

# THE TENNIS RACKET THEOREM, AN ANALYSIS OF THE INTERMEDIATE AXIS THEOREM - CAMBIO GITHUB

Nicolas Trivisonno<sup>1</sup>, Luciano Garelli<sup>1</sup>, Mario Storti<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*CIMEC Centro de Investigación de Métodos Computacionales, UNL, CONICET, FICH, Col. Ruta 168 s/n, Predio Conicet "Dr Alberto Cassano", 3000 Santa Fe, Argentina, <http://www.cimec.org.ar>*

**Keywords:** Tennis racket theorem, Intermediate axis theorem, Dzhanibekov effect, Principal axis instability, Wingnut effect

**Abstract.** The aim of this paper is to reproduce the phenomenon of the intermediate axes theorem also known as the Dzhanibekov effect or the Tennis Racket effect. A Rigid Body Dynamic (RBD) model with six degree of freedom (6DOF) was developed to reproduce the Euler Equations of motion. Two configuration of object were analyzed in order to reproduce the intermediate axis effect. Also a mathematical approach was performed in order to present the physics of the precession.

## 1 INTRODUCCIÓN

El teorema del eje intermedio también conocido como teorema de la raqueta de tenis enuncia que sobre un objeto denominado *asymmetrical top* (tres momentos principales de inercia diferentes, donde  $I_1 < I_2 < I_3$ ), su rotación respecto a la primer y tercer dirección principal es estable, mientras que el giro respecto al segundo eje de inercia, produce un efecto extraño y periódico debido a la inestabilidad de dicha revolución.

El enunciado del teorema del eje intermedio se viene estudiando desde larga data por ser un problema de la mecánica clásica, ?, ?, ?, y hasta alcanzó la categoría de secreto de estado para algunas potencias mundiales durante la carrera espacial. El mismo adquirió tal relevancia cuando se realizó la misión Soyuz T-13<sup>1</sup> ya que mientras se realizaba la reparación para volver a poner operativa la estación espacial, el comandante Dzhanibekov presencié la misteriosa trayectoria sobre un tuerca mariposa mientras realizaba el mantenimiento del equipo, por lo que también se suele denominar efecto Dzhanibekov o efecto Wingnut por la denominación de dicha tuerca en inglés.

Si bien el teorema del eje intermedio se conoce desde hace tiempo ya que corresponde al análisis tradicional de la mecánica clásica, debido a su efecto tan peculiar y poco intuitivo, el mismo no deja de asombrar a cualquiera que presencia ese misterioso comportamiento. El objetivo del trabajo es reproducir dicho efecto mediante un modelo de RBD con 6DOF el cual utiliza cuaterniones para la representación matemática. Como beneficio indirecto, realizando dicho ejemplo se valida la implementación del modelo y se evidencia la potencialidad de la representación matemática por medio de cuaterniones ya que permiten reproducir lanzamientos en dirección vertical, situación que no puede realizarse si se utilizan ángulos de Euler debido a la singularidad conocida como *gimbal-lack*.

El presente trabajo está compuesto por una primer sección en la cual se presentan una clasificación de os objetos en función de sus momentos de inercia, Sec.(??). Luego, se procede a analizar las ecuaciones de Euler para las distintas clasificaciones de objetos, donde se analiza la física del movimiento de precesión: Sec.(??) y Sec.(??). Y por último, se reproduce y analiza la inestabilidad del eje intermedio, Sec.(??).

## 2 DESCRIPCIÓN

**Tensor de inercia:** La inercia de un cuerpo se encuentra definida por 6 valores los cuales conforman un tensor simétrico de orden tensorial 2, es decir sea el tensor de inercia  $I$ , entonces  $I \in CT(2)$ <sup>2</sup>, Ec.(??). Como todo  $CT(2)$ , dicho tensor puede transformarse a un tensor diagonal si las direcciones de los ejes son correctamente elegidas, dicho proceso se conoce como diagonalización y los elementos de la diagonal son a los momentos principales de inercia, los cuales corresponden a las inercias en las direcciones seleccionadas para diagonalizar el tensor<sup>3</sup>.

$$I_{ij} = I_{ji} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yk} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{kk} \end{bmatrix} \quad (1)$$

En otras palabras al realizar la diagonalización de  $I \in CT(2)$  se obtendrán dos tensores:

---

<sup>1</sup>Misión realizada en 1985 donde fue una de las proezas de las misiones aeroespaciales debido al acoplamiento manual y la posterior recuperación de la estación espacial Salyut-7 la cual se encontraba orbitando a la deriva.

<sup>2</sup>CT hace referencia a Cartensian Tensor

<sup>3</sup>Este proceso es el que se realiza cuando se obtienen los autovalores y autovectores de un  $CT(2)$

$I_d, v$ , Ec.(??) siendo  $I_d, v \in CT(2)$ .  $I_d$  es un tensor diagonal, cuyos elementos diagonales son los momentos principales de inercia, y los vectores columnas del tensor  $v$  son las direcciones principales de inercia.

$$I_d = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} \\ \underbrace{v_{13}}_{v_1} & \underbrace{v_{23}}_{v_2} & \underbrace{v_{33}}_{v_3} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Además por convención se los organiza de modo que  $I_1 > I_2 > I_3$  donde estas inercias tienen la particularidad que ninguna puede superar a la suma de las otras dos, por ejem:

$$I_1 + I_2 \geq I_3 \quad (3)$$

Los momentos de inercia caracterizan la rotación de un cuerpo en una dada dirección. Dependiendo de como sean dichos momentos de inercia se pueden clasificar a los cuerpos en distintos grupos, a saber:

- inercias todas idénticas:  $I_1 = I_2 = I_3$ , se denomina objeto *spherical top*
- dos inercias iguales y la tercera no:  $I_1 = I_2 \neq I_3$ , se denomina objeto *symmetrical top*
- todas inercias distintas entre sí:  $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ , se denomina objeto *asymmetrical top*

Siempre que un cuerpo gire sobre uno de sus ejes principales, entonces el vector momento se encontrará alineado con el vector velocidad. Cuando el vector velocidad (el cual está dado por el elipsoide de la energía cinética,  $KE$ ) deja de ser colineal con el vector momento entonces se produce el movimiento de *precesión*. Por lo tanto se puede definir a la *precesión* como el parámetro que indica cuan desalineado se encuentra vector velocidad con respecto al eje principal. En la Sec.(??) se amplía el concepto de *precesión*.

### 3 MODELO - ANÁLISIS DE MOMENTOS ANGULARES - APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DE EULER

El momento angular está dado por la ecuación  $\vec{M} = \underline{I}\vec{\Omega}$ , donde el vector momento es proporcional a la velocidad angular siempre y cuando el cuerpo se encuentre rotando sobre los ejes principales de inercia, es decir en dicho caso la velocidad angular se encuentra alineada con el vector momento. Por otro lado, si el cuerpo gira en cualquier otra dirección entonces la velocidad angular no se encontrará alineada con el vector momento y se producirá un movimiento conocido como *precesión*.

