

Elementos de Matemática para el Ingreso a la F.A.E.N.

Guía de Actividades:

- Eje 1: Números Reales***
- Eje 2: Expresiones Algebraicas***
- Eje 3: Ecuaciones, Inecuaciones y Sistema
de Ecuaciones.***
- Eje 4: Trigonometría***

***Elaborada por Docentes de la Cátedra Análisis Matemático de las carreras
Contador Público y Licenciatura en Comercio Exterior***

- Prof. Adjunto: Agrimensora Azucena González***
- J.T.P. Ordinario: Esp. Prof. Liliana Emilce Copponi***
- J.T.P. Ordinario: Esp. Prof. Jorge Mora***

Año 2014

PRESENTACIÓN

Estimado Alumno:

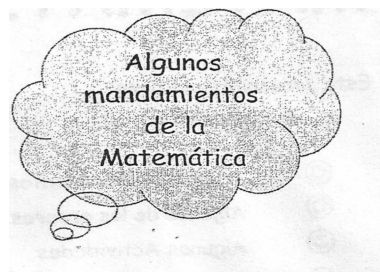
En el presente material que forma parte del “Curso Introductorio al Ingreso” a los Estudios Universitarios de la carrera que haz elegido en esta Facultad, encontrarás los temas correspondientes a elementos de Matemática para el ingreso a la F.A.E.N.

El estudio de la Matemática te permitirá desarrollar tu capacidad de razonamiento, favorecerá a tu sentido de observación, análisis, espíritu crítico e investigación.

La matemática es una ciencia fundamental, por eso, trata de encarar el estudio de la misma con ganas, que es la forma de hacer agradable una tarea y verás que puede llegar a ser muy interesante.

Las unidades, han sido desarrolladas, con el propósito de que logres recuperar, analizar, interpretar y transferir los conocimientos de los que te haz apropiado en el nivel de educación anterior.

Para realizar un estudio apropiado, debés tener en cuenta ...



Ejemplificar una propiedad o teorema no constituye una demostración de su verdad, en cambio, mostrar un ejemplo en el cual una afirmación no se cumple, o sea presentar un contraejemplo, es en verdad una demostración de que esa propiedad o teorema es falsa.

No debés utilizar en la demostración de una propiedad, justamente la propiedad que quieres demostrar.

No intentes aprender la demostración de un teorema de memoria, sin haberlo comprendido. Pregúntate ¿qué conozco?, ¿qué quiero demostrar? y las razones que justifican cada paso, es decir, ¿por qué? y ¿para qué? Luego, si realmente es complejo, puedes memorizar una síntesis de los pasos a seguir.

Al trabajar en la resolución de problemas siempre hay incógnitas, sin embargo, aunque desconozcas su valor, es posible trabajar con ellas como si las conocieras, aún si no se trata de la incógnita principal. Basta indicirlas con letras adecuadas y luego intentar la escritura de fórmulas o ecuaciones o sistemas que las contengan y cuya verdad surja del enunciado o de propiedades estudiadas con anterioridad. No uses la misma letra con el mismo subíndice para simbolizar a distintas incógnitas, ni distintas letras para una misma incógnita.

Pregúntate en todo momento ¿con qué objeto matemático estás trabajando?: un número, una función, un conjunto, una ecuación, una relación, una matriz, un determinante, un sistema de ecuaciones, una inecuación, un polinomio, una recta, una figura, un cuerpo, una superficie, un volumen, etc.

Debés establecer constantemente relaciones con lo estudiado anteriormente.

Debés efectuar la mayor cantidad posible de cálculos mentales. No siempre la calculadora es más rápida que la mente, en esos casos, puedes reservarla para verificar.

Debés tatar de anticipar el/los resultado/s a obtener, aunque más no sea en forma aproximada, acotándolo superior e interiormente, si es posible.

Debés reflexionar siempre sobre la coherencia del resultado obtenido. Intenta verificarlo por distintos caminos.

No te resistas a construir dibujos, diagramas, figuras, árboles, gráficos, pues los mismos colaboran fuertemente con tu razonamiento...

Será el estudio **independiente y personal** lo que te permitirá llegar a ser un profesional altamente capacitado, con bases teóricas firmes y actualizadas.

El camino es largo, te demandará esfuerzo y dedicación ... sin embargo muchos lo han transitado exitosamente, tu también puedes comenzar hoy a **Construir tu exitoso futuro!!!**

Recomendaciones de los Autores

Elementos de Matemática para el Ingreso a la F.A.E.N.

Guía de Actividades del Eje I:

Números Reales

Elaborada por el docente JTP Ordinario de la Cátedra Análisis Matemático

Esp. Prof. Liliana Emilce Copponi

Año 2014

Objetivos del Eje

- Resolver Problemas relacionados con la administración, la economía y los negocios
- Identificar números Naturales, Enteros, Racionales e Irracionales.
- Aplicar las propiedades que gozan las distintas operaciones.
- Resolver operaciones en el conjunto \mathbb{R} , justificando el procedimiento realizado.

Recordamos símbolos y significados:

| <u>Símbolos</u> | <u>Significado</u> |
|-------------------|--------------------|
| I | Tal que |
| \in | Pertenece a |
| \wedge | Y |
| \vee | O |
| \exists | Existe |
| \forall | Para Todo |
| \cup | Unión |
| \cap | Intersección |
| \Rightarrow | Implica |
| \Leftrightarrow | Si y sólo si |

| <u>Operación</u> | <u>Notación Simbólica</u> | <u>Elementos</u> |
|-----------------------|---|---|
| Adición | $a + b = c$ | a y b : sumandos, c : suma. |
| Sustracción | $a - b = c$ | a : minuendo. b : sustraendo. c : resta. |
| Multiplicación | $a \cdot b = c$ | a y b : factores, c : producto. |
| División | $a : b = c$ | a : dividendo, b : divisor, c : cociente. |
| Potenciación | $a^n = b$ | a : base, n : exponente, b : potencia. |
| Radicación | $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$ | a : radicando, n : índice, b : raíz. |

Operaciones:

| <u>Propiedades</u> | <u>Adición</u> | <u>Sustracción</u> | <u>Multiplicación</u> |
|--|-----------------------------|--------------------|--|
| Ley de Cierre $a \in \mathbb{N}_0 \wedge b \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow a + b = c / c \in \mathbb{N}_0$ | ----- | ----- | $\Rightarrow a \cdot b = c / c \in \mathbb{N}_0$ |
| Conmutativa | $a + b = b + a$ | ----- | $a \cdot b = b \cdot a$ |
| Asociativa | $(a + b) + c = a + (b + c)$ | ----- | $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ |
| Uniforme $a=b \wedge c=d \Rightarrow$ | $a + c = b + d$ | ----- | ----- |
| $a=b \wedge c=d \Rightarrow$ | ----- | $a - c = b - d$ | ----- |
| $a=b \wedge c=d \Rightarrow$ | ----- | ----- | $a \cdot c = b \cdot d$ |

Elemento Neutro:

En la adición es el cero, pues: $a + 0 = 0 + a = a$ -----
 En la multiplicación es el uno, pues: ----- $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

Existencia del elemento inverso:

$$a + (-a) = (-a) + a = a \quad \text{-----} \quad a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$$

Distributiva del producto con respecto a la adición: $(a \pm b) \cdot c = a \cdot c \pm b \cdot c$

Operaciones:

| Propiedades | División | Potenciación | Radicación |
|---------------------|--|---------------------------------|---|
| Uniforme | $a = b \wedge c = d \Rightarrow a : c = b : d$ | ----- | ----- |
| Distributiva del... | $(a \pm b) : c = a : c \pm b : c$ | $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ | ----- |
| | ----- | $(a : b)^n = a^n : b^n$ | ----- |
| | ----- | ----- | $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ |
| | ----- | ----- | $\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$ |

Potenciación y Radicación en \mathbb{R}

Recordaremos la definición y las propiedades de la potenciación de números reales y exponente entero:

Por Definición es: $a^0 = 1$, si $a \neq 0$

$a^n = a \cdot a \cdot a \dots a (*)$ (n factores) si $n > 1 \wedge n \in \mathbb{N}$

$a^1 = a$

$a^{-n} = (a^{-1})^n$ si $a \neq 0$

a es la base de la potencia y **n** es el exponente.

Propiedades:

Producto de Potencias de Igual Base $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Cociente de Potencias de Igual Base $a^m : a^n = a^{m-n}$

Potencia de Potencia $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

La Potenciación **no** es distributiva respecto de la adición: $(a + b)^n \neq a^n + b^n$

La radicación no es distributiva respecto de la adición: $\sqrt[n]{a + b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$

Si el exponente no es natural:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \quad a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

LOS NÚMEROS REALES Y SUS OPERACIONES

Esta guía de actividades fue concebida por los profesores de la cátedra de Análisis Matemático pensando en plantear situaciones que necesiten ser justificadas desde el marco teórico de cada módulo.

El presente Módulo plantea las operaciones en el conjunto de Números Reales y las propiedades que deben recordarse para resolverlas.

Resumamos las propiedades que caracterizan al conjunto de los Números Reales:

- (Tricotomía) Dados **x, y** se verifica una y sólo una de las relaciones: **x < y, ó x > y ó x = y**
- (La adición es cerrada) **x + y ∈ ℝ**
- (La multiplicación es cerrada) **x · y ∈ ℝ**
- (La adición es asociativa) **x + (y + z) = (x + y) + z**
- (La multiplicación es asociativa) **x · (y · z) = (x · y) · z**
- (Existe el neutro para la adición) **x + 0 = 0 + x = x**
- (Existe el neutro para el producto) **x · 1 = 1 · x = x**
- (La adición es conmutativa) **x + y = y + x**
- (La multiplicación es conmutativa) **x · y = y · x**
- (Existe el inverso aditivo) **x + (-x) = 0**
- (Existe el inverso multiplicativo) **x · x⁻¹ = 1** para todo **x ≠ 0**

- (Distributiva de la multiplicación respecto de la adición) $x \cdot (z + y) = x \cdot z + x \cdot y$
- (Leyes de monotonía) $x < y$ entonces $x + c < y + c$
 $x < y$, $c > 0$, entonces $x \cdot c < y \cdot c$
 $x < y$, $c < 0$, entonces $x \cdot c > y \cdot c$

Recordemos que cada una de las operaciones, en el conjunto DENSO de los Números Reales, tiene propiedades que le son propias. El objetivo de esta guía es recordarlas y aplicarlas.

Comencemos:

La golosina argentina para todas las edades:

Todos lo llevamos alguna vez en la bolsita bordada de Jardín de Infantes y luego con los años lo pasamos al bolsillo del guardapolvo o a la mochila del colegio. Los hay negros o blancos, de chocolate o de dulce de leche, simples o triples, de durazno, membrillo uvas y los más sofisticados de frutilla a la crema o lemon pie. En las góndolas se pueden contar hasta de 34 tipos diferentes de alfajores. De un tipo o de otro, los argentinos comen alrededor de 6 millones de unidades por día.

Según Ibope, TGI Argentina 2004, en nuestro país hay 12.097.000 consumidores de alfajores. Los datos surgen a partir de una muestra realizada a personas de entre 12 y 75 años, en todas las ciudades argentinas que superan los 50.000 habitantes, entre enero y junio de este año. Dicho número representa 6.311.000 más que los que consumen barras de cereal, 318.000 más que los que consumen chocolate y 1.712.000 menos que los que toman helados. En capital y Gran Bs As se consume más de la mitad de los alfajores de todo el país. Las mujeres comen mayor cantidad de alfajores que los hombres. Según el muestreo, los niños y jóvenes de entre 12 y 19 años consumen el 24% y las personas mayores de 50 años consumen el 21 %

Un dato que llama la atención: las clases más bajas consumen un 53% del total ¿Por qué?

Todos los consultados coinciden en que el alfajor dejó de ser una golosina para convertirse en un alimento barato y afirman que en los peores momentos económicos es el producto de mayor consumo. Durante la crisis 2001- 2002 llegaron a venderse 10 millones de alfajores por día.

Según datos proporcionados por una de las empresas líderes durante 2004, en la Argentina se compraron 33.000.000 kilos de alfajores, lo que significa un incremento del 29% en volumen de ventas respecto del año anterior.

Pero no todas las variedades provienen de las grandes producciones: aún hoy existen pequeñas empresas que los siguen fabricando uno a uno con mano y pincel.

Según datos de monitor de medios publicitarios, entre enero y octubre 2004, la inversión publicitaria en medios fue de \$ 8.899.049

Los alfajores son productos estacionales: los días de más de 30 grados centígrados las ventas disminuyen considerablemente y la temporada vuelve a empezar en febrero. Con este noviembre atípico de frío y lluvias, los alfajores pudieron estirar unos días la estacionalidad del producto.

Pero el verano se acerca irremediablemente y llegan los días de ventas escasas. Habrá que esperar el comienzo de la temporada 2005.

FUENTE: Diario Clarío.com- 30 de Noviembre 2004

Luego de leer el texto, responde:

- a) ¿Cuál es la diferencia, en kilogramos, entre los alfajores comprados en 2003 y en 2004 en la Argentina?
- b) ¿Cuántos alfajores en promedio se consumen en la Argentina?
- c) Según las empresas líderes, ¿cuántas toneladas de alfajores se consumieron en el 2004?
- d) ¿Cuántos alfajores por día se consumen en Capital y Gran Bs As?
- e) ¿Cuántos alfajores por día consumen las clases más bajas?
- f) Completa la tabla a partir de los datos de la muestra tomada por IBOPE en 2004
- g) Si por día se elaboran 25.000 alfajores de los cuales el 35% son triples. ¿Cuántos alfajores de este tipo se producen?

| Golosina | Número de personas que consumen |
|------------------|---------------------------------|
| Barras de cereal | |
| Chocolate | |
| Helados | |

1. Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique

- a) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N}$
- b) $-3 \in \mathbb{Q}$
- c) $\mathbb{N} \in \mathbb{R}$
- d) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$
- e) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$
- f) $\frac{1}{2} \in \mathbb{I}$

2. a) Indique a qué conjuntos numéricos pertenecen los números.

