

Observações Didáticas Viga com Momento Fletor Concentrado Met Seções e Eq Dif Equil em  
28 abril 2020

## 1-Introdução

Esta nota didática pretende discutir o problema de uma viga bi apoiada e submetida a um momento concentrado tal como mostrado na Figura eqdif viga 15\_1.

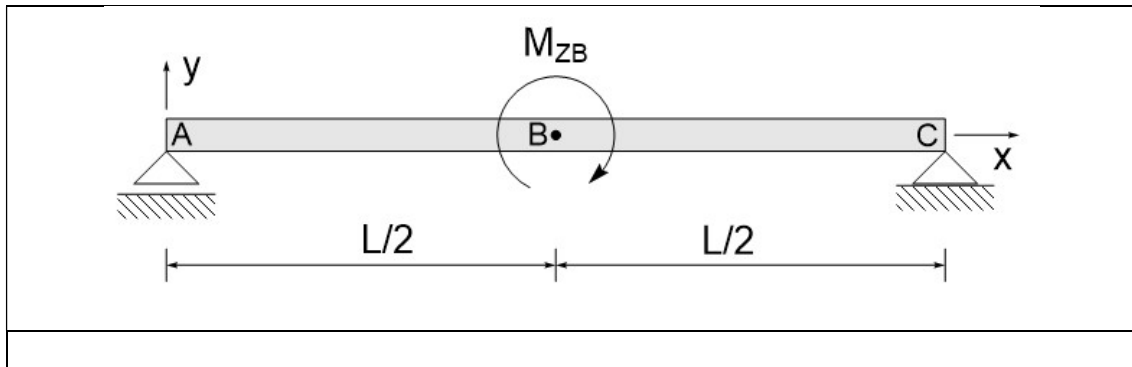


Figura eqdif viga 15\_1: Viga bi-apoiada com momento concentrado aplicado no centro

Este problema será tratado pelo **Método das Seções** e também pelo **Método das Equações Diferenciais de Equilíbrio**. Os dois métodos devem fornecer exatamente a mesma solução. Veremos, entretanto, que a solução baseada no Método das Equações Diferenciais de Equilíbrio apresenta um **Delta de Dirac** na expressão do **Esforço Cortante**  $V_Y(x)$ . Este Delta de Dirac não aparece na solução obtida pelo Método das Seções.

A tentativa de explicar a existência ou não do Delta de Dirac na expressão de  $V_Y(x)$  no caso da solução obtida pelo Método das Equações Diferenciais de Equilíbrio dá origem a uma muito boa discussão sobre **Modelagem Física e Matemática**, ou seja, a relação entre uma descrição matemática de um problema e sua contrapartida física.

## 2- Solução pelo Método das Seções

Vamos inicialmente resolver o problema utilizando o Método das Seções e seguindo o roteiro preconizado no texto didático, Capítulo 2 – Esforços Internos em Estruturas Isostáticas, Parte 2.

### 2.1 – Eixos Coordenados e Convenções da Estática e ResMat

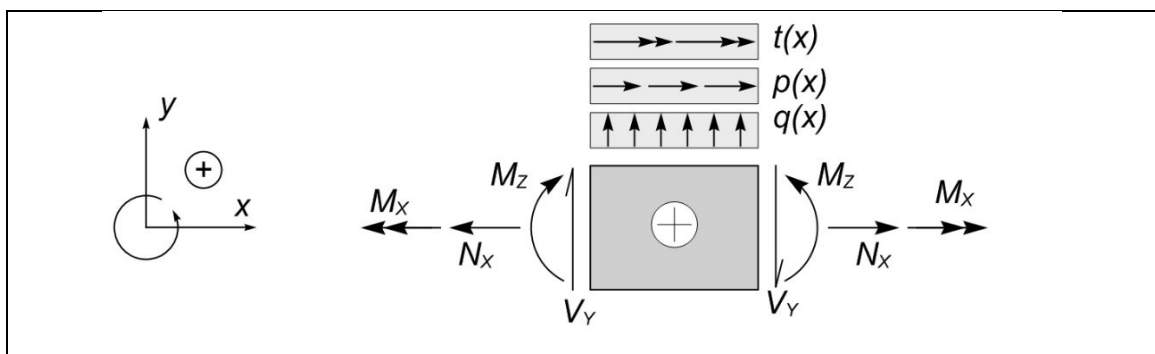


Figura 2.48: Convenção da Resistência dos Materiais adotada no texto.

## 2.2 - Determinação do número de seções a serem analisada

Como a única variação de carregamento ocorre no ponto B,  $x=L/2$ , teremos duas seções para serem analisadas:

Seção AB ( $0 < x < L/2$ )

Seção BC ( $L/2 < x < L$ )

## 2.3 – Diagrama do Corpo Livre – DCL e Reações de Apoio

O Diagrama do Corpo Livre, DCL, da viga bi-apoiada, onde substituímos os vínculos pelos esforços que eles desenvolvem, está mostrada da Figura eqdif viga 15\_2a. Nesta figura os sentidos foram arbitrados de acordo com valores positivos da Convenção da Estática.

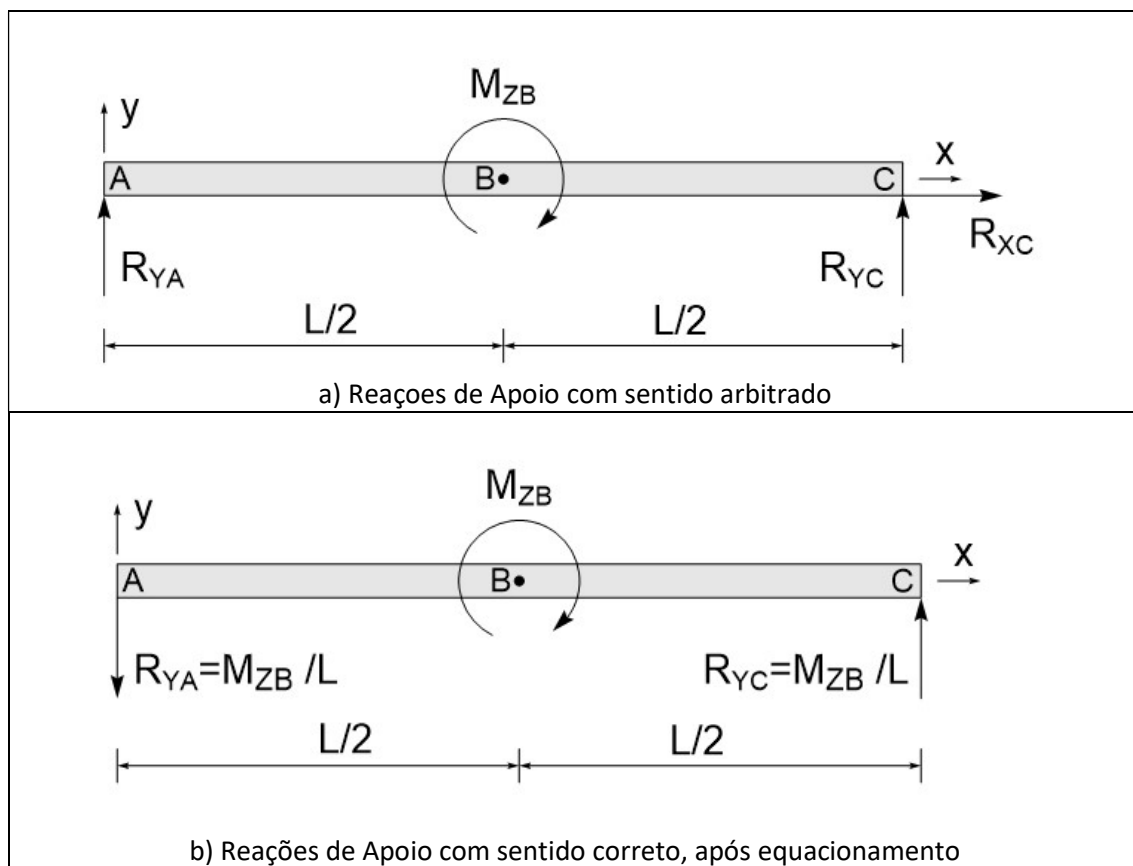


Figura eqdif viga 15\_2: Diagrama de Corpo Livre - DCL

Equilíbrio do Corpo.

$$\sum F_x = 0 \quad +R_{xc} = 0 \quad (1)$$

Somatório dos Momentos em torno do eixo 'z' em relação ao ponto A:

$$\begin{aligned} \sum M_z(A) &= 0 \\ -M_{ZB} + R_{YC} L &= 0 \\ R_{YC} &= +\frac{M_{ZB}}{L} \end{aligned} \quad (2)$$

Somatório dos Momentos em torno do eixo 'z' em relação ao ponto C:

$$\begin{aligned}
 \sum M_z(C) &= 0 \\
 -R_{YA} L - M_{ZB} &= 0 \\
 R_{YA} &= -\frac{M_{ZB}}{L}
 \end{aligned} \tag{3}$$

Vemos que o sentido arbitrado para  $R_{YA}$  estava errado. O DCL com as Reações de Apoio com valores e sentidos está mostrada na Figura eqdif viga 15\_2b

#### 2.4 Equilíbrio das Seções.

Vamos fazer o equilíbrio das seções utilizando o sentido correto das Reações de Apoio, tal como mostrado na Figura eqdif viga 15\_2b.

##### Seção AB ( $0 < x < L/2$ )

Ver Figura eqdif viga 15\_3

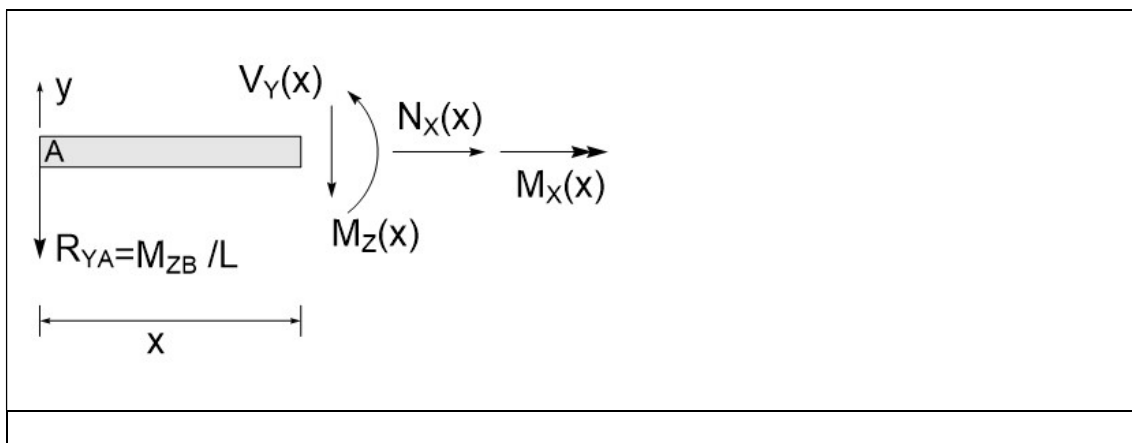


Figura eqdif viga 15\_3: Equilíbrio da Seção AB

Aplicando as Equações de Equilíbrio:

- Forças Axiais  $\sum F_x = 0$

$$+N_x(x) = 0 \tag{4}$$

- Momentos torsores  $\sum M_x = 0$

$$+M_x(x) = 0 \tag{5}$$

- Esforço Cortante  $\sum F_y = 0$

$$-R_{YA} - V_Y(x) = -\frac{M_{ZB}}{L} - V_Y(x) = 0$$

logo

$$V_Y(x) = -\frac{M_{ZB}}{L} \tag{6}$$

O esforço cortante é constante nesta seção.