En las siguientes secciones se procede a analizar distintas soluciones para un sistema en el cual no actúan esfuerzos externos, tanto Fuerzas como Momentos. La trayectoria descripta por el cuerpo estará dada por la evolución temporal de las ecuaciones de movimiento, Ec.(??), las cuales se resumen en las 6ODE's (Ordinary Differential Equation, 'Ecuaciones Diferenciales Ordinarias'), ?. Como el foco del estudio es la rotación, se elude el análisis para la traslación, estudiándose solamente la rotación. Además se omiten las contribuciones debido a los torques externos.

$$\begin{cases} \dot{\Omega}_1 = \frac{1}{I_1} \Sigma \vec{\tau}_1^{ext} + \frac{(I_2 - I_3)}{I_1} \Omega_3 \Omega_2 \\ \dot{\Omega}_2 = \frac{1}{I_2} \Sigma \vec{\tau}_2^{ext} + \frac{(I_3 - I_1)}{I_2} \Omega_1 \Omega_3 \\ \dot{\Omega}_3 = \frac{1}{I_3} \Sigma \vec{\tau}_3^{ext} + \frac{(I_1 - I_2)}{I_3} \Omega_2 \Omega_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\Omega}_1 = \frac{(I_2 - I_3)}{I_1} \Omega_3 \Omega_2 \\ \dot{\Omega}_2 = \frac{(I_3 - I_1)}{I_2} \Omega_1 \Omega_3 \\ \dot{\Omega}_3 = \frac{(I_1 - I_2)}{I_3} \Omega_2 \Omega_1 \end{cases} \quad (4)$$

### 3.1 Spherical Top

En la presente situación el objeto tiene las inercias idénticas,  $I_1 = I_2 = I_3$ , por lo cual, las soluciones de la ODE serán constantes que dependerán de las condiciones iniciales del objeto, Ec.(??).

$$\begin{cases} \dot{\Omega}_1 = \frac{(I_1-I_1)}{I_1} \Omega_3 \Omega_2 \\ \dot{\Omega}_2 = \frac{(I_1-I_1)}{I_2} \Omega_1 \Omega_3 \\ \dot{\Omega}_3 = \frac{(I_1-I_1)}{I_3} \Omega_2 \Omega_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\Omega}_1 = 0 \\ \dot{\Omega}_2 = 0 \\ \dot{\Omega}_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \Omega_1 = C_1 \\ \Omega_2 = C_2 \\ \Omega_3 = C_3 \end{cases} \quad (5)$$

### 3.2 Symmetrical top

Los cuerpos symmetrical top son los cuerpos que poseen dos momentos de inercia similares y un 3<sup>er</sup> momento de inercia diferente, es decir  $I_1 = I_2 \neq I_3$ . De la Ec.(??), aplicamos la igualdad en la simetría y se arriba a la Ec.(??).

$$\begin{cases} \dot{\Omega}_1 = \frac{(I_1-I_3)}{I_1} \Omega_3 \Omega_2 \\ \dot{\Omega}_2 = \frac{(I_3-I_1)}{I_1} \Omega_1 \Omega_3 \\ \dot{\Omega}_3 = \frac{(I_1-I_2)}{I_3} \Omega_2 \Omega_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\Omega}_1 = \frac{(I_1-I_3)}{I_1} \Omega_3 \Omega_2 \\ \dot{\Omega}_2 = \frac{(I_3-I_1)}{I_1} \Omega_1 \Omega_3 \\ \dot{\Omega}_3 = \frac{(0)}{I_3} \Omega_2 \Omega_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\Omega}_1 = \frac{(I_1-I_3)}{I_1} \Omega_3 \Omega_2 \\ \dot{\Omega}_2 = \frac{(I_3-I_1)}{I_1} \Omega_1 \Omega_3 \\ \dot{\Omega}_3 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Donde  $\Omega_3$  resulta ser un valor constante  $\Omega_3 = C_1$  y por lo tanto el producto de una constante por  $\Omega_3$  también será una constante, la cual se denomina  $w$ . El término de la ecuación de  $\Omega_1$  será  $-w$  por tener ser  $(I_1 - I_3) = -(I_3 - I_1)$ .

$$\begin{cases} \dot{\Omega}_1 = \frac{(I_1-I_3)}{I_1} \Omega_3 \Omega_2 \\ \dot{\Omega}_2 = \frac{(I_3-I_1)}{I_1} \Omega_3 \Omega_1 \\ \Omega_3 = C_1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ I_1 \\ c_2 \cdot \Omega_3 = w \end{matrix} \quad (7)$$

Por consiguiente el sistema de ecuaciones se resume a un sistema de ecuaciones de dos ecuaciones diferenciales con dos incógnitas.

$$\begin{cases} \dot{\Omega}_1 = -w \Omega_2 \\ \dot{\Omega}_2 = w \Omega_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\Omega}_1 = \underbrace{0}_a \Omega_1 + \underbrace{-w}_b \Omega_2 \\ \dot{\Omega}_2 = \underbrace{w}_c \Omega_1 + \underbrace{0}_d \Omega_2 \end{cases} \quad (8)$$

La Ec.(??) es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con la particularidad de que sus incógnitas están acopladas y no es posible resolver  $\dot{\Omega}_1$  sin resolver  $\dot{\Omega}_2$  y viceversa, por lo que se deben resolver las dos simultáneamente. Esta situación ocurre cuando las constantes genéricas b y c son distintas de cero,  $b \neq 0 \wedge c \neq 0$ .

Para resolver este tipo de sistemas se puede realizar de forma matricial o sino como en el presente trabajo se opta por resolverlo mediante el método que transforma a la primer ecuación en una ecuación diferencial de 2do orden, es decir se toma a la primer ecuación y se deriva respecto a la variable independiente, quedando ahora una ecuación de segundo orden que involucra a la primer derivada de la segunda ecuación, y de esa forma se puede sustituir esta

dentro de la anterior.

$$\begin{cases} \dot{\Omega}_1 = -w\Omega_2 \\ \dot{\Omega}_2 = w\Omega_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{\Omega}_1 = -w\dot{\Omega}_2 \\ \ddot{\Omega}_2 = w\dot{\Omega}_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{\Omega}_1 = -w \overbrace{w\Omega_1}^{\dot{\Omega}_2} \\ \ddot{\Omega}_2 = w\Omega_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{\Omega}_1 = -w^2\Omega_1 \\ \ddot{\Omega}_2 = w^2\Omega_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{\Omega}_1 + w^2\Omega_1 = 0 \\ \ddot{\Omega}_2 + w^2\Omega_2 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

De esta forma se logra transformar la Ec.(??) en una ecuación ordinaria de segundo orden homogénea y a coeficientes constantes. La solución general de la misma está compuesta por dos soluciones linealmente independientes (LI) de la forma  $y_H = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$ . El método para calcular dichas soluciones es proponer la solución Ec.(??) ya que sus derivadas serán siendo la misma función.

