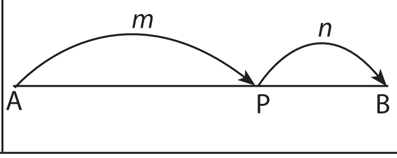
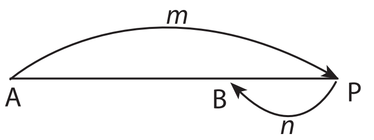
VEKTOR II

Tujuan Pembelajaran
Setelah mempelajari materi ini, kamu diharapkan memiliki kemampuan berikut. 1. Memahami tentang pembagian vektor. 2. Memahami tentang teorema Menelaus. 3. Dapat melakukan operasi perkalian dua vektor. 4. Dapat menentukan sudut antara dua vektor. 5. Dapat menentukan panjang dari jumlah dan selisih vektor. 6. Dapat menentukan proyeksi suatu vektor pada vektor lain.

A. Pembagian Vektor

1. Pembagian Ruas Garis

Titik P membagi ruas garis AB dengan perbandingan $m : n$, sehingga $\overrightarrow{AP} : \overrightarrow{PB} = m : n$. Ada 2 kemungkinan posisi titik P terhadap ruas garis AB, yaitu titik P di dalam AB atau titik P di luar AB. Untuk mengetahui pengaruh posisi titik P terhadap tanda perbandingan ruas garis, perhatikan tabel berikut.

Perbedaan	Posisi Titik P	
	Titik P di dalam AB	Titik P di luar AB
Gambar		

Perbedaan	Posisi Titik P	
	Titik P di dalam AB	**Titik P di luar AB**
Tanda perbandingan	$\overrightarrow{AP}$ dan $\overrightarrow{PB}$ mempunyai arah yang sama, sehingga m dan n mempunyai tanda yang sama.	$\overrightarrow{AP}$ dan $\overrightarrow{PB}$ mempunyai arah yang berlawanan, sehingga m dan n mempunyai tanda yang berlawanan.
Perbandingan ruas garis	$\overrightarrow{AP} : \overrightarrow{PB} = m : n$ $\overrightarrow{AP} : \overrightarrow{AB} = m : (m + n)$	$\overrightarrow{AP} : \overrightarrow{PB} = m : -n$ $\overrightarrow{AP} : \overrightarrow{AB} = m : (m - n)$

Contoh Soal 1

Diketahui layang-layang PQRS yang diagonal-diagonalnya berpotongan di titik O. Jika panjang $\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{OR} = 4$ cm, $\overrightarrow{OS} = 6$ cm, dan $\overrightarrow{QO} = 10$ cm, tentukan perbandingan-perbandingan berikut!

a. $\overrightarrow{PO} : \overrightarrow{OR}$

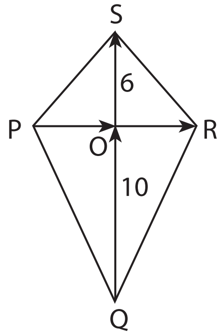
b. $\overrightarrow{PO} : \overrightarrow{PR}$

c. $\overrightarrow{QO} : \overrightarrow{SO}$

d. $\overrightarrow{QO} : \overrightarrow{SQ}$

Pembahasan:

Layang-layang pada soal dan unsur-unsur yang diketahui dapat digambarkan sebagai berikut.



Berdasarkan gambar tersebut, diperoleh:

a. $\overrightarrow{PO} : \overrightarrow{OR} = 4 : 4 = 1 : 1$

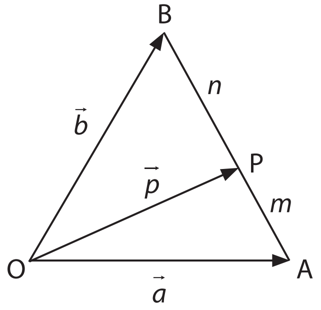
b. $\overrightarrow{PO} : \overrightarrow{PR} = 4 : (4 + 4) = 4 : 8 = 1 : 2$

c. $\overrightarrow{QO} : \overrightarrow{SO} = \overrightarrow{QO} : (-\overrightarrow{OS}) = 10 : (-6) = 5 : -3$

d. $\overrightarrow{QO} : \overrightarrow{SQ} = \overrightarrow{QO} : (-\overrightarrow{QS}) = 10 : -(10 + 6) = 5 : -8$

