EM 423 Aula 04

Data: 06 de Abril de 2020

Capítulo 2: Esforços Internos em Sistemas Isostáticos

Tópico: Funções de Singularidade e Carregamentos descontínuos e concentrados

Arquivos com Material Didático:

- **texto cap 2 parte 4 fun de singularidade e eq. dif. de equil. em sist isostáticos versão agosto 2019.pdf**
- **cap 2 parte 5 exercícios e soluções carregamentos com f sing versão abril 2020.pdf**

Observações Iniciais

Nas aulas anteriores determinamos os esforços internos, Forca Normal $N_x(x)$, Momento Torsor $M_x(x)$, Esforço(x) e Momento Fletor $M_z(x)$ para estruturas simples e isostáticas pelo chamado Método das Seções.

Na sequência apresentamos uma forma alternativa de obtenção de esforços internos que foram as chamadas Equações Diferenciais de Equilíbrio. Estas equações diferenciais de equilíbrio, mostradas abaixo, implicavam que o problema de força normal $N_x(x)$ era desacoplado do problema de torção axial $M_x(x)$ e também do problema de flexão, contendo esforço cortante $V_y(x)$ e momento fletor $M_z(x)$.

Estas equações possuem uma solução geral que passa pela integração das equações de carregamento axial, p(x), torcional, t(x) e de flexão, q(x). Repedidas abaixo na Tabela 2.4. Um ponto importante é que no processo de integração das equações diferenciais, surgem constantes de integração. Uma para o problema axial (força normal), C_P, uma para o problema de torção C_t e duas para o problema de flexão C_1 e C_2.

As constantes de integração devem ser obtidas a partir das condições de contorno do problema. É importante salientar que contorno são os pontos extremos das estruturas, no caso x=0 e x=L.

Tabela 2.4: Resumo das equações diferenciais de equilíbrio.

Tipo de esforço	Equação de equilíbrio utilizada	Equação diferencial resultante
Força Normal *$N_X(x)$*	*$\Sigma N_X(x)=0$*	$\frac{dN_X\left(x\right)}{dx}=-p(x)$
Momento Torsor *$M_X(x)$*	*$\Sigma M_X(x)=0$*	$\frac{dM_X\left(x\right)}{dx}=-t(x)$
Esforço Cortante *$\Sigma V_Y(x)$*	*$\Sigma V_Y(x)=0$*	$\frac{dV_Y\left(x\right)}{dx}=+q(x)$
Momento Fletor *$M_Z(x)$*	*$\Sigma M_Z(x)=0$*	$\frac{dM_Z\left(x\right)}{dx}=+V_Y\left(x\right)$
Momento Fletor + Esforço Cortante + Carregamento transversal	*$\Sigma V_Y(x)=0$* + *$\Sigma M_Z(x)=0$*	$\frac{d^2M_Z\left(x\right)}{dx^2}=q(x)$

Carregamento axial

Equação diferencial	Solução Geral
$\frac{dN_X\left(x\right)}{dx}=-p(x)$	$N_X\left(x\right)=-\int p(x)dx+C_p \qquad (0.1)$

Esforço de torção

Equação diferencial	Solução Geral
$\frac{dM_X\left(x\right)}{dx}=-t(x)$	$M_X\left(x\right)=-\int t(x)dx+C_t \qquad (0.2)$

Esforço de flexão

Equação diferencial	Solução Geral
$\dfrac{dV_Y(x)}{dx} = +q(x)$	$V_Y(x) = +\int q(x)dx + C_1 \qquad (0.3)$
$\dfrac{dM_Z(x)}{dx} = +V_Y(x)$	$M_Z(x) = +\int V_Y(x)dx + C_2 \qquad (0.4)$
$\dfrac{d^2M_Z(x)}{dx^2} = q(x)$	$M_Z(x) = +\int\left[\int q(x)dx\right]dx + C_1x + C_2 \qquad (0.5)$

As constantes de integração devem ser obtidas a partir das condições de contorno do problema. É importante salientar que contorno são os pontos extremos das estruturas, no caso x=0 e x=L. As condições de contorno para equações diferenciais de equilíbrio são as expressões de força normal, momento torsor, força normal e momento fletor aplicadas nas extremidades, no contorno x=0 e x=L. Para um problema bem colocado, que são os casos sendo tratados aqui, você deve ter tantas condições de contorno quantas são as constantes de integração do problema. No caso, uma para caso axial e torção e duas para problemas de flexão. Nos textos fornecidos e associados à dedução das Eq. Dif. Equil. foram fornecidos diversos exemplos de como fornecer as condições de contorno. Um ponto a ser lembrado é que as condições de contorno devem ser fornecidas obedecendo as mesmas convenções de esforços e carregamentos que foram utilizadas na dedução das equações diferenciais de equilíbrio e que estão reproduzindas na figura 2.60 abaixo.

