计算方法

北京师范大学数学科学学院
主讲人：纪光华
Email：ghji@bnu.edu.cn

第二章、非线性方程的解法

本章主要内容

1. 二分法
2. 简单迭代法（不动点迭代法）
3. Newton迭代法

本章主要讨论非线性方程

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

的求根问题，这里$x \in \mathbf{R}$，$f(x)$为连续函数．若存在x^*使得$f(x^*) = 0$，则称x^*是(1)的根或函数$f(x)$的零点．若$f(x)$可分解为

$$f(x) = (x - x^*)^m g(x),$$

其中m是正整数，且$g(x^*) \neq 0$．当$m = 1$，x^*为单根，当$m \geq 2$，x^*为m重根．

无法解析求解

1. $f(x)$ 为超越函数，例$f(x) = e^x + \dfrac{0.435}{x}(e^x - 1) - 1.564$；
2. $f(x)$ 为次数大于等于5的代数方程；

非线性方程求根步骤

1. 根的搜索：分析方程存在多少个实根，找出每个根所在的区间.
   1) 图解法. 即通过画函数的图形，了解根的分布情况.
   2) 近似方程法.
   3) 解析法. 用微积分基本理论来分析.
   4) 定步长搜索法. 利用连续函数的介值定理.
2. 根的精确化，求满足给定精度的根的近似值. 产生近似值序列$\{x_n\}$

停机准则：

1. $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$;
2. $\dfrac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n|} < \varepsilon, x_n \neq 0$;
3. $|f(x_n)| < \varepsilon$.

可能出现的困难：

- 1,2，可能会出现$|x_n - x_{n-1}| \to 0$，但是x_n不收敛，例如$x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$;
- 3，$f(x_n)$与0很接近，但是x_n与x^*相差较大，例如$f(x) = (x-1)^{10}, x^* = 1, x_n = 1 + \frac{1}{n}$，只要$n > 1$就有$f(x_n) < 10^{-1}$，但是要使$|x_n - x^*| < 10^{-1}$，则必须$n > 1000$。

2.1 二分法

二分法思想：依据连续函数的零点存在定理，反复将区间分半，在足够小的区间内，方程有且仅有一根.

考虑方程$f(x)=0$, 设函数$f(x)\in C[a,b]$且$f(a)f(b)<0$.

记$a_0=a$, $b_0=b$. $x_0=\frac{1}{2}(a_0+b_0)$ 考虑区间$[a_0,x_0]$和$[x_0,b_0]$.

1. 若$f(x_0)=0$, 则x_0就是根，计算结束. 否则
2. 若$f(x_0)\neq 0$, 则$f(a_0)f(x_0)<0$和$f(x_0)f(b_0)<0$有且只有一个成立.
   1) 若$f(a_0)f(x_0)<0$，令$a_1=a_0$, $b_1=x_0$; 否则
   2) 若$f(x_0)f(b_0)<0$，令$a_1=x_0$, $b_1=b_0$.
3. 考虑区间$[a_1,b_1]$, 有$f(a_1)f(b_1)<0$, 重复上述步骤.
4. 按此方法可以得到一系列区间

$$[a_0,b_0]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_k,b_k]\supset\cdots,$$

而且有

1) $b_k-a_k=\frac{1}{2}(b_{k-1}-a_{k-1})=\frac{1}{2^k}(b-a)$;
2) $f(a_k)f(b_k)<0$

当$b_k - a_k$充分小时，其中点$x_k = \frac{1}{2}(b_k + a_k)$可作为$f(x) = 0$在$[a, b]$内根的近似值. 且有估计式

$$|x_* - x_k| \le \frac{1}{2}(b_k - a_k) \le \frac{1}{2^{k+1}}(b - a). \tag{2}$$

对于给定精度ε, 若取k使得

$$\frac{1}{2^{k+1}}(b - a) \le \varepsilon,$$

则有

$$|x^* - x_k| \le \varepsilon.$$

例2.1

用二分法求方程$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$在区间$[1, 1.5]$上的根.

