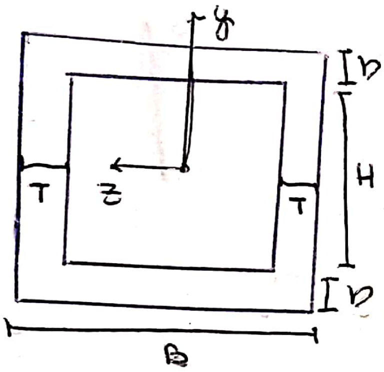
Lista de exercícios 12 - Letícia Lemos Diniz
201438

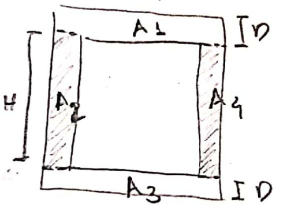
ex-prop-sec-02:

a)



$D = T \quad H = B = 6T$

• área:



$A_1 = BD = A_3$

$A_2 = A_4 = HT$

$A_{TOTAL} = 2BD + 2HT$

↳ seja $D = T$
$H = B = 6T$

$\underline{A_{Total} = 24T^2}$

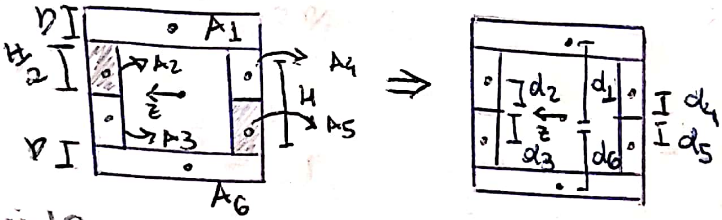
• posição do centróide y:

como a figura é simétrica em relação ao eixo z:

→ centróide está em $\underline{\underline{y = 0}}$

... está em $\underline{y = 0}$

• momento de inércia com relação ao eixo z:



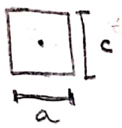
Áreas parciais:

$A_1 = A_6 = BD$

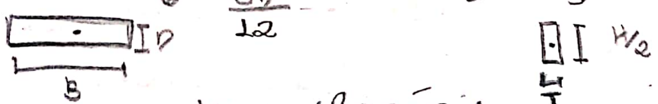
$A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = T\left(\frac{H}{2}\right)$

distâncias dos centros geométricos das áreas parciais ao centróide da seção total: $d_1 = d_6 = \frac{H}{2} + \frac{D}{2}$ $\quad d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = \frac{H}{4}$

momentos de inércia das áreas parciais com relação aos seus próprios centros:

→ para retângulos:  $I_{z_{CG}} = \frac{ac^3}{12}$

Assim: $I_{zz_1} = I_{zz_6} = \frac{BD^3}{12}$ e $I_{zz_2} = I_{zz_3} = I_{zz_4} = I_{zz_5} = \frac{TH^3}{96}$



Pelo teorema da translação dos eixos paralelos:

$$I_{zz} = (I_{zz_1} + A_1 d_1^2)2 + (I_{zz_2} + A_2 d_2^2)4$$

$$I_{zz} = \left[\frac{BD^3}{12} + BD\left(\frac{H}{2} + \frac{D}{2}\right)^2\right]2 + \left[\frac{TH^3}{96} + \frac{TH}{2}\left(\frac{H}{4}\right)^2\right]4$$

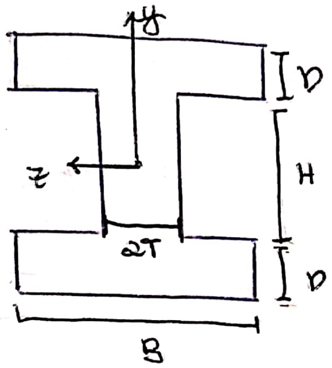
$$I_{zz} = \frac{2BD^3}{3} + \frac{BDH^2}{2} + BHD^2 + \frac{TH^3}{6} \rightarrow \text{seja } D = T \text{ e } H = B = 6T \Rightarrow \underline{I_{zz} = 184T^4}$$

• módulo de resistência:

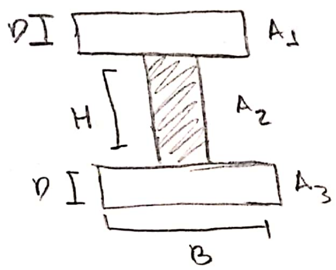
$$y_{max} = \frac{H}{2} + D \qquad W_z = \frac{I_{zz}}{\frac{H}{2} + D} = \frac{\frac{2BD^3}{3} + \frac{BDH^2}{2} + BHD^2 + \frac{H^3T}{6}}{\frac{H}{2} + D}$$

$\Rightarrow$ seja $D = \tau$, $H = B = 6\tau$: $W_z = \dfrac{184\tau^4}{4\tau} = 46\tau^3 \Rightarrow \underline{W_z = 46\tau^3}$

b)



• área:



$A_1 = A_3 = BD$

$A_2 = (2T)H$

$A_{Total} = (BD)2 + 2TH$

ou seja $D = T$ e $H = B = 6T$

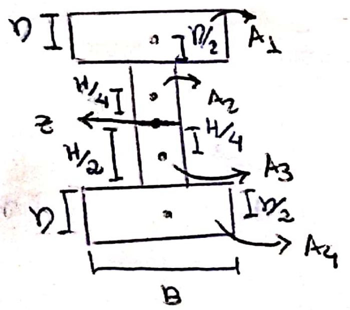
$\underline{A_{Total} = 24T^2}$

• posição do centróide:

→ como a figura é simétrica em relação a z:

→ centróide está em $\underline{y=0}$

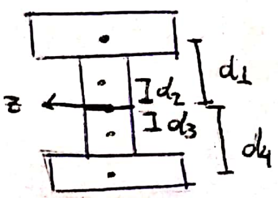
• momento de inércia em relação ao eixo z:



$A_1 = A_4 = BD$ → áreas parciais

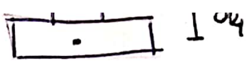
$A_2 = A_3 = \frac{H}{2}(2T) = HT$

distâncias dos centros geométricos das áreas parciais em relação ao centro da área total:



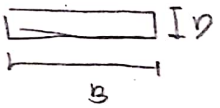
$d_1 = \frac{H}{2} + \frac{D}{2} = d_4$

$d_2 = \frac{H}{4} = d_3$

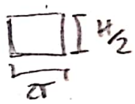


momento de inércia das áreas parciais com relação aos próprios centros geométricos:

↳ novamente, todas as áreas são retângulos, logo:



$$I_{zz_1} = I_{zz_4} = \frac{BD^3}{12}$$



$$I_{zz_2} = I_{zz_3} = \frac{2T\left(\frac{H}{2}\right)^3}{12} = \frac{TH^3}{48}$$

Pelo teorema da translação dos eixos paralelos:

$$I_{zz} = I_{zz_1} + A_1 d_1^2 + I_{zz_2} + A_2 d_2^2 + I_{zz_3} + A_3 d_3^2 + I_{zz_4} + A_4 d_4^2$$

$$I_{zz} = \left(\frac{BD^3}{12} + BD\left(\frac{H}{2} + \frac{D}{2}\right)^2\right)2 + 2\left(\frac{TH^3}{48} + HT\left(\frac{H}{4}\right)^2\right)$$

$$I_{zz} = \frac{2BD^3}{3} + \frac{BDH^2}{2} + BHD^2 + \frac{TH^3}{6} \rightarrow \text{seja } B = H = 6T \text{ e } D = T \quad \therefore \underline{\underline{I_{zz} = 184T^4}}$$

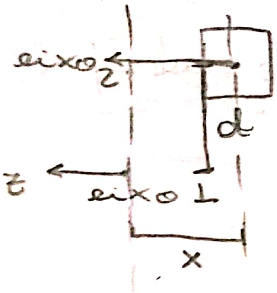
* módulo de resistência da seção:

$$y_{max} = \frac{H}{2} + D \qquad W_z = \frac{I_{zz}}{y_{max}} = \frac{\frac{2BD^3}{3} + \frac{BDH^2}{2} + BHD^2 + \frac{H^3T}{6}}{\frac{H}{2} + D} \rightarrow \text{seja } B = H = 6T \text{ e } D = T$$

$$\therefore \underline{\underline{W_z = \frac{184T^4}{4T} = 46T^3}}$$

Os resultados dos itens a e b são iguais. Isso se deve ao fato de que a diferença entre as figuras é apenas a distância dos trechos verticais na direção de z, mas como estamos calculando os momentos em relação ao eixo z, tais distâncias não influenciam.

