DISC-WISC WPO

Alles gedefinieerd vanuit verzamelingen

$\{5,6,7\} = \{6,5,7\} = \{5,5,6,7\} = \{n \in \mathbb{N} \mid 4 < n \ 8\}$

verzameling volledig bepaald door elementen

Hfst 1

16. (2) $A \cup (A \cap B) = A$ TB voor x willekeurige elem: $x \in A \cup (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A$

$\boxed{B \Rightarrow}$ $x \in A \cup (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in A \wedge x \in B)$

x in A en B impl. x in A

$\Rightarrow x \in A \vee (x \in A) \Leftrightarrow x \in A$

$\boxed{B \Leftarrow}$ $x \in A \Rightarrow x \in A \cup (A \cap B)$

definitie unie

Bewijs in richting ← 2 richtingen want ⇔

(1) 1. $B \supset A \Leftrightarrow A \cup B = B$

$\boxed{B \Rightarrow}$ Onderstel: $A \subset B$ TB: $A \cup B = B$

voor x will. elem: $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in B$

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow \underbrace{x \in B}_{A \subset B} \vee x \in B \Leftrightarrow x \in B$

$\boxed{B \Leftarrow}$ Ond.: $A \cup B = B$ TB: $A \subset B$

voor x will. elem: $x \in A \Rightarrow x \in B$

$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in B$

$f: A \to B \wedge S \subset A$ $f(S) = \{f(s) \mid s \in S\} = \{b \in B \mid \exists s \in S: f(s) = B\}$

bv: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \mapsto x^2$ $\begin{cases} f(\{1,2,3\}) = f(\{1,4,9\}) \\ f([-3,2]) = f([0,9]) \end{cases}$

21. (a) $f: A \to B$ $S_1, S_2 \subset A$ $f(S_1 \cup S_2) = f(S_1) \cup f(S_2)$

TB: $\forall b \in B: b \in f(S_1 \cup S_2) \Leftrightarrow b \in f(S_1) \cup f(S_2)$

$\boxed{B \Leftrightarrow}$ $b \in f(S_1 \cup S_2) \Leftrightarrow \exists s \in S_1 \cup S_2 : f(s) = b$

$\Leftrightarrow (\exists s \in S_1 : f(s) = b) \vee (\exists s \in S_2 : f(s) = b)$

$\Leftrightarrow (b \in f(S_1)) \vee (b \in f(S_1)) \Leftrightarrow b \in f(S_1) \cup f(S_2)$

$f(S_1 \cap S_2) \neq f(S_1) \cap f(S_2)$

↳ tegenvoorbeeld: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \mapsto x^2$

$\subset$

$S_1 = \mathbb{R}_0^-, S_2 = \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow S_1 \cap S_2 = \emptyset \Rightarrow f(S_1 \cap S_2) = \emptyset$

$f(S_1) = \mathbb{R}_0^+ \quad f(S_2) = \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow f(S_1) \cap f(S_2) = \mathbb{R}_0^+$ ⚡

$f: A \to B \wedge T \subset B$ $f^{-1}(T) = \{a \in A \mid f(a) \in T\}$

bv: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \mapsto x^2$ $\begin{cases} f^{-1}(\{-1, 0, 4\}) = \{-2, 0, 2\} \\ f^{-1}([-1, 4]) = [-2, 2] \end{cases}$

geen beeld

22. (b) $f: A \to B$ $T_1, T_2 \subset B$ $f^{-1}(T_1 \cap T_2) = f^{-1}(T_1) \cap f^{-1}(T_2)$

TB: $\forall a \in A: a \in f^{-1}(T_1 \cap T_2) \Leftrightarrow a \in f^{-1}(T_1) \cap f^{-1}(T_2)$

$\boxed{B \Leftrightarrow}$ $a \in f^{-1}(T_1 \cap T_2) \Leftrightarrow f(a) \in T_1 \cap T_2 \Leftrightarrow f(a) \in T_1 \wedge f(a) \in T_2$

$\Leftrightarrow a \in f^{-1}(T_1) \wedge a \in f^{-1}(T_2) \Leftrightarrow a \in f^{-1}(T_1) \cap f^{-1}(T_2)$

$f(f^{-1}(T)) \neq T$

↳ tegenvoorbeeld: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \mapsto x^2$

$\subset$

$T = \mathbb{R}_0^-$

$f^{-1}(T) = \emptyset \Rightarrow f(f^{-1}(T)) = \emptyset$ ⚡

$f: \underline{A} \to \underline{B} : x \overset{\text{sturen naar}}{\longmapsto} \underline{f(x)}$ → zowel domein en codomein als voorschrift bepalen functie

$f: A \to B$ injectief $\Leftrightarrow \forall a_1, a_2 \in A : a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$ contrapositie $\boxed{p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p}$

$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

$f(a_1) = f(a_2) \Leftarrow a_1 = a_2$ is evident want functie

$f: A \to B$ surjectief $\Leftrightarrow \underset{\text{beeld } f(A)}{Im(f)} = B \Leftrightarrow \forall b \in B : \exists a \in A : f(a) = b$

$f: A \to B$ bijectief $\Leftrightarrow \underbrace{f \text{ injectief}}_{\text{hoogstens 1 origineel}} \vee \underbrace{f \text{ surjectief}}_{\text{minstens 1 origineel}} \Leftrightarrow f$ inverteerbaar (f^{-1})

↘ juist 1 origineel ↙

$f^{-1} : B \to A$

$f^{-1} \circ f = 1_A \quad (A \to A : x \mapsto x)$

$f \circ f^{-1} = 1_B \quad (B \to B : x \mapsto x)$

elke functie kan bijectief gemaakt worden door domein en/of codomein te beperken

Bewijs: functie injectief en/of surjectief

tegenvoorbeeld is genoeg

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$
- niet injectief, tegenvoorbeeld: $f(2) = f(-2)$
- niet surjectief, want: $Im(f) = \mathbb{R}^+ \neq \mathbb{R}$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)$
- niet injectief, tegenvoorbeeld: $g(0) = g(\pi)$
- niet surjectief, want $Im(g) = [-1; 1]$
- bijectief: $g' : [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \to [-1; 1] : x \mapsto \sin(x)$ $\quad (g'^{-1} : [-1; 1] \to [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] : x \mapsto \text{Bgsin}(x))$

$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$
- niet injectief, tegenvoorbeeld: $h(2) = h(-2)$
- niet surjectief, want: $Im(h) = \mathbb{R}^+ \neq \mathbb{R}$

verschillende functies

$i: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x^2 - x$
- niet injectief, tegenvoorbeeld: $i(0) = i(\frac{1}{2})$ $\quad (x(2x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \wedge x = \frac{1}{2})$
- niet surjectief, want: $Im(i) = [-\frac{1}{8}; +\infty[$ $\quad$ (minima van i)

$j: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x - 3$
- injectief, TB: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : j(x_1) = j(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

  B: $j(x_1) = j(x_2) \Leftrightarrow 2x_1 - 3 = 2x_2 - 3 \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ □
- surjectief, TB: $\forall y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} : j(x) = y$ → minstens 1 opl. $x \in \mathbb{R}$

