Universidade Federal Fluminense
Programa de Pós Graduação em Eng. Civil
Disciplina: Teoria da Decisão

AULA 4: Solução Gráfica

Curso de Mestrado

Disciplina: Teoria das Decisões

Docentes: Profa. Dra. Luciane Ferreira Alcoforado (lucianea@id.uff.br)
Prof. Dr. Marcos dos Santos (marcosdossantos@ime.eb.br)

Calendário das Aulas

- Aula 1: Introdução – 03/dez/2021
- Aula 2: Formulação de Modelos: Tipos e Aplicações Práticas – 10/dez/2021
- Aula 3: O modelo de Programação Linear – 17/dez/2021
- Aula 4: Solução Gráfica – 28/jan/2022
- Aula 5: Método Simplex/Simplex duas fases – 04/fev/2022

Objetivo desta aula

- Aprender a representar um PPL no plano cartesiano
- Representar no plano cartesiano a região viável
- Representar no plano cartesiano a direção de crescimento da função objetivo
- Determinar, de forma gráfica, o conjunto de soluções factíveis e a solução ótima de um problema simples de programação linear.

Equações Lineares

Em um problema de PL a função objetivo e as restrições impostas são expressas na forma de equações lineares.

$$C_1X_2+C_2X_2+\ldots+C_nX_n$$

Sistema de equações lineares

Um sistema de equações lineares é expresso por um conjunto de equações lineares

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n = b_2$$

$$\ldots$$

$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n = b_m$$

Sistema de equações lineares

Representação Matricial

$$A_{(mxn)}x_{(nx1)} = b_{(mx1)}$$

A é uma matriz mxn

x é um vetor nx1

b é um vetor mx1

Sistema de equações lineares

Solução de um sistema de equações lineares

Solução única
Infinitas soluções
Não tem solução

Sistema de equações lineares

Duas variáveis x e y

$-x + 2y = 1$
$3x \; - \;\; y = 2$

Forma matricial

Ax=b

A = $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ **b** = $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Sistema de equações lineares

Duas variáveis

x e y

$-x + 2y = 1$
$3x - y = 2$

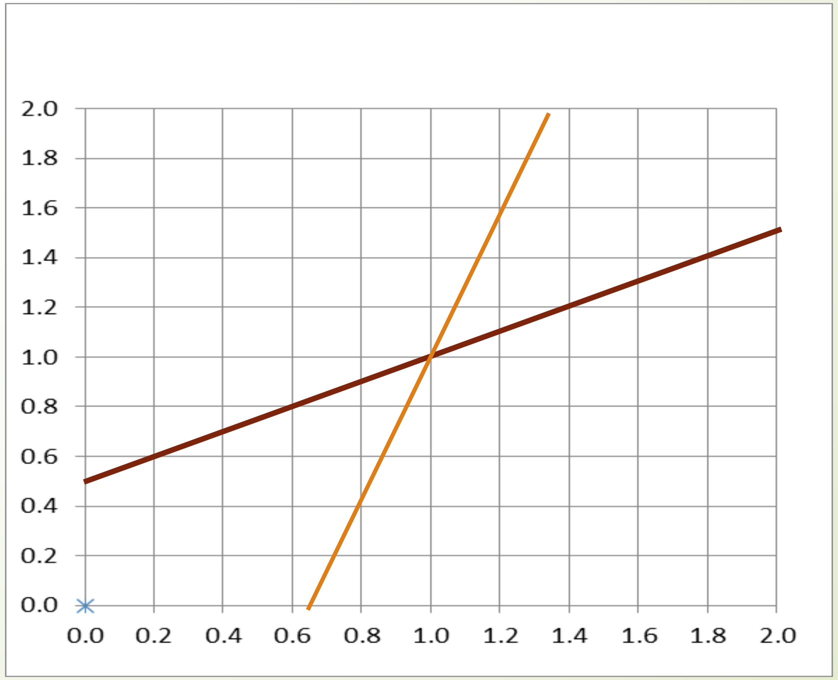
Graficamente

Duas retas que se cruzam

Forma matricial

Ax=b

$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$



Sistema de equações lineares

Pivoteamento

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

L1 = -L1

L2 = L2-3L1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

L2 = L2/5

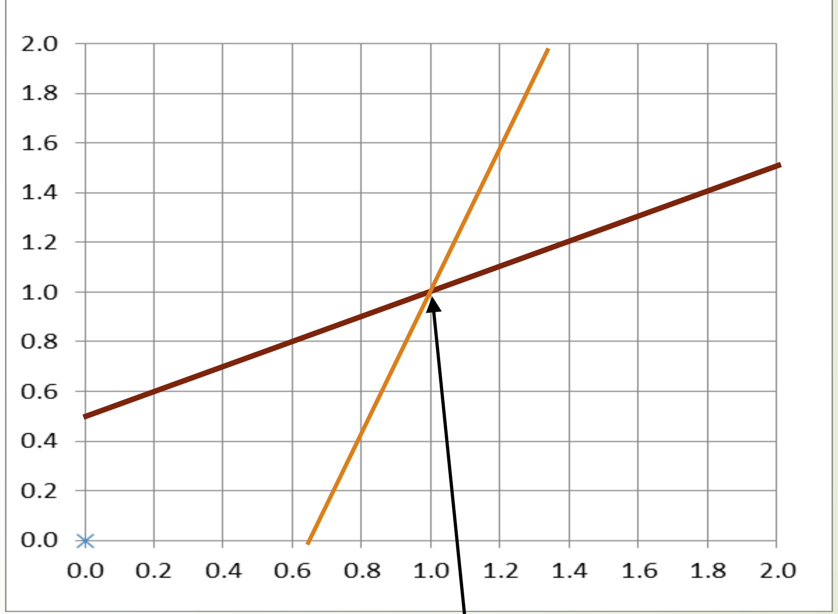
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

L1 = L1+2L2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$-x + 2y = 1$

$3x - y = 2$



Solução

$x = 1, y = 1$

Revisão Matemática

Representação gráfica de equações lineares

Equações lineares:

y = mx + c

y – mx = c

y e ***x*** são os pontos da reta, ***m*** é o coeficiente angular e ***c*** é o coeficiente linear.

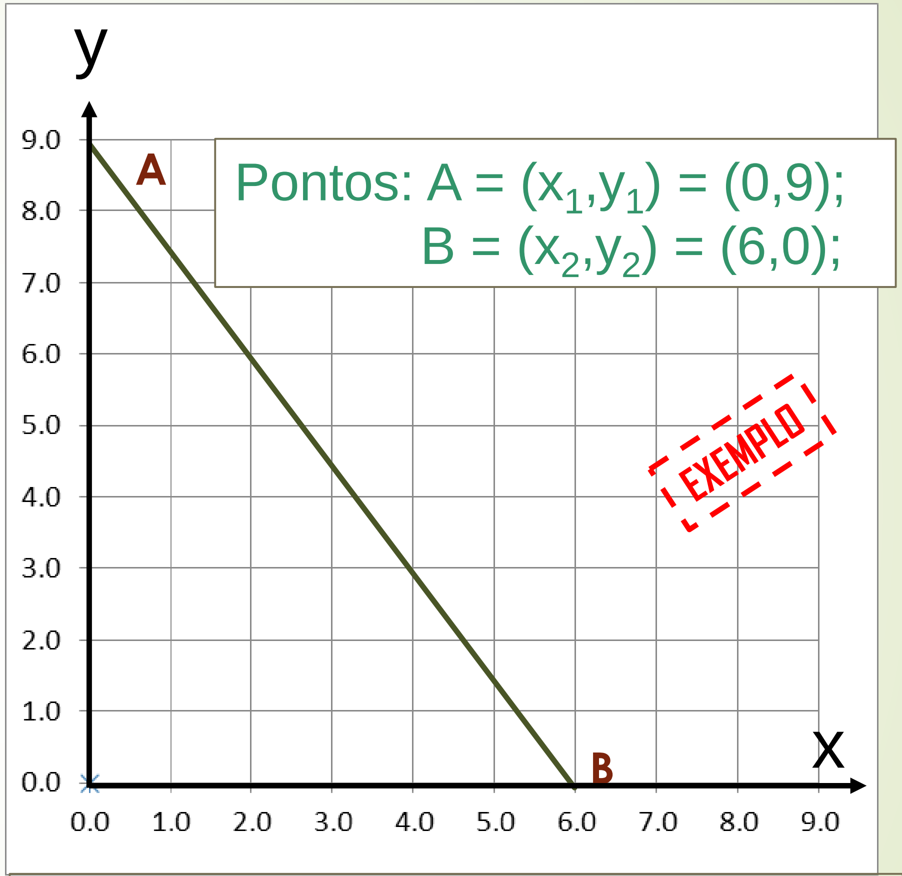
Dois pontos $A = (x_1,y_1)$ e $B=(x_2,y_2)$ determinam a equação da reta

$m = \Delta y/\Delta x = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$

$c = y_1 - mx_1 = y_2 - mx_2$

A reta será: $y = -1,5x + 9$

ou: $y + 1,5x = 9$



Pontos: $A = (x_1,y_1) = (0,9)$;
$B = (x_2,y_2) = (6,0)$;

$m=(y_2-y_1)/(x_2-x_1)$

$m=(0-9)/(6-0)=-1,5$

$y=-1,5x + c$

$c=(y_1+1,5x_1)=(y_2+1,5x_2)=(9+0)=9$

Revisão Matemática

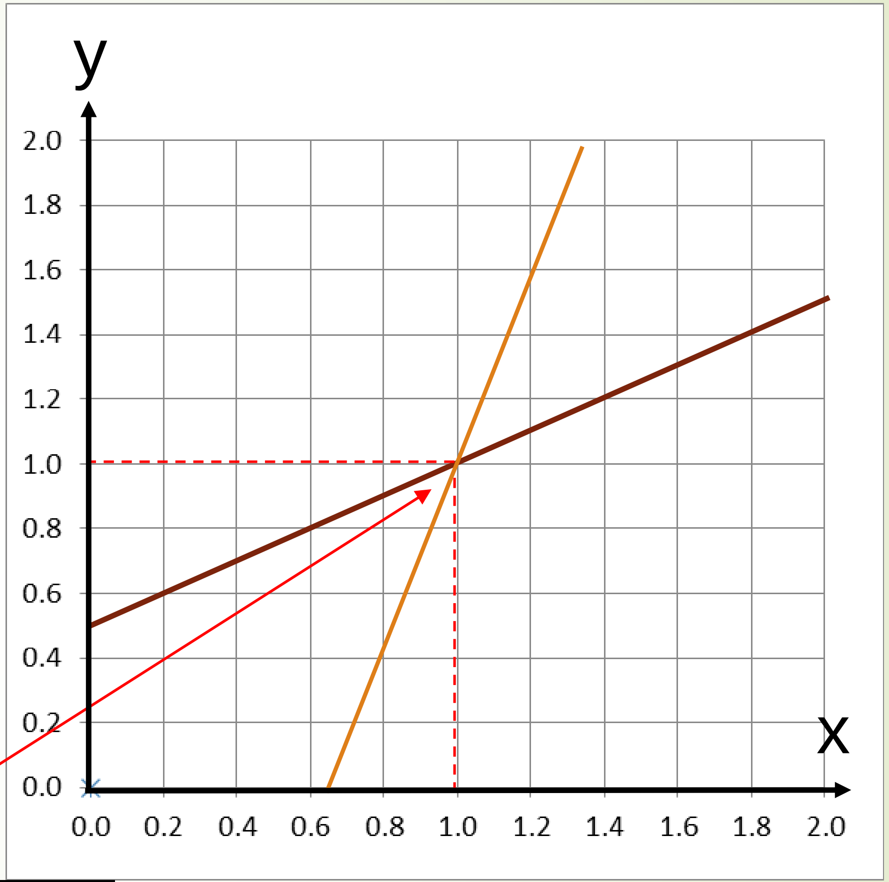
Sistemas lineares

As equações do sistema são representadas por retas.

