Universidade Federal Fluminense
Programa de Pós Graduação em Eng. Civil
Disciplina: Teoria da Decisão

AULA 5: Método Simplex

Curso de Mestrado

Disciplina: Teoria das Decisões

Docentes: Profa. Dra. Luciane Ferreira Alcoforado (lucianea@id.uff.br)
Prof. Dr. Marcos dos Santos (marcosdossantos@ime.eb.br)

Calendário das Aulas

- Aula 1: Introdução – 03/dez/2021
- Aula 2: Formulação de Modelos: Tipos e Aplicações Práticas – 10/dez/2021
- Aula 3: O modelo de Programação Linear – 17/dez/2021
- Aula 4: Solução Gráfica – 28/jan/2022
- Aula 5: Método Simplex/Simplex duas fases – 04/fev/2022

Objetivo desta aula

- Conhecer o algoritmo simplex
- Executar o algoritmo simplex
- Compreender o contexto de aplicação do algoritmo simplex duas fases
- Executar o algoritmo simplex duas fases

O algoritmo simplex

Parte de uma solução trivial básica viável (SBV), ou seja, faz as variáveis de decisão iguais a zero e as de folga iguais ao vetor b como solução inicial

Solução inicial:

Variáveis de decisão Variáveis de folga

$$X = (x1, x2, \ldots, xk, xf1, xf2, \ldots, xfm) = (0,0,\ldots,0, b1,b2,\ldots,bm)$$

Exemplo

Maximizar:

$$Z = 0.5x_1 + 20x_2 + 0.75x_3$$

Sujeito a:

$$2x_1 + 2x_2 + 0x_3 \leq 30$$
$$0x_1 + 4x_2 + 1x_3 \leq 65$$
$$1x_1 + 0x_2 + 0.1x_3 \leq 25$$

Com:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Maximizar:

$$Z = 0.5x_1 + 20x_2 + 0.75x_3 + 0x4 + 0x5 + 0x6$$

Sujeito a:

$$2x_1 + 2x_2 + 0x_3 + x4 + 0x5 + 0x6 = 30$$
$$0x_1 + 4x_2 + 1x_3 + 0x4 + x5 + 0x6 = 65$$
$$1x_1 + 0x_2 + 0.1x_3 + 0x4 + 0x5 + x6 = 25$$

Com:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

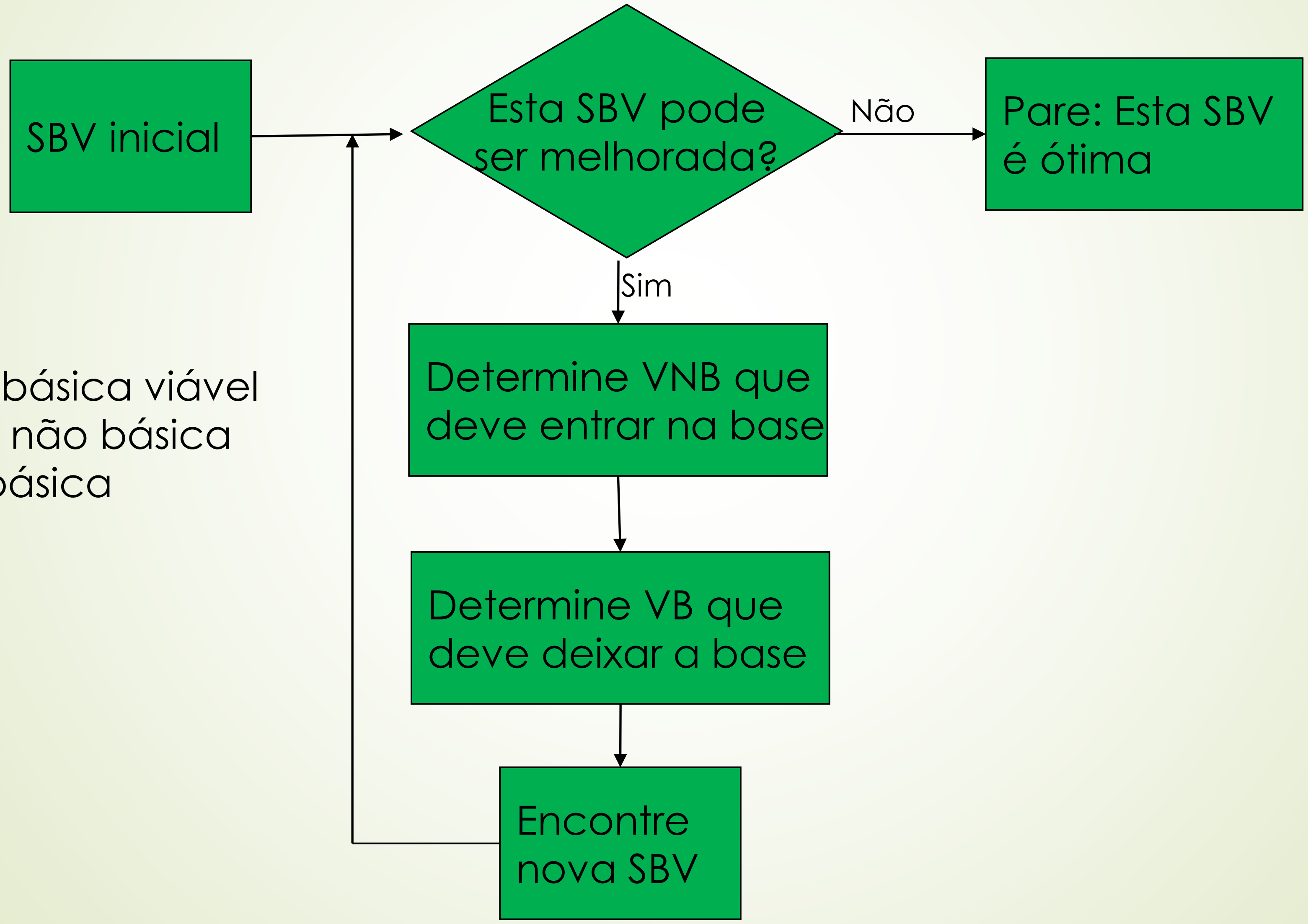
Solução básica viável inicial:

X = (x1, x2, x3, x4, x5, x6)

=(0,0,0, 30,65,25)

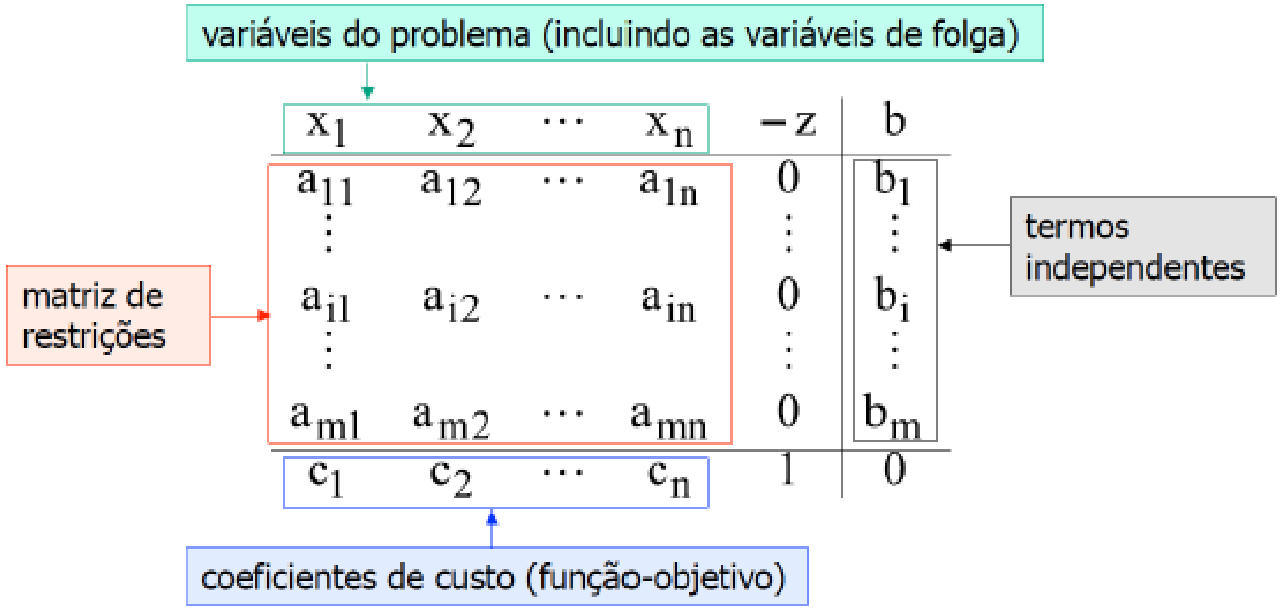
Com z = 0

Princípio de funcionamento do Algoritmo SIMPLEX



SBV = solução básica viável
VNB = variável não básica
VB = variável básica

A tabela padrão do simplex - maximização



Maximize $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n - z = 0$

sujeito a um conjunto de restrições:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + 0z = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + 0z = b_2$

. . .

