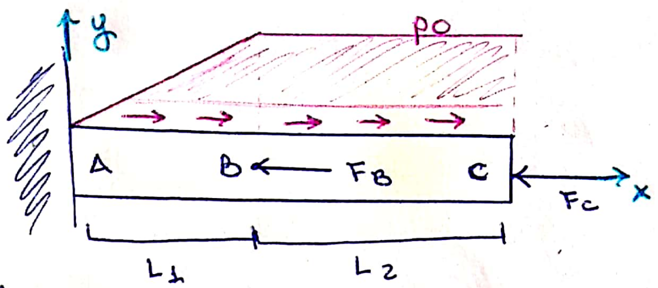
Lista de exercícios 10 - Letícia Lenin Diniz 201438

Parte 1.



dados: $L_1 = 2m$ $p_0 = 1000 N/m$

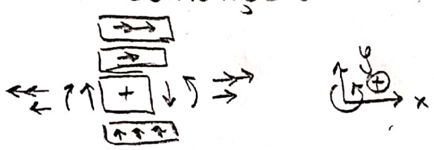
$L_2 = 2m$ $F_B = 1000N$

$F_C = 2000N$ $A = 180\ mm^2$

$E = 210\ GPa$

1) expressões de $N_x(x)$ e de $\sigma_{xx}(x)$ e diagramas

1.0) Convenções



1.1) Equação diferencial de equilíbrio

$$\frac{dN_x(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[A(x)E\frac{du(x)}{dx}\right] = -p(x)$$

$A(x) = A \rightarrow$ constante

$$AE\frac{d^2u(x)}{dx^2} = -p(x)$$

1.2) Equação de carregamento:

$$p(x) = \frac{p_0}{L_1}\langle x-0\rangle^1 - \frac{p_0}{L_1}\langle x-L_1\rangle^1 - F_B\langle x-L_1\rangle^{-1}$$

1.3) Condições de contorno:

$u(x=0) = 0$ $N_x(x = L_1+L_2) = -F_C$

Digitalizado com CamScanner

1.4) Integrações:

$$AE\frac{d^2u(x)}{dx^2} = -\frac{po}{L_1}\langle x-0\rangle^1 + \frac{po}{L_1}\langle x-L_1\rangle^1 + F_B\langle x-L_1\rangle^{-1}$$

$$AE\frac{du(x)}{dx} = Nx(x) = -\frac{po}{L_1}\frac{\langle x-0\rangle^2}{2} + \frac{po}{L_1}\frac{\langle x-L_1\rangle^2}{2} + F_B\langle x-L_1\rangle^0 + C_1$$

1.5) Constantes de integração:

Como só nos interessa $Nx(x)$, temos apenas uma constante

$$Nx(x=L_1+L_2) = -F_C = -\frac{po}{L_1}\frac{\langle L_1+L_2-0\rangle^2}{2} + \frac{po}{L_1}\frac{\langle L_1+L_2-L_1\rangle^2}{2} + F_B\langle L_1+L_2-L_1\rangle^0 + C_1$$

$$Nx(x=L_1+L_2) = -F_C = -\frac{po}{L_1}\frac{(L_1+L_2)^2}{2} + \frac{po}{L_1}\frac{(L_2)^2}{2} + F_B(L_2)^0 + C_1$$

$$-F_C = -\frac{poL_1}{2} - poL_2 + F_B + C_1$$

$$C_1 = -F_C + \frac{poL_1}{2} + poL_2 - F_B$$

Digitalizado com CamScanner

1.6) Equação Final:

$$N_x(x) = -\frac{p_o}{L_1}\frac{\langle x-0\rangle^2}{2} + \frac{p_o}{L_1}\frac{\langle x-L_1\rangle^2}{2} + F_B\langle x-L_1\rangle^0 + \left(-F_c + \frac{p_o L_1}{2} + p_o L_2 - F_B\right)$$

1.7) Tensão normal:

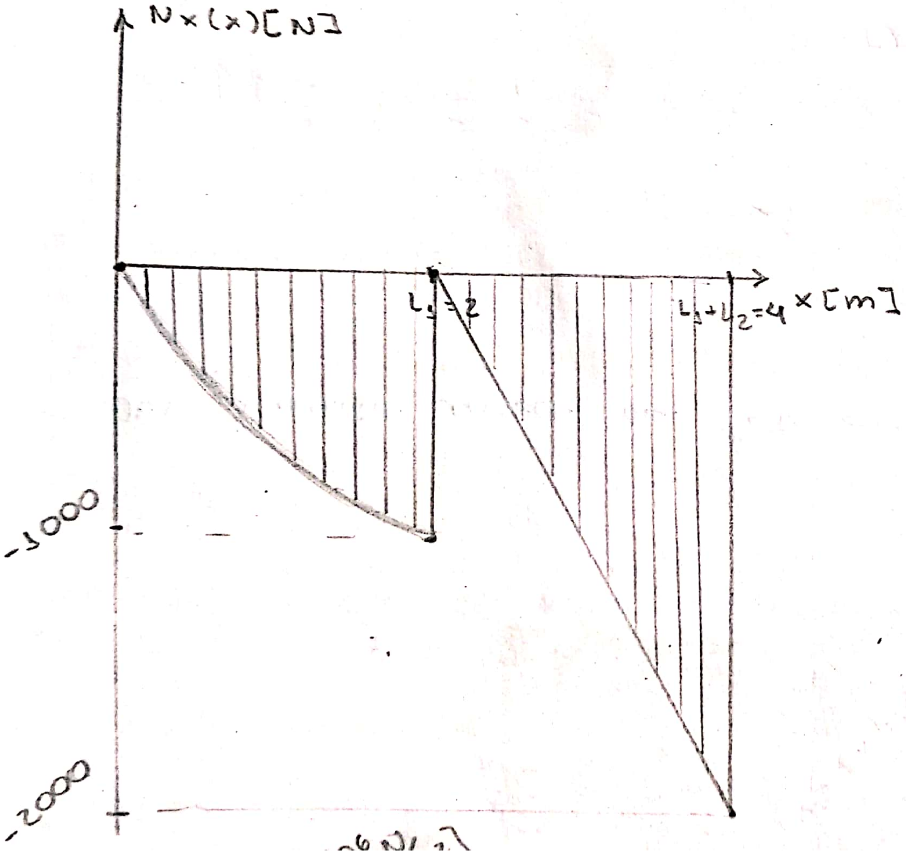
$$\sigma_{xx}(x) = \frac{N_x(x)}{A} = \frac{-p_o}{L_1 A}\frac{\langle x-0\rangle^2}{2} + \frac{p_o}{L_1 A}\frac{\langle x-L_1\rangle^2}{2} + \frac{F_B}{A}\langle x-L_1\rangle^0 + \left(-\frac{F_c}{A} + \frac{p_o L_1}{2A} + \frac{p_o L_2}{A} - \frac{F_B}{A}\right)$$

Digitalizado com CamScanner

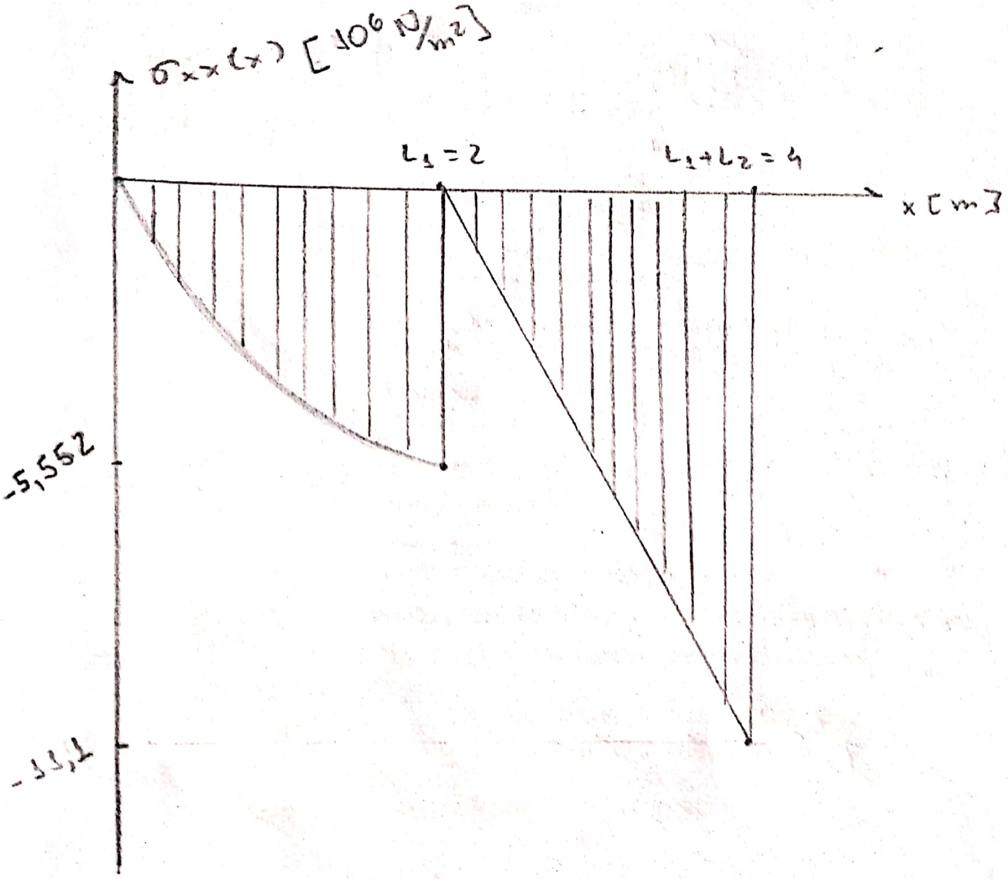
1.8) Substituindo os valores:

$$N_x(x) = -250\langle x-0\rangle^2 + 250\langle x-2\rangle^2 + 1000\langle x-2\rangle^0 \ N$$

$$\sigma_{xx}(x) = (-1{,}388\langle x-0\rangle^2 + 1{,}388\langle x-2\rangle^2 + 5{,}555\langle x-2\rangle^0)\,10^6 \ N/m^2$$