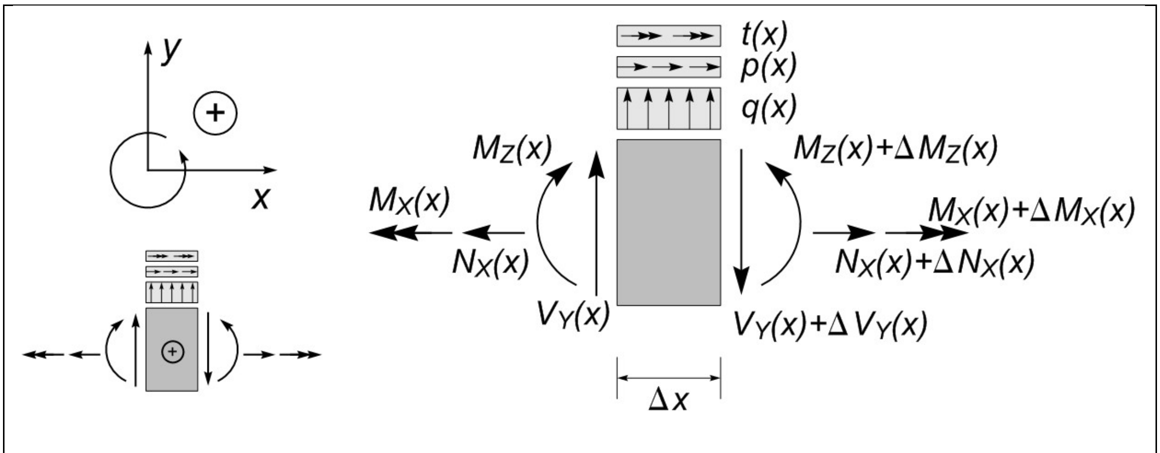

Figura 2.60: Equilíbrio de uma parcela de uma estrutura submetida a múltiplos esforços

Sobre aula 04.

Introdução.

Esta aula é dedicada a deduzirmos uma forma de montar carregamentos que são descontínuos e concentrados e que podem ser incorporados como carregamentos integráveis nas equações diferenciais de equilíbrio. Nos exercícios resolvidos anteriormente, todos os carregamentos suas respectivas expressões para p(x), t(x) e q(x) eram contínuas e integráveis. Mas no caso geral os carregamentos podem ter elementos descontínuos e concentrados, tal como mostrado na figura 2.71.

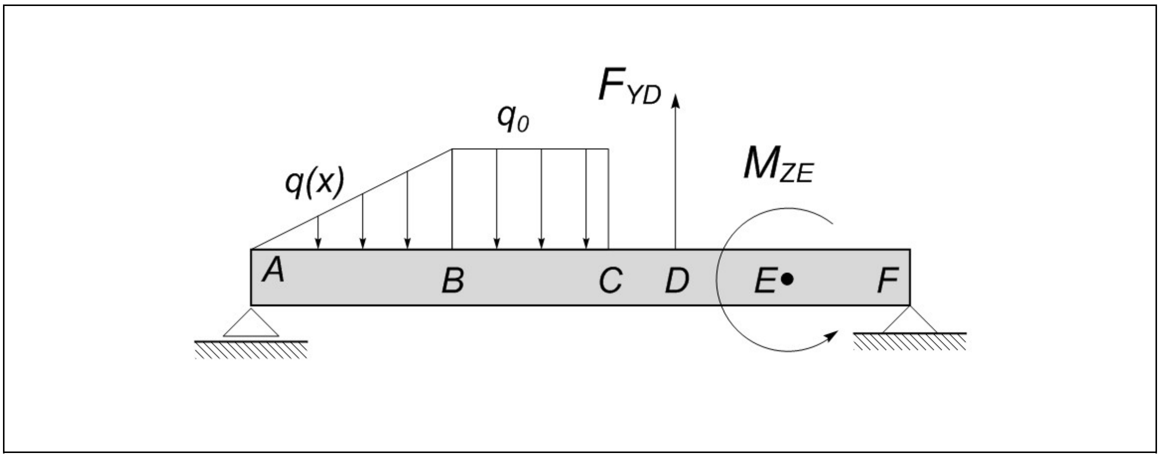

Figura 2.71: Exemplos de carregamentos não tratados até o presente pelo MetEqDifEquil

Introduzir expressões integráveis para estes carregamentos, como dito, é a função deste capítulo. Nos iremos introduzir um algoritmo para descrever estes carregamentos baseado no conceito do que chamamos de **Função de Singularidade**. Vale a pena estudar e ganhar mobilidade no uso das chamadas Funções de Singularidade. Elas são bem úteis para o caso de determinação de esforços internos, mas serão muito mais úteis quando tratarmos dos problemas de deslocamentos nos capítulos 6 a 8.

