

Capítulo 02: Esforços Internos em Sistemas Isostáticos

Sessão: Método das Equações Diferenciais de Equilíbrio.

Introdução.

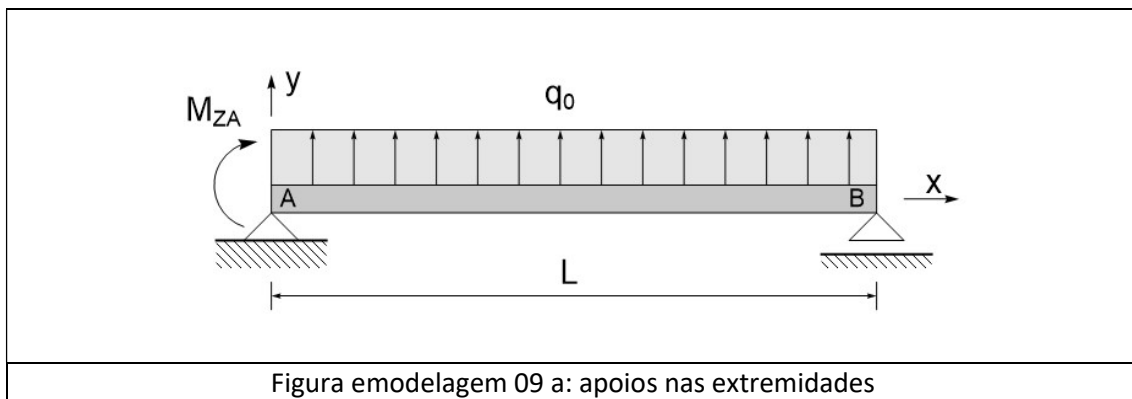
Nos capítulos anteriores aprendemos a utilizar as Funções de Singularidade (FS) para modelar carregamentos com descontinuidades e esforços concentrados que podem ser integrados no âmbito das Equações Diferenciais de Equilíbrio.

Nesta sessão vamos tratar de algumas particularidades no que diz respeito ao uso das funções de singularidade para modelar carregamentos e rótulas em sistemas estruturais. Trataremos de dois principais aspectos, a saber:

- 1) Vinculação aplicada no Domínio das Estruturas
- 2) Estruturas com Rótulas

I) Vinculação Aplicada no Domínio

As Figuras emodelagem 09a, 09b e 09c mostram uma viga submetida a um carregamento uniformemente distribuído q_0 . As vinculações, entretanto, são distintas o que naturalmente irá influenciar a solução do problema. No problema da 09a os apoios estão nas extremidades, ou seja nos contornos $x=0$ e $x=L$. Na figura 09b um dos apoios está no ponto $x=L/4$, enquanto o outro está em $x=L$. Na figura 09c os apoios estão, respectivamente, nos pontos $x=L/4$ e $x=3L/4$.



É importante salientar que do ponto de vista físico e matemático, estes problemas descritos por Equações Diferenciais de Equilíbrio são problemas unidimensionais, na variável independente ' x '. Assim o **domínio** em análise é o trecho designado por $(0 < x < L)$. O **contorno** do domínio, por sua vez é exatamente $x=0$ e $x=L$. Assim quando prescrevemos as **Condições de Contorno** para estes problemas elas tem que ser prescritas nos contornos, ou seja, em $x=0$ e/ou $x=L$.

Se quisermos incluir alguma outra informação ao problema, em algum outro **ponto do domínio**, por exemplo em $x=L/4$ ou $x=3L/4$, então vamos incluir **restrições** ou informações no **domínio**.

Dito isto, é possível agora tratar o problema dos **Vínculos no Domínio**, tal como aparecem nas Figuras 09b e 09c, como **Cargas no Domínio**.