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{(rt)} \\ \dot{y}(t) &= r e^{(rt)} \\ \ddot{y}(t) &= r^2 e^{(rt)} \end{aligned} \quad (10)$$

Al reemplazar la Ec.(??) que contiene la solución propuesta y sus derivadas en la Ec.(??) se arriba a:

$$\begin{aligned} r^2 e^{(rt)} + w^2 e^{(rt)} &= 0 \\ (r^2 + w^2) e^{(rt)} &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Como la función exponencial es asintótica en 0, la función  $e^{(rx)}$  nunca alcanzará dicho valor, por lo que la única forma que la Ec.(??) sea nula es que el polinomio de  $2^{do}$  grado sea nulo. Para esto se procede a calcular las raíces.

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-0 \pm \sqrt{0 - 4 \cdot w^2}}{2} = \frac{\pm \sqrt{(-1) \cdot 4 \cdot w^2}}{2} = \frac{\pm \sqrt{i^2 \cdot 4 \cdot w^2}}{2} = \frac{\pm 2wi}{2} = \pm wi \quad (12)$$

Por lo que la solución general de la Ec.(??) será:

$$\Omega_{1(t)} = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} = C_1 e^{2wit} + C_2 e^{-2wit} \quad (13)$$

Expresando la exponencial imaginaria mediante las funciones trigonométricas  $\sin()$  y  $\cos()$ , la Ec.(??) queda:

$$\Omega_{1(t)} = C_1 \cos(wt) + C_2 \sin(wt) \quad (14)$$

Una vez obtenida la Ec.(??) se puede reemplazar en la Ec.(??) para calcular la velocidad

angular restante, se detalla además la sustitución para resolver la integral.

$$\begin{aligned}
\dot{\Omega}_{2(t)} &= w\Omega_1 = w \left[ \overbrace{C_1 \cos(wt) + C_2 \sin(wt)}^{\Omega_{1t}} \right] \\
\Omega_{2(t)} &= \int \dot{\Omega}_{2(t)} dt = \int w C_1 \cos(wt) dt + \int w C_2 \sin(wt) dt \\
\Omega_{2(t)} &= \int C_1 \cos(u) du + \int C_2 \sin(u) du \quad u = wt \rightarrow du = w dt \\
\Omega_{2(t)} &= C_1 \sin(u) - C_2 \cos(u) \\
\Omega_{2(t)} &= C_1 \sin(wt) - C_2 \cos(wt)
\end{aligned} \tag{15}$$

Finalmente con la Ec.(??) y Ec.(??) se obtienen las soluciones del sistema acoplado, Ec.(??), siendo este:

$$\begin{cases} \Omega_{1(t)} = C_1 \cos(wt) + C_2 \sin(wt) \\ \Omega_{2(t)} = C_1 \sin(wt) - C_2 \cos(wt) \end{cases} \tag{16}$$

Para el cálculo de las constantes inicializamos el sistema de modo que  $\Omega_{1(0)} = A$  y  $\Omega_{2(0)} = 0$ .

$$\begin{cases} \Omega_{1(0)} = C_1 \overbrace{\cos(w \cdot 0)}^{=1} + C_2 \overbrace{\sin(w \cdot 0)}^{=0} \\ \Omega_{2(0)} = C_1 \overbrace{\sin(w \cdot 0)}^{=0} - C_2 \overbrace{\cos(w \cdot 0)}^{=1} \end{cases} \begin{cases} A = C_1 \\ 0 = -C_2 \end{cases} \tag{17}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \Omega_{1(t)} &= A \cos(w t) \\ \Omega_{2(t)} &= A \sin(w t) \end{aligned}} \tag{18}$$

La Ec.(??) modela un movimiento armónico en dos dimensiones el cual describe la trayectoria curva, donde  $A$  es la amplitud, y  $\omega$  la frecuencia. En rigor de verdad la frecuencia es  $f = \frac{w}{2\pi}$  y  $\omega$  es la velocidad angular de rotación. Es decir el movimiento descrito es periódico, ya que al cabo de un tiempo el vector vuelve a su posición inicial y comienza nuevamente el ciclo. En otras palabras  $\omega$  es la velocidad con la que va cambiando el vector velocidad angular  $\vec{\Omega}$  y por ende el eje instantáneo de rotación. A dicho fenómeno se lo conoce como fenómeno de precesión y se define como el movimiento asociado al cambio de dirección en el espacio que experimenta el eje instantáneo de rotación de un cuerpo, donde la velocidad de dicho cambio es la velocidad de precesión  $\Omega_{pr}$ . La Ec.(??) detalla esta cuestión.

$$\Omega_{pr} = \tilde{C} \Omega_3 = \left( \overbrace{\frac{I_3 - I_1}{I_1}}^{\tilde{C}} \right) \Omega_3 = \omega \tag{19}$$

De esta forma se reformula la Ec.(??) presentándose con la velocidad de precesión  $\Omega_{pr}$ .

$$\boxed{\begin{aligned} \Omega_{1(t)} &= A \cos(\Omega_{pr} t) \\ \Omega_{2(t)} &= A \sin(\Omega_{pr} t) \end{aligned}} \tag{20}$$

Continuando Ec.(??) y Ec.(??) se concluye que la velocidad de rotación del cuerpo es:

$$\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \cos(\Omega_{pr} t) \\ A \sin(\Omega_{pr} t) \\ C_1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

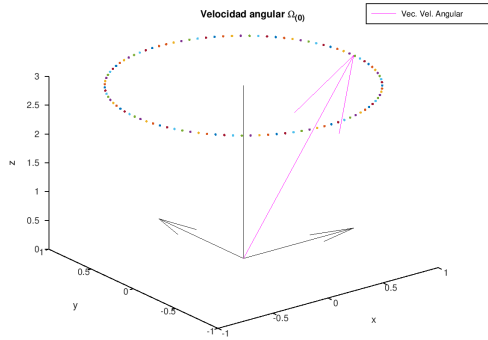
Así pues, la Ec.(??) presenta en forma general la velocidad angular del objeto. Se aprecia que  $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{(t)}$  varía instante a instante, es decir, es constante respecto a eje principal  $x_3$  pero al estar describiendo una circunferencia, el vector  $\vec{\Omega}$  estará recorriendo a dicha curva y tomando valores distintos instante a instante; donde la velocidad con la que el vector va recorriendo esa circunferencia se conoce como velocidad de precesión,  $\Omega_{pr}$ . Se procede a analizar algunas situaciones particulares:

- $t=0$

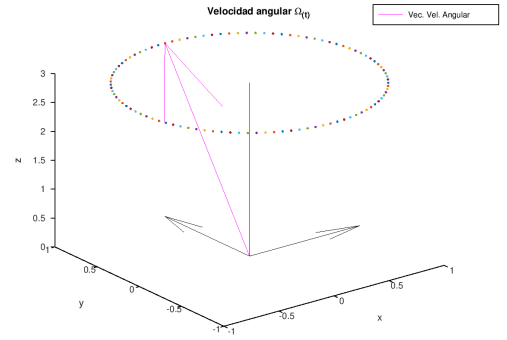
$$\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} A \cos(\Omega_{pr} t) \\ A \sin(\Omega_{pr} t) \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \cos(\Omega_{pr} 0) \\ A \sin(\Omega_{pr} 0) \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ 0 \\ C_1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

- $t = \frac{\pi}{2\Omega_{pr}}$

$$\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} A \cos(\Omega_{pr} t) \\ A \sin(\Omega_{pr} t) \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \cos\left(\Omega_{pr} \frac{\pi}{2\Omega_{pr}}\right) \\ A \sin\left(\Omega_{pr} \frac{\pi}{2\Omega_{pr}}\right) \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ A \\ C_1 \end{bmatrix} \quad (23)$$



(a)  $\Omega$  en  $t = 0$



(b)  $\Omega$  en  $t = \frac{\pi}{2\Omega_{pr}}$

Figure 1: Vector velocidad angular,  $\vec{\Omega}$

De las Fig.(??) y Fig.(??) se aprecia que el vector velocidad angular  $\vec{\Omega}$  varía en función del tiempo, ya que  $\Omega_1 = \Omega_{(t)}$ , idem para  $\Omega_2$ . No obstante su módulo es constante, Ec.(??). Se demuestra que siendo  $A, C_1 \in CT(0)$  y por ende la suma de constantes tiene como resultado

otra constante,  $\tilde{C} \in CT(0)$ .

$$\begin{aligned}
|\vec{\Omega}|^2 &= \Omega_i \Omega_j \delta_{ij} \\
|\vec{\Omega}|^2 &= [A \cos(\Omega_{pr} t)]^2 + [A \sin(\Omega_{pr} t)]^2 + [C_1]^2 \\
|\vec{\Omega}|^2 &= A^2 \cos^2(\Omega_{pr} t) + A^2 \sin^2(\Omega_{pr} t) + C_1^2 \\
|\vec{\Omega}|^2 &= A^2 \underbrace{[\cos^2(\Omega_{pr} t) + \sin^2(\Omega_{pr} t)]}_{=1} + C_1^2 \\
|\vec{\Omega}|^2 &= \underbrace{A^2 + C_1^2}_{\tilde{C}} \\
|\vec{\Omega}|^2 &= \tilde{C}
\end{aligned} \tag{24}$$

Se realiza el mismo procedimiento para estudiar el momento, donde se demuestra que si bien el vector momento  $\vec{M}$  varía instante a instante, ya que depende de la velocidad angular y anteriormente se demostró dicha dependencia temporal, no obstante su módulo es constante. Se procede a realizar dos ejemplos en los mismos instantes de tiempo anteriores,  $t = 0$  y  $t = \frac{\pi}{2\Omega_{pr}}$

$$\vec{M} = M_1 \hat{i} + M_2 \hat{j} + M_3 \hat{k} \tag{25}$$

- $t = 0$ : Recordamos que:

$$\vec{\Omega}_{(0)} = \begin{bmatrix} A \\ 0 \\ C_1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto cuando la matriz de inercia se encuentra diagonalizada el vector momento expresado en la notación de Einstein será  $\vec{M}_j = I_{ij}\Omega_i$

$$\vec{M} = \begin{bmatrix} I_{xx}\Omega_1(t) \\ I_{yy}\Omega_2(t) \\ I_{zz}\Omega_3 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{M}_{(0)} = \begin{bmatrix} I_{xx}A \\ 0 \\ I_{zz}C_1 \end{bmatrix} \tag{26}$$

- $t = \frac{\pi}{2\Omega_{pr}}$ : Recordamos que:

$$\vec{\Omega}_{(\frac{\pi}{2\Omega_{pr}})} = \begin{bmatrix} 0 \\ A \\ C_1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto cuando la matriz de inercia se encuentra diagonalizada el vector momento expresado en la notación de Einstein será  $\vec{M}_j = I_{ij}\Omega_i$

$$\vec{M} = \begin{bmatrix} I_{xx}\Omega_1(t) \\ I_{yy}\Omega_2(t) \\ I_{zz}\Omega_3 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{M}_{(\frac{\pi}{2\Omega_{pr}})} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{yy}A \\ I_{zz}C_1 \end{bmatrix} \tag{27}$$

Tanto la Ec.(??) y Ec.(??) como también la Fig.(??) y Fig.(??) manifiestan que el plano de acción de la velocidad angular  $\vec{\Omega}$  y el momento  $\vec{M}$  es el mismo, y este varía instante a instante. Como se expresa con anterioridad el vector  $\vec{\Omega}$  por acción de la precesión va variando instante a



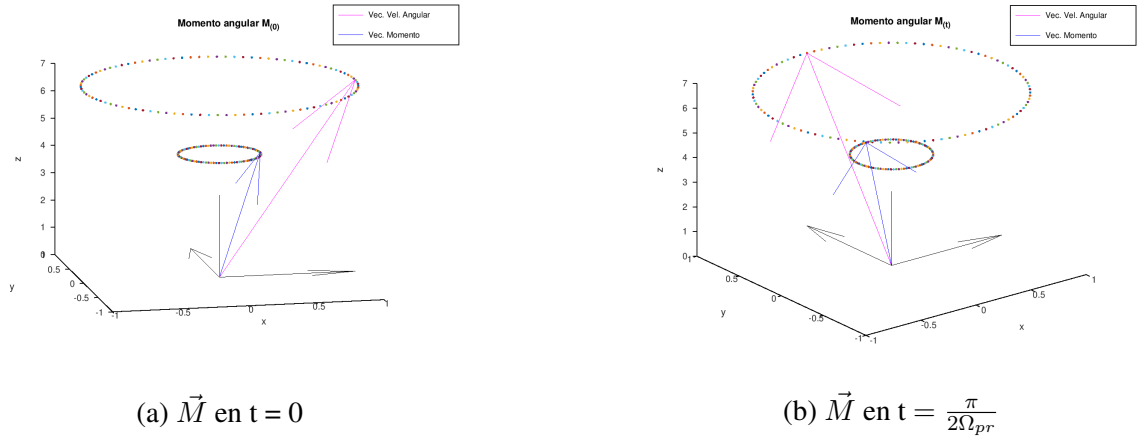


Figure 2: Vector momento angular,  $\vec{M}$

instante pero no su módulo y lo mismo ocurre con el vector momento  $\vec{M}$ , que debido a la diferencia en sus componentes producto de las inercias, no es igual a  $\vec{\Omega}$  sino que va acompañando al vector velocidad angular  $\vec{\Omega}$ . Por último se analiza el módulo del vector momento sobre el cual se demuestra que si bien el vector momento varía por tener la dependencia temporal  $\vec{M} = \vec{M}_{(t)}$ , no obstante su módulo es constante, ya que  $A, C_1 \in CT(0)$  y estos se multiplican por los momentos de inercia que son constante, se arriba a que  $|\vec{M}|^2 \in CT(0)$ .