A solução do sistema é o ponto de cruzamento das retas.

$$-x + 2y = 1$$
$$3x - y = 2$$

Um sistema que possui solução, e esta é única, é um sistema "possível" e "determinado".



Solução do sistema => x=1, y=1

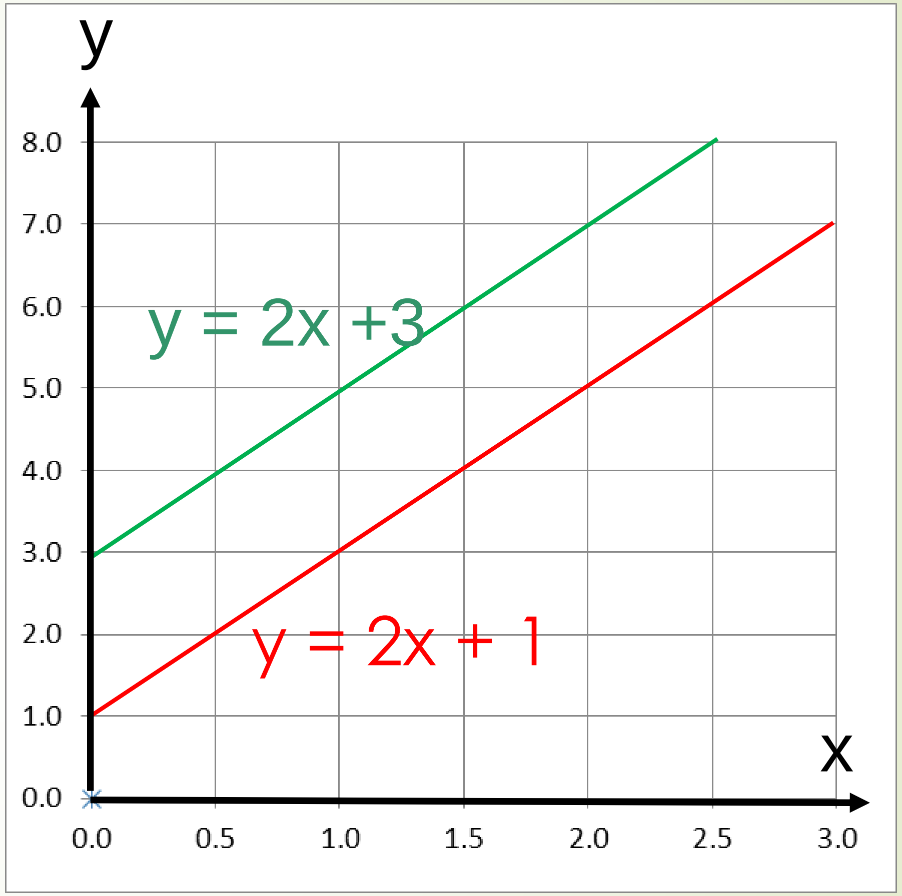
Revisão Matemática

Sistemas lineares

Um sistema pode não ter solução

$$\begin{aligned} -2x + y &= 3 \\ -2x + y &= 1 \end{aligned}$$

As equações do sistema são representadas por retas que não se cruzam



Tentando resolver por substituição:

$y = 3 + 2x$

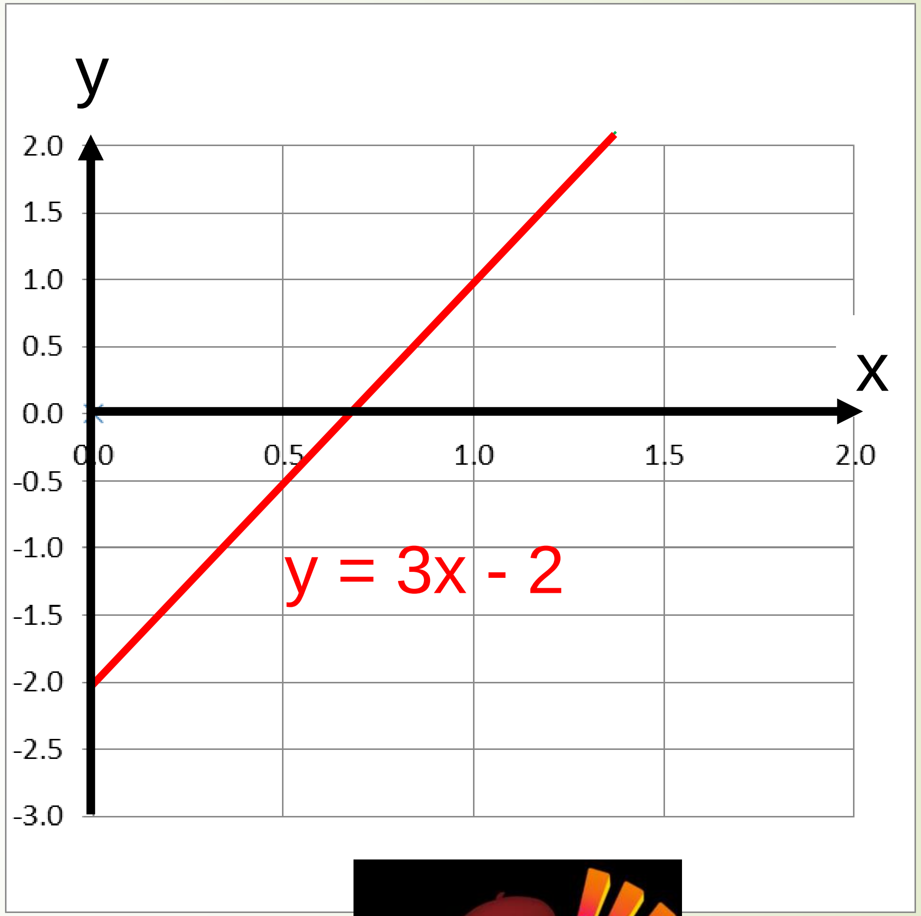
$-2x + (3 + 2x) = 1$

$0x = -2$ (IMPOSSÍVEL)

Não há solução do sistema.
É um sistema "impossível".

Revisão Matemática

Sistemas lineares

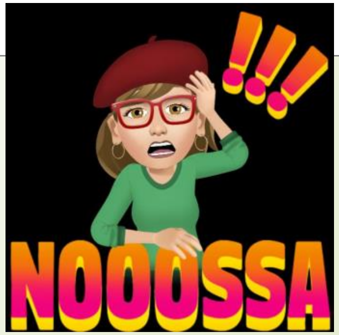


Um sistema pode ter múltiplas soluções

$$\begin{aligned} 3x - \ \ y &= 2 \\ 9x - 3y &= 6 \end{aligned}$$

As equações do sistema são representadas por retas que se sobrepõe.

Há múltiplas soluções para o sistema. É um sistema "possível" e "indeterminado".



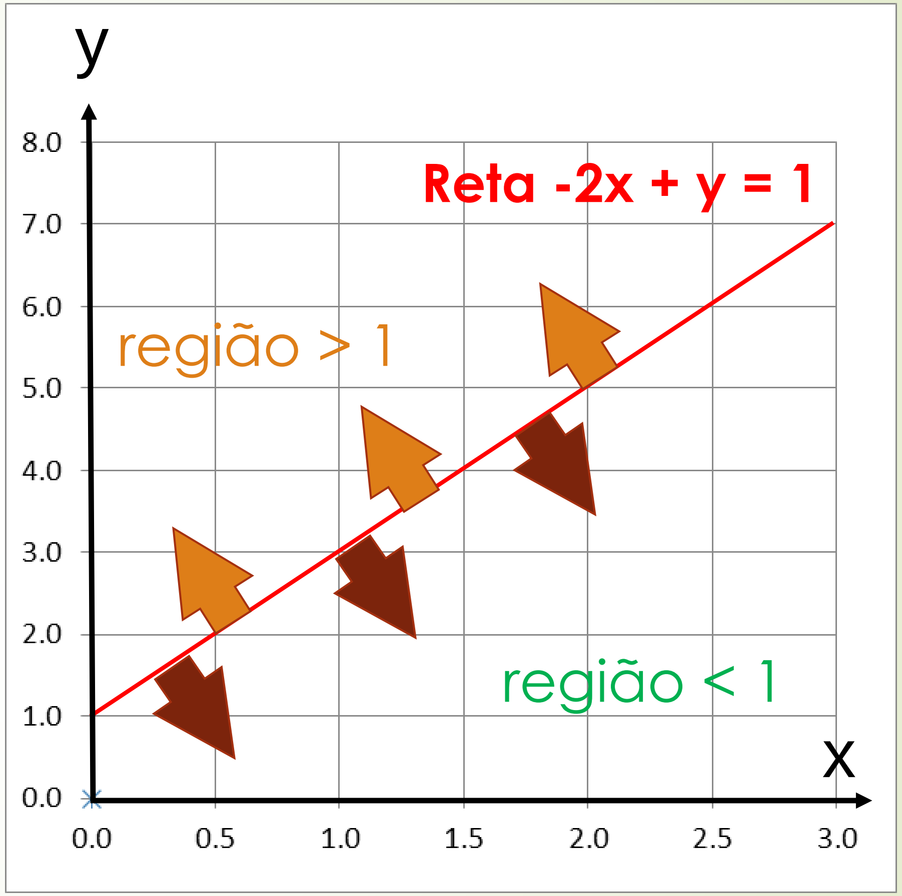
Revisão Matemática

Representação gráfica de **inequações**

A representação gráfica da inequação abaixo é uma região que satisfaz a inequação.

Todos pontos na reta e abaixo dela satisfazem a inequação.

$-2x + y \leq 1$



Sobre a reta todos os pontos (x,y) resultam **= 1**, logo, a reta da igualdade divide a região dos pontos que resultarão **< 1** dos que resultarão **> 1**

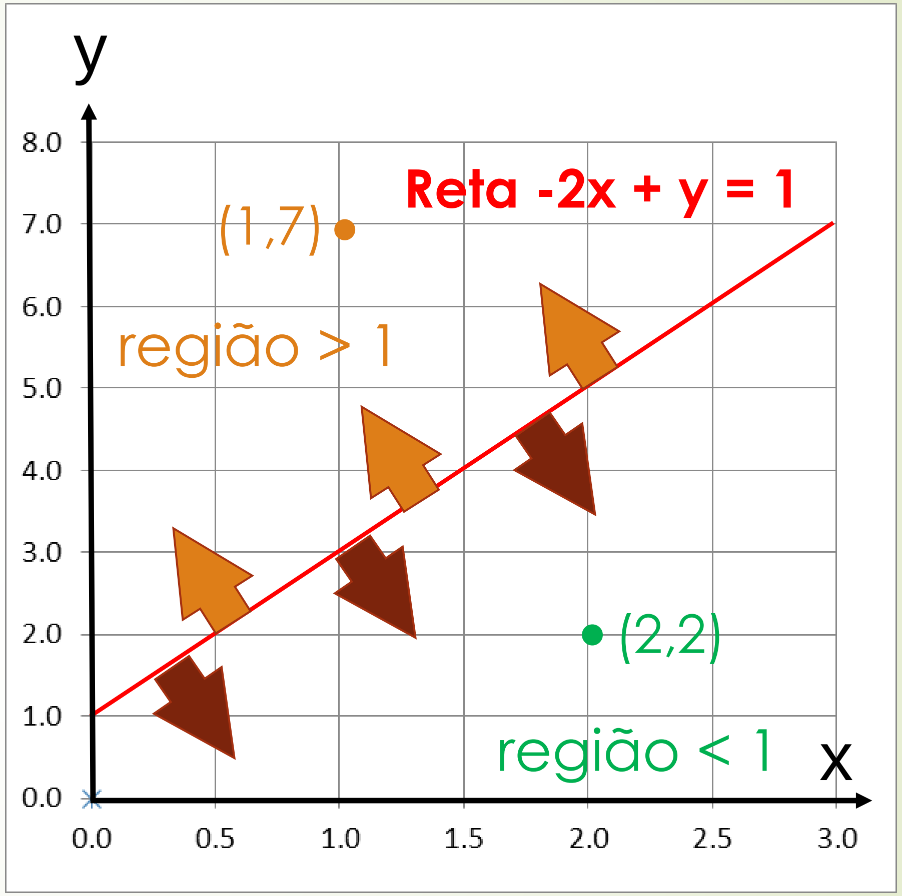
Revisão Matemática

Representação gráfica de inequações

Como comprovar se os pontos acima da reta resultarão **> 1** e os pontos abaixo da reta resultarão **< 1** ?

