Mécanique Quantique - ENPC 1A
TD2 corrigé

L. Brochard, A. Lemaitre

6 février 2020

Puits et barrières 1D

Puits carré Le problème à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0 & \text{pour } -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2} \\ \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0)\psi = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{avec } 0 < E < V_0$$

La solution générale est de type exponentielle réelle pour $E < V$ (en dehors du puits), et sinusoïdale pour $E > V$ (dans le puits). La condition de normalisation exclut les solutions avec des exponentielles divergentes à l'infini. La forme générale des solutions est donc :

$$\psi = \begin{cases} D\exp(Kx) & \text{pour } x < -\frac{L}{2} \\ A\sin(kx) + B\cos(kx) & \text{pour } -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2} \\ C\exp(-Kx) & \text{pour } x > \frac{L}{2} \end{cases}$$

où on a posé $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ et $K = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$ et A, B, C, et D sont des constantes. Le potentiel est constant avec deux discontinuités en $\pm L/2$. Ces discontinuités impliquent des discontinuités de ψ''. Ainsi, aux bords du puits ($\pm L/2$) seuls ψ et ψ' sont continues. Les conditions à satisfaire en $\pm L/2$ sont donc :

$$\begin{cases} \text{Continuité de } \psi \begin{cases} -A\sin\left(k\frac{L}{2}\right) + B\cos\left(k\frac{L}{2}\right) = D\exp\left(-K\frac{L}{2}\right) \\ A\sin\left(k\frac{L}{2}\right) + B\cos\left(k\frac{L}{2}\right) = C\exp\left(-K\frac{L}{2}\right) \end{cases} \\ \text{Continuité de } \psi' \begin{cases} kA\cos\left(k\frac{L}{2}\right) + kB\sin\left(k\frac{L}{2}\right) = KD\exp\left(-K\frac{L}{2}\right) \\ kA\cos\left(k\frac{L}{2}\right) - kB\sin\left(k\frac{L}{2}\right) = -KC\exp\left(-K\frac{L}{2}\right) \end{cases} \end{cases}$$

Il apparait que A et B ne peuvent pas être tous deux non nuls car cela imposerait $\left(\tan\left(k\frac{L}{2}\right)\right)^2 = -1$ qui ne peut être vérifié quelque soit k (c'est à dire quelque soit l'énergie). Ainsi, on est amené à distinguer deux catégories de solutions : paires ($A = 0$) et impaires ($B = 0$).
Les solutions paires prennent la forme :

$$\psi = \begin{cases} B\cos\left(k\frac{L}{2}\right)\exp\left(K\left(x + \frac{L}{2}\right)\right) & \text{pour } x < -\frac{L}{2} \\ B\cos(kx) & \text{pour } -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2} \\ B\cos\left(k\frac{L}{2}\right)\exp\left(K\left(\frac{L}{2} - x\right)\right) & \text{pour } x > \frac{L}{2} \end{cases}$$

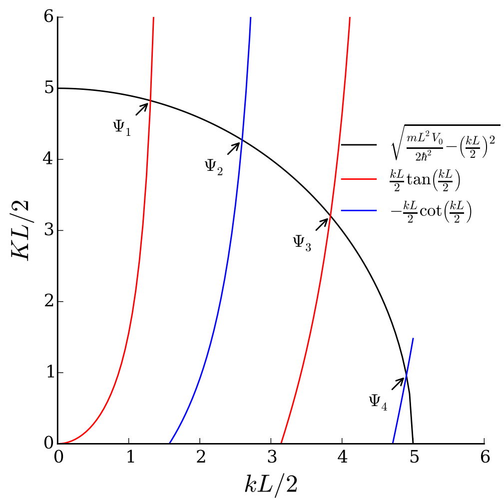
avec $B = \left(\frac{1}{2K}(1 + \cos(kL)) + \frac{1}{2k}(kL + \sin(kL))\right)^{-1/2}$ pour satisfaire la normalisation, et l'énergie doit vérifier la condition $\frac{kL}{2}\tan\left(\frac{kL}{2}\right) = \frac{KL}{2}$. Cette condition n'a pas de solution analytique simple. En remarquant que $\left(\frac{kL}{2}\right)^2 + \left(\frac{KL}{2}\right)^2 = \frac{mL^2V_0}{2\hbar^2}$ est l'équation d'un cercle dans le plan $\left(\frac{kL}{2}, \frac{KL}{2}\right)$, la solution à correspond aux points d'intersection entre ce cercle et la courbe $\frac{kL}{2}\tan\left(\frac{kL}{2}\right)$ (cf. schéma ci-après). Les valeurs possibles de k (donc de l'énergie E) apparaissent ainsi quantifiées.

