

Universidade Federal Fluminense
Programa de Pós Graduação em Eng. Civil
Disciplina: Teoria da Decisão

AULA 5: Método Simplex

Curso de Mestrado

Disciplina: Teoria das Decisões

Docentes: Profa. Dra. Luciane Ferreira Alcoforado (lucianea@id.uff.br)

Prof. Dr. Marcos dos Santos (marcosdossantos@ime.eb.br)

Calendário das Aulas

- ⌚ **Aula 1: Introdução – 03/dez/2021**
- ⌚ **Aula 2: Formulação de Modelos: Tipos e Aplicações Práticas – 10/dez/2021**
- ⌚ **Aula 3: O modelo de Programação Linear – 17/dez/2021**
- ⌚ **Aula 4: Solução Gráfica – 28/jan/2022**
- ⌚ **Aula 5: Método Simplex/Simplex duas fases – 04/fev/2022**

Objetivo desta aula

- Conhecer o algoritmo simplex
- Executar o algoritmo simplex
- Compreender o contexto de aplicação do algoritmo simplex duas fases
- Executar o algoritmo simplex duas fases

O algoritmo simplex

Parte de uma solução trivial básica viável (SBV), ou seja, faz as variáveis de folga iguais a zero como solução inicial

Solução inicial:

$$\begin{aligned} X &= (x_1, x_2, \dots, x_k, x_{f1}, x_{f2}, \dots, x_{fm}) \\ &= (0, 0, \dots, 0, b_1, b_2, \dots, b_m) \end{aligned}$$

Exemplo

6

Maximizar:

$$Z = 0.5x_1 + 20x_2 + 0.75x_3$$

Sujeito a:

$$2x_1 + 2x_2 + 0x_3 \leq 30$$

$$0x_1 + 4x_2 + 1x_3 \leq 65$$

$$1x_1 + 0x_2 + 0.1x_3 \leq 25$$

Com:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Maximizar:

$$Z = 0.5x_1 + 20x_2 + 0.75x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

Sujeito a:

$$2x_1 + 2x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 30$$

$$0x_1 + 4x_2 + 1x_3 + 0x_4 + x_5 + 0x_6 = 65$$

$$1x_1 + 0x_2 + 0.1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + x_6 = 25$$

Com:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

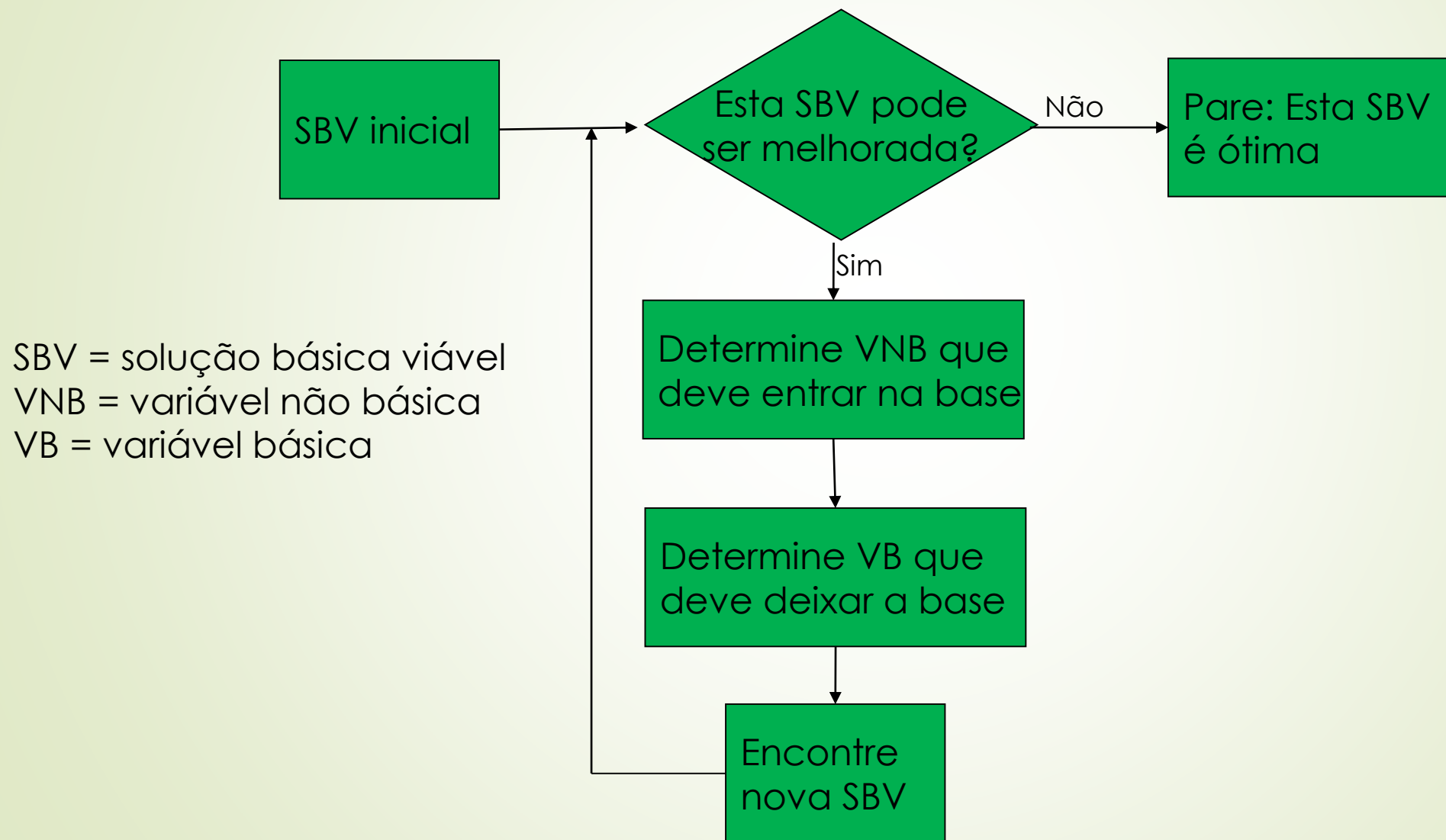
Solução básica viável inicial:

