

1- Introdução

O objetivo desta Nota Didática é discutir a forma de incorporarmos o **momento torsor concentrado**, ou seja, um binário e também o **momento fletor concentrado**, outro binário, utilizando as **Funções de Singularidade**. Veremos que embora ambas as grandezas, momento torsor e fletor, sejam momentos, ou melhor binários, a forma de escrever a **equação** de cada **carregamento** utilizando as Funções de Singularidade é distinta.

Inicialmente vamos recordar as definições gráficas das Funções de Singularidade. Reproduzimos abaixo a Figura 2.82 mostra o comportamento das diversas Funções de Singularidade, conforme o grau de seu expoente.

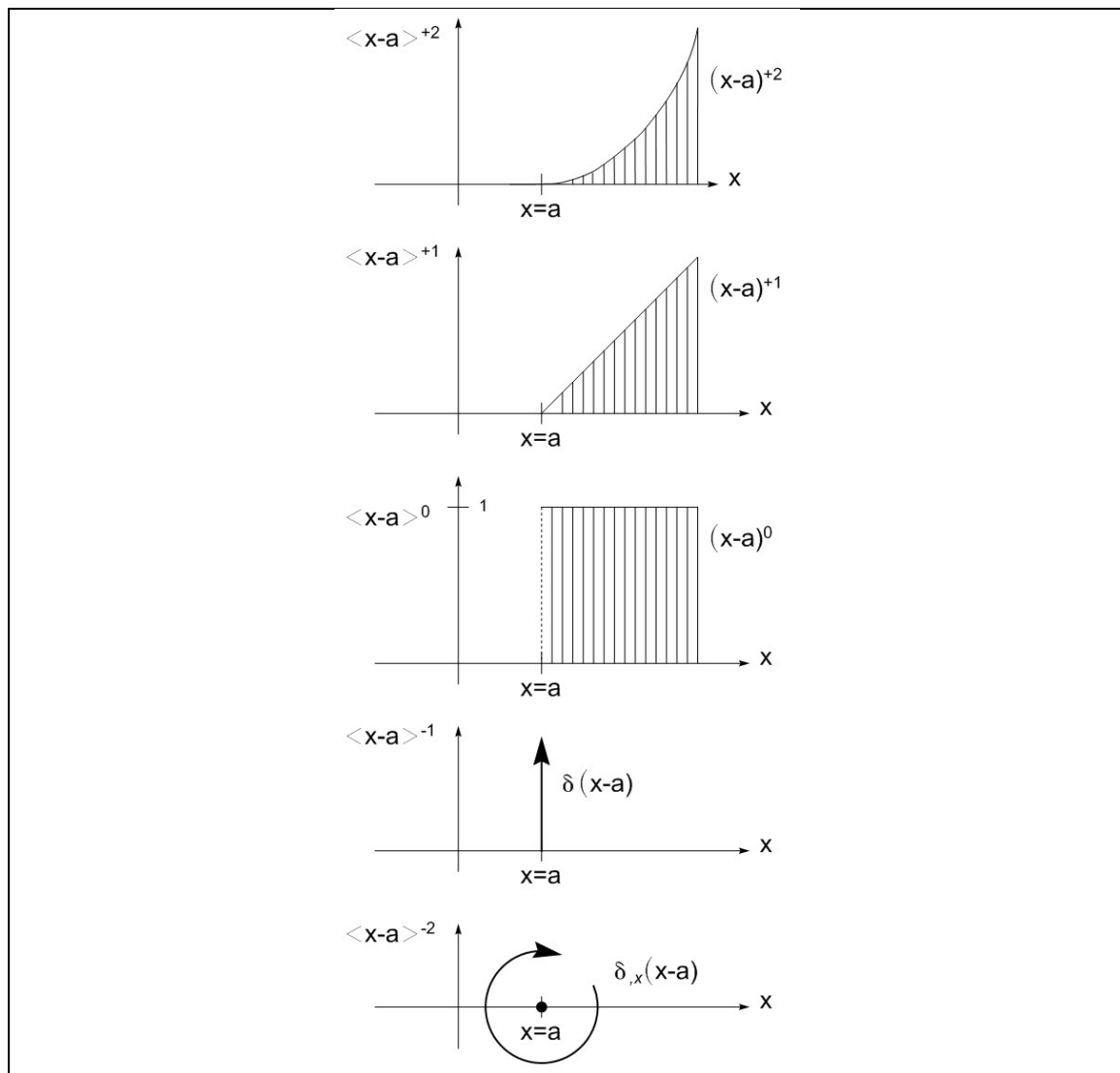


Figura 2.82: Comportamento das Funções de Singularidade

Esta figura 2.82 nos mostra que o **Momento Fletor** concentrado deve ser modelado pela Função de Singularidade com expoente (-2), ou seja $\langle x-a \rangle^{-2}$. Vamos constatar e depois explicar que isto não vale para o **Momento Torsor** concentrado.