- Momentos Fletores  $\sum M_z = 0$

$$-R_{YA} x - M_z(x) = -\frac{M_{ZB}}{L} x - M_z(x) = 0$$

$$M_z(x) = -\frac{M_{ZB}}{L} x \quad (7)$$

$$M_z(x=0) = -\frac{M_{ZB}}{L} 0 = 0 \quad (7a)$$

$$M_z\left(x = \frac{L}{2}\right) = -\frac{M_{ZB}}{L} \frac{L}{2} = -\frac{M_{ZB}}{2} \quad (7b)$$

### Seção BC ( $L/2 < x < L$ )

Ver Figura Figura eqdif viga 15\_4

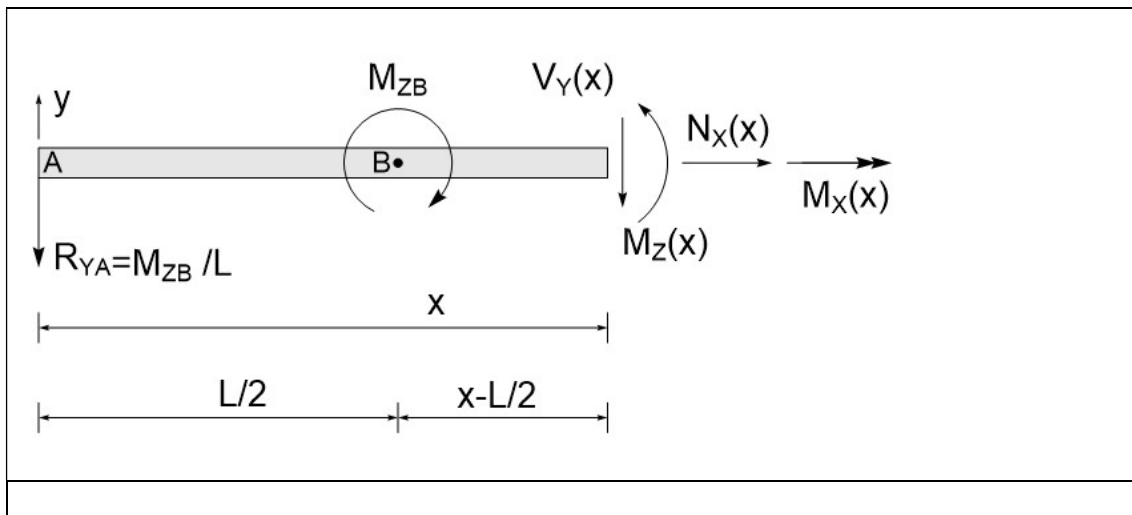


Figura eqdif viga 15\_4: Equilíbrio da Seção BC

Aplicando as Equações de Equilíbrio:

- Forças Axiais  $\sum F_x = 0$

$$+N_x(x) = 0 \quad (8)$$

- Momentos torsores  $\sum M_x = 0$

$$+M_x(x) = 0 \quad (9)$$

- Esforço Cortante  $\sum F_y = 0$

$$-R_{YA} - V_Y(x) = -\frac{M_{ZB}}{L} - V_Y(x) = 0$$

logo

$$V_Y(x) = -\frac{M_{ZB}}{L} \quad (10)$$

O esforço cortante é constante nesta seção e não sofreu alteração em relação à seção anterior.

- Momentos Fletores  $\sum M_z = 0$

$$+R_{YA} x - M_{ZB} + M_z(x) = +\frac{M_{ZB}}{L} x + -M_{ZB} + M_z(x) = 0$$

$$M_z(x) = +M_{ZB} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (11)$$

$$M_z\left(x = \frac{L}{2}\right) = +M_{ZB} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = +\frac{M_{ZB}}{2} \quad (11a)$$

$$M_z(x = L) = +M_{ZB} \left(1 - \frac{L}{L}\right) = 0 \quad (11b)$$

### 5 – Diagramas de Esforços Internos, Esforço Cortante e Momento Fletor

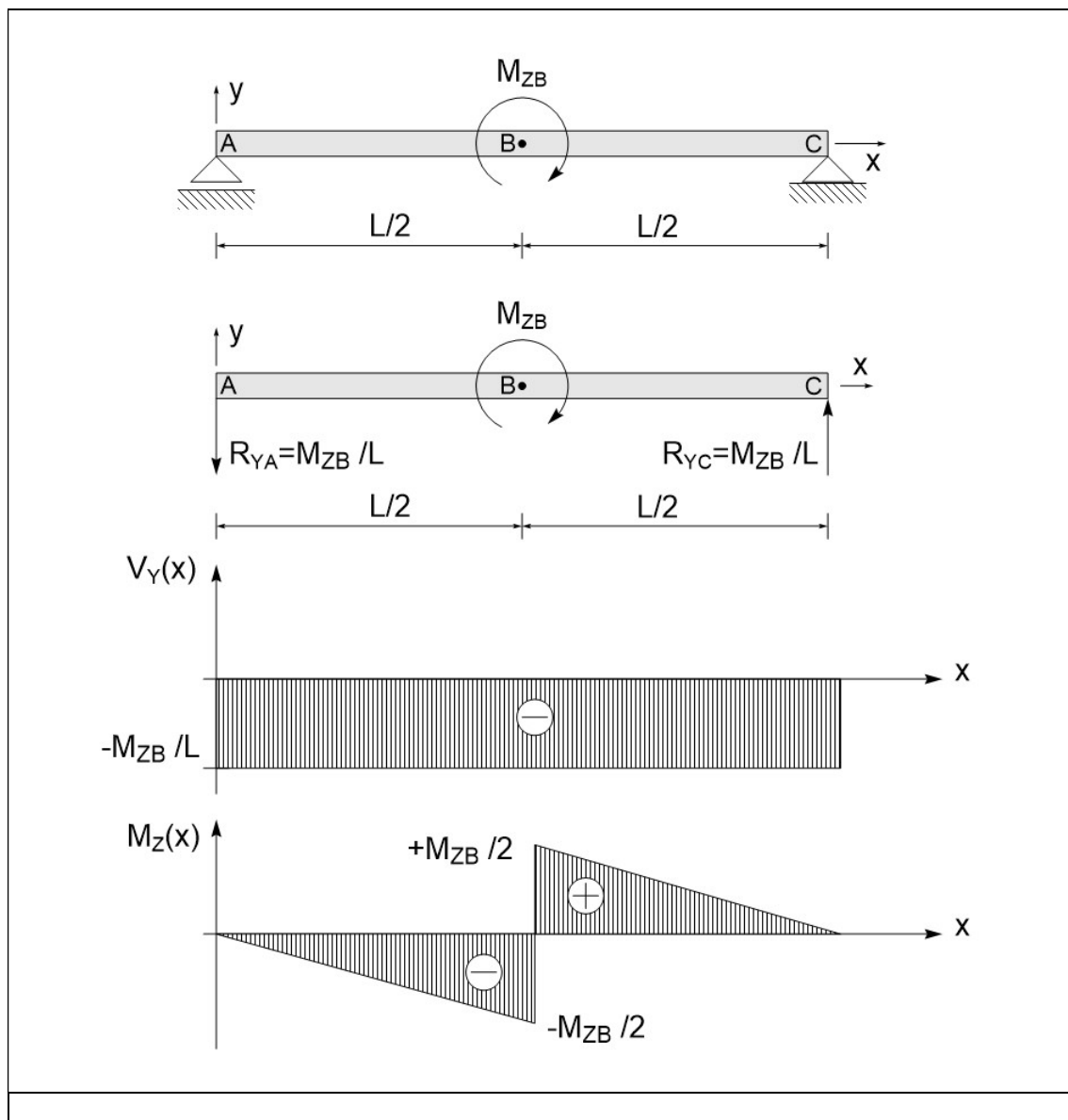


Figura eqdif viga 15\_5: Esforço Cortante e Momento Fletor – Método das Seções

### 3 - Solução pelo Método das Equações Diferenciais de Equilíbrio

Nesta seção vamos resolver o mesmo problema mostrado na Figura eqdif viga 15\_1 utilizando o Método das Equações Diferenciais de Equilíbrio. Ao final comparamos os resultados obtidos.