1. 要得到具有3位有效数的近似根，需作多少次二分;
2. 用二分法求具有3位有效数的近似根.

解: $f(1) = -5,\ f(1.5) = 2.375,$
当$x \in [1, 1.5]$时，$f'(x) = 3x^2 + 8x > 0$, 方程$f(x) = 0$ 在$[1, 1.5]$有唯一实根.

1. $a=1,\ b=1.5,\ \varepsilon=\frac{1}{2}\times 10^{-2}$, 由

$$\frac{b-a}{2^{k+1}}\le\varepsilon,$$

得

$$k\ge\frac{2}{\lg 2}-1=5.64,$$

故可以取$k=6$, 即将区间二分6次.

2. 计算结果见表(1) 如下，所以得具有3位有效数字得近似值$x_6=1.36328125$.

Table: 二分法算例

k	a_k ($f(a_k)$的符号)	x_k ($f(x_k)$ 的符号)	b_k ($f(b_k)$的符号)
0	1(-)	1.25(-)	1.5(+)
1	1.25(-)	1.375(+)	1.5(+)
2	1.25(-)	1.3125(-)	1.375(+)
3	1.3125(-)	1.34375(-)	1.375(+)
4	1.34375(-)	1.359375(-)	1.375(+)
5	1.359375(-)	1.3671875(+)	1.375(+)
6	1.359375(-)	1.36328125(-)	1.3671875(+)

Remark:

1. 当对f与x^*无附加认知时，第二种停机准则最好，它最接近相对误差；
2. 设置一个迭代次数的上界以避免程序死循环；
3. 用$sgn(f(a_n)) * sgn(f(b_n)) < 0$代替$f(a_n) * f(b_n) < 0$以避免数的溢出；

2.2 简单迭代法（不动点迭代法）

思想：通过递推产生一个序列，使其极限为方程的根.

设方程

$$f(x) = 0 \tag{3}$$

在$[a, b]$内有一个根x^*. 将方程改为等价形式

$$x = \varphi(x). \tag{4}$$

任取$x_0 \in [a, b]$，得到递推公式

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \cdots . \tag{5}$$

从而得到序列$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$. 如果当$k \to \infty$时，序列$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$有极限$\tilde{x}$，且$\varphi(x)$ 在$\tilde{x}$附近连续，则在(5)两边取极限得

$$\tilde{x} = \varphi(\tilde{x}),$$

故有$f(\tilde{x}) = 0$，即

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*.$$

(5)称为**迭代格式**，称$\varphi(x)$ 为**迭代函数**，$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$为**迭代序列**. 如果任取$x_0 \in [a,b]$迭代序列收敛，则称迭代格式(5)**收敛**. 称$e_k = x^* - x_k$为第k次**迭代误差**. 上述方法称为**迭代法**. 当$x_0 \neq x^*$时，如果迭代序列在$[a,b]$内无极限，则称迭代格式**发散**.

注1
当$x^* = \varphi(x^*)$, x^*称为不动点；上述方法称为**不动点迭代法**.

例2.2
求方程$x^3 - x - 1 = 0$在$x_0 = 1.5$附近的根.

方法1 将原方程写成等价的方程：$x = x^3 - 1$. 取迭代函数$\varphi_1(x) = x^3 - 1$, 构造迭代格式

$$x_{k+1} = x_k^3 - 1, \quad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{6}$$

取初值$x_0 = 1.5$, 计算结果：

k	0	1	2	3	$\cdots$
x_k	1.5	2.375	12.396	1903.779	$\cdots$

方法2 将原方程写成等价的方程：$x = \sqrt[3]{x+1}$. 取迭代函数$\varphi_2(x) = \sqrt[3]{x+1}$, 构造迭代格式

$$x_{k+1} = \sqrt[3]{x_k + 1}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

取初值$x_0 = 1.5$, 计算结果：

k	0	1	2	3	$\cdots$	7	8
x_k	1.5	1.35721	1.33086	1.32588	$\cdots$	1.32472	1.32472

迭代法的收敛性

定理2.1

设$\varphi(x)$在$[a,b]$内存在一阶连续导数，且满足：

1. 当$x \in [a,b]$时，$\varphi(x) \in [a,b]$;
2. 存在正常数$L<1$, 当$x \in [a,b]$时，$|\varphi'(x)| \le L < 1$.

