TP2 - Grupo 14

André Lucena Ribas Ferreira - A94956

Paulo André Alegre Pinto - A97391

Problema 2 - Conway's Game of Life

O Conway's Game of Life é um exemplo bastante conhecido de um autómato celular . Neste problema vamos modificar as regras do autómato da seguinte forma

1. O espaço de estados é finito definido por uma grelha de células booleanas (morta=0/viva=1) de dimensão $N \times N$ (com $N > 3$), com $(N-1)^2$ células identificadas por índices $(i,j) \in \{0..N-2\}$, denominadas de "normais".
2. No estado inicial todas as células normais estão mortas excepto um quadrado 3×3, designado por "centro", aleatoriamente posicionado formado apenas por células vivas.
3. Adicionalmente existem $2N-1$ "células da borda" que correspondem a um dos índices, i ou j, ser zero. As células da borda têm valores constantes que, no estado inicial, são gerados aleatoriamente com uma probabilidade ρ de estarem vivas.
4. As células normais o autómato modificam o estado de acordo com a regra "B3/S23": i.e. a célula nasce (passa de 0 a 1) se tem exatamente 3 vizinhos vivos e sobrevive (mantém-se viva) se o número de vizinhos vivos é 2 ou 3, caso contrário morre ou continua morta.

Como 'inputs', o programa recebe:

1. N, o número de células (total) por cada linha do quadrado ;
2. ρ, a probabildade de cada célula da borda estar viva;
3. (c_x, c_y), o centro do quadrado 3×3.

Análise

Pretende-se modelar o autómato celular do Conway's Game of Life a partir de uma Máquina de Estados Finitos. Para começar, é necessário definir qual o autómato e o que representa cada estado. Cada estado é uma configuração possível do autómato, onde cada célula é uma variável. Para tal, decidiu-se usar uma família de variáveis binárias $x_{i,j}$, onde (i,j) é a sua posição na grelha.

Denotam-se as células $x_{i,j}$, com $i == 0$ ou $j == 0$, como as células da Borda, enquanto que as restantes serão as normais. Nesse sentido, apenas $N-1$ células de cada linha, exceto a primeira, serão normais. Efetivamente, considere-se $N-1$ como N do enunciado.

Um traço de execução é uma sequência de estados, onde dois estados consequentes validam um predicado de transição. Como o número de estados é finito e a propriedade de transição deste problema, a regra "B3/S23", pode ser aplicada a qualquer estado, qualquer traço de execução deste problema é limitado. Dessa forma, pode-se sempre calcular o traço até ao momento em que um estado transiciona para outro que já ocorreu no traço, descrevendo assim um loop.

Também se pretende verificar se duas propriedades são verdadeiras ou não, para cada traço, eventualmente para todos:

1. Todos os estados contém alguma célula normal viva;
2. Toda a célula normal está viva em algum estado acessível.

Implementação

Para a resolução do problema em questão, decidiu-se usar o módulo `pysmt.shortcuts`, com as funcionalidades possíveis para a utilização de um SMT Solver. Importam-se também os tipos deste Solver, a partir do módulo `pysmt.typing`. Para modelar este problema, irá usar-se BitVectors, então escolheu-se o `z3` como Solver.

In [6]:
```
from pysmt.shortcuts import *
import pysmt.typing as types
name = "z3"
```

Para além disso, é necessário importar os módulos `numpy` e `random` para a geração de valores aleatórios durante a execução.

In [7]:
```
import numpy as np
import random as rn
```

Por fim, alguns módulos auxiliares são necessários para facilitar alguns momentos da implementação. `mathplotlib.pyplot` serve para imprimir para o ecrã os estados do autómato; `functools.reduce` é uma função de ordem superior que opera sobre listas; e `math.comb` para calcular combinações.

In [8]:
```
import matplotlib.pyplot as plt
from functools import reduce
from math import comb
```

Como 'input', define-se apenas N e ρ, já que o centro é calculado aleatoriamente.

In [9]:
```
# dimensão do espaço de amostras (efetivamente 15)
n = 16
p = 0
```

Como primeiro passo, define-se a função `bv_rn`, que gera uma configuração inicial, sem utilização do Solver. Para tal, constrói-se um número inteiro a partir operações lógicas, nomeadamente a disjunção.

Devido à implementação escolhida, há algumas considerações notáveis:

1. A ordem da grelha é reversa à habitual. A célula $(0,0)$ encontra-se no canto inferior esquerdo. Como tal, as células da borda consideram-se aquelas em que $i == N-1$ ou $j == N-1$.
2. O estado onde apenas uma variável binária $x_{i,j} == 1$ equivale ao número inteiro 2^{i+n*j}

Para além disso, também devolve qual a borda gerada aleatoriamente, como referência posterior.

