MATEMATICA 1C 2DO PARCIAL

DERIVADAS

Derivada por definición:

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

, C=Xo

Interpretación geométrica: RECTA TANGENTE:

$$y = f'(c)(x - c) + f(c)$$

, F´(C)= Pendiente.

→ Si **existe la derivada** de la funcion en un punto ⇒ **existe pendiente** de recta tangente en el punto ⇒ **existe recta tangente** en el punto.

→ Si **no existe derivada** en el punto ⇒ **no** existe **pendiente** ⇒ **no existe recta tangente**, al menos, recta tangente no vertical.

Si f no es continua en un punto, entonces no es derivable en ese punto.

Aproximación lineal:

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

TABLA DE DERIVADAS DE FUNCIONES BASICAS

$f(x)$	$f'(x)$
a	0
$x^q,\ q \in \mathbb{Q} - \{0\}$	qx^{q-1}
$a^x,\ a > 0, a \neq 1$	$\ln(a)\ a^x$

$f(x)$	$f'(x)$
$\log_a(x),\ a > 0, a \neq 1$	$\frac{1}{\ln(a)x}$
$\text{sen}(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\text{sen}(x)$

-

F (X)	**F´(X)**
Ln(x)	1/x
TG (X)	SEC2 (x)

Análogamente, se prueba que $(\cot(x))' = -\csc^2(x)$, $(\sec(x))' = \sec(x)\tan(x)$ y $(\csc(x))' = -\csc(x)\cot(x)$.

-

Propiedades y reglas de derivación:

En producto de funciones:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

En división de funciones:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN:

Cuando me hablan de **razón de cambio o marginal**: Se refiere a que busque su derivada, o que me están dando su derivada.

- **Ingreso per cápita:** PNB/POBLACION
- **Costo promedio:** C(X)/X
- **Utilidad marginal:** Derivada de I(X) – C(X); Ingreso – Costo.

Recordando que:

- **Costo:** CF+CV.
- **Ingreso:** P x Q (Precio * Cantidad).
- **Utilidad:** Ingreso – Costo.

INCREMENTOS:

1. Se calcula ΔX= (X2-X1)
2. Se calcula valores de Y en X1 y X2 = (F(X1) ; F(X2)).
3. Se saca ΔY = (F(X1) - F(X2)).

Regla de L´HOPITAL:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Con límites especiales que den 0*∞:

Por ejemplo: (X-1)*ln(x-1)= El **ln lo dejo arriba**; y lo otro lo paso abajo como 1/x-1. Y sobre eso hago L´HOPITAL.

Con funciones a trozos: Analizo en los **puntos** su **continuidad**, y si existe la **derivada**. Para que sea **continua**: 1. F en el punto tiene que ser igual a el límite de x tendiendo a ese punto; si no lo es entonces la función es discontinua, y por lo tanto no existe la derivada. A la hora de buscar la **derivada** analizo por definición.

Cuando tengo una función valor absoluto:

1. La reflejo como una **función a trozos**.
2. Me fijo si es **continua**; me fijo si es **derivable** en el punto (por definición). **Generalmente no existe la derivada en ese punto;** por lo tanto lo reflejo asi:

$$\begin{cases} \text{No existe en } X= 1 \\ 1 \text{ si } X \geq 1 \\ -1 \text{ SI } X \leq 1 \end{cases}$$

ESTUDIO DE FUNCIONES

Pasos:

1. Analizo el **dominio**.
2. Busco las **intersecciones** con los ejes X e Y.
3. Busco las **asíntotas**:

ASINTOTA VERTICAL: Se analiza con límite de la X que **no** pertenece al **dominio**.

Si me da ∞ es porque es A.V.

ASINTOTA HORIZONTAL: Se busca con límite de X tendiendo a ∞**.** Si me da un **N°** significa que esa es la A.H.

A la hora de evaluar con límite:

- **0/N° = 0**
- **0/ ∞ = 0**
- **N° / 0 = ∞**
- **∞ / N° = ∞**

En los límites de ∞:

Saco factor común en el numerador y denominador con el exponente más grande.

4. Busco la **derivada primera**; para hallar sus puntos críticos, máximos, mínimos (RELATIVOS), intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Para esto es necesario hacerle un **estudio de signo** a F´(X), con F´(X)=0

1. *Si el signo de $f'(x)$ cambia de negativo a positivo en $x = c$, $f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = c$.*
2. *Si el signo de $f'(x)$ cambia de positivo a negativo en $x = c$, $f(x)$ tiene un máximo relativo en $x = c$.*
3. *Si $f'(x)$ NO cambia de signo en $x = c$, $f(x)$ NO tiene extremo relativo en $x = c$.*

Existencia de extremos absolutos: Si una función f(x) es continua en un intervalo cerrado [a, b], entonces f(x) posee un valor máximo y un valor mínimo en [a, b].

Puntos críticos:

Los ***posibles puntos extremos*** *(máximos o mínimos) de una función f los toma en los puntos $c \in Dom(f)$ tales que:* $\boxed{f'(c) = 0}$ *o* $\boxed{\nexists\, f'(c)}$.

A la hora de hacer la derivada primera, también indico su dominio.

5. Busco la **derivada segunda**, puntos de inflexión y cambios de concavidad.

Hago un estudio de signo con F´´(X).

Decimos que una función f es **cóncava hacia arriba** en x_0 si $f''(x_0) > 0$. Informalmente lo indicamos $\overset{\uparrow}{\smile}$.

Decimos que una función f es **cóncava hacia arriba** en x_0 si $f''(x_0) < 0$. Informalmente lo indicamos $\overset{\frown}{\downarrow}$.