  B: $j(x) = y \Leftrightarrow 2x - 3 = y \Leftrightarrow 2x = y + 3 \Leftrightarrow x = \frac{y+3}{2} \Rightarrow$ voor elke waarde $y \in \mathbb{R}$ heeft x een opl, $x \in \mathbb{R}$ □

$k: \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{2x-3}{x}$ (niet onmiddellijk duidelijk → proberen TB)
- injectief? TB: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0 : k(x_1) = k(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

  B: $k(x_1) = k(x_2) \Leftrightarrow \frac{2x_1 - 3}{x_1} = \frac{2x_2 - 3}{x_2} \Leftrightarrow 2x_1x_2 - 3x_2 = 2x_1x_2 - 3x_1 \Leftrightarrow -3x_1 = -3x_2$

  $\Leftrightarrow x_1 = x_2$ □ ↳ injectief
- surjectief? TB: $\forall y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R}_0 : k(x) = y$

  B: $k(x) = y \Leftrightarrow \frac{2x-3}{x} = y \Leftrightarrow 2x - 3 = yx \Leftrightarrow (2-y)x = 3$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{geval 1: } y = 2 : 0x = 3 \quad ⚡ \text{ (contradictie)} \\ \text{geval 2: } y \neq 2 : x = \frac{3}{2-y} \Rightarrow \text{voor elke } y \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \; x \text{ een opl } x \in \mathbb{R} \end{cases}$

  ↳ niet surjectief, want: $Im(k) = \mathbb{R} \setminus \{2\} \neq \mathbb{R}$
- bijectief: $k' : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} \setminus \{2\} : x \mapsto \frac{2x-3}{x}$ $\quad (k'^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}_0 : y \mapsto \frac{3}{2-y})$

$l: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : 2x^2 - x$
- injectief? TB: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z} : l(x_1) = l(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

  B: $l(x_1) = l(x_2) \Leftrightarrow 2x_1^2 - x_1 = 2x_2^2 - x_2 \Leftrightarrow 2(x_1^2 - x_2^2) = x_1 - x_2 \Leftrightarrow 2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = x_1 - x_2$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{geval 1: } x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \; □ \to \text{injectief} \\ \text{geval 2: } x_1 - x_2 \neq 0 \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2) = 1 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = \frac{1}{2} \; ⚡ \end{cases}$ (gehele getallen volledig bepaald in + ⇒ 2 gehele getallen kunnen nooit $\frac{1}{2}$ zijn)
- niet surjectief, want: $Im(l) \subseteq \mathbb{Z}^+ \neq \mathbb{Z}$

Extra: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[3]{2x} + 2$
- injectief? TB: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

  B: $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x_1} + 2 = \sqrt[3]{2x_2} + 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x_1} = \sqrt[3]{2x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$ □ → injectief
- surjectief? TB: $\forall y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} : f(x) = y$

  B: $f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x} + 2 = y \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x} = y - 2 \Leftrightarrow 2x = (y-2)^3 \Leftrightarrow x = \frac{(y-2)^3}{2}$

  ⇒ voor elke waarde $y \in \mathbb{R}$ heeft x een opl. $x \in \mathbb{R}$ □ → surjectief
- bijectief: $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto \frac{(y-2)^3}{2}$

Discrete wiskunde gaat over eindige/oneindige aftelbare verzameling

principe duiventil: $|A| = k$ $|B| = n$ $f: A \to B$
voor $k > n$: f niet injectief $(\exists x_i \neq x_j \in A : f(x_i) = f(x_j))$

4) 5 punten in gelijkzijdige driehoek met zijde 1 : minimaal 2 punten met maximaal 0,5 afstand

driehoek verdeeld in 4 kleinere gelijkzijdige driehoeken met zijdes 0,5 → principe duiventil: minstens 2 punten in 1 kleinere driehoek, afstand kan nooit meer dan 0,5 zijn tussenbeide.

5) elke verzameling van 12 gehele getallen ten minste 2 getallen waarvan verschil deelbaar door 11.
$A = \{a_1, \dots, a_{12}\} \subset \mathbb{Z}$ $\quad \exists a_i \neq a_j \in A : 11 | a_i - a_j$
$a_i = q_i 11 + r_i$ → duiventil: $\exists a_i \neq a_j \in A : r_i = r_j$
$\hookrightarrow 0 \leq r_i < 11 \to 11$ unieke resten

$\Rightarrow a_i - a_j = (11 q_i + r_i) - (11 q_j + r_j) = 11(q_i - q_j) + \underbrace{(r_i - r_j)}_{=} = \underbrace{11(q_i - q_j)}_{\text{veelvoud } 11}$

---

dubbeltelling : $S \subset A \times B$: $|S| = \sum_{a \in A} k_a = \sum_{b \in B} r_b$
$\forall a \in A$ $\quad k_a := |\{(a,b) | b \in B \wedge (a,b) \in S\}|$
$\forall b \in B$ $\quad r_b := |\{(a,b) | a \in A \wedge (a,b) \in S\}|$

16) groep met 32 jongens en elke jongen kent 5 meisjes en elk meisje kent 8 jongens. Hoeveel meisjes?
$|J| = 32$ $\quad |M| = x$ $\quad S = \{(j,m) \in J \times M \mid j$ en m kennen elkaar$\}$
$|S| = \sum_{j \in J} k_j = \sum_{m \in M} r_m \Leftrightarrow \underbrace{32}_{\#\text{jongens}} \cdot \underbrace{5}_{\#\text{meisjes per jongen}} = \underbrace{x}_{\#\text{meisjes}} \cdot \underbrace{8}_{\#\text{jongens per meisje}} \Leftrightarrow x = 20$ meisjes

---

Hfst 2

tellen: $|A| = k$ $\quad |B| = n$
$\#$functies $f: A \to B = n^k$ — herhaling toegestaan, volgorde van belang: $f: \binom{1}{0}, \binom{0}{1} \neq \binom{1}{0}, \binom{0}{1}$

$(n \geq k)$ $\#$ injecties $f: A \to B = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ — geen herhaling toegestaan : def. injectie, volgorde belangrijk

$(n = k)$ $\hookrightarrow \#$ bijecties $f: A \to B = n!$

$(n \geq k)$ $\#$ k-deelverzamelingen uit $B = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$ — geen herhaling toegestaan, volgorde niet van belang $\}$ def. verzameling

$\#$ herhalingscombinaties van k uit n — herhaling toegestaan, volgorde niet van belang

Lemma : Als $|A| = |B|$, dan ($f: A \to B$ inj $\Rightarrow$ f surj./bij)
B: $|\mathrm{Im}(f)| = |A| = |B| \Rightarrow \mathrm{Im}(f) = B$ (surjectief)
(injectief) $\quad \mathrm{Im}(f) \subseteq B$

20) woorden 4 letters met alfabet 10 letters, elke letter hoogstens 1 keer
$\#$ injecties: $\frac{10!}{4!}$

35) aantal worpen met 3 dobbelstenen
$\#$ herhalingscombinaties: $\binom{6+3-1}{3} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\,5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56$

23) soorten dominos (0 tot 7 ogen)
$\#$ herhalingscombinaties: $\binom{7+2-1}{2} = \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!\,6!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$

25) m meisjes en n jongens op rij, hoeveel manieren zijn als alle meisjes naast elkaar.
$\#$ bijecties meisjes schikken : $m!$
$\#$ bijecties jongens schikken + groep meisjes: $(n+1)!$
totaal: $m!\,(n+1)!$

---

principe van inclusie en exclusie

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, 2 keer geteld want zowel in A als B

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$, want 3 keer geteld maar 3 keer afgetrokken

44) 67 wiskunde studenten waarvan 47 Frans en 35 Duits kennen en 23 beide. 20 Russisch kunnen van wie 12 Frans, 11 Duits en 5 alle 3.