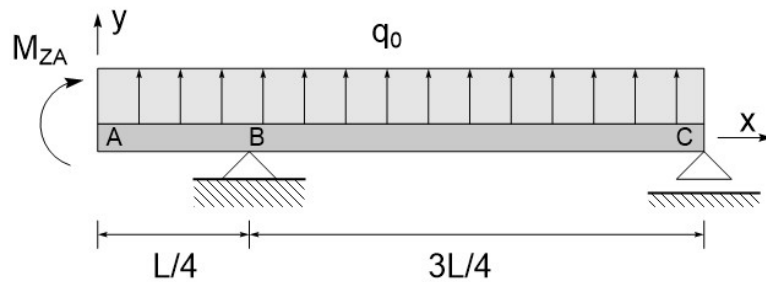


Figura emodelagem 09 b: um apoio no domínio e um na extremidades

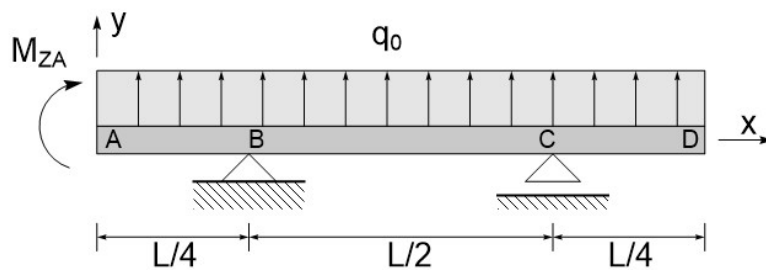


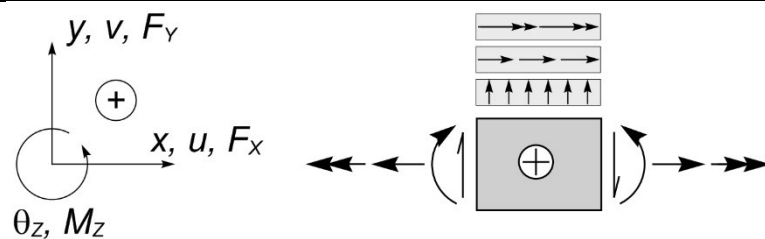
Figura emodelagem 09 c: apoios no domínio

Modelagem dos Problemas.

Vamos aplicar uma solução formal a estes problemas mostrados nas figuras 09a, 09b e 09c, ou seja, vamos fazer a modelagem destes sistemas, para que se perceba a forma de se tratar o vínculo aplicado no domínio.

0) Sistema de Coordenadas da Estática + Convenção de Resistência dos Materiais

Como sempre, iniciamos pela definição de um sistema de coordenadas e a convenção de sinais de Res Mat.



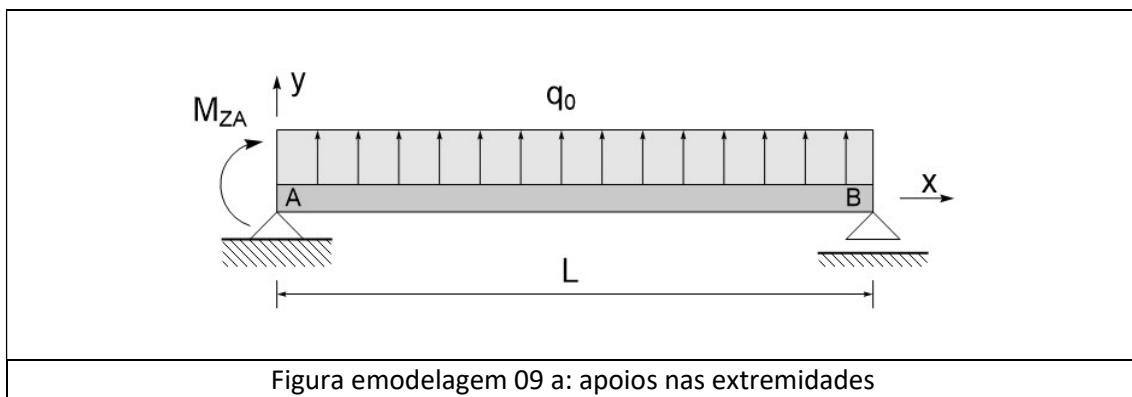
Equação Diferencial que governa os problemas de flexão 09a, 09b e 09c

Como todos os problemas são de flexão, carregamento transversal temos a seguinte equação diferencial para todos os problemas:

$$\frac{d^2 M_z(x)}{dx^2} = q(x) \quad (0)$$

Problema Parte 1: Apoio nos Contornos (extremidades) , $x=0$ e $x=L$, Figura 09a.

O primeiro problema a ser resolvido é a viga com apoio nas extremidades, mostrada na figura 09a.



1) Equação Diferencial de Carregamento

$$q(x) = +q_0 = +q_0 \langle x - 0 \rangle^0 \quad (1)$$

2) Condições de Contorno

$$M_z(x=0) = +M_{ZA} \quad (2)$$

$$M_z(x=L) = 0 \quad (3)$$

Vamos fazer um balanço entre as incógnitas, ou seja, no caso as constantes de integração que irão surgir ao integramos a equação (0) e as condições de contorno prescritas do problema:

Condições de contorno: 2x eqs (2) e (3)

Incógnitas: 2 x constantes de integração C_1 e C_2

Com duas incógnitas e duas condições de contorno, o sistema pode ser resolvido.

Problema Parte 2: Apoio no domínio e apoio na extremidade

Para o problema da figura 09b, substituímos o vínculo em $x=L$ por uma força incógnita, R_{YB} , que é desconhecida e passa a fazer parte do carregamento. Perceba que ao trazermos o vínculo para o **ponto do domínio** $x=L/4$ e o incluirmos na forma de um carregamento desconhecido, introduzimos uma incógnita a mais no problema, no caso R_{YB} . Mas também criamos uma nova condição de contorno, no caso, a informação sobre o esforço cortante em $x=0$, $V_Y(x=0)=0$.

