Universidade Federal Fluminense
Programa de Pós Graduação em Eng. Civil
Disciplina: Teoria da Decisão

AULA 3: Modelo Matemático de Programação Linear

Curso de Mestrado

Disciplina: Teoria das Decisões

Docentes: Profa. Dra. Luciane Ferreira Alcoforado (lucianea@id.uff.br)
Prof. Dr. Marcos dos Santos (marcosdossantos@ime.eb.br)

Calendário das Aulas

- Aula 1: Introdução – 03/dez/2021
- Aula 2: Formulação de Modelos: Tipos e Aplicações Práticas – 10/dez/2021
- Aula 3: O modelo de Programação Linear – 17/dez/2021
- Aula 4: Solução Gráfica – 28/jan/2022
- Aula 5: Método Simplex/Simplex duas fases – 04/fev/2022

Objetivo desta aula

- Compreender a estrutura matemática de um problema de programação linear
- Aprender a representar o problema na forma padrão e na forma canônica
- Compreender a relação entre um problema de maximização e de minimização
- Conhecer o teorema fundamental da programação linear
- Compreender as possibilidades de soluções do problema, listando-as e relacionando-as com os tipos de conjuntos viáveis de um PPL

Forma Padrão

- PPL está na forma-padrão quando é posto na forma:

$$(\min)\,\text{ou}\,(\max)\,z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad \forall i = 1,\ldots,m$$

$$x_j \geq 0 \quad \forall j = 1,\ldots,n$$

sendo $b_i \geq 0 \quad \forall i = 1,\ldots,m$

Redução de um PPL qualquer à forma-padrão

- Restrições do tipo ≤

$$2x_1 + 3x_2 \leq 5 \quad \longrightarrow \quad 2x_1 + 3x_2 + \underbrace{x_3}_{x_3 \geq 0} = 5$$

- Restrições do tipo ≥

$$x_1 + 6x_2 \geq 7 \quad \longrightarrow \quad x_1 + 6x_2 - \underbrace{x_4}_{x_4 \geq 0} = 7$$

Redução de um PPL qualquer à forma-padrão

- Existe $b_i < 0$

  Solução: Basta multiplicar restrição i por -1

- Existem variáveis não-positivas

  Seja $x_k \leq 0$:

  Solução: Criar variável x_k' tal que $x_k' = -x_k$

  Assim, modelo terá variável $x_k' \geq 0$

Redução de um PPL qualquer à forma-padrão

- Existem variáveis livres, isto é, variáveis x_k que podem assumir qualquer valor real (negativo, nulo ou positivo)

Solução: Substituir x_k por $x_k' - x_k''$, com $x_k' \geq 0$ e $x_k'' \geq 0$

$$x_k' > x_k'' \Leftrightarrow x_k > 0$$

$$x_k' = x_k'' \Leftrightarrow x_k = 0$$

$$x_k' < x_k'' \Leftrightarrow x_k < 0$$

- PPL é de maximização ou minimização

$$\max f(x) = -\min \{-f(x)\} \text{ ou}$$

$$\min f(x) = -\max \{-f(x)\}$$

Exemplo: colocar o problema na forma padrão

$$
\begin{array}{lccccc}
\max & x_1 & + & 2x_2 & = & z \\
 & x_1 & & & \leq & 2 \\
 & & & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
\max & x_1 & + & 2x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & = & z \\
 & x_1 & & & + & x_3 & & & & & = & 2 \\
 & & & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

W = -Z

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
\min & -x_1 & - & 2x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & = & w \\
 & x_1 & & & + & x_3 & & & & & = & 2 \\
 & & & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Resolva o problema no R

- Resolva as duas formulações do slide anterior no R e compare as soluções.
- Você deve observar que:
- Os valores das variáveis de decisão são os mesmos
- O valor da função objetivo possui uma diferença no sinal, isto é, em valor absoluto é igual para max ou min.

