

---

## 多项式插值与函数最佳逼近

Lucian Xu (appleDog)

2023 年 6 月 1 日

## 多项式插值与函数最佳逼近

### Lagrange 插值

很熟悉了啊.

#### Th 4.1

插值多项式唯一.

$n$  次 Lagrange 插值多项式, 记为  $L_n(x)$ , 形式为

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \prod_{i \neq k} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$

#### Th 4.2

给出  $n$  个互异点, 存在唯一的次数不超过  $n$  的多项式  $L_n(x_i)$  满足  $L_n(x_i) = f(x_i)$ ,  $(i = 0, \dots, n)$ .

称  $R_n(x) = f(x) - L_n(x)$  为插值多项式的余项.

#### Th 4.3

对余项的估计, 很像 Taylor 公式中的 Lagrange 余项.

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

一些说明:

1.  $\xi \in \left( \min_{1 \leq i \leq n} \{x_i\}, \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i\} \right)$ .
2. 当  $f(x)$  本身是一个次数不超过  $n$  的多项式的时候, 余项等于零.

### 差商, Newton 插值

先说差商. 考虑 Lagrange 插值中, 增加或减少节点对插值多项式的影响.

设  $L_{k-1}(x)$  是  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$  为插值节点的多项式,  $L_k$  是  $x_0, x_1, \dots, x_k$  为插值节点的多项式.

令

$$g(x) = L_k(x) - L_{k-1}(x),$$

那么  $g(x)$  是一个次数不超过  $k$  的多项式, 且对  $i = 0, 1, \dots, k-1$  都有  $g(x_i) = 0$ .

则可以设

$$g(x) = a_k(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1}).$$

其中  $a_k$  是一个常数.

(但是我有一个疑问, 如果插值的第  $k$  个点是  $(x_k, 0)$  怎么办)

接着就有

$$L_k(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_k(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1}).$$

其中

$$a_k = \sum_{m=0}^k \frac{f(x_m)}{\prod_{i=0, i \neq m}^k (x_m - x_i)}.$$

#### Def 4.2

设

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}$$

为  $f(x)$  关于点  $x_i, x_j$  的 1 阶差商.

设

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_i}$$

为  $f(x)$  关于点  $x_i, x_j, x_k$  的 2 阶差商.

类似地, 可以定义  $k$  阶差商为

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, x_k] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-2}, x_{k-1}]}{x_k - x_0}.$$

约定 0 阶差商即为函数值.

性质:

1.  $f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \sum_{m=0}^k \frac{f(x_m)}{\prod_{i=0, i \neq m}^k (x_m - x_i)}.$
2.  $k$  阶差商的值与点的顺序无关, 这一点从上面的表达式也可以看出来.

接着就是 Newton 插值多项式了.

$$\begin{aligned} L_n(x) = & f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ & + \cdots + f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

#### 差分, 等距节点插值

在等距条件下, 差商会有更简单的表示, 也就是差分. 设等距节点  $x_k = x_0 + kh (k = 0, 1, \cdots, n)$ ,  $h$  称为步长.

这里定义一些线性算子:

1. 向前差分算子:  $\Delta f_k = f_{k+1} - f_k$ ,
2. 向后差分算子:  $\nabla f_k = f_k - f_{k-1}$ ,
3. 中心差分算子:  $\delta f_k = f_{k+1/2} - f_{k-1/2}$ ,
4. 位移算子:  $E f_k = f_{k+1}$ .

接着就可以得到:

1.  $\Delta^n f_k = (E - I)^n f_k = \sum_{j=0}^n (-1)^j C_n^j E^{n-j} f_k = \sum_{j=0}^n (-1)^j C_n^j f_{n+k-j}$ .
2.  $\nabla^n f_k = (I - E^{-1})^n f_k = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} C_n^j E^{j-n} f_k = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} C_n^j f_{j+k-n}$ .
3.  $f_{n+k} = E^n f_k = (I + \Delta)^n f_k = \sum_{j=0}^n C_n^j \Delta^j f_k$ .
4.  $f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m}] = \frac{1}{m!} \frac{1}{h^m} \Delta^m f_k$ .
5.  $f[x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-m}] = \frac{1}{m!} \frac{1}{h^m} \nabla^m f_k$ .

## Hermite 插值多项式

之前的插值都是只有函数值的情形.

### Def 4.3

给定闭区间  $[a, b]$  中的  $n + 1$  个互异点  $x_i$  处的函数值以及直到  $m_i$  阶导数值, 设  $m = \sum_{i=0}^n (m_i + 1) - 1$ , 可以得到一个次数不超过  $m$  的多项式  $H_m(x)$ , 称为  $f(x)$  的  $m$  次 Hermite 插值多项式.

### Th 4.4

自然  $m$  次多项式  $H_m(x)$  是唯一的.

### Th 4.5

$$\text{余项 } R_m(x) = f(x) - H_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)^{m_i+1}.$$

(先挖坑)

## 高次插值的缺点以及分段低次插值

(先挖坑)

## 三次样条插值

### Def 4.5

给定闭区间  $[a, b]$  上的  $n + 1$  个插值点, 如果函数  $S(x)$  满足:

1.  $S(x_i) = y_i$ ,
2.  $S(x)$  在每一个小区间上都是三次多项式,
3.  $S(x) \in C^2[a, b]$ ,

就称  $S(x)$  是  $f(x)$  的三次样条插值.

首先判断一下需要多少个条件, 每一个小区间需要确定 4 个参数, 也就是一共需要  $4n$  个.