Resumindo, o vínculo de apoio no ponto B, se torna um carregamento de valor desconhecido, aplicado no ponto, R_{YB} .

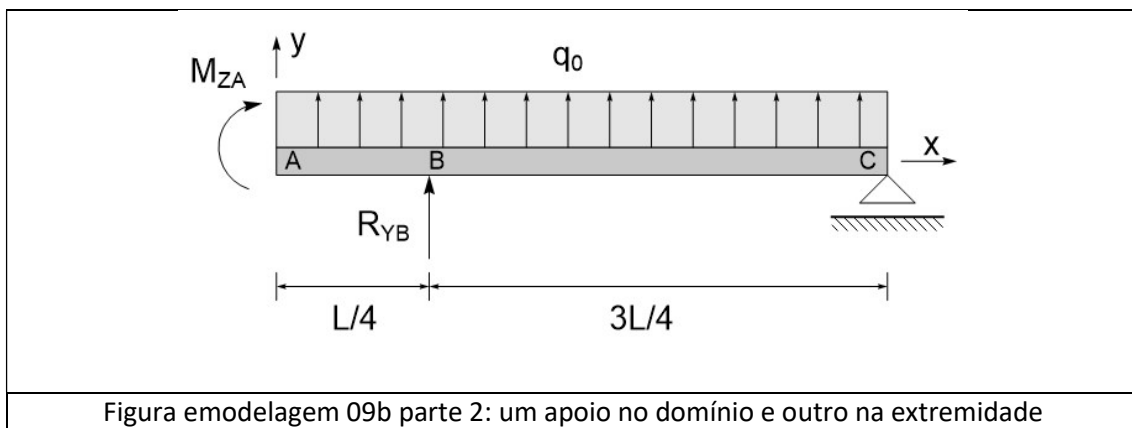


Figura emodelagem 09b parte 2: um apoio no domínio e outro na extremidade

3) Equação Diferencial de Carregamento

$$q(x) = +q_0 = +q_0 \langle x - 0 \rangle^0 + \underbrace{R_{YB}}_{?} \left\langle x - \frac{L}{4} \right\rangle^{-1} \quad (4)$$

4) Condições de Contorno

$$V_Y(x=0) = 0 \quad (5)$$

$$M_Z(x=0) = +M_{ZA} \quad (6)$$

$$M_Z(x=L) = 0 \quad (7)$$

Vamos, aqui também, fazer um balanço entre as incógnitas, ou seja, no caso as constantes de integração que irão surgir ao integramos a equação (0) bem como carregamento de valor desconhecido R_{YB} , **aplicado no domínio** e as **condições de contorno** prescritas do problema:

Condições de contorno: 3x eqs (5) a (7)

Incógnitas:

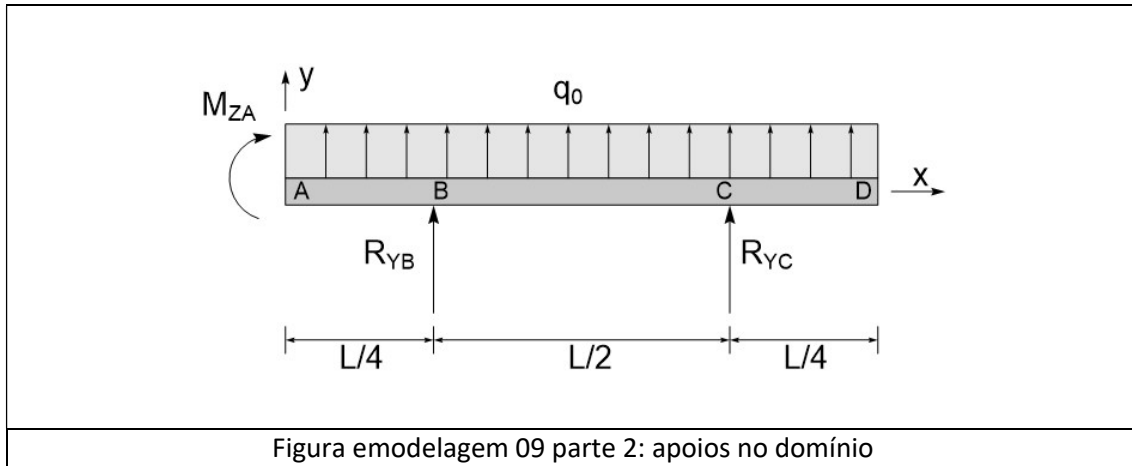
2 x constantes de integração C_1 , C_2 e

1x carregamentos desconhecidos **aplicado no domínio** R_{YB}

O sistema 3x3 pode ser resolvido.