0; -1; -2,8; 0,000252525...; $\frac{8}{3}$; 4,246810...; $\sqrt{17}$

b) Representalos en la recta numérica

3. Escribe en forma de fracción los siguientes números decimales.

- a) 0,125 =
- b) 2,0353535... =
- c) 6,121212.. =
- d) 25,6 =

4. Establece las relaciones entre los renglones de las dos columnas:

Igualdades

1) $a^n : a^m = a^{n-m}$

2) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

3) $(a^n)^m = a^{m \cdot n}$

4) $(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$

5) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Definiciones o Propiedades

a) Cubo de un binomio

b) Potencia de otra potencia

c) Producto de potencias de igual base

d) Cuadrado de un binomio

e) Cociente de potencias de igual base

5. Justifica (mediante la propiedad correspondiente) la verdad o falsedad de las siguientes igualdades:

a) $(20 - 4) : 8 = 20 : 8 - 4 : 8$

b) $40 : (2 + 8) = 40 : 2 + 40 : 8$

6. Escribe el resultado y justifica:

- a) $3^3 = \dots\dots\dots$
- b) $(-3)^3 = \dots\dots\dots$
- c) $5^4 = \dots\dots\dots$
- d) $(-5)^4 = \dots\dots\dots$
- e) $\sqrt[3]{27} = \dots\dots\dots$
- f) $\sqrt[4]{16} = \dots\dots\dots$
- g) $\sqrt[3]{-27} = \dots\dots\dots$
- h) $\sqrt[4]{-16} = \dots\dots\dots$

7. Coloca una cruz en el casillero correspondiente. Luego represéntalos en la recta numérica.

| | N | Z | Q | I | R |
|----------------------|---|---|---|---|---|
| $-1/2$ | | | | | |
| 0 | | | | | |
| $\sqrt{2}$ | | | | | |
| $(2-1/2)^{-1}$ | | | | | |
| $\frac{2}{\sqrt{2}}$ | | | | | |

8. Define por enumeración, si fuese posible, luego representa gráficamente los siguientes conjuntos:

$$A = \{x / x \in \mathbb{Z} \wedge x \leq -2\} \quad B = \left\{x / x \in \mathbb{R} \wedge x > \frac{1}{2}\right\}$$

$$C = \left\{x / x \in \mathbb{R} \wedge -2 < x \leq -\frac{1}{2}\right\}$$

9. ¿Podrías utilizar otra notación para definir los conjuntos de números Reales del ejercicio anterior?
¿Cuál es?

10. Escribe verdadero o falso. Justifica. Identifica las Propiedades utilizadas

a) $\left[\left(\frac{1}{4} - 1\right) : \left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right] : \left(\frac{-3}{4} + 1\right) + 2 = 12$

b) $\frac{\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) + \frac{5}{6} \cdot (-1)^{-5} - \left(1 - \frac{1}{4}\right) : (-2)^{-1}}{\sqrt{\left(\frac{-3}{4}\right) \cdot (-12) - (-7)} + \sqrt[3]{\frac{-125}{8}}} = 3$

11. Completa el siguiente cuadro

| a | b | $a^2 - \frac{b}{2}$ |
|----------------|---------------|---------------------|
| $\frac{-1}{2}$ | 0,2 | |
| | $\frac{3}{4}$ | $\frac{29}{8}$ |
| -3 | | $\frac{35}{4}$ |
| 0,333... | | $\frac{17}{18}$ |

12. Coloca paréntesis que cambie los signos de los números primos de la suma algebraica

$$-5 + 7 - 9 + 11 - 3$$

13. Resuelve e indica que propiedad utilizas:

a) $\frac{(-1)^2 \cdot (-1)^3}{(-1)^4} =$

b) $\sqrt[4]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[5]{\frac{b}{a}} =$

c) $\left(\frac{-1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{-1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{-1}{3}\right)^{\frac{-3}{2}} \cdot \left(\frac{-1}{3}\right) =$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} =$

e) $(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot (3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) =$

f) $\sqrt[3]{81a^6} + \sqrt[3]{3c^3} + \sqrt[3]{24b^3} =$

g) $\sqrt{4a^2b^8} =$

h) $\sqrt{(-2)^2} =$

i) $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{a^3b^9}}{\sqrt[4]{a^6b^6}}}$, $a > 0$, $b > 0$,

14. Racionaliza, identificando la estrategia utilizada:

a) $\frac{4}{\sqrt{8}} =$

b) $\frac{\frac{1}{5} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{72}} =$

c) $\frac{0.5m \cdot \sqrt[3]{m}}{\frac{1}{3} \sqrt[3]{m^2}} =$

d) $\frac{\sqrt{a \cdot b}(b-1)}{\sqrt{a \cdot b} - \sqrt{a}} =$

e) $\frac{1-3\sqrt{2}}{1+3\sqrt{2}} =$

15. Verifica si es verdadero o falso:

$$\frac{6 \cdot (2 - \sqrt{3})}{1 - (2 - \sqrt{3})^2} = \sqrt{3}$$

16. Resuelve, justificando tu procedimiento

a) $\left[\frac{\left(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \right)^{\frac{1}{6}}}{1 - \frac{1}{2}} \right]^2 - \frac{-2 + 2 : \frac{4}{3}}{1 - 1 : \frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{2 - \frac{2}{3}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}} =$

b) $\left[\frac{\sqrt{1.4 + 0.004} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 + 1.75}{\left(\frac{3}{2} + 2.5 \right)^2} \right]^3 =$

17. Decide qué afirmaciones son Verdaderas o Falsas. Justificando en cada caso.
Da ejemplos en caso de falsedad.

a) $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad \forall a, b > 0$

b) $(a^2)^3 = a^{(2^3)} \quad (a > 1)$

c) $x^0 = 1 \quad \forall x \in \mathbf{R}$

d) $0^0 = 0$

e) $0^1 = 0$

f) $(-1)^{(-1)} = 1$

g) $\sqrt{(-6)^2} = -6$

h) $(16)^{\frac{1}{2}} = -4$

i) $(x+1)^3 = x^3 + 1$

j) $x^{\frac{2}{4}} = x^{\frac{1}{2}} \quad \text{siendo } x = -1$

“Para mejorar tus conocimientos acerca del tema, consultá textos que lo aborden, apuntes con conceptos teórico de la cátedra o alguna/s página de internet, como por ejemplo: <http://www.vitutor.com/index.html>”

Elementos de Matemática para el Ingreso a la F.A.E.N.

Guía de Actividades del Eje 2: Expresiones Algebraicas

***Elaborada por la Profesora Adjunta Interina de la Cátedra Análisis Matemático
de la FAEN - Agrimensora Azucena González***

Año 2014

Objetivos del Eje

- Conceptualizar las expresiones algebraicas, reconociendo su valor instrumental para resolver problemas.
- Analizar y aplicar las operaciones que se pueden realizar entre Expresiones Algebraicas enteras.
- Comprender el sentido y utilidad del factorización de Expresiones Algebraicas para simplificar el proceso de resolución de operaciones, identificando distintos casos posibles.

Desarrollo del eje temático

Una vez que nos hemos familiarizado con los conjuntos numéricos y las operaciones que pueden definirse en cada uno de ellos, para que el elemento resultante pertenezca al mismo conjunto, consideraremos la siguiente situación de la vida diaria:

Concurrimos al supermercado, donde se encuentra una lista de precios de distintos productos, similar a la que te presentamos:

| Producto | Precio por Kg |
|----------|---------------|
| A | \$ 2,99 |
| B | \$ 4,99 |
| C | \$ 3,99 |

Obviamente lo que se gaste dependerá de las cantidades que compremos.

El gasto es, entonces, **la variable dependiente** y las cantidades compradas, **las variables independientes**.

Si las cantidades de los productos **A**, **B**, y **C** se representan por **x**, **y**, **z** respectivamente, entonces el gasto que realicemos estará representado por:

$$G = 2,99 x + 4,99 y + 3,99 z$$

El segundo miembro de esta expresión se denomina **expresión algebraica**.

Esta expresión algebraica es una representación de la realidad, lo que hemos llamado “modelo”, es decir que, hemos encontrado una fórmula que, por medio de cifras, letras y operaciones, representa un fenómeno determinado, en este ejemplo.

Analizando las características de la expresión obtenida:

$$2,99 x + 4,99 y + 3,99 z$$

Vemos que los precios son números fijos o **constantes** y que las cantidades, representadas, generalmente, por las últimas letras del abecedario, constituyen lo que llamamos indeterminadas o **variables**.

A las constantes (2,99 - 4,99 - 3,99) que “multiplican” a las variables, las llamamos **coeficientes** de esas variables y pueden ser representadas por símbolos alfabéticos.

Por ejemplo: **a x + b y + c z**

Los coeficientes **a**, **b**, **c** corresponden a números específicos y pueden variar tomando otros valores en otro momento y se llaman constantes paramétricas o **parámetros**.

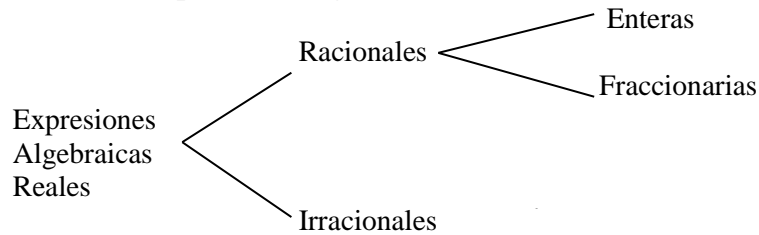
Observamos que las variables están elevadas a la potencia uno y la vinculación entre ellas se establece a través de la operación de adición, por lo que se trata de un **modelo lineal**.

En otros modelos veremos que el vínculo también se establece mediante sustracción, división, potenciación y radicación.

Definición:

Cualquier combinación de números expresados por letras o por letras y cifras es una **expresión algebraica** si y sólo si esos números se vinculan entre sí mediante las operaciones de suma, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Clasificación de las Expresiones Algebraicas



- Una expresión algebraica es **racional** si y solo si **no hay** en ella indeterminada alguna sometida a radicación.
- Puede ser **racional entera** si y sólo si las indeterminadas están sometidas a operaciones enteras: adición, sustracción, multiplicación y potenciación con exponente entero no negativo.

$$\text{Ej.: } \frac{4}{5} p^5 + 0,6 q - r^2$$

- Puede ser **racional fraccionaria** si y sólo si hay en ella, **como mínimo, una** indeterminada que figura como divisor en un cociente, o (su expresión equivalente), como base de una potencia de exponente entero negativo.

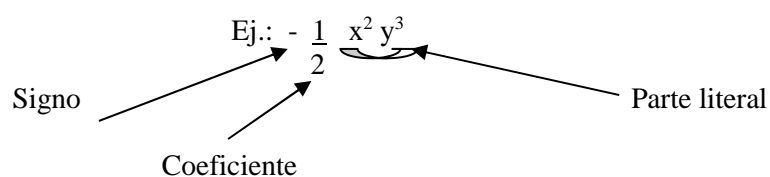
$$\text{Ej.: } \frac{7}{2x - y} - \frac{x - y}{x + y} + x^3 y^2$$

- Una expresión algebraica es **irracional** si y sólo si hay en ella, **como mínimo, una** indeterminada sometida a la operación de radicación.

$$\text{Ej.: } \sqrt{p + q} - q^4 + 5p^2$$

Expresiones algebraicas enteras

Monomios es una expresión algebraica entera en la cual los números están vinculados entre sí sólo por multiplicación y potenciación con exponente entero no negativo.



Se dice que dos monomios son semejantes si tienen la misma parte literal.

$$\text{Ej.: } -3m^3 n^2 ; 4m^3 n^2 ; -\frac{2}{3} m^3 n^2$$

Polinomio: es toda suma algebraica de monomios. Cada monomio es un **término** del polinomio.

El grado de un polinomio es igual al grado del monomio de mayor grado que en él figura.

Clasificación de un polinomio según el número de términos

Polinomio de 1 término = monomio

“ “ 2 “ = binomio

“ “ 3 “ = trinomio

“ “ 4 “ = cuatrinomio

“ “ 5 ó más términos = polinomio

Polinomio en una indeterminada o variable es aquél que sólo tiene una letra.

$$\text{Ej.: } P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

La única variable es x

Los coeficientes son: $a_n ; a_{n-1} ; a_{n-2} ; \dots ; a_1 ; a_0$

a_0 se llama término independiente.

El **grado de un polinomio** es el mayor de los grados de los monomios que lo forman, si todos ellos son de distinto grado.

$$P(x) = 5x^3 + 3x^2 - x^4 + 2 - 2x^5 \quad \text{gr}[P(x)] = 5$$

$$P(x) = -\frac{3}{2}x - 0,5x^4 - \frac{1}{3}x^2 \quad \text{gr}[P(x)] = 4$$

Polinomio ordenado

Un polinomio está ordenado de acuerdo a las potencias crecientes de una de sus letras, cuando el exponente de la misma en cada término, es mayor que en el término anterior.

$$\text{Ej.: } 3x + 4x^2 - 4x^3$$

Un polinomio está ordenado de acuerdo a las potencias decrecientes de una de sus letras, cuando el exponente de la misma en cada término, es menor que en el término anterior.

$$\text{Ej.: } 2x^5 + 4x^3 - 4x^2 + 7x$$

Un polinomio es **completo** con respecto a una de sus variables, cuando en el mismo están **todas** las potencias de exponente natural menores que el mayor exponente, figurando también un término de grado cero (término independiente)

Ejercicios:

1.- Dados los siguientes polinomios, decir si están ordenados y de qué forma.

a) $5x^3 - 2x^2 + 3x$

b) $-4x^4 + 5x^2 - 3x^5 + 7$

c) $\frac{1}{2}x + \frac{4}{5}x^2 - 4x^3$

2.- Dados los siguientes polinomios completarlos (con coeficientes cero) y ordenarlos de acuerdo a las potencias decrecientes de la variable:

a) $\sqrt{6}x - 0,3x^3 + 4x^2 + 5x$

b) $x^5 - 3x^2 - 4x - x^3 + 1$

Operaciones entre expresiones algebraicas

Suma de polinomios

La suma de dos polinomios es otro polinomio cuyos términos son los términos de los polinomios sumando los términos semejantes.

