常微分方程数值解

初值问题

主要讨论一阶常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' &= f(x,y),(a \leqslant x \leqslant b), \\ y(a) &= \eta. \end{cases}$$

并且做出假设:

1. $f(x,y), \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ 连续,
2. 方程存在唯一解 $y(x)$, 并且解在区间 $[a,b]$ 上是充分光滑的.

Euler 方法

Euler 公式

在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上进行计算,

$$\begin{aligned} &\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y(x))\mathrm{d}x \\ \Longrightarrow & y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y(x))\mathrm{d}x \\ \Longrightarrow & y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf\left(x_i, y\left(x_i\right)\right) + R_{i+1}^{(1)}, \\ & \text{where } R_{i+1}^{(1)} = \frac{1}{2}\frac{df(x,y(x))}{dx}\bigg|_{x=\xi_i} h^2 = \frac{1}{2}y''(\xi_i)h^2, \quad \xi_i \in (x_i, x_{i+1}). \end{aligned}$$

上式忽略 $R_{i+1}^{(1)}$ 即有

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)), 0 \leqslant i \leqslant n-1.$$

几何意义

在区间 $[x_0, x_1]$ 上, 用过点 $P_0\left(x_0, y_0\right)$, 以 $f\left(x_0, y_0\right)$ 为斜率的直线 $y = y_0 + f\left(x_0, y_0\right)\left(x - x_0\right)$ 近似代替 $y(x)$, 用 $y_1 = y_0 + hf\left(x_0, y_0\right)$ 作为 $y\left(x_1\right)$ 的近似值。以此类推, 在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上, 用过点 $P_i\left(x_i, y_i\right)$, 以 $f\left(x_i, y_i\right)$ 为斜率的直线 $y = y_i + f\left(x_i, y_i\right)\left(x - x_i\right)$ 近似 $y(x)$.

所以 Euler 方法又称折线法。

一般的单步显式公式为

$$\begin{aligned} & y_{i+1} = y_i + h\varphi\left(x_i, y_i, h\right), \\ & y_0 = \eta. \end{aligned}$$

其中 $\varphi(x,y,h)$ 为增量函数.

Def 7.1

称

$$R_{i+1}=y(x_{i+1})-(y(x_i)+h\varphi(x_i,y(x_i),h))$$

为单步显式公式在点 x_{i+1} 的局部截断误差.

根据上述定义可以知道 Euler 公式的局部截断误差为

$$R_{i+1}=\frac{1}{2}h^2y''(\xi_i),\xi_i\in(x_i,x_{i+1}).$$

Backward Euler

只需要变成

$$y(x_{i+1})=y(x_i)+hf(x_{i+1},y(x_{i+1}))+R_{i+1}^{(2)},$$

也就是将 $f(x,y(x))$ 在 x_i 处 Taylor 展开变成在 x_{i+1} 处展开即可.

其中

$$R_{i+1}^{(2)}=-\frac{h^2}{2}\frac{df(x,y(x))}{dx}\bigg|_{x=\xi_i}=-\frac{h^2}{2}y''(\xi_i),\quad \xi_i\in(x_i,x_{i+1}).$$

Backward Euler 公式是单步隐式公式.

类似可以得到一般的单步隐式公式

$$y_{i+1}=y_i+h\psi\left(x_i,y_i,y_{i+1},h\right),i=0,1,\cdots,n-1,$$

和其对应的局部截断误差

$$R_{i+1}=-\frac{1}{2}h^2y''(\xi_i),\xi_i\in(x_i,x_{i+1}).$$

梯形公式

只需要变成

$$y\left(x_{i+1}\right)=y\left(x_i\right)+\frac{h}{2}\left[f\left(x_i,y\left(x_i\right)\right)+f\left(x_{i+1},y\left(x_{i+1}\right)\right)\right]+R_{i+1}^{(3)},$$

也就是用梯形公式近似积分.

其中

$$R_{i+1}^{(3)}=-\frac{h^3}{12}\frac{d^2f(x,y(x))}{dx^2}\bigg|_{x=\xi_i}=-\frac{1}{12}y'''\left(\xi_i\right)h^3,\quad \xi_i\in(x_i,x_{i+1}).$$

得到的公式

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}\left[f\left(x_i,y_i\right)+f\left(x_{i+1},y_{i+1}\right)\right],\quad i=0,1,\cdots,n-1,$$

称为梯形公式. 这是一个单步隐式公式, 其局部截断误差为

$$R_{i+1}=-\frac{1}{12}y'''\left(\xi_i\right)h^3,\quad \xi_i\in(x_i,x_{i+1}).$$

改进 Euler 公式

形式为

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}\left(f\left(x_i,y_i\right)+f\left(x_{i+1},y_i+hf\left(x_i,y_i\right)\right)\right).$$

Runge-Kutta 方法

构造思想

由中值定理可以知道

$$y\left(x_{i+1}\right)=y\left(x_i\right)+\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x,y(x))\mathrm{d}x=y\left(x_i\right)+hf\left(x_i+\theta h,y\left(x_i+\theta h\right)\right).$$

记 $k^*=f\left(x_i+\theta h,y\left(x_i+\theta h\right)\right),k_1=f(x_i,y_i),k_2=f(x_{i+1},y_i+hk_1)$.

如果用 k_1 近似 k^* 则得到 1 阶 Eular 公式. 如果用 $\frac{k_1+k_2}{2}$ 近似 k^* 则得到 2 阶改进的 Eular 公式.

一般的 r 级 Runge-Kutta 方法为

$$\begin{cases}y_{i+1}=y_i+h\sum\limits_{j=1}^{r}\alpha_jk_j\\ k_1=f\left(x_i,y_i\right)\\ k_j=f\left(x_i+\lambda_jh,y_i+h\sum\limits_{l=1}^{j-1}\mu_{jl}k_l\right),\quad j=2,3,\cdots,r.\end{cases}$$

选择参数 $\alpha_j,\lambda_j,\mu_{jl}$ 使得局部截断误差展开为 h 的幂级数后, $h^0,h^1,\cdots,h^p$ 的系数为零而 h^{p+1} 的系数不为零, 就称上述 Runge-kutta 方法是 p 阶的.

2 阶 Runge-Kutta 方法

一般形式为

$$\begin{cases}y_{i+1}=y_i+h\left(\alpha_1k_1+\alpha_2k_2\right)\\ k_1=f\left(x_i,y_i\right)\\ k_2=f\left(x_i+\lambda_2h,y_i+h\mu_{21}k_1\right)\end{cases}.$$

要使其是 2 阶的需要满足

$$\begin{cases}y_{i+1}=y_i+h\left((1-\alpha_2)k_1+\alpha_2k_2\right)\\ k_1=f\left(x_i,y_i\right)\\ k_2=f\left(x_i+\frac{1}{2\alpha_2}h,y_i+\frac{1}{2\alpha_2}hk_1\right).\end{cases}$$

当 $\alpha_2=\frac{1}{2}$ 可以得到改进的 Euler 公式.

利用上述构造方法可以得到更高阶的 Runge-Kutta 公式.

最常用的 4 阶 Runge-Kutta 方法

形式为

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

其中

$$\begin{aligned}
k_1 &= f\left(x_n, y_n\right), \\
k_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \\
k_3 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right), \\
k_4 &= f\left(x_n + h, y_n + hk_3\right).
\end{aligned}$$

(后面的先占坑)