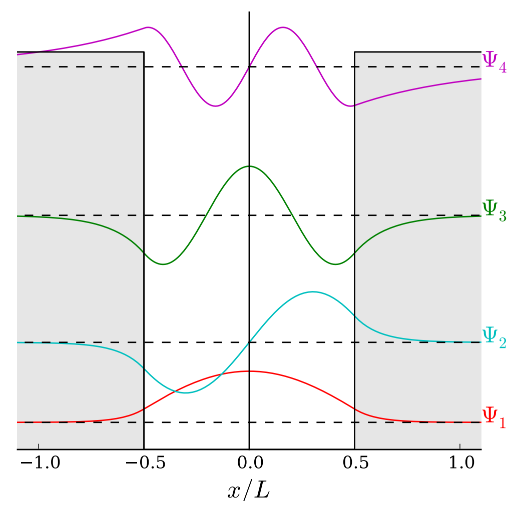
Les solutions impaires sont de la forme :

$$\psi = \begin{cases} -A\sin\left(k\frac{L}{2}\right)\exp\left(K\left(x+\frac{L}{2}\right)\right) & \text{pour } x < -\frac{L}{2} \\ A\sin\left(kx\right) & \text{pour } -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2} \\ A\sin\left(k\frac{L}{2}\right)\exp\left(K\left(\frac{L}{2}-x\right)\right) & \text{pour } x > \frac{L}{2} \end{cases}$$

avec la constante de normalisation $A = \left(\frac{1}{2K}\left(1-\cos\left(kL\right)\right)+\frac{1}{2k}\left(kL-\sin\left(kL\right)\right)\right)^{-1/2}$ et la condition sur l'énergie $\frac{kL}{2}\cot\left(\frac{kL}{2}\right) = -\frac{KL}{2}$.

Une représentation graphique pour un puits de profondeur réduite $\frac{2mL^2}{\hbar^2}V_0 = 100$ est proposée ci-après (l'origine de l'axe des ordonnées de chaque fonction d'onde et donnée par l'axe pointillé positionné au niveau d'énergie correspondant).





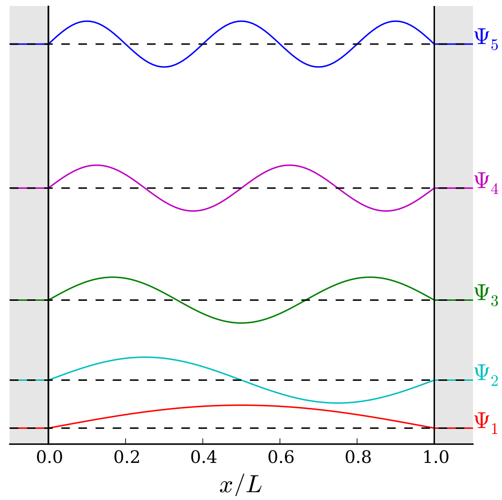
Puits infini Le puits infini est la limite du puits carré pour $V_0 \to +\infty$. Soumis à un potentiel infini, la fonction d'onde devient nulle en dehors du puits ($K \to +\infty$). La discontinuité de ψ'' aux bords du puits devient infinie, si bien que ψ' présente une discontinuité finie. Dès lors seule ψ est continue aux bords et le problème à résoudre prend la forme suivante (puits positionné entre 0 et L) :

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0 \text{ avec } \psi\left(0\right) = \psi\left(L\right) = 0$$