Digitalizado com CamScanner



a) ponto e valor de tensão normal máxima

Pelo gráfico, observamos que σ_{xx} máxima (em módulo) ocorre em $x = L_1 + L_2 = 4\,m$, $|\sigma_{xx_{máx}}(4)| = 11,101 \cdot 10^6 N/m^2$

Digitalizado com CamScanner

3) expressão e diagrama de $u(x)$; u_{max}

Retornando ao ponto 1.4)

$$AE\frac{du(x)}{dx} = -\frac{p_0\langle x-0\rangle^2}{2L_1} + \frac{p_0\langle x-L_1\rangle^2}{2L_1} + F_B\langle x-L_1\rangle^0 + C_1$$

$$AE\,u(x) = -\frac{p_0\langle x-0\rangle^3}{6L_1} + \frac{p_0\langle x-L_1\rangle^3}{6L_1} + F_B\langle x-L_1\rangle^1 + C_1x + C_2$$

Para achar C_2, utilizaremos C_1 encontrada em 1.5 e a condição de contorno restante $(u(x=0)=0)$

$$AE\,u(0) = 0 = -\frac{p_0\langle 0-0\rangle^3}{6L_1} + \cancel{\frac{p_0\langle 0-L_1\rangle^3}{6L_1}} + \cancel{F_B\langle 0-L_1\rangle^1} + C_1 0 + C_2$$

$$\therefore C_2 = 0$$

Assim:

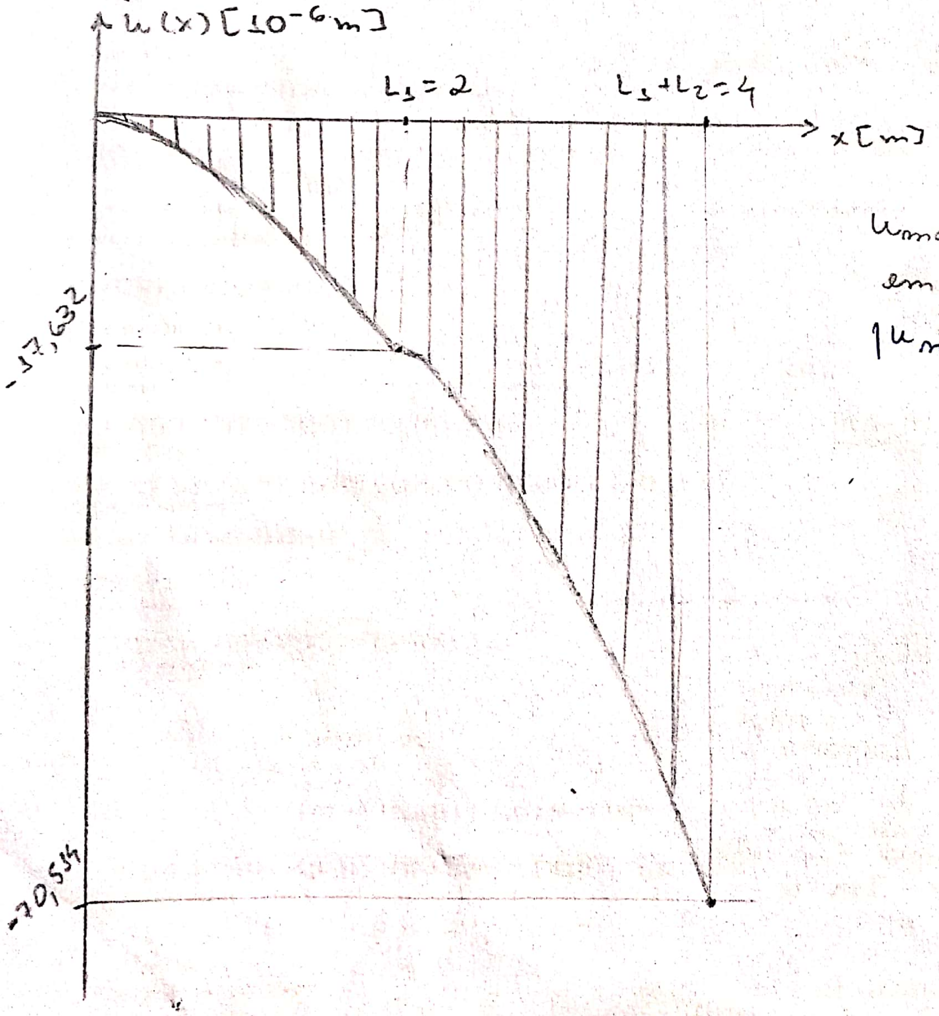
$$u(x) = \frac{1}{AE}\left[-\frac{p_0\langle x-0\rangle^3}{6L_1} + \frac{p_0\langle x-L_1\rangle^3}{6L_1} + F_B\langle x-L_1\rangle^1 + \left(-F_C + \frac{p_0L_1}{2} + p_0L_2 - F_B\right)x\right]$$

