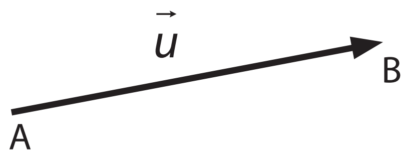
MATEMATIKA PEMINATAN

VEKTOR I

Tujuan Pembelajaran
Setelah mempelajari materi ini, kamu diharapkan memiliki kemampuan berikut. 1. Memahami definisi dan notasi vektor. 2. Dapat menentukan panjang vektor. 3. Memahami vektor satuan dan cara menentukannya. 4. Memahami kesamaan vektor. 5. Memahami vektor yang berlawanan arah. 6. Dapat melakukan operasi pada vektor.

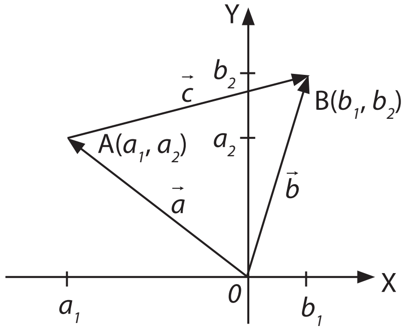
A. Definisi Vektor

Ketika di SMP, kamu tentu telah mengenal apa itu ruas garis. **Ruas garis** adalah bagian dari garis yang dibatasi oleh dua titik ujung yang berbeda. Vektor juga merupakan ruas garis, yaitu ruas garis yang mempunyai arah. Secara geometris, **vektor** didefinisikan sebagai ruas garis berarah yang mempunyai panjang dan arah tertentu. Panjang suatu vektor juga disebut sebagai **nilai atau besar vektor**. Untuk lebih jelasnya, perhatikan gambar berikut!



Ruas garis dari A ke B adalah vektor AB yang dapat dinotasikan dengan $\overrightarrow{AB}$. Vektor $\overrightarrow{AB}$ juga dapat dinotasikan dengan huruf kecil yang di atasnya diberi tanda panah, misal vektor $\vec{u}$, atau huruf kecil yang dicetak tebal, misal vektor **u**. Titik A disebut sebagai **titik pangkal** atau titik awal, sedangkan titik B disebut sebagai **titik ujung** atau titik temu atau titik terminal. Besar vektor $\overrightarrow{AB}$ adalah panjang ruas garis AB, sedangkan arah vektor AB adalah dari A ke B. Besar vektor atau panjang vektor $\overrightarrow{AB}$ dapat dinotasikan dengan $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Sekarang, perhatikan ilustrasi vektor pada bidang Cartesius berikut.



Pada bidang Cartesius tersebut, vektor $\vec{a}$ adalah vektor dengan titik pangkal O(0, 0) dan titik ujung A(a_1, a_2). Oleh karena titik pangkalnya berada pada titik pusat koordinat yaitu O(0,0), maka vektor $\vec{a}$ dapat disebut sebagai **vektor posisi titik A**. Demikian pula dengan vektor $\vec{b}$. Vektor $\vec{b}$ adalah vektor dengan titik pangkal O (0,0) dan titik ujung B(b_1, b_2). Oleh karena itu, vektor $\vec{b}$ juga disebut sebagai **vektor posisi titik B**.

Jika A(a_1, a_2), vektor posisi titik A dapat ditulis $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ atau $\vec{a} = (a_1, a_2)$.

Jika B(b_1, b_2), vektor posisi titik B dapat ditulis $\overrightarrow{OB} = \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ atau $\vec{b} = (b_1, b_2)$.

a_1 dan b_1 sebagai koordinat pada sumbu–*x* menyatakan komponen vektor secara horizontal. Sementara a_2 dan b_2 sebagai koordinat pada sumbu–*y* menyatakan komponen vektor secara vertikal.