Problema Parte 3: Dois apoios no domínio

Analogamente, para o caso do problema da figura 09c, com dois apoios no domínio, em $x=L/4$ e $x=3L/4$, substituímos estes vínculos por carregamentos concentrados de valor desconhecido R_{YB} e R_{YC} aplicados no pontos do domínio, onde estavam os vínculos, ver figura emodelagem 09 parte 2.



5) Equação Diferencial de Carregamento

$$q(x) = +q_0 = +q_0 \langle x-0 \rangle^0 + \underbrace{R_{YB}}_{?} \left\langle x - \frac{L}{4} \right\rangle^{-1} + \underbrace{R_{YC}}_{?} \left\langle x - \frac{3L}{4} \right\rangle^{-1} \quad (8)$$

6) Condições de Contorno

$$V_Y(x=0) = 0 \quad (9)$$

$$V_Y(x=L) = 0 \quad (10)$$

$$M_Z(x=0) = +M_{ZA} \quad (11)$$

$$M_Z(x=L) = 0 \quad (12)$$

Observar que ao deslocarmos os dois apoios das extremidades para o domínio, ganhamos duas condições de contorno, no caso, os Esforços Cortantes $V_Y(x=0)$ e $V_Y(x=L)$, mas introduzimos duas reações de apoio R_{YB} e R_{YC} como grandezas desconhecidas na expressão do carregamento. Mas o balanço fecha. Acrescentamos duas incógnitas mas fornecemos outras duas condições de contorno.

Balanço de condições de contorno e incógnitas

Condições de contorno: 4x eqs (9) a (12)

Incógnitas:

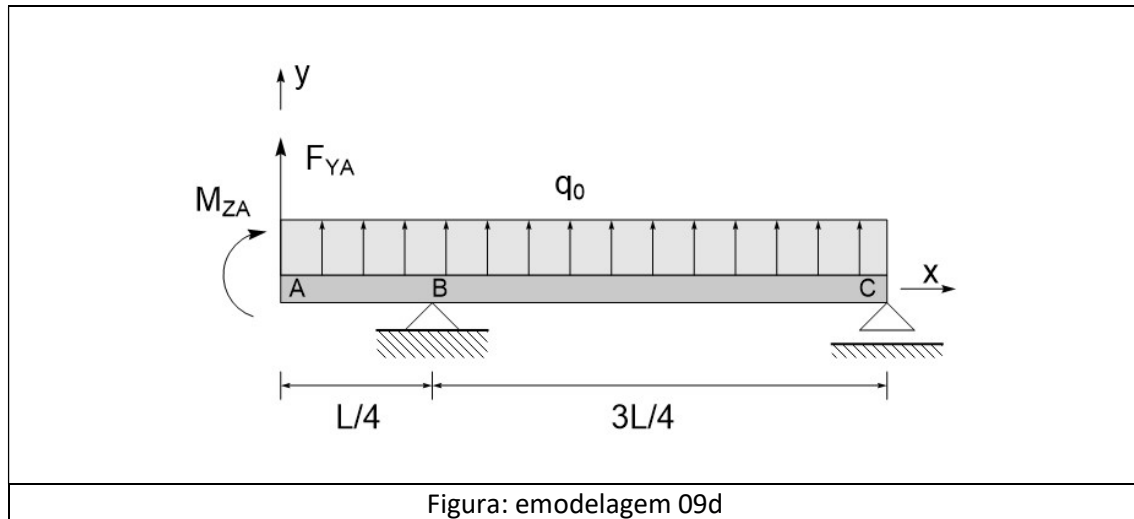
2 x constantes de integração C_1 , C_2 e

2x carregamentos desconhecidos R_{YB} e R_{YC}

O sistema 4x4 pode ser resolvido.

