Universidade Federal Fluminense
Programa de Pós Graduação em Eng. Civil
Disciplina: Teoria da Decisão

AULA 2: Formulação de Modelos

Curso de Mestrado

Disciplina: Teoria das Decisões

Docentes: Profa. Dra. Luciane Ferreira Alcoforado (lucianea@id.uff.br)
Prof. Dr. Marcos dos Santos (marcosdossantos@ime.eb.br)

Calendário das Aulas

- Aula 1: Introdução – 03/dez/2021
- Aula 2: Formulação de Modelos: Tipos e Aplicações Práticas – 10/dez/2021
- Aula 3: O modelo de Programação Linear – 17/dez/2021
- Aula 4: Solução Gráfica – 28/jan/2022
- Aula 5: Método Simplex/Simplex duas fases – 04/fev/2022

Objetivo desta aula

- Compreender o processo de modelagem matemática de problemas de programação linear
- Construir modelos matemáticos para problemas de otimização

O problema

- Após ser atingida por uma explosão meteorológica, uma pequena cidade ficou arrasada, árvores caídas, construções públicas danificadas em sua estrutura, pessoas desabrigadas.
- Foi criado uma força tarefa com o objetivo de auxiliar a cidade na retomada das suas atividades, sendo disponibilizado três equipes distintas com habilidades específicas para ajudar a recuperar os alvos danificados.
- O objetivo da força é atender ao maior número possível de alvos atingidos (árvores caídas, construções danificadas e pessoas desabrigadas)

O problema

Recursos

- Pessoal disponível/Necessidades
- Equipe A: 30 pessoas; não há pessoas nesta equipe com habilidade para atender desabrigados
- Equipe B: 65 pessoas; não há pessoas nesta equipe com habilidade para remover árvore caída
- Equipe C: 25 pessoas; não há pessoas nesta equipe com habilidade para recuperar construção

****

Restrições

- Remover 1 árvore necessita de
  - 2 pessoas equipe A, 0 pessoa da equipe B e 1 pessoa da equipe C
- Recuperar 1 construção necessita de
  - 2 pessoas da equipe A, 4 pessoas da equipe B e 0 pessoa da equipe C
- Atender 10 desabrigados necessita de
  - 10 pessoas da equipe A, 0 pessoas da equipe B e 1 pessoas da equipe C

Um modelo de Otimização Linear deve conter:

Variáveis de Decisão: um conjunto de variáveis manipuláveis no procedimento de busca pelo ótimo.

Função Objetivo: que expressa o **critério de otimalidade**, escrita em termos das variáveis de decisão do problema. A função objetivo é uma função linear que deverá ser otimizada, ou seja, maximizada ou minimizada.

Restrições Estruturais: um conjunto de restrições que determina a região de soluções factíveis (viáveis) para o problema. Os valores assumidos pelas variáveis de decisão devem satisfazer a esse conjunto de restrições.

Restrições de Sinal: pois as variáveis de decisão podem assumir valores pré-estabelecidos no domínio dos números reais (isto é, valores positivos, negativos ou ambos).

PARTE 1

Função Objetivo e Variáveis de Decisão

Problema: Maximizar, por meio de força tarefa, a **quantidade de alvos recuperados que foram atingidos**
Alvos: árvores caídas, construções danificadas, pessoas desabrigadas

O que eu quero definir? (minhas Variáveis de Decisão):

Quantas árvores caídas, construções danificadas e pessoas desabrigadas consigo recuperar

Construção de um Modelo Matemático

PARTE 1

Função Objetivo e Variáveis de Decisão

Variáveis de Decisão (VD): (neste exemplo)

-A característica a ser maximizada é a quantidade de alvos recuperados;

-As variáveis que compõe o efeito maximizado (Qtde de alvos total):

- Quantidade de árvores caídas removidas(x_1);
- Quantidade de construção pública recuperada(x_2);
- Quantidade de pessoas desabrigadas ajudadas(x_3);

Construção de um Modelo Matemático

PARTE 1

Função Objetivo:

Relação linear entre as variáveis de decisão do problema (no exemplo chamadas de x_1, x_2 e x_3) e suas respectivas contribuições para o objetivo pretendido (maximizar a quantidade de alvos recuperados).

Função Objetivo (notações):

(max ou min) $Z = x_1 + x_2 + x_3$ ou

(max ou min) $f(x) = x_1 + x_2 + x_3$

Otimização Linear-Modelagem

Um modelo de Otimização Linear <u>deve</u>

Variáveis de Decisão: um conjunto de variáveis manipuláveis no procedimento de busca pelo ótimo.

PARTE 1

Função Objetivo: que expressa o **critério de otimalidade**, escrita em termos das variáveis de decisão do problema. A função objetivo é uma função linear que deverá ser otimizada, ou seja, maximizada ou minimizada.

PARTE 2

Restrições Estruturais: um conjunto de restrições que determina a região de soluções factíveis (viáveis) para o problema. Os valores assumidos pelas variáveis de decisão devem satisfazer a esse conjunto de restrições.

Restrições de Sinal: pois as variáveis de decisão podem assumir valores pré-estabelecidos no domínio dos números reais (isto é, valores positivos, negativos ou ambos).

Construção de um Modelo Matemático

PARTE 2

Restrições: Condições impostas ao problema

Dado: Para garantir a recuperação dos alvos é necessário utilizar:

- Árvore caída: 2 da equipe A, 0 da equipe B e 1 da equipe C por árvore;
- Construção pública: 2 da equipe A, 4 equipe B e 0 da equipe C por construção;
- Pessoas desabrigadas: 1 pessoa da equipe A, 0 pessoa da equipe B e 0.1 pessoa da equipe C por desabrigado;

Dado: Estão disponíveis para esta operação:

- 30 pessoas da equipe A;
- 65 pessoas da equipe B;
- 25 pessoas da equipe C;

Construção de um Modelo Matemático

PARTE 2

Restrições: Condições impostas ao problema

Recurso 1: Equipe A

- Disponibilidade para utilização: **30 pessoas**;
- Qtde necessária para retirar árvore caída: **2** pessoas; (lembre que o total de árvores recuperadas = x_1);
- Qtde necessária para recuperar uma construção: **2** pessoas; (lembre que o total de construções recuperadas= x_2);
- Qtde necessária para ajudar desabrigados: **0** pessoas; (lembre que o total de pessoas recuperadas= x_3);

Restrição devido à disponibilidade do Recurso 1:

$$2x_1 + 2x_2 + 0x_3 \leq 30$$

Construção de um Modelo Matemático

PARTE 2

Restrições: Condições impostas ao problema

Recurso 2: Equipe B

- Disponibilidade para utilização: **65 pessoas**;
- Qtde necessária para retirar árvore caída: **0** pessoas; (lembre que o total de árvores recuperadas = x_1);
- Qtde necessária para recuperar uma construção: **4** pessoas; (lembre que o total de construções recuperadas= x_2);
- Qtde necessária para ajudar desabrigados: **1** pessoa; (lembre que o total de pessoas recuperadas= x_3);

Restrição devido à disponibilidade do Recurso 2:

$$0x_1 + 4x_2 + 1x_3 \leq 65$$

Construção de um Modelo Matemático

PARTE 2

Restrições: Condições impostas ao problema

Recurso 3: Equipe C

- Disponibilidade para utilização: **25 pessoas**;
- Qtde necessária para retirar árvore caída: **1** pessoas; (lembre que o total de árvores recuperadas = x_1);
- Qtde necessária para recuperar uma construção: **0** pessoas; (lembre que o total de construções recuperadas= x_2);
- Qtde necessária para ajudar desabrigados: **0.1** pessoas; (lembre que o total de pessoas recuperadas= x_3);

Restrição devido à disponibilidade do Recurso 3:

$$1x_1 + 0x_2 + 0.1x_3 \leq 25$$

Construção de um Modelo Matemático

PARTE 2

Restrições: Condições impostas ao problema

Restrições:

$$2x_1 + 2x_2 + 0x_3 \leq 30$$
$$0x_1 + 4x_2 + 1x_3 \leq 65$$
$$1x_1 + 0x_2 + 0.1x_3 \leq 25$$

Genericamente:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\dots\ a_{1n}x_n \leq b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\dots\ a_{2n}x_n \leq b_2$$
....
$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_n+\dots\ a_{mn}x_n \leq bn$$

$\leq$ ou $=$ ou $\geq$

Otimização Linear-Modelagem

Um modelo de Otimização Linear deve

Variáveis de Decisão: um conjunto de variáveis manipuláveis no procedimento de busca pelo ótimo.

PARTE 1

Função Objetivo: que expressa o **critério de otimalidade**, escrita em termos das variáveis de decisão do problema. A função objetivo é uma função linear que deverá ser otimizada, ou seja, maximizada ou minimizada.

PARTE 2

Restrições Estruturais: um conjunto de restrições que determina a região de soluções factíveis (viáveis) para o problema. Os valores assumidos pelas variáveis de decisão devem satisfazer a esse conjunto de restrições.

PARTE 3

Restrições de Sinal: pois as variáveis de decisão podem assumir valores pré-estabelecidos no domínio dos números reais (isto é, valores positivos, negativos ou ambos).

PARTE 3

Restrições de sinal:

Normalmente serão de não negatividade pois:

-Não existe produção negativa;
-Não existe lucro negativo;
-Não existe quantidade vendida negativa;
-Não existe recuperação negativa;
-Etc.

Podem, eventualmente, ser $x \leq 0$ ou x livre de sinal

No exemplo de recuperação de alvos $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Genericamente: $x_i \geq 0$ para $i = 1,....n$

Construção de um Modelo Matemático

Enunciado do Problema de Otimização:

Maximizar:

$$\mathbf{Z = x_1 + x_2 + x_3}$$

Sujeito a:

$$2x_1 + 2x_2 + 0x_3 \leq 30$$
$$0x_1 + 4x_2 + 1x_3 \leq 65$$
$$1x_1 + 0x_2 + 0.1x_3 \leq 25$$

NO R:

```
require(lpSolve)
func.objetivo <- c(1 , 1, 1)
coeficientes.restricoes <- rbind(R1=c(2, 1, 0), R2=c(0, 4, 1), R3 = c(1, 1, 0.1))
direcao.restricoes <- c("<=","<=","<=")
limites.restricoes <- c(30, 65, 25)
```

Com:

$$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$$

Obtendo a solução do Problema de Otimização:

No R:

```
solucao.problema <- lpSolve::lp(direction = "max",
                   objective.in = func.objetivo,
                   const.mat = coeficientes.restricoes,
                   const.dir = direcao.restricoes,
                   const.rhs = limites.restricoes,  all.int=T)

# valor da função objetivo na solução
solucao.problema$objval

# Valores para as variáveis do problema
solucao.problema$solution
```

A solução ótima para este problema, seria recuperar **15** árvores, **0** construções e ajudar 65 pessoas desabrigadas.

Z= 15 + 0 + 65 = 80

A quantidade máxima de alvos que poderiam ser recuperados com o pessoal disponível seria **80**.

Exemplo 2

Considere o mesmo problema de recuperação de alvos
Agora o objetivo será maximizar o tempo da operação

Tempo para remover 1 árvore caída: 30 minutos

Tempo para reparar 1 construção danificada: 20 horas

Tempo para atender 1 desabrigado: 40 minutos

Exemplo 2

Considere o mesmo problema de recuperação de alvos
Agora o objetivo será maximizar o tempo da operação

Tempo para remover 1 árvore caída: 30 minutos

Tempo para reparar 1 construção danificada: 20 horas

Tempo para atender 1 desabrigado: 45 minutos

Função Objetivo (notações):

(max em horas) $Z = 0.5x_1 + 20x_2 + 0.75x_3$ **ou**

(max em minutos) $Z = 30x_1 + 1200x_2 + 45x_3$

PARTE 1

Construção de um Modelo Matemático

Restrições: Condições impostas ao problema

Restrições:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 1x_2 + 0x_3 &\leq 30 \\
0x_1 + 4x_2 + 1x_3 &\leq 65 \\
1x_1 + 1x_2 + 0.1x_3 &\leq 25
\end{aligned}
$$

PARTE 2

Genericamente:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ a_{1n}x_n &\leq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ a_{2n}x_n &\leq b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_n + \ldots\ a_{mn}x_n &\leq bn
\end{aligned}
$$

$\leq$ ou $=$ ou $\geq$

PARTE 3

No exemplo de recuperação de alvos x_1 , x_2 , $x_3 \geq 0$

Construção de um Modelo Matemático

Enunciado do Problema de Otimização:

Maximizar:

$$Z = 0.5x_1 + 20x_2 + 0.75x_3$$

Sujeito a:

$$2x_1 + 2x_2 + 0x_3 \leq 30$$
$$0x_1 + 4x_2 + 1x_3 \leq 65$$
$$1x_1 + 0x_2 + 0.1x_3 \leq 25$$

NO R:

```
require(lpSolve)
func.objetivo <- c(0.5 , 20, 0.75)
coeficientes.restricoes <- rbind(R1=c(2, 1, 0), R2=c(0, 4, 1), R3 = c(1, 1, 0.1))
direcao.restricoes <- c("<=","<=","<=")
limites.restricoes <- c(30, 65, 25)
```

Com:

$$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$$

Obtendo a solução do Problema de Otimização:

```
No R:
solucao.problema <- lpSolve::lp(direction = "max",
                    objective.in = func.objetivo,
                    const.mat = coeficientes.restricoes,
                    const.dir = direcao.restricoes,
                    const.rhs = limites.restricoes,  all.int=T)

# valor da função objetivo na solução
solucao.problema$objval

# Valores para as variáveis do problema
solucao.problema$solution
```

A solução ótima para este problema, seria recuperar **7** árvores, **16** construções e ajudar 1 pessoa desabrigada com tempo total de 324.5 horas ou 19.470h

Z= 0.5*7 + 20*16 + 0.75*1 = 324.5

A quantidade de alvos que poderiam ser recuperados com o pessoal disponível seria **24, maximizando o tempo total de operação sendo este tempo de 324.5 horas**

Exemplo 3 – O problema da mistura

O problema da mistura tem como objetivo encontrar a **solução com custo mínimo ou lucro máximo**, a partir da combinação de diversos ingredientes para produzir um ou vários produtos.
As matérias-primas podem ser:
minérios, metais, produtos químicos, petróleo ou óleo bruto, água
Os produtos finais podem ser:
lingotes de metal, aço, tintas, gasolina ou outros produtos químicos.
Algumas aplicações:

1. Mistura de vários tipos de petróleo ou óleo bruto para produzir diferentes tipos de gasolina.
2. Mistura de produtos químicos para gerar outros produtos.
3. Mistura de diferentes tipos de papel para gerar papel reciclado.

Exemplo 3

Selecionar os ingredientes de uma dieta, com o **menor custo possível**, que farão parte das duas principais refeições diárias (almoço e jantar), de forma que 100% das necessidades diárias de cada um desses nutrientes sejam atendidas nas duas refeições. Além disso, o total ingerido nas duas refeições não pode ultrapassar 1,5 kg.

Tabela 2.4 Nutrientes, necessidades diárias e custo por alimento

	Porção de 100 gramas				
	Ferro	**Vitamina A**	**Vitamina B12**	**Ácido fólico**	**Preço**
	(mg)	(UI)	(mcg)	(mg)	(R$)
Espinafre	3	7.400	0	0,4	0,30
Brócolis	1,2	138,8	0	0,5	0,20
Agrião	0,2	4.725	0	0,1	0,18
Tomate	0,49	1.130	0	0,25	0,16
Cenoura	1	14.500	0,1	0,005	0,30
Ovo	0,9	3.215	1	0,05	0,30
Feijão	7,1	0	0	0,056	0,40
Grão de bico	4,86	41	0	0,4	0,40
Soja	3	1.000	0	0,08	0,45
Carne	1,5	0	3	0,06	0,75
Fígado	10	32.000	100	0,38	0,80
Peixe	1,1	140	2,14	0,002	0,85
Necessidades diárias	**8**	**4.500**	**2**	**0,4**	

Fonte: Belfiore & Favero, 2013.

Exemplo 3

Variáveis de decisão:
x_j = quantidade (kg) do alimento *j* consumido diariamente, *j* = 1, 2,..., 12.
Assim, tem-se:
x_1 = quantidade (kg) de espinafre consumido diariamente.
x_2 = quantidade (kg) de brócolis consumido diariamente.
x_3 = quantidade (kg) de agrião consumido diariamente.
...
x_{12} = quantidade (kg) de peixe consumido diariamente.

PARTE 1

100 g de espinafre custa R$0,30; logo 1 kg de espinafre custa R$3,00
100 g de brócolis custa R$0,20; logo 1 kg de brócolis custa R$2,00
...

Função Objetivo:
$\min w = 3x_1 + 2x_2 + 1{,}8x_3 + 1{,}6x_4 + 3x_5 + 3x_6 + 4x_7 + 4x_8 + 4{,}5x_9 + 7{,}5x_{10} + 8x_{11} + 8{,}5x_{12}$

Restrições: Condições impostas ao problema

PARTE 2

1. As necessidades mínimas diárias de ferro devem ser atendidas:
$30x1 + 12x2 + 2x3 + 4,9x4 + 10x5 + 9x6 + 71x7 + 48,6x8 + 30x9 + 15x10 + 100x11 + 11x12 \geq 80$

2. As necessidades mínimas diárias de vitamina A devem ser atendidas:
$74.000x1 + 1.388x2 + 47.250x3 + 11.300x4 + 145.000x5 + 32.150x6 + 410x8 + 10.000x9 + 320.000x11 + 1.400x12 \geq 45.000$

3. As necessidades mínimas diárias de vitamina B12 devem ser atendidas:
$x5 + 10x6 + 30x10 + 1.000x11 + 21,4x12 \geq 20$

4. As necessidades mínimas diárias de ácido fólico devem ser atendidas:
$4x1 + 5x2 + x3 + 2,5x4 + 0,05x5 + 0,5x6 + 0,56x7 + 4x8 + 0,8x9 + 0,6x10 + 3,8x11 + 0,02x12 \geq 4$

5. O total consumido nas duas refeições não pode ultrapassar 1,5 kg:
$x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 + x12 \leq 1,5$

PARTE 3

6. As variáveis de decisão do modelo são não negativas:
$x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11, x12 \geq 0$

Construção de um Modelo Matemático

Enunciado do Problema de Otimização:

Minimizar:

$$3x1 + 2x2 + 1{,}8x3 + 1{,}6x4 + 3x5 + 3x6 + 4x7 + 4x8 + 4{,}5x9 + 7{,}5x10 + 8x11 + 8{,}5x12$$

Sujeito a:

$$30x1 + 12x2 + 2x3 + 4{,}9x4 + 10x5 + 9x6 + 71x7 + 48{,}6x8 + 30x9 + 15x10 + 100x11 + 11x12 \geq 80$$

$$74.000x1 + 1.388x2 + 47.250x3 + 11.300x4 + 145.000x5 + 32.150x6 + 0x7 + 410x8 + 10.000x9 + 0x10 + 320.000x11 + 1.400x12 \geq 45.000$$

$$0x1 + 0x2 + 0x3 + 0x4 + x5 + 10x6 + 0x7 + 0x8 + 0x9 + 30x10 + 1.000x11 + 21{,}4x12 \geq 20$$

$$4x1 + 5x2 + x3 + 2{,}5x4 + 0{,}05x5 + 0{,}5x6 + 0{,}56x7 + 4x8 + 0{,}8x9 + 0{,}6x10 + 3{,}8x11 + 0{,}02x12 \geq 4$$

$$x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 + x12 \leq 1{,}5$$

Com:

$$x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11, x12 \geq 0$$

Construção de um Modelo Matemático

Resolvendo No R

```
# coeficientes na função objetivo
func.objetivo <- c(3, 2, 1.8, 1.6, 3, 3, 4, 4, 4.5,7.5, 8, 8.5)

# coeficientes nas restrições.
coeficientes.restricoes <- rbind(R1=c(30,12,2,4.9,10, 9,71,48.6,30,15,100,11),
  R2=c(74000, 1388, 47250,11300,145000,32150,0,410,10000, 0, 320000,1400),
  R3 = c(0,0,0,0,1,10,0,0,0,30,1000, 21.4),
  R4 = c(4,5,1, 2.5,0.05,0.5,0.56,4,0.8,0.6,3.8,0.02),
  R5 = rep(1,12))

# sinal das restrições. Deve obedecer a ordem da matriz de coeficientes
direcao.restricoes <- c(">=",">=",">=",">=","<=")

# limite das restrições. Deve obedecer a ordem da matriz de coeficientes
limites.restricoes <- c(80, 45000, 20,4, 1.5)
```

Construção de um Modelo Matemático

Resolvendo No R

```
solucao.problema <- lpSolve::lp(direction = "min",
                                objective.in = func.objetivo,
                                const.mat = coeficientes.restricoes,
                                const.dir = direcao.restricoes,
                                const.rhs = limites.restricoes,

  all.int=F)

##########################
####    RESULTADO    #####
##########################

# valor da função objetivo na solução
solucao.problema$objval
```

```
## [1] 5.699045
```

```
# Valores para as variáveis de escolha que geram máximo ou mínimo dependendo do problema
solucao.problema$solution
```

```
##  [1] 0.0000000 0.4274137 0.0000000 0.0000000 0.0000000 0.0000000 0.6975931
##  [8] 0.2365252 0.0000000 0.0000000 0.1384680 0.0000000
```

Construção de um Modelo Matemático

Obtendo a solução do Problema de Otimização:

A solução ótima para este problema, seria compor a dieta com $x2 = 0{,}427$ (kg de brócolis), $x7 = 0{,}698$ (kg de feijão), $x8 = 0{,}237$ (kg de grão de bico), $x11 = 0{,}138$ (kg de fígado), $x1, x3, x4, x5, x6, x9, x10, x12 = 0$

W= R$5,70 de custo total (mínimo)