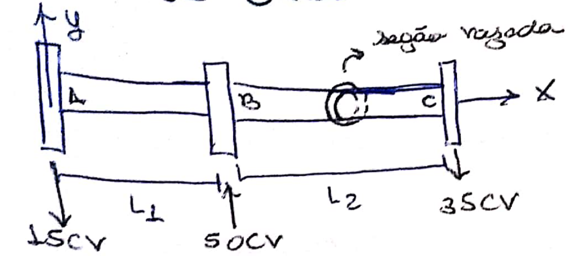
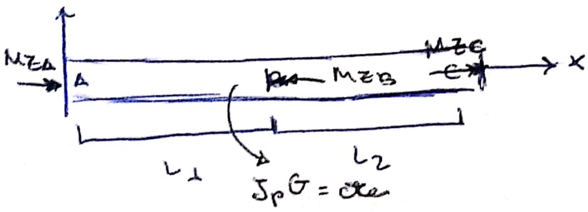
Lista de Exercícios 11. Letícia Lovein Diniz 201438





1a)
dimensionar o eixo

$\tau_{max} = 60\, N/mm^2$

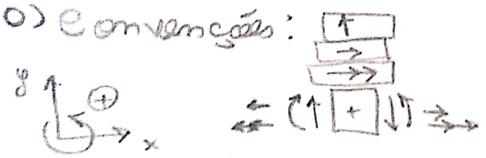
$\phi_{AC} \leq \frac{\pi}{500}$ rad

$N_M = 900$ RPM

$\frac{d_i}{d_E} = 0,9$

Para dimensionar o eixo precisamos primeiro encontrar $M_x(x)$ e $\phi(x)$. Para isso:

0) Convenções:



1) Determinação dos momentos torsores em A, B e C:

$$7023,5\ W_{cv} = M_x \cdot N_M$$

potência em CV — em Nm — em RPM

$$M_{ZA} = +\frac{7023,5 \cdot 15CV}{900\ RPM} = +117,058\ Nm$$

$$M_{ZB} = \frac{7023,5 \cdot 50CV}{900\ RPM} = 390,194\ Nm$$

$$M_{ZC} = +\frac{7023,5 \cdot 35CV}{900\ RPM} = +273,136\ Nm$$

devido ao sentido

$$M_{ZA} - M_{ZB} + M_{ZC} = 0$$

↳ momentos em equilíbrio, assim a situação é estacionária.

2) Eq. diferencial:

$$J_p\, G \frac{d^2\phi}{dx^2} = -t(x)$$

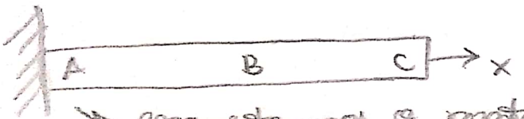
3) Eq. de carregamento:

$$t(x) = -M_{ZB} \langle x - L_1 \rangle^{-1}$$

4) Condições de contorno:

Precisamos de uma referência para o ângulo de torção, pois estamos interessados na rotação relativa entre os pontos do eixo.

Assim:



→ engastamos o ponto A

$$\phi(x=0) = 0$$

$$M_x(x = L_1 + L_2) = +M_{Z_C}$$

5) Integração:

$$J_P G \frac{d^2\phi}{dx^2} = -(-M_{ZB} \langle x - L_1 \rangle^{-1}) = +M_{ZB} \langle x - L_1 \rangle^{-1}$$

$$J_P G \frac{d\phi}{dx} = M_{ZB} \langle x - L_1 \rangle^{0} + C_1 = M_x(x)$$

$$J_P G \phi(x) = M_{ZB} \langle x - L_1 \rangle^{1} + C_1 x + C_2$$

6) Constantes:

$$J_p G \phi(x=0) = 0 = M_{zB} \underbrace{\langle 0 - L_1 \rangle^1}_{=0} + C_1 \cdot 0 + C_2$$