则

(1) $x=\varphi(x)$在$[a,b]$上有唯一实根，记为x^*;

(2) 对任意初值$x_0 \in [a,b]$, 迭代格式(5)收敛，且$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$;

(3)

$$|x^* - x_k| \le \frac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}|, \quad k = 1,2,3\cdots; \tag{7}$$

$$|x^* - x_k| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|, \quad k = 1,2,3\cdots; \tag{8}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x^* - x_{k+1}}{x^* - x_k} = \varphi'(x^*). \tag{9}$$

定理2.2

设方程(4)在区间$[a,b]$上有根，且当$x\in[a,b]$时$|\varphi'(x)|\geq 1$,则对任意$x_0\in[a,b]$，且$x_0\neq x^*$,迭代格式(5)发散.

例2.3

求方程$f(x)=x^3+4x^2-10=0$在$[1,1.5]$内的根x^*.

1. 试分析如下3个迭代格式的收敛性.

$$x_{k+1}=10+x_k-4x_k^2-x_k^3, \tag{10}$$

$$x_{k+1}=\frac{1}{2}\sqrt{10-x_k^3}, \tag{11}$$

$$x_{k+1}=\sqrt{\frac{10}{x_k+4}}. \tag{12}$$

2. 选择一种收敛较快的迭代格式，求出x^*, 精确至4位有效数.

解:

1) 迭代函数

$$\varphi(x) = 10 + x - 4x^2 - x^3, \tag{13}$$
$$\varphi'(x) = 1 - 8x - 3x^2. \tag{14}$$

当$x \in [1, 1.5]$时$|\varphi'(x)| \geq 10 > 1$, 所以迭代发散.

2) 迭代函数为$\varphi(x) = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$, 当$x \in [1, 1.5]$时

$$\varphi'(x) = -\frac{3}{4}\frac{x^2}{\sqrt{10 - x^3}}, \quad |\varphi'(x)| = \left|\frac{3}{4}\frac{x^2}{\sqrt{10 - x^3}}\right| \nearrow, \quad \Longrightarrow$$
$$|\varphi'(x)| \leq |\varphi'(1.5)| = 0.6556 < 1.$$

当$x \in [1, 1.5]$时

$$1 < \varphi(1.5) \leq \varphi(x) \leq \varphi(1) = 1.5,$$

因此迭代收敛.

3) 同2)分析相同。$|\varphi'(x)| \leq |\varphi'(1)| = \frac{\sqrt{2}}{10}$。

例2.4

给定方程$x^2 + \ln x - 2 = 0$.

1. 分析该方程存在几个实根.
2. 构造一个迭代格式, 说明收敛性, 并用迭代求方程的根,精确至4位有效数.

解:

1. 记$f(x) = x^2 + \ln x - 2$.
   $f(1) = 1 - 2 < 0, f(2) = 4 + \ln 2 - 2 > 0,\ f'(x) = 2x + \dfrac{1}{x} > 0,$
   所以方程$f(x) = 0$有唯一实根$x^* \in (1, 2)$.
2. 构造迭代格式:

$$x_{k+1} = \sqrt{2 - \ln x_k}, \quad k = 0, 1 \cdots ,$$
$$x_0 = 1.3.$$

   分析: 迭代函数$\varphi(x) = \sqrt{2 - \ln x}$.
   1) $\forall x \in [1, 2],\ \varphi'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{2-\ln x}}$,
   $|\varphi'(x)| = \dfrac{1}{2x\sqrt{2 - \ln x}} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2 - \ln 2}} < 1.$
   2) 当$x \in [1, 2]$时,
   $1 < \sqrt{2 - \ln 2} \leq \varphi(2) \leq \varphi(x) \leq \varphi(1) \leq \sqrt{2} < 2.$

   由定理2.1, 迭代收敛.

