VRIJE UNIVERSITEIT BRUSSEL 15/20 7 November 2018

Discrete Wiskunde

Tussentijds Examen

2de Ba Computerwetenschappen

N.B. Bij opgaven 2 en 3 volstaat een uitdrukking met sommen, verschillen en producten van getallen (en eventueel binomiaalcoëfficiënten) telkens als antwoord. De resultaten hoeven dus niet per se volledig te worden uitgerekend. Bij opgave 6 wordt wél een uitgewerkt antwoord verwacht.

4/4 1. Bewijs dat voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$ de volgende gelijkheid geldt:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} i = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2)$$

2/3 2. Hoeveel tien-cijferige codes kunnen worden gemaakt waarin elk cijfer precies één keer voorkomt, maar waarin de volgende patronen *niet* voorkomen:

   (a) 123 (*bv.* 1203987654 *mag wel, maar* 9876501234 *mag niet*)

   (b) 123 en 98765 (*bv.* 3210567489 *mag wel, maar de twee eerder gegeven voorbeelden mogen niet.*)

   (c) 123, 98765 en 48 (*bv.* 8412765930 *mag wel, maar al de eerder gegeven voorbeelden mogen niet.*)

1/3 3. Vier mensen in een gebouw met twintig etages stappen op de gelijkvloerse verdieping in de lift. Op hoeveel manieren is het mogelijk dat

   (a) ieder op een andere etage uitstapt?

   (b) er twee personen elk op een andere etage uitstappen en de twee resterende samen op nog een andere, maar niemand op verdieping 13?

   (c) er twee personen op één etage uitstappen en de twee andere op een andere?

4/4 4. Is de functie

$$f\colon \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$$

injectief? Surjectief? Bijectief? Verklaar. Indien bijectief, bepaal de inverse functie. Indien niet, definieer een bijectie $\tilde{f}$ met hetzelfde voorschrift als f en bepaal $\tilde{f}^{-1}$.

4/4 5. Vul aan (gebruik $\subset, \supset$ of $=$) en bewijs: als A en B verzamelingen zijn, dan geldt:

$$(A \times B) \cup (B \times A) \ldots (A \cup B) \times (A \cup B)$$

In geval van $\subset$ of $\supset$: illustreer aan de hand van een voorbeeld dat deze inclusie i.h.a. geen gelijkheid is.

0/2 6. Om een geslaagd tentamen te vieren, nodigt een student enkele van zijn medestudenten uit voor een restaurantbezoek. Om een vlotte bediening te kunnen verzekeren, vraagt het restaurant aan haar gasten om vooraf een lijstje door te geven waarop bij elk van de aangeboden gerechten het aantal personen staat aangegeven dat er voor kiest. Als er vier studenten aan het etentje deelnemen, en als we er van uitgaan dat elk van hen zowel een voorgerecht, een hoofdgerecht als een dessert neemt, hoeveel dergelijke lijstjes zijn dan mogelijk?

Er kan gekozen worden uit de volgende voorgerechten:

- Franse uiensoep met zuurdesembrood
- Carpaccio van inktvis

Voor het hoofdgerecht is er keuze tussen

- Mosselen met venkel en absinth
- *Flammekueche*: pizza uit de Elzas
- Volkorenpasta met pancetta en roodlof
- Gebakken tempeh met seizoensgroentjes

Voor het dessert is er keuze uit

- Gekarameliseerde ananasschijfjes
- Trio van ijs
- Verloren brood

H4. $|V(G)| = v$ $|E(G)|$ …

[24] Tentamen Discrete

[1] TB: Voor $n \geq 1$: $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} i = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2)$

$\boxed{P(0)}$ $n = 1$: $1 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (1+2) = 1$

$\boxed{\begin{array}{c} P(k) \\ \Downarrow \\ P(k+1) \end{array}}$ Indien nok geldt: $\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{j} i = \frac{1}{6} k(k+1)(k+2)$

Bewijs voor $n = k+1$:

$$\sum_{j=1}^{k+1} \sum_{i=1}^{j} i = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(k+3)$$

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{j} i}_{} + \sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(k+3)$$

$$\frac{1}{6} k(k+1)(k+2) + \sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(k+3)$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} = \frac{1}{6}(k+1)(k+2) \cdot ((k+3) - k)$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} = \frac{1}{2}(k+1)(k+2) \dashrightarrow \text{TB: } \sum_{i=1}^{k+1} = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