$$\therefore C_2 = 0$$

$$J_p G \frac{d\phi(x = L_1 + L_2)}{dx} = M_x(x = L_1 + L_2) = + M_{zB} \underbrace{\langle \cancel{L_1} + L_2 - \cancel{L_1} \rangle^0}_{=1} + C_1 = + M_{zC}$$

$$M_{zB} + C_1 = M_{zC}$$

$$\therefore C_1 = M_{zC} - M_{zB}$$

7) Eqs. finais:

$$M_x(x) = + M_{zB} \langle x - L_1 \rangle^0 + (M_{zC} - M_{zB})$$

$$J_p G \phi(x) = M_{zB} \langle x - L_1 \rangle^1 + (M_{zC} - M_{zB})\, x$$

f) Eqs. finais:

$\therefore C_1 = M_{zC} - M_{zB}$

$$M_x(x) = +M_{zB}\langle x - L_1\rangle^0 + (M_{zC} - M_{zB})$$

$$J_p G \phi(x) = M_{zB}\langle x - L_1\rangle^1 + (M_{zC} - M_{zB})x$$

Precisamos analisar se o momento em A não foi alterado pelo engaste que adicionamos, de modo que não alteramos o problema original:

$$M_x(x=0) = M_{zC} - M_{zB} = 273,136 - (390,194) = \underline{-117,058\ \text{Nm}}$$

igual ao valor de M_{zA} obtido com o sinal adequado pela convenção de Res Mat

Agora que

convenção de Res Mat

Agora que conhecemos $M_x(x)$ e $J_p, G\phi(x)$, podemos dimensionar o eixo:

$$\tau(r) = \frac{M_x(x)}{J_p(x)} \cdot r$$, como $J_p(x) = cte$, obteremos a tensão máxima em:

raio externo

$$\tau_{max} = \tau(R) = \frac{M_{x\,max} \cdot R_e}{J_p}$$

Nossa sessão é tal que:

$$J_p = \int_A r^2 dA = \int_{R_i}^{R_e} r^2 (2\pi r\, dr)$$

$$J_p = \frac{2\pi}{4}\left[R_e^4 - R_i^4\right]$$

$$R_e = \frac{d_e}{2} \qquad R_i = \frac{d_i}{2}$$

$$J_p = \frac{\pi}{32}(d_e^4 - d_i^4)$$

Além disso:

P/ $0 < x < L_1$:

$$M_x(x) = M_{ZC} - M_{ZB}$$

P/ $L_1 < x < L_2 + L_1$

$$M_x(x) = M_{ZC}$$

Assim, $M_{x\,max}$ é: $M_{x\,max} = M_{ZC}$

$$\tau_{max} = \frac{M_{ZC}}{\frac{\pi}{32}(d_e^4 - d_i^4)} \cdot \frac{d_e}{2}$$, temos também a seguinte condição:

$$\frac{d_i}{d_e} = 0{,}9$$

$$d_i = 0{,}9\, d_e$$

Logo:

$$\tau_{max} = \frac{M_{zc}}{\frac{\pi}{32}\left(de^4 - (0{,}9\,de)^4\right)} \cdot \frac{de}{2} = \frac{M_{zc}}{\frac{\pi}{32}\,de^{\cancel{4}\,3} \cdot 0{,}3439} \cdot \frac{\cancel{de}}{2}$$

$$\tau_{max} = \frac{M_{zc} \cdot 16}{\pi\, de^3\, 0{,}3439} \Rightarrow de = \sqrt[3]{\frac{M_{zc} \cdot 16}{\pi\, \tau_{max} \cdot 0{,}3439}}$$