Testamos qualquer ponto acima ou abaixo da reta na inequação.

$-2x + y \leq 1$



(1,7) está acima da reta

Substituindo na Inequação:

$-2(1) + (7) = 5$ que é maior do que 1

(2,2) está abaixo da reta

Substituindo na Inequação:

$-2(2)+(2) = -2$ que é menor do que 1

Revisão Matemática

Sistemas de inequações

Num sistema de inequações a solução será também uma região

Dado o Sistema:

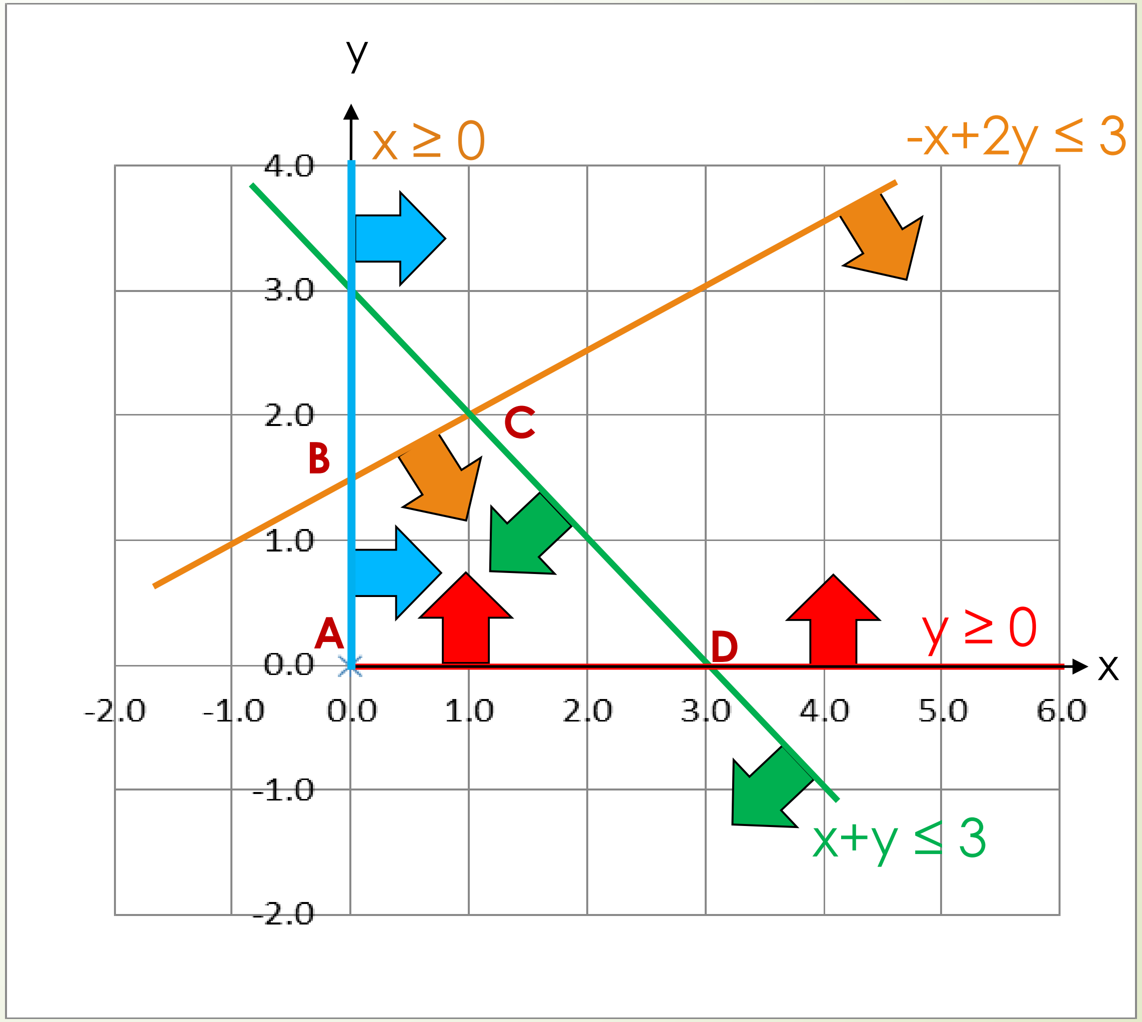
EXEMPLO

$-x + 2y \leq 3$

$x + y \leq 3$

$x \geq 0$

$y \geq 0$



A solução é dada por todos os pares (x,y) dentro da região ABCD

Exercícios

- 1- Obtenha a solução dos sistemas abaixo:
- A- $3x1+4x2 = 5$
- $5x1+3x2 = 2$
- R=solução única $x1=-7/11$ e $x2 = -19/11$
- B- $3x1 + 4x2 = 5$
- $9/4x1 + 3x2 = 2$
- R= infinitas soluções, retas sobrepostas
- C- $3x1 + 4x2 = 5$
- $9/4x1 + 3x2 = 2$
- R=solução impossível, retas paralelas sem sobreposição

Problema exemplo

- Uma metalúrgica deseja maximizar sua *receita bruta*. A Tabela 1 ilustra a proporção de cada material na mistura para obtenção das ligas passíveis de fabricação. O preço está cotado em reais por tonelada da liga fabricada. Também em toneladas estão expressas as restrições de disponibilidade de matéria-prima.

TABELA 2.1: Restrições/custos do exemplo 1

Tipo de insumo componente da liga	Liga Especial de Baixa Resistência (*)	Liga Especial de Alta Resistência (*)	Disponibilidade de Matéria-prima (tonelada)
Cobre	0,5	0,2	16
Zinco	0,25	0,3	11
Chumbo	0,25	0,5	15
Preço de venda (R$ por tonelada)	R$ 3.000	R$ 5.000	(*) Ton Minério / Ton Liga

. Escolha da variável de decisão

$x_i \equiv$ quantidade em toneladas produzidas da liga especial de baixa resistência ($i = 1$) e especial de alta resistência ($i = 2$).

Formulação e representação gráfica

$$\text{Maximizar} \quad z = 3000\,x_1 + 5000\,x_2$$

Sujeito a :

$$0{,}5\,x_1 + 0{,}2\,x_2 \leq 16$$
$$0{,}25\,x_1 + 0{,}3\,x_2 \leq 11$$
$$0{,}25\,x_1 + 0{,}5\,x_2 \leq 15$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

Solução Gráfica

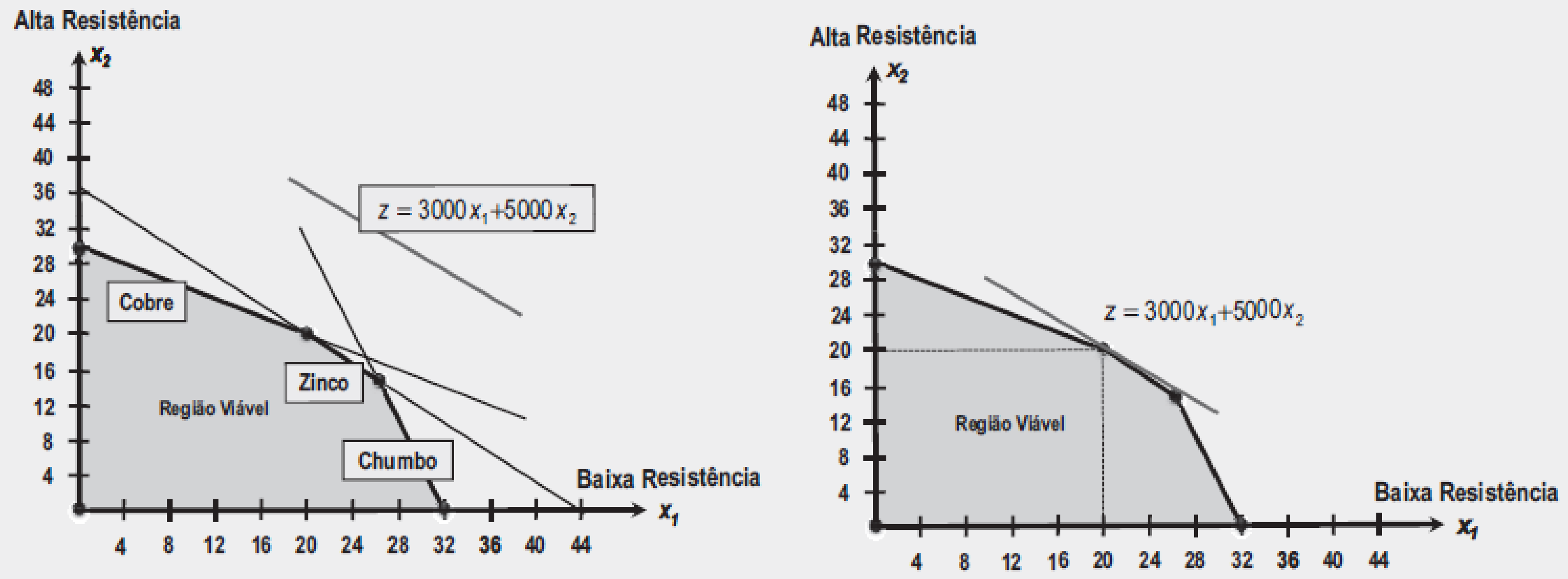


Gráfico do Modelo

Solução: $x_1 = 20$ e $x_2 = 20$ com $z = 160.000$

Solução Gráfica
Problema Exemplo 2

Restrições do problema na forma de retas

Enunciado do problema:

Maximizar:

$Z=3x_1 + 5x_2$

Sujeito a:

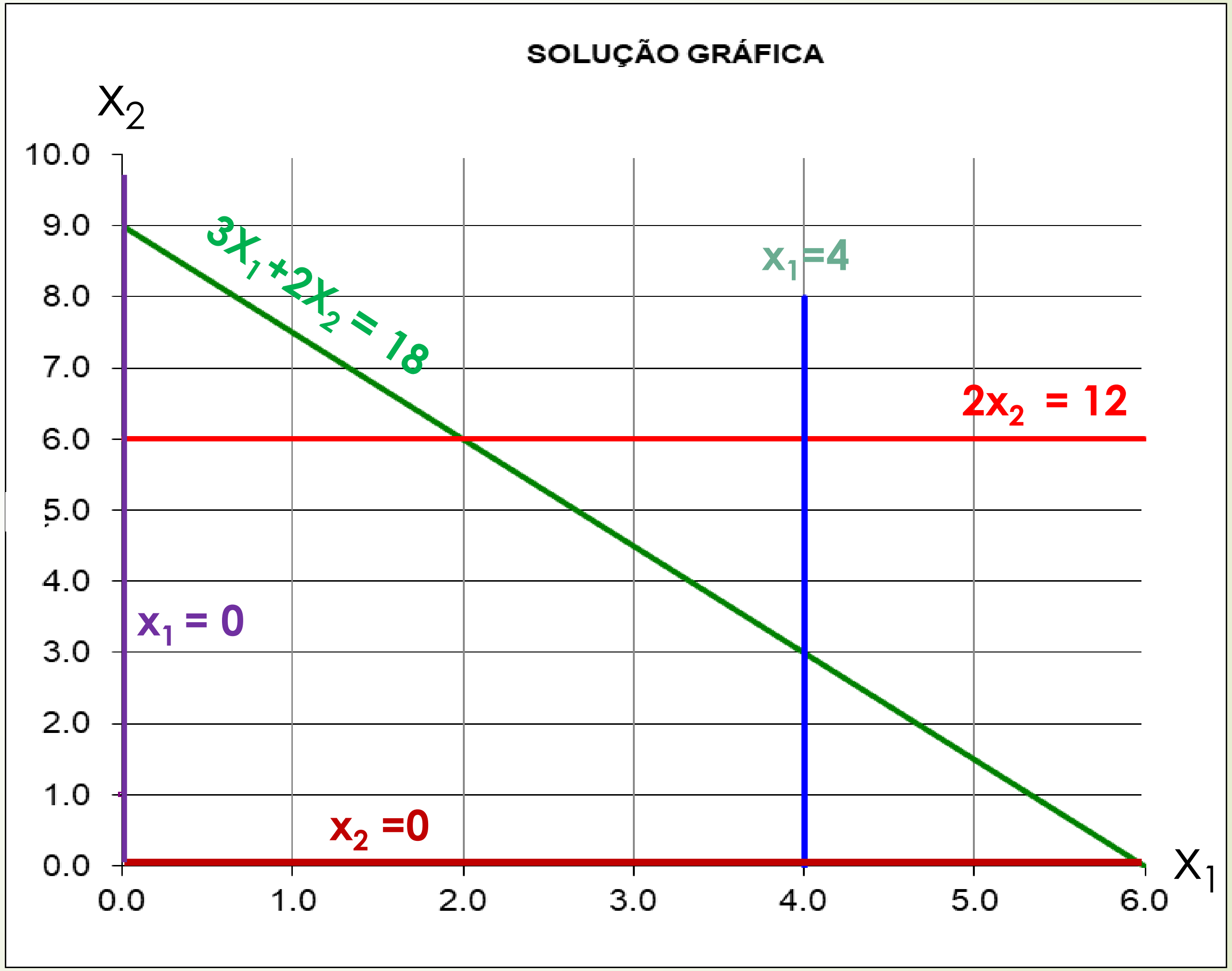
$1x_1 + 0x_2 \leq 4$

$0x_1 + 2x_2 \leq 12$

$3x_1 + 2x_2 \leq 18$

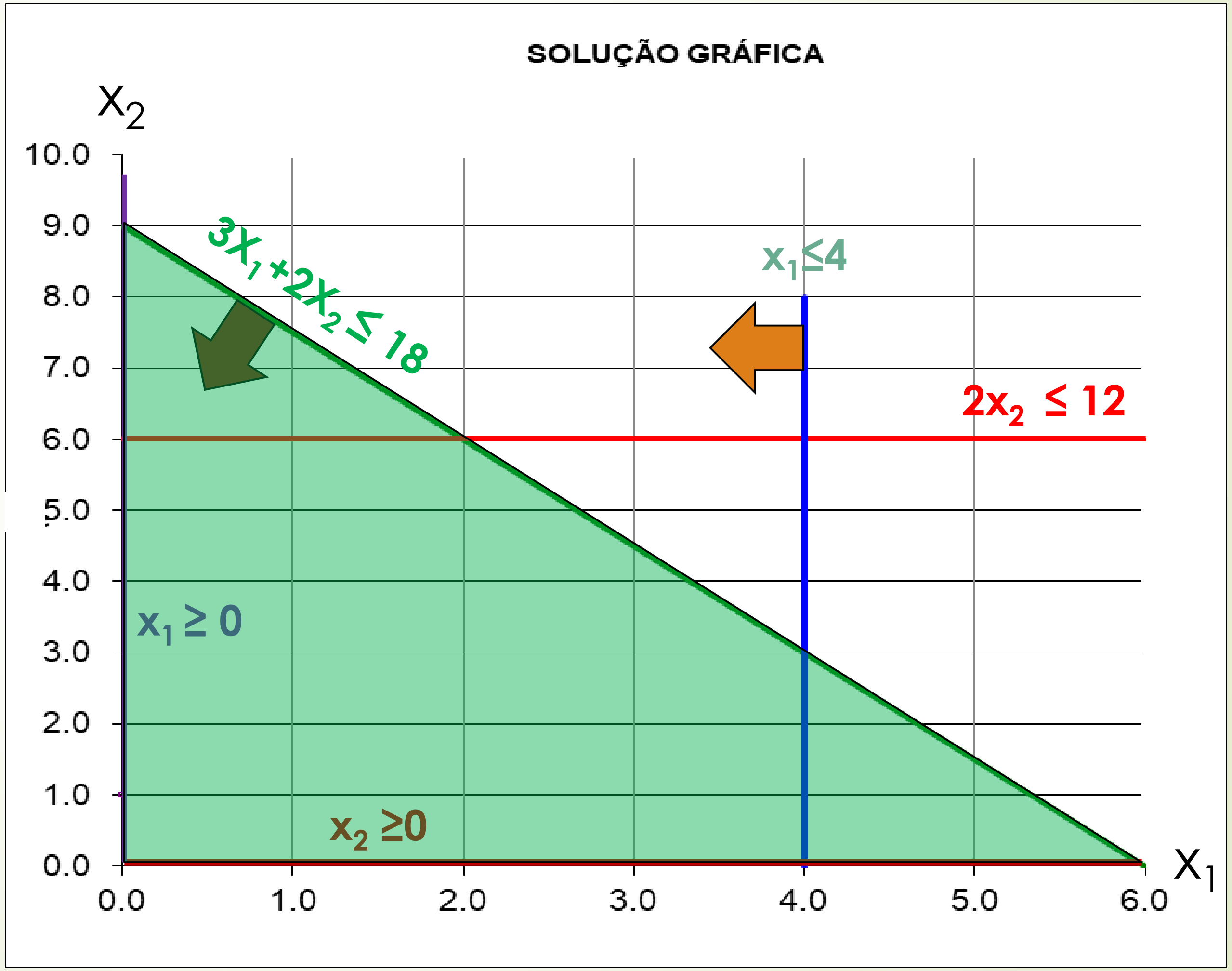
Com:

$x_1 , x_2 \geq 0$



Solução Gráfica
Problema Exemplo 2

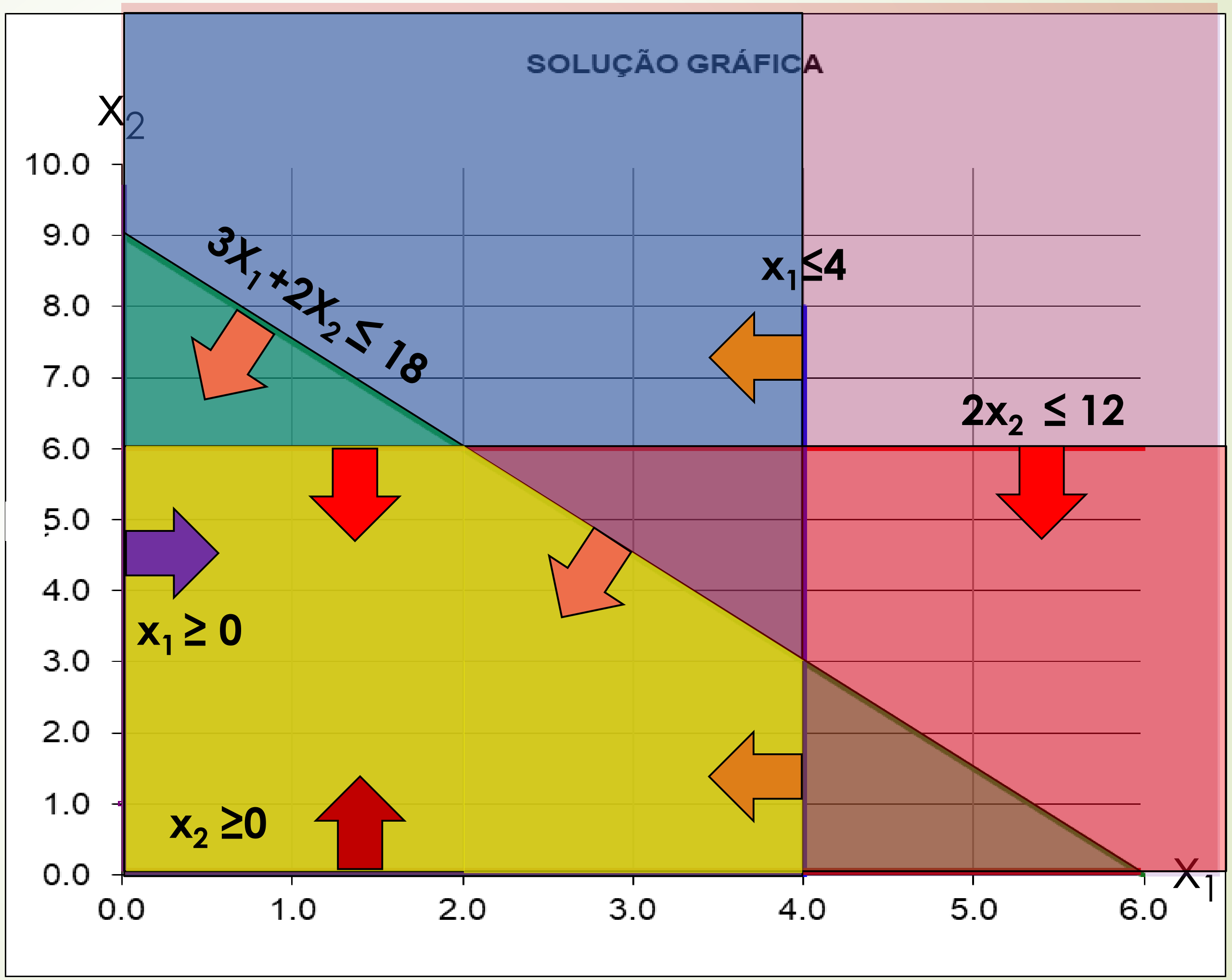
Cada inequação define uma área que atende à condição da inequação