Dengan menarik garis dari titik A ke titik B, kamu akan mendapatkan vektor $\overrightarrow{AB}$ atau vektor $\vec{c}$. Vektor $\vec{c}$ mempunyai titik pangkal pada A dan titik ujung pada B. Berdasarkan rumus jarak, vektor $\vec{c}$ dapat dituliskan sebagai $\vec{c} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ Jika dituliskan dalam bentuk matriks, akan diperoleh:

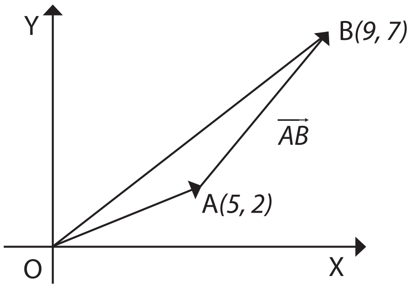
$$\overrightarrow{AB} = \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

Contoh Soal 1

Nyatakan vektor $\overrightarrow{AB}$ jika diketahui koordinat titik A(5,2) dan titik B(9,7).

Pembahasan:

Vektor $\overrightarrow{AB}$ berarti arah vektor dari A ke B. Untuk lebih jelasnya, perhatikan gambar berikut.



Oleh karena vektor posisi titik $A = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan vektor posisi titik $B = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}$, maka:

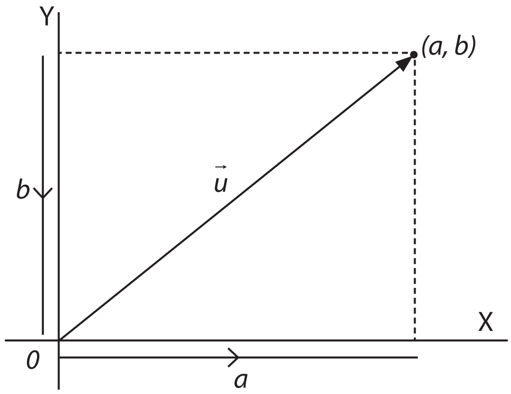
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 9-5 \\ 7-2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Jadi, vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

B. Panjang Vektor

Perhatikan ilustrasi dari vektor $\vec{u}$ pada bidang (R^2) berikut.



Pada vektor $\vec{u}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, a menyatakan komponen vektor secara horizontal, sedangkan b menyatakan komponen vektor secara vertikal. Berdasarkan teorema Phytagoras, panjang vektor $\vec{u}$ atau $|\vec{u}|$ dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\boxed{|\vec{u}| = \sqrt{a^2+b^2}}$$

Contoh Soal 2

Tentukan panjang vektor $\vec{s}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$ dan vektor $\vec{t}=12\bar{i}+5\bar{j}$.

Pembahasan:

Panjang kedua vektor tersebut dapat ditentukan sebagai berikut.

$|\bar{s}| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$|\bar{t}| = \sqrt{12^2+5^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$

Jadi, $|\bar{s}| = 5$ dan $|\bar{t}| = 13$

SUPER "Solusi Quipper"

Misalkan vektor $\vec{u}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dan panjang vektor $\vec{u}$ adalah $|\vec{u}| = \sqrt{a^2+b^2}$. Oleh karena panjang vektor dapat ditentukan dengan teorema Pyhtagoras, maka kamu dapat memanfaatkan *tripel* Pythagoras. Di antara *tripel* Pythagoras yang sering digunakan adalah sebagai berikut.

3	4	5
5	12	13
7	24	25
8	15	17

Bilangan paling besar pada *tripel* Pythagoras merupakan panjang vektor yang komponennya adalah bilangan yang lain. Jadi, jika kamu dapat mengingat *tripel* Pythagoras dengan baik, kamu akan semakin mudah menentukan panjang vektor.

Sekarang, mari kita terapkan SUPER "Solusi Quipper" untuk menentukan panjang vektor pada contoh soal sebelumnya. Vektor pada contoh soal sebelumnya tersebut memenuhi *tripel* Pythagoras.

