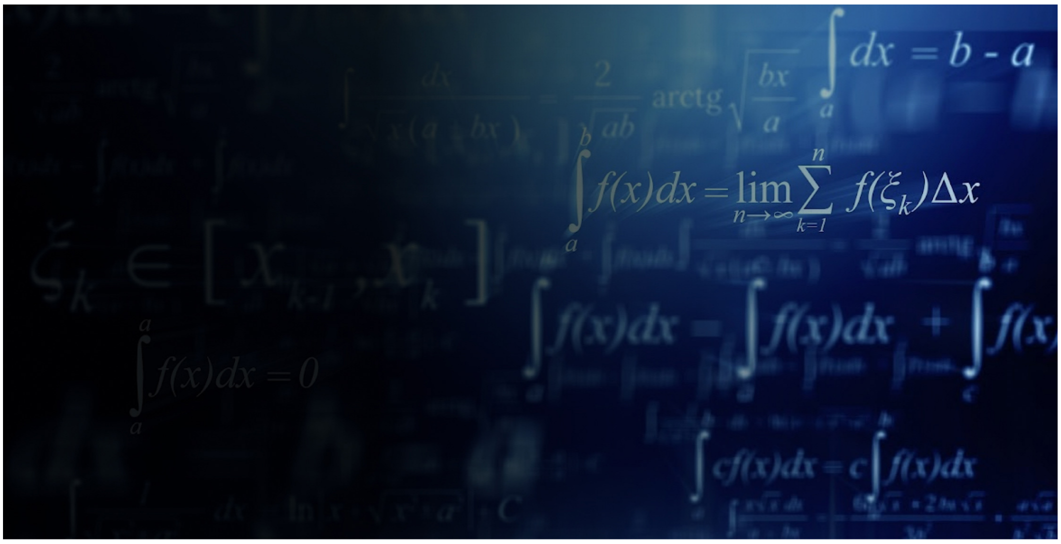


Integrais: Conceitos, propriedades e técnicas de integração

Prof. Jorge Luís Rodrigues Pedreira de Cerqueira

Descrição

Aplicação do conceito de integração de funções reais e do teorema fundamental do cálculo.

Propósito

Determinar a integração indefinida e definida e aplicar tais conceitos na resolução de problemas de integração por meio de algumas técnicas de integração: substituição de variáveis, integração por partes e frações parciais.

Preparação

Antes de iniciar este conteúdo, tenha em mãos papel, caneta e uma calculadora científica, ou use a calculadora de seu smartphone/computador.

Objetivos

Módulo 1

Teorema fundamental do cálculo

Aplicar o conceito da integral indefinida, definida e do teorema fundamental do cálculo.

Módulo 2

Técnica de integração por substituição de variável

Empregar a técnica de integração por substituição de variável na resolução de problemas envolvendo integrais.

Módulo 3

Técnica de integração por partes

Aplicar a técnica de integração por partes na resolução de problemas envolvendo integrais.

Módulo 4

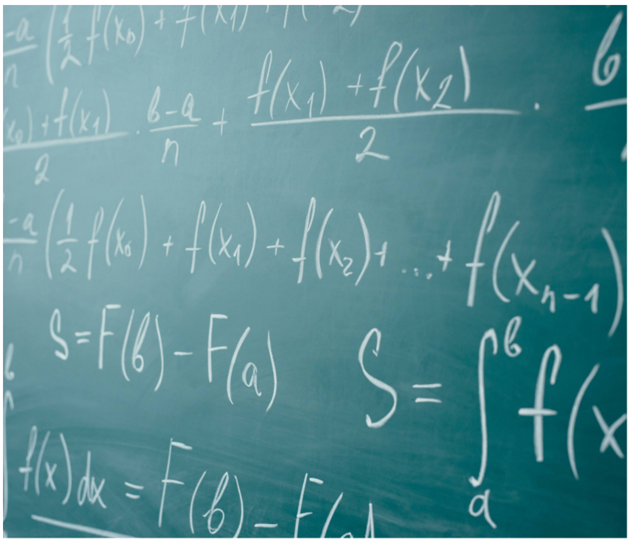
Técnica de integração por frações parciais

Empregar a técnica de integração por frações parciais na resolução de problemas envolvendo integrais.

Introdução

Olá! Antes de começarmos, assista ao video e entenda os principais aspectos que serão abordados ao longo deste conteúdo.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



1 - Teorema fundamental do cálculo

Ao final deste módulo, você será capaz de aplicar o conceito da integral indefinida, definida e do teorema fundamental do cálculo.

Primeiras palavras

A integração de uma função real é uma operação com diversas aplicações práticas. Neste módulo vamos analisar e distinguir as integrações indefinida e definida:

Integração indefinida

Também conhecida como antiderivada, é oriunda da operação inversa da derivação, e tem como resultado uma família de funções.

×

Integração definida

É oriunda de um somatório, denominado Soma de Riemann, e tem como resultado um número real.

Também vamos analisar o teorema fundamental do cálculo, que permitirá a relação entre os dois tipos de integração e o cálculo das integrais definidas de uma forma mais direta.

Integração indefinida

O primeiro conceito para estudar a operação da integração indefinida é o conceito da antiderivada de uma função.