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$$

$$= (0, 0, 0, 30, 65, 25)$$

Com $z = 0$

Princípio de funcionamento do Algoritmo SIMPLEX



A tabela padrão do simplex - maximização

variáveis do problema (incluindo as variáveis de folga)					
x_1	x_2	\dots	x_n	$-z$	b
a_{11}	a_{12}	\dots	a_{1n}	0	b_1
\vdots				\vdots	\vdots
a_{i1}	a_{i2}	\dots	a_{in}	0	b_i
\vdots				\vdots	\vdots
a_{m1}	a_{m2}	\dots	a_{mn}	0	b_m
c_1	c_2	\dots	c_n	1	0

matriz de restrições

termos independentes

coeficientes de custo (função-objetivo)

Maximize $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n - z = 0$

sujeito a um conjunto de restrições:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + 0z = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + 0z = b_2$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + 0z = b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

Note que a função objetivo está representada na última linha da tabela padrão.

O quadro simplex - maximização

Sujeito a:
 $2x_1 + 2x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 30$
 $0x_1 + 4x_2 + 1x_3 + 0x_4 + x_5 + 0x_6 = 65$
 $1x_1 + 0x_2 + 0.1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + x_6 = 25$

Maximizar:
 $Z = 0.5x_1 + 20x_2 + 0.75x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$

		VNB			VB				
	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	-z	B
x_4	2	2	0	1	0	0	0	0	30
x_5	0	4	1	0	1	0	0	0	65
x_6	1	1	0	0	0	1	0	0	25
C $4 + 0x_5 + 0x_6$	0.5	20	0.75	0	0	0	1	0	

PPL na forma padrão: Base é a identidade e coeficientes das VB's na função objetivo são todos nulos. Solução inicial $x = (0, 0, 0, 30, 65, 25)$ com $z = 0$.

O algoritmo Simplex

10

Algoritmo Simplex –maximização

1. Coloque o problema na forma canônica, em que $b_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$.
2. Se $c_j \leq 0$ então PARE, o ponto ótimo de um problema de maximização foi encontrado. Se houver algum $c_j > 0$, escolher entre eles o maior, ou seja, $c_s = \max\{c_j | c_j > 0\}$, a variável a entrar na base será x_s , caso haja empate escolher s arbitrariamente e vá para 3.
3. x_s entra na base, e para definir quem sai da base considere:
 31. $a_{is} \leq 0$ para todo $i = 1, \dots, m$ então x_s pode ser aumentado indefinidamente, sem fazer nenhuma variável básica decrescer a zero e o valor de Z tende ao infinito. PARE! A Solução é ilimitada.
 32. $a_{is} > 0$, para algum i, neste caso calcule o menor coeficiente da razão b_i/a_{is} seja r a variável básica tal que:

$$\frac{b_r}{a_{rs}} = \min \left\{ \frac{b_i}{a_{is}} \mid a_{is} > 0 \right\}$$

Assim, a variável básica correspondente a r-ésima equação é a que sai da base, digamos x_r e a_{rs} é denominado o elemento pivô. Vá ao passo 4.