2. Pembagian dalam Bentuk Vektor

Misalkan $\vec{a}$, $\vec{b}$, dan $\vec{p}$ berturut-turut merupakan vektor posisi dari titik A, B, dan P. Jika titik P membagi ruas garis AB dengan perbandingan $\overrightarrow{AP} : \overrightarrow{PB} = m : n$, berlaku rumus berikut.



$$\boxed{\vec{p} = \frac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n}}$$

Contoh Soal 2

Diketahui vektor posisi dari titik C dan D berturut-turut adalah $\vec{c}$ dan $\vec{d}$. Jika titik P membagi ruas garis CD dengan perbandingan $\overrightarrow{CP} : \overrightarrow{PD} = 2 : 3$, tuliskan vektor posisi dari titik P dalam $\vec{c}$ dan $\vec{d}$!

Pembahasan:

Oleh karena perbandingan $\overrightarrow{CP} : \overrightarrow{PD} = 2 : 3$, maka $m = 2$ dan $n = 3$.

Dengan menggunakan rumus pembagian ruas garis dalam bentuk vektor, diperoleh:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{d} + n\vec{c}}{m+n} = \frac{2\vec{d} + 3\vec{c}}{2+3} = \frac{2}{5}\vec{d} + \frac{3}{5}\vec{c}$$

Jadi, vektor posisi dari titik P dalam $\vec{c}$ dan $\vec{d}$ adalah $\vec{p} = \frac{2}{5}\vec{d} + \frac{3}{5}\vec{c}$.

Contoh Soal 3

Diketahui titik E(11, 3) dan F(6, 8). Jika titik P membagi ruas garis EF dengan perbandingan $\overrightarrow{EP} : \overrightarrow{PF} = -2 : 7$, tentukan koordinat titik P!

Pembahasan:

Oleh karena perbandingan $\overrightarrow{EP} : \overrightarrow{PF} = -2 : 7$, maka $m = -2$ dan $n = 7$.

Dengan menggunakan rumus pembagian ruas garis dalam bentuk vektor, diperoleh:

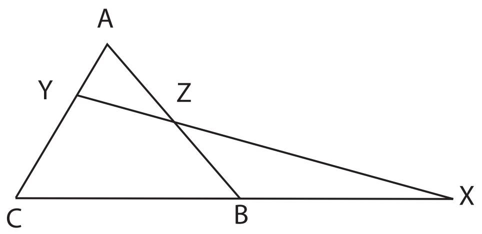
$$\vec{p} = \frac{m\vec{f} + n\vec{e}}{m+n} = \frac{-2\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix}}{-2+7} = \frac{\begin{pmatrix} 65 \\ 5 \end{pmatrix}}{5} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jadi, koordinat titik P adalah (13, 1).

B. Teorema Menelaus

Diketahui sebuah segitiga ABC. Titik Y terletak pada sisi AC dan titik Z terletak pada sisi AB. Melalui titik Y dan Z dibuat garis YZ. Garis CB dan YZ diperpanjang sehingga berpotongan di titik X seperti pada gambar berikut.

Bunyi Teorema Menelaus



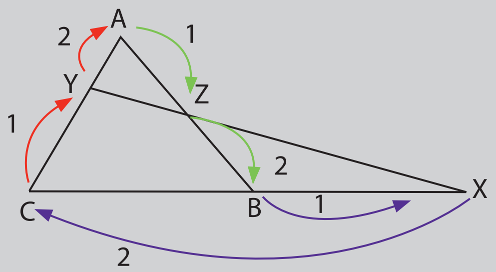
Titik X, Y, Z segaris (kolinear) jika dan hanya jika $\frac{|\overrightarrow{BX}|}{|\overrightarrow{XC}|}\cdot\frac{|\overrightarrow{CY}|}{|\overrightarrow{YA}|}\cdot\frac{|\overrightarrow{AZ}|}{|\overrightarrow{ZB}|}=1.$

Teorema Menelaus disebut juga dengan teorema Ceva.

