

# DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL DE HOGARES INTELIGENTES

Lazar Z. Velimirović, Aleksandar Janjić, and Jelena D. Velimirović.  
Traducción por: Guevara, Augusto y Perez Aballay, Luciana

Universidad Nacional de Cuyo, Mendoza, Argentina

**Abstract.** Este estudio examina el problema de toma de decisiones discreto y estocástico múltiple en sistemas de fabricación flexibles con múltiples formas de compensación entre criterios. De acuerdo con diversas formas de agregación de criterios, el enfoque sugerido se basa en la convolución numérica de funciones de distribución de probabilidad de criterios. Cada alternativa se evalúa utilizando el método de dominancia estocástica una vez que se ha construido la nueva distribución de probabilidad agregada para cada una. La nueva técnica permite la agregación compensatoria, que es más adecuada para criterios que se contradicen o para el comportamiento de los agregadores humanos. La utilidad de este enfoque se demuestra finalmente en una decisión sobre un proyecto de desarrollo de sistema de fabricación.

**Keywords:** Toma de decisiones · Dominancia estocástica · MAUT.

## 1 Introducción

El desafío de evaluar una amplia variedad de posibilidades alternativas en un entorno incierto y elegir una basada en un conjunto de criterios competitivos es algo que los tomadores de decisiones en la industria manufacturera encuentran comúnmente. Las decisiones sobre el compromiso de la dirección, la participación de las personas, el desarrollo de tecnología y las necesidades organizativas están convirtiéndose en preocupaciones esenciales para el éxito de la implementación de sistemas de fabricación flexibles (FMS) debido al desarrollo de sistemas de fabricación flexibles. La capacidad de un sistema para adaptarse a una variedad de situaciones potenciales está fuertemente relacionada con la idea de flexibilidad en un entorno impredecible. Según Buzcott y Shanthikumar [9], el problema de la incertidumbre se divide típicamente en dos categorías: la incertidumbre interna, que está relacionada con el proceso de estructuración del problema, análisis y selección del modelo estocástico apropiado, y la incertidumbre externa, que está relacionada con las características del entorno y los efectos de un curso de acción particular y puede estar más allá del control del tomador de decisiones. Ayuub [11] y Durbach y Stewart proporcionan una taxonomía de diversas formas de incertidumbre y métodos para resolverlos. La forma más frecuente de incertidumbre externa en los sistemas de fabricación flexibles (FMS) está asociada

con el carácter estocástico de los resultados de las acciones sugeridas, donde la distribución de probabilidad multivariante impulsa la realización conjunta de los resultados de rendimiento en todas las opciones y atributos. Las interrupciones para las cuales la flexibilidad es útil incluyen fallas en el equipo, cambios en la duración de las tareas, demoras en las colas, rechazos y retrabajos. El grado de demanda, la fijación de precios de los productos, la mezcla de productos y la disponibilidad de recursos pueden ser inciertos debido al comportamiento de la competencia, las preferencias de los clientes, los avances tecnológicos y otros factores.

El desafío de elegir alternativas asociadas con numerosas características o criterios se conoce como toma de decisiones estocásticas de múltiples criterios (SMCDM), y las implicaciones de las alternativas con respecto a los criterios toman la forma de variables aleatorias. Las técnicas de clasificación que utilizan el grado de preferencia distributiva en comparaciones de pares alternativos con respecto a cada criterio, el método de dominancia estocástica (SD), el Análisis de Envoltura de Datos (Data Envelopment Analysis) y el análisis de aceptabilidad estocástica multiobjetivo (SMAA) son los tres enfoques principales para resolver el problema de SMCDM.

La teoría de utilidad de múltiples atributos (MAUT), un marco sistemático creado para gestionar los intercambios entre muchos objetivos, se ha utilizado para resolver problemas de SMCDM desde los inicios de este campo. Los dos procesos de comparación y selección se utilizan típicamente en métodos de proceso estocástico y reglas SD. La selección consiste en clasificar las alternativas según las relaciones de SD determinadas utilizando la Teoría de Conjuntos Difusos o procedimientos interactivos. La comparación sirve para determinar si existe una relación de SD para la comparación de cualquier par de alternativas utilizando reglas SD. Tanto los valores de los criterios como los pesos de los criterios en SMAA o el análisis de toma de decisiones en grupo son inciertos. Se utilizan simulación de Monte Carlo o ciertos métodos extendidos de SMAA para crear resultados aleatorios de los valores de los criterios y los pesos de los criterios.

Enfoques previos ayudaron significativamente en el análisis de decisiones estocásticas de múltiples criterios, pero algunas preocupaciones, como el uso de funciones de utilidad cada vez más complicadas y la correlación de atributos, quedaron sin resolver. La novedosa técnica propuesta en este estudio se basa en la dominancia estocástica de las funciones de distribución de probabilidad agregadas de las opciones. La convolución numérica de las distribuciones de probabilidad marginales produce la distribución de probabilidad agregada. La implementación del enfoque se simplifica al evaluar la dominancia estocástica simplemente en funciones de probabilidad agregadas en lugar de evaluar las opciones de manera pairwise para cada criterio particular. También se añade a este estudio el uso de funciones de agregación de criterios arbitrarios (forma aditiva o multiplicativa, y agregación mediante el operador promedio ponderado ordenado de vector de evaluación). Por último, se tiene en cuenta la actitud de riesgo del tomador de decisiones mediante la aplicación de la regla adecuada de dominancia estocástica.

La estructura del ensayo es la siguiente. Se presenta la nueva metodología para SMCDM después de una breve introducción a las reglas de SD y la agregación de criterios, se describen cada uno de los pasos de la metodología, incluida la definición del tipo de agregación de criterios, la convolución numérica de las distribuciones de probabilidad de utilidad agregada y el uso de las reglas de SD para clasificar las alternativas. El proceso se demuestra a través de la selección del programa informático de FMS y, por último, se hacen recomendaciones para futuros estudios.

## 2 Reglas SD

En el resto del documento, consideramos un problema de decisión que consta de  $n$  alternativas denotadas por  $a_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  cada una evaluada en  $m$  criterios denotados por  $c_j$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Dejemos que  $e_{ij}$  sea la evaluación de  $a_i$  en términos del criterio  $c_j$ , de acuerdo con alguna medida de rendimiento adecuada. Nuestra preocupación se centra en situaciones de toma de decisiones en las que los valores de  $e_{ij}$  para cada  $i$  no son conocidos con certeza para todos los  $j$ , sino que siguen alguna función de distribución  $f(e_{ij})$ . Esta formulación se conoce como modelo AAE (Alternativas, Atributos/Criterios, Evaluadores).

### 2.1 SD para funciones de decisión de un solo criterio

Fundamentalmente, existen dos conjuntos de reglas de dominancia estocástica que corresponden a dos clases de funciones de utilidad [29]. El primer grupo está diseñado para funciones de utilidad cóncavas e incluye la dominancia estocástica de primer grado, la dominancia estocástica de segundo grado y la dominancia estocástica de tercer grado. Puedes utilizar estas reglas para representar preferencias adversas al riesgo. El segundo conjunto de reglas de dominancia estocástica está diseñado para funciones de utilidad convexas e incluye la dominancia estocástica de primer grado, la dominancia estocástica inversa de segundo grado, la dominancia estocástica inversa de tercer grado del primer tipo y la dominancia estocástica inversa de tercer grado del segundo tipo. Estas reglas son adecuadas para preferencias que buscan el riesgo y son equivalentes a la regla de maximización de utilidad anticipada.

– Definición 1:

Sean  $a$  y  $b$  ( $a < b$ ) dos números reales,  $X$  e  $Y$  dos variables aleatorias,  $F(x)$  y  $G(x)$  las funciones de distribución acumulativa de  $X$  e  $Y$ , respectivamente. Sea  $U_1$  el conjunto de todas las funciones de utilidad  $u$  para las cuales  $u' \geq 0$ ,  $U_2$  el conjunto de todas las funciones  $u$  para las cuales  $u' \geq 0$  y  $u'' \geq 0$ , y  $U_3$  el conjunto de todas las funciones  $u$  para las cuales  $u' \geq 0$ ,  $u'' \geq 0$  y  $u''' \geq 0$ .