4. Atualize os coeficientes do Quadro simplex:

$$\text{Linha } r: a_{rj} = \frac{a_{rj}}{a_{rs}}, j = 1, 2, \dots, n, n+1$$

$$\text{Linha } i: a_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{is}}{a_{rs}} a_{rj} \quad i = 1, \dots, m; i \neq r; j = 1, 2, \dots, n, n+1$$

5. Vá para (2) e realize novamente o teste de otimalidade.

Primeira iteração do simplex

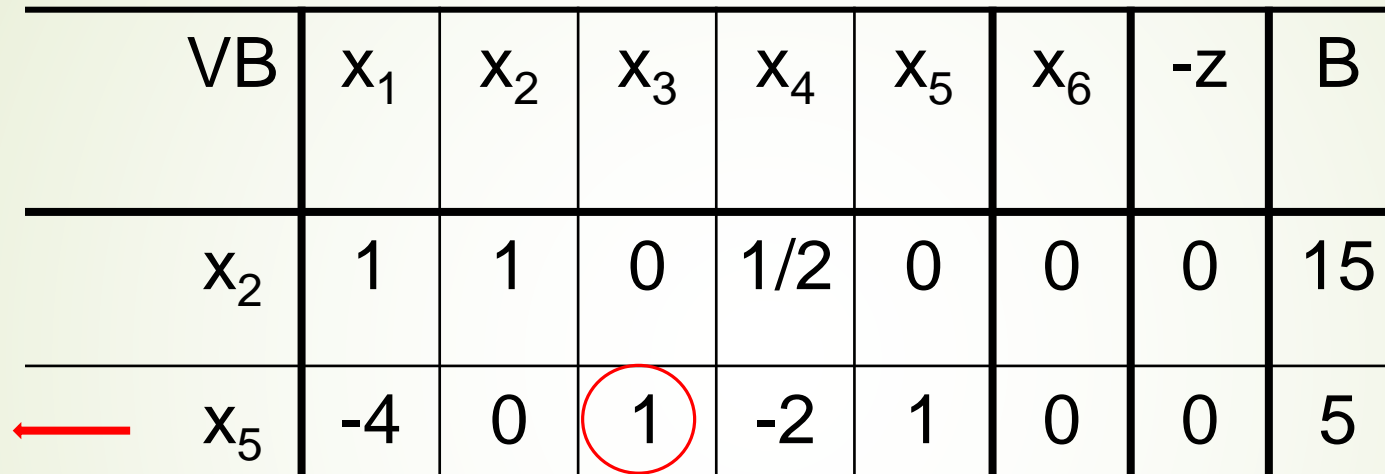
	VNB			VB				
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-z$	B
x_4	2	2	0	1	0	0	0	30
x_5	0	4	1	0	1	0	0	65
x_6	1	1	0	0	0	1	0	25
C	0.5	20	0.75	0	0	0	1	0

Entra na base x_2 pois possui o maior $c_j > 0$ e sai da base o x_4 pois corresponde ao menor quociente $b_r/a_{rs} = 30/2 = 15$. Elemento pivô = 2. No novo quadro as linhas são atualizadas:

$$L1 = L1/2 \quad L2 = L2 - (4/2)L1 \quad L3 = L3 - (1/2)L1 \quad \text{e} \quad L4 = L4 - (20/2)L1$$

Primeira iteração do simplex – atualização do quadro

VB = x_2, x_5, x_6
 VNB = x_1, x_3, x_4



VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	-z	B
x_2	1	1	0	1/2	0	0	0	15
x_5	-4	0	1	-2	1	0	0	5
x_6	0	0	0	-1/2	0	1	0	10
C	-19.5	0	0.75	-10	0	0	1	-300