Podemos ver isso pelo teorema da translação dos eixos paralelos:

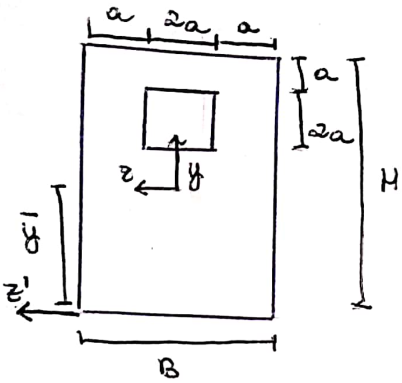


$$I_{z_1} = I_{z_2} + Ad^2$$

↳ apenas d importa, x não é levado em consideração

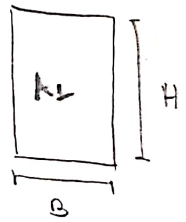
eixo$_1$ $\parallel$ eixo$_2$

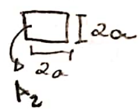
ex prop_sec_03:



$B = 4a$
$H = 8a$

• área:





$A_1 = BH$

$A_2 = (2a)^2 = 4a^2$

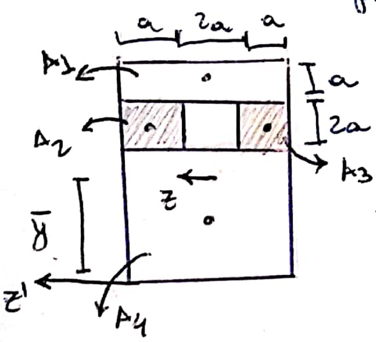
$A_{Total} = A_1 - A_2$

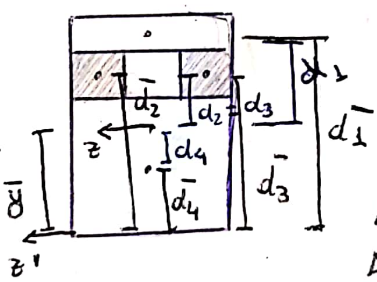
$A_{Total} = BH - 4a^2$

Seja $B = 4a$ e $H = 8a$

$\therefore A_{Total} = 28a^2$

• posição do centróide $\bar{y}$ (com relação ao eixo z'):





Sabe-se que:

$\bar{y} A_{Total} = A_1 \bar{d_1} + A_2 \bar{d_2} + A_3 \bar{d_3} + A_4 \bar{d_4}$

onde:

$A_1 = aB$

$A_2 = 2a(a) = 2a^2 = A_3$

$A_4 = B(H - 3a)$

$\bar{d_1} = (H - 3a + 2a + \frac{a}{2})$

$\bar{d_1} = (H - \frac{a}{2})$

e

$\bar{d_2} = \bar{d_3} = (H - 3a + a)$

$\bar{d_2} = \bar{d_3} = (H - 2a)$

$\bar{d_4} = \frac{H - 3a}{2}$

$\ldots = a_3 = (H - 2a)$

Assim:

$$\bar{y}\,(A_{total}) = aB\left(H - \frac{a}{2}\right) + \left[2a^2(H-2a)\right]2 + B(H-3a)\left(\frac{H-3a}{2}\right)$$

$$\bar{y}\,(A_{total}) = -2aBH - 8a^3 + 4a^2B + 4a^2H + \frac{BH^2}{2}$$

$$\bar{y}\,(BH - 4a^2) = -2aBH - 8a^3 + 4a^2B + 4a^2H + \frac{BH^2}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{-2aBH - 8a^3 + 4a^2B + 4a^2H + \frac{BH^2}{2}}{BH - 4a^2}$$

↳ seja $B = 4a$ e $H = 8a$: $\underline{\underline{\bar{y}}} = \frac{104a^3}{28a^2} = \underline{\underline{\frac{26}{7}a}}$

↳ conferindo:

- distâncias entre os centros geométricos das áreas parciais e o centro geométrico da figura passando pelo eixo z: (já assumindo $B = 4a$ e $H = 8a$)

$d_1 = \bar{d_1} - \bar{y} = \frac{53a}{14}$ $\qquad d_2 = d_3 = \bar{d_2} - \bar{y} = \frac{16}{7}a$ $\qquad d_4 = -(\bar{y} - \bar{d_4}) = -\frac{17a}{14}$