Signo de $f'(x)$ y $f''(x)$	Propiedades de la gráfica de f	Forma de la gráfica
$f'(x) > 0$ y $f''(x) > 0$	Creciente y cóncava hacia arriba	
$f'(x) > 0$ y $f''(x) < 0$	Creciente y cóncava hacia abajo	
$f'(x) < 0$ y $f''(x) > 0$	Decreciente y cóncava hacia arriba	
$f'(x) < 0$ y $f''(x) < 0$	Decreciente y cóncava hacia abajo	

6. Calculo el **valor de F en los extremos relativos y puntos de inflexión**; normalmente se hacen aproximaciones groseras solo para graficar.

7. **Resumo** la información en una **tabla** para mayor facilidad a la hora de **graficar**.

Dominio/intervalos
Estudio de F´ (X)
Estudio de F´´(X)
F (X)
Forma de la grafica

Ejemplo:

Dominio	$(-\infty,-1)$	$x_2=-1$	$(-1,0)$	$x_1=0$	$(0,1)$	$x_3=1$	$(1,+\infty)$
Estudio f'	<0	<0	<0	$=0$	>0	>0	>0
Estudio f''	<0	$=0$	>0	>0	>0	$=0$	<0
f	decrece y $\overset{\frown}{\downarrow}$	inflexión	decrece y $\underset{\smile}{\uparrow}$	mín. rel.	crece y $\underset{\smile}{\uparrow}$	inflexión	$\overset{\frown}{\downarrow}$

8. **Graficar** con toda esta información.

<u>En caso de función valor absoluto:</u>

1. La reflejo como una **función a trozos**.
2. Me fijo si es **continua**; me fijo si es **derivable** en el punto (por definición).
3. Tengo en cuenta que si **no existe la derivada** en ese punto; entonces ese es un **punto crítico**; al igual que si existe.

<u>En cualquier función:</u>

Si cuando lo derivo (vale para la derivada primera o segunda), se **limita el dominio** en algún punto; entonces me fijo que pasa con **límite por definición** (ya que ese puede ser un posible punto crítico o de inflexión). Si da **infinito** significa que no existe la derivada y por lo tanto ese es un **punto crítico o de inflexión.**

INTEGRALES

Primitiva/proceso de integración= anti derivada. No toda función tiene primitiva.

TABLA BASICA DE INTEGRALES:

$\int dx$	$x+C$
$\int x^{-1}\,dx$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\int x^{k}\,dx$	$\frac{x^{k+1}}{k+1} + C$
$\int e^{x}\,dx$	$e^{x} + C$
$\int A^{x}\,dx$	$\frac{A^{x}}{\ln(A)} + C$
$\int \cos(t)\,\delta x$	$\operatorname{sen}(t) + C$
$\int \operatorname{sen}(t)\,\delta x$	$-\cos(t) + C$
$\int \sec^{2}(t)\,\delta x$	$\operatorname{tg}(t) + C$
$\int \frac{dx}{1+x^{2}}$	$\operatorname{arctg}(t) + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}$	$\operatorname{arcsen}(x) + C$

METODOS DE INTEGRACION

1. **Método de sustitución (o de cambio de variable):**

Se sustituye por t; se hace la integral con dt, y luego una vez definida la integral reemplazo t. **No olvidarme el +C**

2. **Método de integración por partes**

$$\int u\,dv = u.v - \int v\,du.$$

- **Para integrar LN(X):** Siempre se hace por **partes**: pensándolo como 1*ln(x).
- **Para integrar dos funciones cíclicas:** Aplico dos veces el método de integración por partes.

Ejemplos:

3. Aplicar dos veces el método de integración por partes para hallar $\int e^x \operatorname{sen}(x)\, dx$.

   Sea $F(x) = e^x$ y $G'(x) = \operatorname{sen}(x)$ (luego, $G(x) = -\cos(x)$). Así, aplicando la fórmula de integral por partes, obtenemos

$$\int e^x \operatorname{sen}(x)\, dx = -e^x \cos(x) + \int e^x \cos(x)\, dx. \tag{14.2}$$

   La integral del miembro derecho es de la misma naturaleza y del mismo grado de dificultad que la integral original, por lo que intentamos repetir la integración por partes haciendo $F = e^x$ y $G'(x) = \cos(x)$, por lo que $G(x) = \operatorname{sen}(x)$. Entonces

   $\int e^x \cos(x)\, dx = -e^x \operatorname{sen}(x) + \int e^x \operatorname{sen}(x)\, dx.$ Sustituyendo esta expresión en (14.2),

   $\int e^x \operatorname{sen}(x)\, dx = -e^x \cos(x) + \left(e^x \operatorname{sen}(x) - \int e^x \operatorname{sen}(x)\, dx\right)$. Entonces, pasando la última integral sumando al primer miembro, vale que

   $2\int e^x \operatorname{sen}(x)\, dx = e^x \operatorname{sen}(x) - e^x \cos(x),$ por lo que podemos afirmar que

   $\int e^x \operatorname{sen}(x)\, dx = \dfrac{e^x \operatorname{sen}(x) - e^x \cos(x)}{2} + C.$

-

2. Hallar $\int \ln(x)\, dx$ usando integración por partes.

   Sea $F(x) = \ln(x)$ y $G'(x) = 1$ (luego $G(x) = x$). Entonces aplicando la fórmula de la integral por partes tenemos que

   $\int \ln(x)\, dx = \ln(x).x - \int \frac{x}{x}\, dx = x\ln(x) - \int 1\, dx = x\ln(x) - x + C.$

-

EN LOS PROBLEMAS DE INTEGRALES:

Es necesario **hallar el valor de C**. Para eso generalmente me dan algún dato, convertible a punto tal como (0; 3) que me permite reemplazar en la función y obtener mi valor C.