$$\begin{aligned}
 |\vec{M}|^2 &= M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 \\
 |\vec{M}|^2 &= (I_1\Omega_1)^2 + (I_2\Omega_2)^2 + (I_3\Omega_3)^2 \\
 |\vec{M}|^2 &= I_1^2\Omega_1^2 + I_2^2\Omega_2^2 + I_3^2\Omega_3^2 \\
 |\vec{M}|^2 &= I_1^2 [A \cos(\Omega_{pr} t)]^2 + I_2^2 [A \sin(\Omega_{pr} t)]^2 + I_3^2 [C_1]^2 \\
 |\vec{M}|^2 &= I_1^2 A^2 \cos^2(\Omega_{pr} t) + I_2^2 A^2 \sin^2(\Omega_{pr} t) + I_3^2 C_1^2 \\
 |\vec{M}|^2 &= I_1^2 A^2 \cos^2(\Omega_{pr} t) + I_2^2 A^2 \sin^2(\Omega_{pr} t) + I_3^2 C_1^2 \\
 |\vec{M}|^2 &= I_1^2 A^2 \underbrace{[\cos^2(\Omega_{pr} t) + \sin^2(\Omega_{pr} t)]}_{=1} + I_3^2 C_1^2 \\
 |\vec{M}|^2 &= \underbrace{I_1^2 A^2 + I_3^2 C_1^2}_{\tilde{C}} \\
 |\vec{M}|^2 &= \tilde{C}
 \end{aligned} \tag{28}$$

### 3.3 Asymmetrical Top

Ahora se realiza el estudio para un cuerpo donde los tres momentos de inercia son diferentes entre sí, es decir  $I_1 \neq I_2 \neq I_3$  y además  $I_1 > I_2 > I_3$ . Si se piensa en función de la conservación del momento angular, donde  $\vec{M} = \underline{I} \vec{\Omega}$  entonces si  $|\vec{M}| = C$  al aumentar  $I \uparrow$ , disminuye  $\Omega \downarrow$ , esto es:  $I_3$  será el menor eje de inercia y por lo tanto tendrá la mayor velocidad de rotación.

$$\begin{aligned}
 I_1 &> I_2 > I_3 \\
 \Omega_1 &< \Omega_2 < \Omega_3 \\
 \Omega_3 &< \Omega_2 < \Omega_1
 \end{aligned} \tag{29}$$

La Ec.(??a) es la ecuación de la energía cinética de rotación, la cual representa todas las configuraciones de modo que el objeto tenga la máxima energía de rotación para determinadas velocidades angulares  $\vec{\Omega}$ . Dicha energía es una magnitud escalar ( $E \in CT(0)$ <sup>4</sup>) y su valor es constante durante la rotación ya que se conservan debido a que no hay presencia de efectos difusivos que hagan variar la energía del sistema. Por otro lado, la Ec.(??b) es la ecuación de momento y tiene magnitud vectorial,  $M \in CT(1)$ . Cabe destacar que el momento angular del objeto no es constante pero sí lo es su módulo, como se demostró en la Ec.(??) es decir ambas ecuaciones Ec.(??) se conservan.

$$\begin{cases} E &= \frac{1}{2} [I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2] \\ |\vec{M}|^2 &= I_1^2 \Omega_1^2 + I_2^2 \Omega_2^2 + I_3^2 \Omega_3^2 \end{cases} \quad (30)$$

El sistema de ecuaciones dado por la Ec.(??) geométricamente representa dos elipsoides, las cuales al comparar con la ecuación canónica de la elipse, Ec.(??) se evidencia que los semi-ejes para la elipse de energía, Ec.(??a) son  $a = \sqrt{\frac{2E}{I_1}}$ , con sus análogos para 'b' y 'c', mientras que para la elipse de momento, Ec.(??b),  $a = \sqrt{\frac{|\vec{M}|^2}{I_1^2}}$ , y sus análogos para 'b' y 'c', donde dichos semi-ejes corresponden a cada eje principal de rotación.

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \quad (31)$$

Por lo tanto el sistema de ecuaciones, Ec.(??) expresado en la forma canónica de la elipse, se presenta de la forma:

$$\begin{cases} 1 &= \frac{\Omega_1^2}{\frac{2E}{I_1}} + \frac{\Omega_2^2}{\frac{2E}{I_2}} + \frac{\Omega_3^2}{\frac{2E}{I_3}} \\ 1 &= \frac{\Omega_1^2}{\frac{|\vec{M}|^2}{I_1^2}} + \frac{\Omega_2^2}{\frac{|\vec{M}|^2}{I_2^2}} + \frac{\Omega_3^2}{\frac{|\vec{M}|^2}{I_3^2}} \end{cases} \quad (32)$$

Calcular la intersección de ambas elipses conlleva una complejidad considerada. Sin embargo, si se considera expresar a la velocidad angular de la Ec.(??a) en función del momento donde  $M_i = I_{ij} \Omega_j \rightarrow \Omega_j = \frac{M_i}{I_{ij}}$ , los mimos para la Ec.(??b), se obtiene un sistema de ecuaciones relacionadas mediante el momento, Ec.(??).

$$\begin{cases} E &= \frac{1}{2} [I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2] \\ E &= \frac{1}{2} \left[ I_1 \left( \frac{M_1}{I_1} \right)^2 + I_2 \left( \frac{M_2}{I_2} \right)^2 + I_3 \left( \frac{M_3}{I_3} \right)^2 \right] \\ 2E &= \frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3} \\ 1 &= \frac{M_1^2}{2EI_1} + \frac{M_2^2}{2EI_2} + \frac{M_3^2}{2EI_3} \end{cases} \quad (33)$$

Se aprecia que el resultado de Ec.(??) es la representación geométrica de un elipsoide respecto al momento con semi-ejes en  $a = \sqrt{2EI_1}$ , y sus análogos para 'b' y 'c'. Donde, como se