Eixos e Convenções

Na figura Figura emodelagem06_2 mostramos os eixos e convenções que serão utilizados nos exemplos seguintes.

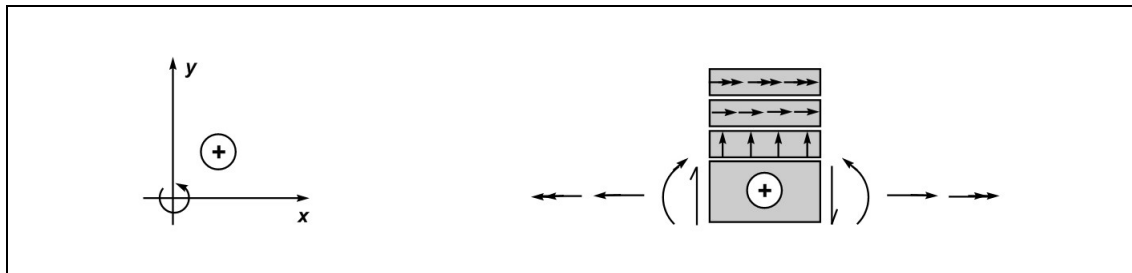


Figura emodelagem06_2: Sistema de coordenadas e Convenções

Flexão

Iniciemos pela **Flexão**. A Figura eqdif viga 15_1 mostrada abaixo apresenta um Momento Fletor, concentrado, aplicado no centro, ponto B, de uma viga bi-apoiada. Este problema já foi tratado neste curso. Vamos escrever a **equação diferencial** que governa o problema bem como a **equação do carregamento**.

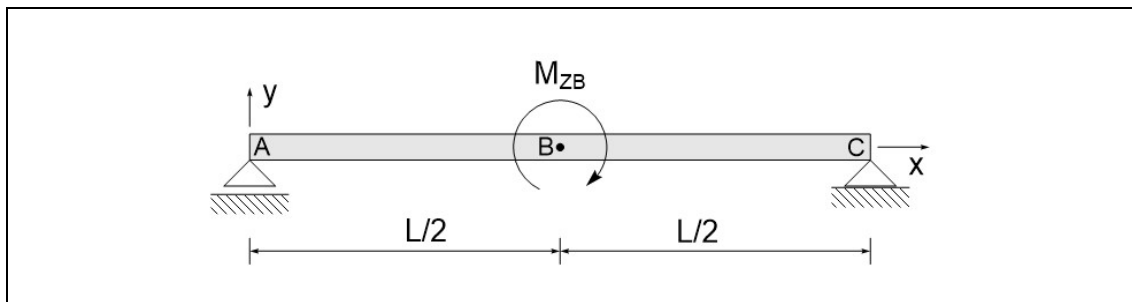


Figura eqdif viga 15_1: Viga bi-apoiada com Momento Fletor concentrado aplicado no ponto B

Equação Diferencial de Equilíbrio

$$\frac{d^2 M_Z(x)}{dx^2} = q(x) \quad (1)$$

Equação de carregamento

$$q(x) = +M_{ZB} \left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle^{-2} \quad (2)$$

Perceba a intensidade M_{ZB} do momento fletor concentrado, o expoente (-2) e o sentido positivo da Função de Singularidade.

Torção.

Vamos agora tratar do problema da Torção tal como o exemplo da Figura exercício eqdif torção 01 com fsging mostrada abaixo.

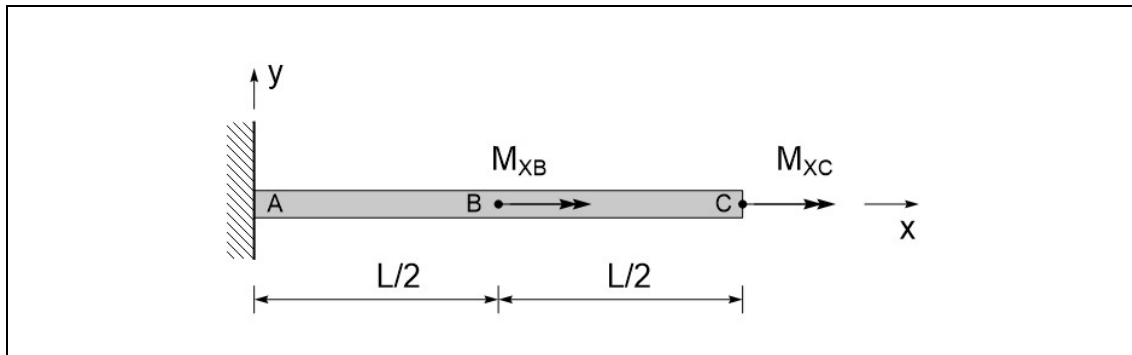


Figura exercício eqdif torção 01 com fsging: Eixo com momento torsor concentrado no ponto B

Vamos também escrever a Equação Diferencial de Equilíbrio e a equação de carregamento.