Substituindo valores temos: $\tau_{max} = 60\,N/mm^2$

$$de = 40{,}699\,mm \rightarrow \text{diâmetro mínimo}$$

Devemos garantir também que $\phi_{AC} \leq \pi/500$

$$\phi_{AC} = \phi(x = L_1 + L_2) = \frac{M_{zc} L_1 + M_{zc} L_2 - M_{zB} L_1}{J_p\, G} \leq \pi/500$$

$$\phi_{AC} = \frac{(M_{zc} L_1 + M_{zc} L_2 - M_{zB} L_1)\,32}{\pi\,(de^4 - di^4)\,G} \leq \frac{\pi}{500}$$

$$\phi_{AC} = \frac{(M_{zc}L_1 + M_{zc}L_2 - M_{zB}L_1)32}{\pi(de^4 - di^4)G} \leq \frac{\pi}{500}$$

Substituindo os valores : $L_1 = 600mm$, $L_2 = 800mm$, $G = 85GPa$

$$\phi_{AC} = \frac{4744,768}{(de^4 - di^4)\pi G} \leq \frac{\pi}{500} \Rightarrow \frac{(4744,768)500}{G\pi^2} \leq de^4 - di^4$$

$$2,8279 \cdot 10^{-6} \leq de^4 - di^4$$

$$2,8279 \cdot 10^{-6} \leq de^4 - (0,9de)^4$$

$$8,223 \cdot 10^{-6} \leq de^4$$

$$53,550mm \leq de$$

Assim, tomando:

$de = 53,550mm$ obtemos o diâmetro mínimo que respeita as condições 1 e 2.

$\therefore de = 53,550\ mm$ e $di = 48,195mm$

Podemos conferir se respeitamos as condições dadas:

$$\tau_{max} = \frac{M_{zc}}{\frac{\pi}{32}(de^4 - di^4)} \cdot \frac{de}{2} = 26,341 \cdot 10^6 N/m^2 = 26,341 N/mm^2 < 60 N/mm^2$$

$$\phi_{AC} = \frac{(M_{zc}L_1 + M_{zc}L_2 - M_{zB}L_1)32}{\pi(de^4 - di^4)G} = 6,283 \cdot 10^{-3} = \frac{\pi}{500} rad$$

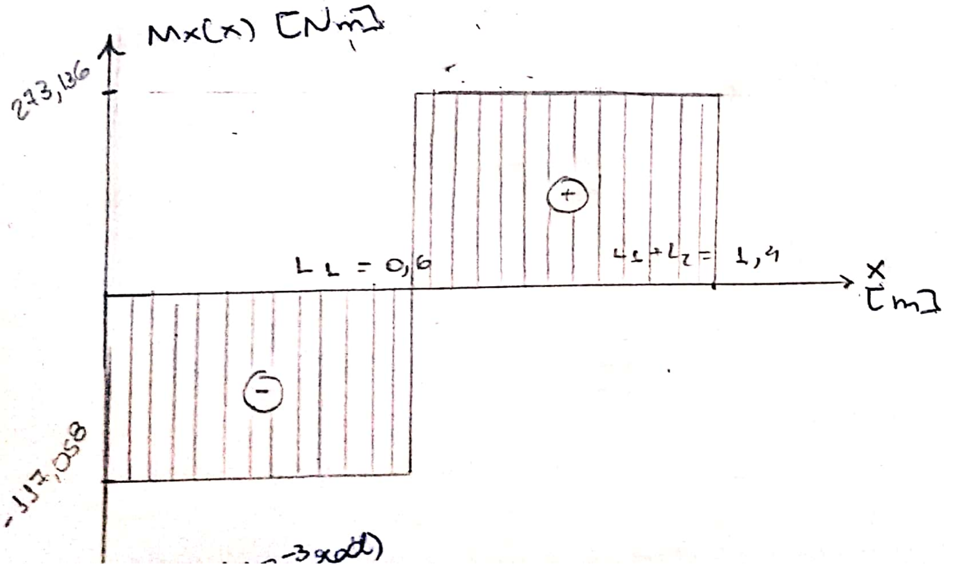
3) $Mx(x) = +M_{ZB}\langle x - L_1\rangle^0 + (M_{ZC} - M_{ZB})$