Ce problème admet des solutions sinusoïdales de la forme $\psi = A\sin\left(kx+\phi\right)$ avec $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$. La condition en 0 impose $\phi = 0$; celle en L implique la quantification de l'énergie : $k = \frac{\pi n}{L} \Rightarrow E_n = n^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$ avec $n > 0$ un entier. Enfin, la condition de normalisation impose $A = \sqrt{\frac{2}{L}}$. La famille de fonctions d'onde solutions est donc :

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \text{ associée à l'énergie } E_n = n^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

Ci-après une représentation graphique :



Pour le problème d'une onde libre avec conditions aux limites périodiques, $E_n = n^2 \frac{4\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$. On en déduit que la quantification de l'impulsion est linéaire en n : $p_n = n\frac{2\pi\hbar}{L} = n\frac{h}{L}$ et donc la densité d'états est constante : $\frac{dn}{dp} = \frac{L}{h}$. Ce résultat signifie que chaque état occupe un volume constant h dans l'espace des phases (x, p), ce qui justifie le concept de volume de micro-état introduit en physique statistique.

Particule libre Pour une particule libre, le problème à résoudre est :

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0$$

Ce problème admet comme solution générale des exponentielles complexes de la forme :

$$\psi = \alpha_+ \exp(ikx) + \alpha_- \exp(-ikx) \text{ avec } k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Ces solutions ne sont pas normalisables. Un état normalisable est nécessairement une superposition d'ondes libres (paquet d'onde) d'énergies différentes. L'énergie n'étant que cinétique ($E = \frac{p^2}{2m}$), ces solutions peuvent être ré-écrites en fonction de l'impulsion :

$$\psi = \alpha_+ \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) + \alpha_- \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right)$$

Le premier terme est une onde se déplaçant vers la droite, le second vers la gauche.

Barrière carrée On s'intéresse à présent au cas d'une barrière carrée. Le problème est le suivant :

$$\begin{cases} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)\psi = 0 & \text{pour } 0 < x < L \\ \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On considère dans un premier temps $E < V_0$ (barrière infranchissable classiquement). Comme pour le cas de la particule libre, les fonctions d'ondes solutions en dehors de la barrière sont des exponentielles complexes non normalisables. Les solutions au niveau de la barrière sont des exponentielles réelles. On a donc :

$$\psi = \begin{cases} \alpha_+ \exp(iKx) + \alpha_- \exp(-iKx) & \text{pour } x < 0 \\ \gamma \exp(kx) + \delta \exp(-kx) & \text{pour } 0 < x < L \\ \beta_+ \exp(iKx) + \beta_- \exp(iKx) & \text{pour } x > L \end{cases} \text{ avec } k = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} \text{ et } K = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

On s'intéresse plus particulièrement au cas de la transmission d'une onde incidente venant de la gauche, c'est à dire $\beta_- = 0$ et l'on souhaite connaitre la probabilité de transmission de l'onde à savoir $|\beta_+|^2 / |\alpha_+|^2$. Les solutions n'étant pas normalisables, elles restent définies à un facteur multiplicatif près et nous pouvons donc choisir arbitrairement $\alpha_+ = 1$. Dans la suite, nous noterons $\alpha = \alpha_-$ et $\beta = \beta_+$. Les solutions sont donc de la forme :

$$\psi = \begin{cases} \exp\left(iKx\right) + \alpha \exp\left(-iKx\right) & \text{pour } x < 0 \\ \gamma \exp\left(kx\right) + \delta \exp\left(-kx\right) & \text{pour } 0 < x < L \\ \beta \exp\left(iKx\right) & \text{pour } x > L \end{cases}$$

Les conditions de continuités de ψ et ψ' en 0 et L imposent :

$$\begin{cases} 1 + \alpha = \gamma + \delta \\ \gamma \exp\left(kL\right) + \delta \exp\left(-kL\right) = \beta \exp\left(iKL\right) \\ iK\left(1 - \alpha\right) = k\left(\gamma - \delta\right) \\ k\gamma \exp\left(kL\right) - k\delta \exp\left(-kL\right) = iK\beta \exp\left(iKL\right) \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \beta = \frac{2ikK \exp(-iKL)}{2ikK \cosh(kL) - (k^2 - K^2) \sinh(kL)} \\ \alpha = \frac{\left(k^2 + K^2\right) \sinh(kL)}{2ikK \cosh(kL) - (k^2 - K^2) \sinh(kL)} \end{cases}$$