Solução

#### 3.1) Eixos e convenções

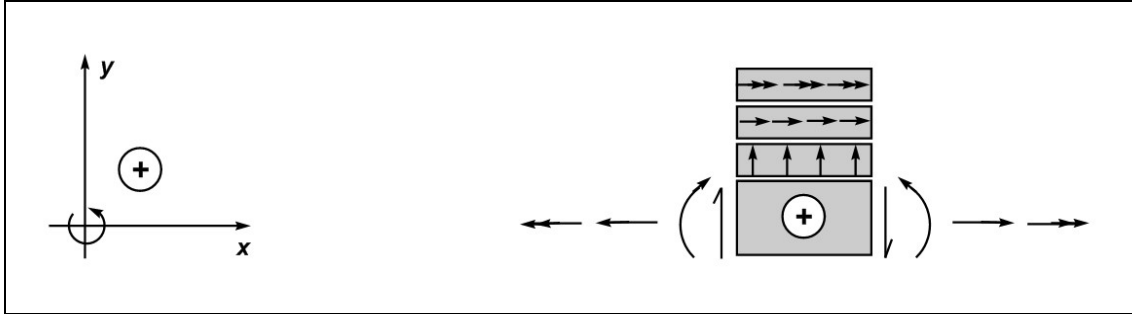


Figura: eqdifviga\_15-2

#### 3.2) Equação Diferencial

$$\frac{d^2 M_z(x)}{dx^2} = q(x) \quad (12)$$

#### 3.3) Equação de carregamento

$$q(x) = +M_{zB} \left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle^{-2} \quad (13)$$

#### 3.4) Condições de Contorno

$$M_z(x=0) = 0 \quad (14)$$

$$M_z(x=L) = 0 \quad (15)$$

#### 3.5) Integração da Equação Diferencial

$$\frac{d^2 M_z(x)}{dx^2} = +M_{zB} \left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle^{-2} \quad (16)$$

Integrando uma vez:

$$\frac{dM_z(x)}{dx} = V_y(x) = +M_{zB} \left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle^{-1} + C_1 \quad (17)$$

Integrando novamente:

$$M_z(x) = +M_{zB} \left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle^0 + C_1 x + C_2 \quad (18)$$

#### 3.6) Determinação das constantes de Integração

Em  $x=0$

$$M_z(x=0) = +M_{zB} \underbrace{\left\langle 0 - \frac{L}{2} \right\rangle^0}_0 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \quad (19)$$

Logo:

$$C_2 = 0 \quad (20)$$

Em  $x=L$

$$M_z(x=L) = +M_{zB} \underbrace{\left\langle L - \frac{L}{2} \right\rangle}_1^0 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0$$

Ou:

$$+M_{zB} + C_1 L = 0$$

Logo:

$$C_1 = -\frac{M_{zB}}{L} \quad (21)$$

### 3.7) Equações Finais

Esforço Cortante: (válida para todo o intervalo ( $0 < x < L$ )). Ver discussão no final do exercício)

$$V_y(x) = +M_{zB} \left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle^{-1} - \frac{M_{zB}}{L} \quad (22)$$

Momento Fletor:

$$M_z(x) = +M_{zB} \left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle^0 - \frac{M_{zB}}{L} x \quad (23)$$

Explicitando os intervalos:

( $0 < x < L/2$ )

$$M_z(x) = -\frac{M_{zB}}{L} x \quad (24)$$

Nas extremidades do Intervalo ( $0 < x < L/2$ ):

$$M_z(x=0) = 0 \quad (24a)$$

$$M_z\left(x = \frac{L}{2}\right) = -\frac{M_{zB}}{L} \left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{M_{zB}}{2} \quad (24b)$$

( $L/2 < x < L$ )

$$M_z(x) = +M_{zB} \underbrace{\left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle^0}_1 - \frac{M_{zB}}{L} x = +M_{zB} - \frac{M_{zB}}{L} x = +M_{zB} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (25)$$

Nas extremidades do Intervalo:

$$M_z\left(x = \frac{L}{2}^+\right) = +M_{zB} - \frac{M_{zB}}{L} \left(\frac{L}{2}\right) = +M_{zB} - \frac{M_{zB}}{2} = +\frac{M_{zB}}{2} \quad (25a)$$

$$M_z(x=L^-) = +M_{zB} - \frac{M_{zB}}{L} (L) = +M_{zB} - M_{zB} = 0 \quad (25b)$$

As expressões para  $V_Y(x)$  e  $M_Z(x)$  obtidas pelo Método das Equações Diferenciais de Equilíbrio estão mostradas na Figura eqdif viga 15\_6.

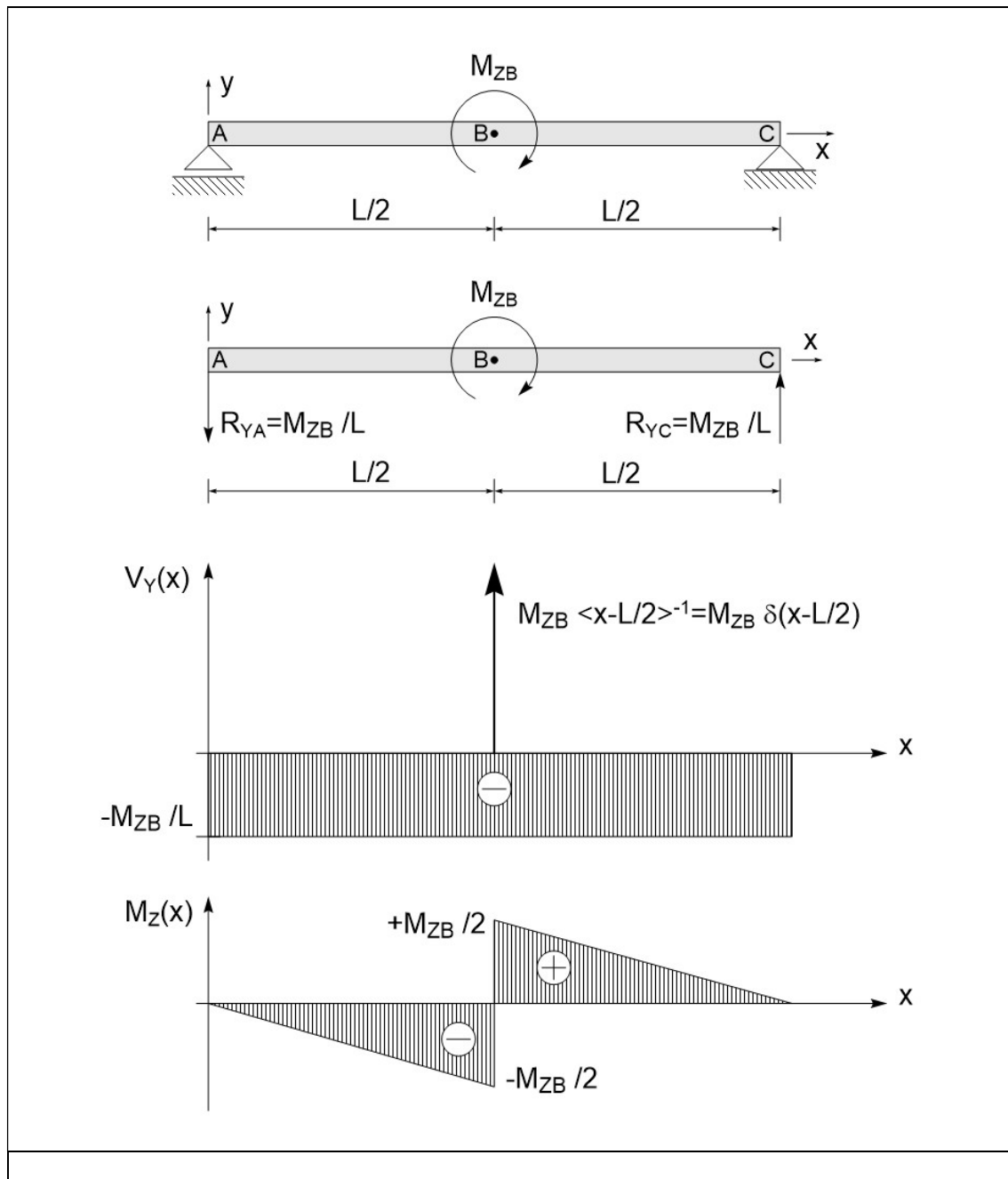


Figura eqdif viga 15\_6: Esforço Cortante e Momento Fletor – Método das Eqs. Dif. Equilíbrio



#### 4 – Comparação entre os resultados MetSec e MetEqDifEquil

Observação: Reparar que as expressões para o **Momento Fletor**  $M_z(x)$  obtidos pelo **Método das Seções**, ver equações (7) e (11), e as expressões do Momento Fletor determinadas pelo **Método das Equações Diferenciais de Equilíbrio**, ver equações (24) e (25) são iguais.

$(0 < x < L/2)$

$$M_z(x) = -\frac{M_{zB}}{L} x \quad (7)=(24)$$

$(L/2 < x < L)$

$$M_z(x) = +M_{zB} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (11)=(25)$$

Por sua vez as equações para os **Esforços Cortantes**  $V_y(x)$  determinadas pelos dois métodos estão mostradas abaixo:

$(0 < x < L)$

Método das Seções

$$V_y(x) = -\frac{M_{zB}}{L} \quad (6)=(10)$$

Método das Equações Diferenciais de Equilíbrio

$$V_y(x) = +M_{zB} \left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle^{-1} - \frac{M_{zB}}{L} \quad (22)$$

A equação (6) se diferencia da equação (10) em um termo, qual seja,  $\langle x - L/2 \rangle^{-1}$ . Dentro da definição das Funções de Singularidade, este parêntesis triangular elevado ao expoente menos um (-1) significa um **Delta de Dirac**:

$$\left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle^{-1} = \delta \left( x - \frac{L}{2} \right) \quad (26)$$

Isto significa que para o problema de um momento fletor concentrado, a expressão para o **Esforço Cortante**  $V_y(x)$  quando calculado pelo **Método das Equações Diferenciais de Equilíbrio** contém um **Delta de Dirac**, uma força concentrada, de intensidade  $M_{zB}$  aplicado no ponto onde o momento concentrado está atuando. O Delta de Dirac não existe no caso do esforço cortante calculado pelo Método das Seções. Esta situação está representada graficamente nas Figura eqdif viga 15\_6