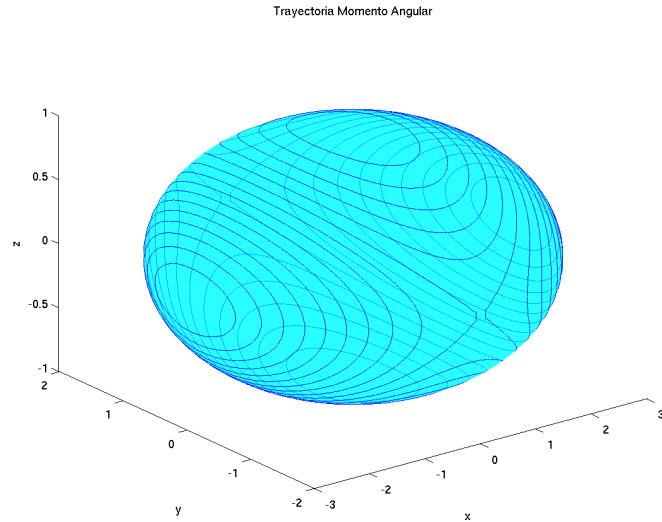
<sup>4</sup>CT hace referencia a Cartensian Tensor, indicando el rango del tensor. CT(0) es un tensor de orden cero, es decir un escalar, CT(1) vector, etc.

dijo con anterioridad, el elipsoide representa las configuraciones del sistema donde se obtienen la máxima energía de rotación, y los semi-ejes son los ejes principales de inercia.

$$\begin{cases} 1 &= \frac{M_1^2}{2EI_1} + \frac{M_2^2}{2EI_2} + \frac{M_3^2}{2EI_3} \\ |M|^2 &= M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 \end{cases} \quad (34)$$

Por lo tanto, con la transformación se logra un sistema de ecuaciones en función del momento angular, Ec.(??) y dicho sistema se encuentra comprendido por la energía de rotación y el momento angular. Geométricamente representa la intersección entre un elipsoide y una esfera, lo cual es mas sencillo e intuitivo. Sobre este sistema, se aprecia que el momento tendrá un valor acotado por los semi-ejes del elipsoide de energía, es decir, todas las soluciones admisibles que se encuentren entre el mínimo y máximo valor de los semi-ejes, Ec.(??). Esta situación se grafica en la Fig.(??) donde se presentan todas las posibles soluciones para la intersección entre un elipsoide y una esfera, cuya analogía física será la solución entre el momento y la máxima energía cinética.

$$\begin{aligned} c^2 &< M^2 < a^2 \\ 2EI_3 &< M^2 < 2EI_1 \end{aligned} \quad (35)$$



Elipsoide - EsferaotroDT2.png

Figure 3: Intersecciones Elipsoide - Esfera

### 3.4 Posibles situaciones

Del sistema de Ec.(??) para una cantidad de energía constante existen distintas situaciones posibles, principalmente definidas por los tres semi-ejes, los cuales justamente se corresponden a los ejes principales de inercia, Fig.(??). Para ello se procede a analizar las posibles soluciones, partiendo del valor mínimo hasta el valor máximo que puede adoptar el momento, es decir  $c^2 < M^2 < a^2$ .

### 3.4.1 Intersección sobre semi-eje menor

En primer lugar cuando el cuerpo se encuentra girando sobre su menor eje principal de inercia  $2EI_3$ , este se encuentra colineal con su velocidad angular  $|\vec{\Omega}|$ , y es proporcional al  $|\vec{M}|$ , esto se debe a que el vector momento se encuentra alineado con la velocidad angular.

Ahora si el momento tiene una componente que interrumpe esa colinealidad, es decir el  $|\vec{M}|$  sufre una mínima variación respecto al eje de inercia, Fig.(??a), en este caso la solución del sistema energía-momento serán dos circunferencias. Estas curvas son la solución de la intersección entre el elipsoide de energía y la esfera de momento; una circunferencia por cada lado del elipsoide. En este caso, el vector momento  $|\vec{M}|$  al desplazarse sobre dicha curva realiza un movimiento en forma de cono. A dicho fenómeno se lo conoce como fenómeno de *precesión* y se define como el movimiento asociado al cambio de dirección que experimenta el eje instantáneo de rotación. En otras palabras es un parámetro que indica cuán desalineado se encuentra el vector momento  $|\vec{M}|$  de los ejes principales de inercia. Si bien en Sec.(??) se realiza el análisis matemático del fenómeno de precesión para un cuerpo `symmetrical-top`, dicho fenómeno ocurre también en los cuerpos `asymmetrical-top` cuando sufren una variación del momento  $\vec{M}$  cercana al menor eje de inercia<sup>5</sup>.

A medida que dicha desalineación aumenta, el grado de apertura del cono será mayor, ya que aumenta la circunferencia dada por la intersección entre el elipsoide y la esfera. En dicho caso, el vector  $\vec{M}$  sufrirá una modificación en sus componentes. Si bien se dijo con anterioridad que su módulo es constante  $|\vec{M}| = C_1$ , siendo  $C_1 \in CT(0)$ , no obstante el vector  $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3$ , por lo que sus componentes se modificarán. En consecuencia, la proyección sobre el eje principal de inercia será menor y por ende el cuerpo sufrirá una disminución en su velocidad angular, mientras que dicha diferencia contribuirá en el movimiento de precesión, realizando una curva circular más pronunciada. Estas situaciones se pueden deducir de la Fig.(?? y Fig.(??).