Ej.: Efectuar la suma de $P(x) + Q(x)$

a) $P(x) = -5x^2 + 5x - 2x^3 - 6$ y $Q(x) = -0,5x^4 - x - 2x^2 - 3x^3$

b) $P(x) = x + 3x^2 - 4x^4 + 2 + 2x^3$ y $Q(x) = 6 + 5x^3 + 3x^4 + x^2$

a) $-5x^2 + 5x - 2x^3 - 6$

+

$$\begin{array}{r} -0,5x^4 - 2x^2 - x - 3x^3 \\ -0,5x^4 - 7x^2 + 4x - 5x^3 - 6 \end{array}$$

b) $x + 3x^2 - 4x^4 + 2 + 2x^3$

+

$$\begin{array}{r} + x^2 + 3x^4 + 6 + 5x^3 \\ x + 4x^2 - x^4 + 8 + 7x^3 \end{array}$$

Resta de polinomios:

En la resta de polinomios se obtiene otro polinomio que resulta de sumar al primero, el segundo cambiado de signos.

Multipliación de polinomios:

La multiplicación de polinomios da otro polinomio que se obtiene sumando los productos parciales que surgen de aplicar la propiedad distributiva del producto respecto de la suma y reduciendo términos semejantes.

Ej.: Multiplicar $P(x) = -4x^3 + 2x - 1$ por $Q(x) = 5x^2 + 4x$

$$\begin{array}{r} -4x^3 + 2x - 1 \\ \quad \quad \quad 5x^2 + 4x \\ \hline -20x^5 + 10x^3 - 5x^2 \\ -16x^4 \quad \quad \quad + 8x^2 - 4x \\ \hline -16x^4 - 20x^5 + 10x^3 + 3x^2 - 4x \end{array}$$

Ejercicios:

- a) $(a + 2)(3a - 4)$
- b) $(x + 3)(2x^2 - 5x + 7)$
- c) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$
- d) $(x + y - z)(x + y^2 + z)$
- e) $(2x + 3y)^2$
- f) $(\sqrt{2x} - \sqrt{3y})^2$
- g) $(x^2 - 1)(x^3 + 2)$

División de polinomios:

Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, tal que el grado de $P(x) \geq Q(x)$ y $Q(x) \neq 0$. Dividir $P(x)$ por $Q(x)$ es encontrar dos polinomios $C(x)$ y $R(x)$ tales que:

$C(x)$ es el cociente y $R(x)$ es el resto cuyo grado sea menor que $Q(x)$.

$$\begin{array}{r} \text{Ejemplo: } 6x^3 - 4x^2 + 2x - \frac{1}{2} \quad \left| \begin{array}{l} -\frac{3}{5}x^2 + x \\ 5 \end{array} \right. \\ \hline -6x^3 + 10x^2 \\ \hline 6x^2 + 2x \\ -6x^2 + 10x \\ \hline 12x - \frac{1}{2} \end{array}$$

Cociente de un polinomio en “x” por otro de la forma “x + a”. Regla de Ruffini

Para dividir un polinomio en “x” **completo y ordenado** por otro de la forma “x+a” se puede aplicar la Regla de Ruffini.

Importante: si el polinomio no estuviera completo, se debe completar agregando **ceros** en el lugar de los términos faltantes.

1º ej.: $(3x + 4x^2 + 2 + 3x^3) : (x + 2)$

$$\begin{array}{r} 3 \quad 4 \quad -3 \quad 2 \\ -2 \quad \downarrow \quad -6 \quad 4 \quad -2 \\ \hline 3 \quad -2 \quad 1 \quad 0 \\ \hline \end{array}$$

Cociente: $3x^2 - 2x + 1$; Resto: 0

2° ej.: $(8x^4 + x^2 - x^3 + 2) : (x - 2)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 8 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & & 16 & 30 & 62 & 124 \\ \hline & 8 & 15 & 31 & 62 & 126 \end{array}$$

Cociente: $8x^3 + 15x^2 + 31x + 62$ Resto: 126

Ejercicios: a) $(5x^3 + 2x^2 - x + 8) : (x + 3)$

b) $(-2x^3 + 3x^2 - x^3 - 2x^4 + x^5) : (x - 2)$

c) $(2x^3 - \frac{1}{3}x + 3x^2) : (\frac{1}{3}x + \frac{1}{3})$

Teorema del Resto:

El resto de la división de $P(x)$ por " $x - a$ ", es $P(a)$

Ej.: $(2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 4) : (x + 1) \implies P(-1) = 2(-1)^3 + \frac{1}{2}(-1)^2 - 4 = -\frac{11}{2}$

Factorización de expresiones algebraicas:

Factorizar implica expresar un polinomio como el producto de dos o más factores.

Factor común: Ej.: $5x^4y^2 + 10x^2y^3 - 15x^3y^2 = 5x^2y^2(x^2 + 2y - 3x)$

Ej.: a) $16a^8b^4c^4 + 64a^9b^7c^7 + 8a^5b^3c + 40a^4b^5c^5 =$

b) $1,2x^2y^3z^3 + 0,8x^3y^2z^4 + 4,2x^5y^5z =$

Trinomio cuadrado perfecto:

Sabemos que $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2 \implies 4x^2 + 4xy + y^2 = (2x + y)^2$

Ej.: a) $16 - 8y + y^2 =$

b) $25x^4 + 30x^3y + 9x^2y^2 =$

c) $\frac{9}{36}x^6y^2 + \frac{25}{16}p^2y^4 - \frac{5}{4}p^4y^3 =$

Cuadrinomio cubo perfecto:

Sabemos que $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$\implies 27x^{12}y^6 + 9x^{12}y^4 + x^{12}y^3 + 27x^{12}y^5 = (3x^4y^2 + x^4y)^3$

Diferencia de cuadrados:

Sabemos que $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Ej.: a) $121x^8y^2 - 144b^4 =$

b) $25a^4b^2 - 16a^2c^2 =$

c) $\frac{4}{25}x^4z^6 - \frac{9}{16}p^2q^2 =$

Simplificación de expresiones algebraicas fraccionarias:

Ej.: 1) $\frac{a^2b^2 + 2a^2b^2c + a^2c^2}{b + c} = a^2(b + c)$

1° se factora (factor común y trinomio cuadrado perfecto) para convertirlo en producto y luego simplificar.

2) $\frac{10x^3y^2z - 40x^5y^2z}{5x^2y^3z + 10x^3y^3z} = \frac{2x(1 - 2x)}{y}$

Suma y resta de expresiones algebraicas fraccionarias:

Ej.: 1) $\frac{4x}{2x + 3} + \frac{6}{2x + 3} = 2$; 2) $\frac{2x + 1}{x + 2} + 3 = \frac{5x + 7}{x + 2}$; 3) $\frac{4}{a + b} - \frac{2}{a - b} + \frac{3}{a^2 - b^2} = \frac{2a - 6b + 3}{a^2 - b^2}$

Multipliación:

Ej.: $\frac{3a}{2} \cdot \frac{4a^2b}{c} \cdot \frac{c^2}{6} = a^3bc$

División:

Ej.: $\frac{a}{2} : \frac{3a^2}{4b} = \frac{a}{2} \cdot \frac{4b}{3a^2} = \frac{2b}{3a}$;

Ejercicios propuestos:

1.- Efectuar las operaciones:

a) $\frac{2x + 4}{1 - x} + \frac{1}{3x + 6} =$

b) $(3 + \frac{1}{x - 1}) (1 - \frac{1}{3x - 2}) =$

c) $2(x + \frac{3}{2})(x + 1) =$

2) Resolver previo factoro:

a) $\frac{2a}{3b^2} + \frac{a^4 - b^4}{9a^2(a^2 - b^2)} =$;

b) $\frac{2}{x + 2} - \frac{x + 3}{x^2 + 4x + 4} =$;

c) $\frac{x + 1}{x - 1} - \frac{x + 2}{x + 1} =$

“Para mejorar tus conocimientos acerca del tema, consultá textos que lo aborden, apuntes con conceptos teórico de la cátedra o alguna/s página de internet, como por ejemplo: <http://www.vitutor.com/index.html>”

Elementos de Matemática para el Ingreso a la F.A.E.N.

Guía de Actividades del Eje 3: Ecuaciones, Inecuaciones y Sistema de Ecuaciones

***Elaborada por el JTP Ordinario de la Cátedra Análisis Matemático de la FAEN-
Esp. Prof. Jorge Mora***

Año 2014

Objetivos del Eje

- Comprender el concepto de ecuación, inecuación y sistema de ecuaciones
- Plantear ecuaciones, inecuaciones y sistema de ecuaciones a partir de situaciones problemáticas
- Resolver analíticamente, ecuaciones, inecuaciones y sistema de ecuaciones
- Interpretar, geométricamente, el conjunto solución de ecuaciones, inecuaciones y sistema de ecuaciones.
- Desarrollar la capacidad de extraer y/o arribar a conclusiones matemática a partir de la resolución de situaciones problemáticas

Ecuaciones de primer grado

- 1) En cada uno de los enunciados complete con verdadero o falso según corresponda. Justifique su respuesta.
 - a) Se denomina ecuación de 1er grado a toda expresión que involucre a números y operaciones combinadas.
.....
 - b) Una ecuación de 1^{er} grado es aquella donde tenemos una sumatoria de términos con una constante **b**, llamada **término independiente**. En cada término de dicha sumatoria se tiene una constante o **coeficiente**, multiplicando a una **incógnita**.
.....
 - c) Una ecuación de 1^{er} grado es aquella donde tenemos una sumatoria de términos igualada a una constante **b**, llamada **término independiente**. En c/término de la sumatoria se tiene una constante o **coeficiente**, multiplicando a una **incógnita**. Las incógnitas tienen exponente 1 y no están multiplicadas entre sí.
.....
- 2) En cada caso recuadre la opción correcta, Justifique su respuesta.
 - a) Decimos que una ecuación lineal o de 1^{er} grado es compatible determinado cuando tiene:
 - i) ningún valor que verifique la igualdad
.....
 - ii) un único valor que verifique la igualdad;
.....
 - iii) infinitos valores que verifique la igualdad;
.....
 - b) Una expresión algebraica se denomina identidad si la igualdad planteada en la misma se verifica para:
 - i) ningún valor que se asigne a la incógnita.
.....
 - ii) un único valor que se asigne a la incógnita.
.....
 - iii) infinitos valores que se asigne a la incógnita.
.....

3) Lea detenidamente e interprete los siguientes párrafos, para recordar lo trabajado en la secundaria y fijar estos conceptos que le serán de suma utilidad en la carrera que inicia

El Dr S. Gigena y otros en su libro *Matemática para Ciencias Naturales* indican que: “Una ecuación lineal es aquella donde tenemos una sumatoria de términos igualada a una constante **b**, llamada también **término independiente**. En cada término de dicha sumatoria se tiene una constante o **coeficiente**: a_1, a_2, \dots, a_n multiplicando a una incógnita. Las incógnitas tienen exponente 1 y no están multiplicadas entre sí”.

Se denomina **ecuación de primer grado en la incógnita x** a la expresión que puede reducirse a:

$$ax + b = 0, \text{ que es equivalente a } ax = -b, \text{ con } a \text{ y } b \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$$

La solución única (en caso de existir) de la ecuación está dada por:

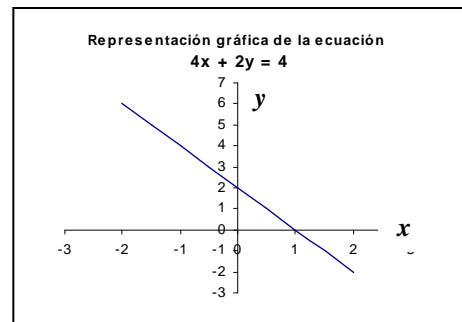
$$x = \frac{-b}{a}$$

Ecuación de 1º grado en dos variables o incógnitas

La expresión $ax + by = c$, con a, b y $c \in \mathbb{R} \wedge a$ y b no nulos, corresponde a una ecuación de primer grado con dos incógnitas. Estas siempre tienen infinitas soluciones.

Ejemplo $4x + 2y = 4$

Es una ecuación de primer grado con dos incógnitas, donde para cada uno de los infinitos valores reales (números reales) de la incógnita x , existirá un valor real para la incógnita y que verificará la igualdad.



Ecuación lineal o de 1º grado con n variables o incógnitas

Toda expresión que pueda transformarse en $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ corresponde a una ecuación lineal real con n incógnitas, si a_1, a_2, \dots, a_n son números reales no nulos.

Al trabajar con ecuaciones se debe tener en claro que:

- **Solución de la ecuación:** son los valores que, atribuidos a las incógnitas producen una igualdad entre los dos miembros de la ecuación.
- **Resolución de una ecuación:** consiste en hallar todas las soluciones de la ecuación dada.
- **Ecuaciones equivalentes:** dos ecuaciones algebraicas en la misma incógnita son equivalentes cuando todas las soluciones de una son también solución de la otra.

4) Para cada uno de los siguientes enunciados seleccione la expresión algebraica que modeliza la situación. Justifique su elección o motivo de descarte, halle el valor correspondiente a cada incógnita y responda la consigna planteada.

a) Un padre tiene 35 años y su hijo 5. ¿Al cabo de cuántos años será la edad del padre tres veces la edad del hijo?

i) $35 + 5 = 3 \cdot x$;

ii) $35 + x = 3 \cdot (5 + x)$;

iii) $35 = 5 + x$

- b) Si al doble de un número se le resta la mitad del mismo número, resulta 54. ¿Cuál es el número?
- i) $2n - \frac{1}{2}n = 54$;
- ii) $2n - \frac{1}{2} = 54$;
- iii) $(2 - \frac{1}{2}).n = 54$
- c) Se han consumido $\frac{7}{8}$ de un bidón de aceite. Reponemos 38 litros de aceite y el bidón ha quedado lleno hasta sus $\frac{3}{5}$ partes. Calcula la capacidad del bidón.
- i) $7,8b + 38 = 3,5b$;
- ii) $\frac{7}{8}b + 38 = \frac{3}{5}$;
- iii) $\frac{7}{8}b + 38 = \frac{3}{5}b$
- 5) Para los siguientes enunciados indique la expresión algebraica correspondiente, halle el valor de cada incógnita y responda el interrogante planteado. Si te es útil, realiza un esquema representativo.
- a) Luís hizo un viaje en el coche, en el cual consumió 20 l de combustible. El trayecto lo hizo en dos etapas: en la primera, consumió $\frac{2}{3}$ del combustible que tenía el depósito y en la segunda etapa, la mitad del combustible que le queda. Se pide:
- i) Determinar los litros de combustible que tenía en el depósito y,
- ii) los litros consumidos en cada etapa.
- b) En una librería, Ana compra un libro con la tercera parte de su dinero y un diccionario con las dos terceras partes de lo que le quedaba. Al salir de la librería tenía \$ 12,00. ¿Cuánto dinero tenía Ana, antes de realizar las compras?
- c) Uno de los empleados de una consultoría contable tiene un salario básico de \$3.700,00 mensuales. Además recibe una comisión del 12% de lo que recauda por atención a clientes eventuales. En el último mes recibió una remuneración total de \$6.520. ¿Cuál fue la recaudación de la consultoría por clientes eventuales que atendió ese empleado?
- 6) Para cada uno de los siguientes ejercicios, halle el valor correspondiente a la incógnita y verifique que el valor hallado permite que la igualdad se cumpla.
- a) $3x - 2 = 10$;
- b) $\frac{5}{2}x - 5 = 3x + 7$;
- c) $\frac{3}{5}(x - 5) = x + 1$;
- d) $2 \cdot (3x - 7) - 4x = -2$
- e) $x + 2 \cdot \left(\frac{1}{6}x + 2\right) = \frac{6}{5}x + 16$
- f) $5x + 40 = 3 \cdot (x + 10)$

“Para mejorar tus conocimientos acerca del tema, consultá textos que lo aborden, apuntes con conceptos teórico de la cátedra o alguna/s página de internet, como por ejemplo: <http://www.vitutor.com/index.html>”

Ecuaciones de segundo grado

1) En cada uno de los enunciados complete con verdadero o falso según corresponda. Justifique su respuesta.

a) Ecuación de 2^{do} grado es toda expresión que involucre la operación potenciación con exponente 2.