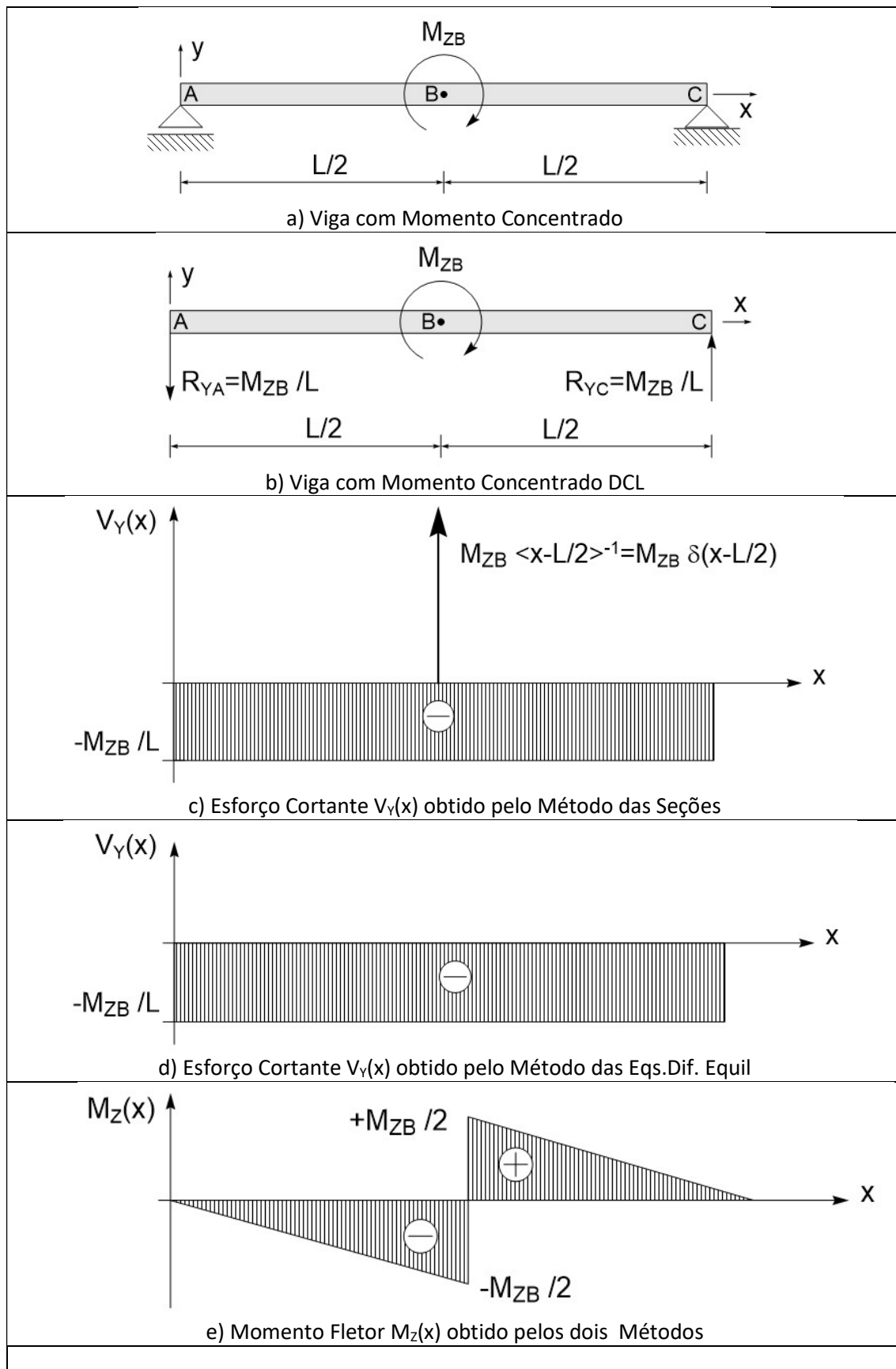


Figura eqdif viga 15\_7:

Esforço Cortante e Momento Fletor para viga bi-apoiada sujeita a Momento Fletor concentrado  $M_{ZB}$  aplicado no centro. Resultado para dois métodos

## 5 – Explicação para as Diferenças nas Expressões no Esforço Cortante

Para entender a existência ou não do Delta de Dirac no Diagrama de Esforço Cortante  $V_y(x)$  vamos analisar a natureza do 'momento concentrado' através de um outro exemplo, mostrado na Figura eqdif viga 15\_8. Trata-se de uma distribuição de esforços distribuídos com taxa  $q_0$  aplicadas sobre um comprimento 'a' e com direções opostas. Como já vimos, este carregamento cria o efeito de um **binário**, mas um binário a partir de um **carregamento distribuído**. Depois de resolvermos este problema, vamos analisar o que acontece se diminuirmos o comprimento 'a' em que o carregamento distribuído é aplicado, aumentando o valor de  $q_0$  para que o valor do binário se mantenha constante. Da análise dos resultados vamos conseguir entender em que circunstâncias aparece o Delta de Dirac na expressão do esforço cortante.

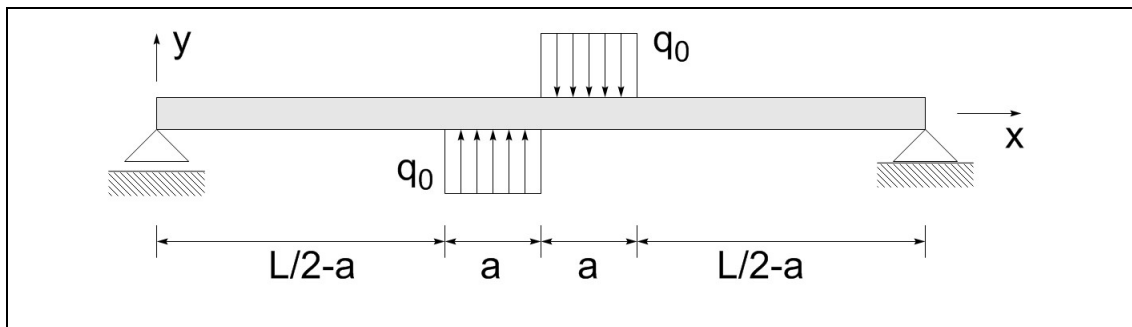


Figura eqdif viga 15\_8: Binário aplicado através de carga distribuída

Solução:

### 4.1) Eixos e convenções

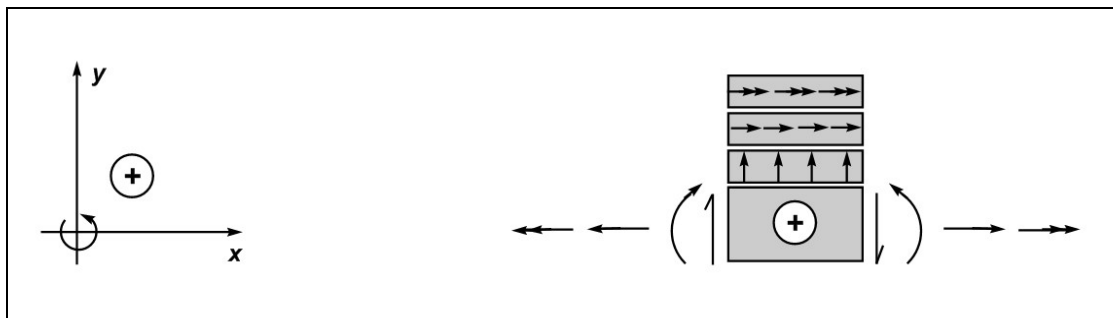


Figura: eqdif\_viga\_15-2

### 4.2) Equação Diferencial

$$\frac{d^2 M_z(x)}{dx^2} = q(x) \quad (27)$$

### 4.3) Equação de carregamento

$$q(x) = +q_0 \left\langle x - \left( \frac{L}{2} - a \right) \right\rangle^0 - 2q_0 \left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle^0 + q_0 \left\langle x - \left( \frac{L}{2} + a \right) \right\rangle^0 \quad (28)$$

#### 4.4) Condições de Contorno

$$M_z(x=0) = 0 \quad (29)$$

$$M_z(x=L) = 0 \quad (30)$$

#### 4.5) Integração da Equação Diferencial

$$\frac{d^2 M_z(x)}{dx^2} = +q_0 \left\langle x - \left( \frac{L}{2} - a \right) \right\rangle^0 - 2q_0 \left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle^0 + q_0 \left\langle x - \left( \frac{L}{2} + a \right) \right\rangle^0 \quad (31)$$

Integrando uma vez:

$$\frac{dM_z(x)}{dx} = V_y(x) = +q_0 \left\langle x - \left( \frac{L}{2} - a \right) \right\rangle^1 - 2q_0 \left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle^1 + q_0 \left\langle x - \left( \frac{L}{2} + a \right) \right\rangle^1 + C_1 \quad (32)$$

Integrando novamente:

$$M_z(x) = +\frac{q_0}{2} \left\langle x - \left( \frac{L}{2} - a \right) \right\rangle^2 - q_0 \left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle^2 + \frac{q_0}{2} \left\langle x - \left( \frac{L}{2} + a \right) \right\rangle^2 + C_1 x + C_2 \quad (33)$$

#### 4.6) Determinação das constantes de Integração

Em  $x=0$ , substituindo **Erro! Fonte de referência não encontrada. em Erro! Fonte de referência não encontrada.** temos:

$$M_z(x=0) = +\frac{q_0}{2} \left\langle 0 - \left( \frac{L}{2} - a \right) \right\rangle^2 - q_0 \left\langle 0 - \frac{L}{2} \right\rangle^2 + \frac{q_0}{2} \left\langle 0 - \left( \frac{L}{2} + a \right) \right\rangle^2 + C_1 0 + C_2 = 0 \quad (34)$$

Logo:

$$C_2 = 0 \quad (1)$$

Em  $x=L$ , substituindo **Erro! Fonte de referência não encontrada. em Erro! Fonte de referência não encontrada.** temos:

$$M_z(x=L) = +\frac{q_0}{2} \left\langle L - \left( \frac{L}{2} - a \right) \right\rangle^2 - q_0 \left\langle L - \frac{L}{2} \right\rangle^2 + \frac{q_0}{2} \left\langle L - \left( \frac{L}{2} + a \right) \right\rangle^2 + C_1 L + C_2 = 0 \quad (35)$$

Resolvendo para  $C_1$  tendo em vista a equação (1), obtemos:

$$C_1 = -q_0 \frac{a^2}{L} \quad (36)$$

#### 4.7) Equações finais e análise

Esforço cortante:

$$V_y(x) = +q_0 \left\langle x - \left( \frac{L}{2} - a \right) \right\rangle^1 - 2q_0 \left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle^1 + q_0 \left\langle x - \left( \frac{L}{2} + a \right) \right\rangle^1 - q_0 \frac{a^2}{L} \quad (37)$$

A rigor, esta expressão contém 4 equações. Senão vejamos,

No intervalo  $(0 < x < L/2 - a)$  temos:

$$V_Y(x) = -q_0 \frac{a^2}{L} \quad (38)$$

No intervalo  $(L/2 - a < x < L/2)$  temos:

$$V_Y(x) = +q_0 \left( x - \left( \frac{L}{2} - a \right) \right) - q_0 \frac{a^2}{L} \quad (2)$$

No intervalo  $(L/2 < x < L/2 + a)$  temos:

$$V_Y(x) = +q_0 \left( x - \left( \frac{L}{2} - a \right) \right) - 2q_0 \left( x - \frac{L}{2} \right) - q_0 \frac{a^2}{L} \quad (39)$$

No intervalo  $(L/2 + a < x < L)$  temos:

$$V_Y(x) = +q_0 \left( x - \left( \frac{L}{2} - a \right) \right) - 2q_0 \left( x - \frac{L}{2} \right) + q_0 \left( x - \left( \frac{L}{2} + a \right) \right) - q_0 \frac{a^2}{L} \quad (40)$$

Momento Fletor:

$$M_Z(x) = +\frac{q_0}{2} \left\langle x - \left( \frac{L}{2} - a \right) \right\rangle^2 - q_0 \left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle^2 + \frac{q_0}{2} \left\langle x - \left( \frac{L}{2} + a \right) \right\rangle^2 - q_0 \frac{a^2}{L} x \quad (41)$$