Diferencial de Equilíbrio

$$\frac{dM_x(x)}{dx} = -t(x) \quad (3)$$

Equação de carregamento

$$t(x) = +M_{XB} \left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle^{-1} \quad (4)$$

A questão.

Estas formulações estão corretas. O problema reside nas equações (2) e (4). O expoente do Momento Torsor concentrado fornecido na expressão (4) é menos um (-1), enquanto o expoente do Momento Fletor concentrado, dado na equação (2) é menos dois (-2). Como explicar que dois momentos sejam descritos por Funções de Singularidade distintos.

A explicação para este problema é o objetivo das presente Nota Didática. Vamos oferecer dois tipos de **explicação**, uma **matemática** e outra **física**.

2 – Abordagem Matemática.

Nesta sessão vamos abordar alguns problemas simples com carregamentos concentrados, barra com força axial concentrada, viga com força transversal concentrada e viga com momento fletor concentrado. Vamos discutir o caráter matemático da solução com auxílio das Funções de Singularidade e depois explicar o problema de momento torsor concentrado aplicado em eixos.

O problema axial com carga concentrada

Barra com uma força concentrada aplicada no domínio. Um resumo da solução está mostrada na **Figura Ob_Did_MoConcentrados_01 axial**.

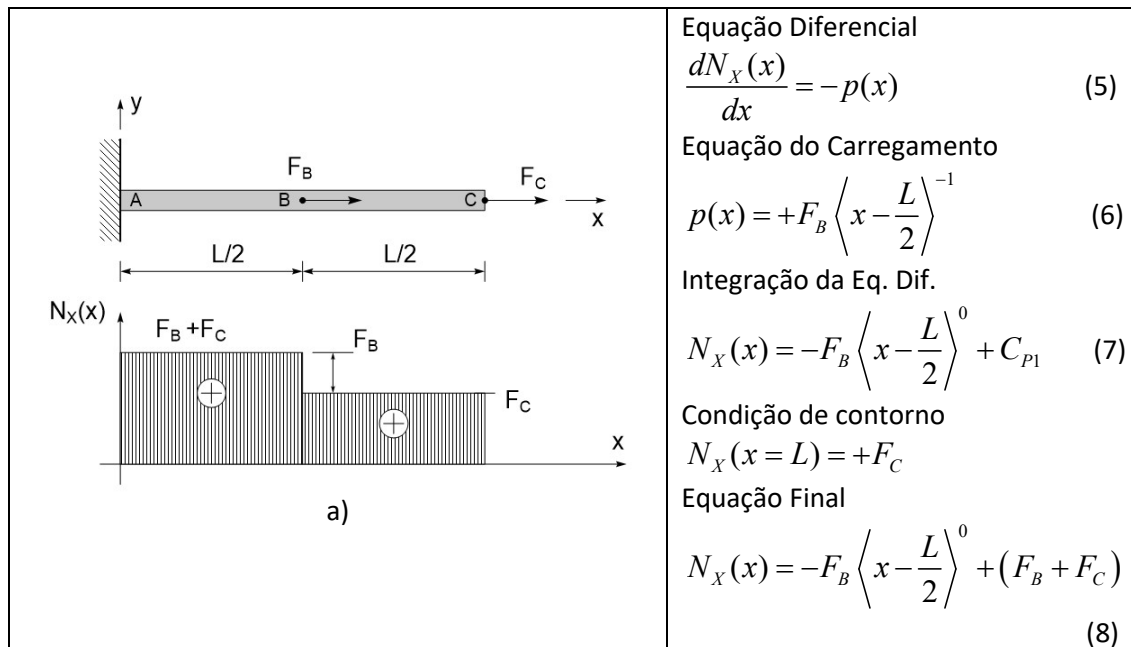


Figura Ob_Did_MoConcentrados_01 axial

Uma análise da **Figura Ob_Did_MoConcentrados_01 axial** mostra que a força axial concentrada F_B entra com o expoente menos um (-1) na expressão do carregamento, ou seja $F_B \langle x - L/2 \rangle^{-1}$. Lembramos que isto representa um Delta de Dirac. A equação de diferencial de equilíbrio (5) é de primeira ordem. Após uma integração e depois de determinada a constante de integração, obtemos a solução do problema.

Na solução (8) temos a função Heaviside com intensidade F_B , ou seja $F_B \langle x - L/2 \rangle^0$. Este salto com intensidade F_B pode ser visto na figura acima. Perceba que entre o carregamento $p(x)$ e a Força Normal $N_x(x)$ somente temos que integrar uma vez. E na solução deve haver um salto, uma descontinuidade dada pela Função de Singularidade $\langle x - a \rangle^0$. Como este salto deve aparecer após uma integração, o expoente do carregamento deve ser menos um, ou seja, $\langle x - a \rangle^{-1}$.