Sean  $E_F$  y  $E_G$  las dos expectativas o medias, respectivamente. Sea  $SD_1$ ,  $SD_2$  y  $SD_3$  denotan la primera, segunda y tercera dominancia estocástica de grado, respectivamente. Las reglas de dominancia estocástica son las siguientes:

$F(x) SD_1 G(x)$  si y solo si:  
 $E_F(u(X)) \geq E_G(u(Y))$  para todo  $u \in U_1$  con estricta desigualdad para algunos  $u$ , o  
 $F(x) \leq G(x)$  para todo  $x \in [a, b]$  con estricta desigualdad para algunos  $x$ ;  
 $F(x) SD_2 G(x)$  si y solo si:  
 $E_F(u(X)) \geq E_G(u(Y))$  para todo  $u \in U_2$  con estricta desigualdad para algunos  $u$ , o  
 $\int_a^x F(t)dt \leq \int_a^x G(t)dt$  para todo  $x \in [a, b]$  con estricta desigualdad para algunos  $x$ ;  
 $F(x) SD_3 G(x)$  si y solo si:  
 $E_F(X) \geq E_G(Y)$  y  $E_F(u(X)) \geq E_G(u(Y))$  para todo  $u \in U_3$  con estricta desigualdad para algunos  $u$ , o  
 $\int_a^x \int_a^t F(z)dzdt \leq \int_a^x \int_a^t G(z)dzdt$  para todo  $x \in [a, b]$  con estricta desigualdad para algunos  $x$ ;

Un grado de dominancia estocástica (SDD) se define en Zhang et al. [36] como la medida en que una alternativa predomina sobre otra cuando se establece la relación de dominancia estocástica entre dos alternativas. Con este método, se utiliza la matriz SDD para determinar la clasificación de las alternativas en lugar de la relación de dominancia estocástica [37, 38].

– Definición 2:

Si  $F(x) SD_h G(x)$ , donde  $h \in \{1, 2, 3\}$ , entonces el grado de dominancia estocástica SDD de  $F(x) SD_h G(x)$  se da por:

$$(1) \quad \psi = \frac{-\int_{\Omega} [F(x) - G(x)] dx}{\int_{\Omega} G(x) dx}, \quad h \in \{1, 2, 3\}, \quad \Omega = \{x | x \in [a, b]\}$$

La premisa para calcular el SDD en un par de alternativas es que debe existir una relación de dominancia estocástica en ese par de alternativas. Considera dos alternativas  $A_F$  y  $A_G$  en el análisis de decisiones y evaluaciones de las dos alternativas como variables aleatorias con funciones de distribución acumulativa  $F(x)$  y  $G(x)$ , respectivamente. Si  $F(x) SD_h G(x)$ , donde  $h \in \{1, 2, 3\}$ , entonces el SDD de  $F(x) SD_h G(x)$  es  $\psi(F(x) SD_h G(x))$ . Cuanto mayor sea  $\psi$ , mayor será el grado de dominancia de  $A_F$  sobre  $A_G$ .

## 2.2 SD de funciones de utilidad multiatributo

Huang [39] demostró que cuatro clases de funciones de utilidad importantes  $U_i, i \in 1, 2, 3, 4$ , son idénticas a las siguientes clases:

$$U_i^* = u(x_1, x_2, \dots, x_n) = u^s(P(x_1, x_2, \dots, x_n)), u^s \in U_i \text{ and } P \in U_i \text{ } i = 1, 2, 3, 4 \quad (2)$$

donde  $u^s$  es una función de utilidad de un solo atributo y  $P = P\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  es una función multivariante, y  $U_i^* = U_i^*$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ .

La dominancia estocástica en cada criterio individual es un requisito previo para la dominancia estocástica multiatributo en funciones de utilidad aditivas. Basándose en la expansión de Edgeworth, Moskowitz et al. [40] crearon una forma de calcular la distribución de probabilidad de la utilidad agregada para una función de utilidad multiatributo aditiva. La dominancia estocástica se utiliza para clasificar las opciones una vez que se determina la distribución de utilidad agregada para cada opción. En Mateos et al., el principio de dominancia se aplica a intervalos de peso con distribuciones de probabilidad uniformes y normales [41, 42]. Para el problema de toma de decisiones multicriterio, se ha utilizado la técnica SDD, y se han calculado los SDD para comparaciones pairwise de alternativas para cada criterio utilizando la ponderación aditiva simple de criterios [38].

Los problemas de toma de decisiones estocásticas de múltiples criterios (SM-CDM) generalmente han implicado funciones de utilidad en su forma aditiva, con evaluaciones  $e_{ij}$  utilizadas como valores de utilidad. Utilizar una agregación aditiva cuando las preferencias realmente siguen un modelo multiplicativo a menudo solo tiene efectos mínimos en los resultados, como demuestra Stewart [43] utilizando una variedad de situaciones simuladas. Sin embargo, los parámetros estimados no son consistentes con el caso aditivo lineal y prefieren significativamente la forma funcional multiplicativa en muchos problemas de decisión prácticos, especialmente en los sectores de atención médica y seguridad. Los criterios en conflicto o el comportamiento de agregación humana son otro problema, ya que las personas a menudo intentan satisfacer parcialmente diferentes requisitos al mismo tiempo. Dos enfoques: la función de utilidad multiatributo multiplicativa y el promedio ponderado ordenado.

### 3 Agregación de criterios

La agregación conjuntiva, disyuntiva y compensatoria de criterios son las tres formas de agregación que se utilizan con mayor frecuencia en la toma de decisiones. Mientras que la agregación disyuntiva asume una compensación igual entre los criterios, la agregación conjuntiva de criterios requiere el cumplimiento simultáneo de todos los criterios de decisión. Según la explicación del capítulo anterior, la agregación compensatoria es más apropiada para el comportamiento de agregación humano. La función de utilidad multiatributo multiplicativa y los

operadores de promedio ponderado ordenado (OWA) surgieron como los dos operadores de agregación compensatoria más efectivos en aplicaciones de ingeniería del mundo real.

### 3.1 Función de utilidad multiatributo multiplicativa

El objetivo de emplear MAUT (Teoría de Utilidad Multiatributo) era crear una función en la que una alternativa se elija sobre otra solo cuando la utilidad predicha de la primera sea mayor. Para cada criterio  $c_j$ , esto implica prácticamente la creación de una función de utilidad marginal  $u_j$  que cumple con los axiomas de Von Neumann-Morgenstern, así como un método para combinar las funciones de utilidad marginal en una función de utilidad global  $U$  que aún cumple con la hipótesis de utilidad anticipada. Se demuestra que una comparación multiatributo de dos acciones se puede descomponer en comparaciones de un solo atributo si se verifica la condición de independencia aditiva. La función de utilidad multiatributo tiene la siguiente estructura si existe independencia mutua de utilidad [44]:

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\prod_i (1 + K * k_i * u_i(x_i) - 1)}{K} \quad (3)$$

Aquí

$u_i(x_i)$  = el valor de utilidad de un solo atributo para el atributo  $i$  con valor  $x_i$  (varía de 0 a 1),  $k_i$  = un parámetro de compensación para el componente  $i$ , para todos los  $i$ , y

