Exercice 20:

a) La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$, la fonction logarithme népérien est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$

Donc par somme et produit de fonctions définies, $\boxed{f \text{ est définie sur } D = \mathbb{R}^{+*}}$

b) i) $\boxed{f'(x) = e^x - e\left(\ln(x) + \frac{x}{x}\right) = e^x - e(\ln(x)+1)}$

$\boxed{f''(x) = e^x - e \times \frac{1}{x} = e^x - \frac{e}{x}}$

$\boxed{f'''(x) = e^x - e\left(\frac{-1}{x^2}\right) = e^x + \frac{e}{x^2}}$

b) ii) Etudions le signe de $f'''(x)$:

$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $e^x > 0$, $x^2 > 0$

donc $e^x + \frac{e}{x^2} > 0$ donc $f'''(x) > 0$

Ainsi $\boxed{f'' \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}^{+*}.}$

Pour $x = 1$, $f''(x) = e^1 - \frac{e}{1} = e - e = 0$

f'' est strictement croissante et s'annule en $x = 1$.

Donc $f''(x) < 0$, $S = \{]0;1[\}$

$f''(x) = 0$, $S = \{1\}$

$f''(x) > 0$, $S = \{]1; +\infty[\}$

b) iii) D'après le signe de $f''(x)$ déterminé à la question précédente,

f' est strictement décroissante sur $]0;1[$

f' s'annule en $x = 1$

f' est strictement croissante sur $]1, +\infty[$

De la monotonie de f' on en déduit que f' possède un minimum en $x = 1$.

$f'(1) = e^1 - e(\ln(1)+1) = e - e = 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$, $f'(x) > f'(1)$

donc $f'(x) > 0$ et pour $x = 1$, $f'(x) = 0$

$\boxed{\text{On a donc } f \text{ strictement croissante sur } \mathbb{R}^{+*}.}$

2) iv) $f^{(2)}(x) = e^x - \frac{e}{x}$, $f^{(3)}(x) = e^x + \frac{e}{x^2}$, $f^{(4)}(x) = e^x - \frac{2e}{x^3}$, $f^{(5)}(x) = e^x + \frac{6e}{x^4}$

On pose $\forall n \geq 2$, $\boxed{P(n) = \left[f^{(n)}(x) = e^x + \frac{(n-2)!(-1)^{n-1} e}{x^{n-1}} \right]}$

Démontrons $P(n)$ par récurrence.

Initialisation :

$f^{(2)}(x) = e^x - \frac{e}{x}$, $e^x + \frac{(2-2)!(-1)^{2-1} e}{x^{2-1}} = e^x + \frac{0!(-1)e}{x} = e^x - \frac{e}{x}$

Donc $P(2)$ (★)

Hérédité :

Soit $n \geq 2$

Supposons $P(n)$ i.e $f^{(n)}(x) = e^x + \frac{(n-2)!(-1)^{n-1} e}{x^{n-1}}$ et montrons $P(n+1)$

$$(f^{(n)})'(x) = e^x + (n-2)!(-1)^{n-1} e \times \frac{-(n-1).x^{n-2}}{(x^{n-1})^2}$$

$$= e^x + (n-2)!(n-1) \times (-1)^{n-1}(-1) e \times \frac{x^{n-2}}{x^{2n-2}}$$

$$= e^x + (n-1)!(-1)^n e \times \frac{1}{x^{2n-2-(n-2)}}$$

$$= e^x + \frac{(n-1)!(-1)^n e}{x^n} = f^{(n+1)}(x)$$

Donc $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$

Ainsi $\forall n \geq 2 \quad \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) \quad (\#)$

De ($\star$) et ($\#$) on conclut d'après le principe de récurrence que $\boxed{\forall n \geq 1, \mathcal{P}(n)}$

c)i) $\lim\limits_{x \to 0^+} e^x = 1$

et $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} e x \ln(x) = 0$ $\Big\}$ $*$