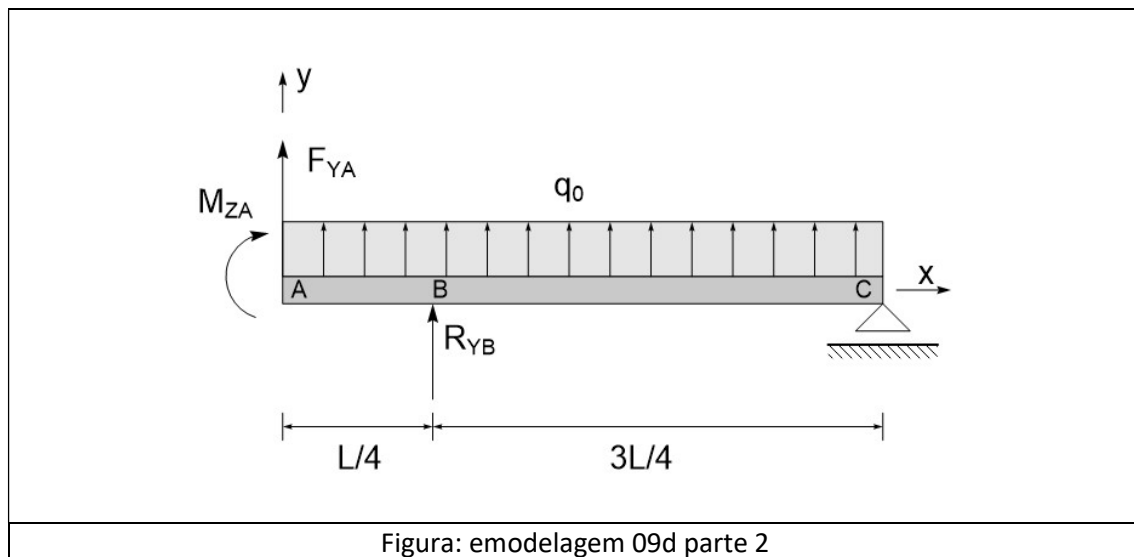
Problema Parte 4: Carregamento na extremidade e Apoios no domínio e extremidade

Este problema mostrado na Figura emodelagem 09d, mostra um apoio no ponto $x=L/4$ e uma carga concentrada F_{YA} aplicada no contorno $x=0$.



Solução:

Verifique na figura emodelagem 09d parte 2 que cargas concentradas aplicadas no contorno, são incorporadas ao problema como **condição de contorno**. Por sua vez, **vínculos no domínio** são incorporados ao problema como carregamentos.



7) Equação Diferencial de Carregamento

$$q(x) = +q_0 = +q_0 \langle x - 0 \rangle^0 + \underbrace{R_{YB}}_{?} \left\langle x - \frac{L}{4} \right\rangle^{-1} \quad (13)$$

8) Condições de Contorno

$$V_Y(x=0) = +F_{YA} \quad (14)$$

$$M_Z(x=0) = +M_{ZA} \quad (15)$$

$$M_Z(x=L) = 0 \quad (16)$$

Balanço:

Temos 3 incógnitas neste problema, as constantes de integração C_1 e C_2 e a reação de apoio no **domínio** R_{YB} . Mas temos 3 **condições de contorno** fornecidas pelas equações (14), (15) e (16). Assim o sistema pode ser resolvido.

II) Vigas com Rótulas

Nesta sessão vamos discutir como incluir rótulas em estruturas de vigas. Como vimos na parte da Revisão dos Princípios da Estática, rótulas são mecanismos através dos quais não passa momento, no caso de vigas, Momento Fletor, ou seja, $M_Z(x)=0$.

As Rótulas são aplicadas no **domínio**, ou seja, ao longo das vigas e não no contorno. As figuras eviga 07, 21, 12 e 19 abaixo, mostram vigas que apresentam rótulas em seu domínio. Como vimos na revisão de estática, sistemas com rótulas, frequentemente são 'aparentemente hiperestáticos'. Geralmente o número de reações de apoio é maior do que o número de equações independentes da estática que temos para determinar o equilíbrio dos sistemas. Lembrando que no caso de uma viga, somente temos esforços no sentido dos eixos 'y', F_Y e momentos em torno do eixo z, M_Z . Assim temos somente duas equações de estática disponíveis para determinar as Reações de Apoio, quais sejam:

$$\sum F_Y = 0 \quad (17)$$

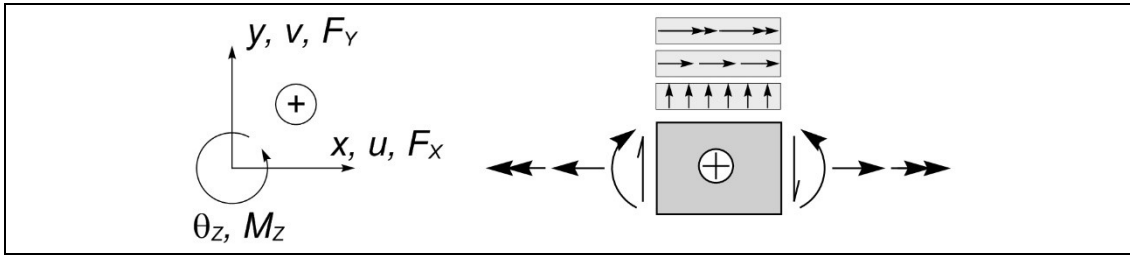
$$\sum M_Z = 0 \quad (18)$$

Mas as rótulas fornecem **informações no domínio** ($0 < x < L$), ou seja, uma **restrição no domínio** segundo a qual o Momento Fletor no ponto de coordenada x_i é nulo, $M_Z(x=x_i)=0$. Esta informação adicional deve ser incorporada no **balanço** onde se considera o número de **Reações de Apoio**, versus o número de **Equações de Estática** mais as **Restrições de Domínio** impostas pelas **Rótulas**.