SUPER "Solusi Quipper"

Diketahui vektor $\vec{s} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$. Komponen vektornya adalah 3 dan 4. Berdasarkan *tripel* Pythagoras, bilangan selanjutnya adalah 5. Dengan demikian, kamu dapat langsung mengetahui bahwa $\left|\vec{s}\right| = 5$.

Dengan pemahaman yang sama seperti vektor pada bidang (R^2), kamu juga dapat memahami vektor pada ruang (R^3). Misalkan terdapat titik A(a_1, a_2, a_3) dan B(b_1, b_2, b_3) pada ruang (R^3). Kamu dapat menuliskan vektor $\vec{a}$ yang mewakili vektor $\overrightarrow{OA}$ dan vektor $\vec{b}$ yang mewakili vektor $\overrightarrow{OB}$ sebagai berikut.

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dan $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

Panjang kedua vektor tersebut masing-masing dapat ditentukan dengan rumus berikut.

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$
$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

Contoh Soal 3

Jika diketahui koordinat titik C (1, 4, 2) dan titik D (3, 10, 5), tentukan panjang vektor $\overrightarrow{CD}$.

Pembahasan:

Vektor $\overrightarrow{CD}$ berarti arah vektor dari C ke D. Dengan demikian, diperoleh:

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 10-4 \\ 5-2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{2^2 + 6^2 + 3^2} = \sqrt{4+36+9} = \sqrt{49} = 7$$

Jadi, panjang vektor adalah 7.

C. Vektor Satuan

Setiap vektor yang bukan vektor nol mempunyai vektor satuan. **Vektor satuan** adalah vektor yang arahnya sama dengan suatu vektor dan panjangnya sama dengan satu satuan. Vektor satuan biasanya dilambangkan dengan *e* topi atau $\hat{e}$.

Jika vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, vektor satuan dari $\vec{u}$ dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\boxed{\hat{e} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}$$

Vektor-vektor satuan $\hat{i}$ dan $\hat{j}$ dapat dinyatakan dengan vektor kolom, yaitu sebagai berikut.

$$\boxed{\hat{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dan } \hat{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Dengan demikian, vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ juga dapat dinyatakan dengan notasi vektor satuan $\hat{i}$ dan $\hat{j}$. Perhatikan penjabaran berikut.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a\hat{i} + b\hat{j}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} = a\hat{i} + b\hat{j}$$

Contoh Soal 4

Tentukan vektor satuan dari vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Pembahasan:

Tentukan dahulu panjang vektor $\vec{u}$.

$$|\vec{u}| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$

Kemudian, tentukan vektor satuannya dengan cara berikut.

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} \\ \frac{12}{13} \end{pmatrix}$$

Jadi, vektor satuan dari vektor $\vec{u}$ adalah $\hat{u} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} \\ \frac{12}{13} \end{pmatrix}$.

Contoh Soal 5

Tentukan vektor yang searah dengan vektor $\vec{a} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$ dan mempunyai panjang 15 satuan.

Pembahasan:

Tentukan dahulu panjang vektor $\vec{a}$.

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Kemudian tentukan vektor satuannya.

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{1}{5}\left(3\hat{i} - 4\hat{j}\right)$$

Oleh karena vektor yang dicari mempunyai panjang 15 satuan, maka vektor tersebut adalah $15\hat{a}$.

$$15\hat{a} = 15\left(\frac{1}{5}\left(3\hat{i} - 4\hat{j}\right)\right) = 3\left(3\hat{i} - 4\hat{j}\right) = 9\hat{i} - 12\hat{j}$$

Jadi, vektor yang searah dengan vektor $\vec{a} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$ dan mempunyai panjang 15 satuan adalah vektor $9\hat{i} - 12\hat{j}$.

D. Kesamaan Vektor

Dua buah vektor dikatakan sama jika kedua vektor tersebut mempunyai panjang dan arah yang sama.

Misalkan vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

Jika $\vec{a} = \vec{b}$, nilai $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Ini berarti, $a_1 = b_1$ dan $a_2 = b_2$, serta $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right|$.