.....

b) Una ecuación es de segundo grado o cuadrática cuando al operar con la expresión algebraica dada, mediante propiedades de las operaciones en el conjunto de los números reales se puede reducir a una de la forma $\boxed{a x^2 + b x + c = 0}$, con a, b y $c \in \mathbf{R} \wedge a \neq 0$

.....

c) Una ecuación de 2^{do} grado es aquella donde tenemos una sumatoria de por lo menos términos con una constante c , llamada **término independiente** y En cada término de dicha sumatoria se tiene una constante o **coeficiente** multiplicando a una **incógnita**.

.....

2) En cada caso recuadre la opción correcta, Justifique su respuesta.

a) La ecuación de 2^{do} grado tiene siempre dos raíces reales y distintas:

i) Si;

ii) No;

iii) A veces

b) Para hallar las raíces de una ecuación de 2^{do} grado se debe utilizar el siguiente modelo matemático o

fórmula
$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

i) Siempre;

ii) A veces;

iii) Nunca

3) Lea detenidamente e interprete los siguientes párrafos, para recordar lo trabajado en la secundaria y fijar estos conceptos que le serán de suma utilidad en la carrera que inicia

Toda expresión que pueda transformarse en $\boxed{a x^2 + b x + c = 0}$, con a, b y $c \in \mathbf{R} \wedge a \neq 0$, corresponde a una **ecuación de segundo grado en una incógnita**.

Ejemplos:

✓ $3 x^2 + 6 x - 4 = 0$, se lo puede expresar o pensar como $3 x^2 + 6 x + (-4) = 0$

✓ $5x = 2x^2 - 4 = 0$, se lo puede expresar como $2x^2 + (-5 x) + (-4) = 0$

✓ $(x - 3) \cdot (x + 5) = 0$ se lo puede expresar, mediante la aplicación de las propiedades distributiva de la multiplicación respecto a la adición y la asociativa, como $x^2 + 2x + (-15) = 0$

Para hallar el conjunto solución de la ecuación de segundo grado completa debe emplearse la siguiente expresión o fórmula
$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$
, expresión que tiene su demostración matemática, la que no será indicada en el presente apunte.

La fórmula antes indicada, en función del valor que arroje $\Delta = b^2 - 4.a.c$ (expresión que recibe el nombre de discriminante) permitirá determinar una de las siguientes opciones de solución de la ecuación:

- Si $\Delta = b^2 - 4.a.c > 0$ el conjunto solución de la ecuación tendrá dos elementos que serán números reales distintos, es decir, $x_1 \neq x_2$.
- Si $\Delta = b^2 - 4.a.c = 0$ el conjunto solución de la ecuación tendrá un único elemento que será un número real, es decir, $x_1 = x_2$.
- Si $\Delta = b^2 - 4.a.c < 0$ el conjunto solución de la ecuación tendrá dos elementos que serán números complejos conjugados, es decir, $x_1 \neq x_2$.

4) Para cada uno de los siguientes enunciados seleccione la expresión algebraica que modeliza la situación. Justifique su elección o motivo de descarte, halle el o los valor/es correspondiente a cada incógnita y responda la consigna planteada. Si te es útil, realiza un esquema representativo de la situación.

a) Dentro de 11 años la edad de Pedro será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. ¿Cuál es la edad actual de Pedro?

i) $x + 11 = \frac{1}{2}(x - 13)^2$

.....

ii) $11 = \frac{(x - 13)^2}{2}$

.....

iii) $11x = \frac{x^2 - 13}{2}$

.....

b) Dos números naturales se diferencian en dos unidades y la suma de sus cuadrados es 580. ¿Cuáles son esos números?

i) $x^2 + 2^2 = 580$

.....

ii) $x^2 - 2^2 = 580$

.....

iii) $x^2 + (x + 2)^2 = 580$

.....

c) Un jardín rectangular de 50 m de largo por 34 m de ancho está rodeado por un camino de arena uniforme. Halla la anchura de dicho camino si se sabe que su área es 540 m².

i) $(50 + x).(34 + x) = 540$

.....

ii) $x.[2.(50+x + 34+x)] = 540$

.....

iii) $x.(84 + x) = 540$

.....

5) Para los siguientes enunciados indique la expresión algebraica correspondiente, halle valor/es de cada incógnita y responda el interrogante planteado. Si te es útil, realiza un esquema representativo.

a) Los lados de un triángulo rectángulo tienen por medidas en centímetros tres números pares consecutivos.
Halla los valores de dichos lados.

Ayuda: para el planteo debes utilizar el Teorema de Pitágoras

b) Una pieza rectangular es 4 cm más larga que ancha. Con ella se construye una caja de 840 cm^3 cortando un cuadrado de 6 cm de lado en cada esquina y doblando los bordes.

Halla las dimensiones de la caja.

Ayuda: para el planteo debes recordar que el volumen de una caja se determina multiplicando la superficie de la base de la cja por la altura de la misma.

c) Para cerrar un terreno rectangular de 750 m^2 se han utilizado 110 m de alambre tejido.

Determine las dimensiones del terreno.

6) Para cada uno de los siguientes ejercicios, halle el/los valor/es correspondiente/s a la incógnita y verifique que el/los valor/es hallado/s permite/n que la igualdad se cumpla.

a) $x^2 - 2x - 1 = 0$

d) $18 = 6x + x(x - 13)$

b) $-x^2 + 7x - 10 = 0$

e) $x^2 + (x + 2)^2 = 580$

c) $2x - 3 = 1 - 2x + x^2$

f) $x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{1}{3} = 0$

Inecuaciones

1) En cada uno de los enunciados complete con verdadero o falso según corresponda. Justifique su respuesta.

a) A todas las desigualdades ($>$, $<$, \leq y \geq) se las denominan **inecuaciones**

.....

b) Todas las inecuaciones admiten como solución a un único valor numérico.

.....

c) Al multiplicar ambos miembros de una inecuación por un número negativo se debe invertir el sentido de la desigualdad.

.....

2) En cada caso recuadre la opción correcta, Justifique su respuesta.

a) Al conjunto solución de una inecuación siempre se lo puede representar en la recta numérica:

i) Si;

ii) No;

iii) A veces

b) El conjunto solución de una inecuación incluye a dos subconjuntos de números reales:

- i) Siempre;
- ii) A veces;
- iii) Nunca

3) Lea detenidamente e interprete los siguientes párrafos, para recordar lo trabajado en la secundaria y fijar estos conceptos que le serán de suma utilidad en la carrera que inicia

En algunas situaciones prácticas, se presentaran desigualdades del tipo:

$$a \cdot x + b < 0 \text{ o bien } a \cdot x + b > 0$$

$$a \cdot x + b \leq 0 \text{ o bien } a \cdot x + b \geq 0 \text{ con } a, b \in \mathbf{R},$$

A estas desigualdades se las denominan
inecuaciones

Resolver una inecuación, significa determinar todos los valores de "x" que satisfacen la desigualdad planteada, es decir, que es necesario encontrar el conjunto de valores de "x" que verifiquen la inecuación, este conjunto, en general, es un subconjunto de los números reales, al que lo conocemos como intervalo o uniones de intervalos.

Inecuaciones de la forma $|c \cdot x - b| < a$

Si $a = 0$ ó negativo, la inecuación no admitirá solución. Por definición de valor absoluto.

Sí " a " es positivo, gráficamente, la distancia desde " $c \cdot x$ " a " b " debe ser menor que " a ", lo que implica que $c \cdot x - b < a$ ó $-a < c \cdot x - b$, (por aplicación de propiedad del valor absoluto de un número), es decir, que: $-a < c \cdot x - b < a$.

Al sumar b y multiplicar por $\frac{1}{c}$ cada miembro de la desigualdad se obtiene:

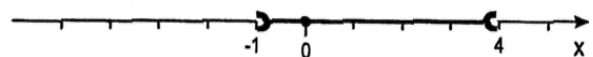
$$\frac{b - a}{c} < x < \frac{b + a}{c}$$

Ejemplo: $|4x - 6| < 10 \Rightarrow -10 < 4x - 6 < 10$

$$\Rightarrow -4 < 4x < 16$$

$$\Rightarrow -1 < x < 4$$

La representación gráfica del conjunto solución es:



Es decir que el conjunto solución de: $|4x - 6| < 10$, es $S = \{x/x \in \mathbf{R} \wedge -1 < x < 4\}$

Inecuaciones de la forma $|x - b| > a$

Si " a " es negativo, la inecuación se cumple para cualquier valor de " x ".

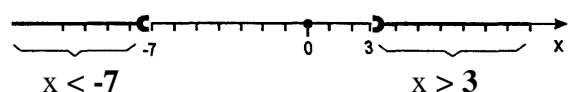
Si $a = 0$, la inecuación se verifica para todo $x \neq b$.

Sí " a " es positivo, gráficamente, la distancia desde " x " a " b " debe ser mayor que " a ", lo que implica que $x - b > a$ ó $x - b < -a$, (por aplicación de propiedad de valor absoluto de un número),

es decir, que: $x > (a + b)$ ó $x < (-a + b)$

$$\text{Ejemplo: } |x - (-2)| > 5 \Rightarrow \begin{cases} x+2 > 5 \\ \text{ó} \\ x+2 < -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ \text{ó} \\ x < -7 \end{cases}$$

La representación gráfica del conjunto solución es:



Es decir que el conjunto solución de: $|x+2| > 5$, es $S = \{x/x \in \mathbf{R} \wedge x > 3\} \cup \{x/x \in \mathbf{R} \wedge x < -7\}$

4) Para los siguientes enunciados seleccione la expresión algebraica que modeliza la situación. Justifique su elección o motivo de descarte, halle el o los valor/es correspondiente a cada incógnita y responda el interrogante planteado. Si te es útil, realiza un esquema representativo de la situación.

a) En el manual de un equipo generador de energía eléctrica se asegura que éste tendrá por lo menos 30 minutos de funcionamiento por cada litro de combustible. La capacidad máxima del depósito de combustible es de 40 litros. ¿Qué cantidades de combustible puede tener el depósito para garantizar un funcionamiento de más de 7,5 horas?

i) $30 \leq x \leq 7,5 \cdot 60$ \wedge $x \leq 40$

ii) $40 : 30 \geq 7,5 \cdot x$

iii) $x \geq 7,5 \cdot 0,5$ \wedge $x \leq 40$

b) La capacidad máxima que soporta un puente es de 40 toneladas, si un camión tiene una Tara de 7.800kg. ¿Qué cantidad de materiales en kg puede transportar el camión para cruzar sin dificultad el puente?

i) $x + 7.800 \leq 40$

ii) $x + 7.800 \leq 40.000$

iii) $x \geq 7.800$ \wedge $x \leq 40$

5) Para cada uno de los siguientes ejercicios, halle el/los valor/es correspondiente/s a la incógnita y verifique que el/los valor/es hallado/s permite/n que la desigualdad se cumpla.

a) $2(x+1) - 3(x-2) < x+6$

d) $2x+3 \geq 1 \wedge -x+2 \geq -1$

b) $\frac{3x+1}{7} - \frac{2-4x}{3} \geq \frac{-5x-4}{14} + \frac{7x}{6}$

c) $2 - \left[-2 \cdot (x+1) - \frac{x-3}{2} \right] \leq \frac{2x}{3} - \frac{5x-3}{12} + 3x$

e) $9x^2 - 81 \geq 0$

Sistema de ecuaciones

1) En cada uno de los enunciados complete con verdadero o falso según corresponda. Justifique su respuesta.

a) El siguiente sistema es un “Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas”

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

b) Un sistema de ecuaciones lineales es cuadrado si la cantidad de ecuaciones es igual a la cantidad de incógnitas.

c) Todos los sistemas de ecuaciones lineales tienen solución única.

2) En cada uno de los siguientes casos recuadre la opción correcta, Justifique su respuesta.

a) Un sistema de ecuaciones lineales es compatible determinado:

- i) Siempre
- ii) A veces
- iii) Nunca

b) Un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas es un sistema cuadrado:

- i) Si
- ii) A veces
- iii) No

c) Una ecuación lineal y una ecuación de 2^{do} grado conforman un sistema de ecuaciones:

- i) Si
- ii) A veces
- iii) No

3) Lea detenidamente e interprete los siguientes párrafos, para recordar lo trabajado en la secundaria y fijar estos conceptos que le serán de suma utilidad en la carrera que inicia

En diversas actividades una variable puede influir sobre otra, la forma en que se expresan estas influencias es por medio de una función o de una ecuación, las mismas pueden ser lineales o no lineales. Constantemente ocurre que las variables incluidas en un problema deben satisfacer a más de una relación o condición.