(1) Hoeveel kennen geen Frans of Duits?

$|W| = 67 \quad |F| = 47 \quad |D| = 35 \quad |F \cap D| = 23$

$|W \setminus (F \cup D)| = |W| - |F \cup D| = |W| - (|D| + |F| - |D \cap F|) = 67 - (35 + 47 - 23) = 8$

(2) Hoeveel kunnen geen van 3?

$|W| = 67 \quad |F| = 47 \quad |D| = 35 \quad |R| = 20 \quad |R \cap F| = 12 \quad |R \cap D| = 11 \quad |F \cap D \cap R| = 5$

$|W \setminus (F \cup D \cup R)| = |W| - |F \cup D \cup R| = |W| - (|F| + |D| + |R| - |F \cap D| - |D \cap R| - |F \cap R| + |F \cap D \cap R|)$

$= 67 - (47 + 35 + 20 - 23 - 11 - 12 + 5) = 6$

---

45) Extra: # woorden met letters A, E, M, O, U, Y (elk 1 keer gebruiken) zonder opeenvolgingen ME en YOU

$A = \{A, E, M, O, U, Y\}$, $A' = \{\text{bijecties } f \mid f : A \to A\}$, $|A'| = 6!$

$B = \{A, ME, O, U, Y\}$, $B' = \{\text{bijecties } f \mid f : B \to B\}$, $|B'| = 5!$

$C = \{A, E, M, YOU\}$, $C' = \{\text{bijecties } f \mid f : C \to C\}$, $|C'| = 4!$

$B \cap C = \{A, ME, YOU\}$, $B' \cap C' = \{\text{bijecties } f \mid f : B \cap C \to B \cap C\}$ $|B' \cap C'| = 3!$

$|A' \setminus (B' \cup C')| = |A'| - |B' \cup C'| = |A'| - (|B'| + |C'| - |B' \cap C'|) = 6! - 5! - 4! + 3!$

$= 582$

Tentamen voorbeeld opgaven

Ex 2018 alfabet $\{a, b, c, d\}$

(a) lengte 7

functies tellen: $n^k = \underline{4^7}$

(b) minstens 1 d.

totaal (l 7) − zonder d: $4^7 - 3^7$ → omgekeerde

(c) a precies 3 keer voor

aantal mogelijke schikkingen van a: $\binom{7}{3}$

aantal mogelijke keuzes resterende letters: 3^4

$\binom{7}{3} \cdot 3^4 = \frac{7!}{3!4!} 3^4$

volgorde niet van belang (v/d gekozen posities)

(d) elke letter minstens 1 keer: → $|W_a| = |W_b| = |W_c| = |W_d|$

$|W_a \cup W_b \cup W_c \cup W_d| = 4|W_a| - \binom{4}{2}|W_a \cap W_b| + \binom{4}{3}|W_a \cap W_b \cap W_c| - |W_a \cap W_b \cap W_c \cap W_d|$

→ omgekeerde: één letter komt niet voor

↳ idem: $|W_a \cap W_b| = |W_b \cap W_c| = \ldots$

→ 2 keuzes uit 4 en volgorde niet van belang en geen herhaling

$|W_a| = 3^7$

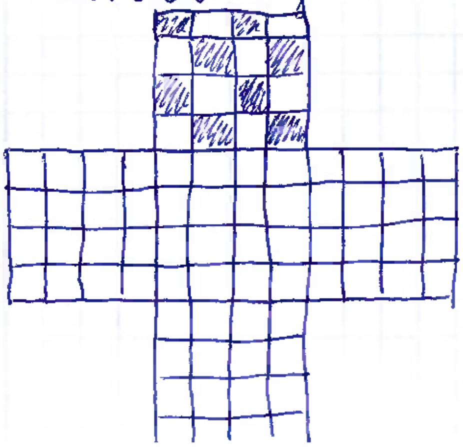
$|W_a \cap W_b| 2^7$

$|W_a \cap W_b \cap W_c| = 1^7 = 1$

$|W_a \cap W_b \cap W_c \cap W_d| = 0$

totaal: $4^7 - \left(4 \cdot 3^7 - \binom{4}{2} 2^7 + \binom{4}{3} 1 - 0\right) = 4^7 - 4 \cdot 3^7 - \frac{4!}{2!2!} 2^7 + \frac{4!}{3!} 1 - 0$

Ex schaakbord 5 grote vierkanten bestaande uit 4 kleine



(a) 4 identieke pionnen niet zelfde vlak: $\binom{80}{4} = \frac{80!}{4!76!}$

(b) 4 + niet alle zelfde kleur

omgekeerde: alle op zelf zelfde kleur: $2\binom{40}{4}$

→ totaal: $\binom{80}{4} - 2\binom{40}{4} = \frac{80!}{4!76!} - 2\frac{40!}{4!36!}$

↳ disjunct en ver.

Hfst 3

inductie : bewijzen voor aftelbare verzameling met minimum
↳ basisstap : controleren als stelling geldt voor kleinste waarde
↳ inductiestap : veronderstel voor n (inductiehypothese) dan ook $n+1$

19) $\forall n \in \mathbb{N}_0 : 1\cdot2\cdot3 + 2\cdot3\cdot4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$

propositie voor $n=1$

$- P(1): LL = 1\cdot2\cdot3 = 6 \quad RL = \frac{1}{4} 1\cdot2\cdot3\cdot4 = 6 \quad LL = RL$

$- \forall k \in \mathbb{N}_0 : P(k) \Rightarrow P(k+1)$: Onderstel $1\cdot2\cdot3 + \dots + k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+3)$

TB: $\underbrace{1\cdot2\cdot3 + \dots + k(k+1)(k+2)} + (k+1)(k+2)(k+3) = \frac{1}{4}(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)$

inductiehyp. ← $(IH) \Leftrightarrow \frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+3) + (k+1)(k+2)(k+3) = \frac{1}{4}(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4}(k+1)(k+2)(k+3)(k+4) = \frac{1}{4}(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)$ □

2) $S_n = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = ?$

kleine waarden patroon zoeken dan bewijs

$S_1 = 1^3 = 1$, $S_2 = 1^3 + 2^3 = 9$, $S_3 = 1^3+2^3+3^3 = 36$, $S_4 = S_3 + 4^3 = 100$, $S_5 = S_4 + 5^3 = 225$

patroon : $S_1 = 1^2$, $S_2 = 3^2$, $S_3 = 6^2$, $S_4 = 10^2$, $S_5 = 15^2$

↳ hypothese : $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$\frac{n(n+1)}{2}$ = som eerste n natuurlijke get.