$$3X_1+2X_2 \leq 18$$

Solução Gráfica
Problema Exemplo 2

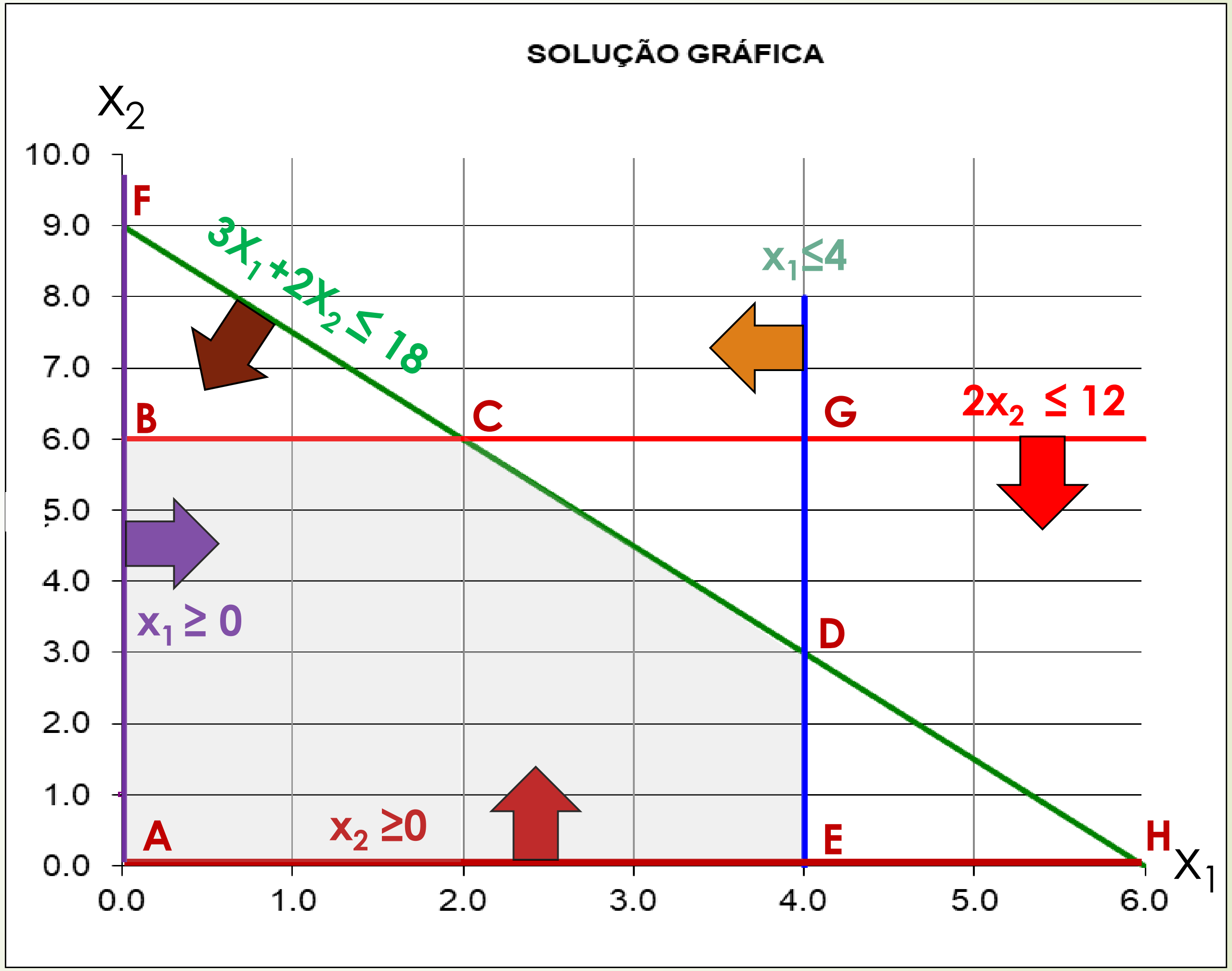
Existirá uma região que atenderá <u>simultaneamente</u> à todas as restrições do problema de otimização linear.



Solução Gráfica
Problema Exemplo

A região de factibilidade é a região que atende simultaneamente à todas as restrições do problema

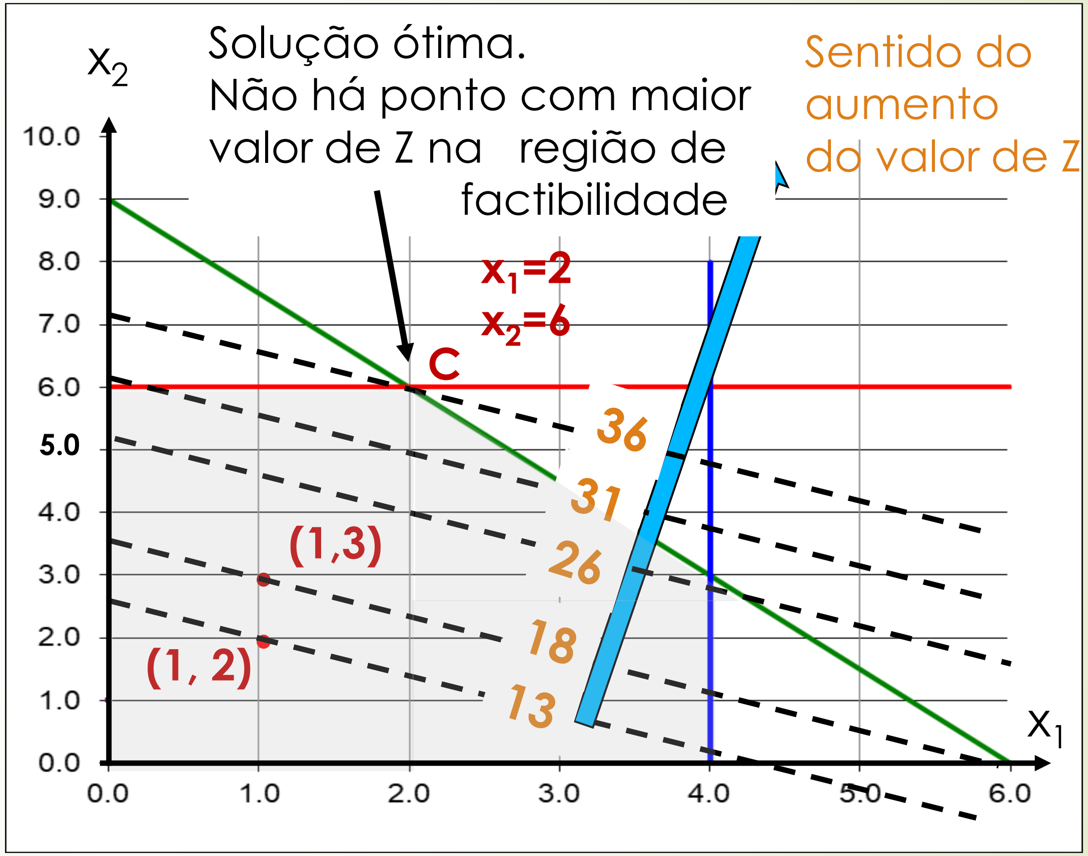
A região de factibilidade é o polígono ABCDE



Solução Gráfica
Problema Exemplo

Para buscar a solução ótima pelo método gráfico devemos analisar o comportamento da função objetivo. Direção de crescimento: v=(3,5) (coeficientes da função objetivo)

A função objetivo é uma família de retas que define as chamadas "curvas de nível", ou seja, possíveis representações de Z.



Vamos escolher, como exemplo, dois pontos aleatórios dentro da região de factibilidade (1,2) e (1,3) e o ponto C = (2,6) vértice da região viável.

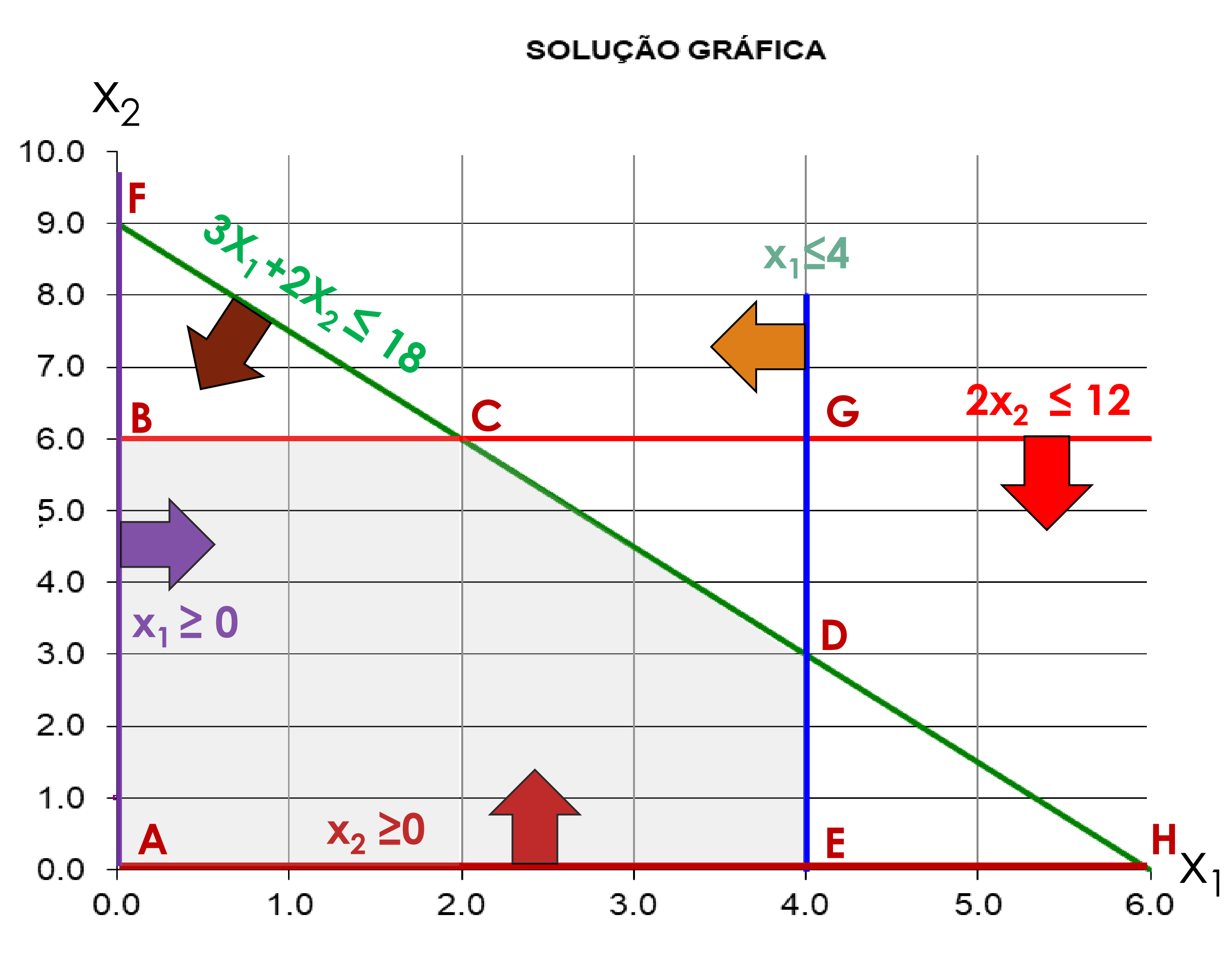
$Z=3x_1 + 5x_2$
$Z=3(1) + 5(2)=13$
$Z=3(1) + 5(3)=18$

$Z=3(2) + 5(6)=36$

Solução Gráfica
Problema Exemplo

Como consequência dos deslocamentos possíveis das retas de qualquer função objetivo observamos que o ponto ótimo será sempre um vértice da região de factibilidade.

Testando $Z = 3x_1+5x_2$ nos outros vérices		
Ponto	(x_1,x_2)	Valor de Z
A	(0,0)	0
B	(0,6)	30
C	(2,6)	**36**
D	(4,3)	27
E	(4,0)	12



Considerações sobre o VETOR GRADIENTE

$$\vec{\nabla}_{z_P} = \frac{\partial z}{\partial x} i + \frac{\partial z}{\partial y} j$$

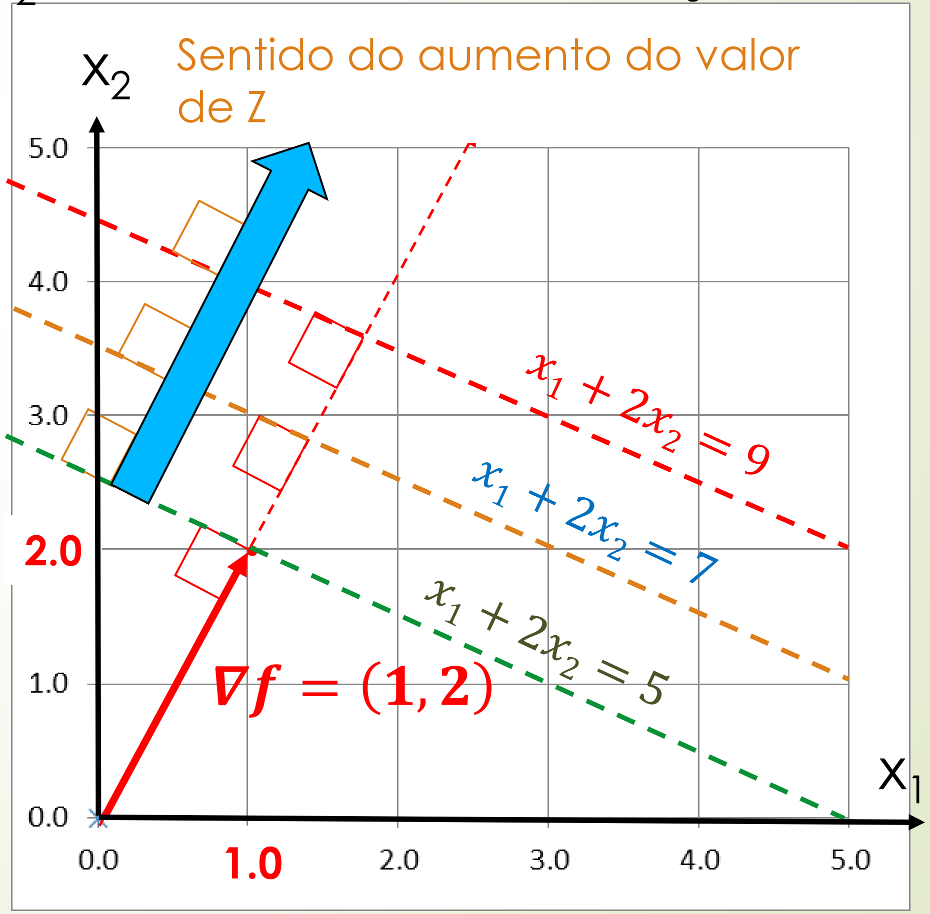
Especificamente para funções lineares, o Vetor Gradiente é definido como $\nabla z = (c1, c2)$ sendo c_1 e c_2 os coeficientes da função linear.