Vamos analisar os problemas abaixo, fazendo a modelagem de carregamentos, condições de contorno e restrições no domínio associados às rótulas.

Modelagem dos Problemas com Rótulas.

Como sempre, iniciamos pela definição de um sistema de coordenadas e a convenção de sinais de Res Mat.



Problema 1: eviga 07

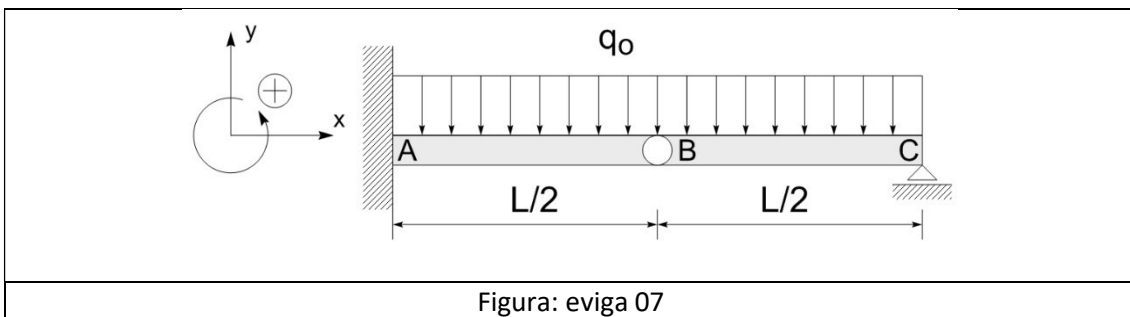


Figura: eviga 07

No caso da viga mostrada na Figura eviga 07, temos três Reações de Apoio incógnitas, a saber: Em $x=0$ temos R_{YA} e M_{ZA} e em $x=L$ temos R_{YCA} . Portanto temos 3 Reações de Apoio e duas equações de equilíbrio independentes da estática. Assim o sistema é aparentemente hiperestático. Mas temos a restrição no domínio imposta pela rótula, $M_Z(x=L/2)=0$.

Podemos também aplicar a modelagem associada às Equações Dif. de Equilíbrio para a viga 07.

9) Equação Diferencial que governa o problema de flexão (carregamento transversal)

$$\frac{d^2 M_Z(x)}{dx^2} = q(x) \quad (19)$$

10) Equação do Carregamento

$$q(x) = -q_0 \quad (20)$$

11) Condições de Contorno e Restrição

C. de contorno:

$$M_Z(x=L) = 0 \quad (21)$$

Restrição no Domínio (associado à Rótula)

$$M_Z(x=L/2) = 0 \quad (22)$$

Vamos fazer o balanço para saber se o problema pode ser resolvido pelo Método das Equações Diferenciais de Equilíbrio.

Incógnitas: Constantes de Integração C_1 e C_2 , $(2x)$

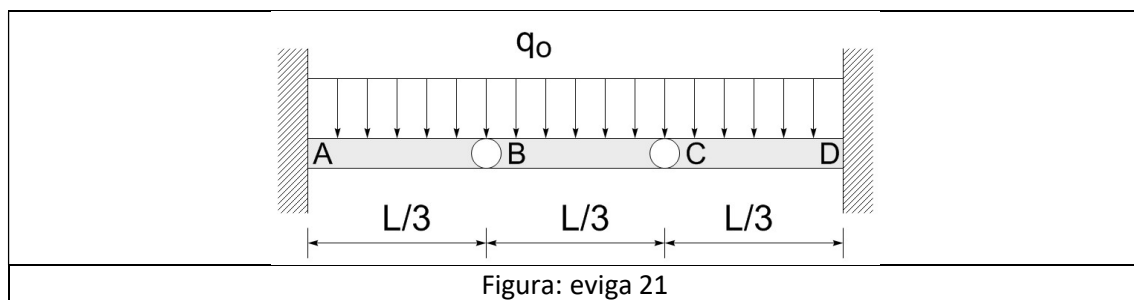
Equações Disponíveis: Condição de contorno (21) e Restrição no Domínio imposto pela Rótula (22), $(2x)$.

O Sistema pode ser resolvido.

*****8

Problema 2 – eviga 21

A viga mostrada na figura eviga 21 possui duas rótulas em $x=L/3$ e $x=2L/3$. Uma leitura atenta mostra que não temos nenhuma condição do contorno conhecida. Mas temos duas equações de restrição no domínio associadas às rótulas.