Et donc les probabilités de transmission et de réflexion de l'onde sont :

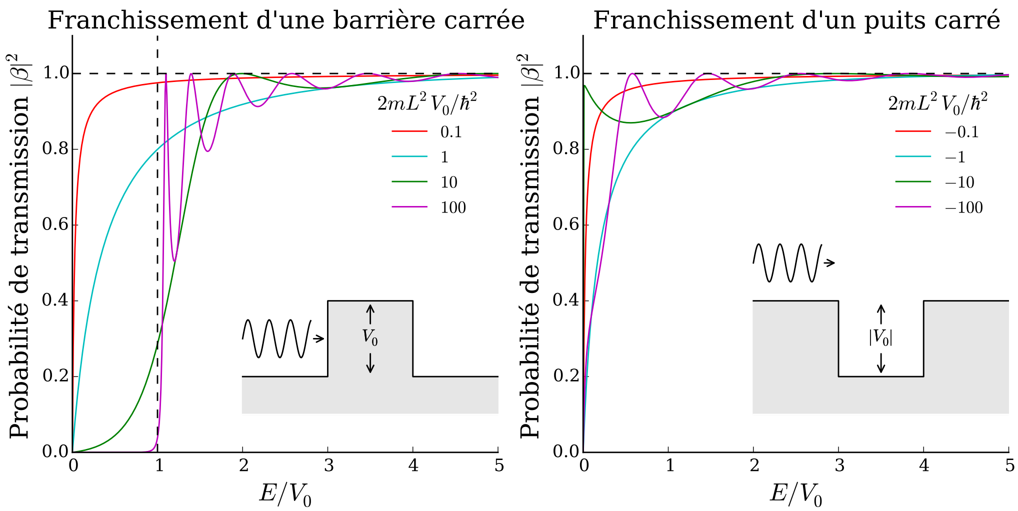
$$\begin{cases} |\beta|^2 = \frac{4k^2K^2}{4k^2K^2 + (k^2 + K^2)^2 (\sinh(kL))^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \frac{V_0^2}{E(V_0 - E)} \left(\sinh\left(\frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} L\right)\right)^2} \\ |\alpha|^2 = \frac{\left(k^2 + K^2\right)^2 (\sinh(kL))^2}{4k^2K^2 + (k^2 + K^2)^2 (\sinh(kL))^2} = 1 - |\beta|^2 \end{cases}$$

Le cas d'une barrière franchissable classiquement ($E > V_0$) s'en déduit très facilement en remarquant que cela revient à remplacer $k = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$ du cas $E < V_0$ par $ik = i\frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar}$. On obtient alors :

$$\begin{cases} |\beta|^2 = \frac{4k^2K^2}{4k^2K^2 + (k^2 - K^2)^2 (\sin(kL))^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \frac{V_0^2}{E(E - V_0)} \left(\sin\left(\frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar} L\right)\right)^2} \\ |\alpha|^2 = \frac{\left(k^2 - K^2\right)^2 (\sin(kL))^2}{4k^2K^2 + (k^2 - K^2)^2 (\sin(kL))^2} = 1 - |\beta|^2 \end{cases}$$

Une représentation graphique de la probabilité de transmission en fonction de l'énergie est proposée ci-après. On note que :

- Il y a une probabilité de transmission non nulle quand bien même la barrière est infranchissable classiquement (effet tunnel).
- Il y a une probabilité de réflexion non nulle quand bien même la barrière est franchissable classiquement.
- Des oscillations apparaissent en fonction de l'énergie pour $E > V_0$ et la transmission n'est parfaite que pour des énergies bien précises ($2m\left(E - V_0\right)L^2 = \pi^2 n^2 \hbar^2$). Cette diffusion de l'onde libre est un moyen de caractériser la barrière par analyse inverse.