Contoh Soal 6

Jika vektor $\vec{a} = x\hat{i} + 8\hat{j}$ dan $\vec{b} = 6\hat{i} + y\hat{j}$ adalah dua vektor yang sama, nilai $x \cdot y = ...$

Pembahasan:

Diketahui:

$\vec{a} = x\hat{i} + 8\hat{j}$

$\vec{b} = 6\hat{i} + y\hat{j}$

Oleh karena kedua vektor adalah sama, maka unsur-unsur yang bersesuaian bernilai sama, sehingga:

$x = 6$

$y = 8$

Jadi, nilai $x \cdot y = 6 \cdot 8 = 48$.

Contoh Soal 7

Diketahui titik A (2, 3, 5), B (1, 4, x), dan C (y, z, 1). Jika $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$, nilai $x + y - z = ...$

Pembahasan:

Mula-mula, tentukan vektor $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 4-3 \\ x-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ x-5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} y-1 \\ z-4 \\ 1-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-1 \\ z-4 \\ 1-x \end{pmatrix}$$

Oleh karena $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$, maka:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ x-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-1 \\ z-4 \\ 1-x \end{pmatrix}$$

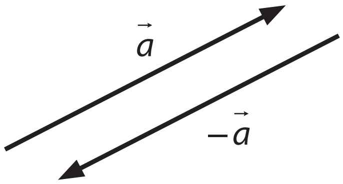
Dengan demikian, diperoleh:

- $-1 = y - 1 \rightarrow y = 0$
- $1 = z - 4 \rightarrow z = 5$
- $x - 5 = 1 - x \rightarrow 2x = 6 \rightarrow x = 3$

Jadi, nilai $x + y - z = 3 + 0 - 5 = -2$.

E. Vektor yang Berlawanan Arah

Perhatikan gambar vektor berikut.



Dari gambar tersebut, tampak bahwa vektor $\vec{a}$ dan $-\vec{a}$ memiliki besar yang sama, tetapi arahnya berlawanan. Misalkan $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$. Oleh karena memiliki arah yang berlawanan, maka $-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix}$. Secara sederhana, dua vektor yang berlawanan arah dapat dituliskan sebagai berikut.

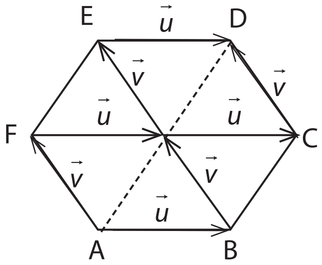
$$\boxed{\begin{gathered} \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA} \\ \vec{b} - \vec{a} = -\left(\vec{a} - \vec{b}\right) \end{gathered}}$$

Contoh Soal 8

Pada segi 6 ABCDEF, $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ dan $\overrightarrow{AF} = \vec{v}$. Nilai dari $\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CD} =$

Pembahasan:

Perhatikan gambar berikut.



Dengan demikian, diperoleh:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CD} &= -\vec{u} - \vec{u} - \vec{u} + \vec{v} + \vec{v} \\ &= -3\vec{u} + 2\vec{v} \end{aligned}$$

Jadi, nilai dari $\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CD} = -3\vec{u} + 2\vec{v}$.

Contoh Soal 9

Carilah titik awal suatu vektor dengan titik ujung Q(2, 0, −7) dan berlawanan arah dengan $\vec{v} = (-2 \;\; 4 \;\; -1)$.

Pembahasan:

Misalkan $\overrightarrow{PQ} = -\vec{v}$. Ini berarti:

$$\overrightarrow{PQ} = -\vec{v}$$
$$\Leftrightarrow \vec{q} - \vec{p} = -(-2 \;\; 4 \;\; -1)$$
$$\Leftrightarrow \vec{q} - \vec{p} = (2 \;\; -4 \;\; 1)$$
$$\Leftrightarrow -\vec{p} = -\vec{q} + (2 \;\; -4 \;\; 1)$$
$$\Leftrightarrow -\vec{p} = (-2 \;\; 0 \;\; 7) + (2 \;\; -4 \;\; 1)$$
$$\Leftrightarrow -\vec{p} = (0 \;\; -4 \;\; 8)$$
$$\Leftrightarrow \vec{p} = (0 \;\; 4 \;\; -8)$$

Jadi, titik awal vektor tersebut adalah P(0, 4, −8).