$*$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} e^x + e x \ln(x) = 1$ ou $\boxed{\alpha = 1}$

c)ii) $4\left(\dfrac{\frac{x}{2}}{e^{x/2}}\right)^2 \times \dfrac{\ln(x)}{x} = 4 \times \dfrac{\frac{x^2}{4}}{e^x} \times \dfrac{\ln(x)}{x}$

$= \dfrac{x^2}{e^x} \times \dfrac{\ln(x)}{x} = \dfrac{x\ln(x)}{e^x}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{2}\right) = +\infty \\ \text{et } \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X}{e^X} = 0 \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}} = 0$

et $\lim\limits_{X \to 0} X^2 = 0$ $\Bigg\}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}}\right)^2 = 0$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\ln(x)}{e^x} = 0$

$f(x) = e^x - e x \ln(x) = e^x\left(1 - e\dfrac{x\ln(x)}{e^x}\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

et d'après la question précédente $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1 - e\dfrac{x\ln(x)}{e^x}\right) = 1$ $\Bigg\}$ $*$

* donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\boxed{\beta = +\infty}$

~~d)i) $f'(e^e - e^2) = e^{e^e - e^2} - e(\ln(e^e - e^2) + 1)$~~

~~$=$~~

~~$f'(e) = e^e - e(\ln(e) + 1)$, $f(e) = e^e - e^2 \ln(e)$~~

~~$= e^e - 2e \neq 0$ $\quad$ $= e^e - e^2$~~

~~Donc f^{-1} est dérivable en $e^e - e^2$~~

$f(e) = e^e - e \times e \times \ln(e)$

$= e^e - e^2$

f étant bijective, l'antécédant de $e^e - e^2$ par f est e.

$f'(e) = e^e - e(\ln(e) + 1)$

$= e^e - 2e \neq 0$

Donc f^{-1} est dérivable en $e^e - e^2$

et $\boxed{(f^{-1})'(e^e - e^2) = \dfrac{1}{f'(e)} = \dfrac{1}{e^e - 2e}}$

$f(1) = e^1 - e \ln(1)$

$= e$

Donc 1 est l'antécédant de e par f.

$f'(1) = e^1 - e(\ln(1) + 1) = 0$,

Donc $\boxed{f^{-1} \text{ n'est pas dérivable en } e}$

~~$f(x)$ s'annule une seule valeur de $x \in D$, 1.~~

Dov20

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = e^{\frac{1}{e}} - \frac{e}{e}\left(\ln\left(\frac{1}{e}\right)\right)$$

$$= e^{\frac{1}{e}} - (\ln(1) - \ln(e))$$

$$= e^{\frac{1}{e}} + 1$$

Donc f étant bijective, $\frac{1}{e}$ est l'antécédent de $e^{\frac{1}{e}} + 1$ par f.

$$f'\left(\frac{1}{e}\right) = e^{\frac{1}{e}} - e\left(\ln\left(\frac{1}{e}\right) + 1\right)$$

$$= e^{\frac{1}{e}} - e(\ln(1) - \ln(e) + e)$$

$$= e^{\frac{1}{e}} \neq 0$$

Donc f^{-1} est dérivable en $e^{\frac{1}{e}} + 1$ et

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\left(\frac{1}{e}\right)} = \frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}}$$

$f'(x) = 0$, $S = \{1\}$ or l'antécédent de 1 par f est e (question précédente). donc f^{-1} est dérivable $\forall y \in]\alpha ; \beta[$ tel que $f'(x)$ est différent de 0. Donc f^{-1} est dérivable en 2.

Plus généralement, f^{-1} dérivable,

$$\boxed{S = \{ f(x) \in]\alpha ; \beta[\setminus f'(x) = 0 \}}$$

ii) $f(2) = e^2 - 2e\ln(2)$

et $f'(2) = e^2 - e(\ln(2) + 1) \neq 0$

$e^2 - 2e\ln(2) \in]1 ; +\infty[$

donc

$$(f^{-1})'(e^2 - 2e\ln(2)) = \frac{1}{f'(2)}$$

$$= \frac{1}{e^2 - e(\ln(2) + 1)}$$