→ TB : $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$- P(1): LL = 1^3 = 1 \quad RL = \frac{1^2 2^2}{4} = 1 \quad LL = RL$ (voor alle $1 \leq n \leq 5$ gecontroleerd)

$- \forall k \in \mathbb{N}_0 : P(k) \Rightarrow P(k+1)$: Onderstel $1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$

TB : $1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$

B $LL = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2}{4}(k^2 + 4(k+1)) = \frac{(k+1)^2}{4}(k^2+4k+4) = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = RL$

Examen 2018

$\forall n \in \mathbb{N} : 7 \mid (2^{3n+1} - 14n + 26)$

$- P(0): 2^1 - 0 + 26 = 28 = 4\cdot7$ OK

$- \forall k \in \mathbb{N} : P(k) \Rightarrow P(k+1)$: Onderstel $7 \mid 2^{3k+1} - 14k + 26$

Dus $\exists m \in \mathbb{Z} : 2^{3k+1} - 14k + 26 = 7m$

TB : $7 \mid (2^{3k+4} - 14k \underbrace{- 14 + 26}_{12}) \Leftrightarrow 7 \mid (8\cdot 2^{3k+1} - 14k + 12) \Leftrightarrow 7 \mid (7\cdot2^{3k+1} + 2^{3k+1} - 14k + 26 - 14)$

$\Leftrightarrow 7 \mid 7\cdot2^{3k+1} + 7m - 2\cdot7$ ok (deelbaar door 7)

Hfst 3b

Deling

$a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}_0$ $\quad a = qb + r \quad (0 \leq r < b)$

als $r = 0$ dan $b \mid a$

(stelling van Bézout) $ggd(a,b) = k\cdot a + l\cdot b$ (voor $k, l \in \mathbb{Z}$)

equivalentie relatie

$a = qb + r \Rightarrow ggd(a,b) = ggd(b,r)$

$n \in \mathbb{N}_0 \quad a, b \in \mathbb{Z} \quad a \equiv_n b \Leftrightarrow n \mid (b-a)$

$\Leftrightarrow a$ en b zelfde rest deling n

$a \equiv_n b$ en $a' \equiv_n b' \Rightarrow a+a' \equiv_n b+b'$ & $aa' \equiv_n bb'$

23) 2 emmers 7l en 9l en container. Hoe 1l in container krijgen.

$k\cdot9 + l\cdot7 = 1 \Leftrightarrow 4\cdot9 - 5\cdot7 = 1$

↳ Bézout : $ggd(9,7) = 1$

9) $ggd(721, 448) = ?$ en $721m + 448n = ?$

(gem. priemfac.) OF : Euclidisch algoritme →

$721 = 1\cdot448 + 273 \Rightarrow ggd(721,448) = ggd(448, 273)$
$448 = 1\cdot273 + 175 \Rightarrow = ggd(273, 175)$
$273 = 1\cdot175 + 98 \Rightarrow = ggd(175, 98)$
$175 = 1\cdot98 + 77 \Rightarrow = ggd(98, 77)$
$98 = 1\cdot77 + 21 \Rightarrow = ggd(77, 21)$
$77 = 3\cdot21 + 14 \Rightarrow = ggd(21, 14)$
$21 = 1\cdot14 + 7 \Rightarrow = ggd(14, 7)$
$14 = 2\cdot7 + 0 \Rightarrow = ggd(7, 0)$
$= 7$

$7 = 21 - 14 = 21 - (77 - 3\cdot21) = 4\cdot21 - 77$
$= 4\cdot(98 - 77) - 77 = 4\cdot98 - 5\cdot77$
$= 4\cdot98 - 5\cdot(175 - 98) = 9\cdot98 - 5\cdot175$
$= 9\cdot(273 - 175) - 5\cdot175 = 9\cdot273 - 14\cdot175$
$= 9\cdot273 - 14(448 - 273) = 23\cdot273 - 14\cdot448$
$= 23\cdot(721 - 448) - 14\cdot448 = 23\cdot721 - 37\cdot448$

- is 12 345 deelbaar door 9?

$12345 = 1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5 \equiv_9 1 \cdot 1^4 + 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 5$

$10 \equiv_9 1$ $\quad = 1+2+3+4+5 = 15$

$\equiv_9 6$

34) (a) $5783 \cdot 40162 \not\equiv 233\,256\,846$?

$23 \cdot 13 \equiv_9 5 \cdot 4 \equiv_9 2 \qquad 39 \equiv_9 12 \equiv_9 3 \quad \rightarrow \quad 2 \not\equiv_9 3$

- $a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$ deelbaarheid door 11?

$\equiv_{11} a_n (-1)^n + a_{n-1}(-1)^{n-1} + \ldots + a_1(-1)^1 + a_0$

$10 \equiv_{11} -1$

35) $3^{15} \pmod{17}$

$15 = 8+4+2+1 \quad \rightarrow \quad 3^{8+4+2+1} = 3^8 \cdot 3^4 \cdot 3^2 \cdot 3$

↳ som machten 2

$3^2 = 9 \equiv_{17} -8$

verschil van 1 keer 17

$3^4 \equiv_{17} (-8)^2 = 64 \equiv_{17} -4 \quad \rightarrow \quad 3^8 + 3^4 + 3^2 + 3 \equiv_{17} (-1)(-4)(-8) \cdot 3$

$3^8 \equiv_{17} (-4)^2 = 16 \equiv_{17} -1 \qquad = -4 \cdot 8 \cdot 3 \equiv_{17} -4 \cdot 7 = -28 \equiv_{17} 6$

$15^{81} \pmod{13}$

$81 = 64 + 16 + 1 \quad \rightarrow \quad 15^{64} \cdot 15^{16} \cdot 15$

- $15 \equiv_{13} 2$

$15^2 \equiv_{13} 2^2 = 4$

$15^4 \equiv_{13} 4^2 = 16 \equiv_{13} 3$

$15^8 \equiv_{13} 3^2 = 9 \equiv_{13} -4 \quad \rightarrow \quad 15^{81} \equiv_{13} 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18 \equiv_{13} 5$

- $15^{16} \equiv_{13} (-4)^2 = 16 \equiv_{13} 3$

$15^{32} \equiv_{13} -4$

- $15^{64} \equiv_{13} 3$

Voor welke a bestaat er een invers?

$\exists b : ab = 1 = ba \quad \rightarrow$ 1 en -1 voor $\mathbb{Z}$ → van elke ring

$\mathbb{R}_0$ voor $\mathbb{R}$ — 0 voor geen enkele ring

inverteerbare matrices voor $\mathbb{R}^{m \cdot n}$

equivalentierel. → partitie van verzameling: disjuncte deelverz. met als unie de verz.