Exemplo: colocar o problema na forma padrão de maximização

$$
\begin{array}{lccccc}
\min & 3x_1 & + & 2x_2 & = & w \\
 & x_1 & - & x_2 & \geq & 2 \\
 & & & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

W = -Z

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
\max & -3x_1 & + & 2x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & = & z \\
 & x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & = & 2 \\
 & 0x1 & + & x_2 & + & 0x_3 & + & x_4 & + & 0x_5 & = & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & x_5 & = & 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Forma Matricial

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
\max & x_1 & + & 2x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & = & z \\
 & x_1 & & & + & x_3 & & & & & = & 2 \\
 & & & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

max

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{c'} \underbrace{\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ x5 \end{bmatrix}}_{x} = z$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{b}$$

Forma padrão

- Considerando a forma matricial de um PPL, a forma padrão deste problema deverá ser representada matricialmente por

$$\mathbf{Ax = b}$$

- em que x é o vetor positivo das variáveis de decisão e b é o vetor positivo com os valores das restrições de recursos do problema e A é a matriz tecnológica ou matriz dos coeficientes

- Lembre-se que na forma padrão todas as variáveis de decisão devem ser positivas e também os valores do vetor b, todos positivos. A matriz A pode ter qualquer valor.

Partição Básica

- Arenales pag 72:

Considerando uma partição básica **A** = [**B** **N**], o sistema **Ax** = **b** pode ser reescrito de forma equivalente como

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow [\mathbf{BN}] \begin{bmatrix} \mathbf{x_B} \\ \mathbf{x_N} \end{bmatrix} = \mathbf{b} \qquad (2.30)$$

ou

$$\mathbf{Bx_B} + \mathbf{Nx_N} = \mathbf{b}.$$

Portanto,

$$\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{Nx_N} \qquad \text{(solução geral).} \qquad (2.31)$$

Forma canônica = Partição da matriz A

- Deve ser possível representar a matriz A em parte por uma matriz identidade (B = I)

- A = [N B]

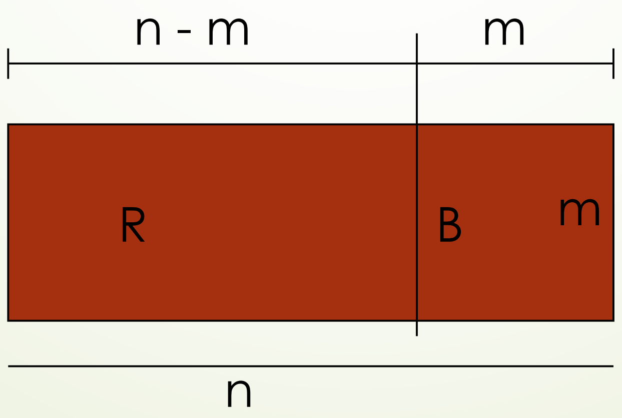
- Ex: A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Caracterização de vértice

- Para gerar um vértice:
  - Escolher uma matriz não-singular B tal que:

$$Bx^B + Rx^R = b$$

  - Fazer $x^R = 0$
  - Se ao resolver o sistema $Bx^B = b$, for obtido $x^B \geq 0$, então $x = (x^B\ x^R)^t = (x^B\ 0)^t$ é vértice
- Deste procedimento resulta uma **Solução Básica Viável** (**SBV**), com o significado geométrico de **vértice**.

