Ejercicio 10)
Números complejos:

<C, + , * >   Álgebra abstracta

<(R,R) , +’ , *’ >   Álgebra concreta

Función de abstracción:

[| |] :: C -> A
[| (n,m) |] = n + m*i   donde i es la unidad imaginaria

Demostremos que es surjetiva:

∀n ϵ C : ∃m,p ϵ R : n = [| (m,p) |]
≡ {Por def de [| |]}
∀n ϵ C : ∃m,p ϵ R : n = m + p*i
≡ {Def de C}
∀n ϵ C : ∃m,p ϵ R : True
≡ {Término constante}
True

Definimos y demostremos sus operaciones:

+’ :: (R,R) (R,R) -> (R,R)
+’ (n,m) (p,q) -> (n+p,m+q)

Debemos demostrar que: [| (n,m) +’ (p,q) |] = [| (n,m) |] + [| (p,q) |]

D//

[|(n,m) +’ (p,q)|]
≡ {Por def de +’}
[|(n + p, m + q)|]
≡ {Por def de [| |] }
(n + p) + (m + q)*i
≡ {Distributiva}
(n + p) + m*i + q*i
≡ {Asociatividad}
(n + m*i) + (p + q*i)

≡ {Por def de [| |] }
[| (n,m) |] + [| (p.q) |]

Definimos y demostremos sus operaciones:

*’ :: (R,R) (R,R) -> (R,R)
*’ (a,b) (c,d) -> (a*c - b*d , a*d + b*c)

Debemos demostrar que: [| (a,b) *’ (c,d) |] = [| (a,b) |] * [| (c,d) |]

D//

[| (a,b) |] * [| (c,d) |]
≡ {Por def de [| |] }
(a + b*i) * (c + d*i)
≡ {Por def de * }
a*c + a*d*i + b*i*c + b*i*d*i
≡ {Aritmética }
a*c + a*d*i + b*i*c + b*d*i^2
≡ {Por def de número complejo: $i^2 = -1$ }
a*c + a*d*i + b*i*c - b*d
≡ {Asociativa}
(a*c - b*d) + (a*d*i + b*i*c)
≡ {Distributiva}
(a*c - b*d) + (a*d + b*c)*i
≡ {Por def de [| |] }
[|(a*c - b*d , a*d + b*c)|]
≡ {Por def de *’ }
[|(a,b) *’ (c,d) |]