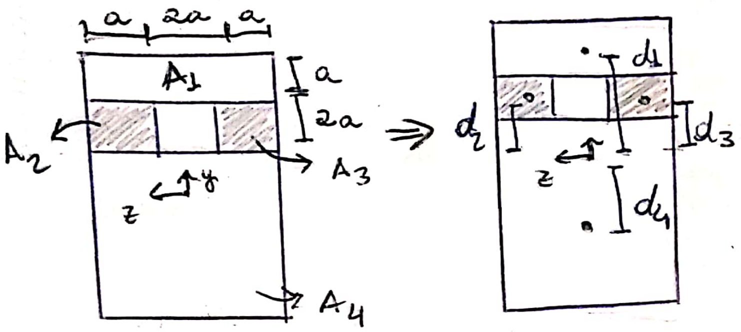
$A_1 = 4a^2$ $\qquad A_2 = A_3 = 2a^2$ $\qquad A_4 = 20a^2$

assim,

$$A_1d_1 + A_2d_2 2 + A_4d_4 = 4a^2\left(\frac{53}{14}a\right) + 2 \cdot 2a^2\left(\frac{16}{7}a\right) - 20a^2\left(\frac{17}{14}a\right)$$

$$= \frac{106a^3}{7} + \frac{64a^3}{7} - \frac{170a^3}{7} = 0 \quad \text{confere!}$$

• momento de inércia com relação ao eixo z:



Novamente, as áreas parciais são:

$A_1 = aB = 4a^2$

$A_2 = A_3 = 2a^2$

$A_4 = B(H-3a) = 20a^2$

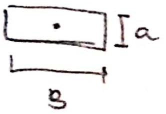
por simplicidade, já assumimos $B = 4a$ e $H = 8a$

As distâncias dos centros geométricos das áreas parciais ao centro da seção total:

$d_1 = \frac{53}{14}a$ $\quad d_2 = d_3 = \frac{16}{7}a$ $\quad d_4 = -\frac{17a}{14}$ (obtidos no item anterior)

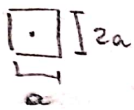
Os momentos de inércia das áreas parciais com relação aos seus próprios centros geométricos:

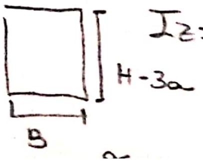
↳ todos são retângulos, assim:



$Izz_1 = \frac{Ba^3}{12} = \frac{a^4}{3}$

$Izz_2 = Izz_3 = \frac{a(2a)^3}{12} = \frac{2}{3}a^4$





$Izz_4 = \frac{B(H-3a)^3}{12} = \frac{125a^4}{3}$

Teorema da translação dos eixos paralelos:

$$I_{zz} = I_{zz_1} + A_1 d_1^2 + (I_{zz_2} + A_2 d_2^2)2 + I_{zz_4} + A_4 d_4^2$$

$$I_{zz} = \frac{a^4}{3} + 4a^2\left(\frac{53}{14}a\right)^2 + 2\left[\frac{2}{3}a^4 + 2a^2\left(\frac{16}{7}a\right)^2\right] + \frac{125a^4}{3} + 20a^2\left(-\frac{17}{14}a\right)^2$$

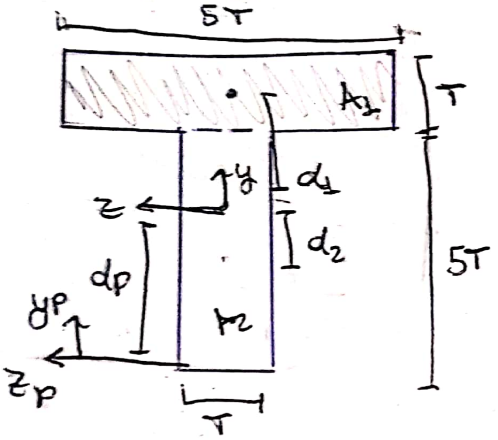
$$I_{zz} = \frac{a^4}{3} + \frac{2809a^4}{49} + \frac{4a^4}{3} + \frac{1024a^4}{49} + \frac{125a^4}{3} + \frac{1445a^4}{49} \Rightarrow \underline{\underline{I_{zz}}} = \frac{3172a^4}{21}$$