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + 0z = b_m$

$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$

Note que a função objetivo está representada na última linha da tabela padrão.

O quadro simplex - maximização

Sujeito a:
$2x_1 + 2x_2 + 0x_3 + x4 + 0x5 + 0x6 = 30$
$0x_1 + 4x_2 + 1x_3 + 0x4 + x5 + 0x6 = 65$
$1x_1 + 0x_2 + 0.1x_3 + 0x4 + 0x5 + x6 = 25$

	VNB			VB				
VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	-z	B
x_4	2	2	0	1	0	0	0	30
x_5	0	4	1	0	1	0	0	65
x_6	1	1	0	0	0	1	0	25
C	0.5	20	0.75	0	0	0	1	0

Maximizar:
$$Z = 0.5x_1 + 20x_2 + 0.75x_3 + 0x4 + 0x5 + 0x6$$

PPL na forma padrão: Base é a identidade e coeficientes das VB's na função objetivo são todos nulos. Solução inicial x = (0, 0, 0, 30,65,25) com z = 0.

O algoritmo Simplex

Algoritmo Simplex –maximização

1. Coloque o problema na forma canônica, em que $b_i \geq 0, i = 1,2, \dots, m$.
2. Se $c_j \leq 0$ então PARE, o ponto ótimo de um problem de maximização foi encontrado. Se houver algum $c_j > 0$, escolher entre eles o maior, ou seja, $c_s = max\{c_j | c_j > 0\}$, a variável a entrar na base será x_s, caso haja empate escolher s arbitrariamente e vá para 3.
3. x_s entra na base, e para definir quem sai da base considere:
   31. $a_{is} \leq 0$ para todo $i = 1, \dots, m$ então x_s pode ser aumentado indefinidamente, sem fazer nenhuma variável básica decrescer a zero e o valor de Z tende ao infinito. PARE! A Solução é ilimitada.
   32. $a_{is} > 0$, para algum i, neste caso calcule o menor coeficiente da razão ${}^{b_i}/_{a_{is}}$ seja r a variável básica tal que:

$$\frac{b_r}{a_{rs}} = min\left\{\frac{b_i}{a_{is}} \middle| a_{is} > 0\right\}$$

   Assim, a variável básica correspondente a r-ésima equação é a que sai da base, digamos x_r e a_{rs} é denominado o elemento pivô. Vá ao passo 4.

4. Atualize os coeficientes do Quadro simplex:

$$Linha\, r\colon\ a_{rj} = \frac{a_{rj}}{a_{rs}}, j = 1,2, .. n, n+1$$

$$Linha\, i\colon\ a_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{is}}{a_{rs}} a_{rj} \quad i = 1, \dots, m; i \neq r; \quad j = 1,2, .. n, n+1$$

5. Vá para (2) e realize novamente o teste de otimalidade.

Primeira iteração do simplex

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	-z	B
x_4	2	2	0	1	0	0	0	30
x_5	0	4	1	0	1	0	0	65
x_6	1	1	0	0	0	1	0	25
c	0.5	20	0.75	0	0	0	1	0

Entra na base x2 pois possui o maior cj>0 e sai da base o x4 pois corresponde ao menor quociente br/ars = 30/2 = 15. Elemento pivô = 2. No novo quadro as linhas são atualizadas:

L1 = L1/2 L2 = L2 –(4/2)L1 L3 = L3 –(1/2)L1 e L4 = L4 –(20/2)L1

Primeira iteração do simplex – atualização do quadro

VB = x2, x5, x6
VNB = x1, x3, x4

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	-z	B
x_2	1	1	0	1/2	0	0	0	15
x_5	-4	0	1	-2	1	0	0	5
x_6	0	0	0	-1/2	0	1	0	10
c	-19.5	0	0.75	-10	0	0	1	-300