Oscillateur harmonique 1D

1. On introduit la position adimensionnée $u = x/\lambda$ et la fonction d'onde adimensionnée $\phi_\lambda(u) = \sqrt{\lambda}\psi(\lambda u) \Rightarrow \psi(x) = \lambda^{-1/2}\phi_\lambda(x/\lambda)$ dans l'équation de Schrödinger stationnaire :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\left(\lambda^{-1/2}\phi_\lambda\right)}{d(\lambda u)^2} + \frac{1}{2}k(\lambda u)^2\lambda^{-1/2}\phi_\lambda = E\lambda^{-1/2}\phi_\lambda$$

Après simplification immédiate par $\lambda^{-1/2}$, cette équation a encore la dimension d'une énergie. En divisant par $\hbar\omega$ (quanta de Planck) on obtient alors une équation adimensionnée :

$$-\left(\frac{1}{\lambda^2}\frac{\hbar}{m\omega}\right)\frac{1}{2}\frac{d^2\phi_\lambda}{du^2} + \left(\lambda^2\frac{m\omega}{\hbar}\right)\frac{1}{2}u^2\phi_\lambda = \frac{E}{\hbar\omega}\phi_\lambda$$

En choisissant comme longueur caractéristique $\lambda^* = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$, la fonction ϕ_{λ^*} est alors solution du problème adimensionné :

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2\phi_{\lambda^*}}{du^2} + \frac{1}{2}u^2\phi_{\lambda^*} = \varepsilon\phi_{\lambda^*}$$

où l'énergie adimensionnée est $\varepsilon = \frac{E}{\hbar\omega}$. Par ailleurs, ϕ_{λ^*} est bien normalisée :

$$\int|\phi_{\lambda^*}|^2\,du = \int\frac{1}{\lambda^*}|\phi_{\lambda^*}|^2\,d(\lambda^* u) = \int|\psi|^2\,dx = 1$$

2. On vérifie que ϕ_0 est bien solution du problème adimensionné :

$$\phi_0(u) = C_0\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \Rightarrow \phi_0''(u) = \left(u^2-1\right)\phi_0 \Rightarrow -\frac{1}{2}\phi_0''+\frac{1}{2}u^2\phi_0 = -\frac{1}{2}\left(u^2-1\right)\phi_0+\frac{1}{2}u^2\phi_0 = \frac{1}{2}\phi_0$$

Par conséquent l'énergie adimensionnée associée à ϕ_0 est $\varepsilon = 1/2$. La constante C_0 est obtenue en imposant la condition de normalisation :

$$\int|\phi_0|^2\,du = 1 \Rightarrow C_0 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-u^2\right)du\right)^{-1/2} = \pi^{-1/4}$$

Ainsi, une solution du problème avec dimension est :

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda^*}}\phi_0\left(\frac{x}{\lambda^*}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi^{1/2}\lambda^*}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\lambda^{*2}}\right) = \left(\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right)$$

et l'énergie associée est $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$

3. (a) Les constantes C_n sont obtenues en imposant la condition de normalisation :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\phi_n|^2\,du = C_n^2\int_{-\infty}^{+\infty}(H_n(u))^2\exp\left(-u^2\right)du = C_n^2 2^n n!\pi^{1/2} \Rightarrow C_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n!\pi^{1/2}}}$$

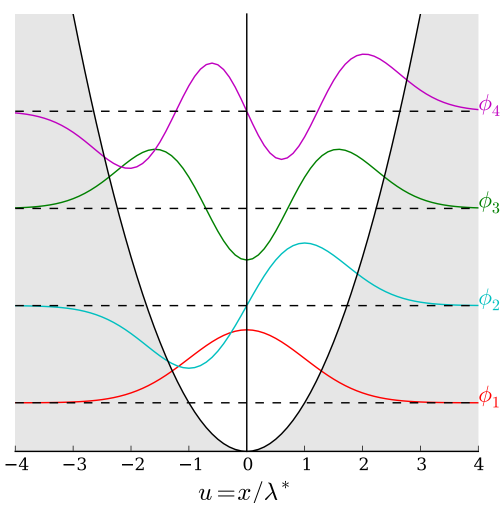
(b) En dérivant deux fois ϕ_n on obtient :

$$\phi_n''(u) = C_n\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\left(H_n''(u) - 2uH_n'(u) + \left(u^2-1\right)H_n(u)\right)$$