A rigor, esta expressão também contém 4 equações. Senão vejamos,

No intervalo  $(0 < x < L/2 - a)$  temos:

$$M_Z(x) = -q_0 \frac{a^2}{L} x \quad (42)$$

No intervalo  $(L/2 - a < x < L/2)$  temos:

$$M_Z(x) = +\frac{q_0}{2} \left( x - \left( \frac{L}{2} - a \right) \right)^2 - q_0 \frac{a^2}{L} x \quad (43)$$

No intervalo  $(L/2 < x < L/2 + a)$  temos:

$$M_Z(x) = +\frac{q_0}{2} \left( x - \left( \frac{L}{2} - a \right) \right)^2 - q_0 \left( x - \frac{L}{2} \right)^2 - q_0 \frac{a^2}{L} x \quad (44)$$

No intervalo  $(L/2 + a < x < L)$  temos:

$$M_Z(x) = +\frac{q_0}{2} \left( x - \left( \frac{L}{2} - a \right) \right)^2 - q_0 \left( x - \frac{L}{2} \right)^2 + \frac{q_0}{2} \left( x - \left( \frac{L}{2} + a \right) \right)^2 - q_0 \frac{a^2}{L} x \quad (45)$$

### Análise.

Uma vez resolvido o problema da figura **eqdif\_viga\_15-8** podemos tentar analisar o que acontece com os diagramas de esforço cortante e momento fletor se diminuirmos o comprimento de aplicação dos carregamentos distribuídos  $a$ . Inicialmente temos que descobrir qual a regra de variação entre o comprimento  $a$  e a taxa de carregamento uniformemente distribuído  $q_0$  de forma que o valor do binário seja constante. Reduzimos 'a' e aumentamos 'q\_0' de forma que o efeito (valor do binários) se mantenha constante.

As figuras **eqdif\_viga\_15-9** podem nos auxiliar na compreensão do problema. Elas mostram algumas alternativas para construirmos um binário aplicado em uma viga. Vamos tomar como ponto de partida a figura **eqdif\_viga\_15\_9\_a** onde existe um binário de módulo unitário aplicado no ponto B,  $M_{zB} = 1$ . Podemos também construir o mesmo binário a partir de duas forças  $F$  aplicadas a uma distância  $a$  entre si e de sentidos opostos, tal como mostrado na figura **eqdif\_viga\_15\_9\_b**. Para que o binário resultante das forças concentrada  $F$  também tenha valor unitário temos:

$$F \times a = 1 \quad (46)$$

A regra mostrada na equação (46) é clara, se diminuirmos a distância 'a' devemos aumentar a força de um fator '1/a' para que o binário continue tendo o valor unitário.

Uma terceira possibilidade consiste em realizarmos um momento unitário é substituímos a força concentrada  $F$  por um carregamento distribuído, no caso vamos assumir um carregamento uniforme de amplitude  $q_0$  atuando ao longo de um comprimento  $a$ , tal como mostrado na figura **eqdif\_viga\_15\_9\_c**. O carregamento distribuído pode ser substituído por uma força equivalente  $F_{eq}$  aplicada no centróide do carregamento e que satisfaz a relação:

$$F_{eq} = q_0 a \quad (47)$$

O conjunto de forças equivalentes  $F_{eq}$  mostrado na figura **eqdif\_viga\_15\_9\_c** gera um binário cujo valor é:

$$M_z = F_{eq} a = (q_0 a) a = q_0 a^2 \quad (48)$$

Se quisermos que este binário, causado por dois carregamentos opostos de amplitude  $q_0$  aplicados ao longo de um comprimento  $a$  tenha amplitude unitária, temos que a seguinte relação se impõe:

$$M_z = q_0 a^2 = 1 \quad (49)$$

Ou ainda:

$$q_0 = \frac{1}{a^2} \quad (50)$$

Ou seja, se observarmos a relação **Erro! Fonte de referência não encontrada.** entre  $q_0$  e  $a$  então o binário resultante será sempre de amplitude unitária. Ou ainda, se diminuirmos o comprimento de aplicação 'a' da carga distribuída, esta deverá crescer conforme a regra  $q_0=1/a^2$  para manter o valor constante e, no caso, unitário do binário aplicado.

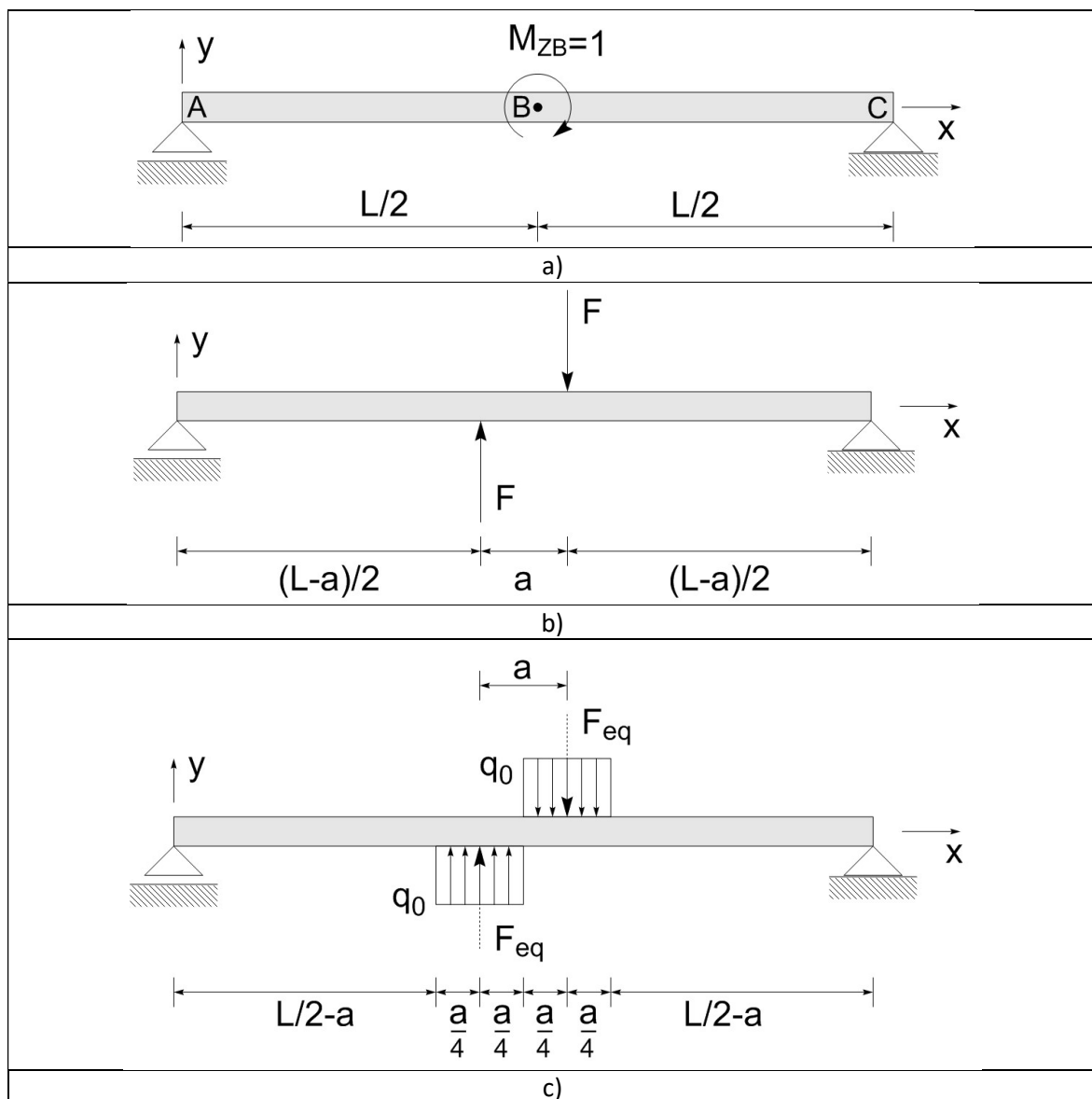


Figura eqdif\_viga\_15-9: Formas de se realizar um binário unitário

Após estas considerações, podemos retornar ao problema da figura **eqdif\_viga\_15-9** cujas expressões para momento fletor  $M_z(x)$  e esforço cortante  $V_y(x)$  estão fornecidas pelas equações (37) e (41).

Vamos analisar uma sequência de problemas na qual o comprimento de aplicação  $a$  do carregamento distribuído varia. Vamos analisar os resultados para os valores ( $a = L/4$ ,  $a = L/20$ ,  $a = L/500$ ).

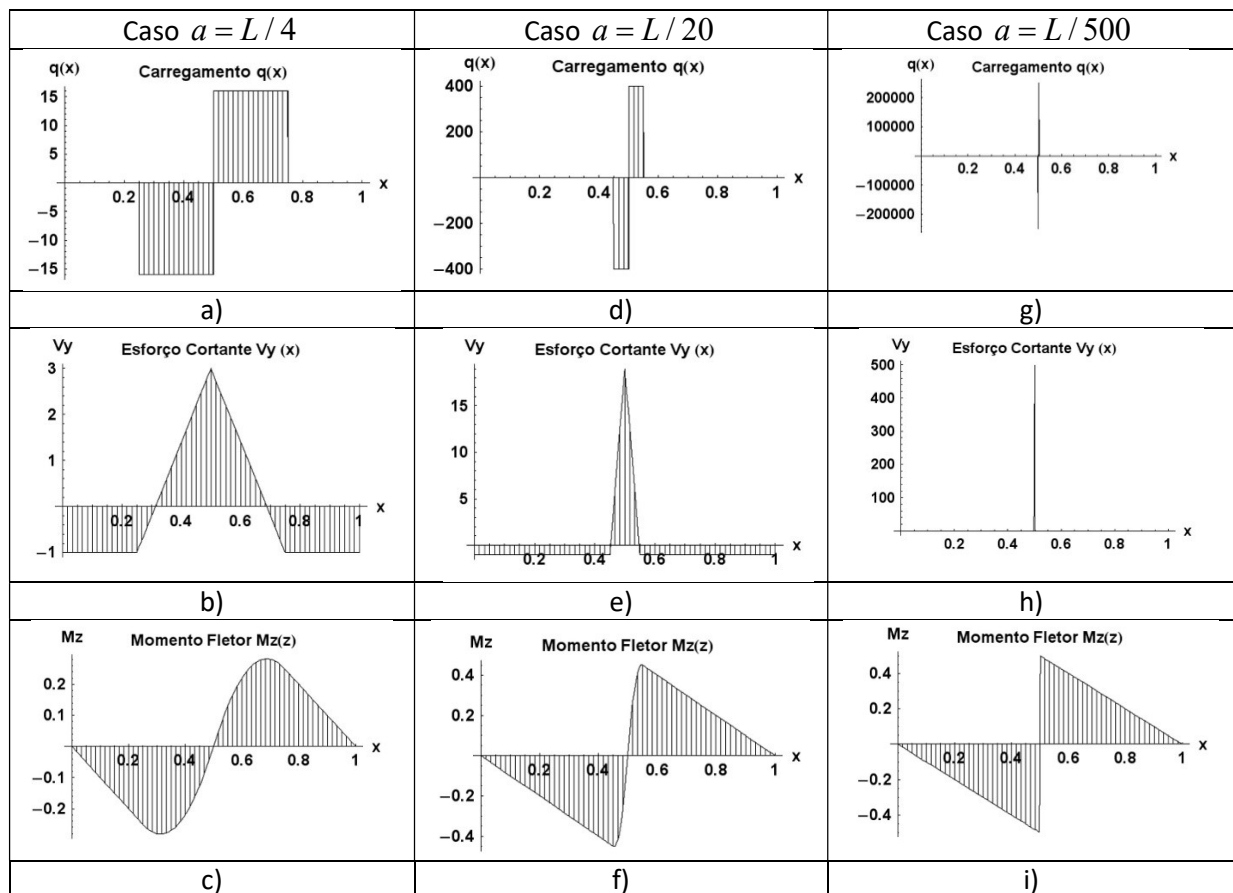


Figura **eqdif\_viga\_15-10**: Influência da relação  $L/a$  nos diagramas de esforços

