Laborator 2: Aplicatii DFS

Elemente de punctat

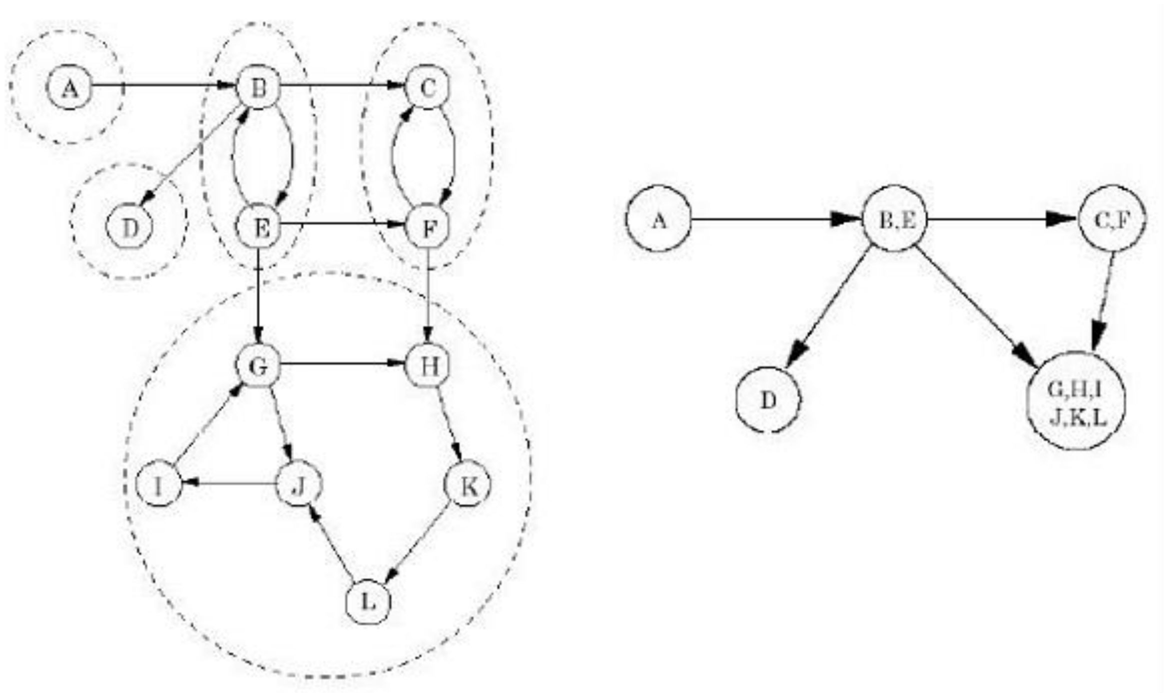
Întelegerea noţiunilor teoretice:

- punct de articulaţie (pentru grafuri neorientate)
- punţi (pentru grafuri neorientate)
- componente biconexe (în general, pentru grafuri neorientate) – de lucru bonus / pentru cei care au terminat de lucrat.

Teorie

- **Tare conexitate.** Un graf orientat este tare conex, dacă oricare ar fi două vârfuri u şi v, ele sunt tare conectate (strongly connected) - există drum atât de la u la v, cât şi de la v la u.
- O componentă tare conexă este un subgraf maximal tare conex al unui graf orientat, adică o submulţime de vârfuri U din V, astfel încât pentru orice u şi v din U ele sunt tare conectate. Dacă fiecare componentă tare conexă este redusă într-un singur nod, se va obţine **un graf orientat aciclic**.