$K$  = una constante de normalización que garantiza que los valores de utilidad estén escalados en el espacio de rango del componente entre 0 y 1. Un atributo  $X_1$  es independiente de utilidad de  $X_2$  si la preferencia por las loterías (es decir, los resultados de las variables aleatorias) de  $X_1$  dado  $X_2 = x_2$  no depende del nivel de  $x_2$ . Si se cumple una condición de preferencia más restrictiva, la independencia aditiva, entonces es la distribución marginal, no la conjunta, de cada medida de rendimiento lo que determina la preferencia. Si existe independencia aditiva, la función de utilidad multiatributo es aditiva (9.4), donde  $w_i$  representa el factor de ponderación:

$$U(x) = \sum_{i=1}^n w_i * u_i(x_i), \sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (4)$$

La función de utilidad total puede representar tres tipos distintos de interacciones entre criterios específicos, ya que el valor de  $K$  puede ser negativo, cero o positivo. En el caso compensatorio, el cumplimiento de una condición puede compensar el incumplimiento de otro criterio. Un buen rendimiento en un criterio es menos significativo en el caso complementario que un rendimiento equilibrado en todos los criterios. El rendimiento de un criterio no afecta el valor de los otros criterios en el escenario aditivo. Si:

$$\sum_{i=1}^n k_i > 1, \text{ entonces } 1 < k < 0 \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n k_i = 1, \text{ entonces } k = 0 \quad (6)$$

y se cumple el modelo aditivo:

$$\sum_{i=1}^n k_i < 1, \text{ entonces } k > 0 \quad (7)$$

Un método para determinar la función es medir cada  $u(x)$ , determinar los valores de  $k_j$  y encontrar el valor de  $K$  resolviendo iterativamente:

$$1+K=\prod_i^n (1 + K * k_i) \quad (8)$$

En cuanto a la postura de riesgo multivariante que representa cada una de las tres situaciones, pueden distinguirse entre sí. El caso 5 representa la aversión al riesgo multivariante, el caso 6 la neutralidad al riesgo y el caso 7 el comportamiento de búsqueda de riesgo. La actitud de riesgo del tomador de decisiones se incluye en enfoques anteriores solo a nivel individual de comparación de criterios, pero con la función multiplicativa, esta actitud se puede incluir directamente en el modelo.

### 3.2 OWA

Yager [45] presentó por primera vez los Operadores de Promedio Ponderado Ordenado (OWA) como un método para agregar puntajes asociados con la satisfacción de múltiples criterios, que integra el comportamiento conjuntivo y disyuntivo en un solo operador:

$$\text{OWA}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_i^n (w_j * x_{\sigma(j)}) \quad (9)$$

donde  $\sigma$  es una permutación que ordena los elementos:

$$x_{\sigma(1)} \leq x_{\sigma(2)} \leq \dots \leq x_{\sigma(n)} \quad (10)$$

Los pesos son todos no negativos ( $w_i \geq 0$ ) y su suma es igual a uno:

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (11)$$

La función "orness" (grado de "o") ha identificado un parámetro crucial para los operadores OWA; también se puede considerar como una medida de aceptabilidad del riesgo. Yager especificó la siguiente función "orness" para el vector de pesos  $W$ :

$$\text{orness}(W) = 1 \frac{1}{n-1 \sum_{i=1}^n (n-i)w_i} \quad (12)$$



Se puede demostrar que  $0 \leq orness \leq 1$ . Un valor pequeño de "orness" demuestra aversión al riesgo, mientras que un valor grande de "orness" demuestra aceptación del riesgo. Debido a su adaptabilidad, este operador ha demostrado ser muy útil. Muchos de los operadores conocidos, como el máximo, el mínimo, las estadísticas de orden  $k$ , la mediana y la media aritmética, están incluidos en la familia parametrizada de operadores de agregación ofrecidos por los operadores OWA.

Para obtener estos operadores precisos, solo necesitamos elegir ciertos pesos. Los operadores OWA son conmutativos, monótonos, idempotentes, estables para transformaciones lineales positivas y tienen un comportamiento compensatorio. Esta última característica expresa el hecho de que un operador OWA siempre realiza la agregación entre el máximo y el mínimo. Este operador se puede pensar como un enfoque parametrizado para pasar del mínimo al máximo porque generaliza tanto el mínimo como el máximo.

La segunda etapa es la agregación de las distribuciones de probabilidad marginales después de que se haya elegido el modelo adecuado para la representación de la función de utilidad. La dificultad de esta agregación se puede expresar de la siguiente manera: ¿cuál es la distribución de probabilidad de la combinación de variables aleatorias proporcionada por las expresiones (9.3) o (9.9) si conocemos las distribuciones de probabilidad de las evaluaciones individuales, es decir, las variables aleatorias  $e_i$ ? La siguiente parte proporciona el algoritmo eficaz para la convolución numérica de diversas distribuciones de probabilidad.

#### 4 SMCD A con agregación compensatoria

El objetivo principal de la técnica propuesta es evaluar múltiples alternativas simplemente fusionando las funciones de utilidad individuales de cada uno de los componentes del sistema utilizando una función de agregación práctica. Esta comparación es posible debido a la equivalencia de reglas para la función de utilidad multivariada  $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  y la función de utilidad univariada definida en el espacio de resultados multivariados  $u = u^s(P(x_1, x_2, \dots, x_n))$ .

La convolución de diversas distribuciones de probabilidad para permitir la comparación de solo una función de distribución por alternativa se presenta para hacer que la clasificación de alternativas sea más útil. La clasificación de alternativas se lleva a cabo utilizando las reglas de dominancia estocástica una vez que se ha construido la nueva distribución de probabilidad agregada para cada alternativa. El concepto de convolución puede manejar simultáneamente varios tipos de incertidumbre, como resultados y variables de ponderación. El seguimiento describirá los requisitos para permitir tal agregación.

El proceso de clasificación de alternativas en tres etapas se basa en el principio de dominancia estocástica, la convolución numérica de funciones de distribución individuales y la función de utilidad multiplicativa como una combinación de criterios propuestos y la actitud del tomador de decisiones hacia el riesgo. La siguiente sección profundizará más en cada etapa.

#### 4.1 Agregación de funciones de distribución de utilidades

La convolución se puede utilizar para determinar la distribución de probabilidad de la combinación de variables aleatorias dada por la Ecuación (9.3) para las cuatro operaciones aritméticas fundamentales en variables aleatorias. El procedimiento en términos de distribuciones de probabilidad que corresponden a la adición de variables aleatorias independientes y, por extensión, a la formación de combinaciones lineales de variables aleatorias, se conoce como convolución de distribuciones de probabilidad en teoría de probabilidad y estadísticas. Se presenta la convolución de la operación fundamental de funciones para dos funciones,  $fx$  y  $fy$  [47]:

$$(13) \quad Z=X+Y: f_Z = \int_{-\infty}^{\infty} fx(z-x) * fy(x) du$$

$$(14) \quad Z=X-Y: f_Z = \int_{-\infty}^{\infty} fx(z+x) * fy(x) du$$

$$(15) \quad Z=X*Y: f_Z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} fx(z/x) * fy(x) du$$

$$(16) \quad Z=X/Y: f_Z = \int_{-\infty}^{\infty} |x| fx(zx) * fy(x) du$$

Laplace, Mellin, Fourier y otras técnicas de transformación se utilizan principalmente en la ejecución de esta conclusión. La transformada inversa de Fourier u otra expansión asintótica se puede utilizar para producir la convolución de  $n$  distribuciones [40]. Sin embargo, para valores típicos de  $x$  e  $y$ , estas conversiones no

son simples [48]. El concepto anterior de la convolución de funciones continuas es similar a la definición de la convolución de vectores.

Supongamos que  $fx$  y  $fy$  sean las funciones de distribución de dos variables aleatorias independientes con valores enteros,  $x$  e  $y$ . En consecuencia, la función de distribución  $fz$  proporcionada por la Ecuación (9.17) es la convolución de  $fx$  y  $fy$ :

$$fz(j) = \sum_k fx(k) * fy(j - k) \quad (17)$$

para  $j = -\infty, \dots, +\infty$ . La función  $fz(j)$  es la función de distribución de la variable aleatoria  $Z = X + Y$ .