Contoh Soal 10

Diketahui vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix}$. Jika vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ y \end{pmatrix}$ merupakan vektor yang sama dengan $\vec{a}$ tetapi berlawanan arah, nilai dari $\frac{2x}{y} = ...$

Pembahasan:

Perhatikan kembali pernyataan pada soal.

- Oleh karena vektor $\vec{b}$ merupakan vektor yang sama dengan vektor $\vec{a}$, maka unsur-unsur yang bersesuaian pada kedua vektor tersebut bernilai sama.
- Oleh karena vektor $\vec{b}$ berlawanan arah dengan vektor $\vec{a}$, maka unsur-unsur pada vektor $\vec{b}$ selalu berlawanan tanda dengan vektor $\vec{a}$.

Dengan demikian, diperoleh:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} \; dan \; \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

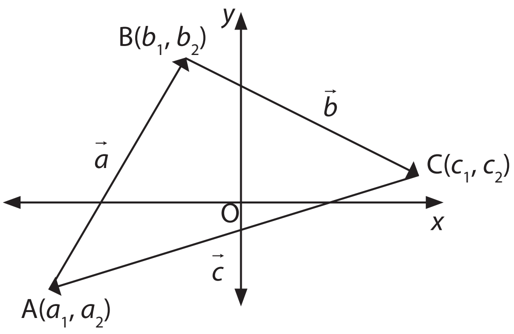
- $x = -5$
- $y = -2$

Jadi, $\frac{2x}{y} = \frac{2(-5)}{-2} = 5$.

F. Operasi Vektor

1. Penjumlahan dan Pengurangan Vektor

Perhatikan gambar berikut ini.



Pada gambar tersebut, vektor $\vec{a}$, $\vec{b}$, dan $\vec{c}$ dapat ditulis sebagai berikut.

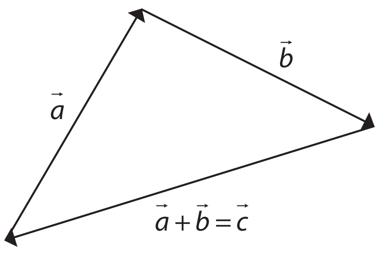
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} c_1 - b_1 \\ c_2 - b_2 \end{pmatrix}; \text{ dan } \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

Apakah hubungan dari ketiga vektor ini? Perhatikan bahwa vektor $\vec{c}$ menghubungkan titik A ke titik C. Sementara vektor $\vec{a}$ menghubungkan titik A ke titik B, dan vektor $\vec{b}$ menghubungkan titik B ke titik C. Jika vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ dihubungkan sesuai arahnya, vektor $\vec{a} + \vec{b}$ juga menghubungkan titik A ke titik C sebagaimana vektor $\vec{c}$. Untuk lebih jelasnya, coba kamu jumlahkan vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$.

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 - b_1 \\ c_2 - b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 + c_1 - b_1 \\ b_2 - a_2 + c_2 - b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \end{pmatrix} = \vec{c}$$

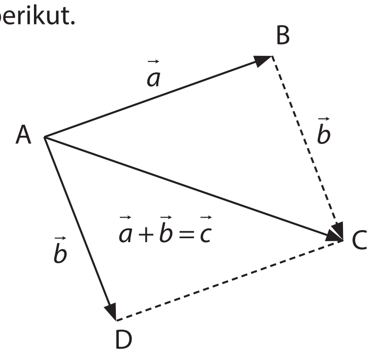
Dari uraian tersebut, terbukti bahwa $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.