Exemplu:



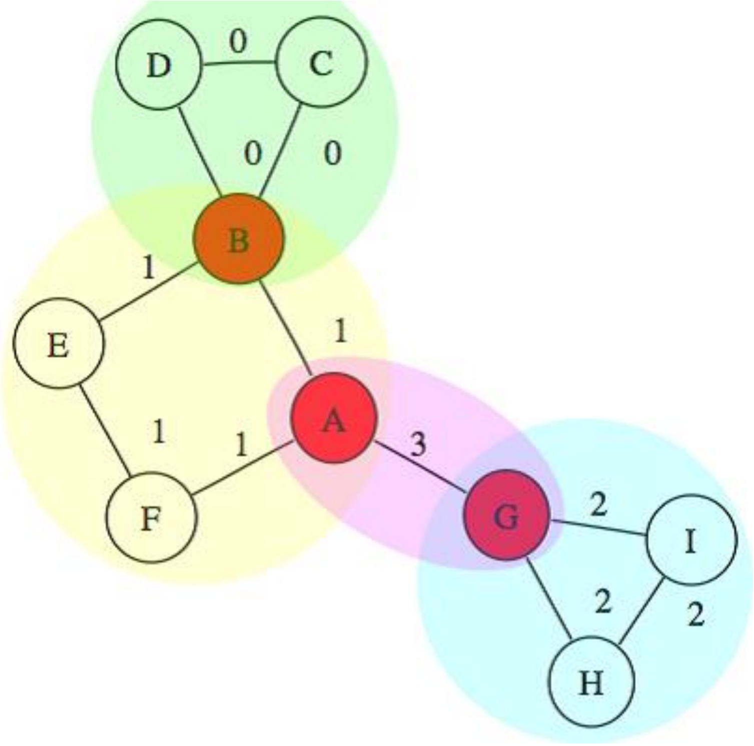
Interpretare: În stânga se găsește graful orientat inițial iar în dreapta se găsește reducerea acestuia la componentele tare coneze.

- **Un punct de articulaţie (cut vertex)** este un nod al unui graf a cărui eliminare duce la creşterea numărului de componente conexe ale acelui graf.
- **O punte (bridge)** este o muchie a unui graf (se mai numeşte şi **muchie critică**) a cărei eliminare duce la creşterea numărului de componente conexe ale acelui graf

.

- **Biconexitate**. Un graf biconex este un graf conex cu proprietatea că eliminând oricare nod al acestuia, graful rămâne conex.
- O componentă biconexă a unui graf este o mulţime **maximală** de noduri care respectă proprietatea de biconexitate.

  Figura de mai jos ilustrează un graf cu 4 componente biconexe. (numerotate de la 0 la 3)



Puncte de articulatie

Pentru determinarea punctelor de articulaţie într-un graf neorientat se foloseşte o parcurgere în adâncime. Fie T un arbore parțial descoperit de parcurgerea grafului în adâncime. Atunci, un nod v este punct de articulaţie dacă și numai dacă:

- v este rădăcina lui T şi v are doi sau mai mulţi copii

sau

- v nu este rădăcina lui T şi are un copil u în T, astfel încât nici un nod din subarborele cu rădăcina in u nu este conectat cu un strămoş al lui v printr-o muchie de întoarcere (copii lui nu pot ajunge pe altă cale pe un nivel superior în arborele de adâncime).