计算得$x_1 = 1.318194,\ x_2 = 1.312911,\ x_3 = 1.314440,$
$x_4 = 1.313997,\ |x_4 - x_3| < \dfrac{1}{2} \times 10^{-3},\ x^* \approx 1.313997.$

注2

定理2.1的条件一般不太容易验证，而且第二个条件很难在很大的范围内成立。

定义2.1

对于方程$x=\varphi(x)$，若在x^*的某个邻域$S=\{x||x-x^*|\le\delta\}$内，对任意初值$x_0\in S$ 迭代格式$x_{k+1}=\varphi(x_k)$都收敛，则称迭代法在x^*的附近局部收敛.

定理2.3

设方程$x=\varphi(x)$有根x^*，且在x^*的某个邻域$S=\{x||x-x^*|\le\delta\}$内$\varphi(x)$ 一阶连续可导，则

1. 当$|\varphi'(x^*)|<1$时，迭代格式局部收敛；
2. 当$|\varphi'(x^*)|>1$时，迭代格式发散.

收敛速度

定义2.2

设序列$\{x_k\}$收敛于x^*，并记$e_k = x^* - x_k$. 如果存在常数$p \geq 1$及非零常数C，使得

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = C$$

则称序列$\{x_k\}$是p阶收敛的.

p的大小反映了序列$\{x_k\}$的收敛速度，p越大，收敛越快.

当$p = 1$且$0 < |C| < 1$时，称为线性收敛；

当$p > 1$称超线性收敛，特别当$p = 2$时，称平方收敛.

如果迭代$x_{k+1} = \varphi(x_k), k = 0, 1, \cdots$ 产生的迭代序列$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 是p阶收敛的，则称该迭代是p 阶收敛的.

收敛速度比较

例2.5

设两个迭代格式分别是线性收敛和平方收敛：（1）$\dfrac{e_{k+1}}{e_k}=\dfrac{1}{2}$；（2）$\dfrac{\tilde{e}_{k+1}}{\tilde{e}_k^2}=\dfrac{1}{2}$。其中$e_0=\tilde{e}_0=1$。如果取精度$\varepsilon=10^{-16}$，试估计这两个迭代格式所需要的迭代次数。

解：

1. $\dfrac{e_{k+1}}{e_k}=\dfrac{1}{2}(k=0,1,2,\cdots),e_0=1,\rightarrow e_k=\dfrac{e_{k-1}}{2}=\cdots=\dfrac{e_0}{2^k}=\dfrac{1}{2^k}$，要使得$|e_k|\leq 10^{-16}$，只要$k\geq 53.15.$
2. $\dfrac{\tilde{e}_{k+1}}{\tilde{e}_k^2}=\dfrac{1}{2}(k=0,1,2,\cdots),\tilde{e}_0=1,$

$$\tilde{e}_k=\frac{\tilde{e}_{k-1}^2}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\tilde{e}_{k-2}^2}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^{1+2}(\tilde{e}_{k-1})^{2^2}=\cdots=$$

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1+2+\cdots+2^{k-1}}\tilde{e}_0^{2^k}$，同样的误差限，只需$k\geq 5.76.$

定理2.4
若$\varphi(x)$在x^*附近的某个邻域内有$p(\geq 1)$阶连续导数，且

$$\varphi^{(k)}(x^*) = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, p-1, \tag{15}$$
$$\varphi^{(p)}(x^*) \neq 0, \tag{16}$$

则迭代格式在x^*附近是p阶局部收敛的，且有

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x^* - x_{k+1}}{(x^* - x_k)^p} = (-1)^{p-1} \frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!}. \tag{17}$$

如果$p = 1$，要求$|\varphi'(x^*)| < 1$.