Digitalizado com CamScanner

Substituindo os valores:

$$u(x) = (-2{,}204\langle x-0\rangle^3 + 2{,}204\langle x-2\rangle^3 + 26{,}455\langle x-2\rangle^1)\,10^{-6}\,m$$

Diagrama:



$u_{máx}$ em módulo ocorre em $x = L_1 + L_2 = 4\,m$,

$$|u_{máx}(4)| = 70{,}514 \cdot 10^{-6}\,m$$

Digitalizado com CamScanner

Parte 2: 4)

F_c para $u(x = L_1 + L_2) = u_C = 0$

$$u(x) = \frac{1}{AE}\left[-\frac{p_0\langle x-0\rangle^3}{6L_1} + \frac{p_0\langle x-L_1\rangle^3}{6L_1} + F_B\langle x-L_1\rangle^1 + \left(-F_C + \frac{p_0L_1}{2} + p_0L_2 - F_B\right)x\right]$$

$$u(L_1+L_2) = \frac{1}{AE}\left[-\frac{p_0(L_1+L_2)^3}{6L_1} + \frac{p_0L_2^3}{6L_1} + F_BL_2 - F_CL_1 - F_CL_2 + \frac{p_0L_1^2}{2} + \frac{p_0L_1L_2}{2} + p_0L_2^2 + p_0L_1L_2 - F_BL_1 - F_BL_2\right] = 0$$

$$u(L_1+L_2) = \frac{1}{AE}\left[-\frac{p_0L_1^2}{6} - \cancel{\frac{L_1L_2p_0}{2}} - \frac{L_2^2p_0}{2} - \cancel{\frac{p_0L_2^3}{6L_1}} + \cancel{\frac{p_0L_2^3}{6L_1}} + \cancel{F_BL_2} - F_CL_1 - F_CL_2 + \frac{p_0L_1^2}{2} + \cancel{\frac{p_0L_1L_2}{2}} + p_0L_2^2 + p_0L_1L_2 - F_BL_1 - \cancel{F_BL_2}\right] = 0$$

$$u(L_1+L_2) = \frac{1}{AE}\left[\frac{p_0L_1^2}{3} + \frac{p_0L_2^2}{2} + p_0L_1L_2 - F_BL_1 - F_C(L_1+L_2)\right] = 0$$

Assim,

$$\frac{p_0L_1^2}{3} + \frac{p_0L_2^2}{2} + p_0L_1L_2 - F_BL_1 = F_C(L_1+L_2)$$

$\therefore$ para $u(L_1+L_2) = 0$,

$$F_C = \left(\frac{p_0L_1^2}{3} + \frac{p_0L_2^2}{2} + p_0L_1L_2 - F_BL_1\right)\frac{1}{L_1+L_2}$$

Substituindo os valores:

Digitalizado com CamScanner

$\therefore$ para $u(L_1+L_2)=0$,

$$F_C = \left(\frac{p_0 L_1^2}{3} + \frac{p_0 L_2^2}{2} + p_0 L_1 L_2 - F_B L_1\right)\frac{1}{L_1+L_2}$$

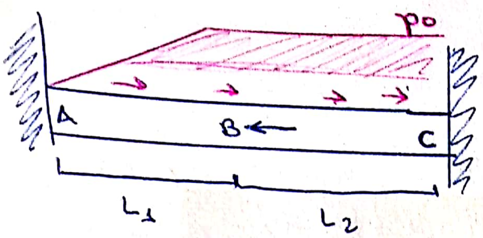
Substituindo os valores:

$$F_C = \frac{8000}{6} = 1333{,}334\,N$$

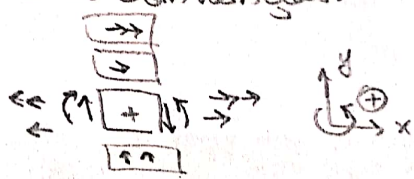
Digitalizado com CamScanner

Parte 3:

5) $N_x(x)$ e $\sigma_{xx}(x)$



5.0) Convenções:



dados: $L_1 = 2m$ $\quad$ $p_0 = 1000N/m$

$L_2 = 2m$ $\quad$ $F_B = 1000N$

$A = 180mm^2$ $\quad$ $E = 210GPa$

5.1) Equação diferencial de equilíbrio:

$$AE \frac{d^2u(x)}{dx^2} = -p(X)$$

5.2) Equação de carregamento:

$$p(x) = \frac{p_0}{L_1}\langle x-0\rangle^1 - \frac{p_0}{L_1}\langle x-L_1\rangle^1 - F_B\langle x-L_1\rangle^{-1}$$

5.3) Condições de contorno:

$u(x=0) = 0$ $\qquad$ $u(x=L_1+L_2) = 0$

Digitalizado com CamScanner

5.4) Integrações:

$$AE\frac{d^2u(x)}{dx^2} = -\frac{po}{L_1}\langle x-0\rangle^1 + \frac{po}{L_1}\langle x-L_1\rangle^1 + F_B\langle x-L_1\rangle^{-1}$$

$$AE\frac{du(x)}{dx} = N_x(x) = -\frac{po\langle x-0\rangle^2}{L_1 2} + \frac{po\langle x-L_1\rangle^2}{2L_1} + F_B\langle x-L_1\rangle^0 + C_1$$

$$AEu(x) = -\frac{po\langle x-0\rangle^3}{6L_1} + \frac{po\langle x-L_1\rangle^3}{6L_1} + F_B\langle x-L_1\rangle^1 + C_1x + C_2$$

5.5) Constantes de integração:

$$AEu(x=0) = 0 = -\frac{po\langle 0-\cancel{0}\rangle^3}{\cancel{6L_1}}^{0} + \frac{po\langle 0-\cancel{L_1}\rangle^3}{\cancel{6L_1}}^{0} + F_B\cancel{\langle 0-L_1\rangle^1}^{0} + C_1 \cdot 0 + C_2$$

$$\therefore C_2 = 0$$

Digitalizado com CamScanner

$$AE\omega(x=L_1+L_2) = 0 = -\frac{p_0\langle L_1+L_2-0\rangle^3}{6L_1} + \frac{p_0\langle L_1+L_2-L_1\rangle^3}{6L_1} + F_B\langle L_1+L_2-L_1\rangle^1$$

$$+ C_1(L_1+L_2)$$

$$0 = -\frac{p_0(L_1+L_2)^3}{6L_1} + \frac{p_0(L_2)^3}{6L_1} + F_B(L_2) + C_1(L_1+L_2)$$

$$0 = -\frac{p_0L_1^2}{6} - \frac{p_0L_1L_2}{2} - \frac{L_2^2p_0}{2} - \cancel{\frac{p_0L_2^3}{6L_1}} + \cancel{\frac{p_0L_2^3}{6L_1}} + F_BL_2 + C_1(L_1+L_2)$$

$$\therefore C_1 = \frac{p_0L_1^2}{6(L_1+L_2)} + \frac{p_0L_1L_2}{2(L_1+L_2)} + \frac{L_2^2p_0}{2(L_1+L_2)} - \frac{F_BL_2}{L_1+L_2}$$

Digitalizado com CamScanner

5.6) Equações finais:

Para $N_x(x)$:

$$N_x(x) = -\frac{p_0\langle x-0\rangle^2}{2L_1} + \frac{p_0\langle x-L_1\rangle^2}{2L_1} + F_B\langle x-L_1\rangle^0 + \frac{p_0 L_1^2}{6(L_1+L_2)} + \frac{p_0 L_1 L_2}{2(L_1+L_2)}$$

$$+ \frac{L_2^2 p_0}{2(L_1+L_2)} - \frac{F_B L_2}{L_1+L_2}$$

$$\sigma_{xx}(x) = \frac{N_x(x)}{A} = -\frac{p_0\langle x-0\rangle^2}{2L_1 A} + \frac{p_0\langle x-L_1\rangle^2}{2L_1 A} + \frac{F_B}{A}\langle x-L_1\rangle^0 + \frac{p_0 L_1^2}{6A(L_1+L_2)}$$