En tirant parti de l'équation différentielle vérifiée par les polynômes d'Hermite, on obtient finalement $\phi_n''(u) = \left(u^2-1-2n\right)\phi_n(u)$. Dès lors on vérifie que ϕ_n est bien solution du problème adimensionné :

$$-\frac{1}{2}\phi_n'' + \frac{1}{2}u^2\phi_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\phi_n$$

L'énergie adimensionnée associée est $\varepsilon_n = n + \frac{1}{2}$



(c) En revenant au problème initial, on en conclu que les solutions de l'équation de Schrödinger pour l'oscillateur harmonique sont :

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda^*}}\phi_n\left(\frac{x}{\lambda^*}\right) = \sqrt{\frac{1}{2^n n!\pi^{1/2}}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}}H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)\exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right)$$

Et les énergies associées sont : $E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$. Cette famille de solution est orthonormale en raison de la propriété d'orthonormalité des polynôme d'Hermite :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_n^*\psi_n dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\phi_n^*\phi_m du = C_nC_m\int_{-\infty}^{+\infty}H_n(u)H_m(u)\exp\left(-u^2\right)du = \delta_{n,m}$$

(d) On constate une caractéristique remarquable de l'oscillateur harmonique : la quantification des énergies est régulièrement espacée, faisant apparaitre le quanta d'énergie $\hbar\omega$. L'oscillateur harmonique est un modèle approprié pour les atomes dans un solide et l'hypothèse de quanta d'énergie a permis à Einstein de proposer son modèle pour la capacité calorifique. Il se trouve que le rayonnement est aussi quantifié de façon régulière en énergie et Planck fut le premier à introduire l'idée de quanta d'énergie pour expliquer le spectre de rayonnement du corps noir (cf. cours de physique statistique pour plus de détail sur ces deux applications).

Atome hydrogenoïde

1. On sépare la fonction d'onde $\psi(r,\theta,\phi) = \frac{R(r)}{r} Y_l^m(\theta,\phi)$ en une fonction d'onde radiale $R(r)$ et une harmonique sphérique $Y_l^m(\theta,\phi)$ de sorte que l'on opère une séparation des variables dans l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{r}\frac{d^2R}{dr^2}Y_l^m + \frac{R}{r^3}\Delta_{\mathbb{S}^2}Y_l^m\right) - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}RY_l^m = \frac{E}{r}RY_l^m$$

L'harmonique sphérique se simplifie et on obtient une équation de Shrödinger radiale ne portant que sur R :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2R}{dr^2} + \left(\frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right)R = ER$$

Par ailleurs, la condition de normalisation sur la fonction d'onde radiale est :

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{+\infty}|\psi|^2 r^2\sin(\theta)\,drd\theta d\phi = 1 \Rightarrow \int_0^{+\infty}|R|^2 dr \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(Y_l^m)^2\sin(\theta)\,d\theta d\phi = 1 \Rightarrow \int_0^{+\infty}|R|^2 dr = 1$$

2. On adimensionne l'équation de Schrödinger radiale en introduisant la longueur caractéristique $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{Ze^2m}$: la position réduite est $u = r/a_0$, la fonction d'onde radiale réduite est $\phi(u) = \sqrt{a_0}R(a_0u)$. On a :

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2\left(\sqrt{a_0}R\right)}{d(r/a_0)^2} + \left(\frac{1}{2}\frac{l(l+1)}{(r/a_0)^2} - \frac{1}{r/a_0}\right)(\sqrt{a_0}R) = \frac{Ema_0^2}{\hbar^2}(\sqrt{a_0}R)$$

$$-\frac{1}{2}\phi'' + \left(\frac{1}{2}\frac{l(l+1)}{u^2} - \frac{1}{u}\right)\phi = \varepsilon\phi$$

où l'on a introduit l'énergie adimensionnée $\varepsilon = \frac{Ema_0^2}{\hbar^2}$. Par ailleurs, la fonction adimensionnée ϕ vérifie toujours la condition de normalisation : $\int_0^{+\infty}|\phi|^2 du = \int_0^{+\infty}|R|^2 dr = 1$.