Exemplo

Para a função: $f(x) = x_1 + 2x_2$

$\nabla f(x_1, x_2) = (1, 2)$

Observe que o vetor é perpendicular a todas as retas da função e indica a direção de **crescimento** da função objetivo



Considerações sobre o VETOR GRADIENTE

Como o Vetor Gradiente é um conceito matemático ele é definido no plano cartesiano, logo, os eixos devem estar na mesma escala.

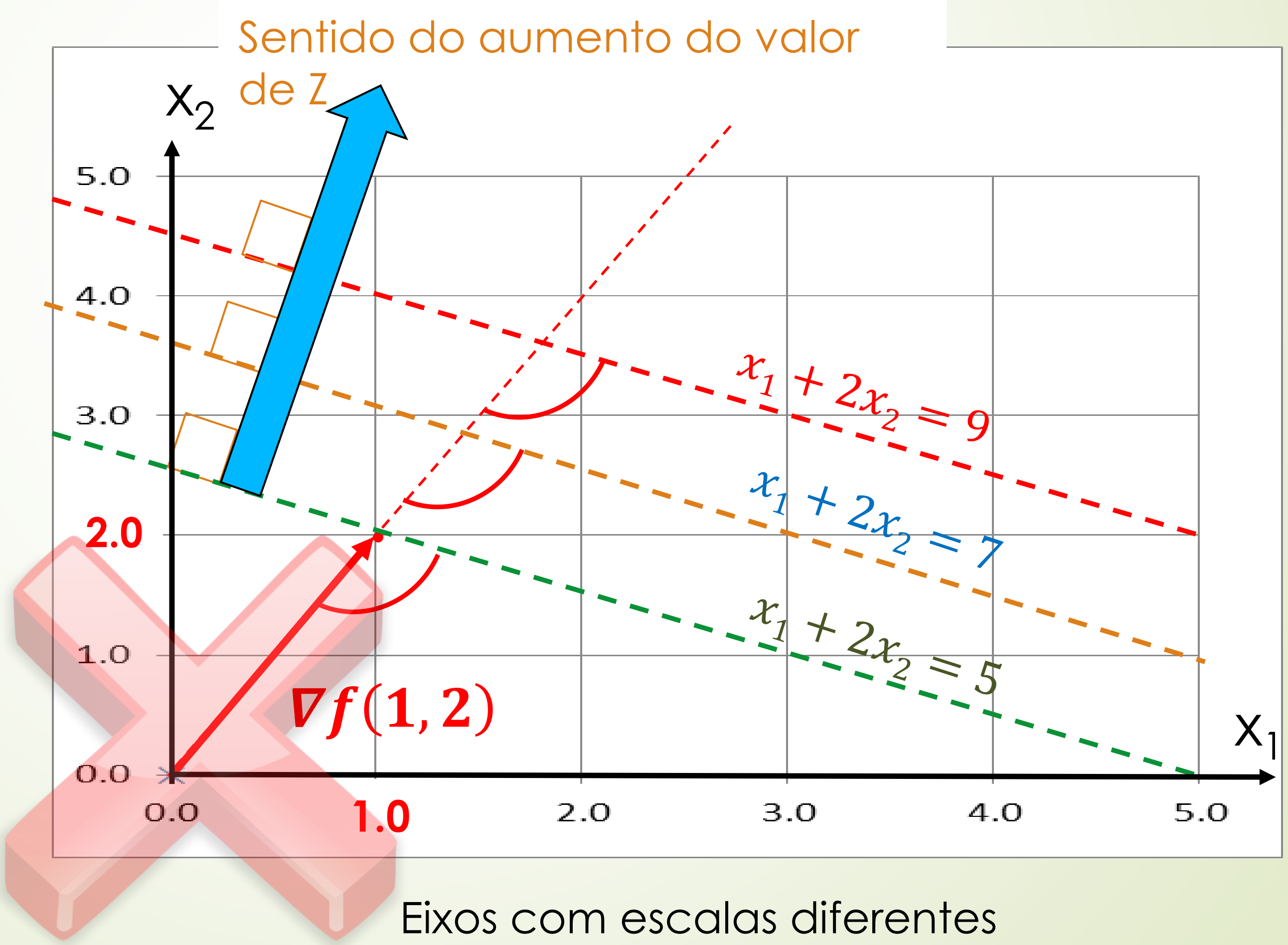
Exemplo

Para a função:

$$f(x) = x_1 + 2x_2$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = (1, 2)$$

Observe que, <u>estando os eixos em escalas diferentes</u>, a definição do Vetor Gradiente deixa de ter significado. O vetor e as retas da função não são perpendiculares.



Eixos com escalas diferentes

Solução Gráfica

E se o problema fosse
de MINIMIZAÇÃO ?

Solução Gráfica
Problema Exemplo

MINIMIZAÇÃO

Qual seria o ponto (x_1, x_2) que daria a solução ótima para o problema?

Enunciado do problema:

Minimizar:

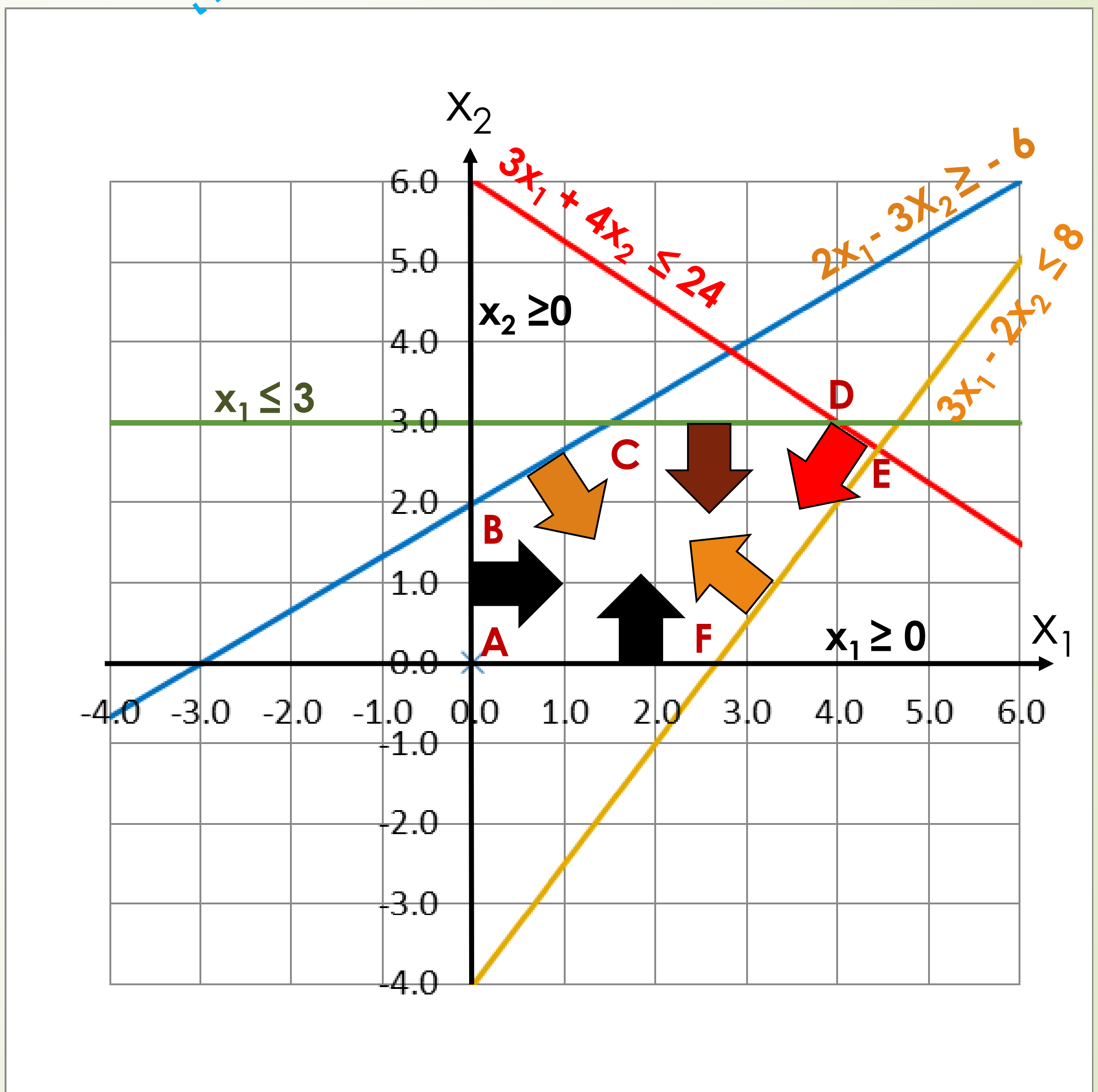
$$Z=3x_1 - 4x_2$$

Sujeito a:

$$2x_1 - 3x_2 \geq -6$$
$$3x_1 + 4x_2 \leq 24$$
$$3x_1 - 2x_2 \leq 8$$
$$x_2 \leq 3$$