O que as figuras **eqdif\_viga\_15-10** nos mostram é que se o binário for criado a partir de dois esforços concentrado opostos e muito próximos, ou seja, tendendo a dois Deltas de Dirac opostos e colocados bem próximos à origem, então o diagrama de esforços cortante  $V_y(x)$  realmente apresenta um enorme salto que no limite seria um Delta de Dirac, ou seja, uma força concentrada no local de aplicação do binário. Isto está coerente com o que foi exposto no tópico sobre **funções de singularidade**. O momento concentrado livre, o **binário**, era construído como **derivada do Delta de Dirac**, ou seja, como sendo gerado por **dois Deltas próximos ao ponto de aplicação**.



**Solução.** Aqui é que reside a questão. Esta abordagem utilizando **funções de singularidade** é basicamente, uma **abordagem matemática**. Por outro lado, não fizemos no presente curso uma discussão sobre como uma **situação física real** se transforma em um esquema de cálculo mostrado na figura eqdif\_viga\_15-1. Assim a resposta à pergunta, se existe ou não um Delta de Dirac ou um ‘pico’ no diagrama de esforço cortante, depende da **realização física** do binário. Se este for o resultado de forças opostas de grande intensidade e muito próximas, então o diagrama da figura **eqdif\_viga\_15-10\_h** se aproxima da realidade. Se o binário for aplicado através de outro mecanismo, então provavelmente não existirá o Delta de Dirac. Mas pode existir um forte pico no esforço cortante, tal como mostra a figura **eqdif\_viga\_15-10\_e**.

Como no presente curso não discutimos como foi realizado fisicamente o binário, e em geral sua realização física não é o produto de duas forças opostas, próximas e de grande amplitude, vamos considerar que não existe o Delta de Dirac no diagrama de esforço cortante e desprezar o a função de singularidade com expoente negativo. A expressão correta para o esforço cortante da equação (22) passa a ser:

$$V_Y(x) = -\frac{M_{ZB}}{L} \quad (51)$$

Também vale a pena observar o desenvolvimento dos diagramas de Momento fletor nas figuras **eqdif\_viga\_15-10 c), f) e i)**. Notem que o caso mais crítico é o caso i), ou seja, se considerarmos que o binário foi construído a partir da derivada do Delta de Dirac, ou seja, de dois Deltas de Dirac com sentidos opostos aplicados na origem, o Momento Fletor resultante será o maior entre as possíveis configurações de carregamento mostradas nas figuras **eqdif\_viga\_15-10 a), d) e g)**. Assim o binário concentrado modelado matematicamente desta forma fornece um resultado com valores maiores, ou seja, **a favor da segurança**.

Um outro comentário diz respeito ao **Método das Seções**. No Método das Seções fazemos um **corte** para analisarmos uma seção **antes do ponto de aplicação** do Momento Concentrado e **outro corte** para analisarmos uma seção **depois do ponto de aplicação do momento**. Analisamos **o ante e o depois** e não nos preocupamos com a situação **no ponto**. O método das seções não fornece ferramentas para se analisar ou discutir o que acontece ‘no ponto’, Já utilizando as **Funções de Singularidade** e o **Método das Equações Diferenciais de Equilíbrio**, é possível tem um entendimento dos processos limites que ocorrem ‘no ponto’.

Este problema discutido nesta nota didática é um belo exemplo para se perceber que existe um **mundo físico** e que se pode construir diversos **modelos matemáticos** para reproduzir e entender a física. Vai depender do analista, ou do engenheiro, escolher qual modelo é o mais apropriado para o problema que ele está analisando. Esta escolha está além do escopo deste curso. Neste curso fornecemos as **ferramentas** para que o analista/engenheiro possa fazer a escolha mais adequada de **modelo** para reproduzir o aspecto que lhe interessa capturar ou compreender **do problema físico** em estudo.

## 6- Um exemplo de situação física onde pode existir um pico no Esforço Cortante

Nesta seção vamos analisar uma situação física que poderia levar a um diagrama de Esforço Cortante  $V_y(x)$  onde aparece um pico concentrado muito grande, que no limite poderia se aproximar do Delta de Dirac existente na Equação (22).

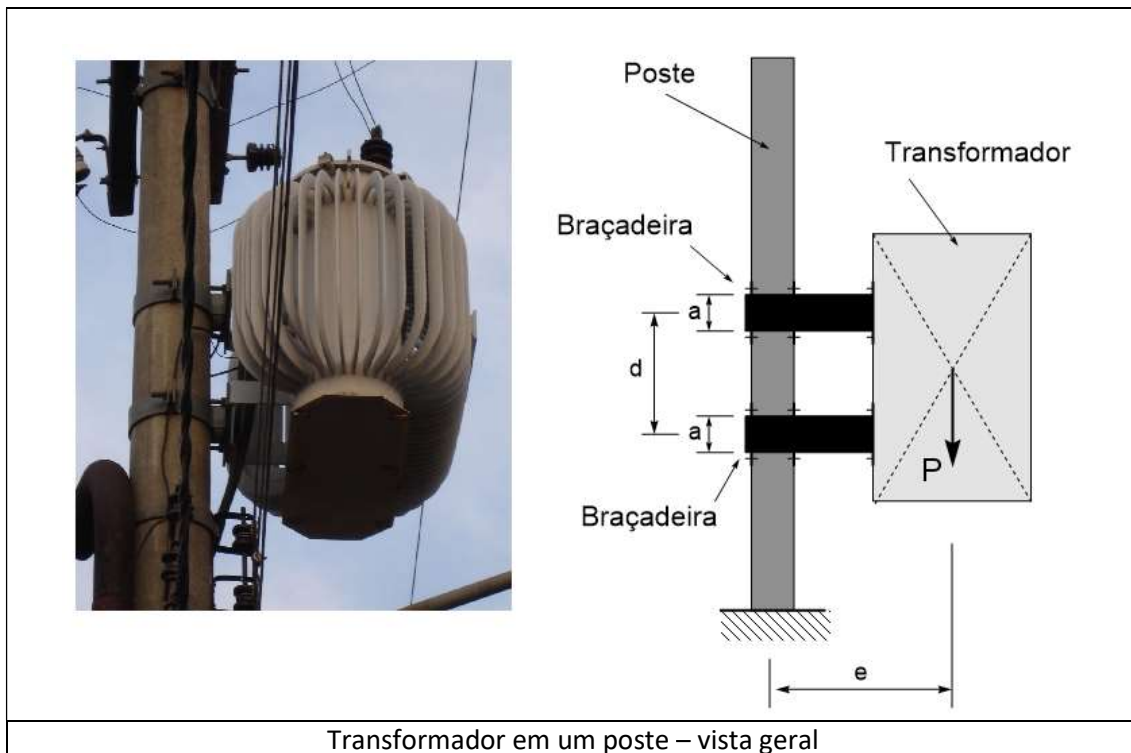
A Figura **eqdif\_viga\_15-11** mostra um poste no qual está afixado um transformador. Vamos analisar mais de perto o transformador e seu esquema de fixação no poste.



Transformador em um poste – vista geral

Figura **eqdif\_viga\_15-11**: Posta com transformador

O lado esquerdo da Figura **eqdif\_viga\_15-12** mostra um detalhe da foto onde se pode perceber que o transformador está fixado ao poste através de braçadeiras. O lado direito da mesma figura mostra um esquema do transformador fixado ao poste. O peso do transformador é indicado pela letra **P**. Entre o centro de massa do transformador e a linha geométrica que representa o centro do poste existe uma distância chamada de '**e**', como se fosse uma excentricidade. As duas braçadeiras possuem uma largura '**a**'. A distância entre os centros das braçadeiras é indicado pela letra '**d**'.



Transformador em um poste – vista geral

Figura **eqdif\_viga\_15-12**: Poste com transformador – foto e esquema de fixação

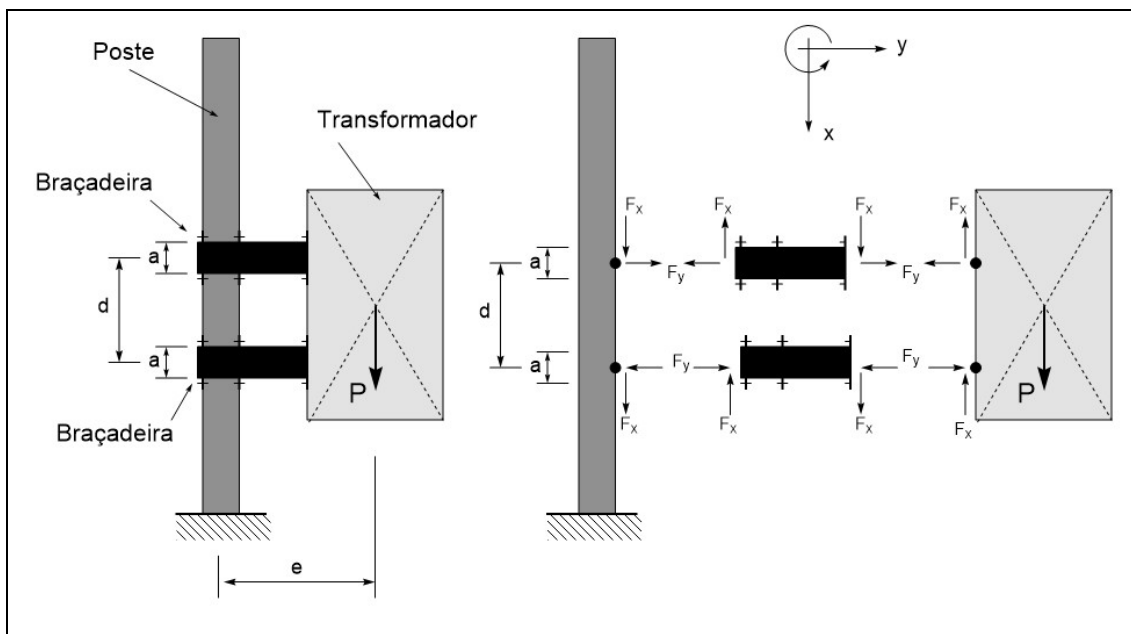


Figura **eqdif\_viga\_15-13**: DCLs e Forças atuantes no poste e transformador

A Figura **eqdif\_viga\_15-13** por sua vez mostra um conjunto de Diagramas de Corpo Livre, ou DCLs. Estes DCLs mostram as forças que estão atuando no transformador, nas braçadeiras e no poste.