SUPER "Solusi Quipper"

Cara Mudah Mengingat Teorema Menelaus

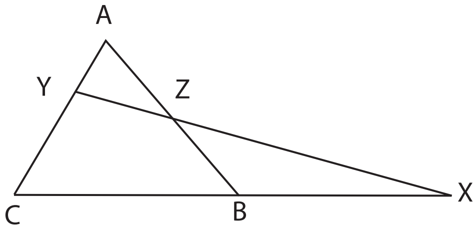
Agar kamu lebih mudah mengingat teorema ini, perhatikan arah panah berikut.



$$\frac{|\overrightarrow{BX}|}{|\overrightarrow{XC}|}\cdot\frac{|\overrightarrow{CY}|}{|\overrightarrow{YA}|}\cdot\frac{|\overrightarrow{AZ}|}{|\overrightarrow{ZB}|}=1.$$

Contoh Soal 4

Perhatikan gambar berikut!



Diketahui koordinat titik A(4, 8) dan B(8, –2). Jika perbandingan $\overrightarrow{BX} : \overrightarrow{XC} = 1 : 2$ dan $\overrightarrow{CY} : \overrightarrow{YA} = 4 : 1$, tentukan koordinat titik Z!

Pembahasan:

Mula-mula, tentukan perbandingan $\overrightarrow{AZ} : \overrightarrow{ZB}$ dengan menggunakan teorema Menelaus.

$$\frac{|\overrightarrow{AZ}|}{|\overrightarrow{ZB}|} \cdot \frac{|\overrightarrow{BX}|}{|\overrightarrow{XC}|} \cdot \frac{|\overrightarrow{CY}|}{|\overrightarrow{YA}|} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{|\overrightarrow{AZ}|}{|\overrightarrow{ZB}|} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{1} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{|\overrightarrow{AZ}|}{|\overrightarrow{ZB}|} \cdot 2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{|\overrightarrow{AZ}|}{|\overrightarrow{ZB}|} = \frac{1}{2}$$

Ini berarti, $\frac{|\overrightarrow{AZ}|}{|\overrightarrow{ZB}|} = \frac{m}{n} = \frac{1}{2}$

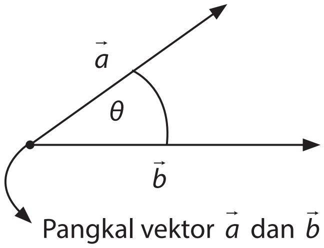
Selanjutnya, tentukan koordinat titik Z dengan menggunakan rumus pembagian ruas garis dalam bentuk vektor.

$$\vec{z} = \frac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n} = \frac{1\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}}{1+2} = \frac{\begin{pmatrix} 16 \\ 14 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} \frac{16}{3} \\ \frac{14}{3} \end{pmatrix}$$

Jadi, koordinat titik Z adalah $\left(\frac{16}{3}, \frac{14}{3}\right)$.

C. Perkalian Skalar Dua Vektor (Perkalian Titik atau *Dot Product*)

Perhatikan gambar berikut!



Pangkal vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ berimpit di satu titik

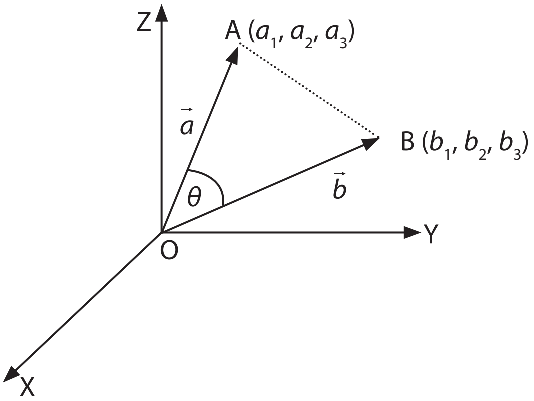
Hasil perkalian skalar vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ adalah suatu bilangan real yang dapat ditentukan dengan rumus berikut.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta$

dengan θ adalah sudut antara vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$.

Perkalian skalar vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ disebut juga dengan perkalian titik $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ atau $\vec{a} \cdot \vec{b}$ (dibaca $\vec{a}$ dot $\vec{b}$). Syarat perkalian skalar dua vektor adalah pangkal kedua vektor harus berimpit di satu titik.