Un enfoque eficaz para calcular las distribuciones de las sumas de variables aleatorias discretas se publicó en Evans y Leemis [49]. Las convoluciones regulares o algún otro tipo de transformación (Fourier discreta, Fourier rápida o expansión de Edgeworth) tienen una relación específica con la suma de distribuciones individuales, lo cual es la principal limitación. Otros tipos de convolución son necesarios para la versión multiplicativa de la función de utilidad, más genérica. El enfoque propuesto utiliza la convolución discreta numérica de vectores para resolver el problema, permitiendo formas de función de utilidad más complejas y calculando directamente la función de distribución acumulativa que se utilizará en la derivación de la matriz de dominancia estocástica.

El método más sencillo utilizado para calcular la PDF (función de densidad de probabilidad) de la convolución de la suma de dos variables aleatorias discretas independientes es el "método de fuerza bruta". Supongamos que  $X$  tiene valores  $x_1, x_2, \dots, x_n$  e  $Y$  tiene valores  $y_1, y_2, \dots, y_m$ . El método calcula todas las posibles sumas entre los valores de  $X$  y los valores de  $Y$ , por ejemplo,  $x_1 + y_1, x_1 + y_2, \dots, x_1 + y_m, x_2 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_m$ . Las sumas se colocan en el arreglo unidimensional  $Z$  de longitud  $nm$ . Las probabilidades correspondientes para cada una de estas sumas,  $fx(x_1) * fy(y_1), fx(x_1) * fy(y_2), \dots, fx(x_n) * fy(y_m)$ , se almacenan en un arreglo unidimensional  $P$  de longitud  $nm$ . La probabilidad en la posición  $P_i$  corresponde a la suma en la posición  $Z_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, nm$ .

Al reducir el tamaño de los arreglos  $P$  y  $Z$  al número de grados de evaluación, el proceso computacional en el enfoque propuesto se acelera y se extiende a otros tipos de funciones de agregación. La dimensión del arreglo de salida se reduce a  $m$  en lugar de  $m^n$  para  $n$  criterios y  $m$  grados de evaluación.

#### 4.2 Algoritmo de convolución discreta

Input:  $F(x_1, \dots, x_n)$ -función de utilidad multiatributo;  
 $m$ -número de grados de evaluación;  
 $p(x_i = j)$ -probabilidad de que la variable  $i$  tome el valor  $j$ ,  $j = (1, m)$ .

- For  $i = 1$  to  $m$
- For  $j = 1$  to  $m$
- ...
- For  $n = 1$  to  $m$
- Calculate  $F(x_1 = i, x_2 = j, \dots, x_n = n)$ .
- $z = \text{integer}(F)$
- $p(z) = p(z) + [p(x_1) * p(x_2) * \dots * p(x_n)]$
- Output (Z)

Como ejemplo, supongamos que siete expertos clasifican alternativas en función de un conjunto de tres criterios ( $C_1, C_2$  y  $C_3$ ) en una escala del 1 al 10, donde 10 es el mejor y 1 es el peor. Las clasificaciones de la  $i$ -ésima alternativa se describen entonces como una distribución discreta de probabilidad, como se muestra en la Tabla 9.1.

**Table 1.** Distribución de la evaluación de tres criterios.

Scores	$C_1$	$C_2$	$C_3$
1	0	$\frac{2}{7}$	0
2	0	0	$\frac{1}{7}$
3	$\frac{1}{7}$	0	0
4	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$
5	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	0
6	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$
7	0	0	0
8	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$
9	0	0	0
10	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{1}{7}$

La representación gráfica de las funciones de distribución acumulativa adecuadas se muestra en la Figura 9.1. La Tabla 9.2 muestra los resultados de cuatro funciones de agregación alternativas para las tres distribuciones de probabilidad discreta de la Tabla 9.1. "i" representa la combinación actual de las evaluaciones  $e_1, e_2$  y  $e_3$  (de un total de 103 posibilidades), y "P" es la probabilidad de que ocurra esta combinación. Mientras que " $U_3$ " representa una agregación compensatoria con el operador OWA, las funciones " $U_1$ " y " $U_2$ " reflejan un modelo aditivo básico (9.18) con diferentes pesos, respectivamente (9.19). El modelo multiplicativo está representado por la última función " $U_4$ " (9.20). Estas fórmulas escalan los valores de evaluación " $e_i$ " al intervalo (0–1) antes de volver a escalar la función de agregación al intervalo de calificación (1–10).

La Tabla 9.2 muestra los factores de ponderación para todos los casos, las distribuciones de probabilidad para las evaluaciones y los valores derivados para las funciones de agregación.

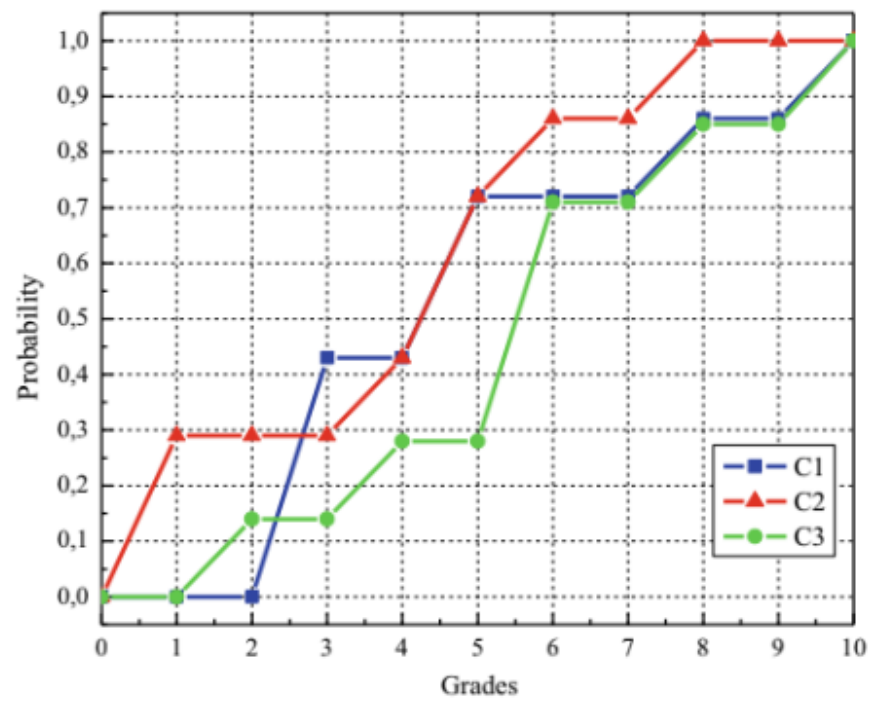


Fig. 1. Funciones de distribución acumulativa de las evaluaciones de tres criterios

$$U = w_1 e_1 + w_2 e_2 + w_3 e_3 \quad (18)$$

$$U = w_1 e_\sigma(1) + w_2 e_\sigma(2) + w_3 e_\sigma(3) \quad (19)$$

$$U = \frac{((1 + K k_1 e_1)(1 + K k_2 e_2)(1 + K k_3 e_3) - 1)}{K} \quad (20)$$

$i$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$P$	$U_1$	$U_2$	$U_3$	$U_4$
					$w_1 = 0.5$ $w_2 = 0.3$ $w_3 = 0.2$	$w_1 = 0.33$ $w_2 = 0.33$ $w_3 = 0.33$	$w_1 = 0.2$ $w_2 = 0.3$ $w_3 = 0.5$	$k_1 = 0.2$ $k_2 = 0.3$ $k_3 = 0.2$ $K = 0.309$
1	1	1	1	0	1	1	1	1
2	1	1	2	0	1.2	1.32	1.5	1.2
3	1	1	3	0	1.4	1.65	2	1.39
...								
302	3	1	2	0.017	2.2	1.98	2.3	1.59
...								
308	3	1	8	0.017	3.4	4	5.1	2.8
...								
878	8	8	8	0.003	8	8	8	6.18
...								
1000	10	10	10	0	10	10	10	10

**Fig. 2.** Tabla 9.2

La función de distribución acumulativa de la variable aleatoria agregada  $U$  se da por (9.21):

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{u \leq x} P(X = u) = \sum_{u \leq x} f_X(u) \quad (21)$$

La Figura 9.2 muestra las funciones de distribución de probabilidad y sus correspondientes distribuciones acumulativas, que se han condensado en solo 10 grados.