Descrição do texto didático.

O texto, Cap 2 parte 4, começa discutindo a forma de transitar de esforços distribuídos para esforços concentrados. Tratamos de forças concentradas e momentos concentrados.

Força concentrada. Uma característica importante de uma força concentrada é que ela produz um momento em relação a um ponto qualquer, que cresce linearmente com a distância entre o ponto de aplicação da força e o ponto em relação ao qual se está determinando o momento.

Binário. Existe um sistema de forças que se chama **binário** e está descrito no texto. O importante aqui é que este binário produz o mesmo momento (resultante), um **momento constante**, em relação a qualquer ponto do plano e do espaço. Isto é mostrado no texto. Outro aspecto do binário é que a somatória das forças dele em qualquer direção é sempre nulo.

O texto procura mostrar que existe uma entidade matemática, uma função generalizada ou uma distribuição, chamada de **Delta de Dirac δ(x)**, que é capaz de reproduzir as propriedades físicas e matemáticas de uma força concentrada. Da mesma forma texto mostra que existe uma entidade matemática, na verdade a **derivada** da distribuição Delta de Dirac **dδ(x)/dx= δ'(x)** , que reproduz as propriedades físicas e matemáticas de um **momento concentrado** ou de um **binário**.

Uma parte significativa do texto está dedicada a mostrar como entender o Delta de Dirac como a derivada de uma **função salto unitário** ou **Função de Heaviside, H(x)**. No sentido tradicional do cálculo a derivada da função de Heaviside não fornece diretamente o Delta de Dirac. Assim introduzimos o conceito de funções generalizadas ou de uma família de funções. O texto mostra de forma gráfica, gradualmente que:

$$\delta(x) = \frac{d\mathrm{H}(x)}{dx}$$

Mostra ainda que esta entidade Delta de Dirac pode representar a propriedades físicas e matemáticas de uma força concentrada. Na sequência mostra-se que é possível derivar, no sentido generalizado, o Delta de Dirac e que esta derivada **dδ(x)/dx= δ'(x)** é capaz de reproduzir um momento concentrado ou binário.

Funções de Singularidade.

O capítulo segue introduzindo a definição das chamadas 'Funções de Singularidade', que são definidas como:

$$\langle x-a \rangle^m = \begin{cases} 0 & ; \; x < a \\ (x-a)^m & ; \; x > a \end{cases}$$

Ou seja, as funções de singularidade, que utilizam um parêntesis triangular, são nula para argumentos negativos e são o próprio polinômio para argumentos positivos. Estas funções de singularidade podem ser derivadas e integradas, seguindo o algoritmo mostrado a seguir:

$$\int \langle x-a \rangle^m \, dx = \frac{\langle x-a \rangle^{m+1}}{m+1} \qquad ; \quad m \geq 0$$

$$\int \langle x-a \rangle^{-2} \, dx = \langle x-a \rangle^{-1}$$

$$\int \langle x-a \rangle^{-1} \, dx = \langle x-a \rangle^{0}$$

Estas regras são bem próximas às do cálculo tradicional, exceto pela regra de integração das funções com expoentes negativos.

Com estas funções de singularidade podemos mostrar que a função salto unitário ou função de Heaviside, pode ser escrita em termos das funções de singularidade:

$$\langle x-a \rangle^0 = H(x-a)$$

Na verdade todo o esforço gráfico-analítico das sessões anteriores tem por finalidade mostrar que o a derivada do salto unitário, ou função da de Heaviside, no sentido generalizado é o Delta de Dirac e que pode ser escrita com auxílio das funções de singularidade como:

$$\langle x-a \rangle^{-1} = \delta(x-a)$$

Da mesma forma, o momento concentrado **δ'(x)**, ou binário , pode ser expresso fazendo uso das funções de singularidade:

$$\langle x-a \rangle^{-2} = \delta'(x-a)$$

A figura 2.82, mostra como podemos relacionar as funções de singularidade com diversos expoentes à formas de carregamento com funções descontínuas, forças e momentos concentrados. Uma observação importante é sobre o sentido do momento concentrado ou binário, quando modelado pela função de singularidade $\langle x-a \rangle^{-2}$. O sentido positivo do momento obtido pela aplicação da expressão acima é um momento atuando no 'sentido horário'. Notar que na Convenção de Estática, o momento positivo é no sentido anti-horário. Isto é importante na hora de descrever as expressões de carregamento utilizando-se funções de singularidade.