A solução agora é x = (0,15,0,0,5,10) com z=300
Observa-se c3 = 0.75, assim x3 entra na base e x5 sai da base. Pivô = 1
No novo quadro as linhas serão: L1 = L1 – 0*L2; L2 = L2; L3 = L3-0*L2 e L4 = L4 -0.75*L2

Segunda iteração do simplex – atualização do quadro

VB = x2, x3, x6
VNB = x1, x4, x5

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	-z	B
x_2	1	1	0	1/2	0	0	0	15
x_3	-4	0	1	-2	1	0	0	5
x_6	0	0	0	-1/2	0	1	0	10
c	-16.5	0	0	-8.5	-0.75	0	1	-303.75

A solução agora é x = (0,15,5,0,0,10) com z=303.75
A regra de parada foi atingida pois cj < 0 para todo j correspondente a variável não básica. Portanto esta é a solução ótima.

O simplex duas fases

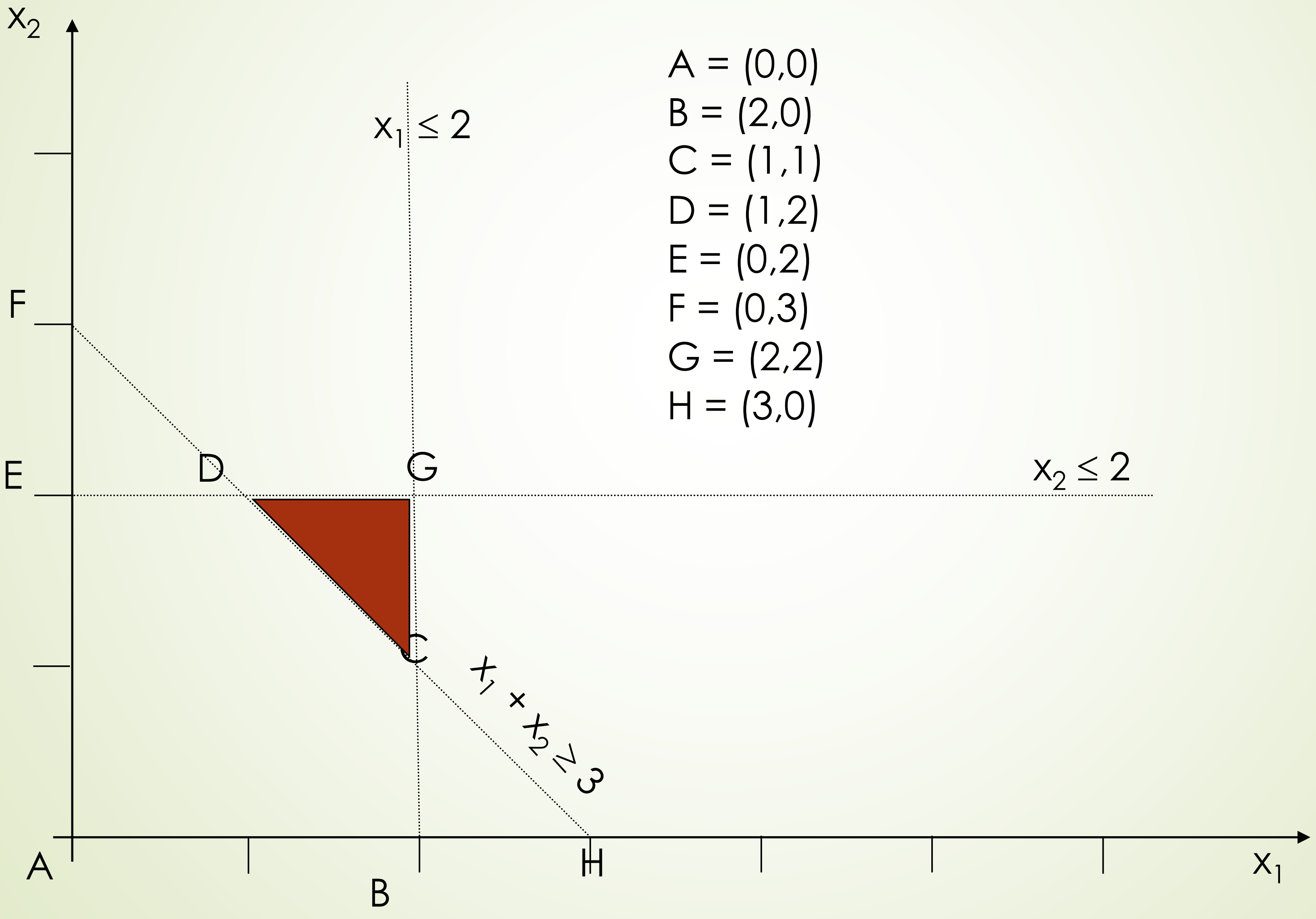
Quando não é possível obter uma solução básica viável trivial, isto é não conseguimos formar uma base inicial com as variáveis de folga.