Perhatikan gambar vektor di R^3 berikut!

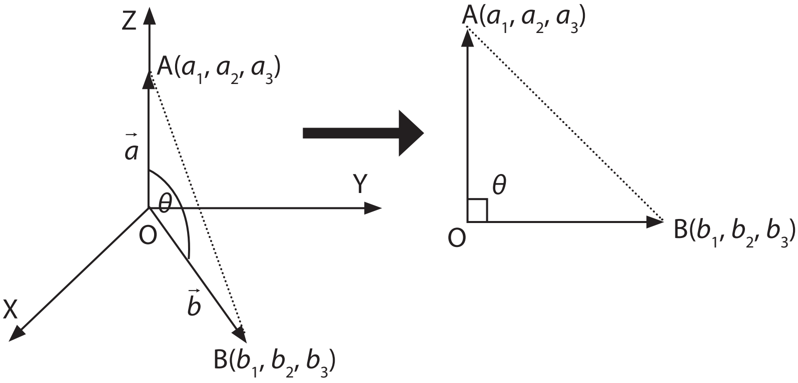


Jika diketahui komponen vektornya, misalnya $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, perkalian skalar dua vektor dapat ditentukan dengan rumus berikut.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

Tips: Cukup kalikan elemen-elemen yang seletak.

Sekarang, perhatikan gambar berikut ini!

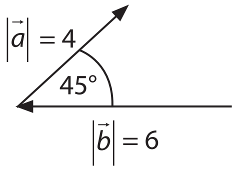


Jika vektor $\vec{a}$ tegak lurus vektor $\vec{b}$ ($\theta = 90°$), diperoleh:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos 90° = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 0$$

Contoh Soal 5

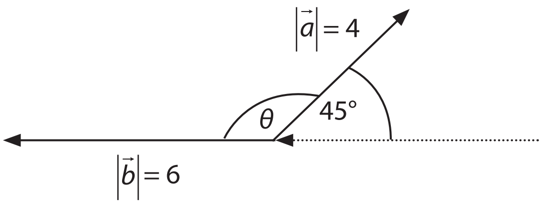
Perhatikan gambar berikut!



Tentukan nilai dari $\vec{a} \cdot \vec{b}$!

Pembahasan:

Syarat perkalian skalar dua vektor adalah pangkal kedua vektor harus berimpit di satu titik. Oleh karena itu, vektor $\vec{b}$ harus digeser sedemikian rupa hingga pangkalnya berimpit dengan pangkal vektor $\vec{a}$.



Berdasarkan gambar tersebut, diketahui $\theta = 180° - 45° = 135°$ (sudut berpelurus).

Dengan demikian, diperoleh:

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \\ &= (4)(6)\cos 135° \\ &= 24\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \\ &= -12\sqrt{2}\end{aligned}$$

Jadi, nilai dari $\vec{a}\cdot\vec{b} = -12\sqrt{2}$.

Contoh Soal 6

Diketahui $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ dan $\vec{b} = -5\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$. Tentukan nilai dari $\vec{a}\cdot\vec{b}$!

Pembahasan:

Oleh karena yang diketahui komponen vektornya, maka cukup kalikan elemen-elemen yang seletak.

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \\ &= (2)(-5) + (-3)(-2) + (1)(4) \\ &= -10 + (6) + (4) \\ &= 0\end{aligned}$$

Jadi, nilai dari $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

Sifat-Sifat Perkalian Skalar Dua Vektor

a. $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$
b. $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$
c. Komutatif: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$
d. Distributif: $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$
e. Tidak asosiatif: $\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c}) \neq (\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$
f. Tidak memiliki elemen identitas
g. Tidak memiliki invers

Contoh Soal 7

Diketahui $\vec{a} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 5\check{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 3\hat{j} + x\check{k}$, dan $\vec{c} = 6\hat{i} + 5\hat{j} + 2\check{k}$. Jika vektor $\vec{a}$ tegak lurus vektor $\vec{b}$, hasil dari $2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$ adalah .... (UN 2015)

A. $5\hat{i} + 8\hat{j} + 6\hat{k}$

B. $5\hat{i} + 8\hat{j} - 6\hat{k}$

C. $5\hat{i} - 8\hat{j} + 6\hat{k}$

D. $6\hat{i} + 5\hat{j} - 8\hat{k}$

E. $6\hat{i} - 5\hat{j} + 6\hat{k}$

Pembahasan:

Mula-mula, tentukan nilai *x*.