O problema de flexão com força concentrada

Vamos agora tratar de uma viga bi-apoiada com uma força concentrada aplicada no centro, tal com mostrado na figura **Figura Ob_Did_MoConcentrados_02 viga força concentrada**.

Uma análise da **Figura Ob_Did_MoConcentrados_02 viga força concentrada** mostra que a força transversal concentrada F_B entra com o expoente menos um (-1) na expressão do carregamento, ou seja $F_B \langle x - L/2 \rangle^{-1}$. Lembramos que isto representa um Delta de Dirac. A equação de diferencial de equilíbrio (10) é de segunda ordem. Após duas integrações e depois de determinadas as constantes de integração, obtemos a solução do problema.

Na solução (14) temos a função Heaviside com intensidade F_B , ou seja $F_B \langle x - L/2 \rangle^0$. Este salto no esforço cortante $V_y(x)$ com intensidade F_B pode ser visto no diagrama pertinente. Perceba que entre o carregamento $q(x)$ e a Esforço Cortante $V_y(x)$ somente temos que integrar uma vez. E na solução deve haver um salto, uma descontinuidade dada pela Função de Singularidade $\langle x - a \rangle^0$. Como este salto deve aparecer após uma integração, o expoente do carregamento deve ser menos um, ou seja, $\langle x - a \rangle^{-1}$. Esta situação é análoga ao caso da carga axial concentrada.

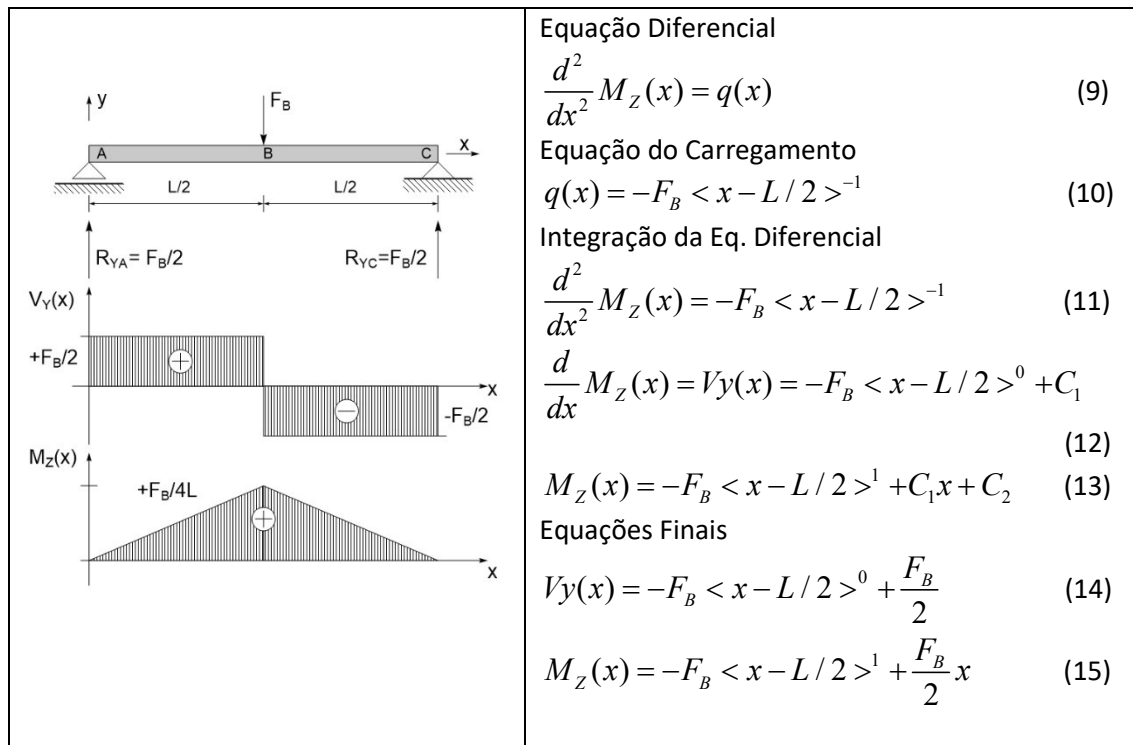


Figura Ob_Did_MoConcentrados_02 viga força concentrada

O problema de flexão com momento concentrado

Vamos agora tratar de uma viga bi-apoiada com uma força concentrada aplicada no centro, tal com mostrado na figura **Figura Ob_Did_MoConcentrados_03 viga forçmomento concentrado**. Na parte esquerda da figura podemos encontrar os diagramas da Esforço Cortante e Momento Fletor. No lado direito algumas das etapas da solução. Em particular o carregamento, a integração da equação diferencial e a solução final. As etapas contendo as condições de contorno e determinação das constantes de integração não estão mostradas. A finalidade é seguir a integração de equação diferencial e mostrar o expoente da função de singularidade.