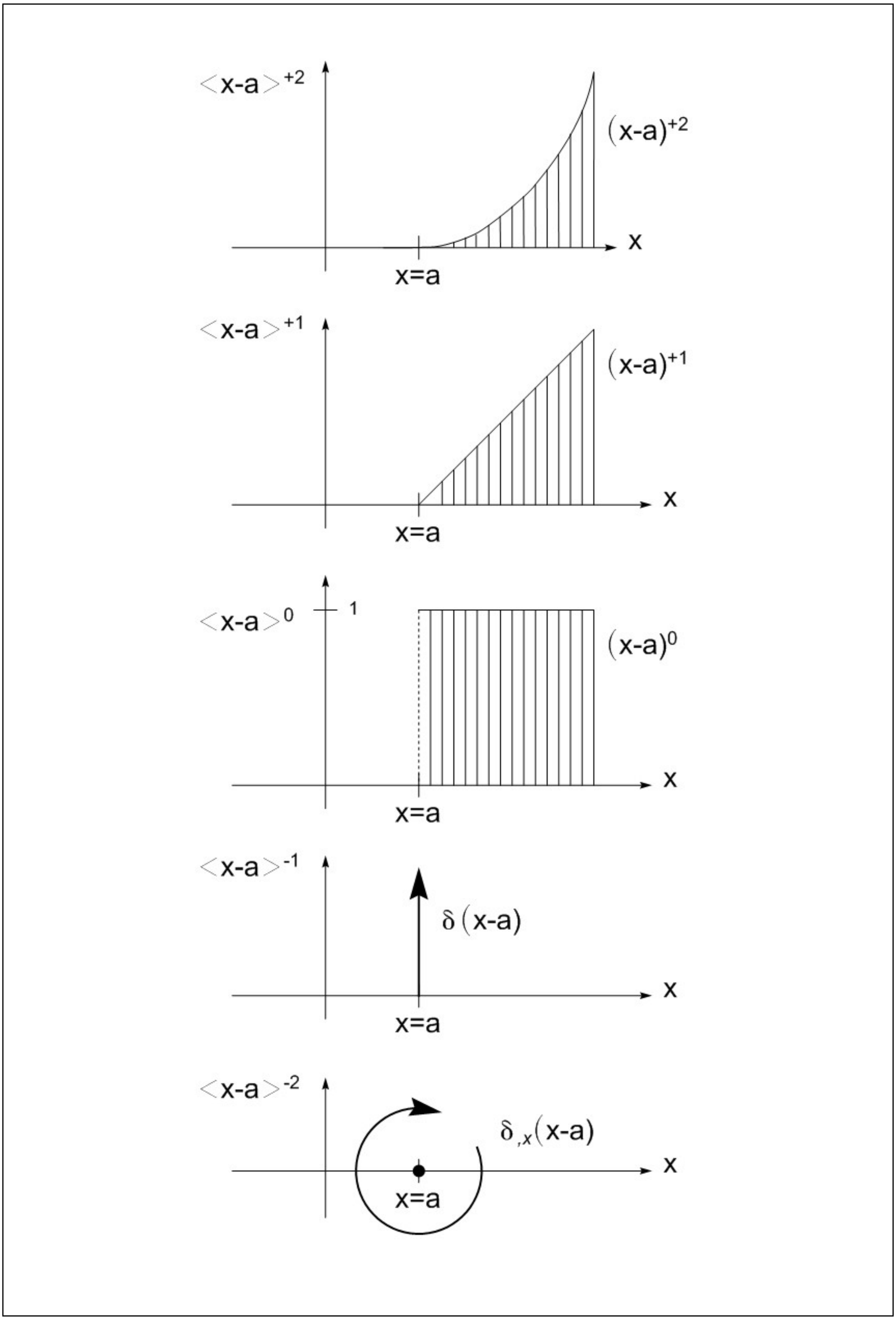

Figura 2.82: Comportamento das Funções de Singularidade

Modelando carregamento com funções de singularidade.

No texto didático

cap 2 parte 5 exercícios e soluções carregamentos com f sing versão abril 2020.pdf

são apresentados exemplos de como utilizar as funções de singularidade para modelar os **carregamentos de** flexão**,** axiais e de torção.

Existem exercícios resolvidos e exercícios propostos. O texto traz uma série de exercícios para determinação de esforços internos em sistemas isostáticos.

Estes exercícios sobre determinação de equações de carregamento com funções de singularidade e mais as condições de contorno que havíamos discutido no capítulo anterior formam a base da Lista de exercícios

Exercícios Ca_CC_FSing

Para ser entregue dia 27 de Abril.