Oleh karena vektor $\vec{a}$ tegak lurus vektor $\vec{b}$, maka $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ x \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow 0 = 4 + 6 - 5x$

$\Leftrightarrow 5x = 10$

$\Leftrightarrow x = 2$

Ini berarti, $\vec{b} = \hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$.

Selanjutnya, tentukan $2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$.

$$\begin{aligned} 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c} &= 2\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Jadi, hasil dari $2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c} = 5\hat{i} + 8\hat{j} - 6\hat{k}$.

D. Sudut antara Dua Vektor

Misalkan $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ adalah vektor-vektor di R^n. Besarnya sudut antara vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ (θ) dapat ditentukan dari rumus perkalian titik dua vektor, yaitu sebagai berikut.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$
$$\Leftrightarrow \cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$
$$\Leftrightarrow \theta = \text{arc cos}\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)$$

Dengan demikian, rumus untuk menentukan sudut antara dua vektor adalah sebagai berikut.

$$\boxed{\theta = \text{arc cos}\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)}$$

Pertanyaan yang muncul terkait materi ini tidak terbatas pada nilai θ saja, tetapi juga dapat ditanyakan nilai sin θ, tan θ, dan sebagainya. Jika θ bukan sudut istimewa, nilai sin θ dan tan θ dapat ditentukan berdasarkan nilai cos θ yang telah diperoleh sebelumnya. Dalam penentuan tersebut, kamu dapat memanfaatkan identitas berikut.

Identitas Pythagoras: $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta \Leftrightarrow \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$

Identitas perbandingan: $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

Contoh Soal 8

Jika θ merupakan sudut antara vektor $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ dan $\vec{b} = -3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$, tentukan nilai dari sin θ!

Pembahasan:

Tentukan dahulu nilai dari θ.

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta = \frac{\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\-5\\2\end{pmatrix}}{\sqrt{2^2+(-3)^2+5^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+(-5)^2+2^2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta = \frac{-6+15+10}{\sqrt{38}\cdot\sqrt{38}}$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta = \frac{19}{38}$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \theta = 60^\circ$$

Jadi, nilai dari $\sin\theta = \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

E. Rumus Panjang dari Jumlah dan Selisih Vektor

Misalkan $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ adalah vektor-vektor di R^n, serta θ adalah sudut antara vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$. Panjang dari jumlah dan selisih vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ dapat ditentukan dengan rumus berikut.

$$|\vec{a}\pm\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \pm 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \; = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \pm 2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

Contoh Soal 9

Diketahui vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ dengan $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, dan $|\vec{a}+\vec{b}| = 5$. Jika θ adalah sudut antara vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$, nilai cos 2θ adalah .... (UN 2015)

A. 1

B. $\frac{4}{5}$

C. 0

D. $-\frac{1}{2}$

E. -1

Pembahasan:

Dengan menggunakan rumus panjang dari jumlah dua vektor, diperoleh:

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow 5^2=4^2+3^2+2(4)(3)\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow 25=25+24\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow 24\cos\theta=0$$

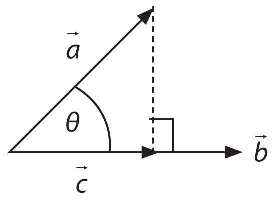
$$\Leftrightarrow \cos\theta=0$$

$$\Leftrightarrow \theta=90^\circ$$

Jadi, nilai $\cos 2\theta=\cos 2(90^\circ)=\cos 180^\circ=-1$.

F. Proyeksi Suatu Vektor pada Vektor Lain

Jika vektor $\vec{a}$ diproyeksikan pada vektor $\vec{b}$, akan dihasilkan vektor $\vec{c}$ yang segaris dengan vektor $\vec{b}$ seperti gambar berikut.