Situação em que a origem não pode ser solução inicial: Exemplo

$$\begin{array}{lccccc}
\max & x_1 & + & 2x_2 & = & z \\
 & x_1 & & & \leq & 2 \\
 & & & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & \geq & 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{array}{lccccccccccccc}
\max & x_1 & + & 2x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & = & z \\
 & x_1 & & & + & x_3 & & & & & = & 2 \\
 & & & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & & & - & x_5 & = & 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{b}$$

Método das Duas Fases



Método das duas fases

- o método das duas fases utiliza o conceito de variáveis artificiais para que uma solução básica factível inicial possa ser encontrada em problemas de PL com restrições de desigualdade do tipo ≥ ou equações de igualdade.

- para um problema original escrito na **forma padrão**, deve-se introduzir uma variável artificial em cada uma das restrições que não possui variável de folga.

Método das Duas Fases

- Primeira fase (Criar problema auxiliar P'):
  - Introduzir variáveis de folga e variáveis artificiais
  - Variáveis de folga/excesso: introduzidas quando há variáveis do tipo ≤ ou ≥
  - **Variáveis artificiais: introduzidas quando há restrições do tipo ≥ ou =**

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_i^a = b_i \\ x_i^a \geq 0 \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} + x_i^a = b_i \\ x_{n+i} \geq 0, x_i^a \geq 0 \end{cases}$$

  - Criar função objetivo artificial: $w^a = \sum_i x_i^a \quad \forall i$
  - **Variáveis básicas iniciais: variáveis de folga associadas às restrições ≤ e variáveis artificiais**
  - Objetivo da primeira fase: minimizar a função objetivo artificial
  - Como ai ≥ 0 ∀ i, o menor valor possível será obtido para ai = 0 ∀i .
  - Caminhar de SBV em SBV de P' até alcançar SBV do problema original P (situação que ocorre quando todas as variáveis artificiais são nulas).

Método das Duas Fases

- Segunda fase:
  - A partir de uma SBV do problema original P, gerar SBV cada vez melhores até se atingir a solução ótima.

Passo a Passo

Fase 1

Cria-se uma nova **função objetivo artificial *w* (sempre de minimização)** que corresponde à soma de *k* variáveis artificiais *ai*, *i* = 1,...,*k*:

min *w* = *a*1 + *a*2 + ... + *ak*

Para que os coeficientes das variáveis artificiais sejam nulos na linha da função objetivo artificial , deve-se subtrair (problema original de maximização) cada uma das equações *i* em que foi introduzida uma variável artificial *ai* à equação da função objetivo atual:

Nova linha função objetivo artificial = linha atual $-\sum_i Li, i \text{ com variável artificial}$

Aplicando o método das duas fases ao PPL dado

$$\begin{array}{lccccc} \max & x_1 & + & 2x_2 & = & z \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & + & x_2 & \geq & 3 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Fase 1

$$\begin{array}{lccccccccccccc} \min & 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & + & 1x_1^a & = & w \\ \max & 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & - & 1x_1^a & = & z^a = -w \end{array}$$

Fase 2

$$\max x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_1^a = z$$

restrições

$$\begin{array}{ccccccccccccc} x_1 & & & + & x_3 & & & & & & & = & 2 \\ & & x_2 & & & + & x_4 & & & & & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & & & & & - & x_5 & + & x_1^a & = & 3 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_1^a & \geq & 0 \end{array}$$

Método das Duas Fases – Quadro Simplex
Fase 1: versão maximização

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	
(L_1)	x_3	1	0	1	0	0	0	2
(L_2)	x_4	0	1	0	1	0	0	2
(L_3)	x_1^a	1	1	0	0	-1	1	3
(L_4)		0	0	0	0	0	-1	Za = -w
(L_5)		1	2	0	0	0	0	z

Fase 1: max

Fase 2: max

Redução à forma canônica:

$L_4 \leftarrow L_4 + L_3$

Fase 1: Sai da base o **maior** coeficiente da função objetivo artificial (L4), estamos maximizando!