Al analizar las distribuciones acumulativas agregadas de la Figura 9.2, es evidente que la función de agregación OWA ( $U_3$ ) domina a las otras alternativas, ya que la "orness" (9.12) tiene un valor alto de 1.3. El principio de dominancia estocástica ahora hace posible comparar diversas distribuciones acumulativas que corresponden a funciones de utilidad agregada. El proceso de toma de decisiones consta de cuatro fases, que se muestran esquemáticamente en la Figura 9.3.

La creación de una función de agregación basada en los criterios recomendados y la tolerancia al riesgo del DM es la etapa inicial. En la segunda etapa, se crea una distribución de probabilidad agregada utilizando la convolución numérica de las funciones de distribución de probabilidad de criterios individuales. En la tercera etapa, se crea una matriz de dominancia utilizando valores y reglas de grado de SD. La clasificación de alternativas basada en los hallazgos de la matriz de dominancia y los elementos generados por la expresión es la última etapa de este proceso.

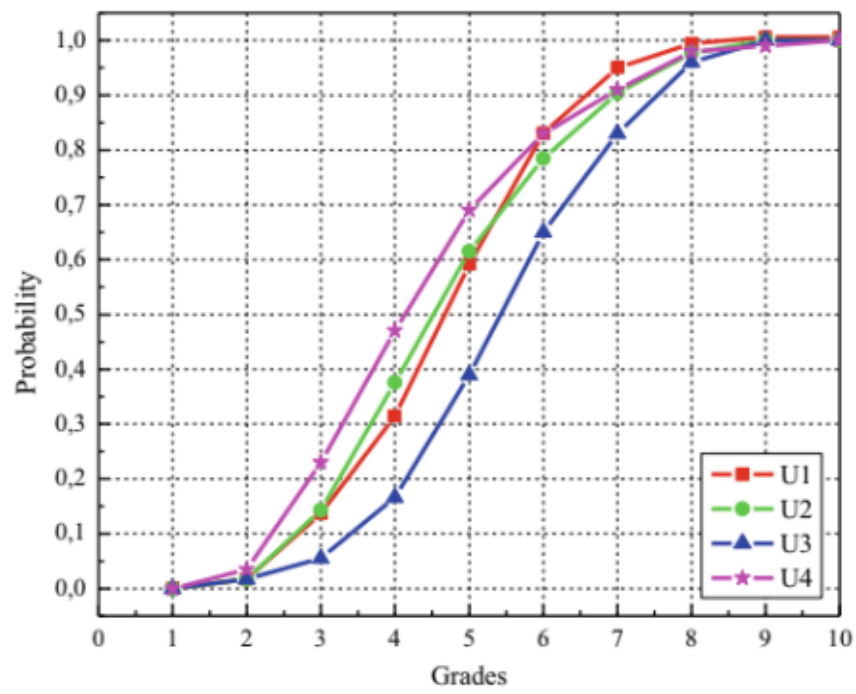
Basándonos en el proyecto de desarrollo de FMS y en una serie de criterios, se mostrará la técnica. Estamos examinando un tema de dimensiones moderadas que ya ha sido abordado en la literatura, a pesar de que el número de criterios de evaluación de FMS puede variar desde muy pocos [50] hasta varios docenas [51].

## 5 Caso de estudio

Zaras y Martel [29], Nowak [32] y Zhang et al. (2010)[36] investigaron el tema de elegir los mejores proyectos de desarrollo de computadoras. Los factores tenidos en cuenta en el problema son: esfuerzo de recursos personales  $C_1$ , beneficio descontado  $C_2$ , probabilidad de éxito  $C_3$  y dirección tecnológica  $C_4$ . Hay diez proyectos diferentes ( $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ ). El tomador de decisiones invita a siete especialistas a participar en el análisis de decisiones para resolver el problema. Supongamos que, en una escala del uno al diez, siete expertos califican las alternativas en relación a los criterios (1: lo peor, 10: lo mejor). Zaras y Martel [29], Nowak [32], Zhang et al. [36] y la Tabla 9.3 ofrecen la tabla completa de distribuciones de probabilidad de las evaluaciones de los expertos.

Se utiliza la función de utilidad multiplicativa de cuatro criterios existentes para ilustrar la técnica sugerida. La función de utilidad agregada se calcula utilizando la ecuación (9.3) y los siguientes factores de ponderación ficticios:  $k_1 = 0.5$ ,  $k_2 = 0.2$ ,  $k_3 = 0.57$ ,  $k_4 = 0.09$  y  $K = -0.686$ .

Se generan diez distribuciones de probabilidad agregadas utilizando la convolución numérica de las funciones de probabilidad de los cuatro criterios, como se muestra en la Figura 9.4.



**Fig. 3.** Función de distribución de probabilidad acumulativa de la utilidad agregada



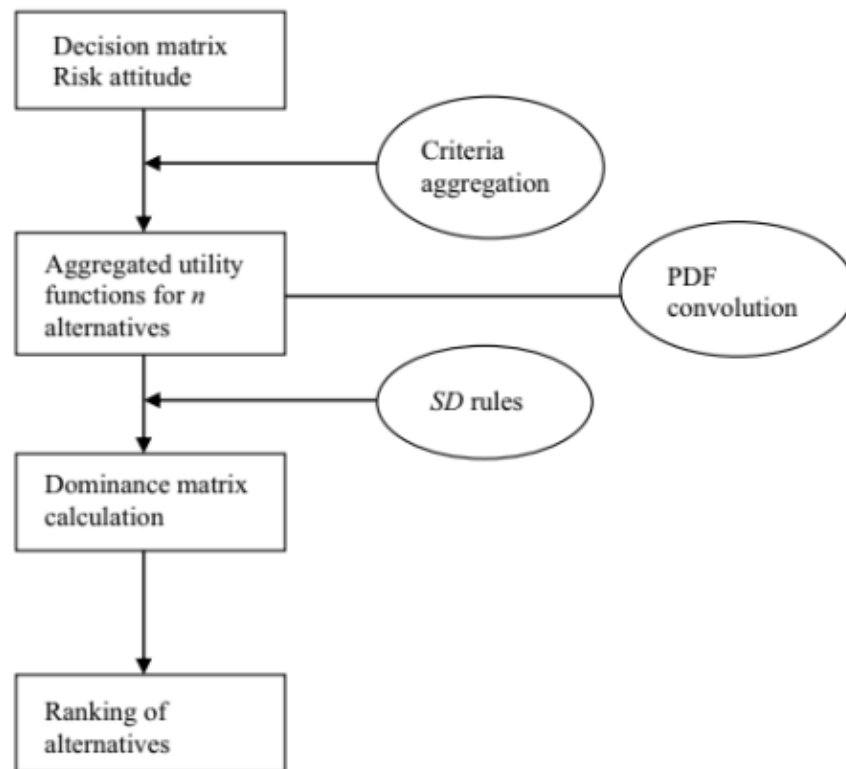


Fig. 4. Representación esquemática del proceso de toma de decisiones

Utilizando el grado de dominancia estocástica definido en (9.1), se obtiene la matriz de dominancia (9.22). La relación de SD debe existir en el par de alternativas para calcular el SDD en ellas, como se mencionó en la Sección 9.2.1. El nivel de dominio de la alternativa  $i$  sobre la alternativa  $j$  está representado por el elemento de matriz SDD  $(i, j)$ :