Dengan menggunakan rumus perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku, diperoleh:

$$\cos\theta=\frac{\left|\vec{c}\right|}{\left|\vec{a}\right|}$$

$$\Leftrightarrow \left|\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\right|\cos\theta$$

$$\left(\text{Substitusikan } \cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left|\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\right|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}$$

$$\Leftrightarrow \left|\vec{c}\right|=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$$

Oleh karena nilai $\left|\vec{c}\right|$ merupakan suatu bilangan real (skalar), maka $\left|\vec{c}\right|$ disebut **proyeksi skalar** vektor $\vec{a}$ pada $\vec{b}$, atau panjang proyeksi vektor $\vec{a}$ pada $\vec{b}$.

$$\left|\vec{c}\right| = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$$

Sementara itu, vektor hasil proyeksi $\vec{a}$ pada $\vec{b}$ dinyatakan sebagai **proyeksi vektor** $\vec{a}$ **pada** $\vec{b}$. Proyeksi vektor $\vec{a}$ pada $\vec{b}$ dapat ditentukan dengan rumus berikut.

$$\vec{c} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}\cdot\vec{b}$$

Agar kamu dapat membedakan proyeksi skalar dan proyeksi vektor dengan baik, perhatikan tabel berikut.

Tabel Perbedaan Proyeksi Skalar dan Proyeksi Vektor Ortogonal Vektor $\vec{a}$ pada $\vec{b}$

Proyeksi Vektor	Proyeksi Skalar Ortogonal Vektor $\vec{a}$ pada $\vec{b}$	Proyeksi Vektor Ortogonal Vektor $\vec{a}$ pada $\vec{b}$
Nama lain	Proyeksi skalar/panjang proyeksi vektor $\vec{a}$ pada $\vec{b}$	Proyeksi vektor/vektor proyeksi $\vec{a}$ pada $\vec{b}$
Rumus	$\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}_{\vec{b}}\right| = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$	$\vec{c} = \vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}\cdot\vec{b} = \frac{\left|\vec{c}\right|\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$
Hasil	Bilangan real (skalar atau konstanta)	Vektor

Contoh Soal 10

Tentukan panjang proyeksi vektor $\vec{a} = 7\hat{i} - \hat{j} - 9\hat{k}$ pada $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$, kemudian tentukan proyeksi vektornya.

Pembahasan:

Panjang proyeksi vektor $\vec{a}$ pada $\vec{b}$ dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\left|\vec{c}\right| = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|} = \frac{\begin{pmatrix}7\\-1\\-9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}} = \frac{7+2+18}{\sqrt{9}} = \frac{27}{3} = 9$$

Sementara itu, proyeksi vektor $\vec{a}$ pada $\vec{b}$ dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\vec{c} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}\cdot\vec{b} = \frac{27}{9}\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-6\\-6\end{pmatrix} = 3\breve{i} - 6\breve{j} - 6\breve{k}$$

Jadi, panjang proyeksi vektor $\vec{a}$ pada $\vec{b}$ adalah 9, sedangkan proyeksi vektornya adalah $3\breve{i} - 6\breve{j} - 6\breve{k}$.

Contoh Soal 11

Diketahui vektor $\vec{a} = 2\hat{i} - p\hat{j} + 3\hat{k}$ dan $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$. Jika $\left|\vec{c}\right|$ adalah panjang proyeksi vektor $\vec{a}$ pada $\vec{b}$, dan $\left|\vec{c}\right|$ = 4, nilai *p* adalah .... (UN 2015)

A. –4

B. –2

C. 2

D. 4

E. 8

Pembahasan:

Dengan menggunakan rumus panjang proyeksi vektor $\vec{a}$ pada $\vec{b}$, diperoleh:

$$\left|\vec{c}\right| = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$$

$$\Leftrightarrow 4 = \frac{\begin{pmatrix}2\\-p\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}}$$

$$\Leftrightarrow 4 = \frac{2 + 2p + 6}{3}$$

$$\Leftrightarrow 12 = 8 + 2p$$

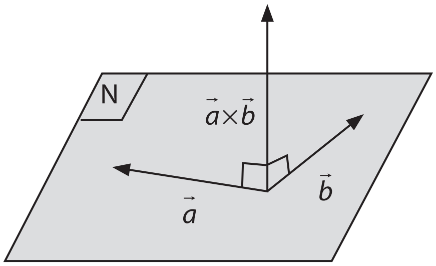
$$\Leftrightarrow p = 2$$

Jadi, nilai *p* adalah 2.

