縮小写像は連続写像である

あまほし　令和 7 年　大正 114 年

本記事は、勉強のノートとして自ら書かれたものである. 以下の内容は内田伏一『集合と位相』のものである. 引用する部分にはカギ括弧をくくった.
まず、縮小写像の定義を紹介する.

定義:(X, d) を距離空間とし、$f : X \to X$ を写像とする. そのとき、

$$f\text{は}(X, d)\text{の縮小写像である} :\Longleftrightarrow \exists 0 < c < 1, s.t. \forall x, y \in X, d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$$

以上の定義によって、次の命題が示せる.

命題 (P143):「縮小写像は明らかに連続写像である.」
証明 (自ら書き): 縮小写像 f は、以上の定義から定める.$A \in \mathcal{O}_d$、$x \in f^{-1}(A)$ とする. そのとき、$f(x) \in A$ だから、$f(x)$ は A の内点である. すなわち、

$$\forall x \in f^{-1}(A)、\exists \epsilon_0 > 0, s, t, N(f(x), \epsilon_0) \subset A$$

ということが成り立つ.$\epsilon_1 = \frac{\epsilon_0}{c} > 0$ とおくと、任意の $y \in N(x, \epsilon_1)$ に対し、縮小写像の定義より、

$$d(f(x), f(y)) < c \cdot d(x, y) < c \cdot \epsilon_1 = \epsilon_0$$

ということが成り立つ. したがって $f(y) \in N(f(x), \epsilon_0) \subset A$、すなわち $y \in f^{-1}(A)$ となる. まとめると、

$$\forall x \in f^{-1}(A), \exists \epsilon_1 > 0, s.t. N(x, \epsilon_1) \subset f^{-1}(A)$$

によって、任意の $x \in f^{-1}(A)$ に対し、x は内点であるから、$f^{-1}(A) \in \mathcal{O}_d$ となり、縮小写像 f は連続写像である. □

縮小写像は連続写像であることがわかるが、たいしたことではない結論である. そもそも縮小写像という定義は、縮小写像の原理のためである. したがって今回の記事は、位相についての知識より LuaLaTeX を復習する意味合いがある.