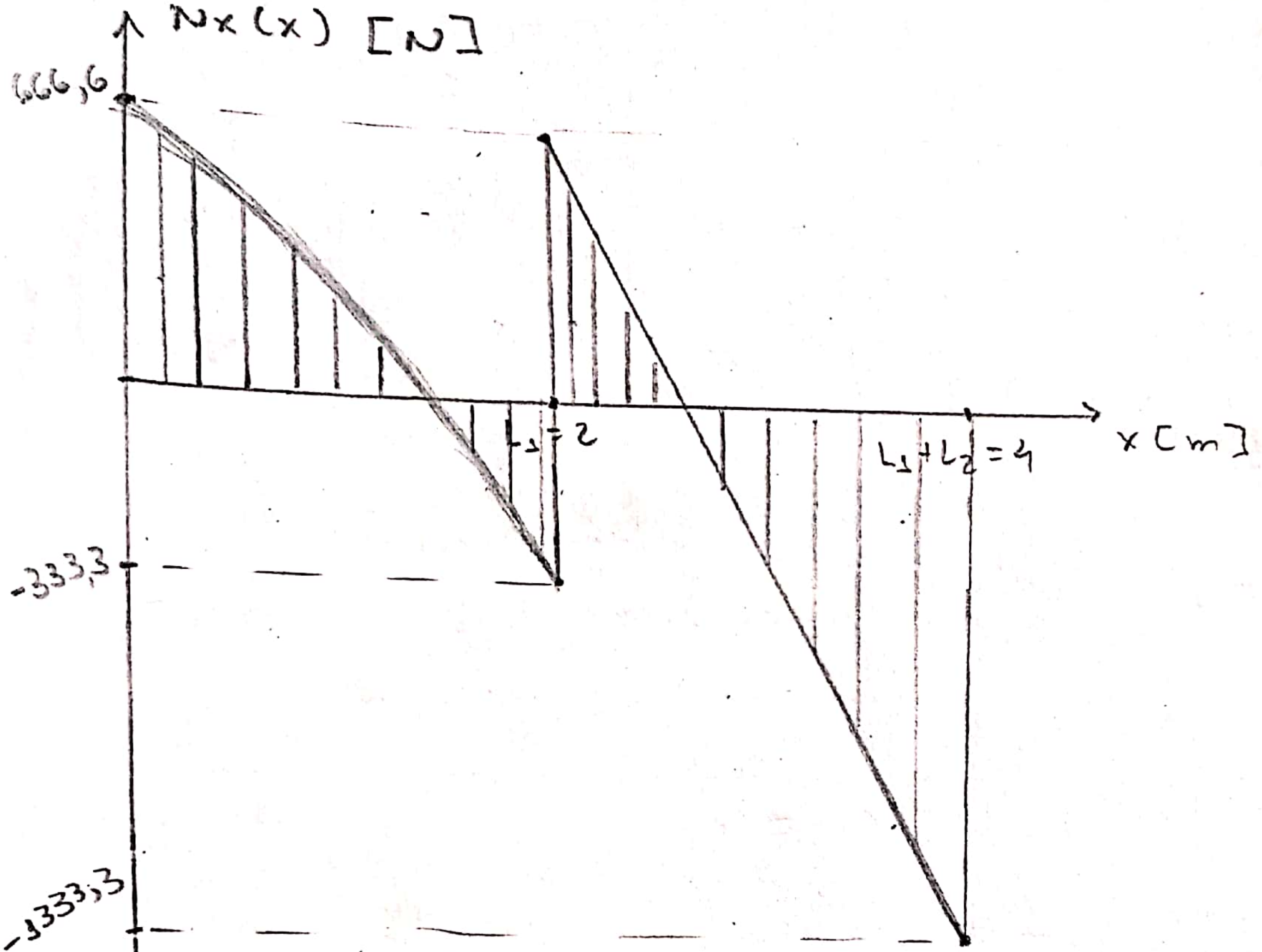
$$+ \frac{p_0 L_1 L_2}{2A(L_1+L_2)} + \frac{L_2^2 p_0}{2A(L_1+L_2)} - \frac{F_B L_2}{A(L_1+L_2)}$$