G. Perkalian Silang Dua Vektor (*Cross Product*)

Berbeda dengan perkalian skalar dua vektor, hasil perkalian silang dua vektor adalah suatu vektor. Perkalian vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ ditulis sebagai $\vec{a}\times\vec{b}$ (dibaca $\vec{a}$ kali silang $\vec{b}$ atau $\vec{a}$ *cross*

$\vec{b}$). Vektor hasil $\vec{a}\times\vec{b}$ tidak sebidang dengan $\vec{a}$ dan $\vec{b}$, tetapi tegak lurus dengan bidang yang memuat keduanya. Ini berarti, $\vec{a}\times\vec{b}$ tegak lurus dengan $\vec{a}$ dan $\vec{a}\times\vec{b}$ tegak lurus dengan $\vec{b}$. Untuk lebih jelasnya, perhatikan gambar berikut.



Perkalian silang vektor $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ dan $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ dapat ditentukan dengan rumus berikut.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\hat{i}-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_i & b_3 \end{vmatrix}\hat{j}+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\hat{k}$$

Selain itu, perkalian vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ juga dapat ditentukan dengan menggunakan determinan matriks 3×3 berikut.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$=\left|\begin{matrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix}\right|\begin{matrix} \hat{i} & \hat{j} \\ a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{matrix}$$

$$=(a_2b_3)\hat{i}+(a_3b_1)\hat{j}+(a_1b_2)\hat{k}-\left[(a_1b_3)\hat{j}+(a_3b_2)\hat{i}+(a_2b_1)\hat{k}\right]$$

Sifat-Sifat Perkalian Silang Dua Vektor

1. Tidak komutatif: $\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{b}\times\vec{a}$, karena $\vec{a}\times\vec{b}=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$
2. Distributif : $\vec{a}\times\left(\vec{b}\pm\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}\pm\vec{a}\times\vec{c}$
3. $m\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\left(m\vec{a}\right)\times\vec{b}=\vec{a}\times\left(m\vec{b}\right)$, m konstanta real
4. Tidak asosiatif : $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\neq\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$
5. $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}$
6. $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a}$

Contoh Soal 12

Diketahui vektor $\vec{p} = 3\hat{i} + \hat{j} + 5\hat{k}$ dan $\vec{q} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$. Buktikan bahwa vektor $\vec{p} \times \vec{q}$ tegak lurus vektor $\vec{p}$ dan $\vec{q}$.

Pembahasan:

Mula-mula, tentukan $\vec{p} \times \vec{q}$.

$$\vec{p} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \left|\begin{matrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} \hat{i} & \hat{j} \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$= -2\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k} - \left[-6\hat{j} + 5\hat{i} + \hat{k}\right]$$

$$= -7\hat{i} + 11\hat{j} + 2\hat{k}$$

Selanjutnya, hitung nilai dari $\left(\vec{p} \times \vec{q}\right) \cdot \vec{p}$.

$$\left(\vec{p} \times \vec{q}\right) \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= -21 + 11 + 10$$

$$= 0$$

Oleh karena $\left(\vec{p} \times \vec{q}\right) \cdot \vec{p} = 0$, maka $\vec{p} \times \vec{q}$ tegak lurus vektor $\vec{p}$.

Setelah itu, hitung nilai dari $\left(\vec{p} \times \vec{q}\right) \cdot \vec{q}$.

$$\left(\vec{p} \times \vec{q}\right) \cdot \vec{q} = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= -7 + 11 - 4$$

$$= 0$$

Oleh karena $\left(\vec{p} \times \vec{q}\right) \cdot \vec{q} = 0$, maka $\vec{p} \times \vec{q}$ tegak lurus vektor $\vec{q}$.

Jadi, terbukti bahwa vektor $\vec{p} \times \vec{q}$ tegak lurus vektor $\vec{p}$ dan $\vec{q}$.