Com:

$$x_1 , x_2 \geq 0$$



Solução Gráfica
Problema Exemplo

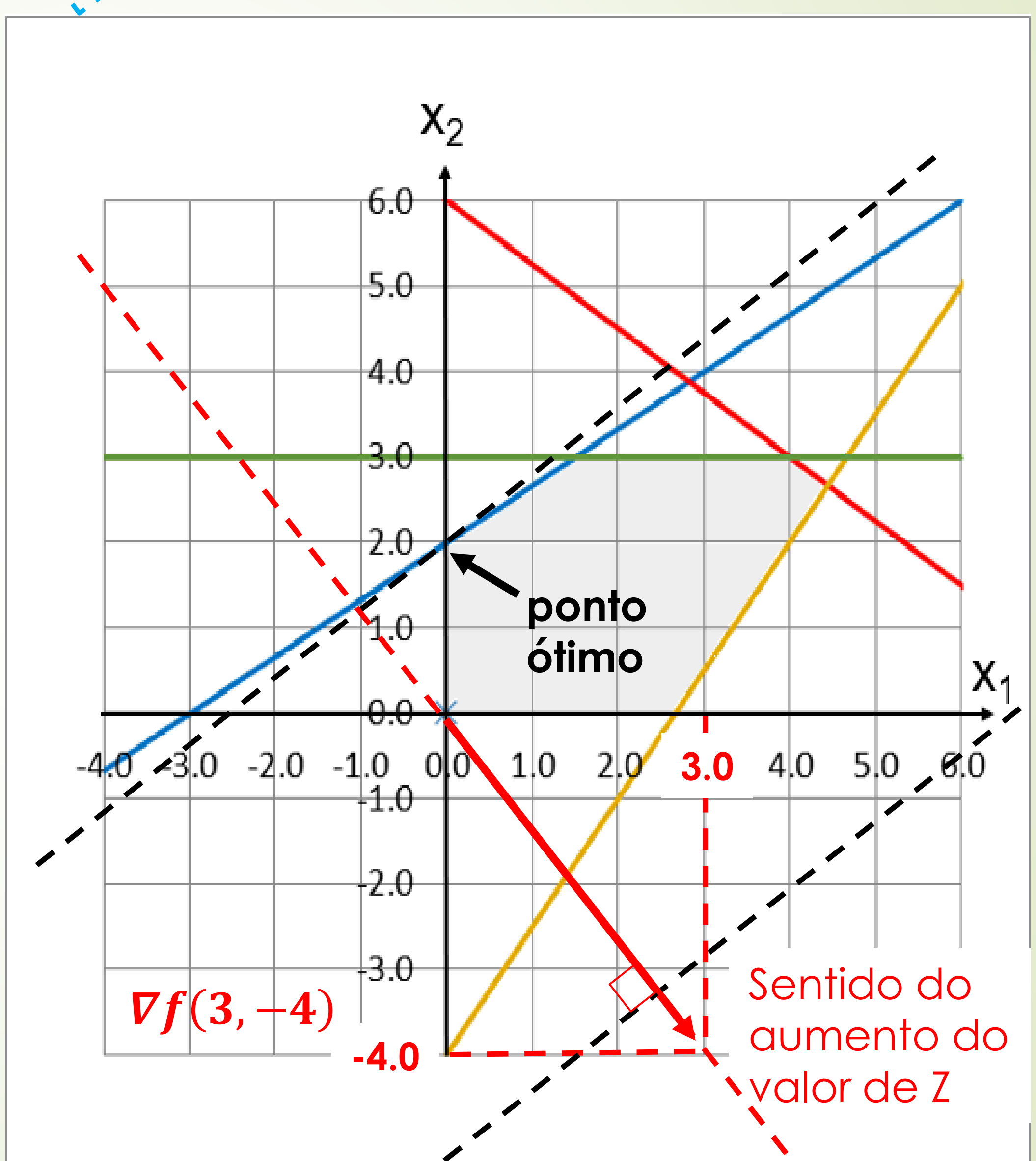
MINIMIZAÇÃO

O vetor gradiente da função objetivo aponta sempre no sentido do crescimento do valor da função objetivo.

$$Z=3x_1 - 4x_2$$

A função objetivo será perpendicular ao vetor gradiente. (considerando que os eixos da grade são simétricos)

Como desejamos minimizar o valor de Z, buscamos a curva de nível que tangencia o limite da região de factibilidade no sentido oposto ao vetor gradiente.



Solução Gráfica
Problema Exemplo

MINIMIZAÇÃO

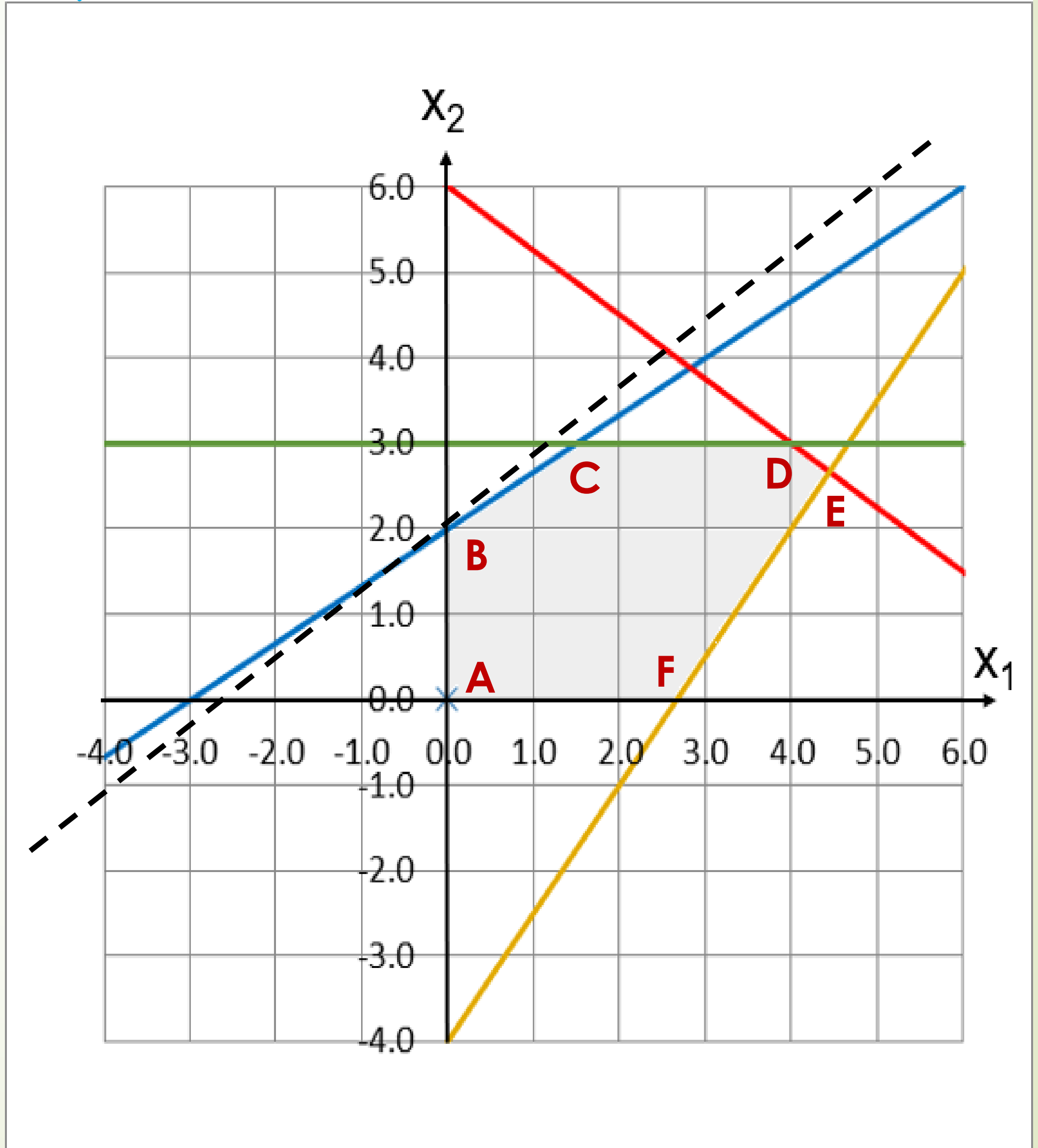
$$Z=3x_1 - 4x_2$$

Graficamente identificamos o ponto B como sendo o ponto ótimo (valor mínimo de Z).

Para confirmar que não é o ponto C, que está próximo, aplicamos as coordenadas dos pontos na função objetivo.

Ponto B $(x_1; x_2) = (0; 2)$
$Z_B=3(0) - 4(2)= - 8$

Ponto C $(x_1; x_2) = (1,5; 3)$
$Z_C=3(1,5) - 4(3)= - 7,5$

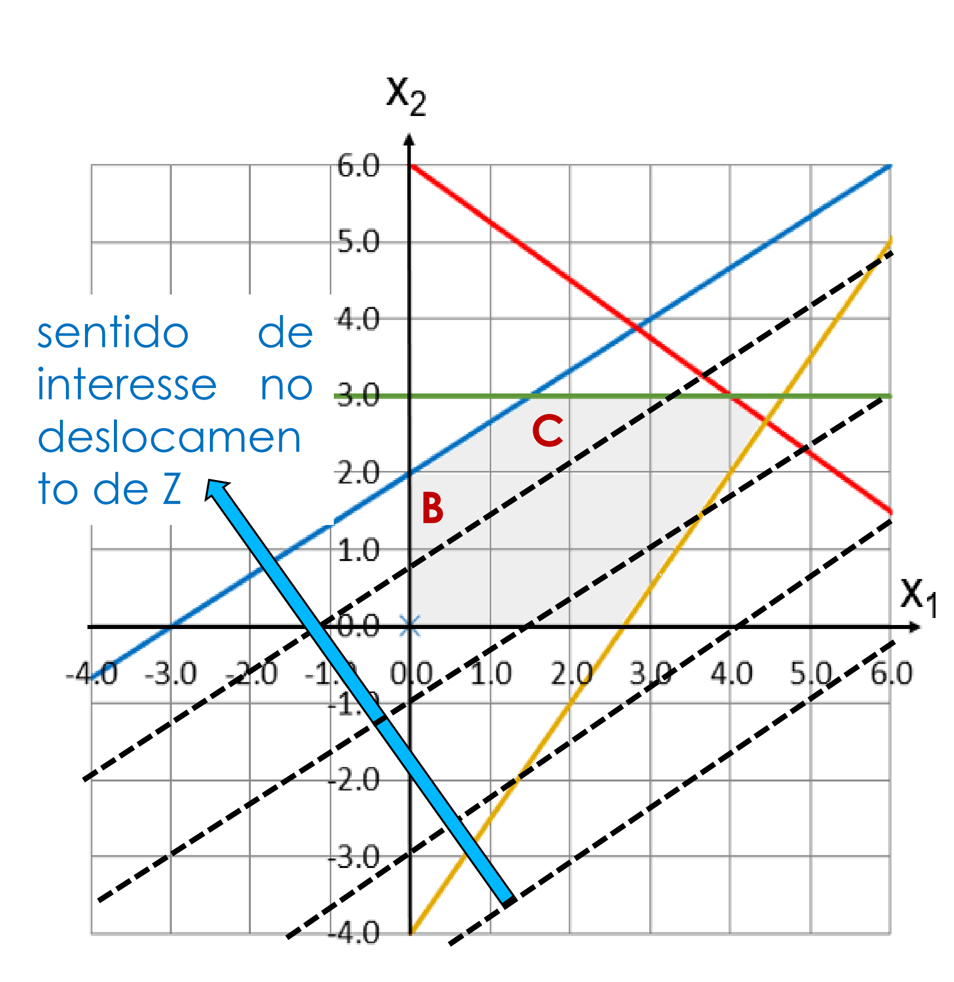


Solução Gráfica
Situações Especiais

Caso -1: Curvas de nível de Z, no sentido desejado de deslocamento (minimização ou maximização), paralelas a um dos lados do polígono que define a região de factibilidade.

As retas de Z , neste exemplo, são paralelas ao lado BC do polígono. Todos os pontos da reta BC são valores ótimos.

O problema terá infinitas soluções ou múltiplas soluções (todas ótimas) dependendo da sua natureza (valor fracionável ou não).