In [10]:
```
# Funções auxiliares para BitVec's, devolve um tuplo (Bitvector, border)
# gera pseudo-aleatoriamente um BitVec para representar o autómato, a partir de um inteiro
def bv_rn():
    I = 0
    J = 0
    c_x = np.random.randint(1, n-2)
    c_y = np.random.randint(1, n-2)
    for i in range(n-1):
        I = I | np.random.binomial(1,p) * 2**(i + n*(n-1))
        I = I | np.random.binomial(1,p) * 2**(n*i+n-1)
    I = I | np.random.binomial(1,p) * 2**(n*n-1)
    J = I
    for i in range(c_x-1, c_x+2):
        for j in range(c_y-1, c_y+2):
            I = I | 2**(i+j*n)
    return (BV(I,n*n), BV(J,n*n))
```

Como funções auxiliares, definiram-se as seguintes:

1. `print_state(s)` imprime para o ecrã o estado indicado.

In [11]:
```
def print_state(s):
    x = list(map(int, list(s.bv_str())))
    x = [x[i:i + n] for i in range(0, len(x), n)]
    plt.imshow(x)
    plt.axis('off')
    plt.show()

bv,border = bv_rn()
print("Estado inicial gerado:")
print_state(bv)
print("Borda desse estado.")
print_state(border)
```

```
Estado inicial gerado:
```

```
Borda desse estado.
```

1. `bv_selZE(z,i,j)` seleciona a variável na posição (i,j) de z e gera o BitVector de tamanho n^2, preenchendo com 0 os restantes elementos.

In [12]:
```
def bv_selZE(z,i,j):                        # seleciona o bit (i,j) do BitVec "z" e estende n*n-1
    return BVZExt(BVExtract(z,start=i+j*n,end=i+j*n),n*n-1)
```

1. `bv_sel(z,i,j)` seleciona a variável na posição (i,j) de z.

In [13]:
```
def bv_sel(z,i,j):                         # seleciona o bit (i,j) do BitVec "z"
    return BVExtract(z,start=i+j*n,end=i+j*n)
```

1. `full_border_gera` gera um BitVector com a borda completamente preenchida.

In [14]:
```
def full_border_gera():
    I = 0
    for i in range(n-1):
        I = I | 2**(i + n*(n-1))
        I = I | 2**(n*i+n-1)
    I = I | 2**(n*n-1)
    full_border = BV(I,n*n)
    return full_border
full_border = full_border_gera()
```

Como funções necessárias para a modelação, definem-se `declare(i)`, que cria a i-ésima cópia do estado; `initial(state)`, que devolve um predicado que testa o estado inicial; e `trans(curr, prox)`, que gera um predicado a partir de dois estados que define as condições de transição entre eles.

Para `declare(i)`, de modo a conseguir manter conhecimento da borda em cada estado, já que o estado inicial será definido numa função que tem de devolver um predicado, cada estado guardará o seu estado e a sua borda.

In [15]:
```
def declare(i): #declara um bitvector de tamanho n*n
    state = {}
    state['s'] = Symbol('s'+str(i),types.BVType(n*n))
    state['border'] = Symbol('border'+str(i), types.BVType(n*n))
    return state
```

Para `initial(state)`, gera-se uma configuração inicial, a partir de *bv_rn()*, e força-se a igualdade dos estados.

In [16]:
```
def initial(state):
    initial, border = bv_rn()
    return And(Equals(state['s'], initial), Equals(state['border'], border))
```

Para `trans(curr,prox)`, são necessárias duas considerações:

1. A manutenção das células da borda, de acordo com $border$;
2. A regra "B3/S23", que ditará quais os estados vivos/mortos no estado seguinte.

Para cada $x_{i,j}$ variável do estado $curr$, a satisfação de 2 pode ser traduzida por, com $x'_{i,j}$ variável de $prox$.

$$x'_{i,j} == 1 \quad \text{se e só se} \quad (x_{i,j} == 1 \quad \& \quad s == 4) \quad | \quad s == 3$$

Onde s é a soma, para cada y estado de $curr$ adjacente a $x_{i,j}$:

$$x_{i,j} + \sum_{y} y$$

Nos restantes casos, $x'_{i,j} == 0$, o que representa todos os casos possíveis.