Supongamos por ejemplo una situación relacionada con la producción de reactivos, que la cantidad de unidades que se fabriquen de cada producto puede estar restringida por condiciones técnicas, tales como el tiempo disponible de cada equipo, las proporciones entre los diversos insumos, o las condiciones financieras, tales como la disponibilidad de efectivo para la adquisición de materia prima, entre otros.

Al expresar cada una de esas condiciones (o relaciones) en forma de una ecuación lineal, el problema queda planteado o modelizado mediante un sistema de ecuaciones lineales.

Como introducción del tema, analicemos el siguiente ejemplo de sistema de ecuaciones lineales, utilizando diferentes métodos de resolución y de notación.

Ejemplo: Si nos piden determinar el precio y la cantidad de unidades correspondiente al equilibrio en un mercado para la comercialización de un determinado producto, donde se ha establecido que las funciones de demanda (D) y de oferta (O) son las siguientes:

$$\begin{aligned} D : & \begin{cases} 2p + 4q_d = 50 \\ O : & \begin{cases} 2p - 6q_o = 10 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Debemos tener en cuenta que el precio del equilibrio en el mercado es aquel para el cual se igualan las cantidades de la oferta y de la demanda, es decir, $q_d = q_o$ (cantidad demandada = cantidad ofertada)

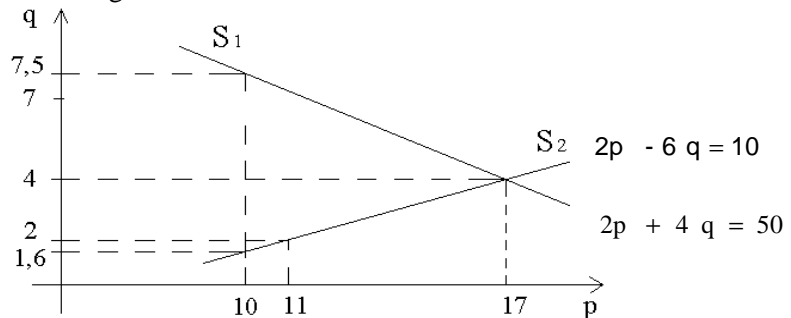
Al sistema anterior se lo indica más sencillamente de la siguiente forma

$$\begin{cases} 2p + 4q = 50 \\ 2p - 6q = 10 \end{cases} \quad \text{Que también se lo puede expresar como:} \quad \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 50 \\ 2x_1 - 6x_2 = 10 \end{cases}$$

La representación gráfica del sistema es la siguiente

Tabla p/representación gráfica

| p | q _d | q _o |
|----|----------------|----------------|
| 10 | 7,5 | 1,6 |
| 11 | 7 | 2 |
| 17 | 4 | 4 |



Si con S_1 se simboliza el conjunto solución de la primera ecuación y con S_2 el conjunto solución de la segunda ecuación, se tendrá entonces $S_1 \cap S_2 = S$ como solución del sistema.

$$\Rightarrow S = \{(x_1; x_2) / (x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2 / 50 = 2x_1 + 4x_2 \wedge 10 = 2x_1 - 6x_2\}$$

O bien, al expresarlo del otro modo será

$$\Rightarrow S = \{(p; q) / (p; q) \in \mathbb{R}^2 / 50 = 2p + 4q \wedge 10 = 2p - 6q\}$$

Conjunto solución

Resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, es encontrar la dupla real (t_1, t_2) que es solución de cada una de las ecuaciones que conforman el sistema.

En el ejemplo anterior: S_1 es solución de la ecuación $2p + 4q = 50$ y S_2 es solución de la ecuación $2p - 6q = 10$, siendo $S_1 \neq S_2$ y $S = S_1 \cap S_2 = \{(17, 4)\}$ que es la única solución del sistema, único punto en común de las rectas.

Es decir que: $\{(17, 4)\}$ es el conjunto solución del sistema.

Como el conjunto solución está formado por un único par ordenado, diremos que tiene un único elemento o solución única, simbólicamente lo indicamos del siguiente modo $o(S) = 1$

El ejemplo trabajado es un sistema:
$$\begin{cases} 2p + 4q = 50 \\ 2p - 6q = 10 \end{cases} \quad \text{compatible determinado.}$$

Compatible por tener solución y **determinado** por tener solución única.

Resolución de sistemas de ecuaciones

Anteriormente se indicó que resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, es encontrar la dupla real (t_1, t_2) que es solución de cada una de las ecuaciones que conforman el sistema.

Para determinar la dupla real o las duplas reales existen diferentes procedimientos denominados métodos de resolución. A continuación trabajaremos algunos de ellos

Método de sustitución

Para resolver un sistema de ecuaciones por el método de sustitución debemos proceder del siguiente modo:

- 1°. **Despejar** una incógnita en una de las ecuaciones.
- 2°. **Sustituir** en la otra ecuación esa incógnita por la expresión hallada en el paso anterior, obteniéndose de ese modo una ecuación con una sola incógnita.
- 3°. **Resolver** la ecuación obtenida en el paso anterior.
- 4°. **Sustituir** la incógnita despejada en el 1°, por el valor obtenido en el 3° y resolver la nueva ecuación.
- 5°. **Verificar** que los dos valores así obtenidos constituyen la solución del sistema, es decir, permiten que las igualdades se cumplan.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 50 & (1) \\ 2x - 6y = 10 & (2) \end{cases}$$

1°. **Despejamos** una de las incógnitas en una de las dos ecuaciones. Conviene elegir la incógnita que tenga el coeficiente más bajo, en este caso despejamos la incógnita o variable “x” en la ecuación (2).

$2x - 6y = 10 \Rightarrow$ por aplicación de conocidas propiedades de las operaciones resulta:

$$x = 5 + 3y \quad (3)$$

2°. **Sustituimos** en la otra ecuación la variable “x”, por su equivalente “5 + 3y” obtenido en el paso anterior, es decir, reemplazamos la equivalencia indicada en la ecuación (3) en la (1): $2(5 + 3y) + 4y = 50$

3°. **Resolvemos** la ecuación obtenida en el paso anterior:

$$2(5 + 3y) + 4y = 50 \Rightarrow 10 + 6y + 4y = 50 \Rightarrow 10y = 40 \Rightarrow \boxed{y = 4} \quad (4)$$

4°. **Sustituimos** el valor obtenido en el paso anterior, en la ecuación que tiene la otra variable despejada, es decir reemplazamos (4) en (3).

$$x = 5 + 3 \cdot 4 \Rightarrow \boxed{x = 17} \quad (5)$$

5°. **Verificamos** que los valores obtenidos hacen cumplir ambas igualdades, reemplazamos (4) y (5)

En la ecuación (1) resultando: $2 \cdot 17 + 4 \cdot 4 = 50 \Rightarrow 34 + 16 = 50 \Rightarrow 50 = 50$

En la ecuación (2) resultando: $2 \cdot 17 - 6 \cdot 4 = 10 \Rightarrow 34 - 24 = 10 \Rightarrow 10 = 10$

Como ambas igualdades se cumplen decimos que el conjunto solución del sistema es $S = \{(17, 4)\}$, por lo tanto, el sistema es **compatible determinado**.

El método de resolución tratado, es uno de los conocidos como “métodos de resolución analítica de sistema de ecuaciones lineales”. Existen otros, los que serán estudiados en el desarrollo de las Asignaturas “Análisis Matemático” de las Carreras Contador Público y Licenciatura en Comercio Exterior, “Matemática I” de las Carreras: Licenciatura en Tecnologías de la Información y Comunicación y Licenciatura en Administración de Empresas Agropecuarias.

Los sistemas de ecuaciones lineales no siempre son **compatible determinado**, también, pueden ser **compatible indeterminado** o **Incompatible**. Casos que serán abordados más adelante.

Método de resolución gráfica

Para resolver un sistema de ecuaciones mediante la representación gráfica de la función asociada a cada una de las ecuaciones debemos proceder del siguiente modo.

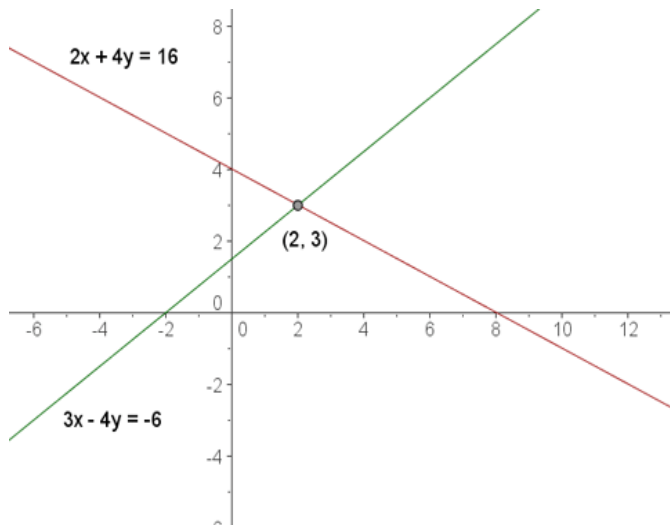
1°. **Representar** en un único sistema de ejes cartesianos la función asociada a cada una de las ecuaciones.

2°. **Localizar**, el/los punto/s de intersección/es de las gráficas de las funciones.

3°. **Verificar** que las coordenadas de el/los punto/s obtenidos constituyen la solución del sistema, es decir, permiten que las igualdades se cumplan.

Ejemplo 1:
$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 & (1) \\ 2x + 4y = 16 & (2) \end{cases}$$

La representación gráfica correspondiente es la siguiente:



OBSERVACIÓN:

Para realizar la representación gráfica de estas ecuaciones, puedes utilizar algunos de los procedimientos (empleados en las Instituciones de Educación de Secundaria) para la representación gráfica de funciones lineales:

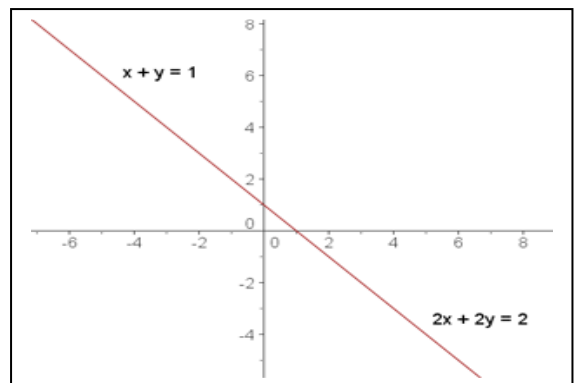
- desparjar la incógnita o variable “y” en cada ecuación, confeccionar la tabla de valores correspondiente y ubicar los puntos en un único sistema de ejes.
- Utilización de los valores de la ordenada al origen y de la pendiente de cada recta para la ubicación de puntos en el único sistema de ejes.

La solución del sistema es el punto de intersección de las dos rectas, cuya coordenadas en este ejemplo son $(2; 3)$, como es un único par el *sistema* es **compatible determinado**.

Ejemplo 2:
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

En este caso al despejar la variable o incógnita “y” y realizar la representación gráfica resulta que las rectas son coincidentes. Entonces cualquier punto de la misma es solución del sistema, diremos que el sistema tiene infinitas soluciones.

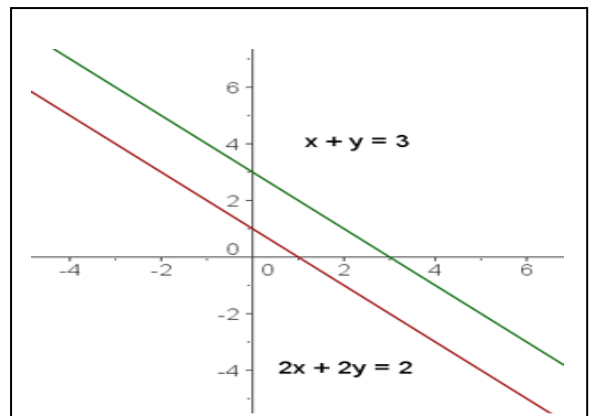
El *sistema* es **compatible indeterminado**



Ejemplo 3:
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

En este caso al despejar la variable o incógnita “y” y realizar la representación gráfica resulta que las rectas son paralelas. Entonces no existen puntos en común, por lo tanto el sistema carece de solución.

El *sistema* es **incompatible**.



Sistemas de ecuaciones no lineales

Cuando al menos una de las ecuaciones que conforma el sistema **no es** de 1^{er} grado o lineal, decimos que se trata de un sistema de ecuaciones **no lineal**.

Ejemplo
$$\begin{cases} x + y = 7 & (1) \\ x \cdot y = 10 & (2) \end{cases}$$

El método de resolución analítica utilizado para determinar la solución de estos sistemas es el **método de sustitución**, para ello debemos seguir los siguientes pasos:

1°. **Despejar una incógnita** en una de las ecuaciones, preferentemente en la de 1^{er} grado.

