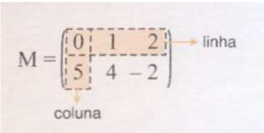
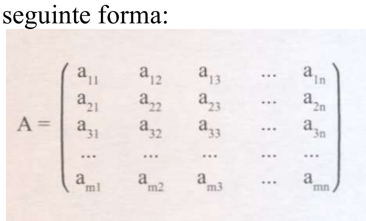
MATRIZES

Definições

Uma **matriz de ordem m x n** (**m** por **n**) é uma tabela de elementos dispostos em linhas (horizontais) e colunas (verticais). Em uma matriz, essa tabela de elementos pode ser escrita entre: parênteses, colchetes ou barras duplas. Veja, por exemplo, uma matriz de ordem 2 x 3:



Uma matriz costuma ser representada por letras latinas maiúsculas (A, B,..., M, N, ...). Os elementos de uma matriz costumam ser representados por letras latinas minúsculas (a, b,..., m, n,...). De um modo geral, podemos representar uma matriz da seguinte forma:



Nessa representação, observe que cada elemento possui dois índices: o primeiro indica a posição na linha e o segundo a posição na coluna a que pertence o elemento.

Duas matrizes $A = (a_{ij})_{mxn}$ e $B = (b_{ij})_{mxn}$ são iguais se, e somente se, $a_{ij}=b_{ij}$ para quaisquer valores de $i=1,2,..\ m$ e de $j=1,2,...,n$.

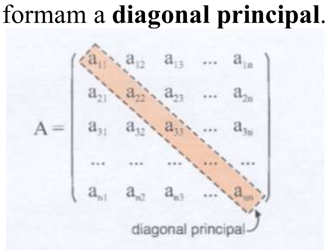
Observe que, para duas matrizes serem iguais entre si, é preciso que elas sejam de mesma ordem.

Tipos particulares

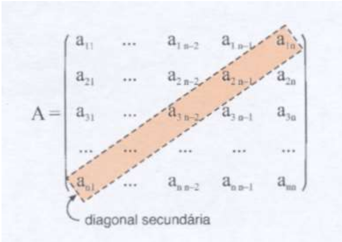
De um modo geral, uma matriz é retangular. Entretanto, se o número de linhas for igual ao número de colunas, temos uma matriz quadrada. Veja, por exemplo, uma matriz quadrada de ordem 2 (2 x 2):

$$\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Em uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_n$, os elementos para os quais $i = j$ formam a **diagonal principal**.



Em uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_n$, os elementos para os quais $i + j = n + 1$ (onde n é a ordem da matriz) formam a diagonal secundária.



Matriz diagonal é uma matriz quadrada cujos elementos não pertencentes à diagonal principal são nulos. Por exemplo: $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Matriz triangular é uma matriz quadrada em que todos os elementos situados acima (ou abaixo) da diagonal principal são nulos.

Exemplo: $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Matriz identidade ou Unidade é uma matriz diagonal em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 (um). Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz nula é uma matriz (quadrada ou não) em que todos os elementos são nulos.

Exemplo: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Uma matriz nula de ordem m x n é representada como O_{mxn}.

Matriz linha é uma matriz com uma única linha. Por exemplo: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

Matriz coluna é uma matriz com uma única coluna. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

OPERAÇÕES BÁSICAS

Adição

Para efetuar a **adição de matrizes** somamos cada elemento de uma matriz com o correspondente elemento da outra matriz.

Assim, dadas duas matrizes de mesma ordem A_{mxn} e B_{mxn}, de elementos a_{ij} e b_{ij}, chamamos soma dessas matrizes a uma outra matriz C_{mxn}, cujos elementos são dados por:

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

A adição de matrizes só é definida para matrizes de mesma ordem.

Para a adição de matrizes valem as propriedades comutativa e associativa. Assim, quaisquer que sejam as matrizes A e B do tipo m x n, temos:

$$A+B=B+A$$
$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

Subtração

Efetuamos de forma semelhante a **subtração de matrizes**. Para subtrair duas matrizes, subtraímos os seus elementos correspondentes.

Assim, dadas duas matrizes de mesma ordem A_{mxn} e B_{mxn}, de elementos a_{ij} e b_{ij}, chamamos subtração ou diferença dessas matrizes a uma outra matriz C_{mxn}, cujos elementos são dados por:

$C_{ij}=a_{ij}.-b_{ij}$

Da mesma forma que a adição de matrizes, a subtração de matrizes só é definida para matrizes de mesma ordem.

Multiplicação por um número real

Podemos efetuar a **multiplicação de um número α por uma matriz**. Neste caso, obtemos uma nova matriz cujos elementos são iguais aos elementos da matriz inicial cada um deles multiplicados por α.

Assim, dado um número real α e uma matriz A_{mxn} de elementos a_{ij}, definimos o produto de α por A como outra matriz B_{mxn} cujos elementos b_{ij} são dados por:

$$B_{ij} = \alpha \ .\ a_{ij}$$

Em particular, se $\alpha = -1$, a matriz B é chamada de **matriz oposta** de A, representado como - A:

Transposição

Existe também uma outra operação simples que é a **transposição de matrizes**, através da qual obtemos a transposta de uma matriz. Dada uma matriz A, a transposta de A é a matriz A^t que é obtida transformando as linhas de A em colunas de A^t. Por exemplo:

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad A^t=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

Podemos verificar que valem as seguintes propriedades para qualquer número real α e para matrizes de mesma ordem A e B:

$(A^t)^t=A$

$(A + B)^t = A^t + B^t$

$(\alpha\ .\ A)^t = \alpha\ .\ A^t$

Exercícios de Aula

01. (PUCSP) A é uma matriz 3 x 2 definida pela lei

$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ i^2 & \text{se } i \neq j \end{cases}$, então A se escreve

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ (E) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

02. Determine x e y de modo que se tenha:

$$\begin{bmatrix} 3x & 5 \\ y+1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-1 & 5 \\ 2y & 2 \end{bmatrix}$$

03. (UEL) Sejam as matrizes:

A= $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e B= $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

A matriz 2A-3B é

(A) $\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

04. (UEL-01) Sabendo-se que a matriz

$\begin{bmatrix} 5 & x^2 & -y \\ 49 & y & 3x \\ -1 & -21 & 0 \end{bmatrix}$

é igual à sua transposta, o valor de x + 2y é

(A) -9 (B) – 5 (C) 5 (D) 13 (E) 9

Tarefa Básica

01. Escreva explicitamente a matriz A = $(a_{ij})_{3x2}$ definida pela lei $a_{ij} = 2i+3j$.

02. (UFRN) A matriz A = $(a_{ij})_{2x2}$, onde $a_{ij} = i^2 + 4j^2$, tem a seguinte representação:

(A) $\begin{bmatrix} 5 & 17 \\ 8 & 20 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 5 & 16 \\ 8 & 20 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 5 & 17 \\ 9 & 20 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 5 & 17 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}$

(E) $\begin{bmatrix} 5 & 17 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$

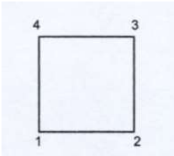
03. Determine x, y, e z de modo que se tenha:

$$\begin{bmatrix} 1 & x+2 \\ y-1 & z+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -x \\ 2y & -2z \end{bmatrix}$$

04. Determine x, y e z de modo que se tenha:

$$\begin{bmatrix} 3 & -x \\ 3x & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & y \\ 2x+1 & z-1 \end{bmatrix}$$

05. (UN1MEP) É dado um quadrado de lado medindo 1 unidade, numerado conforme a figura:



A matriz 4x4 tal que a_{ij} é a distância entre os vértices de número i e j é

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 1 & 2 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

(E) Nenhuma das alternativas anteriores.

06. (UFPA) Sendo A= $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ e

B= $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ calcule o valor de 2A-B

(A) $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

07. (UFRJ) Dadas as matrizes

A= $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ e B= $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Então $A-B^t$ é

(A) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

(E) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

08. (UEL) Uma matriz quadrada A diz-se simétrica se A = A^t. Assim, se a matriz

A= $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2y \\ x & 0 & -z \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

É simétrica, então x+y+z é igual a

(A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 3 (E) 5

09. (UEB00) Sejam as matrizes A=$(a_{ij})_{3x2}$ e B = $(b_{ij})_{3x2}$, definidas por a_{ij} = i + j, se i $\neq$ j e a_{ij}=l, se i=j e b_{ij}=0, se i$\neq$j e b_{ij}=2i-j, se i=j. Então A+B é igual a

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (E) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

10. (UFBA)

M= $\begin{bmatrix} x & 8 \\ 10 & y \end{bmatrix}$, N= $\begin{bmatrix} y & 6 \\ 12 & x+4 \end{bmatrix}$ e

P= $\begin{bmatrix} 7 & 16 \\ 23 & 13 \end{bmatrix}$ são matrizes que satisfazem a igualdade

$\frac{3}{2}M + \frac{2}{3}N = P$; logo, y-x é

(A) 6 (B) 4 (C) 2 (D)-3 (E) $\frac{7}{10}$

Respostas da Tarefa Básica

01. A= $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 10 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$ 02.(A)

03 x= -1 y= -1 z= -1/3

04.x= 1 y= -1 z= 2

05.(B) 06.(D) 07.(B) 08.(A)

09.(C) 10.(B)