Este problema em que o carregamento é um momento concentrado já foi resolvido anteriormente. O que vale a pena notar é que no diagrama de momento fletor existe um salto, uma descontinuidade, exatamente no local $x=L/2$ onde o momento fletor M_{zB} é aplicado. Para expressarmos este salto, esta descontinuidade, utilizando as Funções de Singularidade, necessitamos de uma Função Salto Unitário ou uma **Função de Heaviside** $\langle x - a \rangle^0$, de forma que o salto com intensidade M_{zB} seja obtido por $M_{zB} \langle x - L/2 \rangle^0$. Uma análise da equação final do

Momento Fletor (22) mostra que este salto está presente, o que também pode ser visto no diagrama de momento fletor.

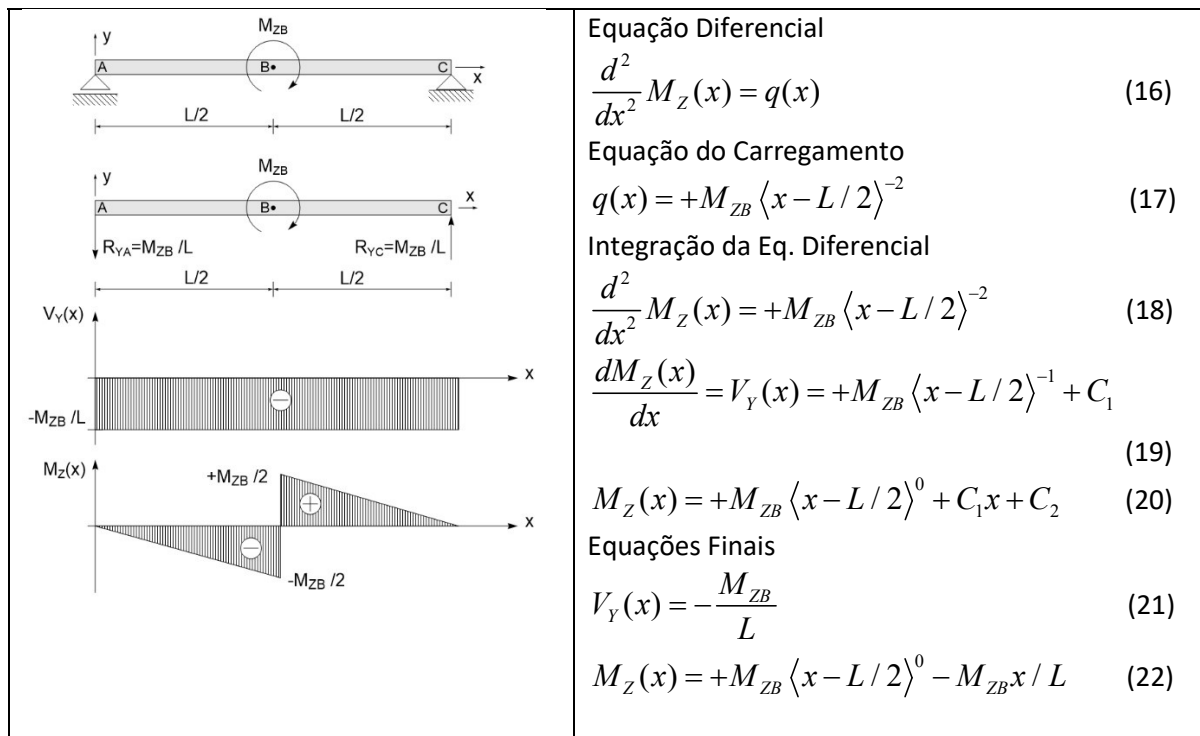


Figura Ob_Did_MoConcentrados_03 viga momento concentrado

Resumo. Se analisarmos os três exemplos anteriores, verificamos que existe um salto, uma descontinuidade nos diagramas correspondentes aos esforços concentrados aplicados, sejam eles uma força axial, uma força transversal ou um momento fletor. O expoente da Função de Singularidade sempre foi de tal ordem, que depois da integração, ele representava um saldo no ponto de aplicação do esforço, representado por $\langle x - L/2 \rangle^0$.

Ou seja o expoente do carregamento era ajustado para que depois de uma ou duas integrações, surgisse a Função Salto Unitário, ou Função de Heaviside $\langle x - L/2 \rangle^0$.

Problema de um momento torsor concentrado.

A figura **Figura exercício eqdif torção 01 com fsing e Mx** nos mostra um eixo sujeito ao um momento torsor concentrado M_{XB} aplicado no ponto $x=L/2$. A questão aqui é discutir como descrever este carregamento concentrado, que no caso é um **Momento Torsor**. No caso de um momento **Fletor** concentrado M_{ZB} utilizamos a função de singularidade com expoente menos dois, $\langle x - L/2 \rangle^{-2}$. Mas a equação diferencial que governa o equilíbrio das vigas era de segunda ordens, ver equação (16) acima.