En el ejemplo la ecuación (1) al despejar la variable “y”, resulta $y = 7 - x$ (3)

2°. **Sustituir** el valor de la incógnita despejada en la otra ecuación. Reemplazamos (3) en (2)

En el ejemplo resulta: $x \cdot (7 - x) = 10$

3°. **Resolver** la ecuación resultante (ecuación de 2^{do} grado). En el ejemplo reemplazar (3) en (2)

$$x \cdot (7 - x) = 10 \Rightarrow 7x - x^2 = 10 \Rightarrow -x^2 + 7x - 10 = 0 \Rightarrow a = -1; b = 7 \text{ y } c = -10$$

$$\text{Al utilizar la resolvente resulta } x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 40}}{-2} = \frac{-7 \pm 3}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 5 \end{cases} \quad (4)$$

4°. **Sustituir** cada uno de los valores resultantes en la ecuación obtenida en 1°. , obteniéndose así los valores correspondientes de la otra incógnita. Reemplazamos (4) en (3)

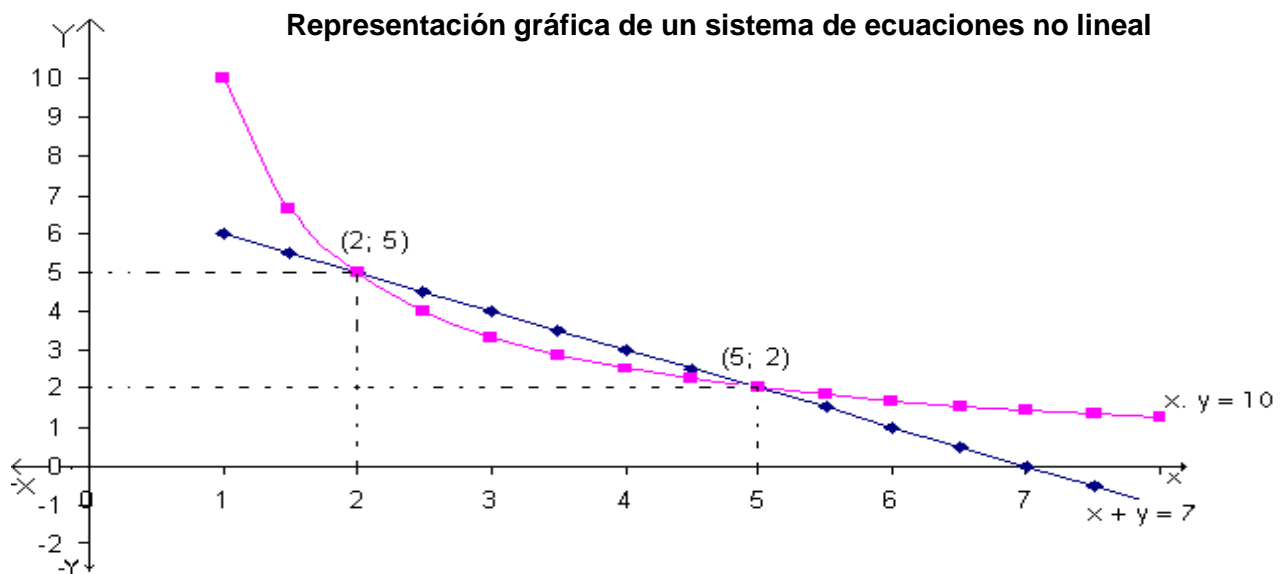
$$\text{Para } \boxed{x = 2} \Rightarrow y = 7 - 2 \Rightarrow \boxed{y = 5} \text{ y Para } \boxed{x = 5} \Rightarrow y = 7 - 5 \Rightarrow \boxed{y = 2}$$

Resultando entonces los pares ordenados (2; 5) y (5; 2) solución del sistema

Al verificar para el par (2; 5) resulta: $2 + 5 = 7$ y $2 \cdot 5 = 10$ que verifican las 2 ecuaciones

Para el par (5; 2) resulta también verdadero dado que $5 + 2 = 7$ y $5 \cdot 2 = 10$

La resolución gráfica del ejemplo de sistema de ecuaciones no lineales, es la siguiente



Para la representación gráfica de estos sistemas se debe seguir el procedimiento utilizado en las Instituciones de Educación Secundaria para la representación gráficas de funciones.

4) Para los siguientes enunciados seleccione la expresión algebraica que modeliza la situación. Justifique su elección o motivo de descarte, halle, si es posible el o los valor/es correspondiente/s a cada incógnita y responda la consigna planteada.

a) Una granja tiene cerdos y pollos, en total hay 35 cabezas y 116 patas. ¿Cuántos cerdos y pollos hay?

$$\text{i)} \begin{cases} c + p = 35 \\ 4c + 2p = 116 \end{cases}$$

$$\text{ii)} \begin{cases} c + p = 151 \\ p - c = 81 \end{cases}$$

- b) Las tres cuartas partes de la edad del padre de Juan excede en 15 años a la edad de éste. Hace cuatro años la edad del padre era doble de la edad del hijo. Hallar las edades de ambos.

$$i) \begin{cases} \frac{3}{4}p + 15 = j \\ 4 + p = 2j \end{cases}$$

$$ii) \begin{cases} \frac{3}{4}p = j + 15 \\ p - 4 = 2.(j - 4) \end{cases}$$

- c) En una reunión hay doble número de mujeres que de hombres y triple número de niños que de hombres y mujeres juntos. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños hay si la reunión la componen 96 personas?

$$i) \begin{cases} m = 2h \\ n = 3.(m + h) \\ h + m + n = 96 \end{cases}$$

$$ii) \begin{cases} m = 2 + h \\ n = 3 + m + h \\ h + m + n = 96 \end{cases}$$

- 5) Para los siguientes enunciados indique la expresión algebraica correspondiente, halle el/los valor/es de c/incógnita y responda el interrogante planteado. Si es útil, realice un esquema representativo de la situación.

Una empresa tiene un salario constituido por un básico y una bonificación por año de antigüedad. Si un empleado con **4 años** de antigüedad gana \$ **1.900** y otro con **20 años** de antigüedad gana \$ **3.500**, determinar cual es el sueldo básico y cual es la bonificación por año.

- b) En una empresa trabajan 60 personas. Usan gafas el 16% de los hombres y el 20% de las mujeres. Si el número total de personas que usan gafas es 11. ¿Cuántos hombres y mujeres hay en la empresa?
- c) Halla el valor de los tres ángulos de un triángulo sabiendo que B mide 40° más que C y que A mide 40° más que B.
- d) La base de un rectángulo es doble que su altura. ¿Cuáles son sus dimensiones si el perímetro mide 30 cm?
- e) Para cerrar un terreno rectangular de 750 m^2 se han utilizado 110 m de alambre tejido.

Determine las dimensiones del terreno.

- 6) Para cada uno de los siguientes ejercicios, halle el/los valor/es correspondiente/s a c/incógnita y verifique que el/los valor/es hallado/s permite/n que las igualdades se cumplan.

$$a) \begin{cases} 3x + y = 7 \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = -1 \\ 3x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \frac{x + 3y}{2} = 5 \\ 3x - y = 5y \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 4 \\ \frac{x}{3} + y = 1 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x + y = 7 \\ x \cdot y = 10 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y = 7x \end{cases}$$

“Para mejorar tus conocimientos acerca del tema, consultá textos que lo aborden, apuntes con conceptos teórico de la cátedra o alguna/s página de internet, como por ejemplo: <http://www.vitutor.com/index.html>”

Elementos de Matemática para el Ingreso a la F.A.E.N.

Guía de Actividades del Eje 4: Trigonometría

Año 2014

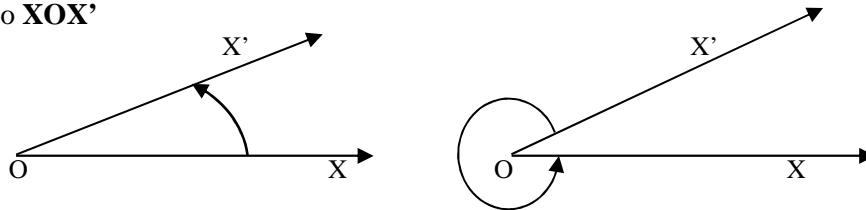
Objetivos del Eje

- Comprender el concepto de funciones trigonométricas y de algunas de las relaciones que se establecen entre las mismas.
- Determinar la función correspondiente a ángulos dados y a partir del valor de una función determinar la amplitud del ángulo correspondiente.
- Desarrollar la capacidad de extraer y/o arribar a conclusiones matemática a partir de la resolución de situaciones problemáticas

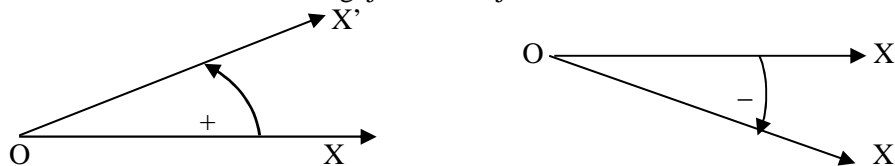
Generación de Ángulos

Los ángulos son generados por una semirrecta móvil al girar alrededor de su origen, el que es un punto fijo del plano.

Sean **O** (punto fijo) y **OX** semirrecta móvil, la que al pasar de su posición inicial a otra **OX'**, describe el ángulo **XOX'**



Signo de los ángulos: Existen 2 sentidos de giro: uno positivo y el otro negativo. Es positivo el sentido de giro contrario al movimiento de las agujas del reloj.



Medida de los ángulos

Medir un ángulo es compararlo con otro que se toma como unidad. En trigonometría existen tres sistemas de medición de ángulos: sexagesimal, circular y centesimal.

Sistema sexagesimal

Unidad de medida: grado sexagesimal, que es la noventa ava parte del ángulo recto.

Submúltiplos: minuto sexagesimal y segundo sexagesimal.

$$1^\circ = \frac{1R}{90} \quad 1' = \frac{1^\circ}{60} \quad 1'' = \frac{1'}{60} \quad \text{ó} \quad \begin{array}{l} 1R = 90^\circ \\ 1^\circ = 60' \\ 1' = 60'' \end{array}$$

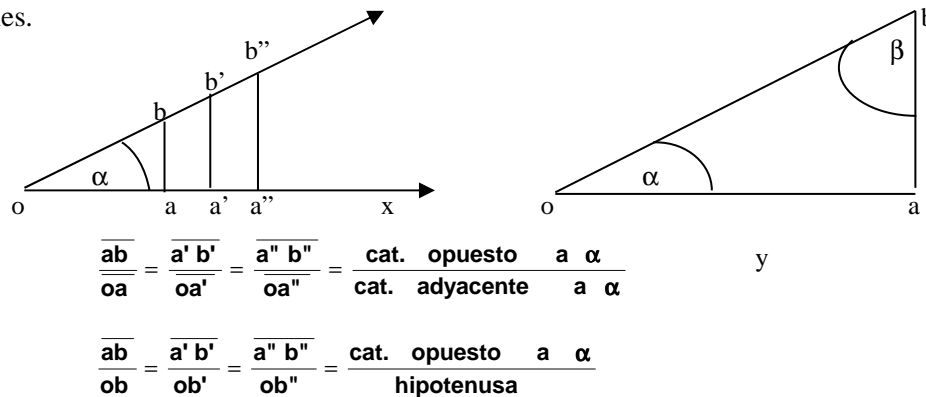
$$1 \text{ ángulo llano} = 180^\circ$$

$$1 \text{ ángulo de un giro} = 360^\circ$$

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

Sea el ángulo α , con vértice en **O** y sobre uno de sus lados (la semirrecta \overrightarrow{OX}) tracemos las perpendiculares \overline{ab} , $\overline{a'b'}$, $\overline{a''b''}$, las que determinan triángulos semejantes (por tener dos ángulos iguales: α y el recto);

en los triángulos semejantes los lados homólogos son proporcionales y podemos entonces escribir las siguientes razones.



estas razones son sólo algunas de las que podemos escribir, lo que importa destacar es que son números abstractos, independientes de las dimensiones de los lados del triángulo, sólo dependen del valor del ángulo α .

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS: son los números abstractos que se obtienen de las razones que pueden establecerse entre los pares de lados de un triángulo.

Ellas son:

$$\begin{aligned} \text{sen } \alpha &= \frac{\text{cat. opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{\overline{ob}} ; & \text{cosec } \alpha &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cat. opuesto}} = \frac{\overline{ob}}{a} \\ \text{cos } \alpha &= \frac{\text{cat. adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{\overline{ob}} ; & \text{sec } \alpha &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cat. adyacente}} = \frac{\overline{ob}}{a} \\ \text{tg } \alpha &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{\overline{oa}} ; & \text{cotg } \alpha &= \frac{\text{cat. adyacente}}{\text{cat. opuesto}} = \frac{\overline{oa}}{a} \end{aligned}$$

Sólo hemos escrito las funciones trigonométricas del ángulo agudo α , también pueden escribirse las del

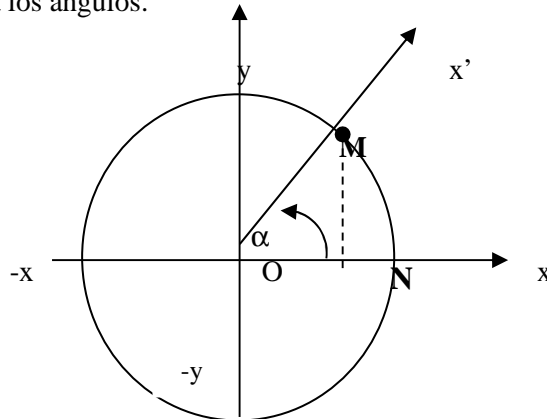
ángulo agudo $\hat{\beta}$ Como $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ (ángulos complementarios) $\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta \\ \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha \end{cases}$

Al escribir las funciones trigonométricas de $\hat{\beta}$, observamos que en ángulos complementarios las funciones de uno de ellos, son las cofunciones del otro.

| | | |
|--|---|------------|
| $\text{sen } \alpha = \frac{\overline{ab}}{\overline{ob}}$ | $\text{sen } \beta = \frac{\overline{oa}}{\overline{ob}}$ | seno |
| $\text{cos } \alpha = \frac{\overline{oa}}{\overline{ob}}$ | $\text{cos } \beta = \frac{\overline{ab}}{\overline{ob}}$ | coseno |
| $\text{tg } \alpha = \frac{\overline{ab}}{\overline{oa}}$ | $\text{tg } \beta = \frac{\overline{oa}}{\overline{ab}}$ | tangente |
| $\text{cotg } \alpha = \frac{\overline{oa}}{\overline{ab}}$ | $\text{cotg } \beta = \frac{\overline{ab}}{\overline{oa}}$ | cotangente |
| $\text{sec } \alpha = \frac{\overline{ob}}{\overline{oa}}$ | $\text{sec } \beta = \frac{\overline{ob}}{\overline{ab}}$ | secante |
| $\text{cosec } \alpha = \frac{\overline{ob}}{\overline{ab}}$ | $\text{cosec } \beta = \frac{\overline{ob}}{\overline{oa}}$ | cosecante |

FUNCIONES EN EL CÍRCULO TRIGONOMETRICO

Círculo trigonométrico: es el círculo cuyo radio se considera la unidad, y en el cual existe sentido de giro positivo para los ángulos.



ox' corta al círculo en M

$M(x; y)$

$N(x; 0)$ \overline{ON} = abscisa = x

$O(0, 0)$ \overline{NM} = ordenada = y

\overline{OM} = radio vector = ρ

Con x , y , ρ formamos las siguientes razones en el triángulo \hat{ONM}

$$\text{sen } \alpha = \frac{y}{\rho}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{x}{\rho}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{y}{x}$$

$$\text{cosec } \alpha = \frac{\rho}{y}$$

$$\text{sec } \alpha = \frac{\rho}{x}$$

$$\text{cotg } \alpha = \frac{x}{y}$$

El radio vector ρ siempre se toma con signo positivo; de los semiejes $\overrightarrow{ox} (+)$; $\overrightarrow{ox} (-)$; $\overrightarrow{oy} (+)$; $\overrightarrow{oy} (-)$ ya se conocen sus signos.

