

Progetto Controlli Automatici – T

Tipologia A - Traccia 3

Controllo trattamento farmacologico contro il cancro

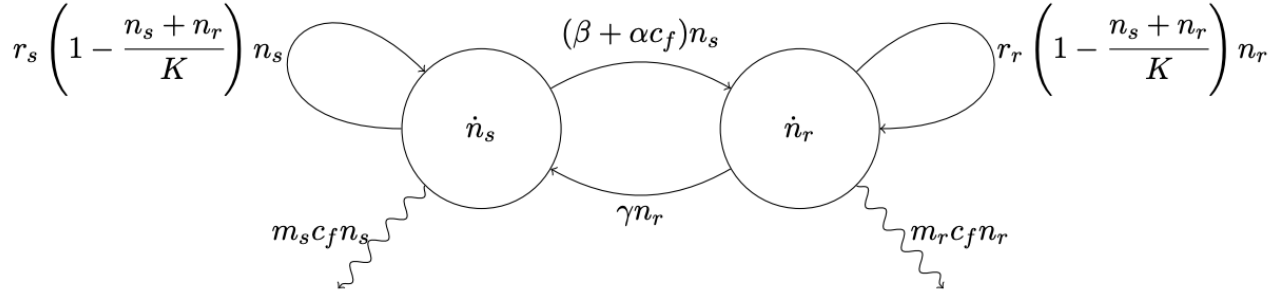
Gruppo G: Caroli Giacomo, Galfano Lorenzo, Gasperini Lucia

Anno accademico 2021-2022

Indice

- 1 Introduzione
- 2 Linearizzazione del sistema
- 3 Trasformata di Laplace
- 4 Sintesi del regolatore
- 5 Test del sistema di controllo sul sistema lineare e non lineare
- 6 Conclusioni

1 Introduzione



Il progetto ha lo scopo di realizzare un sistema di controllo, partendo da un controllore iniziale, servendosi della sintesi di un regolatore che soddisfi i seguenti requisiti:

- 1) Errore a regime nullo con riferimento a gradino.
- 2) Per garantire una certa robustezza del sistema si deve avere un margine di fase $M_f \geq 55^\circ$.
- 3) Il sistema può accettare una sovraelongazione percentuale al massimo dell'5% : $S\% \leq 5\%$.
- 4) Il tempo di assestamento all' $\epsilon\% = 5\%$ deve essere inferiore al valore fissato: $T_{a,\epsilon} = 0.6s$.
- 5) Il disturbo sull'uscita $d(t)$, con una banda limitata nel range di pulsazioni $[0, 0.15]$, deve essere abbattuto di almeno 35 dB.
- 6) Il rumore di misura $n(t)$, con una banda limitata nel range di pulsazioni $[3.5 \cdot 10^3, 3 \cdot 10^6]$, deve essere abbattuto di almeno 95 dB.

Equazioni del sistema e parametri

$$\begin{aligned}\dot{n}_s &= r_s \left(1 - \frac{n_s + n_r}{K}\right) n_s - m_s c_f n_s - \beta n_s + \gamma n_r - \alpha c_f n_s \\ \dot{n}_r &= r_r \left(1 - \frac{n_s + n_r}{K}\right) n_r - m_r c_f n_r + \beta n_s - \gamma n_r + \alpha c_f n_s,\end{aligned}$$

- $n_s(t)$ numero di cellule cancerogene suscettibili al trattamento farmacologico
- $n_r(t)$ numero di cellule cancerogene resistenti al trattamento farmacologico
- $r_s, r_r \in R$ rappresentano i tassi di riproduzione delle due tipologie
- $K \in R$ rappresenta il numero massimo di cellule che l'ambiente può contenere
- $c_f(t)$ variabile di ingresso che indica la concentrazione del farmaco
- $m_s, m_r \in R$ determinano, rispettivamente, la mortalità delle cellule suscettibili e quella delle cellule resistenti, con $m_s > m_r$
- $\beta \in R$ parametro che indica le cellule suscettibili che possono diventare resistenti al farmaco
- $\gamma \in R$ parametro che indica le cellule resistenti che possono diventare suscettibili al farmaco
- $\alpha \in R$ parametro che indica le cellule suscettibili che diventano resistenti dopo il trattamento

Valori numerici dei parametri forniti dalla traccia

r_s	1.6
r_r	1.6
K	900
γ	0.05
β	0.1
α	0.2
m_s	0.75
m_r	0.1
$n_{s,e}$	300
$n_{r,e}$	600

2 Linearizzazione del sistema

Consideriamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} n_s = x_1 \\ n_r = x_2 \\ c_f = u \\ y = x_1 \end{cases}$$

Procedendo con le sostituzioni otteniamo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = r_s \left(1 - \frac{x_1 + x_2}{K} \right) x_1 - m_s u x_1 - \beta x_1 + \gamma x_2 - \alpha u x_1 \\ \dot{x}_2 = r_r \left(1 - \frac{x_1 + x_2}{K} \right) x_2 - m_r u x_2 + \beta x_1 - \gamma x_2 + \alpha u x_1 \\ y = x_1 \end{cases}$$

Punto di equilibrio

Individuiamo ora la coppia di equilibrio (x_e, u_e) sapendo dal testo che $x_{1e} = 300$ e $x_{2e} = 600$. Nel punto di equilibrio le equazioni risultano essere uguali a 0 per definizione:

$$\begin{cases} 0 = r_s \left(1 - \frac{x_{1e} + x_{2e}}{K} \right) x_{1e} - m_s u_e x_{1e} - \beta x_{1e} + \gamma x_{2e} - \alpha u_e x_{1e} \\ 0 = r_r \left(1 - \frac{x_{1e} + x_{2e}}{K} \right) x_{2e} - m_r u_e x_{2e} + \beta x_{1e} - \gamma x_{2e} + \alpha u_e x_{1e} \end{cases}$$

Eseguendo alcune sostituzioni parametriche riusciamo ad ottenere $u_e = 0$ in entrambe le equazioni.