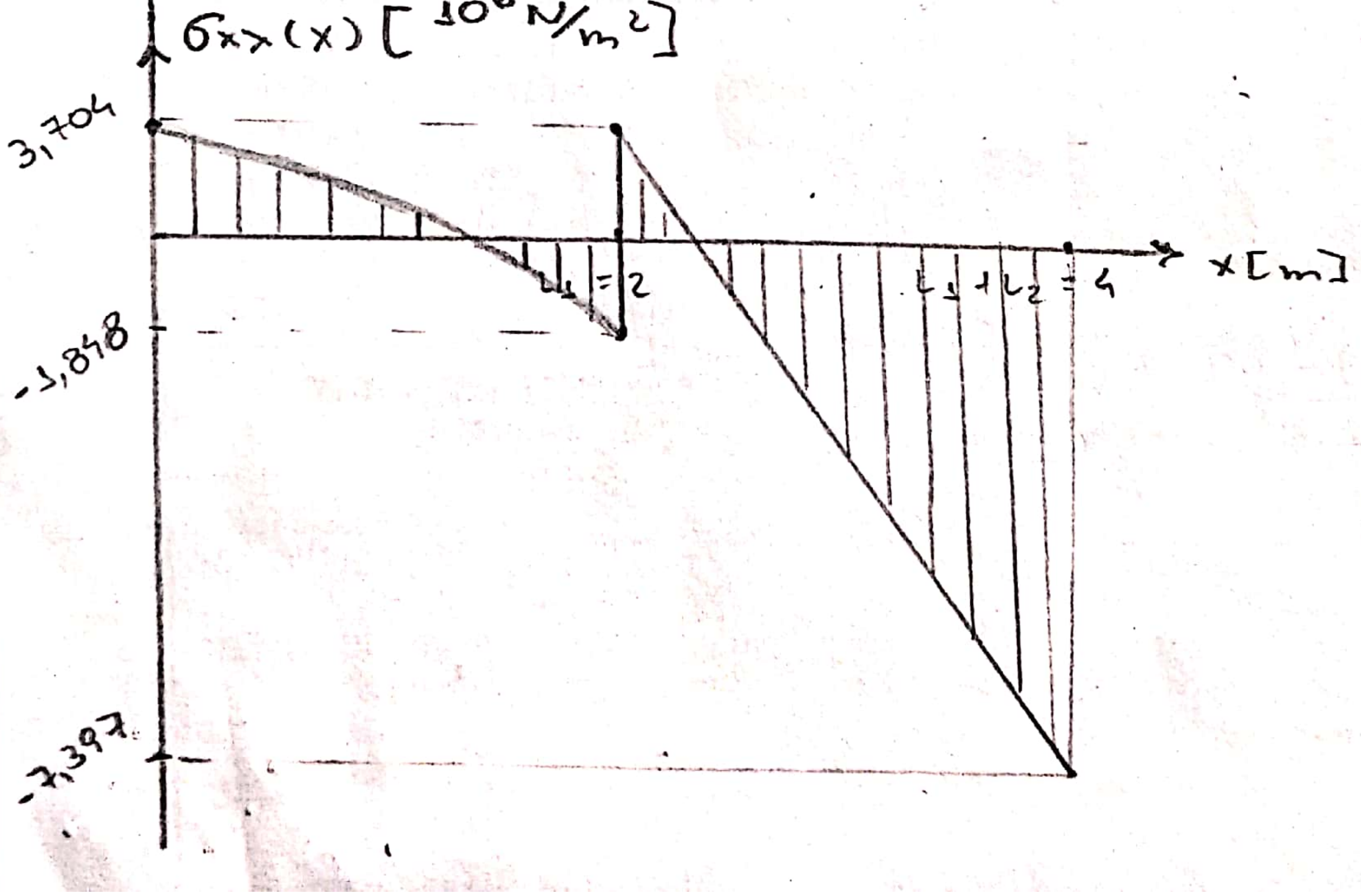
5.7) Substituindo os valores:

$$N_x(x) = -250\langle x-0\rangle^2 + 250\langle x-2\rangle^2 + 1000\langle x-2\rangle^0 + \frac{4000}{6}\ N$$

$$\sigma_{xx}(x) = (-1{,}388\langle x-0\rangle^2 + 1{,}388\langle x-2\rangle^2 + 5{,}555\langle x-2\rangle^0 + 3{,}704)\,10^6\ N/m^2$$

Digitalizado com CamScanner





Digitalizado com CamScanner

6) Tensão normal máxima σ_{xx}

Pelo diagrama, a tensão máxima (em módulo) ocorre em

$$x = L_1 + L_2 = 4m, \quad |\sigma_{xx\,max}(4)| = 7{,}397 \cdot 10^6 \ N/m^2$$

7) $u(x)$ e u_{max}

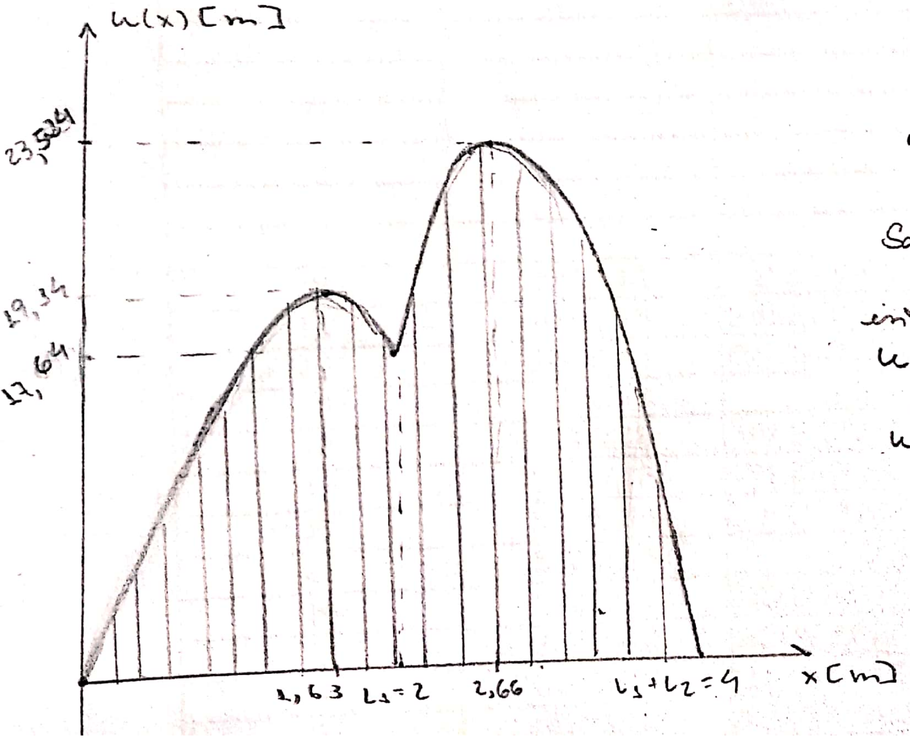
Pelo desenvolvimento no item 5, tem-se:

$$u(x) = \frac{1}{AE}\left[-\frac{p_0\langle x-0\rangle^3}{6L_1} + \frac{p_0\langle x-L_1\rangle^3}{6L_1} + F_B\langle x-L_1\rangle^1 + \left(\frac{p_0 L_1^2}{6(L_1+L_2)} + \frac{p_0 L_1 L_2}{2(L_1+L_2)} + \frac{L_2^2 p_0}{2(L_1+L_2)} - \frac{F_B L_2}{L_1+L_2} \right) x \right]$$

Digitalizado com CamScanner

Substituindo os valores:

$$u(x) = (-2,204\langle x-0\rangle^3 + 2,204\langle x-2\rangle^3 + 26,455\langle x-2\rangle^1 + 17,636\,x)10^{-6}\,m$$



Não é óbvio encontrar o ponto de umax pelo gráfico. Sabe-se que ele está em $2 < x < 4$, para esse intervalo:

$$u(x) = (-13,224x^2 + 70,539x - 70,542)10^{-6}\,m$$

$$u'(x) = (-26,448x + 70,539)10^{-6} = 0$$

$$x = 2,667\,m$$

↳ ponto de máximo

Assim,

$$u_{max}(2,667) = 23,524 \cdot 10^{-6}\,m$$

Digitalizado com CamScanner

8) No item 4, foi visto que para $u(L_1+L_2)=0$ na barra das partes 1 e 2, seria preciso que $F_C = 1333{,}3\,N$. Para a barra da parte 3, tem-se $u(L_1+L_2)=0$ e $N_x(L_1+L_2) = -1333{,}3\,N$, o que condiz com o resultado do item 4, uma vez que F_C é uma força de compressão. Considerando $F_C = 1333{,}3\,N$ na equação de $N_x(x)$ obtida na questão 1:

$$N_x(x) = -\frac{p_0}{L_1}\frac{\langle x-0\rangle^2}{2} + \frac{p_0}{L_1}\frac{\langle x-L_1\rangle^2}{2} + F_B\langle x-L_1\rangle^0 + \left(-F_C + \frac{p_0L_1}{2} + p_0L_2 - F_B\right)$$

$$N_x(x) = -250\langle x-0\rangle^2 + 250\langle x-2\rangle^2 + 1000\langle x-2\rangle^0 + 666{,}7\ N$$

Ainda com $F_C = 1333,3N$, podemos utilizar esse valor na equação de $u(x)$ obtida no item 5:

$$u(x) = \frac{1}{AE}\left[\frac{-p_0\langle x-0\rangle^3}{6L_1} + \frac{p_0\langle x-L_1\rangle^3}{6L_1} + F_B\langle x-L_1\rangle^1 + \left(-F_C + \frac{p_0L_1}{2} + p_0L_2 - F_B\right)x\right]$$

$$u(x) = (-2,204\langle x-0\rangle^3 + 2,204\langle x-2\rangle^3 + 26,455\langle x-2\rangle^1 + 17,636x)10^{-6}\,m$$

Com essas novas equações obtemos:

$N_{xA} = N_x(x=0) = 666,7\,N$

$N_{xC} = N_x(x = L_1 + L_2 = 4) = -1333,3\,N$

$u_B = u(x = L_1 = 2) = 17,64\,\mu m$

Comparando tais valores com os obtidos pelas equações de N_x e u obtidas nos itens 5 e 7, respectivamente:

$$N_x(x) = -250\langle x-0\rangle^2 + 250\langle x-2\rangle^2 + 1000\langle x-2\rangle^0 + \frac{4000}{6}\,N$$

$$u(x) = (-2,204\langle x-0\rangle^3 + 2,204\langle x-2\rangle^3 + 26,455\langle x-2\rangle^1 + 17,636x)10^{-6}\,m$$

$N_{xA} = N_x(x=0) = 666,7\,N$

$N_{xC} = N_x(x = L_1 + L_2 = 4) = -1333,3\,N$

$u_B = u(x = L_1 = 2) = 17,64\,\mu m$

mesmos valores. Isso decorre do fato que ao tomarmos $F_C = 1333,3N$, as equações de $N_x(x)$ e $u(x)$ para a barra da parte 1 se tornam iguais às equações de $N_x(x)$ e $u(x)$ para a barra da parte 3.

Digitalizado com CamScanner