Aqui no caso da **torção** a equação diferencial de equilíbrio (23) é de primeira ordem. Temos que integrá-la somente uma vez para obtermos a o Momento Torsor atuando no eixo. E como o diagrama de momento torsor $M_X(x)$ deve apresentar um salto, uma descontinuidade, no valor $M_{XB} \langle x - L/2 \rangle^0$ no ponto da aplicação do momento torsor concentrado, o expoente do

momento torsor na expressão do carregamento $t(x)$ deverá ter o expoente menos um (-1), ou seja, $t(x) = M_{xB} \langle x - L/2 \rangle^{-1}$, tal como mostrado na expressão (24). Analisando-se a expressão final do momento torsor, equação (27) percebe-se o salto no ponto da aplicação do momento concentrado, o que também está mostrado na figura correspondente ao lado esquerdo.

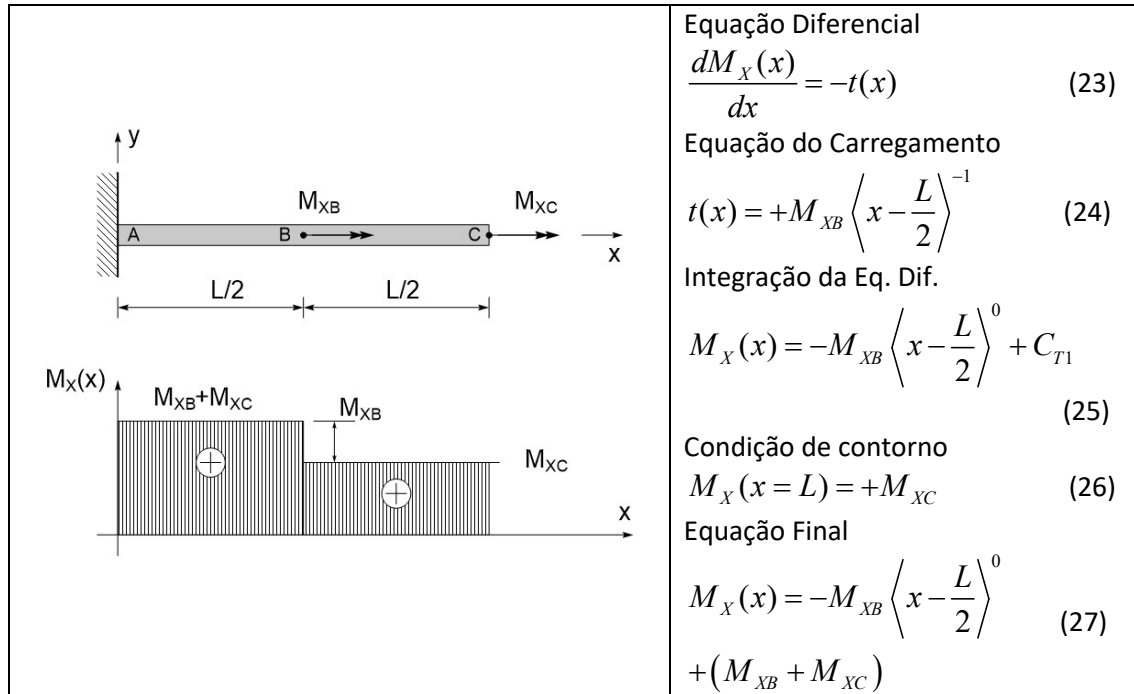


Figura exercício eqdif torção 01 com fsing e M_x

Resumo da Explicação Matemática. Embora tanto o Momento Fletor como o Momento Torsor concentrados sejam entidades representadas por binários, ou momentos livres, sua expressão nas equações de carregamento são diferentes, porque as equações diferenciais que governam o equilíbrio de cada problema são distintos. Abaixo resumimos as expressões de carregamento para o caso de momento fletor M_{ZB} e momento torsor M_{XB} aplicados no ponto $x=L/2$.

Problema de Flexão.

$$q(x) = +M_{ZB} \left\langle x - L/2 \right\rangle^{-2} \quad (17)$$

Problema de Torção

$$t(x) = +M_{XB} \left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle^{-1} \quad (24)$$

3 – Uma explicação física

Uma explicação física para a diferença de modelagem de momentos fletores e torsores com uso das Funções de Singularidade pode ser obtida através das **Figura Ob_Did_MoConcentrados_04** e **Figura Ob_Did_MoConcentrados_05**, mostradas abaixo.