12) Equação Diferencial que governa o problema de flexão (carregamento transversal)

$$\frac{d^2 M_z(x)}{dx^2} = q(x) \quad (23)$$

13) Equação do Carregamento

$$q(x) = -q_0 \quad (24)$$

14) Condições de Contorno e Restrição

As Condições de Contorno não são conhecidas.

$$V_y(x=0) = ?$$

$$V_y(x=L) = ?$$

$$M_z(x=0) = ?$$

$$M_z(x=L) = ?$$

Obs: Condições de Contorno são informação fornecidas ‘a priori’, ou seja, são conhecidas antes que se faça qualquer cálculo no problema. Sabemos que as condições de contorno serão as Reações de Apoio da viga 07. Como o problema é aparentemente hiperestático, seria possível calcular estas reações de apoio em $x=0$, R_{YA} e M_{ZA} , e em $x=L$, R_{YD} e M_{ZD} . Mas aí estaremos misturando o Método das Seções com o Método das Equações Diferenciais de Equilíbrio. Isto não é o objetivo desta seção. Aqui desejamos utilizar somente as equações diferenciais de equilíbrio, condições de contorno e restrições (associadas às rótulas).

15) Restrição no Domínio (associado à Rótula)

$$M_Z(x = L/3) = 0 \quad (25)$$

$$M_Z(x = 2L/3) = 0 \quad (26)$$

Balanco Incógnitas x Equações Disponíveis.

Duas incógnitas, constantes C_1 e C_2 .

Duas equações de restrição, (25) e (26).

O problema pode ser resolvido.

Problema 3 – eviga 12

O problema eviga 12 traz uma mistura de restrição de domínio imposto pela rótula no ponto B e pelo vínculo no domínio no ponto C. Podemos associar neste exemplo a solução para rótulas como a solução para vinculação no domínio.

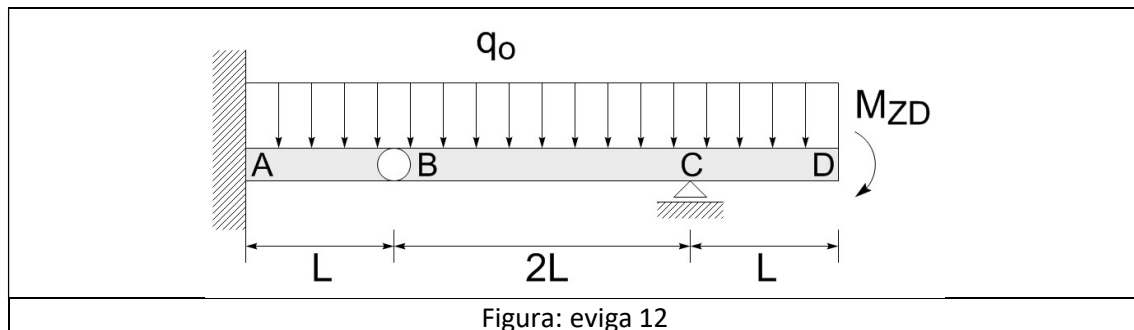


Figura: eviga 12

Nesta caso o carregamento tem que incluir a reação de apoio no ponto C, como uma grandeza de valor desconhecido, tal como indicado na figura eviga 12a.

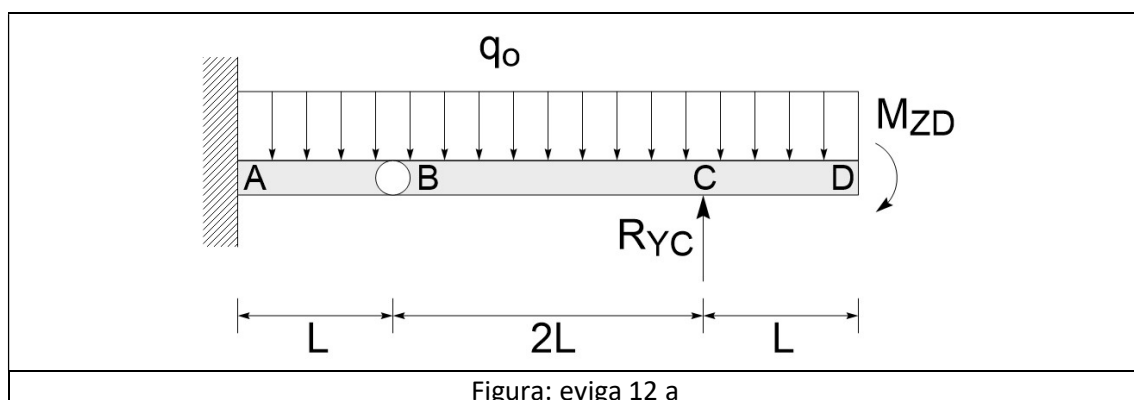


Figura: eviga 12 a

16) Equação Diferencial que governa o problema de flexão (carregamento transversal)

$$\frac{d^2 M_z(x)}{dx^2} = q(x) \quad (27)$$

17) Equação do Carregamento

$$q(x) = -q_0 + \underbrace{R_{YC}}_{?} \langle x - 3L \rangle^{-1} \quad (28)$$

18) Condições de Contorno e Restrição

As Condições de Contorno conhecidas:

$$\begin{aligned} V_Y(x=0) &= ? \\ V_Y(x=L) &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} M_Z(x=0) &= ? \\ M_Z(x=L) &= -M_{ZD} \end{aligned} \quad (30)$$

19) Restrição no Domínio (associado à Rótula)

$$M_Z(x=L) = 0 \quad (31)$$

Balanço de Incógnitas x Equações.