Secara geometris, penjumlahan vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ dapat dilakukan dengan cara segitiga seperti berikut.



Perhatikan bahwa titik ujung vektor $\vec{a}$ berimpit dengan titik pangkal vektor $\vec{b}$. Dengan menarik ruas garis dari titik pangkal vektor $\vec{a}$ ke titik ujung vektor $\vec{b}$, akan diperoleh jumlah dari kedua vektor tersebut. Ruas garis ini dapat diberi nama vektor $\vec{c}$, sehingga diperoleh $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$.

Selain dengan cara segitiga, penjumlahan vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ juga dapat dilakukan dengan cara jajargenjang berikut.



Perhatikan bahwa titik pangkal vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ berimpit. Untuk membentuk jajargenjang, proyeksi dari vektor $\vec{b}$ digeser hingga titik pangkalnya berhimpit dengan titik ujung vektor $\vec{a}$. Oleh karena sisi jajargenjang yang berhadapan adalah sama panjang, maka $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Dengan demikian, diperoleh:

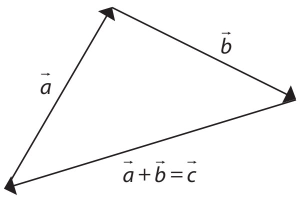
$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$$
$$\Leftrightarrow \vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$$

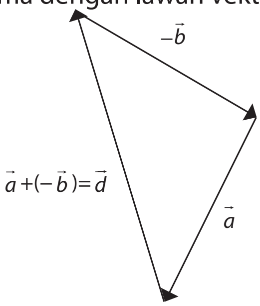
Berdasarkan penjelasan-penjelasan tersebut, diperoleh kesimpulan berikut.

Misal $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}; \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$; dan $\vec{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=\vec{c}$$

Operasi pengurangan vektor hampir sama dengan penjumlahan vektor. Pengurangan bisa diartikan sebagai penjumlahan vektor pertama dengan lawan vektor kedua.





$$\boxed{\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})}$$

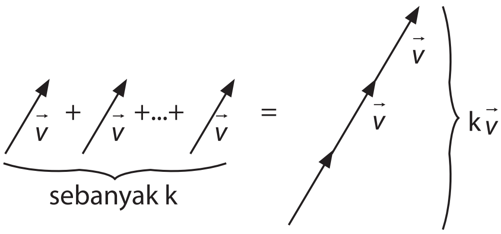
Misal $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix};\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$; dan $\vec{d}=\begin{pmatrix}d_1\\d_2\end{pmatrix}$. Dengan demikian, diperoleh:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)=\vec{d}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-b_1\\-b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1-b_1\\a_2-b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_1\\d_2\end{pmatrix}$$

2. Perkalian Vektor dengan Bilangan Real

Secara geometris, perkalian vektor dengan bilangan real dapat diibaratkan dengan menyambung vektor-vektor yang sama sebanyak nilai bilangan real yang dikalikan. Perhatikan gambar berikut.



Pada gambar tersebut, vektor $\vec{v}$ dijumlahkan sebanyak *k* atau dikalikan *k*, dengan *k* adalah bilangan real. Vektor $\vec{v}$ disusun sehingga saling menyambung sepanjang *k* kali vektor $\vec{v}$.

Misalkan vektor $\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$. Dengan demikian, diperoleh:

$$\vec{v}+\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1+v_1\\v_2+v_2\\v_3+v_3\end{pmatrix}\Leftrightarrow 2\vec{v}=\begin{pmatrix}2v_1\\2v_2\\2v_3\end{pmatrix}$$

$$\vec{v}+\vec{v}+\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1+v_1+v_1\\v_2+v_2+v_2\\v_3+v_3+v_3\end{pmatrix}\Leftrightarrow 3\vec{v}=\begin{pmatrix}3v_1\\3v_2\\3v_3\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\vec{v}+\vec{v}+...+\vec{v}}_{\text{Sebanyak } k}=\begin{pmatrix}v_1+v_1+...+v_1\\v_2+v_2+...+v_2\\v_3+v_3+...+v_3\end{pmatrix}\Leftrightarrow k\vec{v}=\begin{pmatrix}kv_1\\kv_2\\kv_3\end{pmatrix}$$

Dari uraian tersebut, dapat disimpulkan sebagai berikut.