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	
(L_1)	x_3	1	0	1	0	0	0	2
(L_2)	x_4	0	1	0	1	0	0	2
(L_3)	x_1^a	1	1	0	0	-1	1	3
(L_4)		1	1	0	0	-1	0	Za+3
(L_5)		1	2	0	0	0	0	z

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$ $L_5 \leftarrow L_5 - L_1$

Fase 1: Sai da base o **maior** coeficiente da função objetivo artificial (L4), estamos maximizando!

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	
(L_1)	x_1	1	0	1	0	0	0	2
(L_2)	x_4	0	1	0	1	0	0	2
(L_3)	x_1^a	0	1	-1	0	-1	1	1
(L_4)		0	1	-1	0	-1	0	Za+1
(L_5)		0	2	-1	0	0	0	z-2

$L_2 \leftarrow L_2 - L_3$ $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$ $L_5 \leftarrow L_5 - 2L_3$

Método das Duas Fases

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	
(L_1)	x_1	1	0	1	0	0	0	2
(L_2)	x_4	0	0	1	1	1	-1	1
(L_3)	x_2	0	1	-1	0	-1	1	1
~~(L_4)~~		~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~-1~~	~~za~~
(L_5)		0	0	1	0	2	-2	z-4

Fim da primeira fase: w = 0

x1=2, x2=1, x3=x5=x1a=0,
x4=1 e z = 4

x = (2, 1); z = 4

Fase 2: Iniciamos com uma SBV sem variáveis artificiais!

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z	b
(L_1)	x_1	1	0	1	0	0	0	2
(L_2)	x_4	0	0	1	1	1	0	1
(L_3)	x_2	0	1	-1	0	-1	0	1
(L_4)		0	0	1	0	2	1	-4

Estamos maximizando, observar o maior valor na linha 4!

$L_3 \leftarrow L_3 - (-1/1)\ L_2$ $L_4 \leftarrow L4 - (2/1)L_2$

Fim da segunda fase

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z	b
(L_1)	x_1	1	0	1	0	0	0	2
(L_2)	x_5	0	0	1	1	1	0	1
(L_3)	x_2	0	1	0	1	0	0	2
(L_4)		0	0	-1	-2	0	1	-6