A solução agora é $x = (0, 15, 0, 0, 5, 10)$ com $z=300$

Observa-se $c_3 = 0.75$, assim x_3 entra na base e x_5 sai da base. Pivô = 1

No novo quadro as linhas serão: $L_1 = L_1 - 0 \cdot L_2$; $L_2 = L_2$; $L_3 = L_3 - 0 \cdot L_2$ e $L_4 = L_4 - 0.75 \cdot L_2$

Segunda iteração do simplex – atualização do quadro

$$VB = x_2, x_3, x_6$$

$$VNB = x_1, x_4, x_5$$

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	-z	B
x_2	1	1	0	1/2	0	0	0	15
x_3	-4	0	1	-2	1	0	0	5
x_6	0	0	0	-1/2	0	1	0	10
C	-16.5	0	0	-8.5	-0.75	0	1	-303.75

A solução agora é $x = (0, 15, 5, 0, 0, 10)$ com $z=303.75$

A regra de parada foi atingida pois $c_j < 0$ para todo j correspondente a variável não básica. Portanto esta é a solução ótima.

○ simplex duas fases

Quando não é possível obter uma solução básica viável trivial, isto é não conseguimos formar uma base inicial com as variáveis de folga.

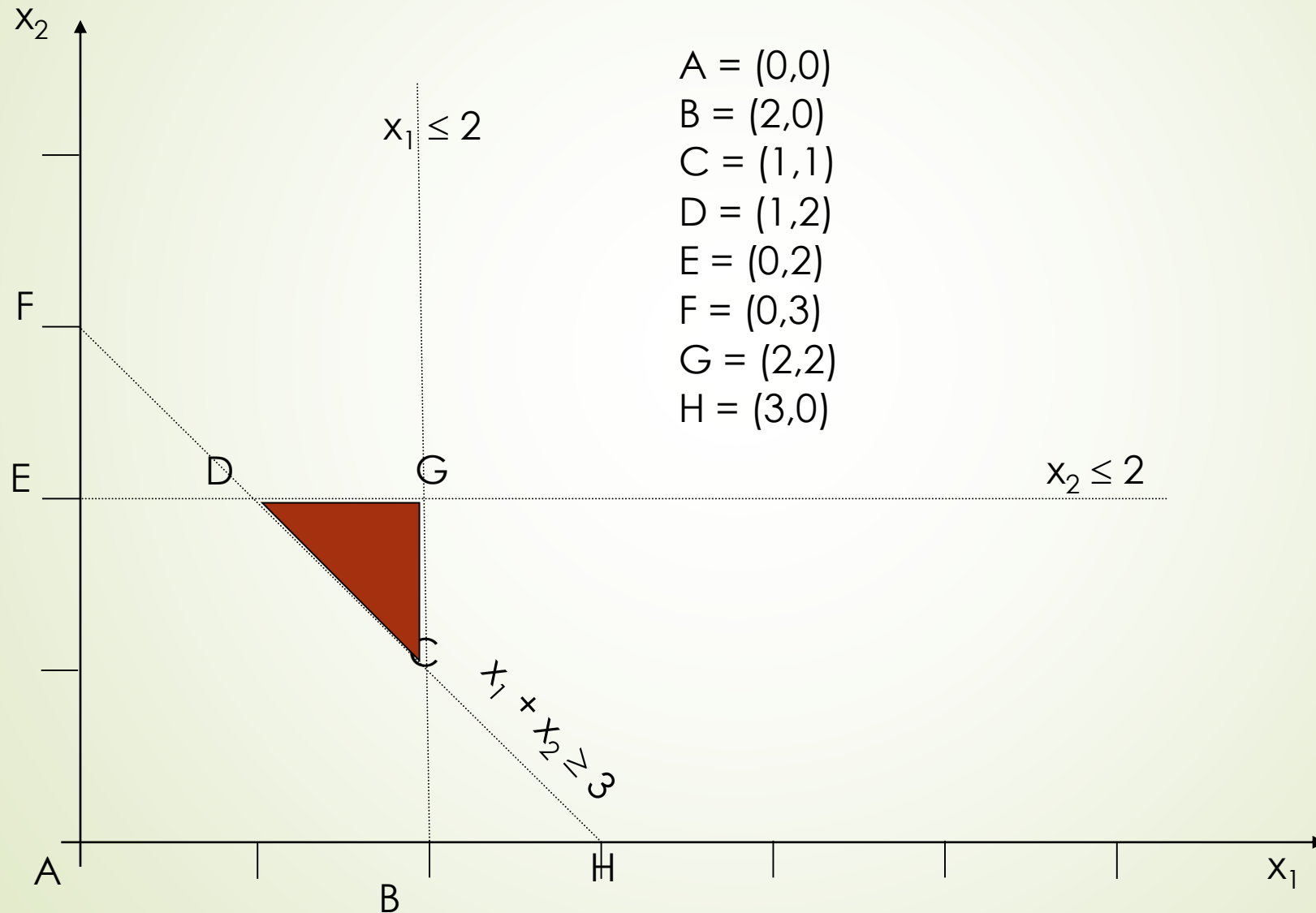
Situação em que a origem não pode ser solução inicial:

Exemplo

$$\begin{array}{rclcl}
 \max & x_1 & + & 2x_2 & = & z \\
 & x_1 & & & \leq & 2 \\
 & & & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & \geq & 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
 \end{array}
 \quad \longrightarrow \quad
 \begin{array}{rclcl}
 \max & x_1 & + & 2x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & = & z \\
 & x_1 & & & + & x_3 & & & & = & 2 \\
 & & & x_2 & & & + & x_4 & & = & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & & & - & x_5 & = & 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
 \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_b$$

Método das Duas Fases



Método das duas fases

- o método das duas fases utiliza o conceito de variáveis artificiais para que uma solução básica factível inicial possa ser encontrada em problemas de PL com restrições de desigualdade do tipo \geq ou equações de igualdade.
- para um problema original escrito na **forma padrão**, deve-se introduzir uma variável artificial em cada uma das restrições que não possui variável de folga.

Método das Duas Fases

- Primeira fase (Criar problema auxiliar P'):
 - Introduzir variáveis de folga e variáveis artificiais
 - Variáveis de folga/excesso: introduzidas quando há variáveis do tipo \leq ou \geq
 - **Variáveis artificiais: introduzidas quando há restrições do tipo \geq ou $=$**

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_i^a = b_i \\ x_i^a \geq 0 \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i \leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - x_{n+i} + x_i^a = b_i \\ x_{n+i} \geq 0, x_i^a \geq 0 \end{cases}$$

- Criar função objetivo artificial:

$$w^a = \sum_i x_i^a \quad \forall i$$

- **Variáveis básicas iniciais: variáveis de folga associadas às restrições \leq e variáveis artificiais**
- Objetivo da primeira fase: minimizar a função objetivo artificial
- Como $a_i \geq 0 \quad \forall i$, o menor valor possível será obtido para $a_i = 0 \quad \forall i$.
- Caminhar de SBV em SBV de P' até alcançar SBV do problema original P (situação que ocorre quando todas as variáveis artificiais são nulas).

Método das Duas Fases

- Segunda fase:

- A partir de uma SBV do problema original P , gerar SBV cada vez melhores até se atingir a solução ótima.

Passo a Passo

Fase 1

Cria-se uma nova **função objetivo artificial w (sempre de minimização)** que corresponde à soma de k variáveis artificiais $a_i, i = 1, \dots, k$:

$$\min w = a_1 + a_2 + \dots + a_k$$

Para que os coeficientes das variáveis artificiais sejam nulos na linha da função objetivo artificial, deve-se subtrair (problema original de maximização) cada uma das equações i em que foi introduzida uma variável artificial a_i à equação da função objetivo atual:

Nova linha função objetivo artificial = linha atual - $\sum_i L_i$, i com variável artificial

Aplicando o método das duas fases
ao PPL dado

$$\max x_1 + 2x_2 = z$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1 + x_2 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Fase 1

$$\min 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_1^a = w$$

$$\max 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - 1x_1^a = z^a = -w$$

Fase 2

$$\max x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_1^a = z$$

restrições

$$x_1 + x_3 = 2$$

$$x_2 + x_4 = 2$$

$$x_1 + x_2 - x_5 + x_1^a = 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_1^a \geq 0$$

Método das Duas Fases – Quadro Simplex



Fase 1: versão maximização

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	
(L_1)	x_3	1	0	1	0	0	0	2
(L_2)	x_4	0	1	0	1	0	0	2
(L_3)	x_1^a	1	1	0	0	-1	1	3
(L_4)		0	0	0	0	0	-1	$Z_a = -w$ Fase 1: max
(L_5)		1	2	0	0	0	0	z Fase 2: max

Redução à forma
canônica:

$$L_4 \leftarrow L_4 + L_3$$

Fase 1: Sai da base o **maior** coeficiente da função objetivo artificial (L4), estamos maximizando!