In [17]:
```
def trans(curr, prox): #define uma transição entre dois estados do problema
    r = []
    for i in range(n):
        r.append(Equals(bv_sel(prox['s'],i,n-1), bv_sel(curr['border'],i,n-1)))
        r.append(Equals(bv_sel(prox['s'],n-1,i), bv_sel(curr['border'],n-1,i)))
    for i in range(n-1):
        for j in range(n-1):
            #prox[i][j] == 1 sse curr[i][j] == 1 e s == 4 ou s == 3
            s = sum([bv_selZE(curr['s'],a,b) for a in [i-1,i,i+1] for b in [j-1,j,j+1]
                     if a >= 0 and a < n and b >= 0 and b < n])
            t1 = Iff(Equals(bv_sel(prox['s'],i,j), BVOne(1)), Or(Equals(s, BV(3,n*n)),
                     And(Equals(bv_sel(curr['s'],i,j),BVOne(1)), Equals(s, BV(4,n*n)))))
            r.append(t1)
            t2 = Equals(curr['border'], prox['border'])
            r.append(t2)
    return And(r)
```

Com essas funções, e com um estado inicial, é possível gerar um traço de execução, isto é, uma sequência de estados em que dois estados consequentes validam o predicado de transição entre si. Como o conjunto de estados possível é finito, os traços serão sempre limitados. A deteção de tal implica a não repetição de estados, pois tal indicaria um ciclo, já que a transição de um estado para o seguinte é única.

A função `generate_trace(declare, trans, initial, p=True)` devolve um traço sem repetidos, a partir dos argumentos respetivos. O argumento `p` indica a impressão para o ecrã do traço.

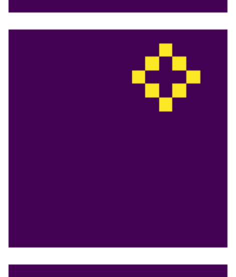
De notar é a necessidade de apenas uma variável para o Solver, já que no traço se guardarão os valores obtidos iterativamente e não de uma única vez. Também apenas é necessária uma asserção por cada passo de iteração, já que os anteriores são garantidamente verdadeiros.

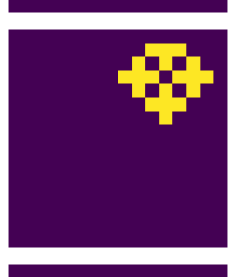
In [18]:
```
def generate_trace(declare, trans, initial, p=True):
    with Solver(name=name) as solver:
        i = 0
        prox = declare(0)
        solver.push()
        solver.add_assertion(initial(prox))
        solver.solve()
        last = solver.get_value(prox['s'])
        border = solver.get_value(prox['border'])
        solver.pop()
        #só precisamos de uma variável porque guardamos os valores progressivos das anteriores
        trace = {}
        while last not in trace:
            trace[last] = i
            i += 1
            solver.push()
            tmp = {'s':last, 'border':border}
            solver.add_assertion(trans(tmp, prox))
            if not solver.solve():
                print("Algo não funcionou como suposto.")
                break
            last = solver.get_value(prox['s'])
            solver.pop()
        trace[last] = i
        if p:
            for k,v in sorted(trace.items(), key = lambda x: x[1]):
                print_state(k)
        return list(trace.keys()),border
```

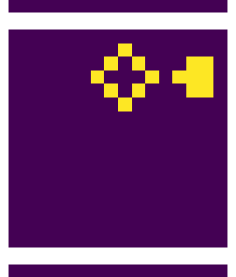
A função `generate_trace_k(declare, trans, initial, k, p=True)` também gera um traço, mas apenas os k primeiros estados, chegue ou não a um ciclo.

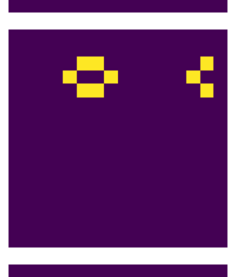
In [19]:
```
def generate_trace_k(declare, trans, initial, k, p=True):
    with Solver(name=name) as solver:
        trace = {}
        #trace[0] = initial
        trace[0] = declare(0)
        for i in range(1,k):
            trace[i] = declare(i)
        solver.add_assertion(initial(trace[0]))
        for i in range(k-1):
            solver.add_assertion(trans(trace[i], trace[i+1]))
        #só precisamos de uma variável porque guardamos os valores progressivos das anteriores
        if not solver.solve():
            print("Algo não funcionou como suposto.")
            return
        border = solver.get_value(trace[0]['border'])
        if p:
            for k,v in sorted(trace.items(), key = lambda x: x[0]):
                print_state(solver.get_value(v['s']))
                trace[k] = solver.get_value(v['s'])
        return list(trace.values()),border
```