再计算一下条件数. 由于  $S(x)$  是  $C^2[a, b]$  的, 这就意味着对于小区间之间的分界点, 两侧的函数值, 一阶导数和二阶导数的极限要相等. 加上插值条件, 这里一共  $(n + 1) + 3(n - 1) = 4n - 2$  个.

这自然是还要补充两个条件, 通常有如下三种, 分别被称为第一型, 第二型和第三型:

1. 两端点的导数,
2. 两端点的二阶导数,
3. 周期边界, 也就是当  $f(x_0) = f(x_n)$  时,  $S'(x_0 + 0) = S'(x_n - 0)$ ,  $S''(x_0 + 0) = S''(x_n - 0)$ .

一通暴算最后可以得到:

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

其中

$$\begin{aligned} M_i &= S''(x_i), \\ h_i &= x_{i+1} - x_i, \\ \mu_i &= \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i}, \\ \lambda_i &= \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i}, \\ d_i &= 6f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]. \end{aligned}$$

### 第一型

利用  $S'(x_0) = f'(x_0)$ ,  $S'(x_n) = f'(x_n)$  可以得到

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \\ & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}.$$

**第二型**

利用  $M_0 = f''(x_0), M_n = f''(x_n)$  可以得到

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \mu_3 & 2 & \lambda_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ & & & & \mu_{n-1} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 - \mu_1 f''(x_0) \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} - \lambda_{n-1} f''(x_n) \end{pmatrix}.$$

**第三型**

利用  $S'(x_0) = S'(x_n), S''(x_0) = S''(x_n)$  可以得到

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & \mu_n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}.$$

这都是很好解的.

给出三次条样函数的误差估计.

**Th 4.8**

$$\|f^{(k)} - S^{(k)}\|_{\infty} \leq c_k \|f^{(4)}\|_{\infty} \left( \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i) \right)^{4-k}, k = 0, 1, 2,$$

其中  $c_0 = \frac{1}{16}, c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ .

**最佳一致逼近****Def 4.6**

线性空间

**Def 4.7**

线性赋范空间

**Def 4.8**

距离

**Def 4.9**

最佳逼近元

**Def 4.10**

记  $M_n = \{p_n \mid p_n \text{ 为次数不超过 } n \text{ 的多项式}\}$ , 则  $M_n \subset C[a, b]$ . 设  $f \in C[a, b]$ . 若  $\exists p_n \in M_n$ , 使得对  $\forall q_n \in M_n$ , 有

$$\|f - p_n\|_\infty \leq \|f - q_n\|_\infty,$$

则称  $p_n(x)$  是  $f(x)$  的  $n$  次最佳一致逼近多项式.

因为是一致逼近, 所以选择  $L^\infty$  范数.

**Th 4.11**

对于  $f \in C[a, b]$ , 在  $M_n$  中一定存在最佳一致逼近多项式.

两个条件, 闭区间和连续函数.

**Def 4.12**

称满足  $x_0 \in [a, b]$ ,  $|g(x_0)| = \|g\|_\infty$  的点  $x_0$  为  $g(x)$  在  $[a, b]$  上的偏差点.

若  $g(x_0) = \|g\|_\infty$  的  $x_0$  为正偏差点, 否则为负偏差点.

**Lemma**

如果  $f \in [a, b]$ ,  $p_n(x)$  是其  $n$  次最佳一致逼近多项式, 那么  $f - p_n$  一定存在正负偏差点.

( why 提到了 切比雪夫多项式? )

**最佳平方逼近****Def 4.13**

内积空间

**Def 4.14**

正交

**Lemma**

Cauchy - Schwartz 不等式

**Th 4.15**

将 Th 4.10, 也就是最佳一致逼近中的  $\|\cdot\|_\infty$  改为  $\|\cdot\|_2$  就得到了最佳平方逼近. 泛函里学过, 最佳平方逼近是有唯一解的, 并且给出了计算方式.

## 离散数据的最佳平方逼近

对于给定数据

$$\begin{array}{c|cccccc} x & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \hline y & y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \end{array}$$

如果选取基  $\varphi_k(x) = x^k$ , 得到的  $m$  次最佳平方逼近多项式被称为  $m$  次最小二乘多项式.

记

$$\varphi_k = \begin{pmatrix} \varphi_k(x_1) \\ \varphi_k(x_2) \\ \vdots \\ \varphi_k(x_n) \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

那么  $m$  次最小二乘多项式的系数就是下面线性方程组的解

$$\begin{pmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_m) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_1, \varphi_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_m, \varphi_0) & (\varphi_m, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_m, \varphi_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y, \varphi_0) \\ (y, \varphi_1) \\ \vdots \\ (y, \varphi_m) \end{pmatrix}.$$

## 超定线性方程组的最小二乘解

对于线性方程组

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

其中  $n < m$ , 且系数矩阵的列向量线性无关, 这样的线性方程组称为超定方程组.

这样的方程组一般没有精确解.

记

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

那么上述方程组可被写成

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n = b.$$

还是利用泛函的东西.



记  $M = \text{span}\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ , 那么  $M$  是  $\mathbb{R}^m$  的一个有限维子空间, 那么设

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left\| b - \sum_{i=1}^n x_i A_i \right\|^2,$$

就一定会存在  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  使得

$$\Phi(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = \min_{x_i \in \mathbb{R}} \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

根据之前的理论知道,  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  其实就是下面方程的解

$$A^T A x = A^T b.$$

### 连续函数的最佳平方逼近

$$\begin{pmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_m) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_1, \varphi_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_m, \varphi_0) & (\varphi_m, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_m, \varphi_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y, \varphi_0) \\ (y, \varphi_1) \\ \vdots \\ (y, \varphi_m) \end{pmatrix}.$$

依旧是成立的, 只需要注意内积变成函数的内积.