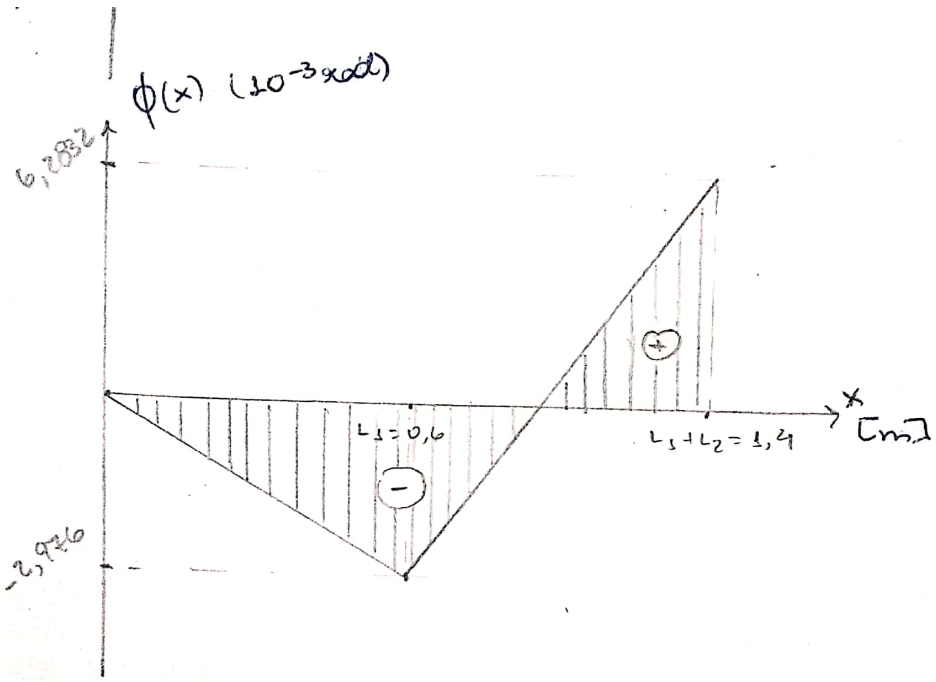
$$\phi(x) = \frac{M_{ZB}\langle x - L_1\rangle^1}{J_p G} + \frac{(M_{ZC} - M_{ZB})x}{J_p G} \quad , \; J_p = \frac{\pi}{32}(d_e^4 - d_i^4)$$

Substituindo os valores:

$$Mx(x) = 390{,}194\langle x - 0{,}6\rangle^0 - 117{,}058 \;\; Nm$$

$$\phi(x) = (16{,}534\langle x - 0{,}6\rangle^1 - 4{,}960x)\, 10^{-3} \; rad$$



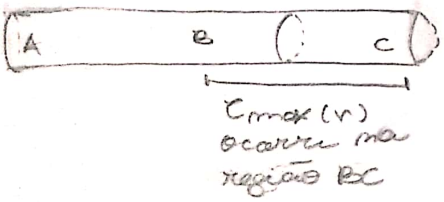


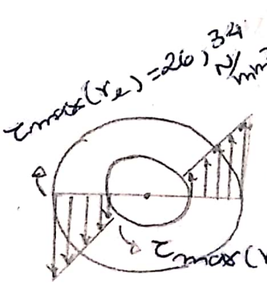
$\phi(x)$ (10^{-3}rad)
6,2832
-2,976
$L_1 = 0,6$
$L_1 + L_2 = 1,4$
x
[m]

4) τ_{max} :

$$\tau(r) = \frac{M_x(x)\, r}{J_p} = (1,405 \langle x - 0,6 \rangle^0 - 0,421)\, r \ N/mm$$

$\tau_{max}(r) = (0,984\, r)\ N/mm^2$ → ocorre em $L_1 < x < L_1 + L_2$ $(0,6 < x < 1,4)\,m$, pois é onde $M_x(x)$ é máximo





→ em $r = r_e$ temos a máxima tensão existente no eixo