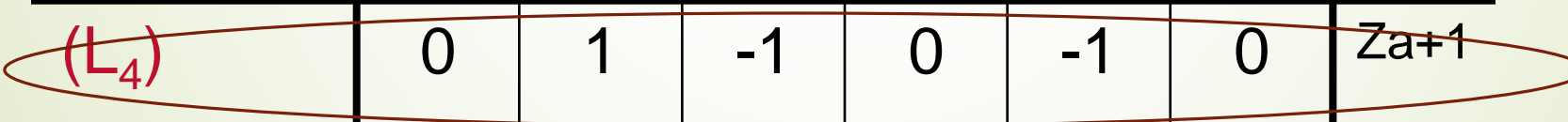
	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	
(L_1)	x_3	1	0	1	0	0	0	2
(L_2)	x_4	0	1	0	1	0	0	2
(L_3)	x_1^a	1	1	0	0	-1	1	3
(L_4)		1	1	0	0	-1	0	$Za+3$
(L_5)		1	2	0	0	0	0	z

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - L_1$$

$$L_5 \leftarrow L_5 - L_1$$

Fase 1: Sai da base o **maior** coeficiente da função objetivo artificial (L4), estamos maximizando!

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	
(L ₁)	x_1	1	0	1	0	0	0	2
(L ₂)	x_4	0	1	0	1	0	0	2
(L ₃)	x_1^a	0	1	-1	0	-1	1	1
(L ₄)		0	1	-1	0	-1	0	z_{a+1}
(L ₅)		0	2	-1	0	0	0	$z-2$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_3$
 $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$
 $L_5 \leftarrow L_5 - 2L_3$

Método das Duas Fases


	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	
(L_1)	x_1	1	0	1	0	0	0	2
(L_2)	x_4	0	0	1	1	1	-1	1
(L_3)	x_2	0	1	-1	0	-1	1	1
(L_4)		0	0	0	0	0	-1	za
(L_5)		0	0	1	0	2	-2	z-4

Fim da primeira fase: $w = 0$

$x_1=2, x_2=1, x_3=x_5=x_1^a=0,$
 $x_4=1$ e $z = 4$



$x = (2, 1); z = 4$

Fase 2: Iniciamos com uma SBV sem variáveis artificiais!



	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$	b
(L_1)	x_1	1	0	1	0	0	0	2
(L_2)	x_4	0	0	1	1	1	0	1
(L_3)	x_2	0	1	-1	0	-1	0	1
(L_4)		0	0	1	0	2	1	-4

Estamos maximizando, observar o maior valor na linha 4!



$$L_3 \leftarrow L_3 - (-1/1) L_2$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - (2/1) L_2$$

Fim da segunda fase

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$	b
(L ₁)	x_1	1	0	1	0	0	0	2
(L ₂)	x_5	0	0	1	1	1	0	1
(L ₃)	x_2	0	1	0	1	0	0	2
(L ₄)		0	0	-1	-2	0	1	-6