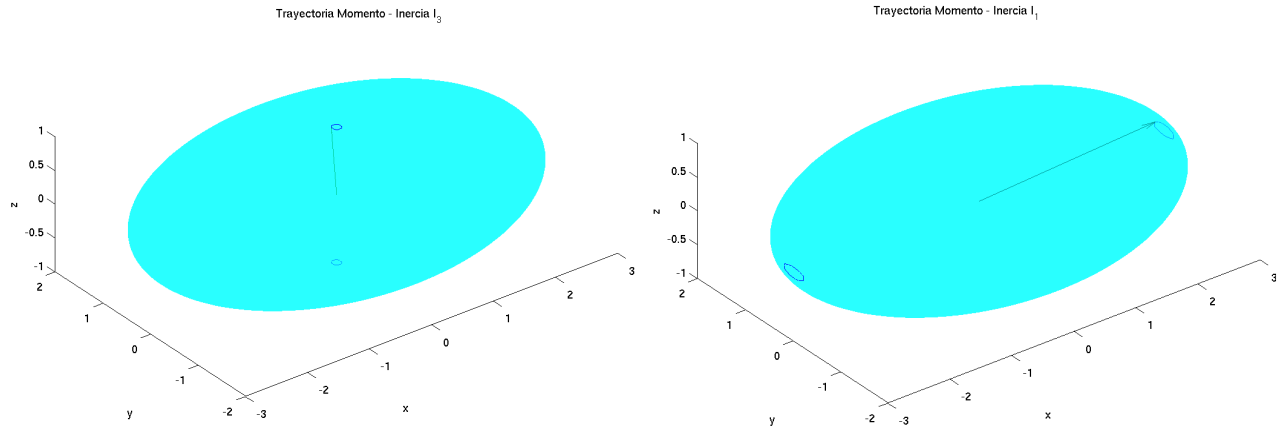


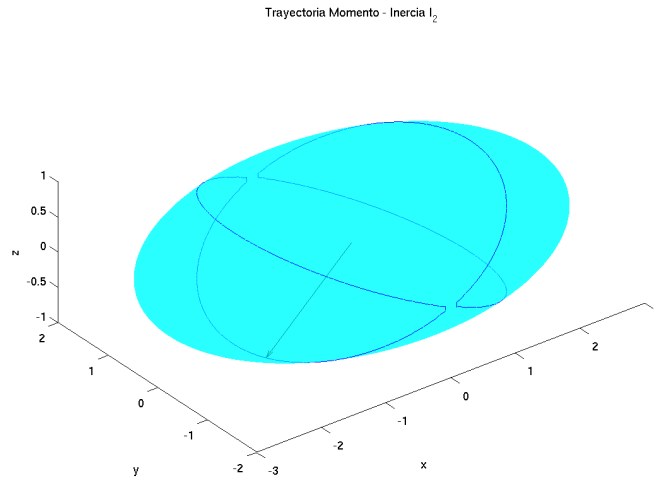
Figure 4: Trayectoria Estable Momento Inercia,  $I_1$  y  $I_3$

La interpretación gráfica del fenómeno de *precesión* se aprecia cuando la circunferencia dada por la intersección entre el elipsoide y la esfera comienza a crecer y por ende la proyección del vector momento  $\vec{M}$  sobre el eje de inercia comienza a disminuir. Visto de otra manera, cuanto más alineado se encuentra el vector  $|\vec{M}|$  respecto al eje de rotación, mayor será su

<sup>5</sup>Del desarrollo se manifiesta que el fenómeno precesión ocurre tanto para el menor eje de inercia  $I_3$  como para el mayor  $I_1$

proyección sobre este, y por ende mayor será su velocidad de rotación  $|\vec{\Omega}|$ . Como la intersección entre la elipse y la esfera es una curva cerrada se evidencia que el movimiento del vector momento  $|\vec{M}|$  es periódico, es decir el vector se desplaza por el camino descrito por la curva intersección y luego vuelve a su posición original.

Esta situación en la cual una pequeña variación de la curva descrita por el vector momento  $|\vec{M}|$  produce una desviación próxima a la situación anterior, ocurre tanto en los semi-ejes mayor ( $I_1$ ) y menor ( $I_3$ ) de la elipse, Fig.(??). No obstante se observa que la situación sobre la región cercana al eje intermedio ( $I_2$ ), la curva descrita es distinta a una circunferencia cercana al eje de inercia, Fig.(??). En el caso en que el cuerpo se encuentra rotando sobre el eje intermedio de inercia ( $I_2$ ) y experimenta una leve variación sobre el momento  $|\vec{M}|$ , este tendrá un comportamiento cualitativamente diferente, donde el camino recorrido por el vector momento  $|\vec{M}|$  realiza una trayectoria totalmente extraña y alejada de los "polos" de dicho semi-eje.



Momento - Inercia  $I_2$ .png

Figure 5: Trayectoria Momento - Inercia  $I_2$

Esta situación anterior se debe a que el movimiento de rotación del cuerpo sobre los semi-ejes mayor ( $I_1$ ) y menor ( $I_3$ ) es estable, mientras que el movimiento de rotación respecto al eje intermedio ( $I_2$ ) es inestable, generando esa extraña y asombrosa perturbación descrita durante el giro en dicha situación. Esta fenómeno se conoce como paradoja de la raqueta de tennis o teorema del eje intermedio, también conocido como efecto 'Dzhanibekov' o efecto Wingnut y gráficamente se manifiesta que dicha trayectoria bizarra se debe a la intersección entre el elipsoide y la esfera que ocurre cercano al segundo eje principal de inercia, Fig(??).

#### 4 METODOLOGÍA

Para hacer frente a las cuestiones técnicas se desarrolló un algoritmo que resuelve el modelo de RBD (Rigid Body Dynamics, 'Dinámica de Cuerpo Rígido') con 6DOF's (Degrees of Freedom, 'Grados de Libertad') el cual utiliza cuaterniones para la representación matemática de las orientación del cuerpo. Esto último es una ventaja ya que dicha modelización permite capturar desplazamientos en cualquier dirección, cuestión que no es posible si se utilizan los ángulos de

Euler debido a la singularidad conocida como *gimbal-lock*<sup>6</sup>.

El algoritmo resuelve las ecuaciones de Euler, Ec.(??) y modeliza la trayectoria de un cuerpo bajo las condiciones iniciales de movimiento. Se encuentra implementado en el lenguaje `python` y para resolver las ODE's se utiliza un integrador temporal con paso de tiempo adaptativo. El mismo se abastece de los parámetros físicos del objeto como ser sus parámetros geométricos, inercia, centro de masa, etc. El modelo devuelve como resultado los valores numéricos de la trayectoria y gráficas que manifiesta la evolución de los parámetros involucrados.

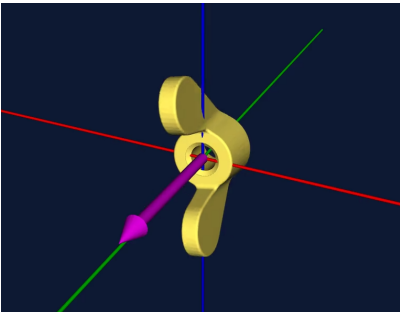
## 5 RESULTADOS

### 5.1 Simulación Numérica

Se realizan las simulaciones numéricas sobre las cuales se omiten las traslaciones ya que dichos valores no inciden sobre los efectos de la rotación. El objeto seleccionado fue un objeto *asymmetrical-top* con las características que se presentan en la Fig.(??).