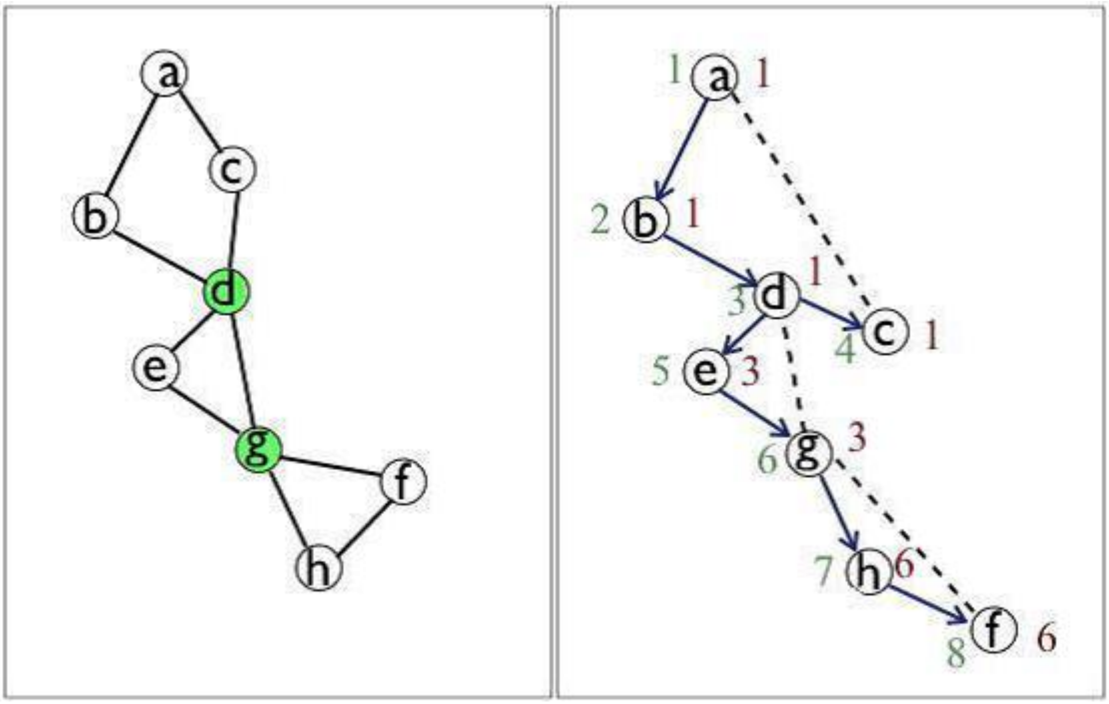
Găsirea punctelor care se încadrează în primul caz este uşor de realizat.

Notăm:

```
d[v] = timpul de descoperire a nodului u
low[u] = min( {d[u]} U { d[v] : (u, v) este o muchie de întoarcere } U
         { low[vi] : vi copil al lui v în arborele de adâncime} )
```

v este punct de articulaţie ⇔ low[u] ≥ d[v], pentru orice copil u al lui v în T.

Exemplu:

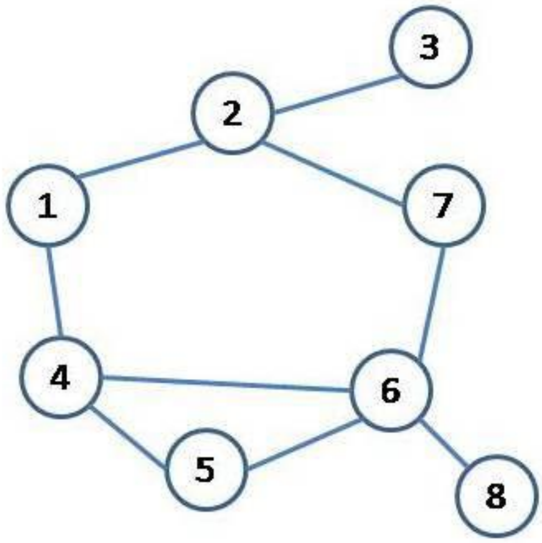


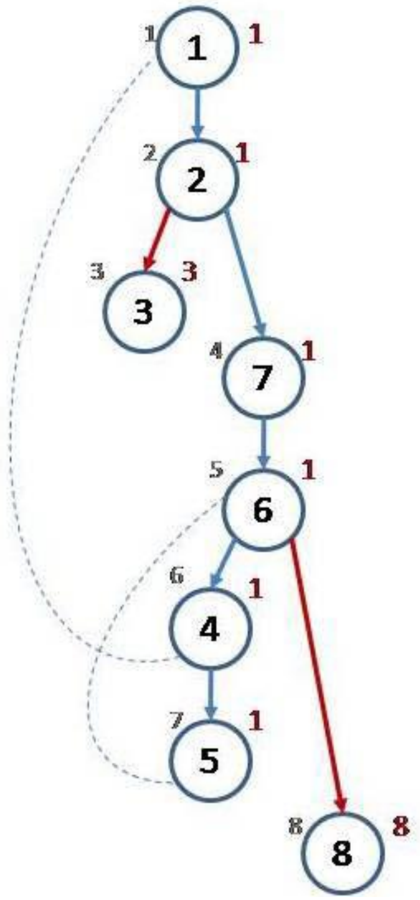
Punți

Pentru a determina muchiile critice se foloseşte tot o parcurgere în adâncime modificată, pornind de la următoarea observaţie: **muchiile critice sunt muchiile care nu apar în niciun ciclu.** Prin urmare, o muchie de întoarcere nu poate fi critică, deoarece o astfel de muchie închide întotdeauna un ciclu. Trebuie să verificăm pentru muchiile de avansare (în număr de |V| - 1) dacă fac parte dintr-un ciclu. Să considerăm că dorim să verificăm muchia de avansare (v, u).

Ne vom folosi de low[v] (definit la punctul anterior): dacă din nodul u putem să ajungem pe un nivel mai mic sau egal cu nivelul lui v, atunci muchia **nu este critică**, în caz contrar ea este critică.

Complexitate: O(|V| + |E|)





O componenta biconexă (sau biconectată) este o componentă a grafului care nu conţine puncte de articulatie. Astfel după eliminarea oricărui vârf din componenta curentă, restul vârfurilor vor rămâne conectate întrucât între oricare două vărfuri din aceeași componentă biconexă există cel puțin două căi disjuncte.

Astfel, pentru a determina componentele biconexe ale unui graf, vom adapta algoritmul de aflare a punctelor critice, reţinând şi o stivă cu toate muchiile de avansare şi de întoarcere parcurse până la un moment dat. La întâlnirea unui nod critic v se formează o nouă componentă biconexă pe care o vom determina extrăgând din stivă muchiile corespunzătoare. Nodul **v** este critic dacă am găsit un copil **u** din care nu se poate ajunge pe un nivel mai mic în arborele de adâncime pe un alt drum care foloseşte muchii de întoarcere **(low[u] >= d[v])**. Atunci când găsim un astfel de nod **u**, toate muchiile aflate în stivă până la muchia (v, u) inclusiv formează o nouă componentă biconexă.

Nodul rădăcină trebuie tratat separat. Conform regulilor acestuia pentru a fi marcat nod critic (numărul de copii >= 2), este suficient să considerăm că fiecare copil face parte dintr-o componentă biconexă separată.

Atenție! Împărțirea în componente biconexe a unui graf neorientat reprezintă o partiție disjunctă a muchiilor grafului (împreună cu vârfurile adiacente muchiilor corespunzătoare fiecărei componente în parte). Acest lucru implică că unele vârfuri pot face parte din mai multe componente biconexe diferite.

Complexitate: O(|V| + |E|)

Probleme

Tocmai s-a lansat o nouă reţea socială, dedicată exclusiv gamerilor. Întrucât toată lumea doreşte să discute cu prietenii săi din comunitate într-un mod cât mai privat, când un jucator intră prima dată pe un server, indică toate persoanele pe care le consideră prieteni și stabilește canalul de comunicare, care este unul bidirecțional.

Consideram că doi jucatori **aparţin unui clan** dacă **fac parte din aceeași componentă conexă**

Pentru a evalua relațiile dintre jucători, dorim să identificăm următoarele elemente cheie din fiecare clan:

1) Care sunt jucătorii critici a căror eliminare ar duce la distrugerea comunicației în cadrul clanului? 4,5p

2) Care canale între 2 jucători sunt critice la nivelul clanului? 4,5p

Complexitate: O(|V| + |E|)