Vamos nos concentrar nas forças que garantem o equilíbrio do poste. Do ponto de vistas das forças atuando nas braçadeiras no sentido vertical, vamos assumir que cada braçadeira suporta metade do peso do transformador,  $P/2$ . Este ponto é arbitrário mas não influenciará o presente raciocínio. Assim:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -2F_x + P = 0$$

Logo

$$F_x = \frac{P}{2} \quad (52)$$

Agora façamos o somatório dos momentos em torno do eixo 'z' em relação ao ponto em que a braçadeira inferior encontra o transformador:

$$\sum M_z = 0 \rightarrow -P e + F_y d = 0$$

$$F_y = P \frac{e}{d} \quad (53)$$

A expressão (53) mostra que para um dado peso  $P$  e uma excentricidade 'e', a força horizontal  $F_y$  cresce à medida que a distância entre as braçadeiras 'd' diminui.

Com estas equações simples, obtemos as forças  $F_x$  e  $F_y$  que também atuam no poste, tal como mostrado na Figura **eqdif\_viga\_15-13**.

Se analisarmos as forças que atuam no poste, veremos que temos duas forças verticais  $F_y$ , alinhadas com o eixo 'x' do poste, e duas forças transversais  $F_x$  aplicadas transversalmente ao poste. Conforme já discutimos no capítulo sobre modelagem e também no capítulo sobre dedução das Equações Diferenciais de Equilíbrio, um elemento estrutural retilíneo com estas forças aplicadas pode ser decomposto em uma **barra** e uma **viga**.

A parte do poste de que atua como uma barra está mostrada na figura **eqdif\_viga\_15-14**, enquanto o carregamento que causa que o poste atue como uma viga, está mostrada na figura **eqdif\_viga\_15-15**.

Vamos tratar daqui em diante somente do problema da viga submetida a dois carregamentos transversais iguais e de intensidade  $F_y = Pe/d$ . Conforme mostrado na figura **eqdif\_viga\_15-15** estas forças estão aplicada a uma distância 'd' e formam um binário de intensidade  $M_z = F_y d$ .

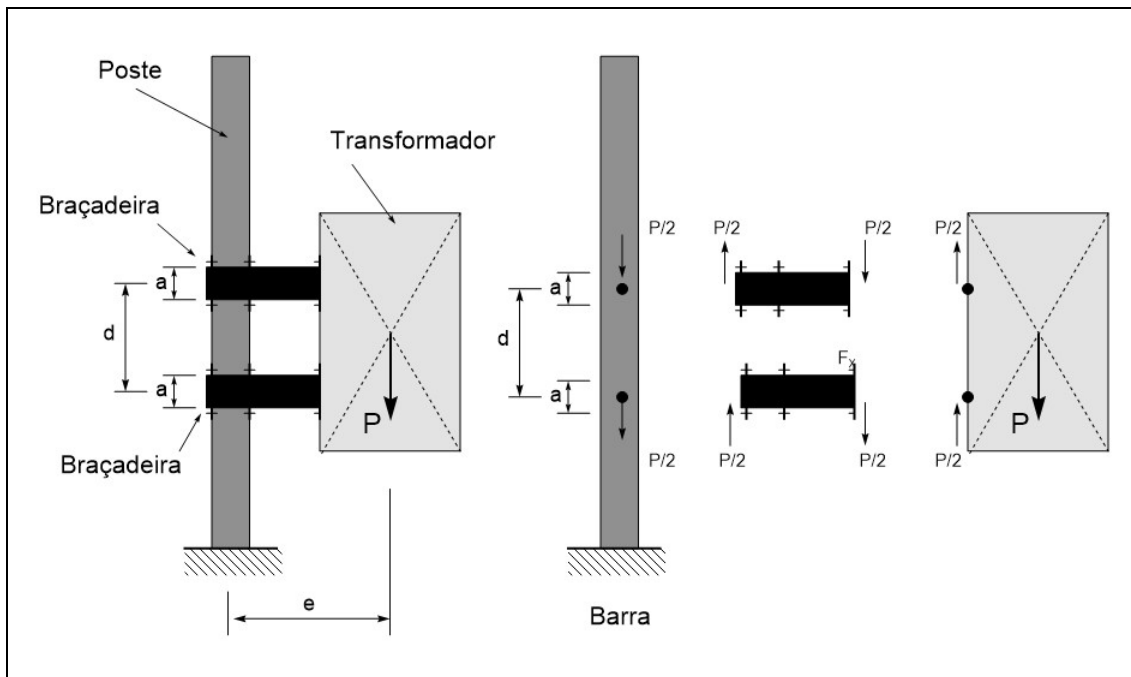


Figura eqdif\_viga\_15-14: Forças axiais atuando no poste, a ser modelado como **barra**

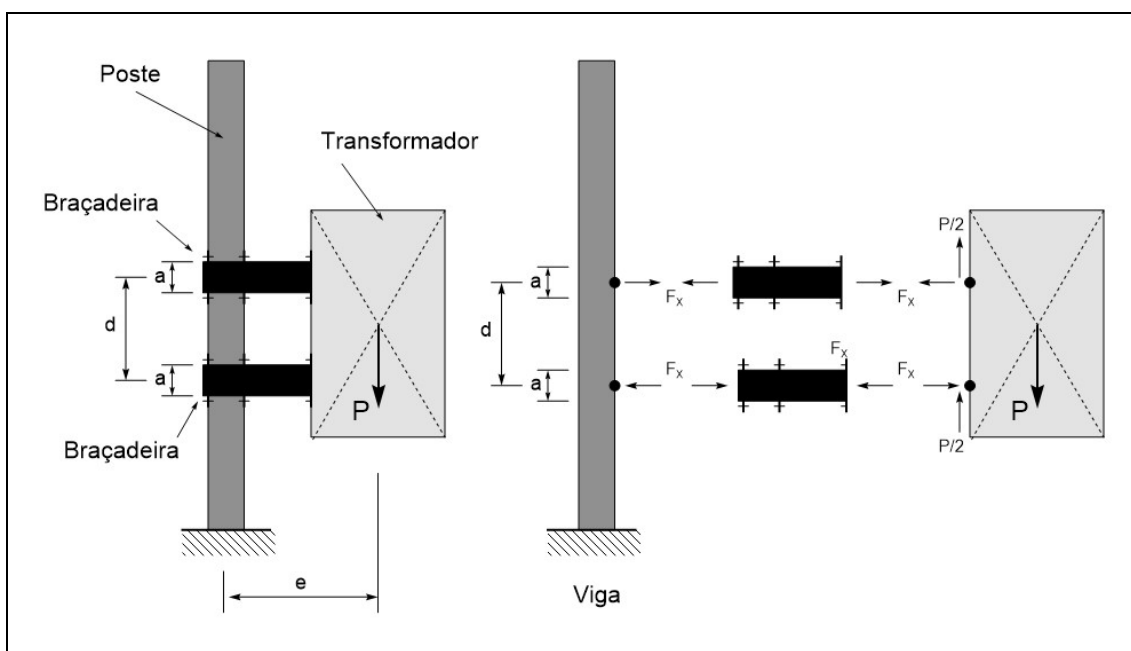


Figura eqdif\_viga\_15-15: Forças transversais atuando no poste, a ser modelado como **viga**.

A próxima etapa desta análise é perceber que a força  $F_y$  está aplicada no poste (viga) ao longo da largura 'a' da braçadeira. Então, a rigor, não temos uma força concentrada aplicada no poste (viga) mas sim uma carga distribuída aplicada ao longo do comprimento 'a'. Imaginando que a

distribuição de forças na braçadeira é constante e indicada por  $q_0$ , podemos facilmente determinar seu valor:

$$q_0 = \frac{F_Y}{a} \quad (54)$$

O carregamento distribuído aplicado no poste (viga) está mostrado na figura **eqdif\_viga\_15-16**. Notar que este esquema de carregamento é muito similar ao problema proposto na figura **Figura eqdif viga 15\_8**. Podemos aplicar a mesma metodologia aplicada naquele problema para determinar o **Diagrama dos Esforços Cortantes** que atuam no poste (viga). O Diagrama do Esforço cortante  $V_Y(x)$  também esta mostrado na figura **eqdif\_viga\_15-16**.