Abbiamo quindi ottenuto la coppia di equilibrio:

$$(x_e, u_e) = ((x_{1e}, x_{2e}), u_e) = ((300, 600), 0)$$

Calcolo delle matrici A, B, C e D per il sistema linearizzato con l'utilizzo della coppia di equilibrio precedentemente calcolata:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s \left(1 - \frac{2x_{1e} + x_{2e}}{K} \right) - m_s u_e - \beta - \alpha u_e & -\frac{r_s}{K} x_{1e} + \gamma \\ -\frac{r_r}{K} x_{2e} + \beta + \alpha u_e & r_r \left(1 - \frac{x_{1e} + 2x_{2e}}{K} \right) - m_r u_e - \gamma \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m_s x_{1e} - \alpha x_{1e} \\ -m_r x_{2e} + \alpha x_{2e} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{bmatrix} = [1 \quad 0]$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial u} \end{bmatrix} = [0]$$

Otteniamo così il seguente sistema linearizzato:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

3 Trasformata di Laplace

Per ottenere la funzione di trasferimento bisogna trasformare il sistema secondo Laplace ottenendo:

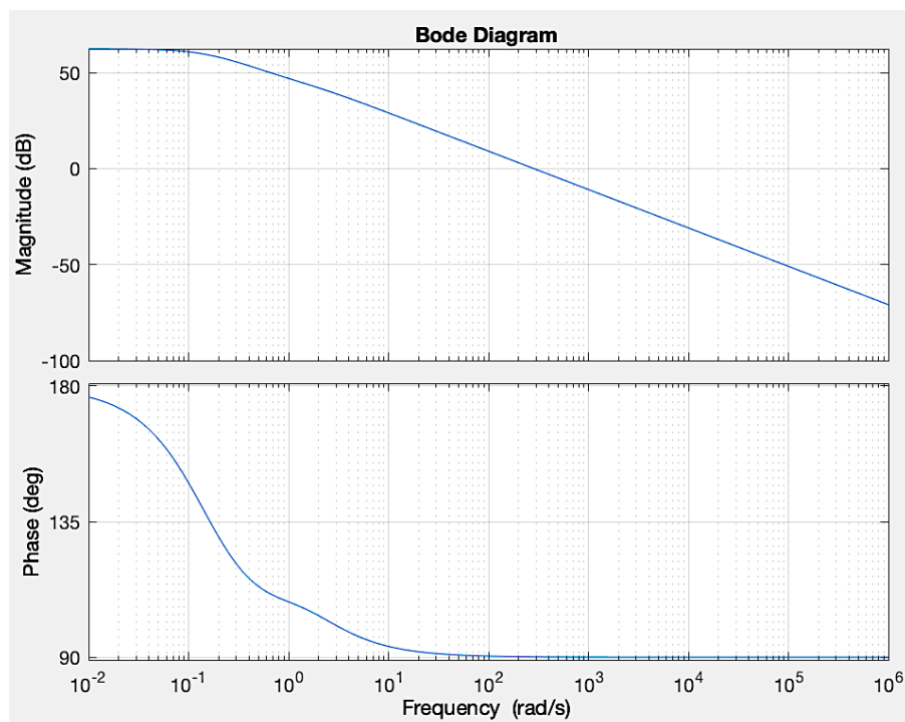
$$\begin{cases} sX(s) - X(0) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

Svolgendo alcuni calcoli possiamo ricondurci alla forma seguente:

$$\begin{cases} G(s) = C \frac{\text{adj}(sI-A)}{\det(sI-A)} B + D \\ Y(s) = G(s)U(s) \end{cases} \quad \text{con } D = 0$$

In questo modo si ottiene la seguente $G(s)$ e la sua relativa rappresentazione nel diagramma di Bode:

$$G(s) = \frac{-285 (s+1.117)}{(s+1.6)(s+0.15)}$$



4 Sintesi del regolatore

Partendo dalla funzione di trasferimento in anello aperto

$$L(s) = R(s)G(s)$$

bisogna progettare un regolatore $R(s)$. Quest'ultimo sarà composto dal regolatore statico $R_s(s)$ e da quello dinamico $R_d(s)$ che, rispettivamente, permetteranno di rispettare le specifiche statiche e dinamiche.

Sintesi del regolatore statico

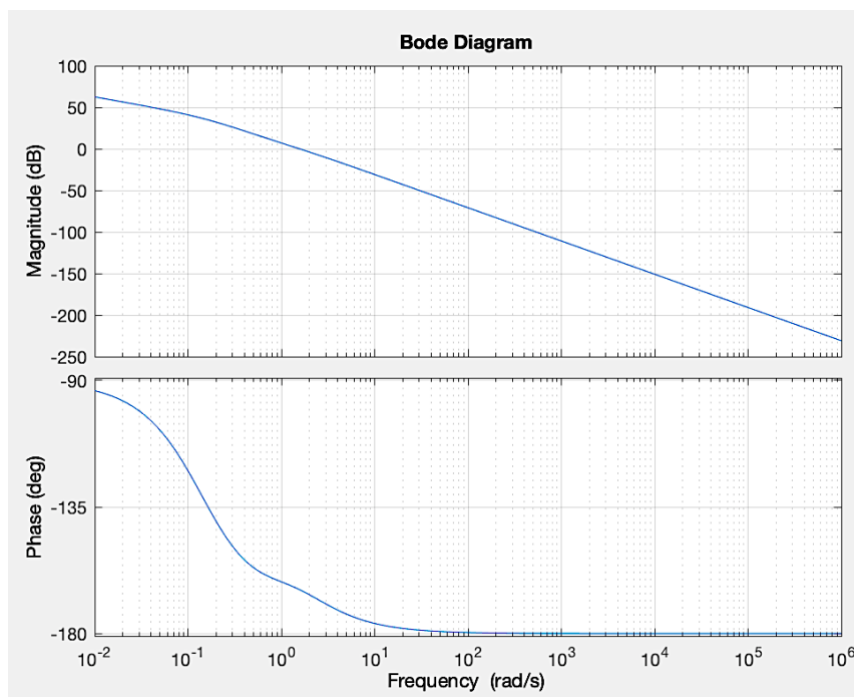
Nelle specifiche viene richiesto di avere un errore a regime nullo con riferimento a gradino.