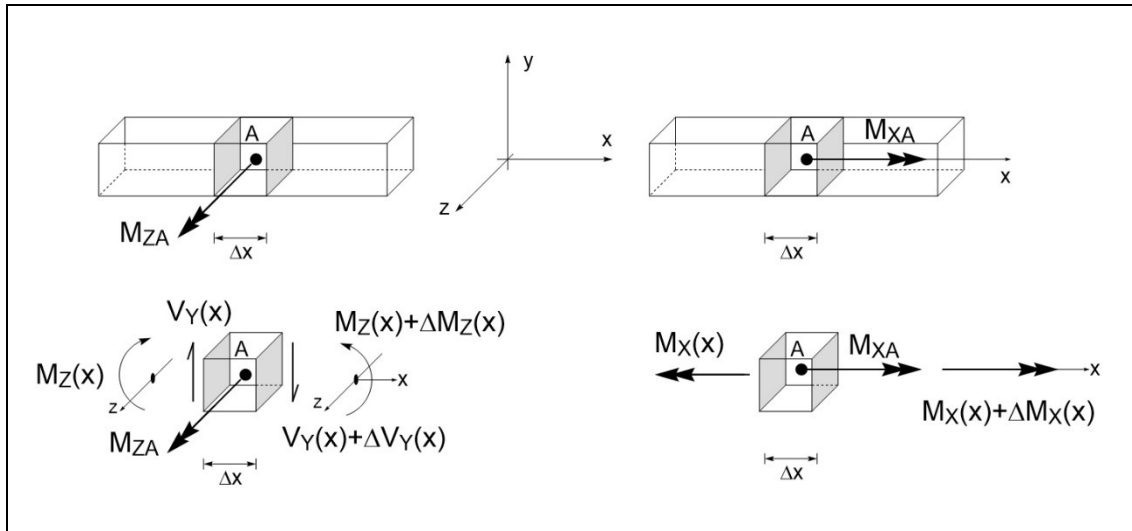


Figura Ob_Did_MoConcentrados_04

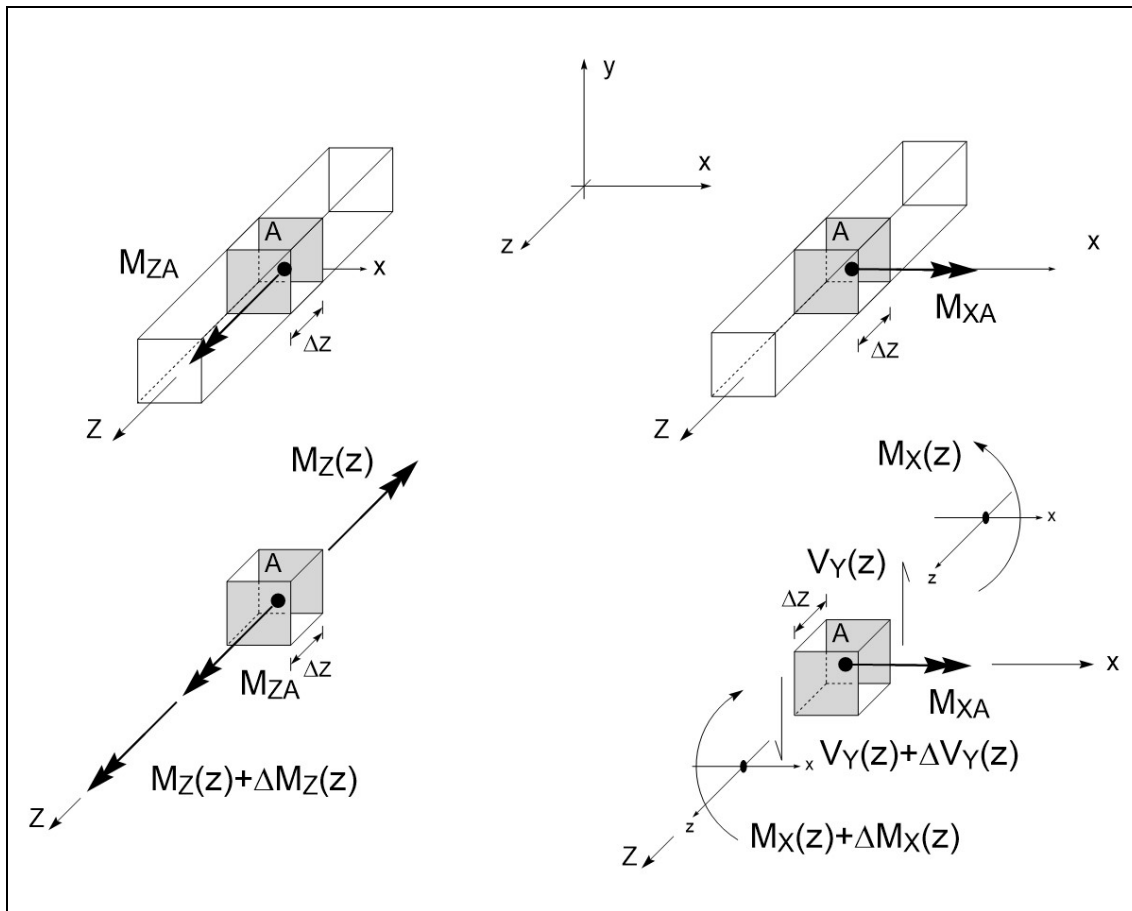


Figura Ob_Did_MoConcentrados_05

Uma comparação entre as duas figuras mostra que os momentos M_x e M_z podem atuar como Momentos Fletores e também como Momentos Torsores. Claramente, quando a estrutura simples que estamos analisando tem seu comprimento principal na direção do eixo 'x', Figura .Ob_Did...04, então o momento $M_x(x)$ é um Momento Torsor, enquanto $M_z(x)$ é um Momento Fletor.