$a \equiv_n b \Leftrightarrow n \mid b - a \Leftrightarrow a$ en b zelfde rest bij deling n

vb: $\equiv_3$ equivalentieklassen

$E_0 = \{0, 3, -3, 6, -6, 9, -9, \ldots\}$

$E_1 = \{1, 4, -2, 7, -5, 10, -8, \ldots\}$

$E_2 = \{2, 5, -1, 8, -4, 11, -7, \ldots\}$

$E_3 = E_0$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{voor } n: \\ \forall x \in E_m : n \mid x - m\end{array}}$$

↳ m als rest

$\equiv_n \quad E_0, \ldots, E_{n-1} : \quad E_i + E_j = E_{i+j}$ mogelijk omdat

$E_{i'} + E_{j'} = E_{i'+j'}$ (compatibiliteit + voor $\equiv$)

$E_i \cdot E_j = E_{i \cdot j}$ idem

$\mathbb{Z}_n$ ring met eenheid

↳ $\{E_0, E_1, \ldots, E_{n-1}\} = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ eenvoudige notatie, geen getallen maar nog steeds equivalentieklassen

vb: $\mathbb{Z}_4 = \{E_0, E_1, E_2, E_3\} \qquad E_2 \times E_2 = E_4 = E_0$ → neutraal element voor $(+, \mathbb{Z}_4)$

$\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\} \qquad 2 \times 3 = 6 = 1$

↳ inverteerbare elementen

$k \in \mathbb{Z}_n$ is inverteerbaar $\iff$ ggd$(k,n) = 1 = \underbrace{p \cdot k + q \cdot n}$ $(p, q \in \mathbb{Z})$ (Bézout)

$\overset{\shortparallel}{p \cdot k}$ ↳ in $\mathbb{Z}_n$: $n = 0$

p ↳ invers voor k ↳ ook inverteerbaar

40) inverteerbare elementen in $\mathbb{Z}_6$: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

0 nooit inverteerbaar: ggd$(0,6) = 6 \neq 1$

→ 1 altijd inverteerbaar: ggd$(1,6) = 1$ (invers 1 zelf) ← kan dus enkel 1 of 5 zijn

2: ggd$(2,6) = 2 \neq 1$

3: ggd$(3,6) = 3 \neq 1$

4: ggd$(4,6) = 2 \neq 1$

5 (= −1 altijd inverteerbaar): ggd$(5,6) = 1$ (invers 5 zelf)

inv. elem. in $\mathbb{Z}_7$: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

alles behalve 0 inverteerbaar (want 7 priemgetal en alles relatief priem $\underbrace{\text{behalve veelvouden}}_{=0}$)

inv. elem. in $\mathbb{Z}_8$: $\cancel{0}$, $\underline{1}$, 2, $\underline{3}$, 4, $\underline{5}$, 6, $\underline{7} = -1$

42) (b) 7^{-1} in $\mathbb{Z}_{16}$ $\quad k, l \in \mathbb{Z}$: $k \cdot 7 + l \cdot 16 = 1$ → euclidisch algoritme

$16 = 2 \cdot 7 + 2$ | $1 = 7 - 3 \cdot 2$ $\quad \iff k \cdot 7 = 1$

$7 = 3 \cdot 2 + \underline{1}$ | $= 7 - 3(16 - 2 \cdot 7)$

$2 = 2 \cdot 1 + 0$

$= 7 \cdot 7 - 3 \cdot 16$ ⟶ Dus $7^{-1} = 7$

← controle: uitrekenen

(d) 5^{-1} in $\mathbb{Z}_{13}$ $\quad k, l \in \mathbb{Z}$: $k \cdot 5 + l \cdot 13 = 1$

$13 = 2 \cdot 5 + 3$ | $1 = 3 - 1 \cdot 2$ $\quad \iff k \cdot 5 = 1$

$5 = 1 \cdot 3 + 2$ | $= 3 - (5 - 3)$

$3 = 1 \cdot 2 + \underline{1}$ | $= 2 \cdot 3 - 5$

$= 2(13 - 2 \cdot 5) - 5$

$= 2 \cdot 13 - 5 \cdot 5$ ⟶ Dus $5^{-1} = -5 = 8$

RSA PKA steunt op feit dat er geen algoritme, dat efficiënt is, bestaat voor priemontbinding.

Kies p, q priem $\quad n = pq \quad b = (p-1)(q-1)$

Kies e: ggd$(e, b) = 1$ → public key

$m \longrightarrow m^e \bmod (n) \longmapsto c^d \bmod (n) = m$

message $\quad \overset{\shortparallel}{c}$ $\quad$ met $d = e^{-1}$ in $\mathbb{Z}_b$

↳ nodig om te ontsleutelen maar moeilijk zonder b

59) $c = 2 \quad n = 55 \quad e = 7$

$\overset{\shortparallel}{5 \cdot 11}$ $(p, q) \longrightarrow b = 4 \cdot 10 = 40$

Dus $d = e^{-1}$ in $\mathbb{Z}_b$ $= 7^{-1}$ in $\mathbb{Z}_{40}$.

(mod b)

$40 = 5 \cdot 7 + 5$ | $1 = 5 - 2 \cdot 2$

$7 = 1 \cdot 5 + 2$ | $= 5 - 2(7 - 5) = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7$

$5 = 2 \cdot 2 + \underline{1}$ | $= 3(40 - 5 \cdot 7) - 2 \cdot 7 = 3 \cdot 40 - 17 \cdot 7$

Dus $d = -17 = 23$ ⟶ $\underline{m} = 2^{23}$ (mod 55)

(mod 55) in $\mathbb{Z}_{55}$

$2^2 = 4$ $\quad = 2^{16} \cdot 2^4 \cdot 2^2 \cdot 2^1$

$2^4 = 4^2 = 16$ $\quad = (-24) \cdot 16 \cdot 4 \cdot 2$

$2^8 = 16^2 = 256 = 36 = -19$ $\quad = 7 \cdot 16 \cdot 4$

$2^{16} = (-19)^2 = 361 = 31 = -24$ $\quad = 7 \cdot 9 = 63 = \underline{8}$ $\quad (0 \leq m < n)$

(controle 8^7 mod $55 = 2$)