> Jika k adalah bilangan real dan vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, nilai $k\vec{v} = \begin{pmatrix} kv_1 \\ kv_2 \\ kv_3 \end{pmatrix}$.

Jika beberapa titik terletak pada garis yang sama (kolinear), dari titik-titik tersebut dapat dibentuk beberapa vektor yang saling berkelipatan. Vektor-vektor yang terbentuk ini dinamakan **vektor segaris/kolinear**. Misalkan titik A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), dan C(x_3, y_3, z_3) kolinear, maka berlaku:

$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \text{ atau } \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC} \text{ atau } \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{BC}$$

Contoh Soal 11

Diketahui vektor $\vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dan $\vec{t} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Jika $\vec{u} = 2\vec{s} - 3\vec{t}$, tentukan vektor $\vec{u}$.

Pembahasan:

Berdasarkan konsep perkalian vektor dengan bilangan skalar dan pengurangan vektor, diperoleh:

$$\begin{aligned}
\vec{u} = 2\vec{s} - 3\vec{t} &= 2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\cdot 2 \\ 2\cdot 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3\cdot(-1) \\ 3\cdot 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 15 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4-(-3) \\ 6-15 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Jadi, vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \end{pmatrix}$.

Contoh Soal 12

Diketahui vektor $\vec{s}=(1,2), \vec{t}=(-1,1)$, dan $\vec{w}=(4,11)$. Jika $\vec{w}=a\vec{s}+b\vec{t}$, tentukan nilai *ab*.

Pembahasan:

Berdasarkan konsep perkalian vektor dengan bilangan skalar dan penjumlahan vektor, diperoleh:

$$\begin{aligned} \vec{w}=a\vec{s}+b\vec{t} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b \\ b \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ 2a+b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Berdasarkan konsep kesamaan vektor, diperoleh:

$4 = a - b$ ... (1)

$11 = 2a + b$ ... (2)

Dengan melakukan eliminasi variabel *b* pada persamaan (1) dan (2), diperoleh:

$$\begin{array}{l} 4 = a - b \\ \underline{11 = 2a + b \; +} \\ 15 = 3a \\ \Leftrightarrow \dfrac{15}{3} = a \\ \Leftrightarrow a = 5 \end{array}$$

Subtitusikan $a = 5$ ke persamaan (1), sehingga diperoleh:

$$\begin{array}{l} 4 = a - b \\ \Leftrightarrow 4 = 5 - b \\ \Leftrightarrow b = 5 - 4 \\ \Leftrightarrow b = 1 \end{array}$$

Jadi, $ab = 5 \cdot 1 = 5$.

Contoh Soal 13

Diketahui titik A(–6, –2, –4), B(3, 1, 2), dan C(6, *a*, *b*). Jika titik A, B, dan C kolinear, nilai $a + b = ...$

Pembahasan:

Oleh karena titik A, B, dan C kolinear, maka berlaku:

$$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$$

$$\vec{c} - \vec{a} = k\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 12 \\ a+12 \\ b+4 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan konsep kesamaan vektor, diperoleh:

(1) $12 = 9k$

$\Leftrightarrow k = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

(2) $a + 2 = 3k$

$\Leftrightarrow a + 2 = 3\left(\frac{4}{3}\right)$

$\Leftrightarrow a + 2 = 4$

$\Leftrightarrow a = 2$

(3) $b + 4 = 6k$

$\Leftrightarrow b + 4 = 6\left(\frac{4}{3}\right)$

$\Leftrightarrow b = 8 - 4$

$\Leftrightarrow b = 4$

Jadi, nilai $a + b = 2 + 4 = 6$.