$$\text{SDD} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0.30 & 0 & 0 \\ 0.33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.37 & 0.53 & 0.24 & 0.32 \\ 0.46 & 0.19 & 0 & 0.03 & 0.05 & 0.06 & 0.49 & 0.62 & 0.35 & 0.45 \\ 0.44 & 0.16 & 0 & 0 & 0.02 & 0.03 & 0.47 & 0.61 & 0.34 & 0.43 \\ 0.43 & 0.14 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0.46 & 0.60 & 0.31 & 0.42 \\ 0.42 & 0.13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.45 & 0.60 & 0.24 & 0.41 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.26 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.22 & 0.42 & 0 & 0.16 \\ 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.07 & 0.31 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Como último paso, se realiza la clasificación de las alternativas basándose en los valores de la matriz de dominancia:

$$A_3 > A_4 > A_5 > A_6 > A_2 > A_9 > A_{10} > A_1 > A_7 > A_8 \quad (23)$$

Se utiliza el mismo caso para demostrar la robustez y adaptabilidad del enfoque sugerido, utilizando la función de utilidad aditiva de cuatro criterios existentes y el vector de peso de criterios  $w = [0.09; 0.55; 0.27; 0.09]$  como se sugirió en el ejemplo original de Zaras y Martel [29]. La Tabla 9.4 compara la clasificación de alternativas producida a partir de la matriz anterior utilizando los tres enfoques ya discutidos. Los resultados obtenidos por la técnica sugerida son idénticos a

**Table 2.** Distribución de la evaluación de tres criterios.

Method	Ranking
Proposed method	$A_3 > A_5 > A_4 > A_2 > A_6 > A_{10} > A_9 > A_1 > A_7 > A_8$
Zhang et al.	$A_3 > A_2 > A_5 > A_4 > A_6 > A_{10} > A_9 > A_1 > A_7 > A_8$
Zara's and Martel's	$A_3, A_4 > A_2, A_5 > A_6, A_{10}, A_9 > A_1, A_7 > A_8$
Nowak	$A_3 > A_2 > A_4, A_5 > A_6 > A_9, A_{10} > A_1 > A_7 > A_8$

los de [36]. La respuesta se obtiene en solo las tres etapas descritas anteriormente, en lugar de la comparación de alternativas par-a-par para cada criterio.

Criteria	Scores	Alternatives									
		A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>	A <sub>6</sub>	A <sub>7</sub>	A <sub>8</sub>	A <sub>9</sub>	A <sub>10</sub>
C <sub>1</sub>	1	0	0	0	1/7	0	1/7	1/7	1/7	0	0
	2	3/7	1/7	0	0	0	0	0	2/7	0	1/7
	3	1/7	0	0	0	1/7	0	0	2/7	0	2/7
	4	0	2/7	0	0	0	0	0	1/7	0	2/7
	5	2/7	1/7	3/7	1/7	0	0	3/7	1/7	2/7	1/7
	6	0	2/7	1/7	0	2/7	0	1/7	0	1/7	0
	7	1/7	0	1/7	0	2/7	1/7	0	0	3/7	1/7
	8	0	1/7	2/7	1/7	0	4/7	1/7	0	1/7	0
	9	0	0	0	4/7	2/7	0	0	0	0	0
	10	0	0	0	0	0	2/7	1/7	0	0	0
C <sub>2</sub>	1	0	1/7	1/7	0	0	0	1/7	3/7	0	0
	2	2/7	0	0	0	0	0	3/7	3/7	0	1/7
	3	1/7	0	0	1/7	0	4/7	1/7	0	1/7	0
	4	0	0	0	1/7	0	0	0	1/7	1/7	0
	5	2/7	0	0	0	1/7	0	1/7	0	0	0
	6	0	1/7	1/7	1/7	2/7	0	1/7	0	1/7	0
	7	0	1/7	0	0	1/7	1/7	0	0	4/7	2/7
	8	1/7	1/7	2/7	3/7	2/7	2/7	0	0	0	3/7
	9	1/7	3/7	1/7	1/7	1/7	0	0	0	0	0
	10	0	0	2/7	0	0	0	0	0	0	1/7
C <sub>3</sub>	1	0	0	1/7	0	1/7	0	0	2/7	0	1/7
	2	0	0	0	0	0	0	3/7	1/7	0	2/7
	3	1/7	0	0	1/7	0	0	1/7	4/7	1/7	0
	4	3/7	0	0	0	0	1/7	1/7	0	2/7	0
	5	0	1/7	0	0	0	1/7	2/7	0	2/7	0
	6	1/7	0	0	0	0	0	0	0	0	2/7
	7	0	1/7	0	1/7	0	0	0	0	2/7	2/7
	8	1/7	2/7	0	2/7	3/7	2/7	0	0	0	0
	9	1/7	3/7	2/7	1/7	1/7	1/7	0	0	0	0
	10	0	0	4/7	2/7	2/7	2/7	0	0	0	0
C <sub>4</sub>	1	0	1/7	0	1/7	0	0	0	2/7	0	0
	2	0	0	0	0	0	0	0	0	1/7	0
	3	3/7	0	0	0	0	0	1/7	0	0	0
	4	0	0	0	0	0	0	0	1/7	1/7	0
	5	2/7	0	0	0	0	1/7	1/7	2/7	0	0

Fig. 5. Evaluación de alternativas por parte de los expertos. Parte 1

Criteria	Scores	Alternatives									
		A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>	A <sub>6</sub>	A <sub>7</sub>	A <sub>8</sub>	A <sub>9</sub>	A <sub>10</sub>
	6	0	0	0	0	1/7	1/7	0	1/7	3/7	3/7
	7	0	0	1/7	0	1/7	1/7	0	0	0	1/7
	8	1/7	2/7	4/7	0	3/7	2/7	3/7	1/7	1/7	1/7
	9	0	2/7	0	1/7	1/7	1/7	1/7	0	0	1/7
	10	1/7	2/7	2/7	5/7	1/7	1/7	1/7	0	1/7	1/7

Fig. 6. Evaluación de alternativas por parte de los expertos. Parte 2

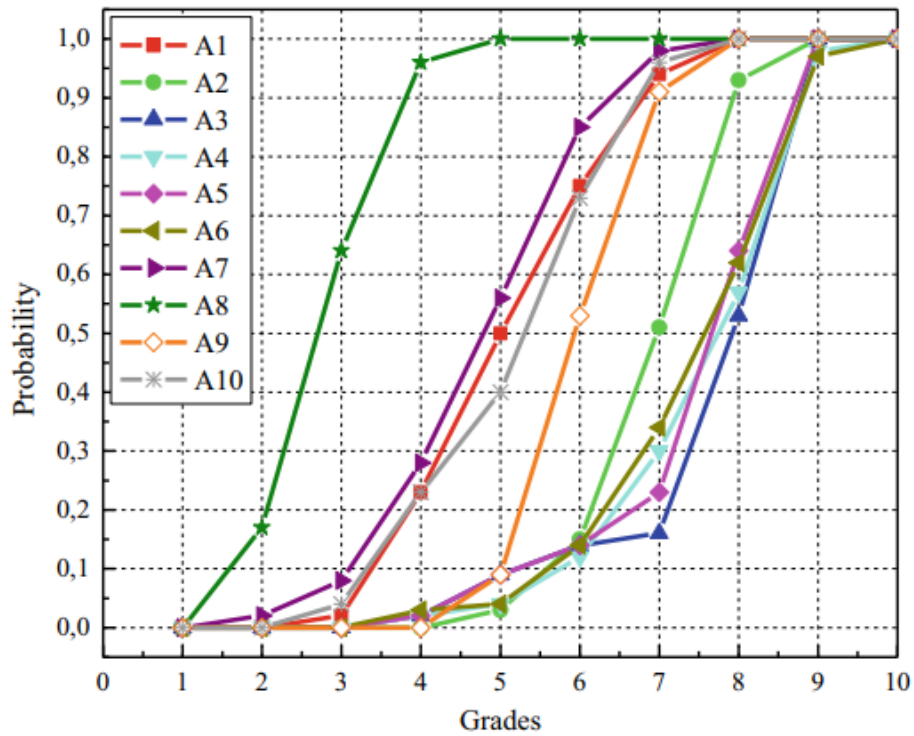


Fig. 7. Distribuciones de probabilidad agregadas para diez alternativas diferentes

## 6 Observaciones finales

Con la adecuada función de densidad de probabilidad discreta, varios componentes de flexibilidad de sistemas de fabricación pueden representarse como variables aleatorias.