Ricordando che

$$R_s(s) = \frac{\mu_s}{s^k}$$

abbiamo deciso di scegliere un guadagno statico negativo, in particolare uguale a -0.01 per rispettare vincoli successivi nella rete anticipatrice sul valore di α , per garantire l'applicabilità del criterio di Bode e avere, in questo modo, un guadagno maggiore di 0 nella $G(s)$. Inoltre, è risultato sufficiente considerare un solo polo, quindi $k=1$.

Di seguito il diagramma di Bode con l'inserimento del regolatore statico.



Sintesi del regolatore dinamico

Per garantire le prestazioni dinamiche bisogna regolare la sovraelongazione e il tempo di assestamento. Da specifiche bisogna ottenere T^* , il tempo di assestamento, ≤ 0.6 s e $M_f \geq 55^\circ$.

Sapendo $F(s)$ approssimabile a una coppia di poli complessi coniugati dominanti, possiamo sfruttare la semplificazione $M_f = \xi \cdot 100$.

Assumendo $S\% = 5\%$ (dato che da specifica deve essere $\leq 5\%$) si può ricavare dalla formula di $S\%$ il coefficiente di smorzamento ξ :

$$S_{\%} = 100 e^{\frac{-\pi\xi^*}{\sqrt{1-(\xi^*)^2}}}$$

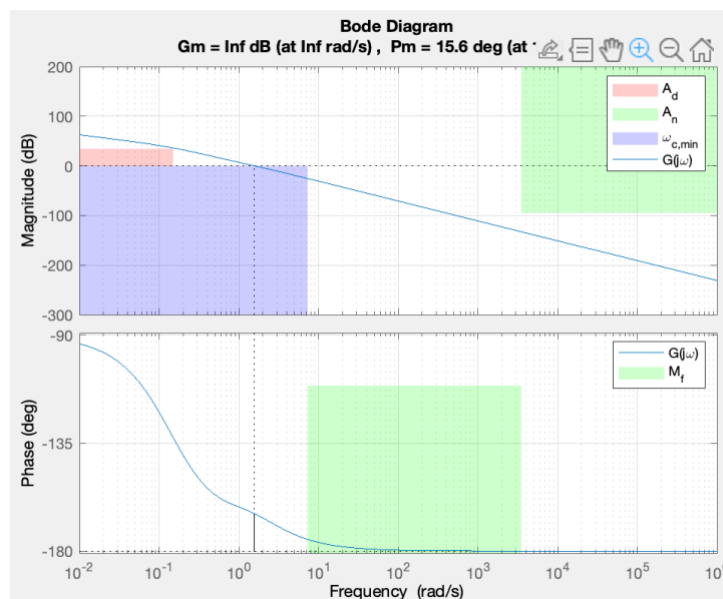
$$\xi = \sqrt{\frac{\ln^2(\frac{S_{\%}}{100})}{\pi^2 + \ln^2(\frac{S_{\%}}{100})}} = 0.6901$$

Sfruttando la precedente approssimazione, ricaviamo il margine di fase M_f minimo per rispettare la specifica. Confrontando il valore con il margine minimo richiesto scegliamo la specifica più conservativa e otteniamo $M_{f\text{spec}} = 69.01^\circ$.

Calcolato il $M_{f\text{spec}}$ possiamo trovare $\omega_{c\min}$ con la seguente formula

$$\omega_{c\min} = \frac{300}{M_f \cdot T_{a,\epsilon}} = 7.2453 \text{ rad/s}$$

Applicando queste specifiche, e le ulteriori dettate dall'abbattimento del rumore di misura e il disturbo sull'uscita (vedasi specifiche), tramite delle patch su Matlab, otteniamo il seguente diagramma di Bode:

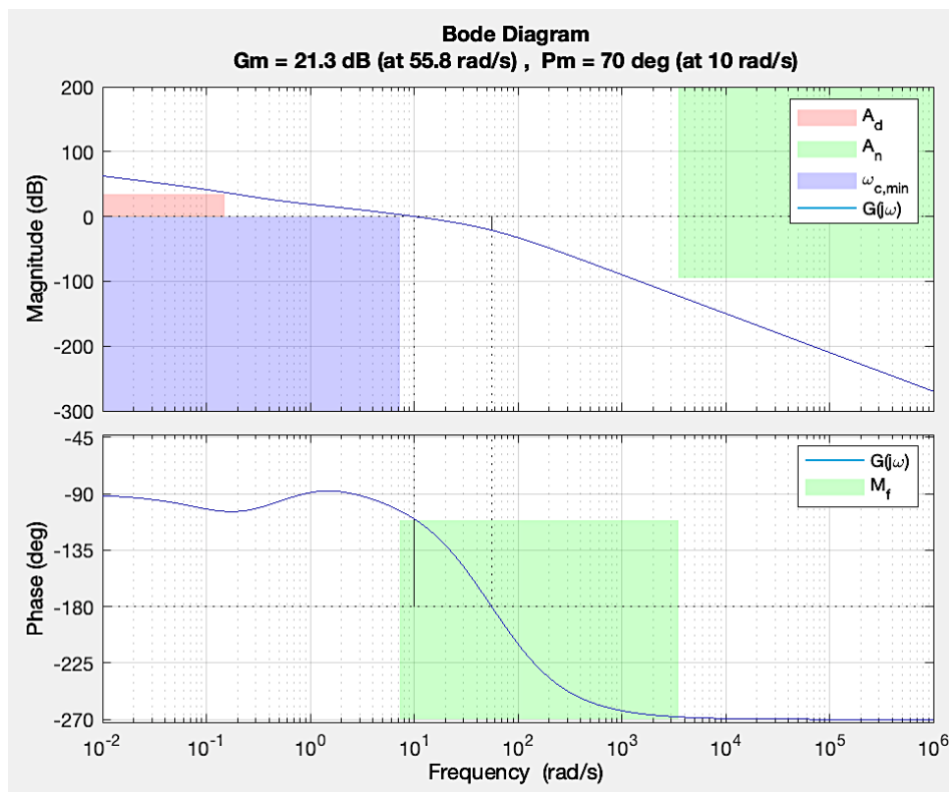


Realizzazione del regolatore dinamico

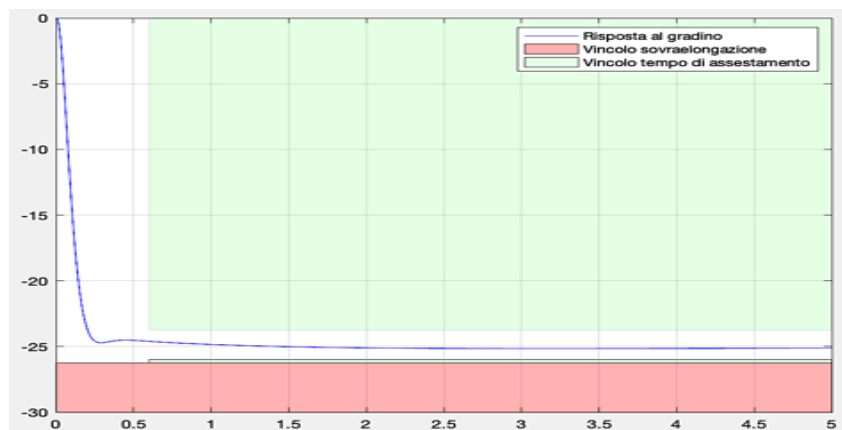
Studiando il diagramma di Bode, abbiamo potuto ricondurre il nostro sistema ad uno scenario di tipo B. Per risolvere i problemi sul margine di fase, si è scelto di utilizzare una rete anticipatrice. Sebbene quest'ultima abbia risolto i problemi iniziali, il nostro sistema non rispettava più i vincoli sul disturbo di misura. Si è deciso quindi di introdurre un polo ad alte frequenze, che ha consentito di rispettare le specifiche date.

Dopo diversi tentativi, abbiamo individuato come pulsazione di attraversamento ideale $\omega_c = 10 \text{ rad/s}$, conforme al risultato calcolato in precedenza $\omega_{cmin} = 7.2453 \text{ rad/s}$.

Il diagramma di Bode risulta quindi:

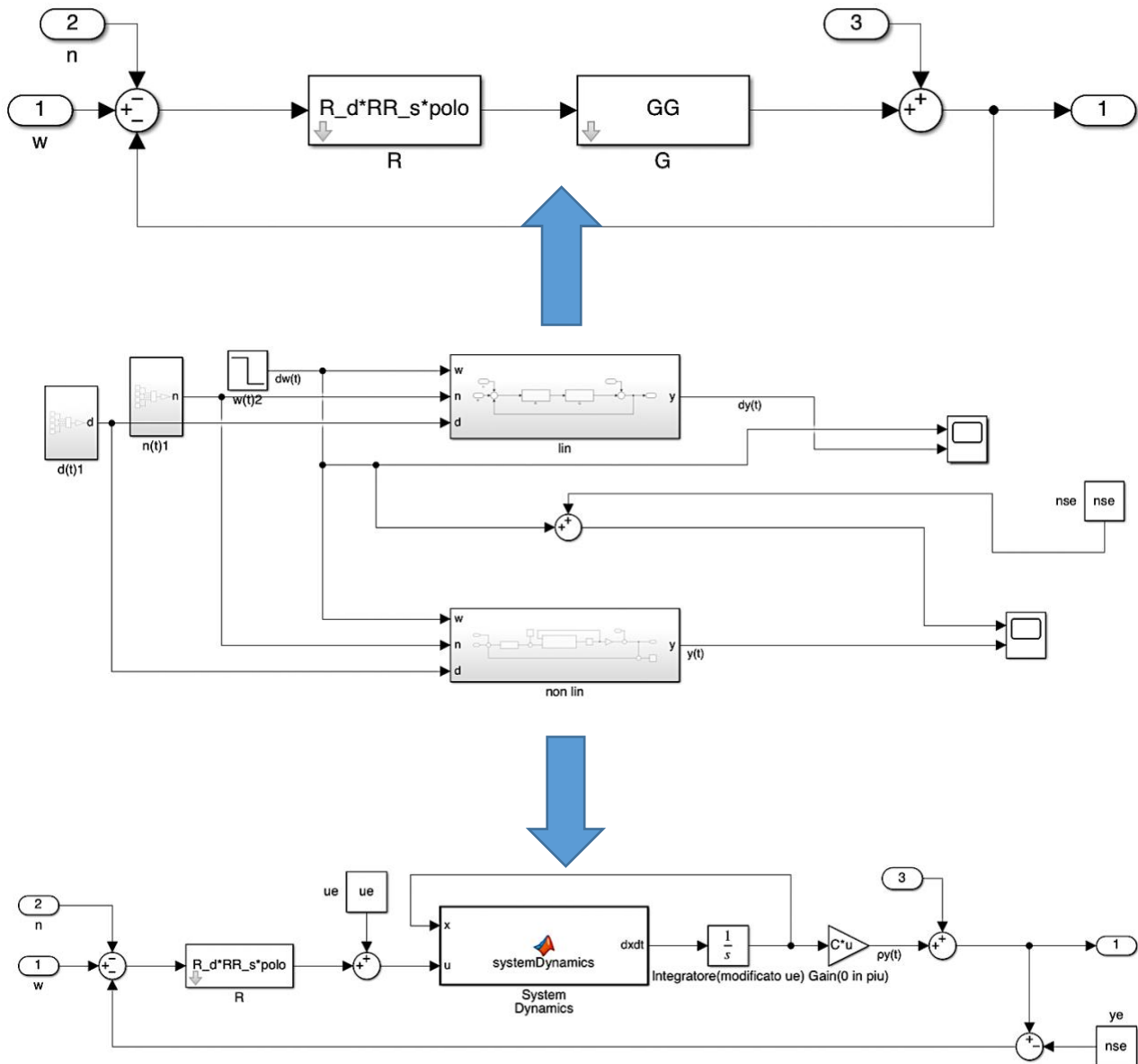


La risposta a gradino in assenza di rumore è:



5 Test del sistema di controllo sul sistema lineare e non lineare

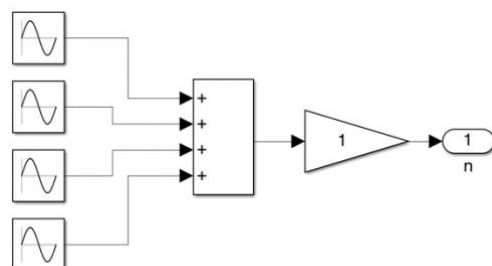
Abbiamo provveduto a rappresentare il sistema su Simulink, realizzando i seguenti schemi logici:



Il disturbo di misura $n(t)$ e il rumore di uscita $d(t)$ sono stati realizzati come qui riportato, avendo cura di inserire, per ciascuno, i corrispettivi valori.

$$d(t) = \sum_{k=1}^4 8 \cdot \sin(0.0375kt)$$

$$n(t) = \sum_{k=1}^4 5 \cdot \sin(3.5 \cdot 10^3 kt).$$

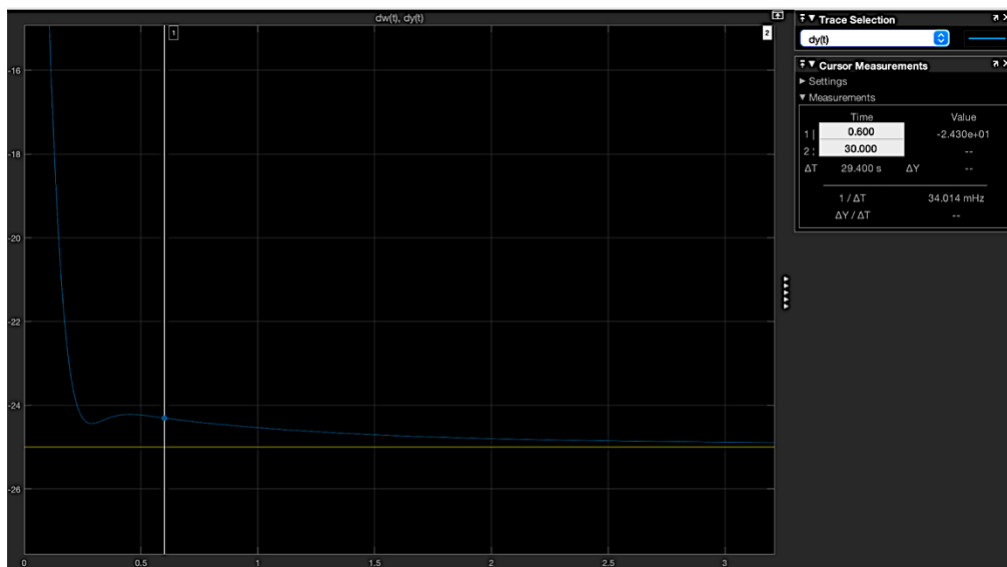


Test sul sistema lineare

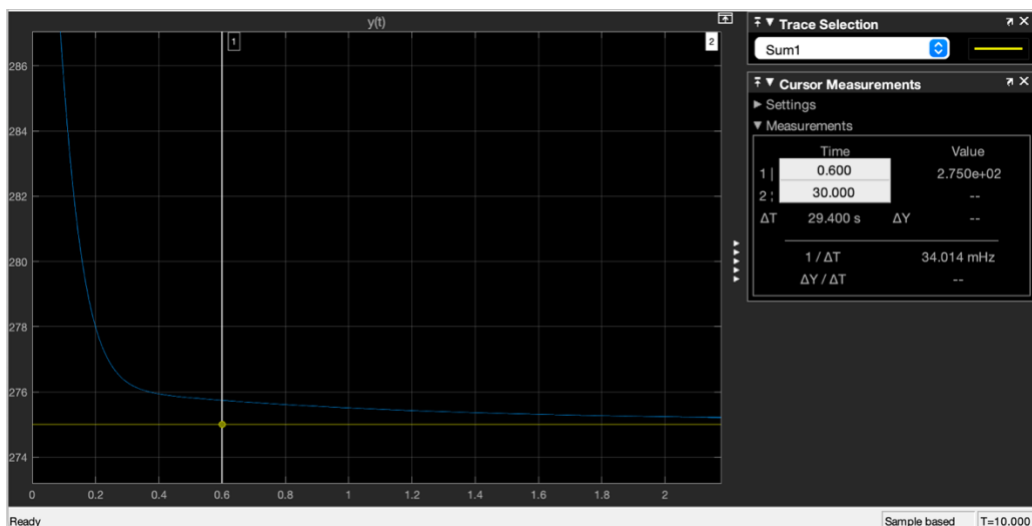
Come da specifica del punto 4 abbiamo testato il sistema di controllo sul sistema linearizzato con

$$\omega(t) = -25 \cdot 1(t), d(t) = \sum_{k=1}^4 8 \cdot \sin(0.0375kt) \text{ e } n(t) = \sum_{k=1}^4 5 \cdot \sin(3.5 \cdot 10^3 kt).$$

Il risultato ottenuto è il seguente e, come da aspettative, il riferimento viene seguito correttamente: vengono abbattuti sia il rumore di misura che i disturbi in uscita.