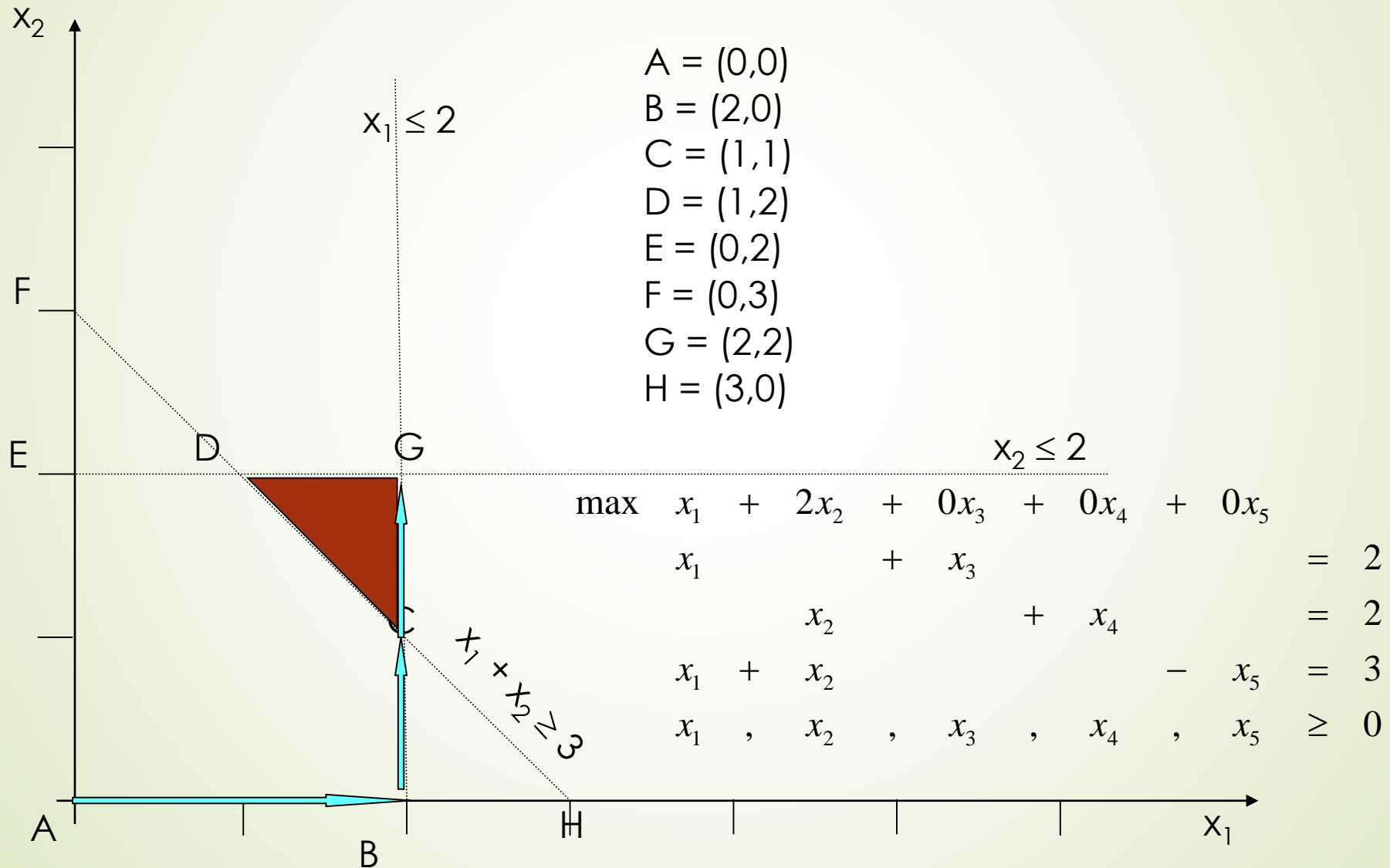
Fim da segunda fase: $z = 6$

$x_1=2, x_2=2, x_3=x_4=0, x_5=1$

$$\begin{array}{rcll} \max & x_1 & + & 2x_2 & = & z \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & + & x_2 & \geq & 3 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Solução ótima: $x^* = (2,2); \quad z^* = 6$

Método das Duas Fases: Interpretação Geométrica



Usando o R para resolver o último problema

```
# coeficientes na função objetivo
func.objetivo <- c(1 , 2)
```

```
# coeficientes nas restrições.
coeficientes.restricoes <- rbind(R1=c(1, 0), R2=c(0, 1), R3 = c(1, 1) )
```

```
# sinal das restrições.
direcao.restricoes <- c("<=", "<=", ">=")
```

```
# limite das restrições.
limites.restricoes <- c(2,2,3)
```

```
solucao.problema <- lpSolve::lp(direction = "max",
                                objective.in = func.objetivo,
                                const.mat = coeficientes.restricoes,
                                const.dir = direcao.restricoes,
                                const.rhs = limites.restricoes, all.int=F)
```

```
#####
####      RESULTADO      #####
#####
```

```
# valor da função objetivo na solução
solucao.problema$objval
```

```
## [1] 6
```

```
# Valores para as variáveis de escolha
solucao.problema$solution
```

```
## [1] 2 2
```

Fim

- ▶ Nesta aula vimos o funcionamento do simplex e do simplex duas fases, ao utilizar um software, estas situações já estarão programadas de modo que o usuário não percebe o que ocorre internamente.
- ▶ Este curso procurou embasar a teoria do algoritmo simplex de modo que se possa ter um conhecimento mais profundo do seu funcionamento.