie van een verzameling naar zichzelf heet een **permutatie**.

De **identieke permutatie** of de **identiteit** beeldt elk element af op zichzelf. We noteren de identieke permutatie van een verzameling X als 1_X. Er geldt dus $\forall\, x \in X : 1_X(x) = x$ of

$$1_X : X \longrightarrow X : x \longmapsto x$$

Samenstelling van functies

Beschouw twee functies $f : A \longrightarrow B$ en $g : B \longrightarrow C$, waarbij het domein van g het codomein van f is. Dan kunnen we op elk beeld $f(a)$ de functie g toepassen. Zo definiëren we een nieuwe functie van A naar C die we $g \circ f$ noteren (lees "g na f" omdat we eerst f toepassen en dan g). Dus:

$$g \circ f : A \longrightarrow C : a \mapsto g(f(a)).$$

Samenstelling van functies

Beschouw twee functies $f : A \longrightarrow B$ en $g : B \longrightarrow C$, waarbij het domein van g het codomein van f is. Dan kunnen we op elk beeld $f(a)$ de functie g toepassen. Zo definiëren we een nieuwe functie van A naar C die we $g \circ f$ noteren (lees "g na f" omdat we eerst f toepassen en dan g). Dus:

$$g \circ f : A \longrightarrow C : a \mapsto g(f(a)).$$

Voorbeeld. Stel $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x - 1$ en $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$. Dan zijn:

$$\begin{aligned}
&g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto g(x-1) = (x-1)^2 \\
&f \circ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - 1 \\
&f \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x - 2 \\
&g \circ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^4
\end{aligned}$$

Samenstelling van functies

Eigenschap.
De samenstelling van functies is associatief: voor elke drie functies

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

geldt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Samenstelling van functies

Eigenschap.
De samenstelling van functies is associatief: voor elke drie functies

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

geldt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Bewijs. Domeinen en codomeinen zijn duidelijk gelijk. Zij $a \in A$, dan

Samenstelling van functies

Eigenschap.
De samenstelling van functies is associatief: voor elke drie functies

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

geldt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Bewijs. Domeinen en codomeinen zijn duidelijk gelijk. Zij $a \in A$, dan

$$(h \circ (g \circ f))(a) \quad = \quad h((g \circ f)(a))$$

Samenstelling van functies

Eigenschap.
De samenstelling van functies is associatief: voor elke drie functies

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

geldt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Bewijs. Domeinen en codomeinen zijn duidelijk gelijk. Zij $a \in A$, dan

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(a) &= h((g \circ f)(a)) \\ &= h(g(f(a)))\end{aligned}$$

Samenstelling van functies

Eigenschap.
De samenstelling van functies is associatief: voor elke drie functies

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

geldt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Bewijs. Domeinen en codomeinen zijn duidelijk gelijk. Zij $a \in A$, dan

$$\begin{aligned} (h \circ (g \circ f))(a) &= h((g \circ f)(a)) \\ &= h(g(f(a))) \\ &= (h \circ g)(f(a)) \end{aligned}$$

Samenstelling van functies

Eigenschap.
De samenstelling van functies is associatief: voor elke drie functies

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

geldt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Bewijs. Domeinen en codomeinen zijn duidelijk gelijk. Zij $a \in A$, dan

$$\begin{aligned} (h \circ (g \circ f))(a) &= h((g \circ f)(a)) \\ &= h(g(f(a))) \\ &= (h \circ g)(f(a)) \\ &= ((h \circ g) \circ f)(a). \end{aligned}$$

$\square$

Inverse functies

Definitie.
Zij $f : A \longrightarrow B$ *een functie. Indien een functie* $g : B \longrightarrow A$ *voldoet aan*

$$f \circ g = 1_B \text{ en } g \circ f = 1_A$$

dan heet g *een* **invers** *voor* f*. We zeggen dan ook dat* f **inverteerbaar** *is.*

Inverse functies

Definitie.
Zij $f : A \longrightarrow B$ *een functie. Indien een functie* $g : B \longrightarrow A$ *voldoet aan*

$$f \circ g = 1_B \text{ en } g \circ f = 1_A$$

dan heet g *een* **invers** *voor* f. *We zeggen dan ook dat* f **inverteerbaar** *is.*

Stelling.
Enkel bijectieve functies hebben een invers.

Inverse functies

Definitie.
Zij $f : A \longrightarrow B$ *een functie. Indien een functie* $g : B \longrightarrow A$ *voldoet aan*

$$f \circ g = 1_B \text{ en } g \circ f = 1_A$$

dan heet g *een* **invers** *voor* f. *We zeggen dan ook dat* f **inverteerbaar** *is.*

Stelling.
Enkel bijectieve functies hebben een invers.

Eigenschap.
Een functie heeft hoogstens één invers.

Inverse functies

Definitie.
Zij $f : A \longrightarrow B$ *een functie. Indien een functie* $g : B \longrightarrow A$ *voldoet aan*

$$f \circ g = 1_B \text{ en } g \circ f = 1_A$$

dan heet g *een* **invers** *voor* f. *We zeggen dan ook dat* f **inverteerbaar** *is.*

Stelling.
Enkel bijectieve functies hebben een invers.

Eigenschap.
Een functie heeft hoogstens één invers.

Voorbeeld. $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$ is een bijectie. Haar inverse is $h^{-1} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x}$.