Valores exactos de las funciones trigonométricas de las amplitudes de algunos ángulos:

Valores para $\alpha = 0^\circ$

$$\text{Si } \alpha = 0^\circ \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \rho = x = 1 \end{cases} \quad \therefore$$

$$\text{sen } 0^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{0}{1} = 0,$$

$$\text{cos } 0^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$\text{tg } 0^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0,$$

$$\text{cotg } 0^\circ = \frac{x}{y} = \frac{1}{0} = \infty,$$

$$\text{sec } 0^\circ = \frac{\rho}{x} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$\text{cosec } 0^\circ = \frac{\rho}{y} = \frac{1}{0} = \infty$$

Valores para $\alpha = 90^\circ$

$$\text{Si } \alpha = 90^\circ \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \\ \rho = 1 \end{cases}$$

$$\text{sen } 90^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$\text{cos } 90^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{0}{1} = 0,$$

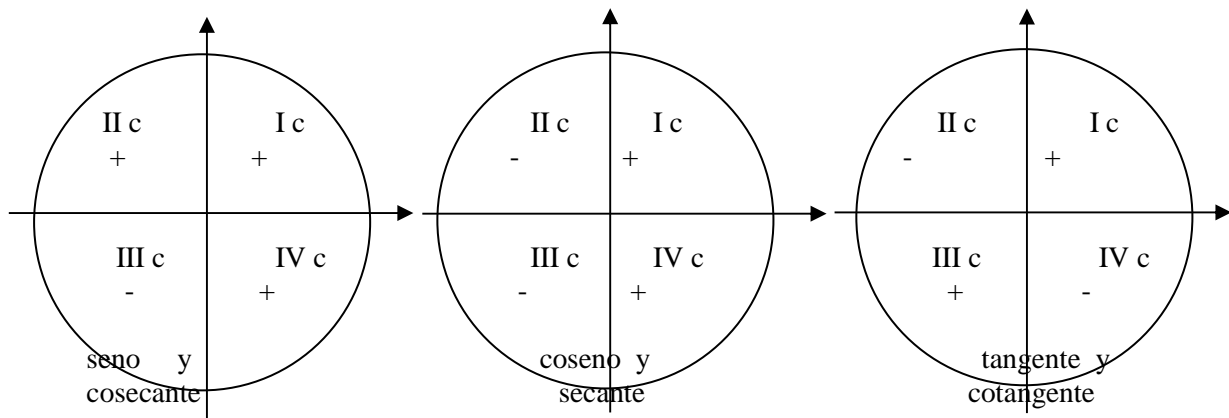
$$\text{tg } 90^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\text{cotg } 90^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0,$$

$$\text{sec } 90^\circ = \frac{1}{x} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\text{cosec } 90^\circ = \frac{\rho}{y} = \frac{1}{1} = 1$$

SIGNO DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN LOS CUATRO CUADRANTES

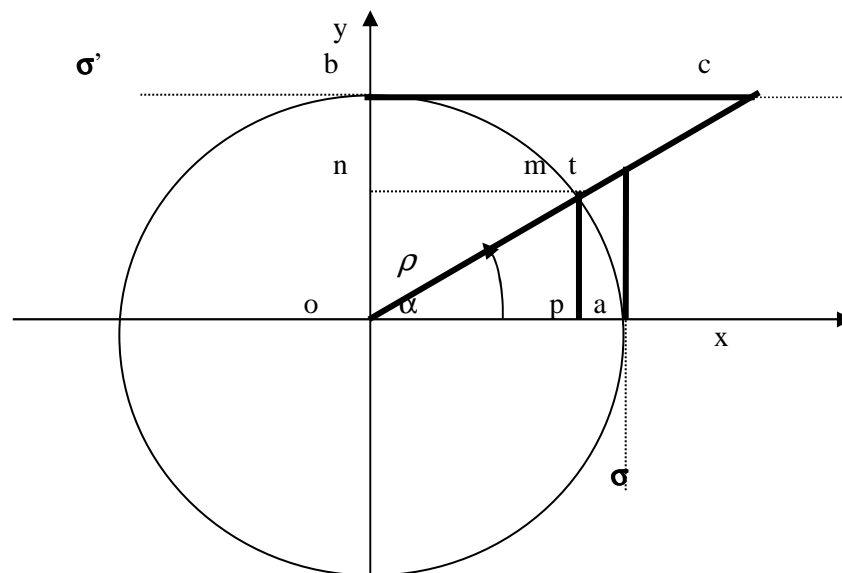


Regla de los signos

- 1) El signo del seno y de la cosecante es el de la ordenada.
- 2) El signo del coseno y de la secante es el de la abscisa.
- 3) El signo de la tg y de la cotangente es positivo cuando lo son la ordenada y la abscisa, o cuando la ordenada y la abscisa son negativas.

Representación Geométrica de las Funciones Trigonómicas

En el primer cuadrante:



Círculo trigonométrico de centro O y radio ρ ; $\hat{\alpha}$ ángulo central de arco **am**; a es origen del arco y m extremo libre. En este círculo podemos marcar los segmentos que representan gráficamente a las funciones trigonométricas.

$$\text{sen } \alpha = \frac{\overline{pm}}{\overline{om}} = \frac{\overline{pm}}{\rho} = \overline{pm} \quad (+) \quad (\text{longitud de } \overline{pm})$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\overline{op}}{\overline{om}} = \frac{\overline{op}}{\rho} = \overline{op} \quad (+)$$

Si trazamos por a la tg a la circunferencia, obtenemos σ llamado el eje de las tangentes. El eje de las cotangentes σ' trazado por b, es el segundo eje tg.

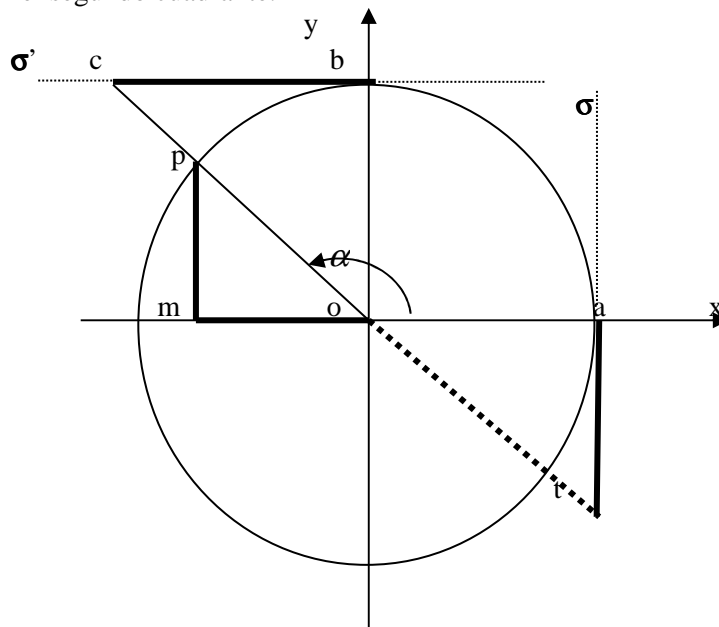
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{pm}}{\overline{op}} = \frac{\overline{at}}{\overline{oa}} = \frac{\overline{at}}{1} = \overline{at} \quad (+) \quad (\text{longitud del segmento } \overline{at})$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\overline{op}}{\overline{pm}} = \frac{\overline{nm}}{\overline{on}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{ob}} = \frac{\overline{bc}}{1} = \overline{bc} \quad (+)$$

$$\sec \alpha = \frac{\overline{om}}{\overline{op}} = \frac{\overline{ot}}{\overline{oa}} = \frac{\overline{ot}}{1} = \overline{ot} \quad (+)$$

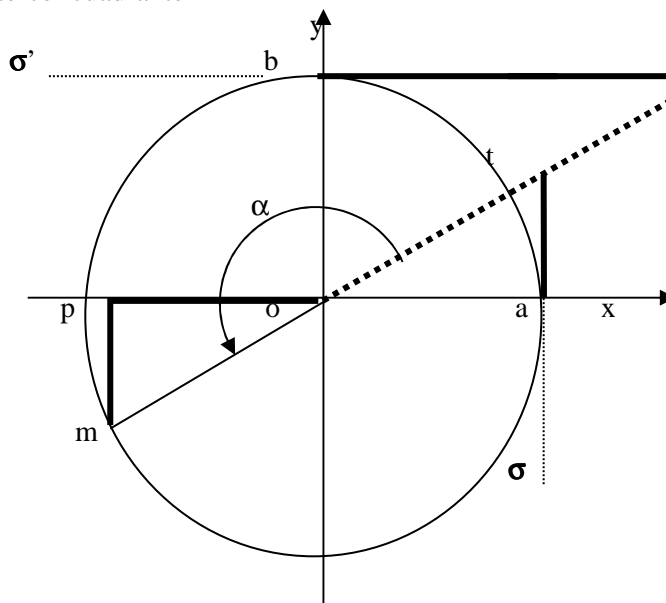
$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{\overline{om}}{\overline{pm}} = \frac{\overline{om}}{\overline{on}} = \frac{\overline{oc}}{\overline{ob}} = \frac{\overline{oc}}{\rho} = \overline{oc} \quad (+)$$

En el segundo cuadrante:



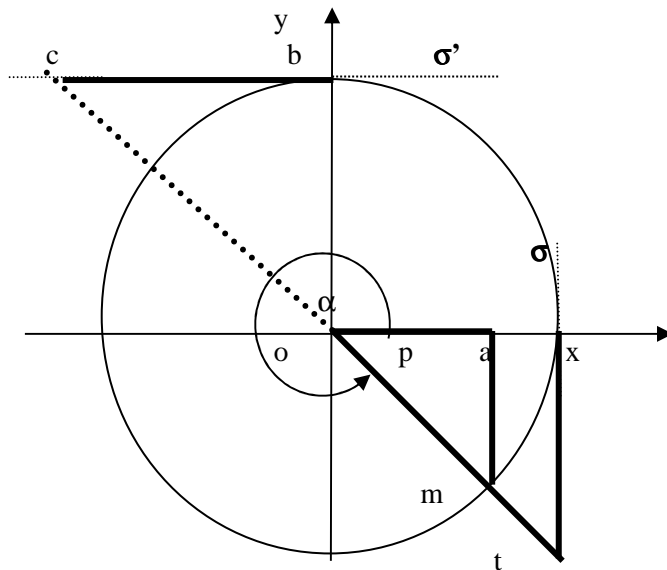
$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha &= \overline{mp} \quad (+) \\ \cos \alpha &= \overline{om} \quad (-) \\ \operatorname{tg} \alpha &= \overline{at} \quad (-) \\ \operatorname{cotg} \alpha &= \overline{cb} \quad (-) \\ \sec \alpha &= \overline{ot} \quad (-) \\ \operatorname{cosec} \alpha &= \overline{oc} \quad (+) \end{aligned}$$

En el tercer cuadrante



$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha &= \overline{mp} \quad (-) \\ \cos \alpha &= \overline{op} \quad (-) \\ \operatorname{tg} \alpha &= \overline{at} \quad (+) \\ \operatorname{cotg} \alpha &= \overline{bc} \quad (+) \\ \sec \alpha &= \overline{ot} \quad (-) \\ \operatorname{cosec} \alpha &= \overline{oc} \quad (-) \end{aligned}$$

En el cuarto cuadrante:



$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \alpha &= \overline{mp} \quad (-) \\ \cos \alpha &= \overline{op} \quad (+) \\ \operatorname{tg} \alpha &= \overline{at} \quad (-) \\ \operatorname{cotg} \alpha &= \overline{bc} \quad (-) \\ \sec \alpha &= \overline{ot} \quad (-) \\ \operatorname{cosec} \alpha &= \overline{oc} \quad (-)\end{aligned}$$

Algunas relaciones entre las funciones trigonométricas de un ángulo

$$\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha = \frac{y}{\rho} \cdot \frac{\rho}{y} = 1$$

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{y}{\rho} : \frac{x}{\rho} = \frac{y}{\rho} \cdot \frac{\rho}{x} = \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{x}{\rho} : \frac{y}{\rho} = \frac{x}{\rho} \cdot \frac{\rho}{y} = \frac{x}{y} = \operatorname{cotg} \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha = \frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y} = 1$$

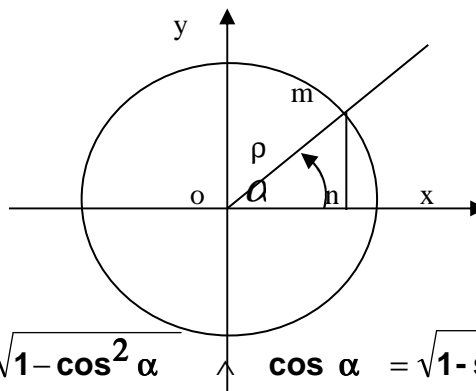
Relaciones Pitagóricas

$$1) \quad \overline{on}^2 + \overline{nm}^2 = \overline{om}^2$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

$$\left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{y}{\rho}\right)^2 = \left(\frac{\rho}{\rho}\right)^2$$

$$\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 \quad \therefore \quad \operatorname{sen} \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \quad \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}$$



$$2) \quad x^2 + y^2 = \rho^2$$

$$\left(\frac{x}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{\rho}{x}\right)^2$$

$$\therefore 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha$$

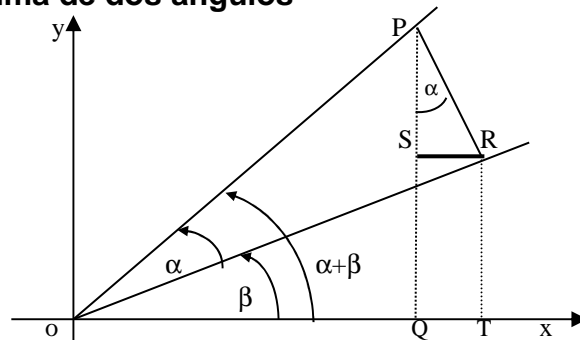
$$3) \quad x^2 + y^2 = \rho^2$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{y}{y}\right)^2 = \left(\frac{\rho}{y}\right)^2$$

$$\therefore \operatorname{cotg}^2 \alpha + 1 = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO COMPUESTO

Coseno de la suma de dos ángulos



Marcamos $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ desde un punto P ubicado en el lado terminal de $(\hat{\alpha} + \hat{\beta})$, se trazan dos perpendiculares, las que cortan al eje de las x en el punto Q y al lado terminal de α en R .