Este estudio propone un enfoque novedoso para resolver el problema de SM-CDM (Decisiones Multicriterio en un Entorno de Incertidumbre) mediante la convolución numérica de funciones de distribución de probabilidad de criterios de acuerdo con diversas funciones de agregación. A diferencia de la estrategia típica basada en la comparación par a par con respecto a cada criterio, que solo permite la forma aditiva de agregación de criterios individuales, este método permite el uso de varios agregadores compensatorios. La clasificación de alternativas se realiza utilizando el grado de dominancia estocástica una vez que se ha construido la nueva distribución de probabilidad agregada para cada alternativa. Mediante un ejemplo numérico y la función de utilidad multiplicativa, se demuestra la técnica propuesta. Con respecto a la postura de riesgo multivariado que representan los tres ejemplos: aversión al riesgo multivariado, neutralidad al riesgo y búsqueda de riesgo, las tres situaciones pueden separarse. Con los diferentes agregadores compensatorios, esta actitud puede integrarse directamente en el modelo, a diferencia de las técnicas anteriores que solo consideraban la actitud de riesgo del tomador de decisiones a nivel individual de comparación de criterios.

Debido a la posible discretización de la CDF proporcionada, el uso de esta tecnología no se limita a las distribuciones de probabilidad representadas como vectores. Esta discretización será objeto de más investigaciones sobre las posibles aplicaciones de esta tecnología, junto con las numerosas incertidumbres en la evaluación y los factores de ponderación.

## 7 Aplicación del modelo MAUT en R

En primer lugar, se define la matriz de utilidades

Header

```
Function name
min1 max1 a1 b1 c1
min2 max2 a2 b2 c2
min3 max3 a3 b3 c3
```

```
Function name
min1 max1 a1 b1 c1
min2 max2 a2 b2 c2
min3 max3 a3 b3 c3
```

Utilities

## Utilities

## Project

1	2	2	-0.5	0
2	3	1.5	-0.5	0

## Self implementation

1	2	3	-0.5	0
2	3	1	-0.5	0

**External** and **local** relations

1	5	1	0	0
0	1	0	1	0

## Scope of capabilities

4	13	1	0	0
0	4	1.225	-1.225	0.2824

1. Cargar las librerías necesarias

```
library( mau )
library( data.table )
library( igraph )
library( ggplot2 )
```

2. Definir el índice

```
index<-data.table( cod = paste( 'A', 1:10, sep = '' ),
  i1 = c( 0.34, 1, 1, 1, 1, 0.2, 0.7, 0.5, 0.11, 0.8 ),
  i2 = c( 0.5, 0.5, 1, 0.5, 0.3, 0.1, 0.4, 0.13, 1, 0.74 ),
  i3 = c( 0.5, 1.0, 0.75, 0.25, 0.1, 0.38, 0.57, 0.97, 0.3,
  i4 = c( 0, 0.26, 0.67, 0.74, 0.84, 0.85, 0.74, 0.65, 0.37,
```

3. Cargar el archivo de utilidades

```
file<-"Utilities.txt"
script<-'utilities.R'
lines<-17
skip<-2
encoding<-'utf-8'
functions<-Read.Utilities( file , script , lines , skip , encoding )
source( 'utilities.R' )
```

4. Evaluación de las utilidades sobre cada index

```
# Index positions
columns<-( 2, 3, 4, 5 )
```

<b>cod</b>	<b>i1</b>	<b>i2</b>	<b>i3</b>	<b>i4</b>
A1	0.34	0.50	0.50	0.00
A2	1.00	0.50	1.00	0.26
A3	1.00	1.00	0.75	0.67
A4	1.00	0.50	0.25	0.74
A5	1.00	0.30	0.10	0.84
A6	0.20	0.10	0.38	0.85
A7	0.70	0.40	0.57	0.74
A8	0.50	0.13	0.97	0.65
A9	0.11	1.00	0.30	0.37
A10	0.80	0.74	0.76	0.92

Fig. 8. Matriz index

	<b>nom</b>	<b>min</b>	<b>max</b>	<b>a</b>	<b>b</b>	<b>c</b>	<b>fun</b>
1	External and local relations	0	1	0.000	1.000	0.0000	external_local_relations
2	External and local relations	1	5	1.000	0.000	0.0000	external_local_relations
3	Project	1	2	2.000	-0.500	0.0000	project
4	Project	2	3	1.500	-0.500	0.0000	project
5	Scope of capabilities	0	4	1.225	-1.225	0.2824	scope_capabilities
6	Scope of capabilities	4	13	1.000	0.000	0.0000	scope_capabilities
7	Self implementation	1	2	3.000	-0.500	0.0000	self_implementation
8	Self implementation	2	3	1.000	-0.500	0.0000	self_implementation

Fig. 9. functions data table

```

# Function names
functions<-sapply( c( 'Project',
                     'Self-implementation',
                     'External-and-local-relations',
                     'Scope-of-capabilities' ),
                  FUN = Stand.String )
names( functions )<-NULL
# Evaluation of utilities
utilities<-Eval.Utilities( index, columns, functions )

```

	cod	u1	u2	u3	u4
1	A1	0	0	0.50	0.00000000
2	A2	1	0	1.00	0.08672172
3	A3	1	1	0.75	0.21117243
4	A4	1	0	0.25	0.23101698
5	A5	1	0	0.10	0.25869442
6	A6	0	0	0.38	0.26141941
7	A7	0	0	0.57	0.23101698
8	A8	0	0	0.97	0.20543013
9	A9	0	1	0.30	0.12153763
10	A10	0	0	0.76	0.28028044

Fig. 10. utilities data table

## 5. Construir el árbol de decisiones

```

file<-system.file("extdata", "tree.csv", package = "mau" )
tree.data<-Read.Tree( file, skip = 0, nrow = 8 )
tree<-Make.Decision.Tree( tree.data )
utilities<-Eval.Utilities( index, columns, functions )
plot( tree, layout = layout_as_tree )

```

## 6. Calcular el modelo de decisión

```

weights<-tree.data[ !is.na( weight ) ]$weight
model<-Compute.Model( tree, utilities, weights )

