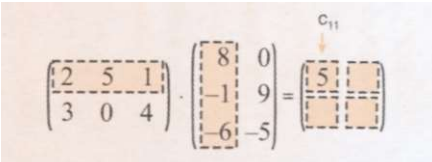
MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

Determinação do produto

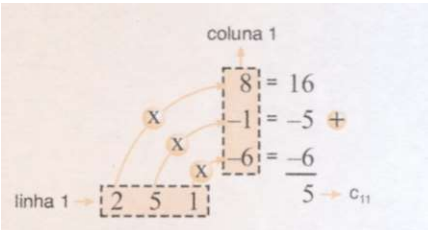
Vamos multiplicar duas matrizes A e B, supondo que:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -1 & 9 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

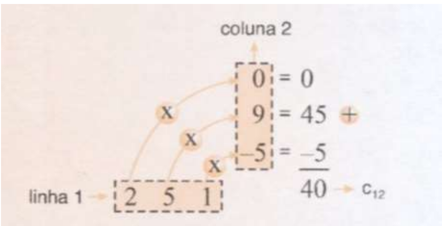
Vamos obter a matriz C tal que A.B = C.
Por definição, o elemento c_{11} da matriz produto é obtido multiplicando ordenadamente os elementos da linha 1 da primeira matriz pelos elementos da coluna 1 da segunda matriz e somando os resultados.



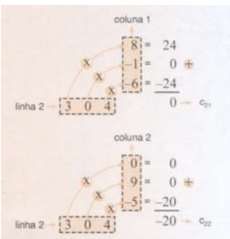
Observe detalhadamente o cálculo de c_{11}:



Analogamente, o elemento c_{12}, da matriz produto é obtido multiplicando ordenadamente os elementos da linha 1 da primeira matriz pelos elementos da coluna 2 da segunda matriz e somando os resultados.



E assim repetimos com a outra linha de A e todas as colunas de B, obtendo:



Portanto:

$$A.B= C = \begin{pmatrix} 5 & 40 \\ 0 & -20 \end{pmatrix}$$

De um modo geral o elemento c_{ij} da matriz produto é obtido multiplicando ordenadamente os elementos da linha i da primeira matriz pelos elementos da coluna j da segunda matriz e somando os resultados.
Para multiplicar uma matriz A por uma matriz B, elas devem ser dos seguintes tipos:

$$A_{m\times p}\,.\,\underbrace{B_{p\times n}}_{\text{iguais}}$$

Observe que o número de colunas da matriz A deve ser igual ao número de linhas da matriz B.
A matriz resultado C terá o número de linhas da matriz A e o número de colunas da matriz B:

$A_{m\,x\,p} \,.\, B_{p\,x\,n} = C_{m\,x\,n}$

Podemos apresentar a definição geral de produto matricial usando o símbolo de somatório.
Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{mxn}$ e $B = (b_{ij})_{nxp}$, o produto A . B é uma matriz $C = (c_{ij})_{mxp}$ onde:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.b_{jk}$$
$$i = 1, 2, ..., m$$
$$j = 1, 2, ..., n$$
$$k = 1, 2, ..., p$$

O produto matricial pode ser considerado uma operação que é definida matematicamente da forma apresentada. Entretanto, esta definição foi criada porque é útil em vários problemas matemáticos, como na resolução de sistemas de equações, e corresponde a operações que usamos na nossa vida cotidiana.
Como exemplo, imagine uma fábrica de sorvetes que produz três tipos de sorvetes: de morango, de chocolate e de creme. Para um pacote de cada tipo de sorvete são usadas as seguintes quantidades de essência de sabor, açúcar e leite:

	Essência	Açúcar	Leite
Morango	4	1	2
Chocolate	1	2	3
Creme	0	1	5

Vamos supor que o custo desses ingredientes varia mensalmente de acordo com a tabela:

	Janeiro	Fevereiro	Março
Essência	5	6	7
Açúcar	2	2	3
Leite	3	3	4

Se quisermos calcular o custo do material de cada pacote de sorvete de morango no mês de janeiro, devemos efetuar as seguintes operações:

Essência → 4 x 5 = 20
Açúcar → 1 x 2 = 2
Leite → 2 x 3 = 6
Total → 28

Analogamente, podemos calcular o custo do material de cada pacote de chocolate em janeiro:

Essência → 1 x 5 = 5
Açúcar → 2 x 2 = 4
Leite → 3 x 3 = 9
Total → 18

E para o sorvete de creme:

Essência → 0 x 5 = 0
Açúcar → 1 x 2 = 2
Leite → 5 x 3 = 15
Total → 17

Repetindo os cálculos para o mês de fevereiro:

Morango: 4 x 6 + 1 x 2 + 2 x 3 = 32
Chocolate: 1 x 6 + 2 x 2 + 3 x 3 = 19
Creme: 0 x 6 + 1 x 2 + 5 x 3 = 17

E para o mês de março:

Morango: 4 x 7 + 1 x 3 + 2 x 4 = 39
Chocolate: 1 x 7 + 2 x 3 + 3 x 4 = 25
Creme: 0 x 7 + 1 x 3 + 5 x 4 = 23

Com todos esses cálculos, podemos montar uma tabela que mostra o custo do material usado em cada pacote de cada tipo de sorvete nesses meses:

	Janeiro	Fevereiro	Março
Morango	28	32	39
Chocolate	18	19	25
Creme	17	17	23

Esta última tabela representa uma matriz que é igual ao produto das duas matrizes correspondentes às duas tabelas iniciais

Exercícios de Aula

01. Obtenha os produtos AB e BA, caso existam, sendo:

A= $\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ e

B= $\begin{bmatrix} -5 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

02. (UFSCAR) Seja a matriz
M = $(m_{ij})_{2x3}$, tal que $m_{ij} = j^2 - i^2$.
a) Escreva M na forma matricial.

b) Sendo M^t a matriz transposta de M, calcule o produto M. M^t.

03. (UEL) Considere as matrizes $A=(a_{ij})_{3x2}$, onde $a_{ij}=(-1)^{i+j}$, e $B=(b_{ij})_{2x3}$, onde $b_{ij}=(-i)^j$.
Na matriz AB, o elemento na posição "3.ª linha e 3ª coluna" é igual a
(A) 0
(B) 1
(C) -1
(D) 7
(E) -7

Tarefa Básica

01. Obtenha os produtos AB e BA, caso existam, dadas as matrizes:
A= $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e
B= $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

02. Obtenha os produtos AB e BA, caso existam, dadas as matrizes:
A= $\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 7 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ e
B= $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$

03.(UEL) Dada a matriz
A= $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ seja A^t a sua matriz transposta. O produto $A.A^t$ é a matriz
(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$
(B) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$
(C) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$
(D) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$
(E) $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

04. (FUVEST-FGV) Dadas as matrizes
A= $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ e B= $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
o elemento c_{21} da matriz C = A.B é
(A)29
(B)36
(C) Não existe, por só ser definido o produto BA.
(D)20
(E)49

05. (UNIRIO) Um proprietário de dois restaurantes deseja contabilizar o consumo dos seguintes produtos: arroz, carne, cerveja e feijão. No 1.° restaurante são consumidos, por semana, 25 kg de arroz, 50 kg de carne, 200 garrafas de cerveja e 20kg de feijão. No 2.° restaurante são consumidos, semanalmente, 28kg de arroz, 60kg de carne, 150 garrafas de cerveja e 22kg de feijão.
Existem dois fornecedores, cujo preço, em reais, destes itens são:

Produto	Fornecedor 1	Fornecedor 2
1Kg de arroz	1,00	1,00
1Kg de carne	8,00	10,00
1 garrafa de cerveja	0,90	0,80
1Kg de feijão	1,50	1,00

A partir destas informações, obtenha
a) uma matriz 2x4 que descreva o consumo desses produtos pelo proprietário no 1.° e no 2.° restaurantes, e uma matriz 4x2 que descreva os preços dos produtos nos dois fornecedores.
b) o produto das duas matrizes acima, de modo que este represente o gasto semanal de cada restaurante com cada fornecedor e determine o lucro semanal que o proprietário terá comprando sempre no fornecedor mais barato, para os dois restaurantes.

06. (MACK) Considerando o produto das matrizes,
$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ o valor de α é
(A) 0
(B) -1
(C) 2
(D) -2
(E) 1

Respostas da Tarefa básica

01. AB= $\begin{bmatrix} -4 & 9 & -4 \\ 2 & -6 & 8 \end{bmatrix}$;não existe BA.

02. AB= $\begin{bmatrix} 21 & -16 \\ 13 & -26 \end{bmatrix}$ e BA= $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -9 \\ -16 & -10 & -10 \\ -20 & -8 & 4 \end{bmatrix}$

03. (B)
04. (A)
05.
a) $\begin{bmatrix} 25 & 50 & 200 & 20 \\ 28 & 60 & 150 & 22 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1{,}00 & 1{,}00 \\ 8{,}00 & 10{,}00 \\ 0{,}90 & 0{,}80 \\ 1{,}50 & 1{,}00 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 25 & 50 & 200 & 20 \\ 28 & 60 & 150 & 22 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 10 \\ 0{,}9 & 0{,}8 \\ 1{,}5 & 1 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 635 & 705 \\ 676 & 770 \end{bmatrix}$
R$164,00

06. (E)

PARTICULARIDADES SOBRE PRODUTO MATRICIAL

Propriedades básicas

Dadas as matrizes $A_{m\,x\,n}$, $B_{n\,x\,p}$ e $C_{p\,x\,q}$, vale a propriedade associativa para a multiplicação de matrizes:

$$(A.B).C = A.(B.C)$$

Para as matrizes $A_{m\,x\,n}$, $B_{n\,x\,p}$ e $C_{n\,x\,p}$, vale a propriedade distributiva (à direita) da multiplicação em relação à adição:

$$A.(B+C) = A.B+A.C$$

Para as matrizes $A_{m\,x\,n}$, $B_{m\,x\,n}$ e $C_{n\,x\,p}$, vale a propriedade distributiva (à esquerda) da multiplicação em relação à adição:

$$(A+B) . C = A. C + B . C$$

Representando como O uma matriz nula,para qualquer matriz A_{mxn} valem as propriedades:

$$A_{m\,x\,n} \; . O_{n\,x\,p} = O_{m\,x\,p}$$
$$O_{q\,x\,m} . \; A_{m\,x\,n} = O_{q\,x\,n}$$

É importante observar que, para o produto matricial, não vale a propriedade
Comutativa:
Ou seja, em geral:

$$A.B \neq B.A$$

Se o produto A . B é definido, muitas vezes, o produto B . A nem é definido, devido às ordens de A e B. Mesmo quando este produto é definido, a matriz produto, em geral, é diferente, como podemos ver no exemplo abaixo:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$A.B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & -3\end{pmatrix}$$

$$B.A=\begin{pmatrix}-2 & 8\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

Matriz identidade

Considere, por exemplo, as matrizes:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 5\\ 1 & 2 & 6\\ 8 & 4 & -2\end{pmatrix} \text{ e}$$

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Vamos calcular o produto A. I:

$$A.I=\begin{pmatrix}2 & 3 & 5\\ 1 & 2 & 6\\ 8 & 4 & -2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A.I=\begin{pmatrix}2 & 3 & 5\\ 1 & 2 & 6\\ 8 & 4 & -2\end{pmatrix}= A$$

Em seguida, vamos calcular o produto

$$I.A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2 & 3 & 5\\ 1 & 2 & 6\\ 8 & 4 & -2\end{pmatrix}$$

$$I.A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 5\\ 1 & 2 & 6\\ 8 & 4 & -2\end{pmatrix}=A$$

Observe que, neste caso particular, o produto destas duas matrizes é comutativo e vale a propriedade:

$$A.I=I.A=A$$

Esta matriz I é um exemplo da chamada matriz identidade. De um modo geral, uma matriz identidade de ordem n é a matriz quadrada I_n onde todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os outros elementos são nulos. Para qualquer matriz quadrada A_n vale a propriedade.

$$A_n.I_n= I_n.A_n=A_n$$

Potenciação de matrizes

Efetuamos uma potenciação de matrizes quadradas com expoente natural por meio de multiplicações de uma matriz por ela mesma. Por exemplo, considere a matriz:

$$A=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Vamos calcular A^2:

A^2=A.A

$$A^2 = \begin{pmatrix}5 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}5 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}25 & -12\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Generalizando, dada uma matriz A, quadrada de ordem n, e a um número natural, definimos:

$$\begin{cases} A^0 = I_n \\ A^1 = A \\ A^{\alpha+1} = A^{\alpha}.A, \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Exemplo

São dadas as matrizes

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix} \text{ e } B=\begin{pmatrix}18\\ 31\end{pmatrix}$$

Determine a matriz X tal que
AX = B.

Resolução

Primeiro vamos descobrir o tipo de matriz X, isto é, seu número de linhas m e de colunas n.

$$A_{2x2} \; . \; X_{mxn} = B_{2x1}$$

A partir do esquema anterior concluímos que a matriz x é do tipo 2 x 1. Podemos então indicá-la da seguinte maneira:

$$X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

Temos AX=B, ou seja:

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18\\ 31\end{pmatrix}$$

Efetuando a multiplicação indicada, temos:

$$\begin{pmatrix}x & +3y\\ 2x & +5y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18\\ 31\end{pmatrix}$$

Para que essas matrizes sejam iguais, deve-se ter:

$$\begin{cases} x+3y=18 \\ 2x+5y=31 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema linear encontramos:

x= 3 e y= 5

Logo a matriz procurada é:

$$X=\begin{pmatrix}3\\ 5\end{pmatrix}$$

Exercícios de Aula

01. (FGV) A, B e C são matrizes quadradas de ordem 3, e I é a matriz identidade de mesma ordem. Assinale a alternativa correta:

(A) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$
(B) B.C=C.B
(C) $(A+B).(A-B)=A^2-B^2$
(D) C.I=C
(E) I.A=I

02. (UNIFESP) Uma indústria farmacêutica produz, diariamente, p unidades do medicamento X e q unidades do medicamento Y, ao custo unitário de r e s reais, respectivamente. Considere as matrizes $M_{1 \times 2}$, e $N_{2 \times 1}$:

M = [2p q] e N = $\begin{bmatrix} r \\ 2s \end{bmatrix}$

A matriz produto M . N representa o custo da produção de
(A) 1 dia.
(B) 2 dias.
(C) 3 dias.
(D) 4 dias.
(E) 5 dias.

Tarefa Básica

01 (UEL) Sendo A uma matriz mxn e B uma matriz pxq é correto afirmar que
(A) $(A^t)^t = A$ e $(B^t)^t = B$.
(B) sempre é possível efetuar (A + B).
(C) se n=p, então A.B=B.A.
(D) sempre é possível efetuar o produto A. B.
(E) se n=p, então $A.B^t=B^t.A$.

02. (VUNESP) Se A, B e C forem matrizes quadradas quaisquer de ordem n, assinale a única alternativa verdadeira.
(A) AB=BA.
(B) Se AB=AC, então B=C.
(C) Se $A^2 = O_n$ (matriz nula), então $A = O_n$.
(D) (AB)C=A(BC).
(E) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$.

03. (PUCCAMP-adaptado) Em um laboratório, as substâncias A, B e C são a matéria-prima utilizada na fabricação de dois medicamentos. O Dengue-ax é fabricado com 5 g de A, 8 g de B e l0g de C e o Chicungunha-ax é fabricado com 9g de A, 6 g de B e 4 g de C. Os preços dessas substâncias estão em constante alteração e, por isso, um funcionário criou um programa de computador para enfrentar essa dificuldade. Fornecendo-se ao programa os preços X, Y e Z de um grama das substâncias A, B e C, respectivamente, o programa apresenta uma matriz C, cujos elementos, correspondem aos preços de custo da matéria-prima do Dengue-ax e do Chicungunha -ax. Essa matriz pode ser obtida de

(A) $\begin{bmatrix} 5 & 8 & 10 \\ X & Y & Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 6 & 4 \\ X & Y & Z \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 5 & 8 & 10 \\ 9 & 6 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 5 & 8 & 10 \\ X & Y & Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X & Y & Z \\ 9 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 5 & 8 & 10 \\ X & Y & Z \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$

(E) $\begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 6 & 8 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$

04. (UFU) Seja A uma matriz de terceira ordem com elementos reais. Sabendo-se que

$$A . \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

conclui-se que 1,4 e 2 são os elementos da
(A) diagonal da transposta de A.
(B) primeira coluna da transposta de A.
(C) primeira linha da transposta de A.
(D) última linha da transposta de A.

Respostas da tarefa Básica

01. (A)
02. (D)
03. (B)
04. (C)