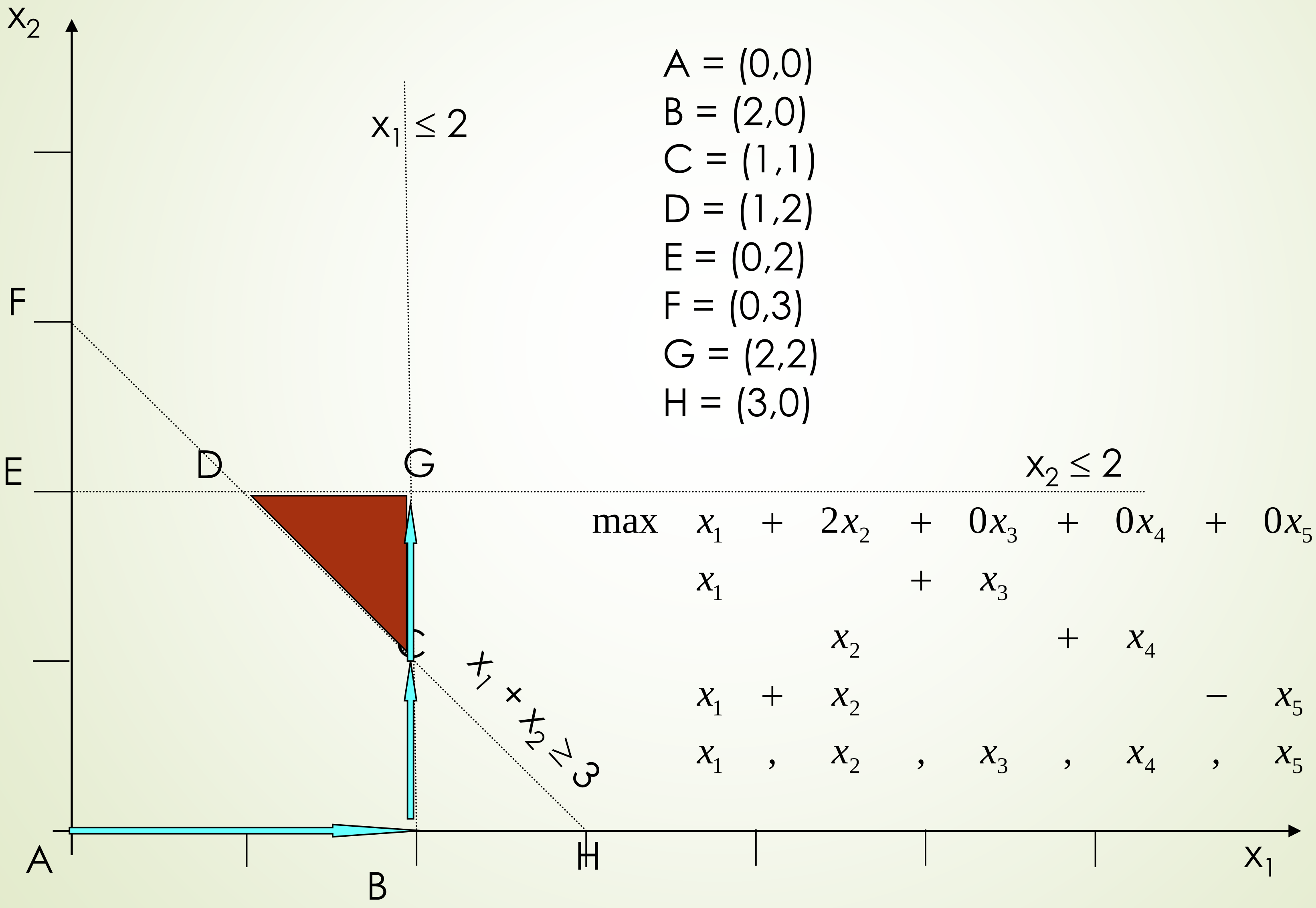
Fim da segunda fase: z = 6

x1=2, x2=2, x3=x4=0, x5=1

$$
\begin{array}{lccccc}
\max & x_1 & + & 2x_2 & = & z \\
 & x_1 & & & \leq & 2 \\
 & & & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & \geq & 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Solução ótima: $x^* = (2,2)$; $z^* = 6$

Método das Duas Fases: Interpretação Geométrica



A = (0,0)
B = (2,0)
C = (1,1)
D = (1,2)
E = (0,2)
F = (0,3)
G = (2,2)
H = (3,0)

$$
\begin{array}{lllllll}
\max & x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 & & \\
 & x_1 + x_3 & = & 2 \\
 & x_2 + x_4 & = & 2 \\
 & x_1 + x_2 - x_5 & = & 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Usando o R para resolver o último problema

```
# coeficientes na função objetivo
func.objetivo <- c(1 , 2)

# coeficientes nas restrições.
coeficientes.restricoes <- rbind(R1=c(1, 0), R2=c(0, 1), R3 = c(1, 1) )

# sinal das restrições.
direcao.restricoes <- c("<=","<=",">=")

# limite das restrições.
limites.restricoes <- c(2,2,3)

solucao.problema <- lpSolve::lp(direction = "max",
                        objective.in = func.objetivo,
                        const.mat = coeficientes.restricoes,
                        const.dir = direcao.restricoes,
                        const.rhs = limites.restricoes,  all.int=F)
```

```
##########################
####     RESULTADO     #####
##########################

# valor da função objetivo na solução
solucao.problema$objval
```

```
## [1] 6
```

```
# Valores para as variáveis de escolha
solucao.problema$solution
```

```
## [1] 2 2
```

Fim

- Nesta aula vimos o funcionamento do simplex e do simplex duas fases, ao utilizar um software, estas situações já estarão programadas de modo que o usuário não percebe o que ocorre internamente.
- Este curso procurou embasar a teoria do algoritmo simplex de modo que se possa ter um conhecimento mais profundo do seu funcionamento.