```

## 7. Gráfico de barras para cada utilidad



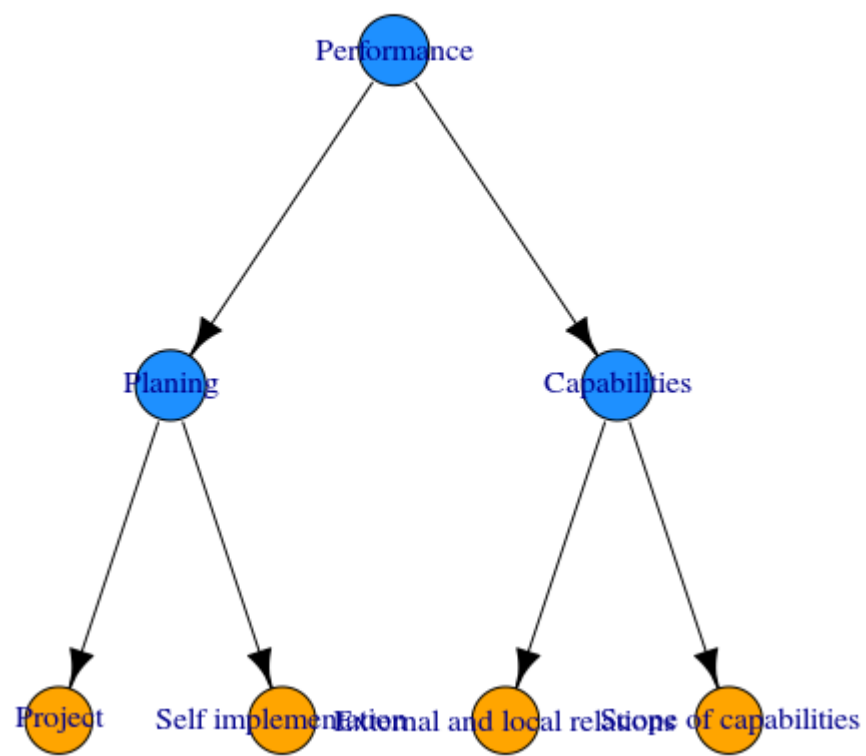
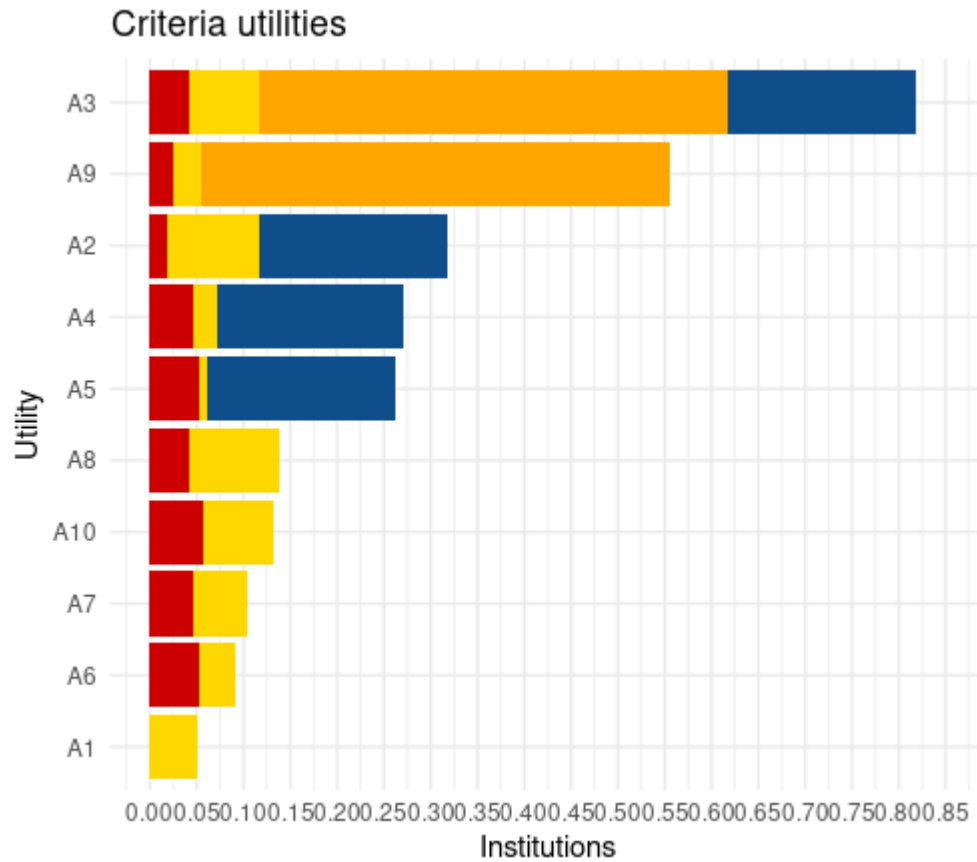


Fig. 11. Árbol de decisiones

```

xlab<-'Utility'
ylab<-'Institutions'
title<-'Criteria utilities'
colors<-c( 'dodgerblue4', 'orange', 'gold', 'red3' )
deep<-2
bar<-Bar.Plot( model, deep, colors, title, xlab, ylab )
plot( bar )

```



**Fig. 12.** Gráfico de barras para cada utilidad

8. Sensibilidad de la utilidad global ante el cambio de las ponderaciones. Los pesos se simulan empleando una distribución de Dirichlet.

```

n<-800
alpha<-c( 0.2, 0.5, 0.1, 0.2 )
constraints<-list( list( c(1,2), 0.7 ),

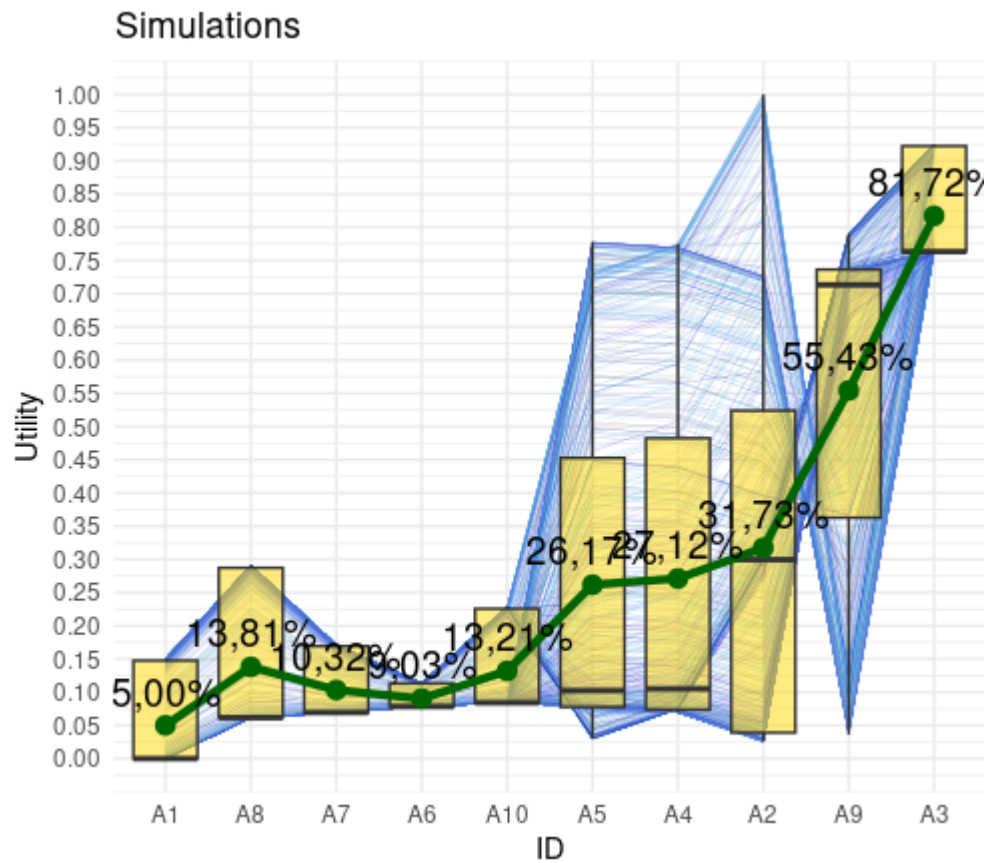
```

```

list( c(3,4), 0.3 ) )
S<-Sim.Const.Weights( n, utilities , alpha , constraints )
plot.S<-Plot.Simulation.Weight( S$simulation , title = 'Simulations',
                               xlab = 'ID', ylab = 'Utility' )

plot( plot.S )

```



**Fig. 13.** Sensibilidad de la utilidad global ante el cambio de las ponderaciones

## References

1. L. Z. Velimirović, A. Janjić, and J. D. Velimirović. *Multi-criteria Decision Making for Smart Grid Design and Operation: A Society 5.0 Perspective*. Springer Nature, 2023.