3. (a) La constante $C_{k,l}$ est obtenue en imposant la condition de normalisation :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}|\phi|^2 du &= C_{k,l}^2\int_0^{+\infty}\left(\frac{2u}{n}\right)^{2l+2}\exp\left(-\frac{2u}{n}\right)\left(L_{k,l}\left(\frac{2u}{n}\right)\right)^2 du \\ &= C_{k,l}^2\frac{n}{2}\int_0^{+\infty}x^{2l+2}\exp(-x)\left(L_{k,l}(x)\right)^2 dx \\ &= C_{k,l}^2 n^2\frac{(n+l)!}{k!}\end{aligned}$$

$$C_{k,l} = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{k!}{(n+l)!}}$$

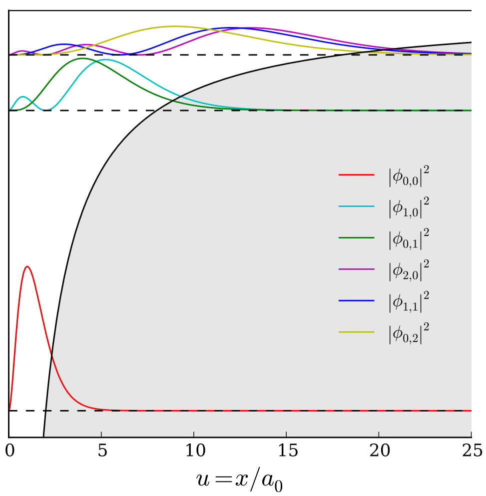
(b) En dérivant deux fois $\phi_{k,l}$, on obtient :

$$\phi''_{k,l}(u) = C_{k,l}\left(\frac{2u}{n}\right)^{l+1}\exp\left(-\frac{u}{n}\right)\left(\left(\left(\left(\frac{l+1}{u}-\frac{1}{n}\right)^2-\frac{l+1}{u^2}\right)L_{k,l}\left(\frac{2u}{n}\right)+2\left(\frac{l+1}{u}-\frac{1}{n}\right)\frac{2}{n}L'_{k,l}\left(\frac{2u}{n}\right)+\frac{4}{n^2}\right.\right.$$

En tirant parti de l'équation différentielle vérifiée par les polynôme de Laguerre, on obtient finalement :$\phi''_{k,l}(u) = \left(\frac{l(l+1)}{u^2}-\frac{2}{u}+\frac{1}{n^2}\right)\phi_{k,l}(u)$. Ainsi, on vérifie que $\phi_{k,l}$ est bien une solution du problème adimensionné :

$$-\frac{1}{2}\phi''_{k,l}(u)+\left(\frac{1}{2}\frac{l(l+1)}{u^2}-\frac{1}{u}\right)\phi_{k,l}(u) = -\frac{1}{2n^2}\phi_{k,l}(u)$$

et l'énergie adimensionnée associée est : $\varepsilon = -\frac{1}{2n^2}$.



(c) En revenant au problème initial on en conclut que les fonctions d'onde radiales sont :

$$R(r) = \frac{1}{\sqrt{a_0}}\phi_{k,l}\left(\frac{r}{a_0}\right) = \frac{1}{\sqrt{a_0}}C\left(\frac{2r}{na_0}\right)^{l+1}\exp\left(-\frac{r}{na_0}\right)L_{k,l}\left(\frac{2r}{na_0}\right)$$

et les énergie associées ne dépendent que de $n = k+l+1$ et valent $E_n = -\frac{\hbar^2}{2ma_0^2n^2} = -\frac{m}{2}\left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\hbar}\right)^2\frac{1}{n^2}$.

(d) Les niveaux d'énergie possible de l'atome d'hydrogène sont distribués en $1/n^2$ avec n entier. Le rayonnement émis ne peut correspondre qu'à la différence entre deux niveaux d'énergie, c'est à dire deux valeurs de n. D'où la formule de Rydberg $\frac{1}{\lambda} \propto E_{n_1} - E_{n_2} \propto \left(\frac{1}{n_1^2}-\frac{1}{n_2^2}\right)$.