55) $\begin{cases} n \equiv_{17} 3 \\ n \equiv_{16} 10 \\ n \equiv_{15} 0 \end{cases}$ $\begin{cases} m_1 = 17 \\ m_2 = 16 \\ m_3 = 15 \end{cases}$ $\begin{cases} M_1 = m_2 \cdot m_3 = 16 \cdot 15 = 240 \\ M_2 = m_1 \cdot m_3 = 17 \cdot 15 = 255 \\ M_3 = m_1 \cdot m_2 = 17 \cdot 16 = 272 \end{cases}$ $\begin{cases} y_1 = M_1^{-1} \text{ in } \mathbb{Z}_{17} \\ y_2 = M_2^{-1} \text{ in } \mathbb{Z}_{16} \\ y_3 = M_3^{-1} \text{ in } \mathbb{Z}_{15} \end{cases}$

overbodig

17, 16, 15
2 aan 2 relatief priem.
↳ stelsel oneindig veel oplossingen
↓
anders geen of meerdere oplossingen

in $\mathbb{Z}_{17}$ $\rightarrow n = 3 \cdot y_1 \cdot M_1 + 10 \cdot \underset{0}{y_2 \cdot M_2} + 0 \cdot y_3 \cdot \underset{0}{M_3} + k \cdot m_1 m_2 m_3 \quad (k \in \mathbb{Z})$

in $\mathbb{Z}_{16} \rightarrow n = 10 y_2 M_2$ (want $M_2 = 17 \cdot 15 = 0$ in $\mathbb{Z}_{17}$) in $\mathbb{Z}_{17} \Rightarrow$

in $\mathbb{Z}_{17}$ $M_1 = 240 = 2$
$17 = 8 \cdot 2 + 1 \Leftrightarrow 1 = 17 - 8 \cdot 2$
$y_1 = -8$

algemene methode

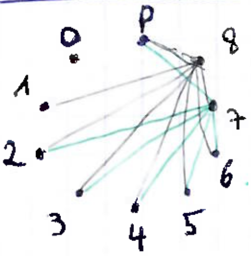
in $\mathbb{Z}_{16}$ $M_2 = 255 = -1$
$y_2 = (-1)^{-1} = -1$ $\quad \overset{M_2}{(-1)} \cdot \overset{y_2}{(-1)} = 1$

WPO 6
video zelfde als TE

$n = 3 \cdot M_1 y_1 + 10 \cdot M_2 y_2 + 0 \cdot M_3 y_3 + k \cdot m_1 m_2 m_3$ of in $\mathbb{Z}_{m_1 m_2 m_3} = \mathbb{Z}_{4080}$ $(k \in \mathbb{Z})$
$= -8310 + 3 \cdot 4080 = \underline{3930}$
↳ kleinste pos getal (opgave)

---

1) toppen = personen



5 koppels iedereen schudt handen behalve partner. Iedereen verschillende hoeveelheid handen geschud na vraag P. Hoeveel handen geschud partner van P

- per persoon tussen 0 en 8 handen geschud ~~alle~~ graad verschillend door verschillende hoeveelheid handen geschud → P, en andere toppen nemen van 0 t. e. m. 8.
- 8 iedereen een hand geschud behalve 0, dus partner $0 \longleftrightarrow 8$
- 1 schud niemand anders een hand en 7 alle overblijvende (P, 2-6), dus $1 \longleftrightarrow 7$
- verder $2 \leftrightarrow 6$, $3 \longleftrightarrow 5$
- 4 blijft over en is dus partner van P (en heeft 4 handen geschud)

11) G simpel graf $|V(G)| = n \geq 2 \Rightarrow \exists v_1 \neq v_2 \in V(G) : deg(v_1) = deg(v_2)$
mogelijke graden voor top : $0, 1, \ldots, n-2, n-1$ → alle toppen behalve zichzelf
→ n mogelijkheden (graden), maar 0 en $n-1$ kunnen nooit samen voorkomen → $n-1$ mogelijkheden

0 heeft geen boog dus $n-1$ nooit mogelijk

Duiventil: n toppen verdelen over $n-1$ mogelijke graden
→ minstens 2 toppen met zelfde graad.

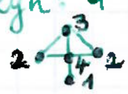
7) lijst graden per top, mogelijk?
(a) 2, 2, 2, 3 niet mogelijk : want som graden moet even zijn

$\sum_{v \in V(G)} deg(v) = 2|E(G)|$

handshake-eigenschap (dubbeltelling)

(b) 2, 2, 4, 4, 4 niet mogelijk : 5 toppen dus 3 toppen zijn verbonden met elk van de andere toppen maar andere toppen hebben geen graad ≥ 3

(c) 1, 2, 2, 3, 4 wel mogelijk: 4 naar alle anderen en 3 naar de 2's :



(d) 1, 2, 3, 4 niet mogelijk ; top met graad 4 heeft maar 3 toppen waar het mee verbonden kan zijn (simpel) en moet elke graad verschillend is (zie 11)

12) Hamilton-cyclus → gesloten pad en voorbij alle toppen (max 1 keer passeren)
door punten kubus

→ heeft een Hamilton-cyclus en is dus een Hamiltongraf

geen Euler-graf

→ heeft Eulercyclus: gesloten pad over alle bogen (max 1 keer passeren)

Graf is een Eulergraf als elke top een even graad heeft en samenhangend is.

15) (a) Als graf Eulercyclus heeft even aantal bogen.
niet waar, tegenvoorbeeld:  3 bogen, maar wel elke top even graad (dus Eulergraf)

(b) G simpel graf 9 toppen, $\sum deg \geq 27 \Rightarrow \exists$ top $deg \geq 4$
uit handshake-eigenschap volg $\sum deg$ even moet zijn dus $\sum deg \geq 28$.
waar, omdat 28 graden verdelen over 9 toppen: minstens 1 top met minstens graad $\lceil \frac{27}{9} \rceil = 4$ (duivenstiel)

(c) Het aantal mensen dat oneven broers en zussen heeft is oneven.

handshake-eigenschap: $\underbrace{\sum_{v \in V(G)} deg(v)}_{\text{even}} = \sum_{\substack{v \in V(G) \\ \text{met } deg(v) \text{ oneven}}} deg(v) + \underbrace{\sum_{\substack{v \in V(G) \\ \text{met } deg(v) \text{ even}}}}_{\text{even}}$

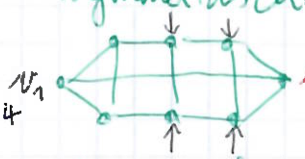
kan enkel even zijn ← als even aantal oneven getallen opgeteld worden
→ waar

(d) Elke Eulergraf is een Hamiltongraf
niet waar: Eulercyclus passeert elke boog dus ook elke top, maar soms meermaals

(e) Elke Hamiltongraf is een Eulergraf
niet waar, tegenvoorbeeld kubus (cf (12))

elke top zelfde graad

(f) elke reguliere graf heeft elke top een zelfde # toppen op afstand 2. (als kortste pad)
geldt op afstand 1 (definitie regulier graf)
symmetrische grafen zijn geen tegenvoorbeeld, maar wel:

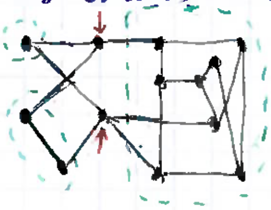


symmetrisch over v_1

dus vals

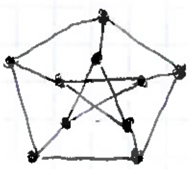
Examen-vraag

Is onderstaande graf Hamiltongraf

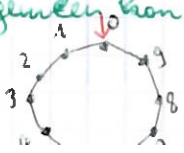


Geen Hamiltongraf, omdat na het wegnemen van top u en v zijn er 3 samenhangingscomponenten.

uit graf 1 top halen → niet meer samenh. → geen Hamiltongraf
of 2 toppen → 3 samenh. comp. → geen Hamiltongraf



10 toppen, 5 is lengte kortste gesloten pad(en), 3-regulier graf, kan niet ook Hamiltongraf zijn
algemeen, kan Hamiltongraf niet aan deze eig. voldoen:

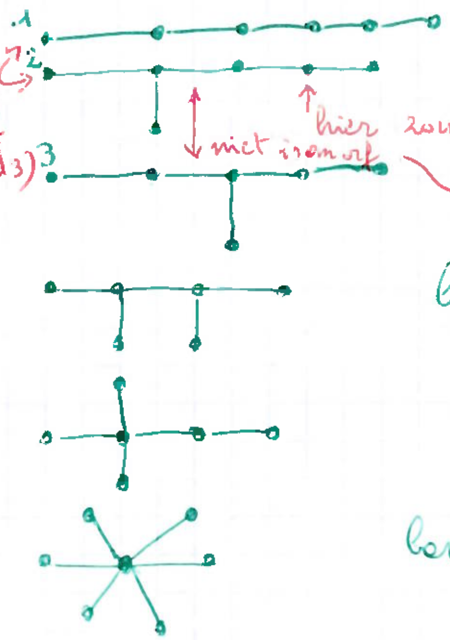


0↔0, 0↔1 (extra) per definitie en ook niet 0↔2, 0↔3 want dan kortste gesl. pad <5.
0↔4, 0↔5 want bogen geen mogelijkheden, zodat

Minimaal samenh.: Boom : $|E(G)| = |V(G)| - 1$

isomorf graf: bijectie tussen toppenverz., also

29) Alle isomorfe bomen met 6 toppen



longste pad 5

longste pad 4

2 " heeft 2 toppen graad 1 op afstand 2
3 niet

longste pad 3

"

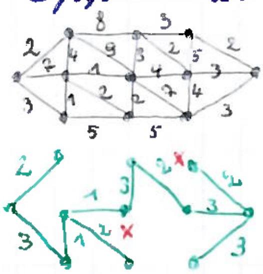
longste pad 2

34) complete bipartiete graf $K_{2,3}$: 2 niet-isomorfe opspannende deelgraf

niet meer dan 2

58) Opspannende boom met minimaal gewicht

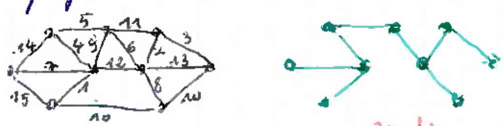
gierigheids-algoritme : gew. zal minimaal zijn, maar niet per se uniek



boog met laagste gewicht (willekeurig als meerdere)
toevoegen bogen laagste gewicht zonder dat cyclus ontstaat

gewicht : 22

56) Opspannende boom min. gewicht (Hoeveel opspannende bomen?)



gewicht : 36

- Wat is 2-regulier eindig graf? cycli maar niet alle 2 regulier graffen zijn cyclus, vb:

1 graf

- Is elke samenhangingscomp. van 2-reg. graf een cyclus? ja, "unie" van cycli

Bewijs: TB: elk samenhangend 2-regulier graf is cyclus.

of

of

vermits eindig zal laatste top noodgedw. boog met eerste hebben → cyclus □

37) Toernooi $2n$ ploegen, 2 ronden. (1,2) Toon ploegen altijd in 2 groepen (A,B) van n ploegen verdelen, zodat ploeg nog niet tegen elkaar gespeeld.

mogelijk want bipartiet (geen cycl. oneven lengte) ←

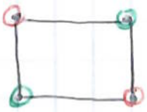
$2n$ toppen 1 voor elke ploeg, bogen voor al gespeelde wedstrijden.

na 2 wedstrijden : 2 regulier graf → cyclus dan verdelen in ploegen

Gaat alleen als cycli even knopen heeft (niet per se door en want meerdere cycli mogelijk met oneven ...) maar cycl. zal altijd even zijn omdat 2 wedstr. gespeeld

→ buur altijd andere groep want al toppen ...

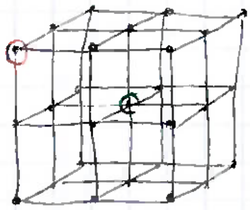
Bipartiete graffen: knopen kleuren in 2 kleuren zonder 2 buren zelfde kleur



boom altijd bipartiet (geen cycles)

Bipartiete graf $\Leftrightarrow$ graf zonder cycli met oneven lengte

13) kubus opdelen in $3 \times 3 \times 3 = 27$, pad door grote kubus naar midden 2 kleine kubussen buren als zijde gelijk (beginnend van hoekpunt)



$\rightarrow$ Hammiltonpad door graaf naar midden
graaf is bipartiet dus als hoekpunt rood is middelpt. groen. Maar door 27 knopen is pad lengte 26 wat even is en zou de kleur hetzelfde moeten zijn. Dus geen zulk pad mogelijk

G

koppeling: collectie bogen van graaf waar elke top maximaal 1 boog heeft

maximaal, geen maximum | maximum | maximaal

maximale koppeling: zoveel mogelijk bogen dus geen bogen toevoegen mogelijk

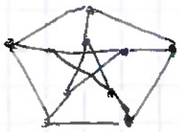
$\Uparrow$ niet omgekeerd

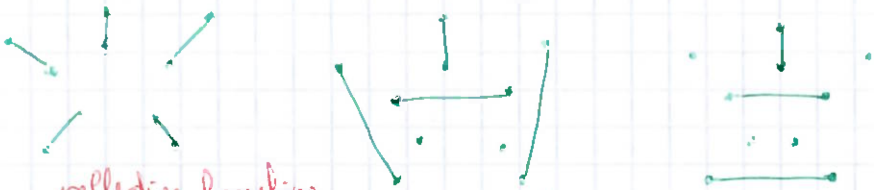
maximumkoppeling: maximum aantal bogen voor een mogelijke koppeling

$\Uparrow$ idem

volledige koppeling: alle toppen verzadigd (gebruikt) bij maximumkoppeling (altijd even # toppen)

35) zoek zoveel mogelijk maximale koppelingen





volledige koppeling

maximale koppeling (2 onverzadigde toppen geen boog maar andere onverzadigde top)

idem

maximumkoppeling vinden door wisselpaden toepassen op maximale koppeling

$\hookrightarrow$ geeft altijd maximumkoppeling

---

disjuncte unie $(X \cup Y, \sim)$ toewijzing van $W \subset X$ in Y = koppeling die W verzadigd

X/Y deelv. toppen niet onderling verbonden

Stelling Hall: $\exists$ toewijzing van $W \subset X$ in Y

$\Leftrightarrow \forall\ W' \subset W : |H(W')| \geq |W'|$

alle buren W'

45) 25 kandidaten en 25 jobs, geschikte jobs per kandidaat is minstens 4 omdersom hoogstens 4. is er een toewijzing mogelijk

$(K \cup J, \sim)$ $|K| = |J| = 25$ boog als kandidaat geschikt voor job

$\forall k \in K : deg(k) \geq 4$ en $\forall j \in J : deg(j) \leq 4$

zij $W' \subset K$ willekeurig TB: $|H(W')| \geq |W'|$

$$4|W'| = \sum_{k \in W'} 4 \leq \sum_{k \in W'} deg(k) \leq \sum_{j \in H(W')} deg(j) \leq \sum_{j \in H(W')} 4 = 4|H(W')| \Rightarrow 4|W'| \leq 4|H(W')|$$

$\Rightarrow |W'| \leq |H(W')|$

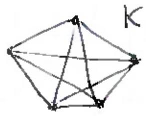
(bipartiet en W' geen toppen onderling

(idem en elke boog uit W' zeker naar H(W') maar ...

planaire graffen zijn te tekenen zonder kruisende bogen

$\cong$ (isomorf)

planair



K_5

$K_{3,3}$

niet planair

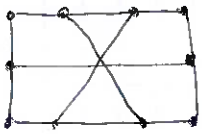
tegenbewijs planair graf: K_5 of $K_{3,3}$ in graf
↳ deelgraf die boogequivalent is aan

boogequivalent: – bogen graad 2 vervangen door enkele boog
– en omgekeerd

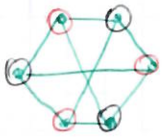
→ verandert niets aan planair zijn

(boogequiv)

50) graf planair?

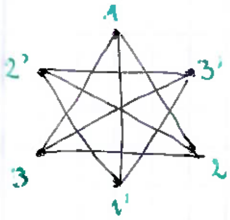


$\cong$

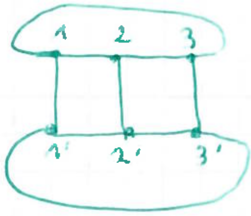


$\cong K_{3,3}$ → niet planair

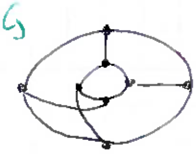
$K_{3,3}$ is bipartiet en elke top met top van andere partitie verbonden



$\cong$



→ planair



$K_5 \not\subset G$ want $\deg(i \in K_5) = 5$
eventueel $K_{3,3} \subset G$

$\cong$

$\cong K_{3,3}$

→ niet planair

$v - e + f = 2$ voor planaire graffen (zogetekend dat er geen kruisende bogen zijn)
↳ toppen ↳ bogen ↳ gebieden

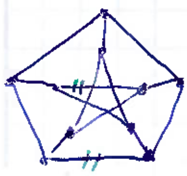
geldt niet maar wel planair

rand van gebied zijn bogen die het gebied raken
→ hangt af van hoe graf getekend

$r_{g_1} = 6$
$r_{g_2} = 5$

extra) planair?

examen!



boogequiv. $K_{3,3}$

stel U.H.D. graf wel planair dan $v - e + f = 2$
dan $f = 2 - 10 + \frac{30}{2} = 7$ altijd cycli nodig voor gebied en cyclus in rand v. gebied

handshake

$c = 5$ → minstens 5 bogen
↳ lengte korste cyclus

$\sum_{g \text{ gebied}} 5 \leq \sum_{g \text{ gebied}} r_g \leq 2e = 30$
$= 7 \cdot 5 = 35$

↳ elke boog hoogstens 2 gebieden

$\Rightarrow 35 \leq 30$ → tegenspraak dus niet planair

→ methode werkt niet altijd:

niet planair, $c = 3$, $f = 8$ | $\underbrace{24}_{8 \cdot 3} \leq \sum_{g \text{ gebied}} r_g \leq \underbrace{32}_{2 \cdot e}$

geen conclusie

62) (d) $c = ?$

bipartiet dus geen cycli oneven lengte dus $c \neq 5$
dus $c = 6$

(e) planair?

stel U.H.O. wel planair dan $f = 2 - v + e = 2 - 14 + \frac{3 \cdot 14}{2} = 9$

$$\underbrace{\sum_{g \text{ gebied}} 6}_{= 9 \cdot 6 = 54} \leq \sum_{g \text{ gebied}} r_g \leq 2e = 42$$

$\Rightarrow 54 \leq 42 \to$ tegenspraak dus niet planair

Hij geen alf. examen

functievoorschrift $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ die voldoet aan relatie:
$a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$ $(a_0 = 2, a_1 = 1)$

$\Leftrightarrow a_n - 7a_{n-1} + 10a_{n-2} = 0$ (homogene recurrentievgl.)
$\to a_n = r^n$
$\hookrightarrow r^n - 7r^{n-1} + 10r^{n-2} = 0$
$\Leftrightarrow r^2 - 7r + 10 = 0 \Leftrightarrow r = 2 \vee r = 5$

$r \neq 0$ — anders randvw. a_0 en a_1 ook 0

som ook opl.

dus $a_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 5^n$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$ algemene oplossing

$\hookrightarrow c_1 a_n = 7c_1 a_{n-1} - 10 c_1 a_{n-2}$

$$\begin{cases} 2 = a_0 = c_1 \cdot 2^0 + c_2 \cdot 5^0 \\ 1 = a_1 = c_1 \cdot 2^1 + c_2 \cdot 5^1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ 2c_1 + 5c_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = 2 - c_1 \\ 2c_1 + 10 - 5c_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} c_2 = 2 - c_1 \\ 3c_1 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = -1 \\ c_1 = 3 \end{cases} \longrightarrow a_n = 3 \cdot 2^n - 5^n$$

$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = n + 1$ $(a_0 = a_1 = 0)$ (niet homogeen)

homogene vgl. $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$

$a_n = r^n$

kwadratische vgl $r^2 - 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow r = 2$ — als $\Delta < 0 \to$ algemene complexe opl.

$r = 2$ multipliciteit 2

$\Rightarrow a_n^{(h)} = c_1 \cdot 2^n + c_2 n \cdot 2^n$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R}) \to$ algemene oplossing
$\hookrightarrow$ kleine kans oplossing voor beide randvw.
$\to$ niet algemene oplossing

particuliere opl. $a_n^{(p)} = An + B$
$\hookrightarrow n+1 \to$ eerste graads (2^e graads: $An^2 + Bn + C$)

$\hookrightarrow A(n+2) + B - 4(A(n+1) + B) + 4(An + B) = n + 1$ (veelterm)

$$\Leftrightarrow An - 2A + B = n + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ -2A + B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 3 \end{cases} \longrightarrow a_n^{(p)} = n + 3$$

2 veeltermen gelijk als overeenkomstige coeff. gelijk

algemene opl. $a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)} = n + 3 + c_1 2^n + c_2 n 2^n$

beginvw.
$$\begin{cases} 0 = a_0 = 3 + c_1 \\ 0 = a_1 = 4 + 2c_1 + 2c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -3 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

$\to$ oplossing

4) aantal manieren autos en motors parkeren als motors op 1 plaats en auto op 2 plaats

n aantal motors + autos

$a_0 = 1 \quad a_1 = 1 \quad a_2 = 2 \quad a_3 = 3$

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

$\|$

\# met motor op 1e plaats $= a_{n+1}$

\+ # met auto op 1e 2 plaatsen $= a_n$