Aitken加速法

假设迭代格式$x_{k+1} = \varphi(x_k)$是收敛的，则有

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1} - x_k}{x_k - x^*} = \varphi'(x^*),$$

则，当k充分大时，有

$$\frac{x_{k+2} - x^*}{x_{k+1} - x^*} \approx \frac{x_{k+1} - x^*}{x_k - x^*},$$

解出得

$$x^* \approx \frac{x_k x_{k+2} - x_{k+1}^2}{x_k - 2x_{k+1} + x_{k+2}}.$$

定理2.5

设方程$x = \varphi(x)$有根x^*，且在x^*附近$\varphi(x)$有2阶连续导数，如果迭代格式$x_{k+1} = \varphi(x_k)$线性收敛，则迭代$x_{k+1} = \Phi(x_k)$平方收敛，其中

$$\Phi(x) = \frac{x\varphi(\varphi(x)) - \varphi^2(x)}{x - 2\varphi(x) + \varphi(\varphi(x))}. \tag{18}$$

注3

如果格式$x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 是$p(\geq 2)$阶收敛的，而且在x^*附近$\varphi(x)$有p阶连续导数，则上述加速迭代格式可以达到$2p-1$阶收敛性。

Aitken$\triangle^2$方法

$$
\begin{aligned}
x^* &\approx \frac{x_n x_{n+2}-2x_n x_{n+1}+x_n^2-x_{n+1}^2+2x_n x_{n+1}-x_n^2}{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n} \\
&\approx x_n-\frac{(x_{n+1}-x_n)^2}{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n}, \\
\hat{x}_n &= x_n-\frac{(x_{n+1}-x_n)^2}{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n}
\end{aligned}
$$

定义$\triangle x_n=x_{n+1}-x_n$，则Aitken加速公式可以写成

$$
\hat{x}_n=x_n-\frac{(\triangle x_n)^2}{\triangle^2 x_n}, n\geq 0 \tag{19}
$$

2.3 Newton 迭代法

给定方程

$$f(x) = 0 \tag{20}$$

若已知x_k, 将$f(x)$在x_k处做Taylor展开,得到

$$f(x) \approx f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k).$$

于是得到(20)的近似方程

$$f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) = 0.$$

其根为$x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$可作为方程(20)的近似根. 因此得下面的Newton迭代:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \cdots . \tag{21}$$

Newton法的几何意义：以直线替代曲线。

例2.6

给定方程$e^x + x - 3 = 0$

1. 判别该方程实根个数.
2. 用*Newton*迭代法求方程的根, 要求精确到*3*位有效数.

1. 记$f(x) = e^x + x - 3$.
   $f(0) = 1 + 0 - 2 < 0, f(1) = e + 1 - 3 > 0,$
   $f'(x) = e^x + 1 > 0$, 所以方程$f(x) = 0$有唯一实根$x^* \in (0, 1)$.
2. 迭代格式:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{e^{x_k} + x_k - 3}{e^{x_k} + 1}, \quad k = 0, 1 \cdots ,$$
$$x_0 = 0.5.$$

计算得$x_1 = 0.8214$, $x_2 = 0.7924$, $x_3 = 0.7921$,
$|x_3 - x_2| < \frac{1}{2} \times 10^{-3}$, $x^* \approx 0.7921$.

Newton迭代的收敛性

定理2.6

设$f \in C^2[a,b]$，如果$x^* \in (a,b)$满足$f(x^*)=0, f'(x^*) \neq 0$，则存在一个$\delta > 0$使得对于任意初始值$x_0 \in [x^*-\delta, x^*+\delta]$，*Newton*法产生的数列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$都二阶收敛到$x^*$

例2.7

*Newton*法求方程

$$f(x) = (x - 1.56)^3(x - 4.56) = 0$$

的根。

解 $x_1^* = 4.56$为$f(x) = 0$的单根，$x_2^* = 1.56$为$f(x) = 0$的3重根。分别取$x_0 = 5.000000$和$x_0 = 2.000000$，应用Newton迭代法计算列表，看出求x_1^*收敛很快，而求x_2^*收敛很慢。