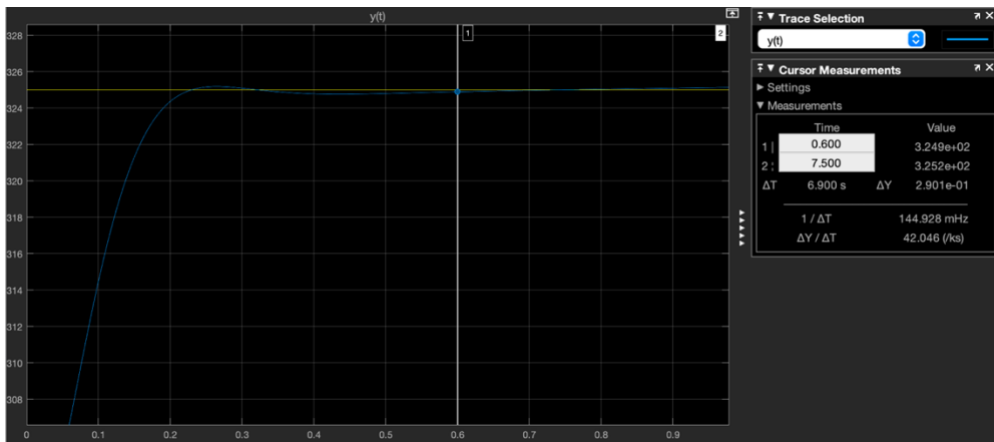


Test sul sistema non lineare

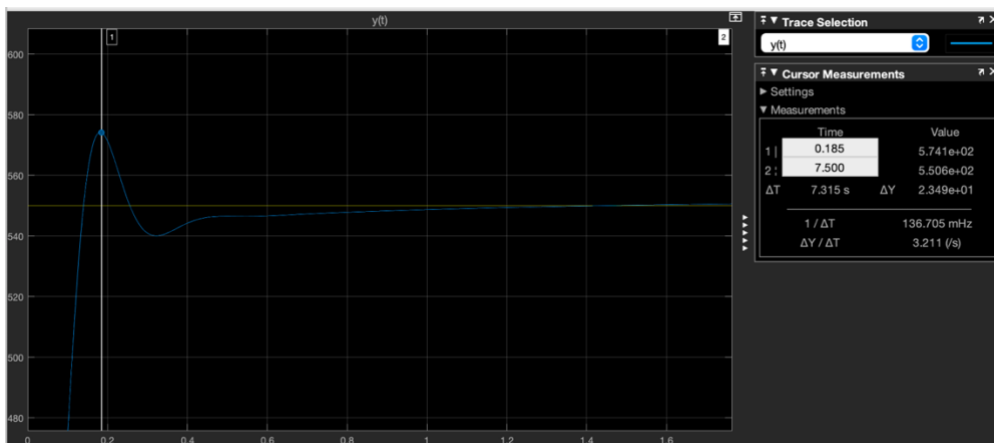


Esplorazione range di ampiezza del gradino – sistema non lineare

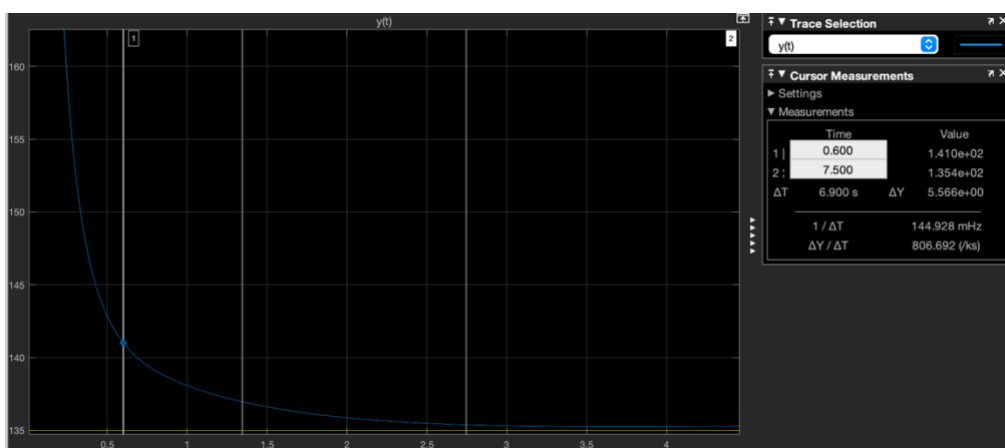
Per l'esplorazione del sistema non lineare richiesta nel terzo punto opzionale abbiamo variato il valore del gradino in ingresso considerando $n(t)$ e $d(t)$ equivalenti a quelli utilizzati nel punto 4 del testo.