OK ✓

$\boxed{P(0)}$ $1+2 = \frac{1}{2}(1+1)(1+2)$ ✓

$\boxed{\begin{array}{c} P(k) \\ \Downarrow \\ P(k+1) \end{array}}$ Indien $\sum_{i=1}^{k+1} = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$ geldt:

$$\sum_{i=1}^{k+2} = \frac{1}{2}(k+2)(k+3)$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} + k+2 = \frac{1}{2}(k+2)(k+3)$$

$$\frac{1}{2}(k+1)(k+2) + k+2 = \frac{1}{2}(k+2)(k+3)$$

$$k+2 = \frac{1}{2}(k+2) \cdot ((k+3) - (k+1))$$

$$k+2 = \frac{1}{2}(k+2) \cdot (k+3-k-1)$$

$$k+2 = \frac{1}{2}(k+2) \cdot 2$$

$$k+2 = k+2$$

OK ✓

oneven gra…
deze …
een …

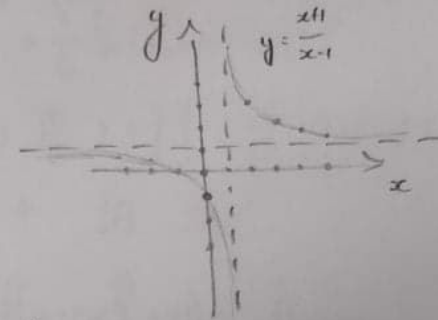
(1)

4 Voor $f: A \to B$: • Injectief: $\forall x, y \in A: f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ $\Leftrightarrow$ Elk beeld kent hoogstens één origineel

• Surjectief: $\forall b \in B: \exists a \in A: f(a) = b$ $\Leftrightarrow$ Elk beeld kent minstens één origineel

• Bijectief: $\forall b \in B: \exists! a \in A: f(a) = b$ $\Leftrightarrow$ Elk beeld kent exact één origineel

$f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}: x \to \dfrac{x+1}{x-1}$



Injectief: Ja, elk beeld kent hoogstens één origineel
(Grafisch: voor elke y-waarde vind je maximaal één x-waarde)

Surjectief: Nee, het beeld 1 kent geen origineel

Bijectief: Nee, want f is niet surjectief

$\tilde{f}: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}: x \to \dfrac{x+1}{x-1}$ $\Rightarrow \tilde{f}^{-1} = \tilde{f}$

$\tilde{f}^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}: x \to \dfrac{x+1}{x-1}$

6

$n = 4$ $\quad k = 2 \vee 4 \vee 3$ $\quad \begin{pmatrix} n-k+1 \\ k \end{pmatrix}$ → herhalingscomb.

$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$? $\quad \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 2625$

→ De vermenigvuldiging van de herhalingscombinaties waarbij er 4 keer gekozen wordt uit 2, 4 of 3 keuzes

(a) $\frac{20!}{16!} = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17$ ok

(b) $\binom{4}{2} \frac{19!}{15!}$ 16!

(c) $\binom{4}{2} \frac{20!}{16!} \cdot \frac{1}{2}$

18!

$\boxed{5}$ Stel $A = \{1, 2, 3\}$ en $B = \{4, 5\}$

$A \times B = \{(1,4), (1,5), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5)\}$

$B \times A = \{(4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3)\}$

$(A \times B) \cup (B \times A) = \{(1,4), (1,5), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,1), \dots, (5,3)\}$

$(A \cup B) \times (A \cup B) = \{(1,1), (1,2), \dots, (2,1), (2,2), \dots, (5,4), (5,5)\}$

$\Rightarrow (A \times B) \cup (B \times A) \subset (A \cup B) \times (A \cup B)$

TB: $\forall (a,b) \in (A \times B) \cup (B \times A) \Rightarrow (a,b) \in (A \cup B) \times (A \cup B)$

$(a,b) \in (A \times B) \cup (B \times A) \Leftrightarrow (a,b) \in (A \times B) \vee (a,b) \in (B \times A)$

$\Leftrightarrow (a \in A \wedge b \in B) \vee (a \in B \wedge b \in A)$

$\Rightarrow (a \in A \vee a \in B) \wedge (b \in A \vee b \in B)$

$\Leftrightarrow a \in (A \cup B) \wedge b \in (A \cup B)$

$\Leftrightarrow (a,b) \in (A \cup B) \times (A \cup B)$ ok

Opm: Waarom geldt niet? $(A \times B) \cup (B \times A) \supset (A \cup B) \times (A \cup B)$

$\Rightarrow$ Zie voorbeeld: $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{4, 5\}$

$(2,2) \in (A \cup B) \times (A \cup B)$ maar $(2,2) \notin (A \times B) \cup (B \times A)$ $\Rightarrow$ tegenvoorbeeld $\square$

ok