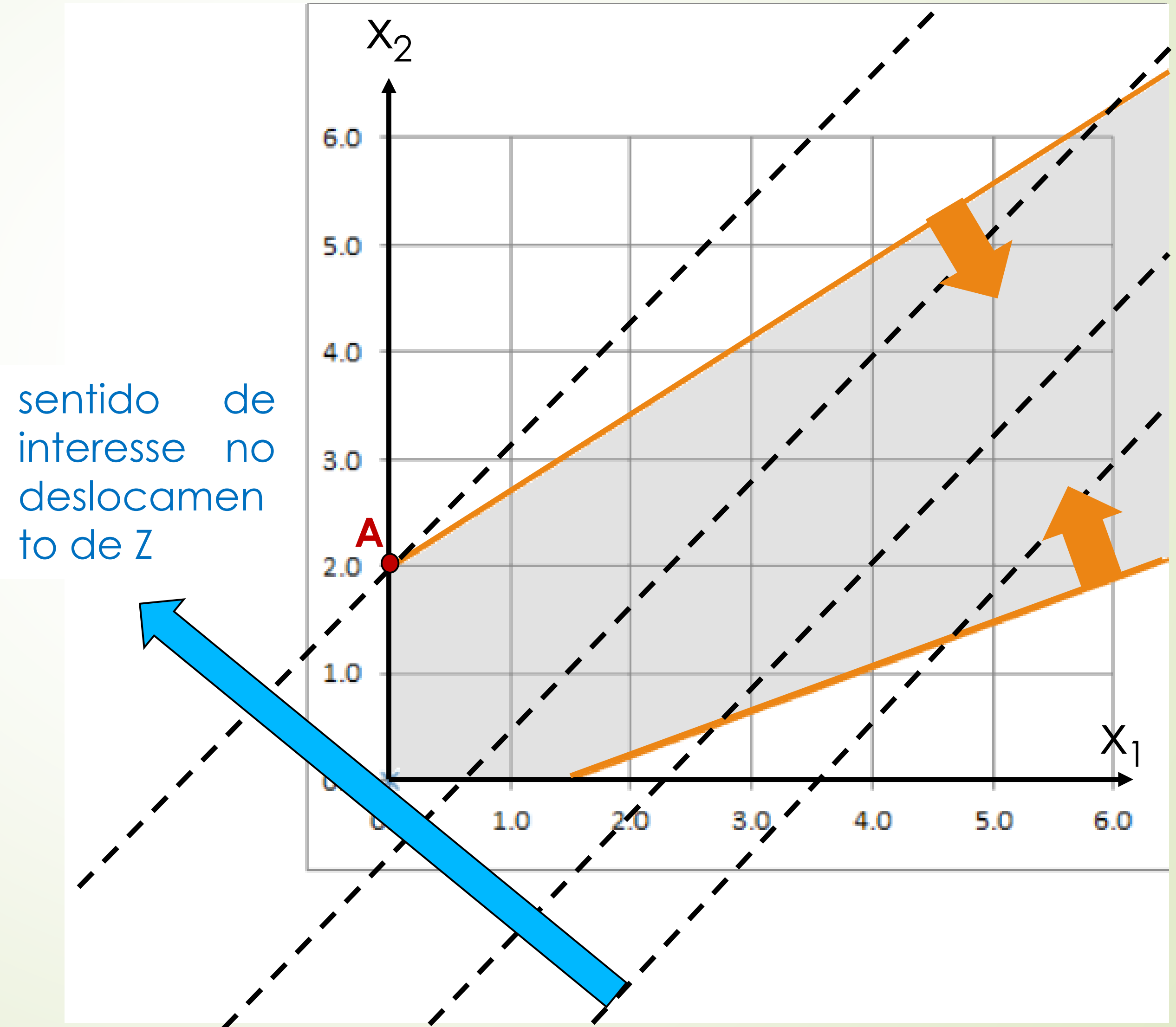


É um sistema de equações lineares "possível" e "indeterminado".

Solução Gráfica
Situações Especiais

Caso -2: Região de factibilidade aberta com **solução ótima única**.

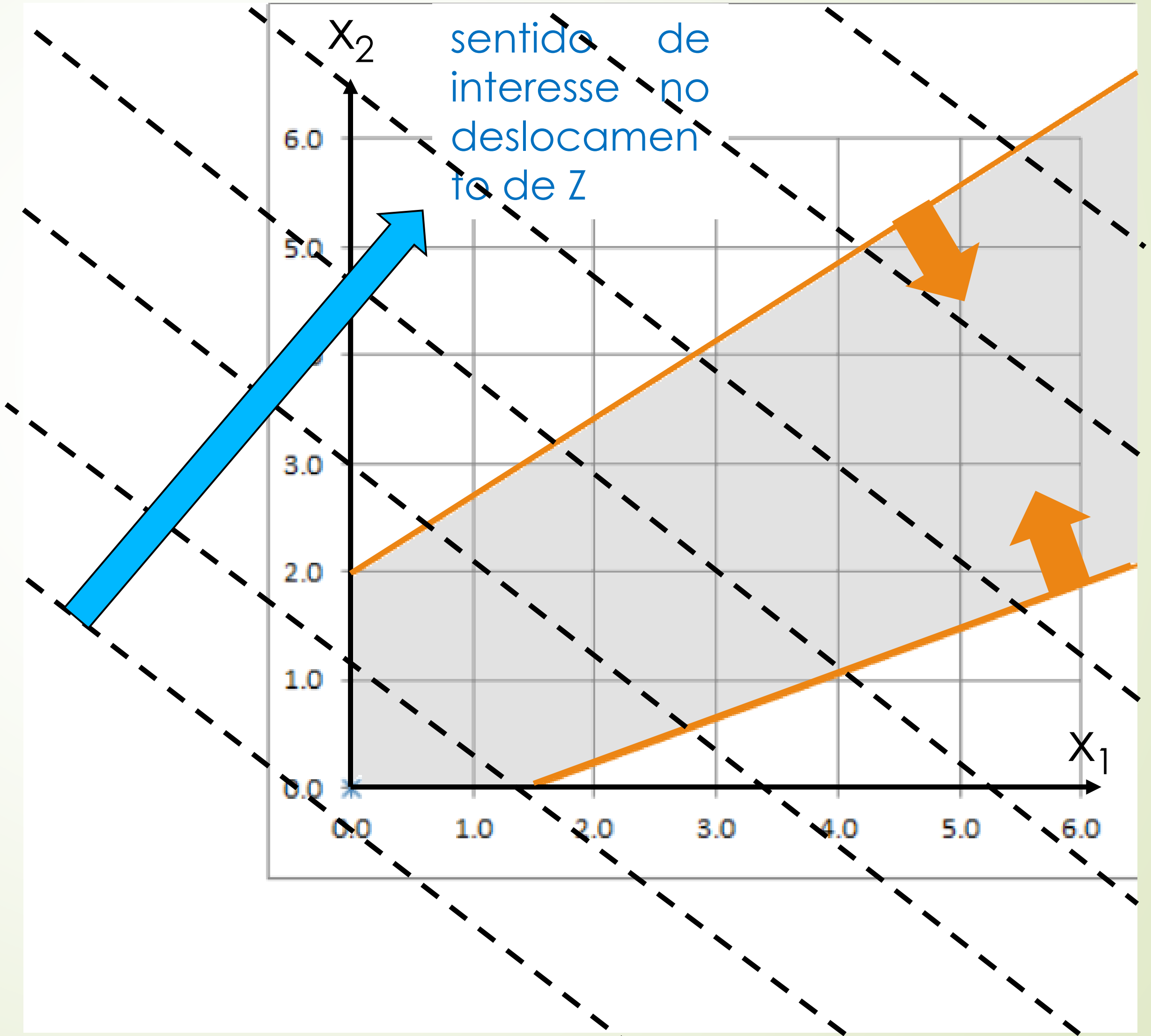
Z, ao avançar no sentido de interesse (max ou min) encontra um vértice.



Solução Gráfica
Situações Especiais

Caso -3: Região de factibilidade aberta **sem solução ótima**.

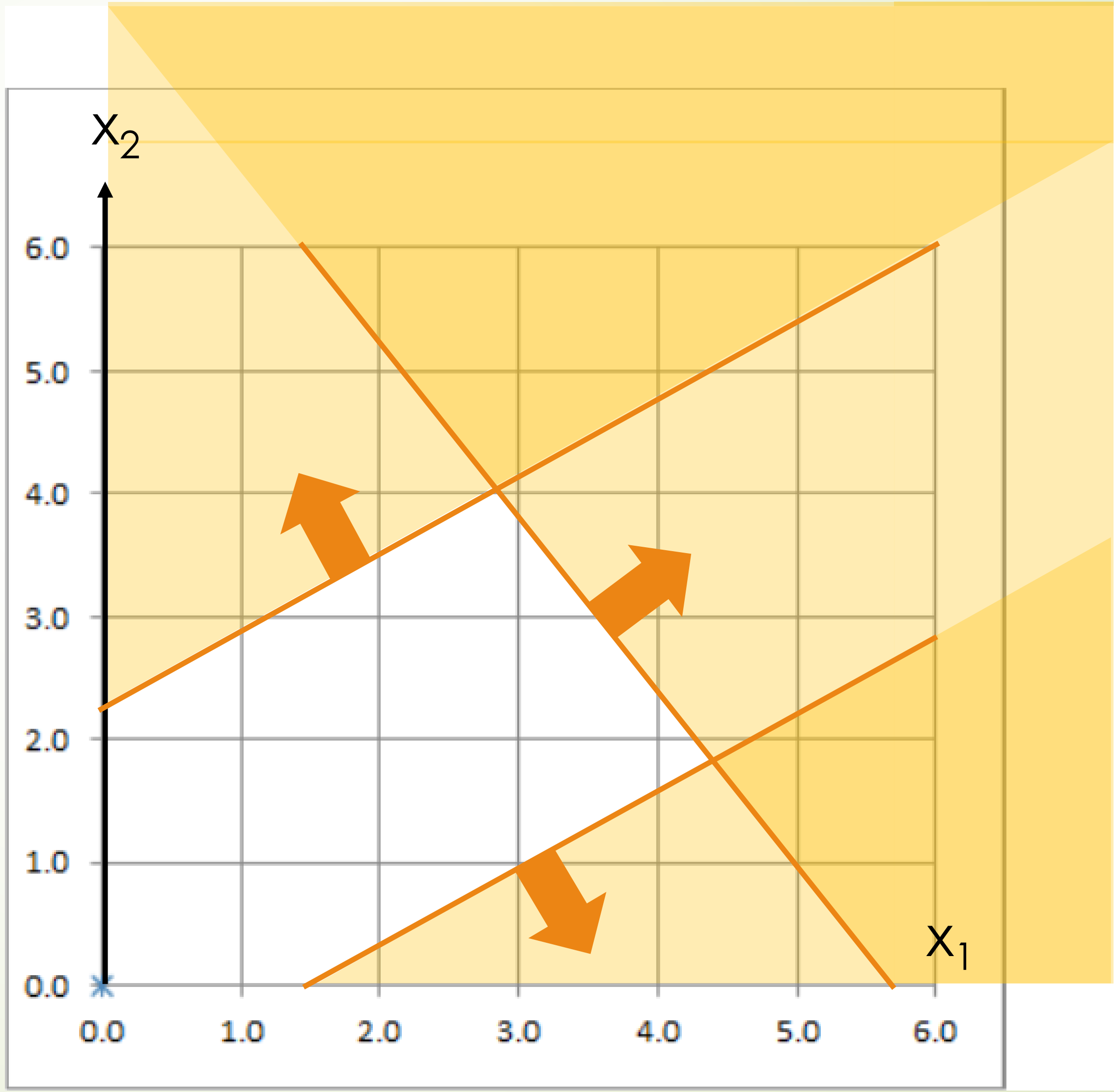
Porém existem infinitas soluções factíveis.



Solução Gráfica
Situações Especiais

Caso -4: Definição das restrições inconsistente.

As restrições não definem uma região de factibilidade que atenda simultaneamente à todas as restrições do problema.



O problema não tem solução.

Está mal definido.

EXERCÍCIO

Determinar o espaço de soluções factíveis e a solução ótima do modelo para o seguinte problema de programação linear:

$$\max z = 4x_1 + 3x_2$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\geq 20 \\ x_1 \quad\quad &\leq 8 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Fonte: Belfiore & Favero, pág 73

Resposta

➡ **Solução**

A partir das restrições do Exemplo 3.4, obtém-se o espaço de soluções factíveis, que neste caso é ilimitado, pois não existe limite para o crescimento de x_2, conforme mostra a Figura 3.7. Consequentemente, a função objetivo z também pode crescer de forma ilimitada. O procedimento completo está ilustrado na Figura 3.7.

Figura 3.7 Conjunto ilimitado de soluções viáveis e função de maximização z ilimitada.