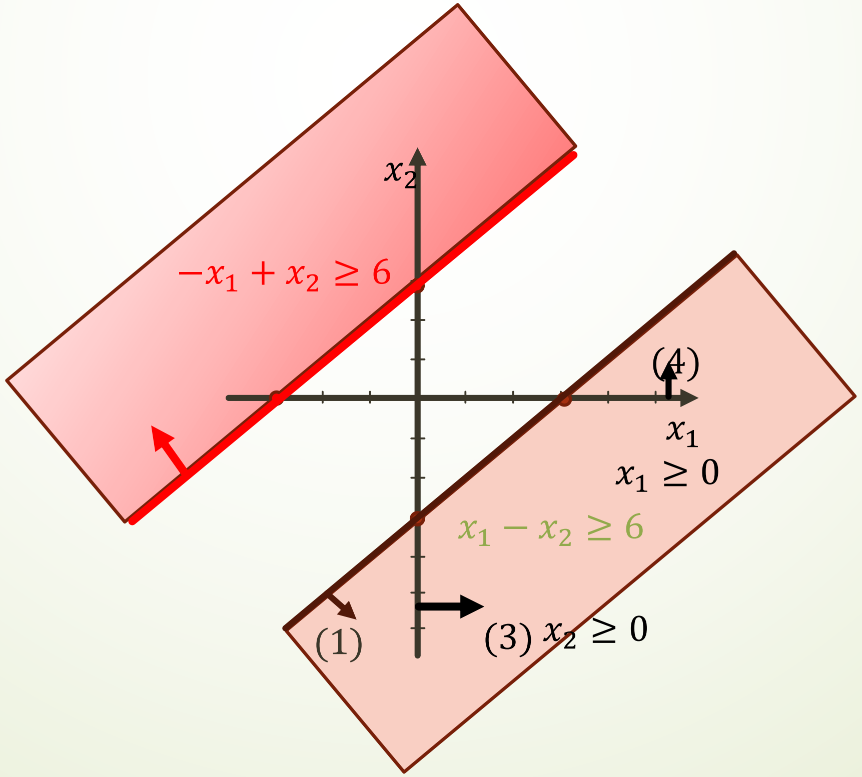


Teorema Fundamental da Programação Linear

- **O ótimo de um PPL, se existir, ocorre em pelo menos um vértice do conjunto de soluções viáveis.**
- Situações que podem ocorrer com relação ao conjunto M de soluções viáveis:

1) M = {}

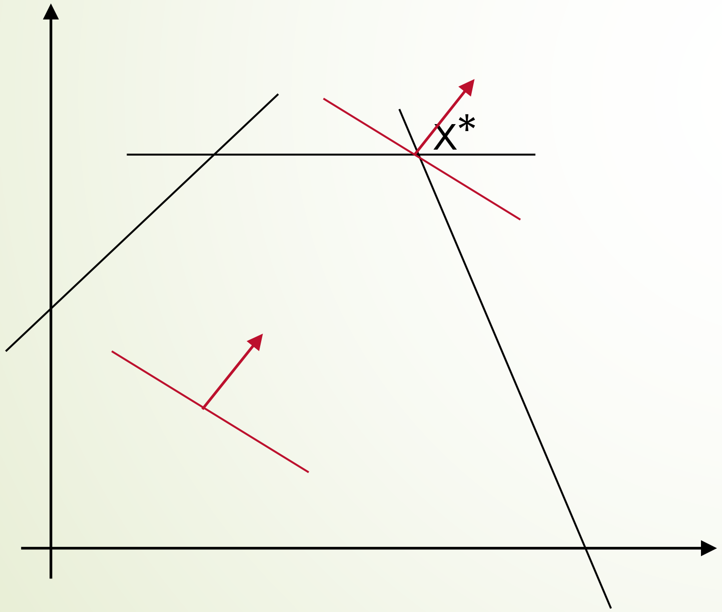
   Neste caso não há solução viável => Não há solução ótima



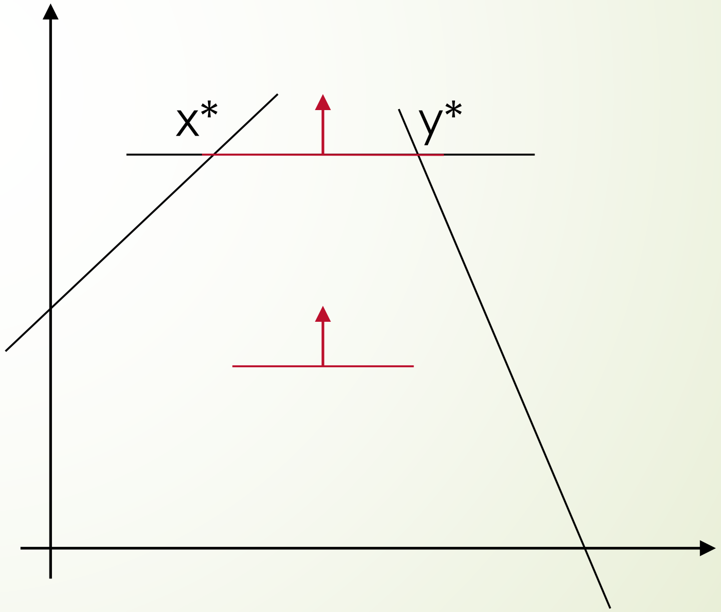
Teorema Fundamental da Programação Linear

2) M é não vazio

a) M é limitado



Única solução ótima, a qual é vértice

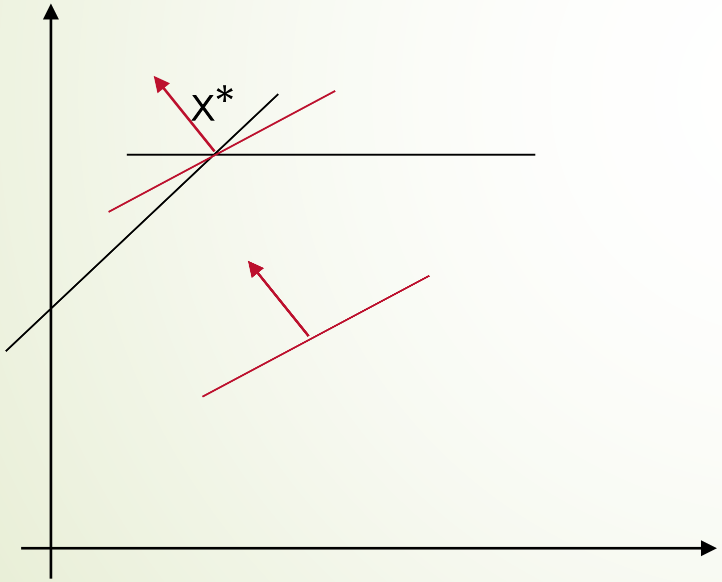


Infinidade de soluções ótimas, sendo duas vértices

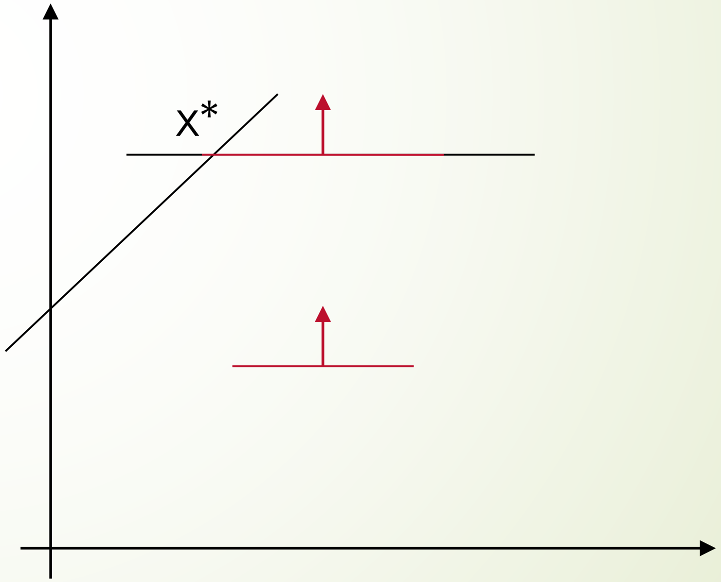
Teorema Fundamental da Programação Linear

2) M é não vazio

   b) M é ilimitado



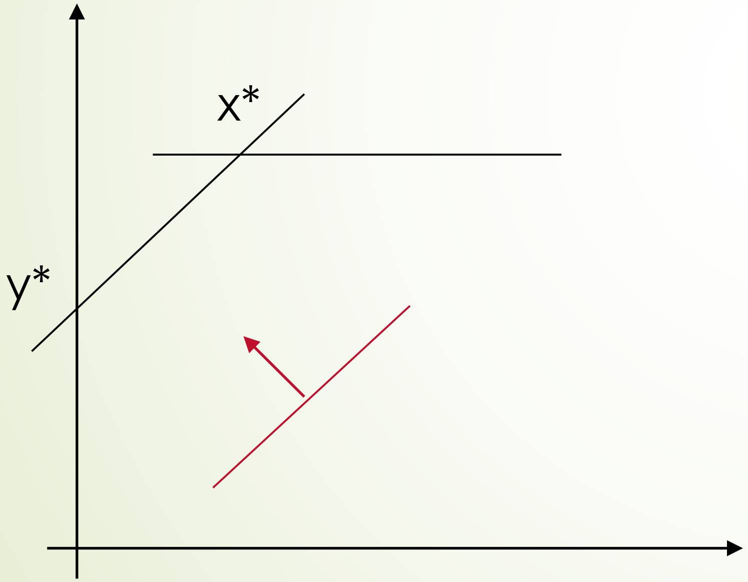
Única solução ótima, a qual é vértice



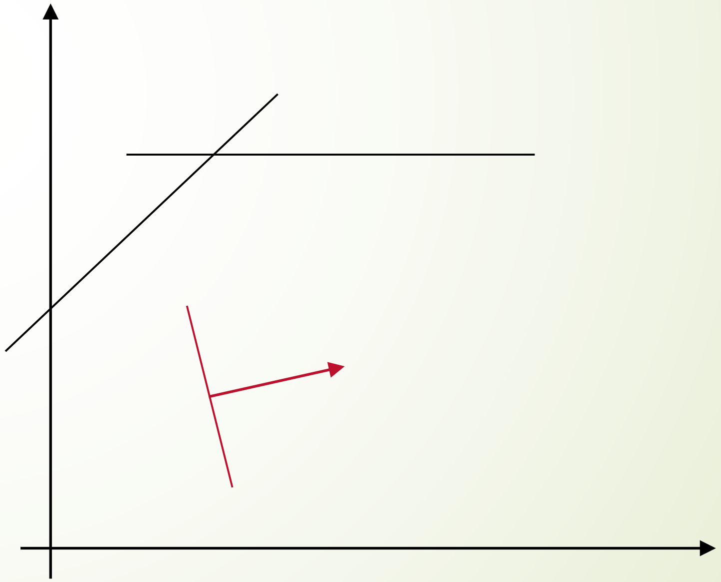
Infinidade de soluções ótimas, sendo uma vértice

Teorema Fundamental da Programação Linear

2) M é não vazio
   b) M é ilimitado



Infinidade de soluções ótimas, sendo duas vértices



Não há soluções ótimas

Caracterização de vértice

Problema Original

$$
\begin{array}{lccccc}
\max & x_1 & + & 2x_2 & & \\
 & x_1 & & & \leq & 2 \\
 & & & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

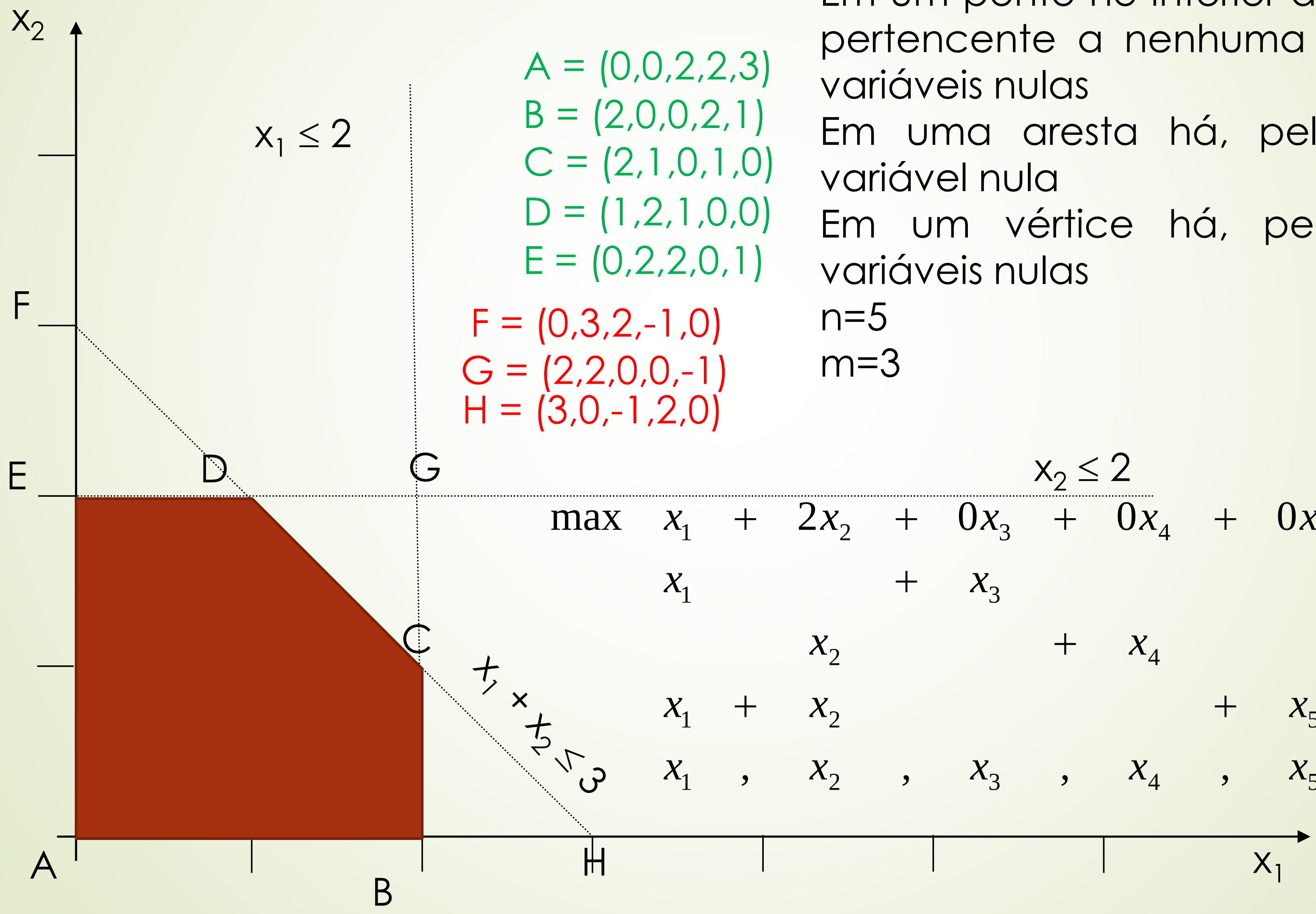
Problema na forma padrão

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
\max & x_1 & + & 2x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & & \\
 & x_1 & & & + & x_3 & & & & & = & 2 \\
 & & & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Sistema matricial

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A}
\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{x}
=
\underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{b}
$$

Caracterização de vértice



A = (0,0,2,2,3)
B = (2,0,0,2,1)
C = (2,1,0,1,0)
D = (1,2,1,0,0)
E = (0,2,2,0,1)

F = (0,3,2,-1,0)
G = (2,2,0,0,-1)
H = (3,0,-1,2,0)

Em um ponto no interior do conjunto (não pertencente a nenhuma aresta) não há variáveis nulas

Em uma aresta há, pelo menos, uma variável nula

Em um vértice há, pelo menos, n-m variáveis nulas

n=5

m=3

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
\max & x_1 & + & 2x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & & \\
 & x_1 & & & + & x_3 & & & & & = & 2 \\
 & & & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Tarefa para o recesso de fim de ano

Escolha um problema de no máximo 3 restrições, pesquise na bibliografia sobre o algoritmo simplex, estude-o e realize os cálculos manualmente para o problema escolhido. Após, utilize o lpsolve do R e confira se a solução obtida é a mesma dos cálculos manuais.

Este exercício deve ser entregue na próxima aula, prevista para 28/01/2022