Desde R se trazan dos perpendiculares: una al eje x , que lo corta en T y otra al segmento QP que lo corta en S .

Se consideran luego los triángulos $\triangle OTR$ y $\triangle RSP$, en ellos se da la semejanza de triángulos por tener los 3 ángulos iguales.

$$\left. \begin{array}{l} \triangle OTR = \triangle RSP = 90^\circ \\ \triangle TOR = \triangle SPR \text{ por los lados perpendiculares} \\ \text{Luego } \triangle SRP = \triangle TRO \text{ por lados perpendiculares} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OTR \sim \triangle RSP \Rightarrow$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{OQ}{OP} = \frac{OT - QT}{OP} = \frac{OT}{OP} - \frac{QT}{OP} = \frac{OT}{OR} \cdot \frac{OR}{OP} - \frac{QT}{RP} \cdot \frac{RP}{OP} \wedge QT = SR$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

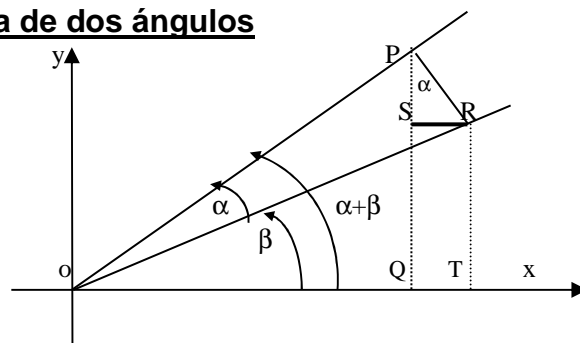
Coseno de la diferencia de dos ángulos

Reemplazamos β por $-\beta$...

$$\begin{aligned} \Rightarrow \cos(\alpha + \beta) &= \cos[\alpha + (-\beta)] = \cos \alpha \cdot \cos(-\beta) - \sin \alpha \cdot \sin(-\beta) = \\ &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot (-\sin \beta) \end{aligned}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Seno de la suma de dos ángulos



por razonamiento análogo al caso del coseno de la suma de dos ángulos, resulta:

$$\begin{aligned}\overline{\text{sen}}(\alpha + \beta) &= \frac{\overline{\text{QP}}}{\overline{\text{OP}}} = \frac{\overline{\text{QS}} + \overline{\text{SP}}}{\overline{\text{OP}}} = \frac{\overline{\text{QS}}}{\overline{\text{OP}}} + \frac{\overline{\text{SP}}}{\overline{\text{OP}}} = \wedge \quad \overline{\text{QS}} = \overline{\text{TR}} \\ \overline{\text{sen}}(\alpha + \beta) &= \frac{\overline{\text{TR}}}{\overline{\text{OP}}} + \frac{\overline{\text{SP}}}{\overline{\text{OP}}} = \frac{\overline{\text{TR}}}{\overline{\text{OR}}} \cdot \frac{\overline{\text{OR}}}{\overline{\text{OP}}} + \frac{\overline{\text{SP}}}{\overline{\text{PR}}} \cdot \frac{\overline{\text{PR}}}{\overline{\text{OP}}} =\end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{\text{sen}}(\alpha + \beta) = \overline{\text{sen}} \alpha \cdot \overline{\text{cos}} \beta + \overline{\text{cos}} \alpha \cdot \overline{\text{sen}} \beta}$$

Senos de la diferencia de dos ángulos

Reemplazamos β por $-\beta \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\overline{\text{sen}}[\alpha + (-\beta)] &= \overline{\text{sen}} \alpha \cdot \overline{\text{cos}}(-\beta) + \overline{\text{cos}} \alpha \cdot \overline{\text{sen}}(-\beta) \\ \overline{\text{sen}}(\alpha - \beta) &= \overline{\text{sen}} \alpha \cdot \overline{\text{cos}} \beta + \overline{\text{cos}} \alpha \cdot (-\overline{\text{sen}} \beta)\end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{\text{sen}}(\alpha - \beta) = \overline{\text{sen}} \alpha \cdot \overline{\text{cos}} \beta - \overline{\text{cos}} \alpha \cdot \overline{\text{sen}} \beta}$$

Tangente de la suma de dos ángulos

$$\overline{\text{tg}}(\alpha + \beta) = \frac{\overline{\text{sen}}(\alpha + \beta)}{\overline{\text{cos}}(\alpha + \beta)} = \frac{\overline{\text{sen}} \alpha \cdot \overline{\text{cos}} \beta + \overline{\text{cos}} \alpha \cdot \overline{\text{sen}} \beta}{\overline{\text{cos}} \alpha \cdot \overline{\text{cos}} \beta - \overline{\text{sen}} \alpha \cdot \overline{\text{sen}} \beta} =$$

dividimos numerador y denominador por: $\overline{\text{cos}} \alpha \cdot \overline{\text{cos}} \beta$

$$\begin{aligned}&= \frac{\frac{\overline{\text{sen}} \alpha \cdot \overline{\text{cos}} \beta}{\overline{\text{cos}} \alpha \cdot \overline{\text{cos}} \beta} + \frac{\overline{\text{cos}} \alpha \cdot \overline{\text{sen}} \beta}{\overline{\text{cos}} \alpha \cdot \overline{\text{cos}} \beta}}{\frac{\overline{\text{cos}} \alpha \cdot \overline{\text{cos}} \beta}{\overline{\text{cos}} \alpha \cdot \overline{\text{cos}} \beta} - \frac{\overline{\text{sen}} \alpha \cdot \overline{\text{sen}} \beta}{\overline{\text{cos}} \alpha \cdot \overline{\text{cos}} \beta}} = \frac{\frac{\overline{\text{sen}} \alpha}{\overline{\text{cos}} \alpha} + \frac{\overline{\text{sen}} \beta}{\overline{\text{cos}} \beta}}{1 - \frac{\overline{\text{sen}} \alpha}{\overline{\text{cos}} \alpha} \cdot \frac{\overline{\text{sen}} \beta}{\overline{\text{cos}} \beta}} = \frac{\overline{\text{tg}} \alpha + \overline{\text{tg}} \beta}{1 - \overline{\text{tg}} \alpha \cdot \overline{\text{tg}} \beta}\end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{\text{tg}}(\alpha + \beta) = \frac{\overline{\text{tg}} \alpha + \overline{\text{tg}} \beta}{1 - \overline{\text{tg}} \alpha \cdot \overline{\text{tg}} \beta}}$$

Tangente de la diferencia de dos ángulos

Reemplazamos β por $-\beta \Rightarrow \overline{\text{tg}}(\alpha + \beta) = \overline{\text{tg}}[\alpha + (-\beta)] = \frac{\overline{\text{tg}} \alpha + \overline{\text{tg}}(-\beta)}{1 + \overline{\text{tg}} \alpha \cdot \overline{\text{tg}}(-\beta)} =$

$$\Rightarrow \overline{\text{tg}}(\alpha - \beta) = \frac{\overline{\text{tg}} \alpha - \overline{\text{tg}} \beta}{1 + \overline{\text{tg}} \alpha \cdot \overline{\text{tg}} \beta}$$

Transformaciones en producto

1) De la suma de dos senos

$$\textcircled{1} \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta \quad \textcircled{2} \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

si sumamos miembro a miembro $\textcircled{1}$ y $\textcircled{2}$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta + \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ \Rightarrow \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \beta \end{aligned}$$

$$\text{si } p = \alpha + \beta$$

$$\text{si } q = \alpha - \beta$$

$$\Rightarrow p - q = \alpha + \beta - (\alpha - \beta)$$

$$p - q = \alpha + \beta - \alpha + \beta$$

$$p - q = 2\beta$$

$$\beta = \frac{p - q}{2}$$

$$\Rightarrow p + q = \alpha + \beta + (\alpha - \beta)$$

$$p + q = \alpha + \beta + \alpha - \beta$$

$$p + q = 2\alpha$$

$$\frac{p + q}{2} = \alpha$$

reemplazando obtenemos:

$$\sin p + \sin q = 2 \cdot \sin \frac{p + q}{2} \cdot \cos \frac{p - q}{2}$$

La suma de dos senos es igual al duplo del seno de la semisuma de los ángulos por el coseno de la semidiferencia de los ángulos.

2) De la diferencia de dos senos

Si en lugar de sumar miembro a miembro $\textcircled{1}$ y $\textcircled{2}$, restamos miembro a miembro obtenemos:

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta - \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta, \text{ reemplazando obtenemos:}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cdot \cos \frac{p + q}{2} \cdot \sin \frac{p - q}{2}$$

La diferencia de dos senos es igual al duplo del coseno de la semisuma de los ángulos por el seno de la semidiferencia de los ángulos.

3) De la suma de dos cosenos

$$\textcircled{1} \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad \textcircled{2} \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

si sumamos miembro a miembro $\textcircled{1}$ y $\textcircled{2}$ es:

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta + \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \quad \text{usando las igualdades ya dadas, es:}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cdot \cos \frac{p + q}{2} \cdot \cos \frac{p - q}{2}$$

La suma de dos cosenos es igual al duplo del producto del coseno de la semisuma de los ángulos por el coseno de la semidiferencia.

4) De la diferencia de dos cosenos

restando miembro a miembro ① y ② es:

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta - \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

y reemplazando por:

$$p = \alpha + \beta ; \quad q = \alpha - \beta$$

$$\alpha = \frac{p+q}{2} ; \quad \beta = \frac{p-q}{2}$$

$$\boxed{\cos p - \cos q = -2 \cdot \sin \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}}$$

La diferencia de dos cosenos es igual al opuesto del duplo del producto del seno de la semisuma de los ángulos por el seno de la semidiferencia.

Guía de ejercitación

1) Decir a qué cuadrante pertenecen los siguientes ángulos:

- a) 100° b) 210° c) 150° d) 500°
e) 110° f) -120° g) -400° h) -700

2) Utilizando calculadora calcular el valor de x en las siguientes expresiones:

- a) $x = \sin 40^\circ 20'$ b) $\sin x = 0.5225$
c) $x = \cos 72^\circ 25' 40''$ d) $\cos x = -0.4433$
e) $x = \tan 120^\circ 45' 52''$ f) $\tan x = 2.4522$
g) $x = \cot 20^\circ 33'$ h) $\cot x = 3.54$
i) $x = \sec 35^\circ 40'$ j) $\sec x = 1.2833$

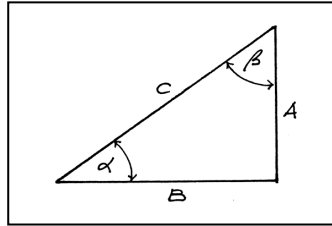
3) Dado el seno del ángulo α y el cuadrante al que pertenece, hallar el coseno y la tangente de dicho ángulo:

- a) $\sin \alpha = \frac{3}{4} \wedge \alpha \in II$ b) $\sin \alpha = -\frac{4}{5} \wedge \alpha \in III$

4) Dado el coseno del ángulo α y el cuadrante al que pertenece, hallar el seno y tangente de dicho ángulo:

- a) $\cos \alpha = \frac{2}{5} \wedge \alpha \in IV$ b) $\cos \alpha = -\frac{2}{3} \wedge \alpha \in III$

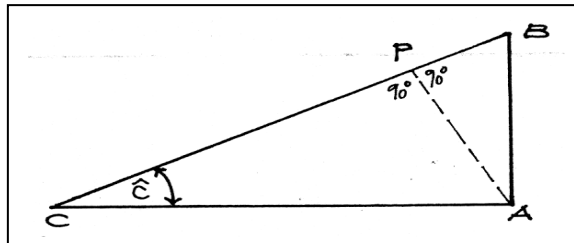
5) Completar en el cuadro los datos que corresponden al triángulo rectángulo de la figura que se muestra a continuación:



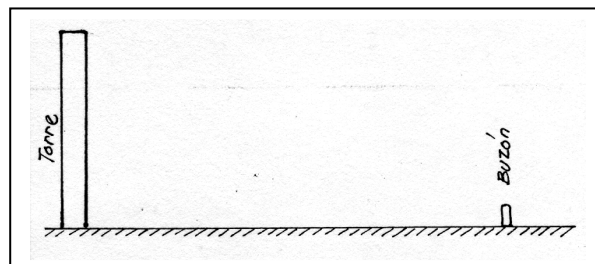
| Nº | Lado A | Lado B | Lado C | Ángulo α | Ángulo β | Superficie | Perímetro |
|----|--------|--------|--------|-----------------|----------------|------------|-----------|
| 1 | 10 m | | | 40° | | | |
| 2 | | 20 cm | | 52° | | | |
| 3 | | | 120 km | | 72° | | |
| 4 | 200 m | 300 m | | | | | |
| 5 | | 70 cm | 100 cm | | | | |
| 6 | | | | | | | |
| 7 | | 45 cm | | 25° | | | |
| 8 | 32 cm | | | | 62° | | |
| 9 | | | 300 m | 38° | | | |
| 10 | | | | 50° | | | 120 m |

6) Realice el planteo y el desarrollo correspondiente para dar respuesta a lo solicitado en los siguientes Problemas

Nº 1: En el triángulo de la figura determinar la medida de los segmentos \overline{CP} , \overline{PB} y \overline{PA} sabiendo que el segmento $\overline{CB} = 35m$ y $\hat{C} = 19^\circ 20'$.



Nº 2: Se desconoce la altura de la torre del esquema que está a continuación, pero se sabe que a las 5:00 PM de la tarde se proyecta una sombra de 160 metros. Si el buzón de cartas que está en la esquina mide 1.40 metros de alto y proyecta una sombra de 2 metros a la misma hora. ¿Qué altura tiene la torre?



“Para mejorar tus conocimientos acerca del tema, consultá textos que lo aborden, apuntes con conceptos teórico de la cátedra o alguna/s página de internet, como por ejemplo: <http://www.vitutor.com/index.html>”