	Descripción		Descripción
masa	0.1 [kg]	diam	0.04 [m]
$I_{XX}$	1.3442e-8	$x_{CG}$	0
$I_{YY}$	1.6312e-8	$y_{CG}$	0
$I_{ZZ}$	5.4941e-9	$z_{CG}$	0

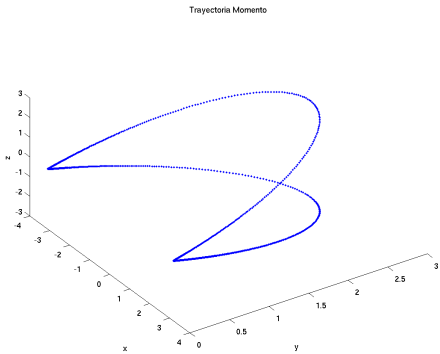
(a) Características Tuerca Wingnut



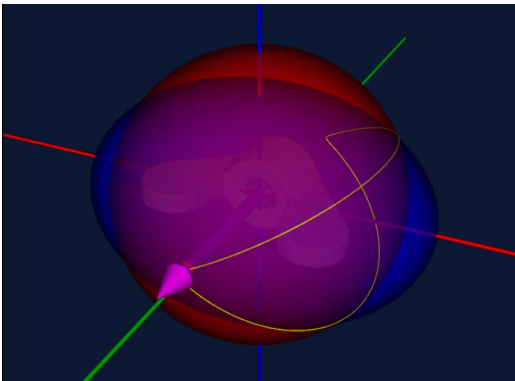
(b) Isometría Wingnut

Figure 6: Objeto Asymmetrical-top

Las figuras Fig.(??) y Fig(??) representan las trayectorias que recorre el vector momento  $\vec{M}$  lo cual concuerda con la inestabilidad explicada en Sec.(??).



(a) Trayectoria Vector Momento,  $\vec{M}$



(b) Resultado Wingnut

Figure 7: Esquemas resultados sobre situación real

<sup>6</sup>El *gimbal-lock* consiste en la pérdida de un grado de libertad en una suspensión cardán de tres rotores, que ocurre cuando los ejes de dos de los tres rotores se colocan en paralelo, bloqueando el sistema en una rotación en un espacio bidimensional degenerado

## 5.2 Secuencia de rotación, Inestabilidad eje intermedio

En la Fig.(??) se presenta la secuencia de rotaciones que manifiesta la inestabilidad que experimenta un cuerpo *asymmetrical-top* cuando rota respecto a su eje intermedio. Para una mejor comprensión se representa la rotación sobre la cual a medida que se va desarrollando la misma se comienza a colocar los disitintos parámetros que se encuentran presentes, como ser: el elipsoide de energía, la esfera de momento, el vector momento y la trayectoria que este describe. El vector de color magenta representa el vector momento,  $\vec{M}$ , el cual en todo instante sigue la trayectoria dada por la intersección entre el elipsoide de energía y la esfera de momento. Para una mayor comprensión visual se representa a la elipsoide de energía de color azul, mientras que la esfera de momento, es de color rojo. Se aprecia que la intersección entre las dos curvas (elipsoide-esfera) es la trayectoria descrita en la Fig.(??).

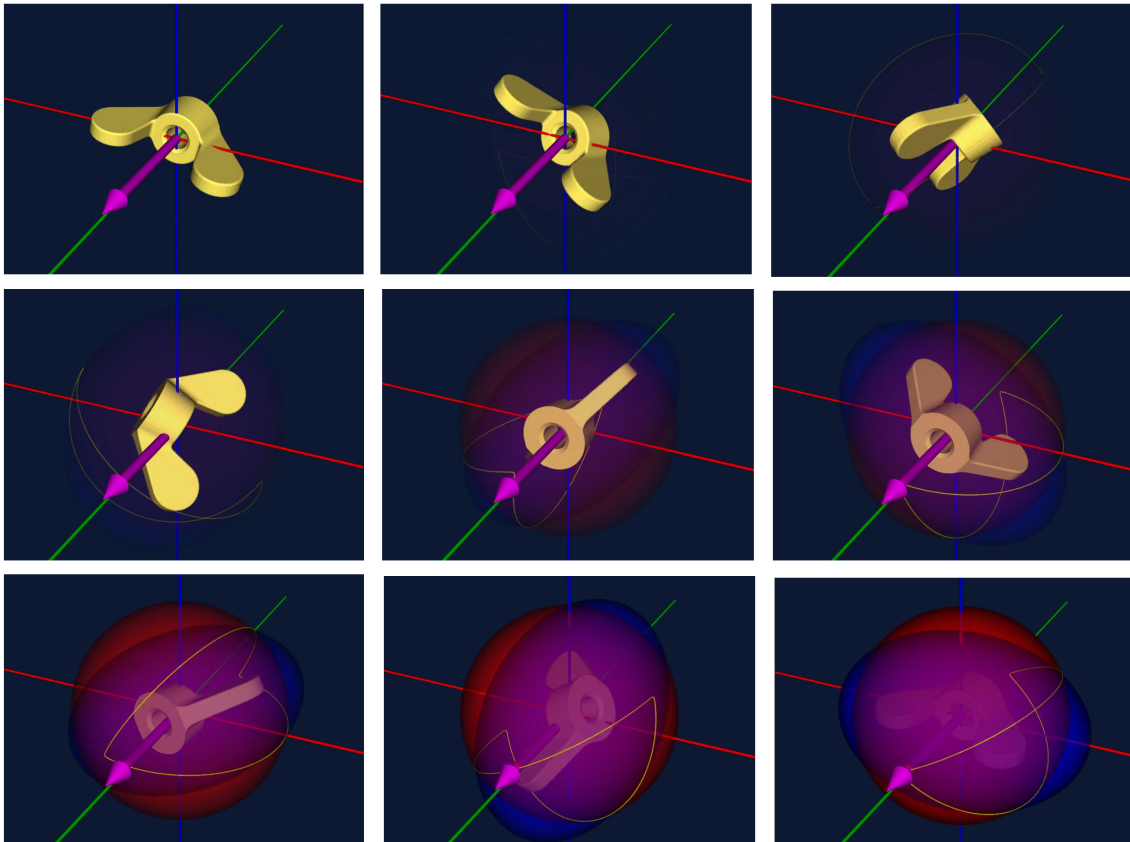


Figure 8: Secuencia de rotación - Inestabilidad del eje intermedio, Dzhanibekov effect

## 6 CONCLUSIONES

Se desarrolla un algoritmo que modeliza la dinámica de un cuerpo rígido, RBD y sobre el mismo se analizan las rotaciones de un cuerpo respecto a sus tres ejes de inercia. Se demuestra que para el caso de un cuerpo *asymmetrical-top* las rotaciones respecto al 1<sup>er</sup> y 3<sup>er</sup> eje de inercia son estables. Sin embargo, las rotaciones respecto al eje de inercia intermedio presentan una perturbación debido a una inestabilidad sobre dicha rotación. A este fenómeno se lo conoce como inestabilidad del eje intermedio, paradoja de la raqueta de tennis o efecto 'Dzhanibekov'. Se obtiene la solución del sistema de ODE's mediante un enfoque geométrico obteniéndose de este modo un camino alternativo al analizar estabilidad de ecuaciones diferenciales.