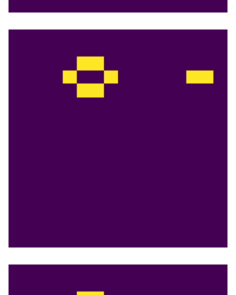
In [15]:
```
t,b = generate_trace(declare, trans, initial)
```

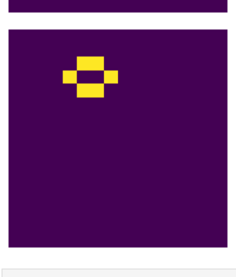




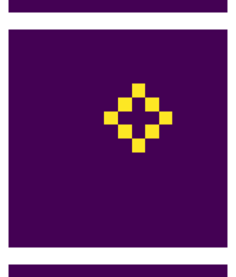


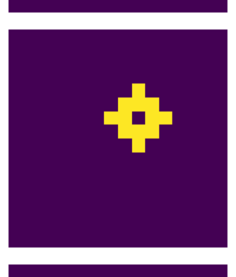


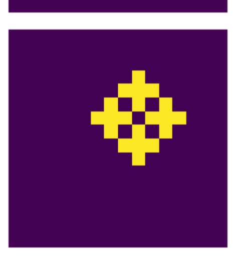




In [16]:
```
t,b = generate_trace_k(declare, trans, initial, 5)
```







Propriedades

Para verificar as propriedades enunciadas, pode-se também utilizar o Solver. Depois de se gerar um traço, basta acrescentar as asserções necessárias e invocar uma resolução.

1. Todos os estados contém alguma célula normal viva.

Pode-se modelar esta condição com o seguinte predicado, já que o BitVector $border$ representa todas as células normais mortas:

$$\forall_{x \in trace}, \quad x \neq border$$

1. Existe uma célula normal que não esteve viva em nenhum estado

Seja o o resultado da disjunção lógica de todos os estados do traço. Se o for igual ao estado com todas as células normais vivas, então todas as células normais estiveram vivas em pelo menos um estado, isto é:

$$o \neq \neg full\_border | border$$

In [15]:
```
def valida(trace,border):
    solver = Solver(name=name)
    full_border = full_border_gera()
    #initial, border = bv_rn()
    solver.push()
    #state é uma constante de BitVector
    solver.add_assertion(And([Not(Equals(state, border)) for state in trace]))
    if solver.solve():
        print("Todos os estados têm pelo menos uma célula viva.")
    else:
        print("Existe um estado sem células vivas.")
    solver.pop()
    #fazer o OR lógico de todos os bitvectors e ver se é igual ou diferente de BVZero(n*n)
    solver.push()
    solver.add_assertion(Not(Equals(reduce(BVOr, list(trace)), BVOr(BVNot(full_border), border))))
    if solver.solve():
        print("Existem células que não ficaram vivas.")
    else:
        print("Todas as células estiveram vivas pelo menos uma vez.")
    solver.pop()
```

In [18]:
```
t,b = generate_trace(declare, trans, initial)
valida(t,b)
```

```
Todos os estados têm pelo menos uma célula viva.
Existem células que não ficaram vivas.
```

Exemplos

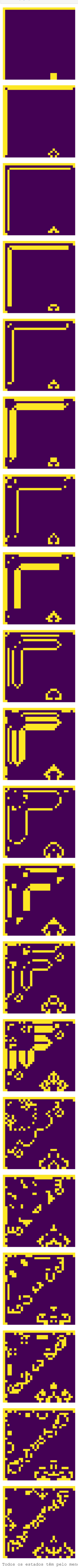
Exemplo 1:

In [18]:
```python
p = 1
n = 4
t,b = generate_trace_k(declare, trans, initial, 5)
valida(t,b)
```

```
Todos os estados têm pelo menos uma célula viva.
Todas as células estiveram vivas pelo menos uma vez.
```

Exemplo 2:

In [20]:
```python
p = 1
n = 32
t,b = generate_trace_k(declare, trans, initial,20)
valida(t,b)
```



```
Todos os estados têm pelo menos uma célula viva.
Existem células que não ficaram vivas.
```

Exemplo 3:

In [19]:
```python
p = 0.7
n = 6
t,b = generate_trace(declare, trans, initial)
valida(t,b)
```

```
Todos os estados têm pelo menos uma célula viva.
Existem células que não ficaram vivas.
```

Notas finais

Para se provar as propriedades para qualquer estado, seria necessário percorrer qualquer configuração inicial e computar o seu traço correspondente. Um traço limitado existe sempre, pelo número finito de estados, mas mesmo assim pode ser demasiado complexo. Notavelmente, se $p > 0$, qualquer configuração inicial é possível, então há $(n-2)^2 * 2^{2N-1}$ combinações.