Table: Newton迭代法求单根算例

k	x_k
0	5.000000
1	4.682017
2	4.572805
3	4.560161
4	4.56000

Table: Newton迭代法3重单根算例

k	x_k	k	x_k
0	2.000000	10	1.567042
1	1.844420	11	1.564692
2	1.246184	12	1.563128
3	1.682723	13	1.562085
4	4.56000	14	1.561390
5	1.641225	15	1.560926
6	1.613896	16	1.560617
7	1.595821	17	1.560412
8	1.575867	18	1.560274
9	1.570569	19	1.560183

割线法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1}), \qquad (22)$$

例2.8

分别用Newton法和割线法求解$x = \cos x$的解。

步数	割线法	Newton法
0	0.5	0.7853981635
1	0.7853981635	0.7395361337
2	0.7363841388	0.7390851781
3	0.7390581392	0.7390851332
4	0.7390851493	0.7390851332
5	0.7390851332	

试位法

和割线法同样的方式产生近似解，但是增加一个检验以保证相邻的迭代之间包含根。

1. 选择初始近似值x_0, x_1满足$f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$;
2. 由割线法产生近似值$x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)}(x_1 - x_0)$;
3. 如果$sgn(f(x_2)) \cdot sgn(f(x_1)) < 0$则$x^*$介于$x_1, x_2$之间，$x_3$取$(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ 连线与x 轴的交点。$x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f(x_2) - f(x_1)}(x_2 - x_1)$
4. 否则，x_3取$(x_0, f(x_0)), (x_2, f(x_2))$连线与$x$轴的交点，然后交换$x_0, x_1$的下标。

重根的情形

设x^*是方程$f(x)=0$的m重根,$f(x^*)=f'(x^*)=\cdots=f^{(m-1)}(x^*)=0, f^{(m)}(x^*)=0$

1. 若m已知，迭代修正为

$$x_{k+1}=x_k-m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\quad k=0,1,\cdots.$$

2. 若m未知，记$u(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$，此时x^*是方程$u(x)=0$的单根，迭代修正为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{u(x_k)}{u'(x_k)},\quad k=0,1,\cdots.$$

取$x_0=2$，用修正的Newton法求例(2.7)

$$x_{k+1}=x_k-3\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Table: 修正Newton法求重根

k	0	1	2	3
x_k	2.000000	1.533260	1.5559921	1.560000

Newton迭代的大范围收敛性

定理2.7

设函数$f(x)$在区间$[a,b]$内2阶连续可导，且满足：

1. $f(a)f(b)<0$;
2. 当$x\in[a,b]$时，$f'(x)\neq 0$;
3. 当$x\in(a,b)$时，$f''(x)$保号;
4. $a-\dfrac{f(a)}{f'(a)}\leq b,\quad b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}\geq a.$

则对$\forall x_0\in[a,b]$，Newton迭代格式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\quad k=0,1,\cdots.$$

收敛到方程$f(x)=0$在$[a,b]$内的唯一实根.

例2.9

考虑方程

$$\sin x = \frac{x}{2}$$

(1) 讨论方程在区间$[\frac{\pi}{2}, \pi]$上根的存在唯一性以及采用*Newton*迭代法的收敛性；

(2) 用*Newton*法求根，精确至5位有效数字。

解 记

$$f(x) = \sin x - \frac{x}{2}$$

首先检验大范围收敛定理的4个条件，知该方程在区间$[\frac{\pi}{2}, \pi]$内有唯一根x^*，选取任意初值都收敛。迭代公式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{\sin x_k - \frac{x_k}{2}}{\cos x_k - \frac{1}{2}}$$

取$x_0 = \pi$，得序列如下表

Table: Newton法大范围收敛性算例

k	0	1	2	3	4	5
x_k	π	2.09440	1.91322	1.89567	1.89549	1.89549

上机作业(2023.02.23)

每个方程有一个实根，分别用二分、牛顿法和割线法求近似根，精确到小数点后8位，然后对牛顿法采用Aitken加速。

1. $\sin x = 6x + 5$;
2. $\ln x + x^2 = 3$;