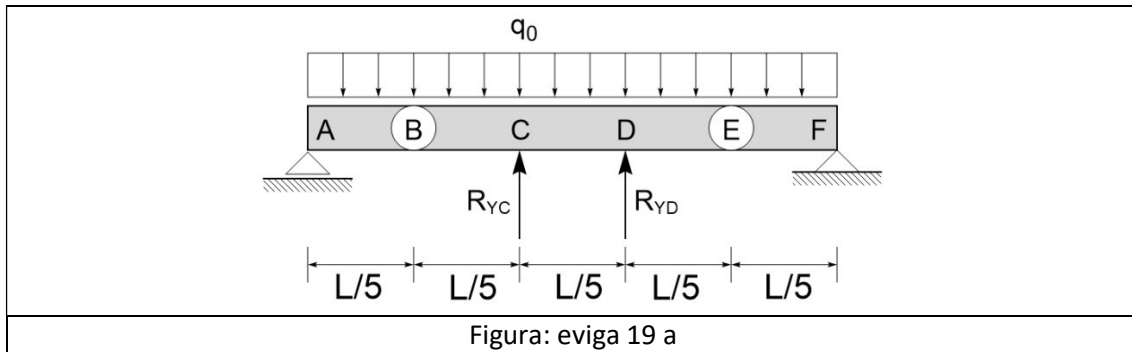
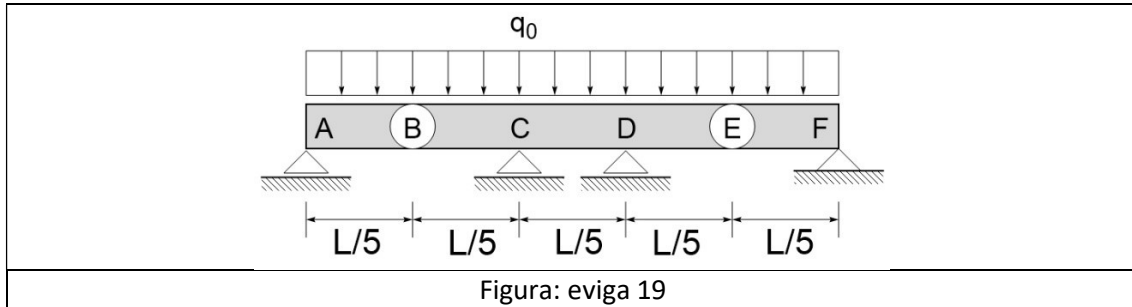
Incógnitas, C_1 , C_2 e R_{YC} , (3x)

Equações: (29), (30) e (31), (3x)

O sistema pode ser resolvido.

Problema 4 – eviga 19

O problema eviga 19 é basicamente uma repetição expandida do problema anterior.



20) Equação Diferencial que governa o problema de flexão (carregamento transversal)

$$\frac{d^2 M_z(x)}{dx^2} = q(x) \quad (32)$$

21) Equação do Carregamento

$$q(x) = -q_0 + \underbrace{R_{YC}}_{?} \left\langle x - \frac{2L}{5} \right\rangle^{-1} + \underbrace{R_{YD}}_{?} \left\langle x - \frac{3L}{5} \right\rangle^{-1} \quad (33)$$

22) Condições de Contorno e Restrição

As Condições de Contorno conhecidas

$$\begin{aligned} V_Y(x=0) &= ? \\ V_Y(x=L) &= ? \\ M_Z(x=0) &= 0 \end{aligned} \quad (34)$$

$$M_Z(x=L) = 0 \quad (35)$$

23) Restrição no Domínio (associado à Rótula)

$$M_z(x = \frac{L}{5}) = 0 \quad (36)$$

$$M_z(x = \frac{4L}{5}) = 0 \quad (37)$$

Balço de Incógnitas x Equações.

Incógnitas, C_1 , C_2 , R_{VC} , e R_{VD} , (4x)

Equações:

Condições de Contorno (34), (35)

Restrições de Domínio -Rótula (36) e (37)

Total (4x)

O sistema (4x4) pode ser resolvido.