• módulo de resistência da seção:

$$y_{max} = H - \bar{y} = 8a - \frac{26a}{7} = \frac{30a}{7}$$ → centro está mais distante do topo do que da base da figura

$$W_z = \frac{I_{zz}}{y_{max}} = \frac{\frac{3172a^4}{21}}{\frac{30a}{7}} = \frac{3172a^4 \cdot 7}{21 \cdot 30a} = \frac{1586a^3}{45} = W_z$$

ex-prop-08:



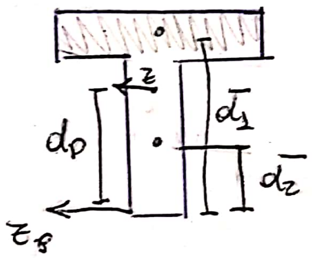
• área:

$A_1 = 5T(T) = 5T^2$

$A_2 = 5T(T) = 5T^2$

$A_{total} = A_1 + A_2 = 10T^2$

• posição do centro geométrico d_p (com relação ao eixo z_p):



distâncias dos centros geométricos das áreas parciais ao eixo z_p:

$\bar{d_1} = 5T + T/2 = 11T/2$

$\bar{d_2} = 5T/2$

Sabe-se que: $d_p A_{total} = A_1 \bar{d_1} + A_2 \bar{d_2}$

$$d_p(10T^2) = 5T^2\left(\frac{11T}{2}\right) + 5T^2\left(\frac{5T}{2}\right)$$

$$d_p(10T^2) = \frac{55T^3}{2} + \frac{25T^3}{2} = \frac{80T^3}{2}$$

$$d_p = \frac{40T^3}{10T^2} = 4T$$

Conferindo:

↳ conferindo: $\frac{\quad}{10T^2} = 4T$

• distâncias dos centros geométricos das áreas parciais ao centro geométrico da área total:

$$d_1 = \bar{d_1} - d_p = \frac{11T}{2} - 4T = \frac{3T}{2} \qquad d_2 = -(d_p - \bar{d_2}) = -\left(4T - \frac{5T}{2}\right) = -\frac{3T}{2}$$

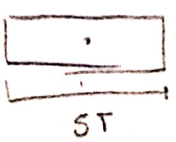
assim,

$$A_1 d_1 + A_2 d_2 = 5T^2\left(\frac{3T}{2}\right) + (5T^2)\left(-\frac{3T}{2}\right) = 0$$ ↳ confere!

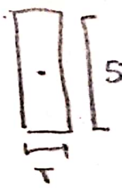
• momento de inércia em relação ao eixo z:

↳ uma vez que A_1, A_2, d_1 e d_2 são conhecidos, pode-se utilizar o Teorema da translação dos eixos paralelos:

$$I_{zz} = I_{zz_1} + A_1 d_1^2 + I_{zz_2} + A_2 d_2^2$$

I_{zz_1} é: 

$I_{zz_1} = \frac{5T(T^3)}{12} = \frac{5T^4}{12}$

I_{zz_2} é: 

$I_{zz_2} = \frac{T(5T)^3}{12}$

$I_{zz_2} = \frac{125T^4}{12}$

$$\underline{I_{zz}} = \frac{5T^4}{12} + 5T^2\left(\frac{3T}{2}\right)^2 + \frac{125T^4}{12} + 5T^2\left(-\frac{3T}{2}\right)^2 = \frac{130T^4}{12} + \frac{90T^4}{4} = \underline{\underline{\frac{100T^4}{3}}}$$

• módulo de resistência da seção:

$y_{max} = d_p = 4T$ $\quad W_z = \dfrac{I_{zz}}{y_{max}} = \dfrac{\frac{100T^4}{3}}{4T} = \dfrac{100T^4}{12T} = \dfrac{25}{3}T^3$

Seja a $T = 50mm$:

Área total	$10T^2 = 0{,}025\,m^2$
Posição do centroide com relação a z_p (d_p)	$4T = 0{,}2\,m$
Momento de inércia com relação a z	$\frac{100T^4}{3} = 208{,}\bar{3} \cdot 10^{-6}\,m^4$
Módulo de resistência	$\frac{25}{3}T^3 = 1{,}042 \cdot 10^{-3}\,m^3$