Para ser possível computar algum tipo de solução, limita-se o tamanho dos traços, testando iterativamente para cada um a validade das propriedades.

No entanto, a solução seguinte não é suficiente para provar os invariantes. Isso deve-se à natureza aleatória do estado inicial, já que o solver não pode calcular todas as possibilidades iniciais, mas sim apenas uma.

In [4]:
```python
def fsm_always_wrong(declare, trans, init, inv, K):
    for k in range(1,K+1):
        with Solver(name=name) as solver:
            trace = [declare(i) for i in range(k)]
            solver.add_assertion(init(trace[0]))
            for i in range(k-1):
                solver.add_assertion(trans(trace[i],trace[i+1]))
            solver.add_assertion(Not(inv(trace)))
            if solver.solve():
                print('Encontrou-se um contra-exemplo:')
                for state in trace:
                    print_state(solver.get_value(state['s']))
                return
            else:
                print(f"A propriedade é válida para UM TRAÇO de tamanho k = %d" % k)
```

Para ser possível provar estes invariantes, o estado inicial não deve ser calculado aleatoriamente, mas sim ser possível percorrer por qualquer estado inicial.

Invariante que testa a propriedade "Todos os estados têm pelo menos uma célula normal viva."

In [17]:
```python
def inv_all_state(trace):
    return And([Not(Equals(state['s'], state['border'])) for state in trace])
```

In [21]:
```python
fsm_always_wrong(declare, trans, initial, inv_all_state, 10)
```

```
A propriedade é válida para UM TRAÇO de tamanho k = 1
A propriedade é válida para UM TRAÇO de tamanho k = 2
A propriedade é válida para UM TRAÇO de tamanho k = 3
A propriedade é válida para UM TRAÇO de tamanho k = 4
A propriedade é válida para UM TRAÇO de tamanho k = 5
A propriedade é válida para UM TRAÇO de tamanho k = 6
A propriedade é válida para UM TRAÇO de tamanho k = 7
A propriedade é válida para UM TRAÇO de tamanho k = 8
A propriedade é válida para UM TRAÇO de tamanho k = 9
A propriedade é válida para UM TRAÇO de tamanho k = 10
```

Invariante que testa a propriedade "Existe uma célula normal que não está viva em algum estado."

In [2]:
```python
def inv_all_cell(trace):
    return Not(Equals(reduce(BVOr, list(map(lambda x: x['s'], list(trace)))),
                      BVOr(BVNot(full_border), trace[0]['border'])))
```

In [20]:
```python
fsm_always_wrong(declare, trans, initial, inv_all_cell, 30)
```

```
A propriedade é válida para UM TRAÇO de tamanho k = 1
A propriedade é válida para UM TRAÇO de tamanho k = 2
A propriedade é válida para UM TRAÇO de tamanho k = 3
A propriedade é válida para UM TRAÇO de tamanho k = 4
A propriedade é válida para UM TRAÇO de tamanho k = 5
A propriedade é válida para UM TRAÇO de tamanho k = 6
A propriedade é válida para UM TRAÇO de tamanho k = 7
A propriedade é válida para UM TRAÇO de tamanho k = 8
A propriedade é válida para UM TRAÇO de tamanho k = 9
A propriedade é válida para UM TRAÇO de tamanho k = 10
A propriedade é válida para UM TRAÇO de tamanho k = 11
A propriedade é válida para UM TRAÇO de tamanho k = 12
A propriedade é válida para UM TRAÇO de tamanho k = 13
A propriedade é válida para UM TRAÇO de tamanho k = 14
A propriedade é válida para UM TRAÇO de tamanho k = 15
A propriedade é válida para UM TRAÇO de tamanho k = 16
A propriedade é válida para UM TRAÇO de tamanho k = 17
A propriedade é válida para UM TRAÇO de tamanho k = 18
A propriedade é válida para UM TRAÇO de tamanho k = 19
A propriedade é válida para UM TRAÇO de tamanho k = 20
A propriedade é válida para UM TRAÇO de tamanho k = 21
A propriedade é válida para UM TRAÇO de tamanho k = 22
A propriedade é válida para UM TRAÇO de tamanho k = 23
A propriedade é válida para UM TRAÇO de tamanho k = 24
A propriedade é válida para UM TRAÇO de tamanho k = 25
A propriedade é válida para UM TRAÇO de tamanho k = 26
A propriedade é válida para UM TRAÇO de tamanho k = 27
A propriedade é válida para UM TRAÇO de tamanho k = 28
A propriedade é válida para UM TRAÇO de tamanho k = 29
A propriedade é válida para UM TRAÇO de tamanho k = 30
```

In [ ]: