UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN JUAN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS FÍSICAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA

# ***Trabajo Práctico 2: Canal de Información***

## *Asignatura*: Teoría de la Información

**Alumnos:**

- CABALLERO, Ariel
- ESPEJO, Luciano Ismael
- GUILIANI, Melissa Ann

**Profesores:**

- Mg. Ing. Raul O. Klenzi.
- Lic. Manuel Oscar Ortega
- Lic. Fabrizio Amaya

**AÑO 2024**

# ENUNCIADOS

1. Sea el siguiente canal:

| | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ |
|---|---|---|---|
| $a_1$ | 0,7 | 0,2 | 0,1 |
| $a_2$ | 0,3 | 0,4 | 0,3 |
| $a_3$ | 0,5 | 0,3 | 0,2 |

Calcular los valores de $p(a_i/b_j)$ y las probabilidades de salida para el caso particular de $p(a_1)=0.4$, $p(a_2)=0.3$, $p(a_3)=0.3$.

2. Considera un Canal Binario Asimétrico con las siguientes probabilidades:
   - $p(a_1)=1/3$
   - $p(b_1/a_1)=5/6$
   - $p(b_1/a_2)=2/6$

   a) Calcula las probabilidades condicionales hacia atrás y las probabilidades conjuntas.

   b) Obtén la entropía del emisor, y las entropías condicionales de la fuente para

   cualquier símbolo de salida.

   c) Calcula la información mutua y la capacidad del canal.

3. Considera un canal determinista con tres símbolos de entrada ($a_1$,$a_2$,$a_3$) y tres símbolos de salida ($b_1$,$b_2$,$b_3$), donde cada símbolo de entrada se corresponde exclusivamente con un símbolo de salida. Define las probabilidades para cada símbolo de entrada y calcula la información mutua.

4. Dada la siguiente matriz de canal, obtén las respectivas codificaciones de la fuente.

   $p(a)=1/4$, $p(b)=1/8$, $p(c)=5/8$

| | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | 1/4 | 2/4 | 1/4 |
| b | 1/5 | 3/5 | 1/5 |
| c | 1/3 | 1/3 | 1/3 |

# Resolución Ejercicio 1

## Ejercicio 1

Las probabilidades de salida se obtienen como: $p(b_j) = \sum_{i=1}^{3} p(a_i) * p(b_j | a_i)$

Entonces calculamos cada uno:

$p(b_1) = (0{,}4 * 0{,}7) + (0{,}3 * 0{,}3) + (0{,}3 * 0{,}5)$

$p(b_1) = 0{,}28 + 0{,}09 + 0{,}15$

$\boxed{p(b_1) = 0{,}52}$

$p(b_2) = (0{,}4 * 0{,}2) + (0{,}3 * 0{,}4) + (0{,}3 * 0{,}3)$

$p(b_2) = 0{,}08 + 0{,}12 + 0{,}09$

$\boxed{p(b_2) = 0{,}29}$

$p(b_3) = (0{,}4 * 0{,}1) + (0{,}3 * 0{,}3) + (0{,}3 * 0{,}2)$

$p(b_3) = 0{,}04 + 0{,}09 + 0{,}06$

$\boxed{p(b_3) = 0{,}19}$

Probabilidades de salida

$p(b_1) = 0{,}52$
$p(b_2) = 0{,}29$
$p(b_3) = 0{,}19$

Luego calculamos las probabilidades a posteriori, utilizando la formula de bayes.

$$\boxed{p(a_i | b_j) = \frac{p(b_j | a_i) * p(a_i)}{p(b_j)}}$$

Entonces, calculamos cada uno de ellos

- Para $p(a_1 | b_1)$ tenemos

$$\frac{p(b_1 | a_1) * p(a_1)}{p(b_1)} = \frac{0{,}7 * 0{,}4}{0{,}52} = 0{,}54$$

$\therefore \boxed{p(a_1 | b_1) = 0{,}54}$

- Para $p(a_2|b_1)$ tenemos

$$\frac{p(b_1|a_2) * p(a_2)}{p(b_1)} = \frac{0,3 * 0,3}{0,52} = 0,17$$

$\therefore \boxed{p(a_2|b_1) = 0,17}$

- Para $p(a_3|b_1)$ tenemos

$$\frac{p(b_1|a_3) * p(a_3)}{p(b_1)} = \frac{0,5 * 0,3}{0,52} = 0,29$$

$\therefore \boxed{p(a_3|b_1) = 0,29}$

- Para $p(a_1|b_2)$ tenemos

$$\frac{p(b_2|a_1) * p(a_1)}{p(b_2)} = \frac{0,2 * 0,4}{0,29} = 0,27$$

$\therefore \boxed{p(a_1|b_2) = 0,27}$

- Para $p(a_2|b_2)$ tenemos

$$\frac{p(b_2|a_2) * p(a_2)}{p(b_2)} = \frac{0,4 * 0,3}{0,29} = 0,41$$

$\therefore \boxed{p(a_2|b_2) = 0,41}$

- Para $p(a_3|b_2)$ tenemos

$$\frac{p(b_2|a_3) * p(a_3)}{p(b_2)} = \frac{0,3 * 0,3}{0,29} = 0,31$$

$\therefore \boxed{p(a_3|b_2) = 0,31}$

• Para $p(a_1|b_3)$ tenemos

$$\frac{p(b_3|a_1) * p(a_1)}{p(b_3)} = \frac{0,1 * 0,4}{0,19} = 0,21$$

$$\therefore \boxed{p(a_1|b_3) = 0,21}$$

• Para $p(a_2|b_3)$ tenemos

$$\frac{p(b_3|a_2) * p(a_2)}{p(b_3)} = \frac{0,3 * 0,3}{0,19} = 0,47$$

$$\therefore \boxed{p(a_2|b_3) = 0,47}$$

• Para $p(a_3|b_3)$ tenemos

$$\frac{p(b_3|a_3) * p(a_3)}{p(b_3)} = \frac{0,2 * 0,3}{0,19} = 0,31$$

$$\therefore \boxed{p(a_3|b_3) = 0,31}$$

## RESOLUCIÓN EJERCICIO 2

Ejercicio 2

Tenemos un canal asimetrico, con las siguientes probabilidades

- $p(a_1) = 1/3$
- $p(b_1|a_1) = 5/6$
- $p(b_1|a_2) = 2/6$

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{matrix} b_1 & b_2 \end{matrix} \\ a_1 & 1/3 & \multirow{2}{*}{} \\ a_2 & 2/3 & \end{array} \quad \begin{pmatrix} 5/6 & 1/6 \\ 2/6 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Sabemos que $\sum p(b_j|a_i) = 1$, es decir, que la suma sobre todas las filas es igual a 1.

Por lo tanto: $p(b_2|a_1) = 1 - 5/6 = 1/6$

$p(b_2|a_2) = 1 - 2/6 = 2/3$

De la misma forma encontremos $p(a_2)$, dado que solo hay dos entradas posibles, la probabilidad total debe ser 1.

$$p(a_2) = 1 - p(a_1) = 1 - 1/3 = \boxed{2/3}$$

Ahora calculemos las probabilidades de salida como:

$$\boxed{p(b_j) = \sum_i p(a_i) * p(b_j | a_i)}$$

$$p(b_1) = (1/3 * 5/6) + (2/3 * 2/6) *$$

$$p(b_1) = 5/18 + 2/9$$

$$\boxed{p(b_1) = 1/2}$$

$$p(b_2) = (1/3 * 1/6) + (2/3 * 2/3)$$

$$p(b_2) = 1/18 + 4/9 *$$

$$\boxed{p(b_2) = 1/2}$$

ⓐ Probabilidades conjuntas

Calculemos las probabilidades conjutas, multiplicando la probabilidad de entrada por la probabilidades hacia adelante.

Entonces tenemos

$$p(a_1 | b_1) = p(a_1) * p(b_1 | a_1) = 1/3 * 5/6 = \boxed{5/18}$$

$$p(a_1 | b_2) = p(a_1) * p(b_2 | a_1) = 1/3 * 1/6 = \boxed{1/18}$$

$$p(a_2 | b_1) = p(a_2) * p(b_1 | a_2) = 2/3 * 2/6 = \boxed{2/9}$$

$$p(a_2 | b_2) = p(a_2) * p(b_2 | a_2) = 2/3 * 2/3 = \boxed{4/9}$$

• Probabilidades condicionales hacia atrás

Para realizar este cálculo utilizamos el teorema de Bayes

$$p(a_i|b_j) = \frac{p(a_i) * p(b_j|a_i)}{p(b_j)}$$

Entonces tenemos

• Para $b_1$

$$p(a_1|b_1) = \frac{p(a_1) * p(b_1|a_1)}{p(b_1)} = \frac{5/18}{1/2} = \boxed{5/9}$$

$$p(a_2|b_1) = \frac{p(a_2) * p(b_1|a_2)}{p(b_1)} = \frac{2/9}{1/2} = \boxed{4/9}$$

• Para $b_2$

$$p(a_1|b_2) = \frac{p(a_1) * p(b_2|a_1)}{p(b_2)} = \frac{1/18}{1/2} = \boxed{1/9}$$

$$p(a_2|b_2) = \frac{p(a_2) * p(b_2|a_2)}{p(b_2)} = \frac{4/9}{1/2} = \boxed{8/9}$$

(b)

• Entropía del Emisor

La entropía $H(A)$ (Emisor) se calcula como:

$$\boxed{\sum_i^4 p_i * \log_2 1/p_i = -\sum p_i * \log_2 p_i}$$

$$H(A) = -\left(1/3 * \log_2(1/3) + 2/3 * \log_2(2/3)\right)$$

$$H(A) = -\left(1/3 * (-1,585) + 2/3 * (-0,585)\right)$$

$$H(A) = -\left(-0,53 + (-0,39)\right)$$

$\boxed{H(A) = 0,92}$ ∴ la entropía de A es 0,92 bits

- Entropía condicionales de la fuente para cualquier símbolo de salida

En este caso, la entropía condicionales se calculan como:

$$\boxed{H(A|B) = \sum p(a_i|b_j) * \log_2(1/p(a_i|b_j)) = -\sum p(a_i|b_j) * \log_2(p(a_i|b_j))}$$

$$H(A|b_1) = -\left(5/9 * \log_2 5/9 + 4/9 * \log_2 4/9\right)$$
$$= -\left(5/9 * (-0{,}848) + 4/9 * (-1{,}17)\right)$$
$$= -\left(-0{,}47 - 0{,}52\right)$$
$$= 0{,}99 \text{ bits}$$

$$H(A|b_2) = -\left(1/9 * \log_2 1/9 + 8/9 * \log_2 8/9\right)$$
$$= -\left(1/9 * -(3{,}17) + 8/9 * (-0{,}17)\right)$$
$$= -\left(-0{,}35 - 0{,}15\right)$$
$$= +0{,}5 \text{ bits}$$

- Información Mutua

La información mutua se la calcula como:

$$I(A,B) = \underbrace{H(A)}_{0{,}92} - \underbrace{H(A|B)}_{?}$$

Calculemos $H(A|B)$

$$H(A|B) = p(b_1) * H(A|b_1) + p(b_2) * H(A|b_2)$$
$$= 1/2 * 0{,}99 + 1/2 * 0{,}5$$
$$= 0{,}745 \text{ bits}$$

Luego, la información mutua:

$$I(A,B) = 0{,}92 - 0{,}745 = \boxed{0{,}175 \text{ bits}}$$

Capacidad del canal $= 0{,}175$ bits

# Resolución Ejercicio 3

## Ejercicio 3

Dado que tenemos un canal determinístico, en donde cada símbolo de entrada se corresponde de manera exclusiva con un símbolo de salida

Entonces nos quedaría el siguiente canal, con probabilidades hacia delante $p(a_1|b_1)=1$; $p(b_2|b_2)=1$; $p(a_3|b_3)=1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• Definimos las probabilidades de entrada como $p(a_1)=p_1$; $p(a_2)=p_2$ y $p(a_3)=p_3$ con la condición $p_1+p_2+p_3=1$

Como el canal es determinista, las probabilidades de salidas son iguales a las probabilidades de entrada

$$p(b_1)=p_1 \qquad p(b_3)=p_3$$
$$p(b_2)=p_2$$

Haciendo uso del ejercicio 4 (Parte del práctico de máquina) obtenemos las siguientes entradas.

$$p(a_1)=1/3 \; ; \; p(a_2)=1/3 \text{ y } p(a_3)=1/3$$

Luego para obtener la información mutua, basta con calcular la entropía $H(A)$.

$$\therefore H(A) = -\sum p(a_i) * \log_2(p(a_i))$$

$$H(A) = -\left(1/3 * \log_2(1/3) + 1/3 * \log_2(1/3) + 1/3 * \log_2(1/3)\right)$$

$$= -\left(1/3 * (-1{,}585) + 1/3 * (-1{,}585) + 1/3 * (-1{,}585)\right)$$

$$= -\left(-0{,}53 - 0{,}53 - 0{,}53\right)$$

$$= \boxed{1{,}59}\ \underline{\text{bits}}$$