Gradino considerato:
 $\omega(t) = 25 \cdot 1(t)$



Gradino considerato
 (valore limite
 superiore per la
 sovralongazione):
 $\omega(t) = 250 \cdot 1(t)$

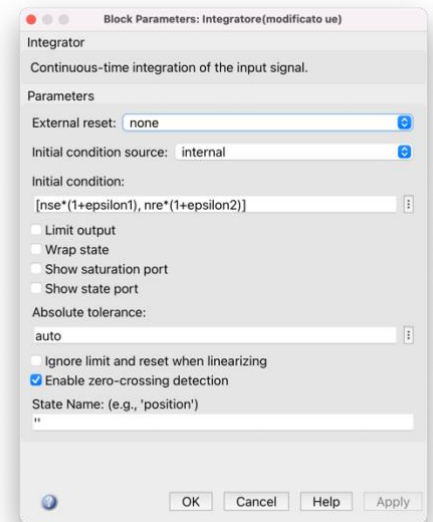


Gradino con valore
 limite (inferiore)
 per il tempo di
 assestamento:
 $\omega(t) = 250 \cdot 1(t)$

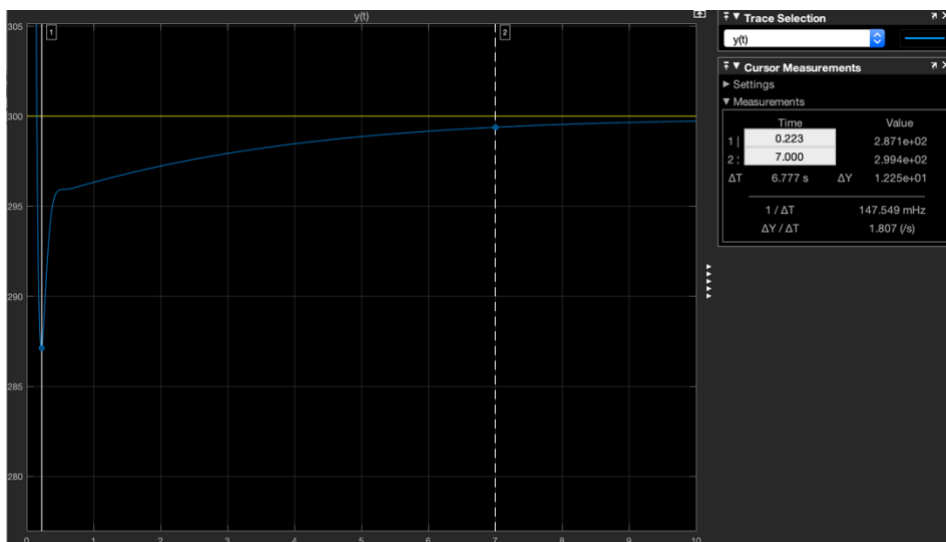
Esplorazione range di condizioni iniziali – sistema non lineare

Come richiesto dal secondo punto opzionale abbiamo effettuato uno studio qualitativo sul range di condizioni iniziali del sistema non lineare nel quale esso rimane stabile nell'intorno dell'equilibrio e tali per cui l'uscita del sistema in anello chiuso converga a $h(x_e, y_e)$.

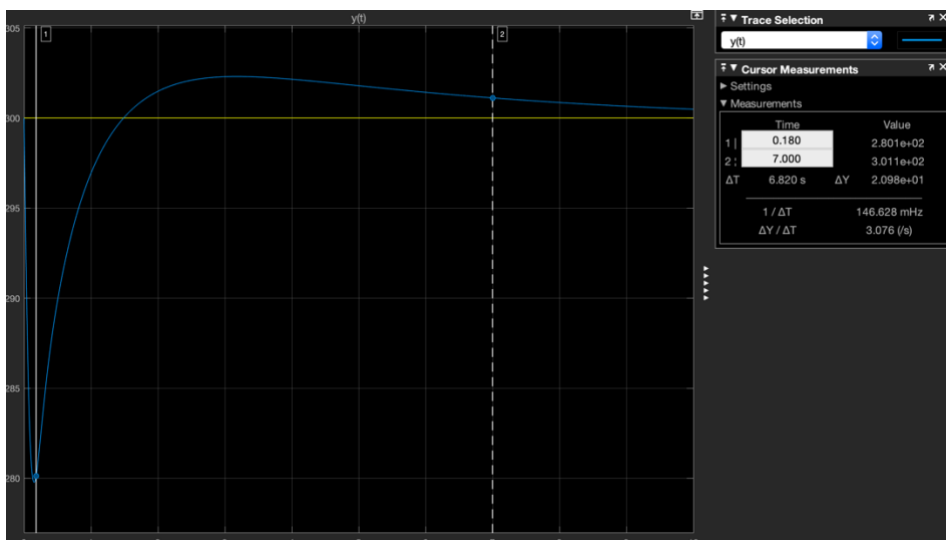
Per poter esplorare facilmente i valori variandoli su Matlab abbiamo inserito nell'integratore del sistema due variabili epsilon1 e epsilon2, come mostrato nell'immagine affianco:



Risultati ottenuti:



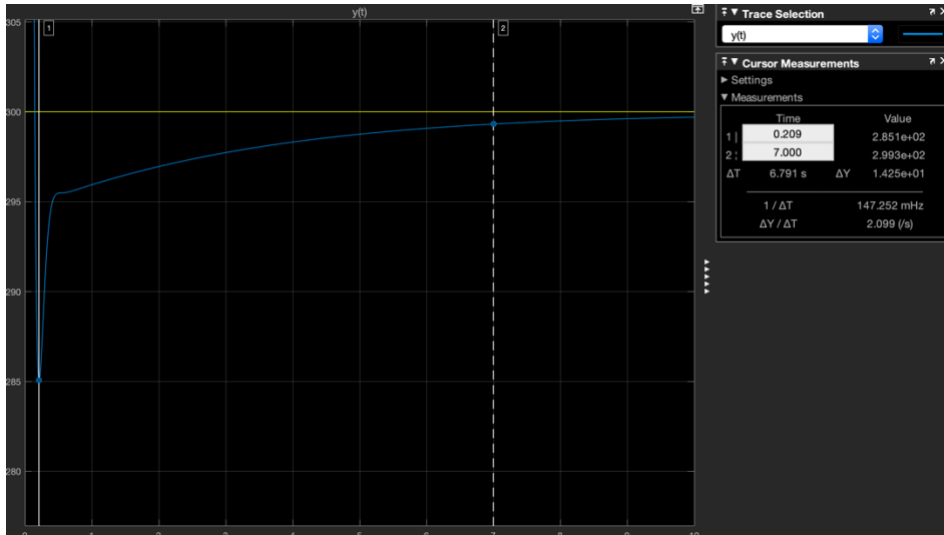
epsilon1=1
epsilon2=0



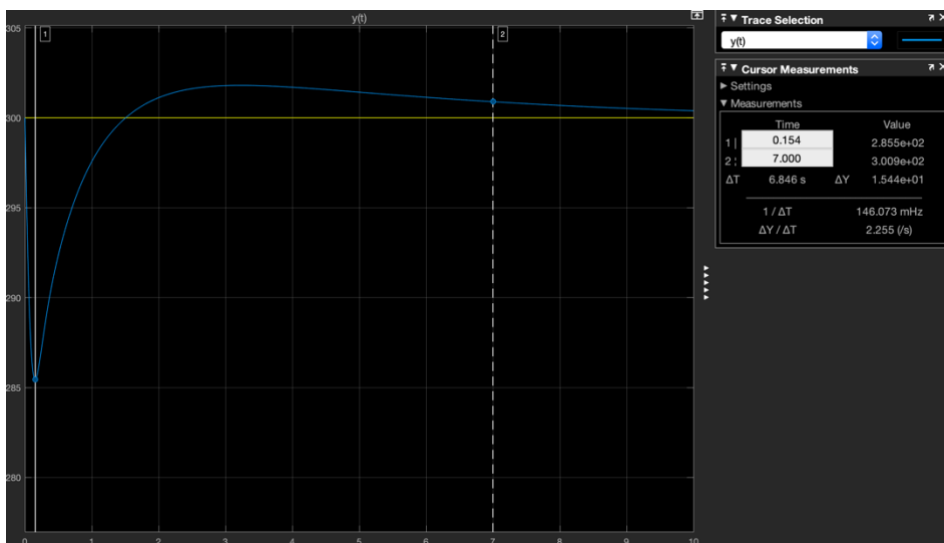
epsilon1=0
epsilon2=1

Da un'analisi qualitativa di questi primi due test è possibile notare che il primo rispetta le specifiche sul tempo di assestamento e sulla sovraelongazione, mentre il secondo non rispetta il limite della sovraelongazione al 5%.

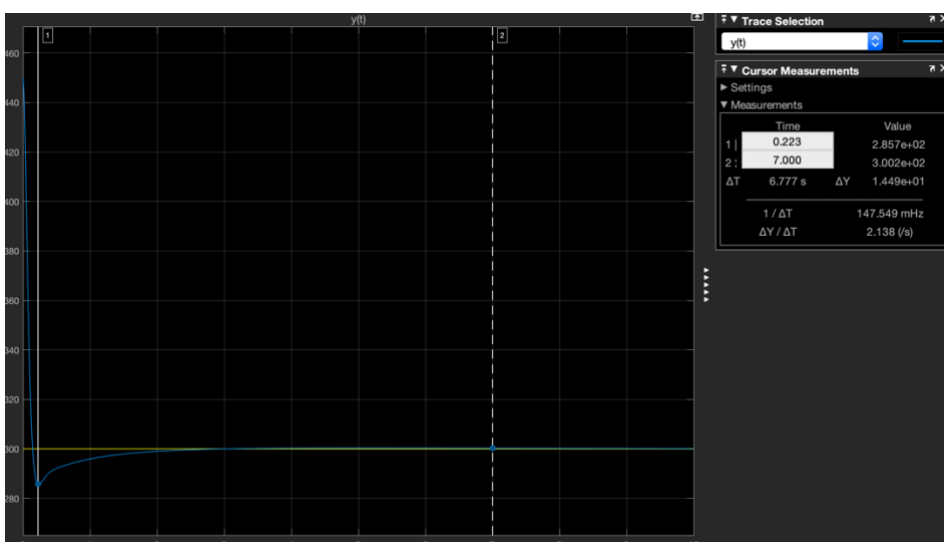
Nelle figure seguenti si procede ad un'analisi per la ricerca dei valori limite per cui vengono rispettate ancora le specifiche:



epsilon1=1.13 (limite massimo – oltre viola il vincolo del 5% di sovraelongazione)
epsilon2=0



epsilon1=0
epsilon2=0.7 (limite massimo – oltre viola il vincolo del 5% di sovraelongazione)



Valori limiti ottenuti variando entrambi:
epsilon1=0.5
epsilon2=0.5

6 Conclusioni

In principio, dopo la linearizzazione del sistema, abbiamo appurato la presenza di un guadagno negativo non conforme a una delle condizioni del criterio di Bode e, per rendere il sistema asintoticamente stabile, si è provveduto all'aggiunta di un termine negativo nel regolatore.

Successivamente, tramite l'inserimento delle patch nel grafico, si è potuto analizzare il sistema nella sua risposta in frequenza e, visto il comportamento della fase, ricondurlo ad uno scenario di tipo B.

Al fine di ottemperare alle specifiche dateci, è stata introdotta una rete anticipatrice che, sebbene abbia permesso di risolvere le problematiche prima riscontrate, ha altresì portato ad un incremento del guadagno con conseguente violazione del vincolo di abbattimento sul rumore di misura.

La soluzione da noi individuata è stata quella di introdurre un polo ad alte frequenze in grado di incrementare la pendenza per poter rimanere al di sotto della patch.