Analogamente, se olharmos a Figura Ob_Did...05, cujo comprimento maior está alinhado ao eixo 'z', então $M_x(z)$ é um Momento Fletor e $M_z(z)$ é um Momento Torsor.

Isto significa que o efeito que um momento $M_i(x_j)$, ($i,j=x,z$) vai depender se ele está **alinhado** como o **eixo da estrutura** ou se ele é **perpendicular ao eixo mais longo da estrutura**. Os momentos que estão **alinhados**, atuando na mesma direção do eixo da estrutura, são **Momentos Torsores**. No caso, M_{xA} na Figura Ob_Did..04 e M_{zA} na Figura Ob_Did 05. Analogamente, os momentos atuando **transversalmente** ao eixo da estrutura são **Momentos Fletores**, no caso, M_{zA} na Figura Ob_Did..04 e M_{xA} na Figura Ob_Did 05.

Mas isto ainda não explica as diferenças na modelagem utilizando as Funções de Singularidade. O que vai explicar a diferença nesta modelagem, ou seja, o grau do expoente negativo na Função de Singularidade $\langle x-a \rangle^{-1}$ ou $\langle x-a \rangle^{-2}$, é o **Mecanismo de Equilíbrio** que atua em cada estrutura.

Equilíbrio dos Momento Torsores

No caso dos **momentos torsores** eles somente podem ser equilibrados por outros momentos torsores alinhados ao eixo da peça. Assim, se repetirmos o equacionamento do equilíbrio do elemento destacados na parte inferior dos temos:

Para Figura Ob_Did_...04:

$$\begin{aligned}
 -M_x(x) + M_{xA} + [M_x(x) + \Delta M_x(x)] &= 0 \\
 \text{Ou} \\
 +M_{xA} + \Delta M_x(x) &= 0
 \end{aligned} \tag{25}$$

A equação (25) mostra que o Momento Torsor concentrado M_{xA} é equilibrado pela variação do também Momento Fletor $\Delta M_x(x)$ atuando na estrutura.

Analogamente para
Figura Ob_Did_...05:

$$\begin{aligned}
 -M_z(z) + M_{zA} + [M_z(z) + \Delta M_z(z)] &= 0 \\
 \text{Ou} \\
 +M_{zA} + \Delta M_z(z) &= 0
 \end{aligned} \tag{26}$$

A equação (26) mostra que o Momento Torsor concentrado M_{zA} é equilibrado pela variação do também Momento Torsor $\Delta M_z(z)$ atuando na estrutura.

Equilíbrio dos Momento Fletores

No caso dos Momentos Fletores as equações de equilíbrio são um pouco mais complexas e envolvem os Esforços Cortantes e a variação do Momento Fletor.

Para Figura Ob_Did_...04:

$$\sum M_z(A) = 0$$

$$-M_z(x) + V_y(x) \Delta x + [M_z(x) + \Delta M_z(x)] = 0$$

ou

$$-V_y(x) \Delta x + M_{zA} + \Delta M_z(x) = 0 \quad (27)$$

A expressão (27) mostra que no caso dos Momentos Fletores concentrados o equilíbrio não é atingido somente pela variação do Momento Fletor $\Delta M_z(x)$ mas também tem contribuição do Esforço Cortante $V_y(x) \Delta x$. Esta expressão levará a uma relação de segunda derivada, ligando o momento concentrado M_{zA} à taxa de carregamento $q(x)$.

Analogamente para a Para Figura Ob_Did_...05

$$-[M_x(z) + \Delta M_x(z)] + V_y(z) \Delta z + M_{xA} - M_x(z) = 0$$

Ou

$$+\Delta M_x(z) + V_y(z) \Delta z + M_{xA} = 0 \quad (28)$$

A expressão (28) mostra que no caso dos Momentos Fletores concentrados o equilíbrio não é atingido somente pela variação do Momento Fletor $\Delta M_x(z)$ mas também tem contribuição do Esforço Cortante $V_y(z) \Delta z$. Esta expressão levará a uma relação de segunda derivada, ligando o momento concentrado M_{xA} à taxa de carregamento $q(z)$.

Resumo.

Os mecanismos de equilíbrio dos momentos concentrados aplicados são distintos, de acordo com o alinhamento dos mesmos. Momentos torsores somente requerem variação do momento tursor para ser equilibrado. Momentos fletores necessitam variação de momentos fletores e também da contribuição dos esforços cortantes para gerar equilíbrio. Esta diferença 'física' dá origem ao distinto expoente na formulação matemática através das Funções de Singularidade.