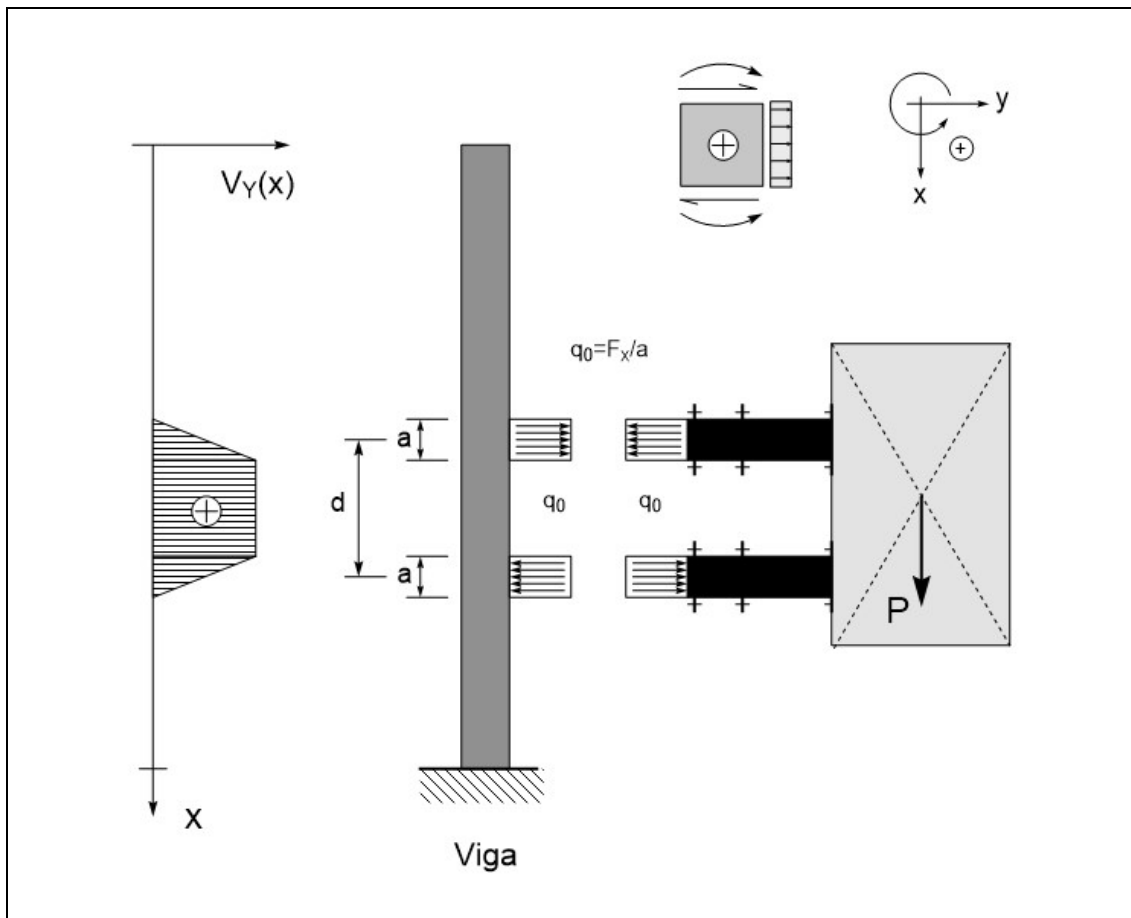


Figura **eqdif\_viga\_15-16**: Forças distribuídas  $q_0$  aplicadas no poste.

A próxima etapa é imaginar que a concessionária responsável pela instalação e manutenção dos transformadores comprou uma nova leva de braçadeiras que possuem uma largura  $a'$  e que possuem  $1/3$  da largura da braçadeira original, ou seja  $a' = a/3$ . Isto está mostrado na figura **eqdif\_viga\_15-17**. Esta figura também mostra que com a diminuição da largura em que a força  $F_Y$  é aplicada sobre a viga, a **taxa de carregamento  $q_0'$**  passa agora a ser definido como:

$$q_0' = \frac{F_Y}{a'} \quad (55)$$

Esta taxa de carregamento transversal é maior do que a anterior e causa uma distribuição cuja taxa de crescimento é mais elevada, derivada maior, mas o valor final do esforço cortante máximo permanece o mesmo.

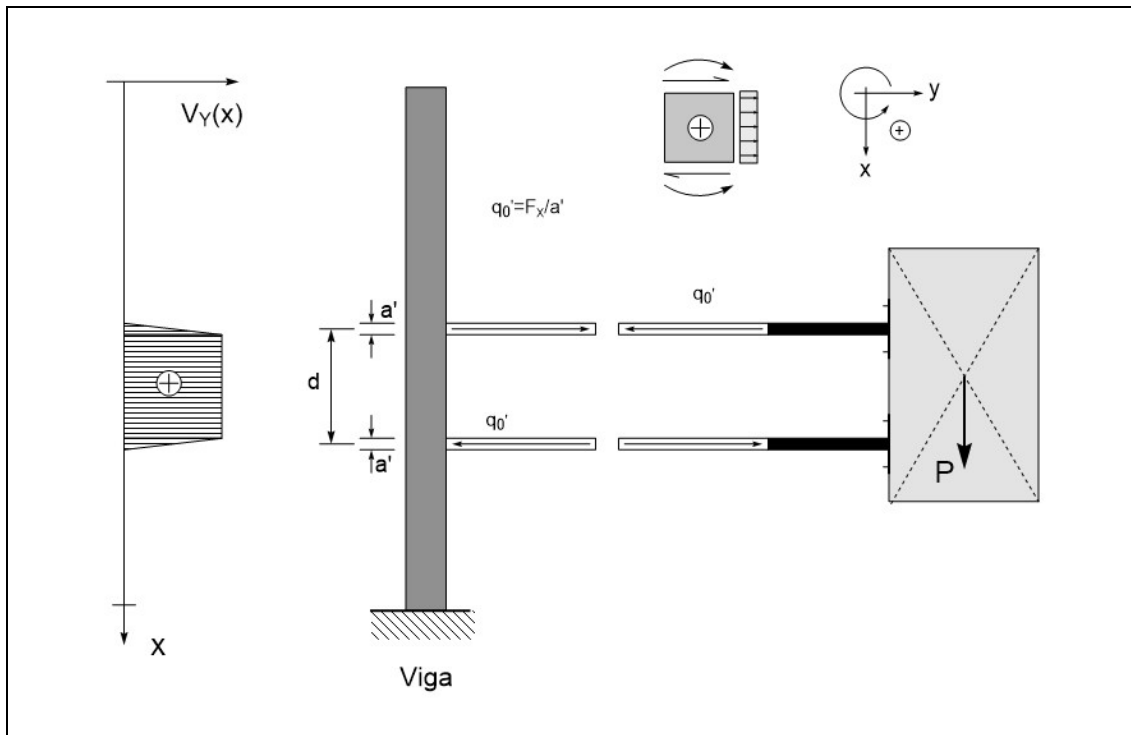


Figura eqdif\_viga\_15-17: Braçadeiras mais estreitas, carregamento transversal  $q_0'$

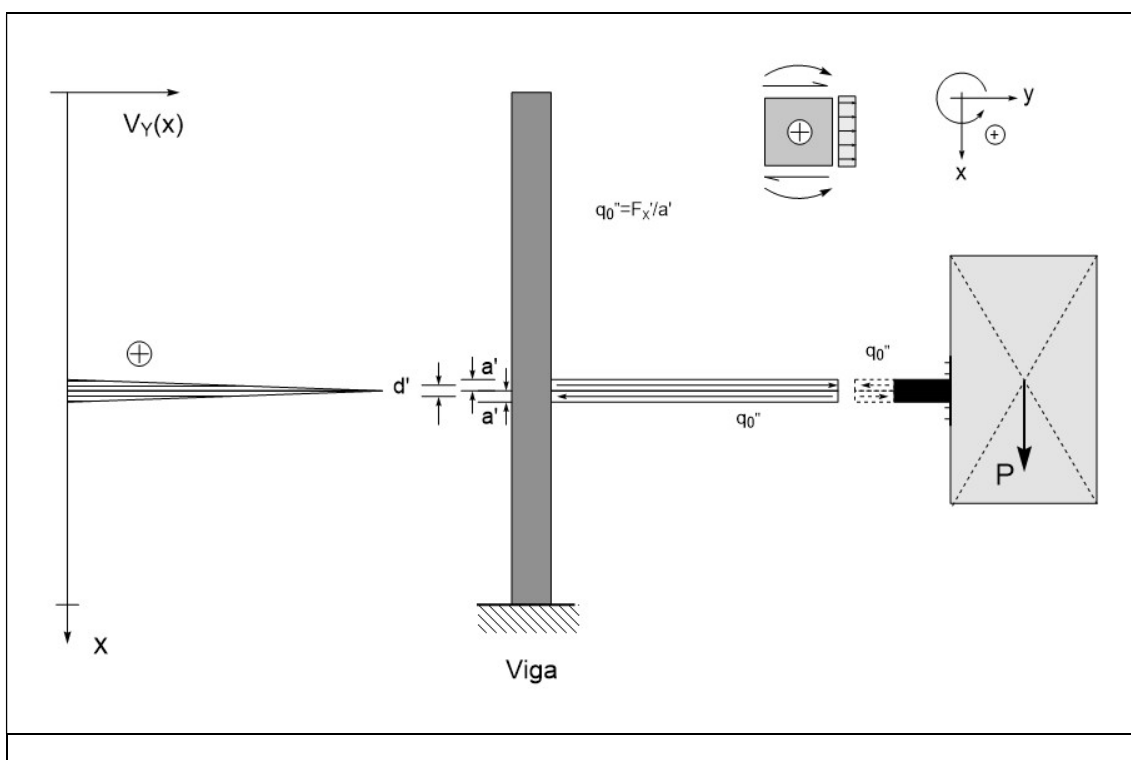


Figura **eqdif\_viga\_15-18**: Braçadeiras estreitas colocadas lado a lado.

A próxima etapa é considerar o caso em que o instalador de transformadores da concessionária resolve fixar as novas braçadeiras mais estreitas bem juntas uma da outra. Esta situação está mostrada na figura **eqdif\_viga\_15-18**. Note que agora a força transversal  $F_Y$  é muito maior que as duas situações anteriores:

$$F_Y' = P \frac{e}{a'} \quad (56)$$

A taxa de carregamento  $q_0''$  por sua vez é dada por:

$$q_0'' = \frac{F_Y'}{a'} = P \frac{e}{a'^2} \quad (57)$$

Esta alta taxa de carregamento, aplicada lado a lado com outra de mesma intensidade e sentido oposto, tal como mostrado na Figura **eqdif\_viga\_15-18**, produz um binário muito forte. O Diagrama de Esforço Cortante deste carregamento também está indicado na figura. Notar que existe um forte pico no diagrama de esforço cortante. Este diagrama é muito próximo do diagrama mostrado na figura Figura **eqdif\_viga\_15-10** e, do exemplo indicado na figura eqdif viga 15\_8.

Se as braçadeiras se mantiverem lado a lado e sua largura for progressivamente diminuída, o binário produzido será o equivalente a duas forças concentradas de intensidade ilimitada e situadas praticamente no mesmo ponto. Esta é a forma como descrevemos um momento fletor concentrado através das Funções de Singularidade. Nesta situação, de braçadeiras muito finas, situadas lado a lado resultará em um Esforço Cortante que possui um forte pico no ponto de aplicação do binário.

Com isto podemos avançar um pouco mais na discussão sobre a existência ou não do Delta de Dirac no diagrama de Esforço Cortante em uma viga na qual existe um binário concentrado. De novo, se o binário for causado por forças opostas de grande intensidade e atuando bem próximas uma da outra, o esforço cortante apresentará um 'pico'.

**Resumo.** Você precisa saber como o binário, ou seu efeito, foi construído fisicamente para saber como será o Diagrama de Esforço Cortante.