> **Assim, uma função $F(x)$ é denominada de antiderivada ou primitiva de uma função $f(x)$ em um intervalo I se $F'(x) = f(x)$ para todo x do intervalo I. Assim, por exemplo, $F(x) = x^2$ é uma função primitiva, em todo conjunto real, da função $f(x) = 2x$, pois $F'(x) = 2x = f(x)$, para todo x real.**

Mas repare que a função $G(x) = x^2 + k,\ k$ real, também será primitiva de $f(x) = 2x$. Isso ocorre porque a derivada de um número real é zero, assim $G'(x) = F'(x) = f(x)$. A conclusão é que não existe apenas uma antiderivada de uma função, mas uma família de antiderivadas.

Teorema

Se $F(x)$ for antiderivada de $f(x)$ em um intervalo I , então toda função que pertence à família de funções $F(x)+k, k$ real, é uma antiderivada de $f(x)$ em I.

A família de primitivas ou antiderivadas de uma função será denominada de integral indefinida da função e usará uma notação $\int f(x)dx$.

Dessa forma, $\int f(x)dx = F(x)+k, k$ real, em que $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, isto é, $F'(x)=f(x)$.

O termo dentro do símbolo da integral, ou seja, $f(x)$, é denominado **integrando**. O diferencial dx determina em função de que variável a antiderivada é obtida.

Atenção!

O resultado de uma integração indefinida é uma **família de funções**. Para se determinar uma função específica, deve-se obter uma informação adicional, denominada condição inicial, como o valor da função ou de sua derivada em um ponto do seu domínio.

Exemplo 1

Determine $\int \cos x dx$:

Solução

Repare o integrando $f(x)=cosx$. Assim, deve ser obtida uma primitiva de $F(x)$, em outras palavras, qual a função cuja derivada é $cosx$.

Sabemos das tabelas de derivação que $F(x)=senx \rightarrow F'(x)=cosx$. Assim:

$$\int \cos\ x\ d\ x = \operatorname{sen} x + k,\ k\ real$$

Rotacione a tela.

Exemplo 2

Determine a função $g(x)$ da família de funções obtidas por $\int \cos x dx$, sabendo que $g(0)=1$:

Solução

No exemplo anterior, já obtivemos a família de funções:

$$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + k, k \text{ real}$$

Rotacione a tela.

Assim:

$$g(x) = \operatorname{sen} x + k$$

Rotacione a tela.

Logo $g(0)=0+k=k$.

Pelo enunciado, $g(0)=1$, assim $k=1$. Portanto,

$$g(x) = \operatorname{sen} x + 1$$

Rotacione a tela.

Integrais imediatas

Repare que no exemplo tivemos que obter a função cuja derivada era o integrando. Com isso, podemos definir uma tabela de integrais cujos valores são conhecidos. Esta tabela é obtida diretamente pela operação contrária à derivação.

> **Estas integrais serão denominadas de imediatas, pois são obtidas diretamente das fórmulas das antiderivadas.**

A tabela a seguir apresenta as integrais imediatas para as principais funções.

$\int p dx = px + k,\ com\ p,\ k\ real$	$\int x^{\beta} dx = \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1} + k,\ k\ real\ e\ \beta \neq 1$
$\int e^{x} dx = e^{x} + k,\ k\ real$	$\int \frac{1}{x+a} dx = \ln\lvert x+a \rvert + k,\ k\ real$
$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + k,\ k\ real$	$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + k,\ k\ real$
$\int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + k,\ k\ real$	$\int \operatorname{cossec}^2 x dx = -\operatorname{ctg} x + k,\ k\ real$
$\int \sec x \operatorname{tg} x dx = \sec x + k,\ k\ real$	$\int \operatorname{cossec} x \operatorname{ctg} x dx = -\operatorname{cossec} x + k,\ k\ real$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + k,\ k\ real$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x + k,\ k\ real$

Se a integral não for uma integral imediata, terá que trabalhar com o integrando de forma a transformá-lo até se obter uma integral imediata. Essa técnica é conhecida como **método de primitivação** ou **técnica de integração** e será estudada nos próximos módulos.

Propriedades das integrais indefinidas

Outro ponto importante é que as integrais indefinidas apresentam duas propriedades que são oriundas da antiderivação:

a)

$$\int pf(x)dx = p\int f(x)dx, (p \text{ real })$$

Rotacione a tela.

b)

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Rotacione a tela.

Exemplo 3

Determine $\int (3x - 2\cos x)dx$:

Solução

Usando as propriedades:

$$\int (3x - 2\cos x)dx = 3\int xdx - 2\int \cos xdx$$

Rotacione a tela.

Analisando as integrais, verifica-se que são integrais imediatas e conhecemos o resultado.

$$\int xdx = \frac{x^2}{2} + k, k \text{ real}$$

Rotacione a tela.

Repare que a derivada de $\frac{x^2}{2}$ é igual ao integrando

$$\int \cos xdx = \operatorname{sen} x + k, k \text{ real}$$

Rotacione a tela.

Repare que a derivada de $\operatorname{sen} x$ é igual ao integrando

Assim:

$$\int (3x - 2\cos x)dx = 3\int xdx - 2\int \cos xdx = \frac{3}{2}x^2 - 2\operatorname{sen} x + k, k \text{ real}$$

Rotacione a tela.

Uma forma de se verificar se a resposta está correta é derivar a resposta e comparar com o integrando, que deve ser igual. Observe que a derivada de $\frac{3}{2}x^2 - 2\operatorname{sen} x + k$ em função de x, vale $3x - 2\cos x$.

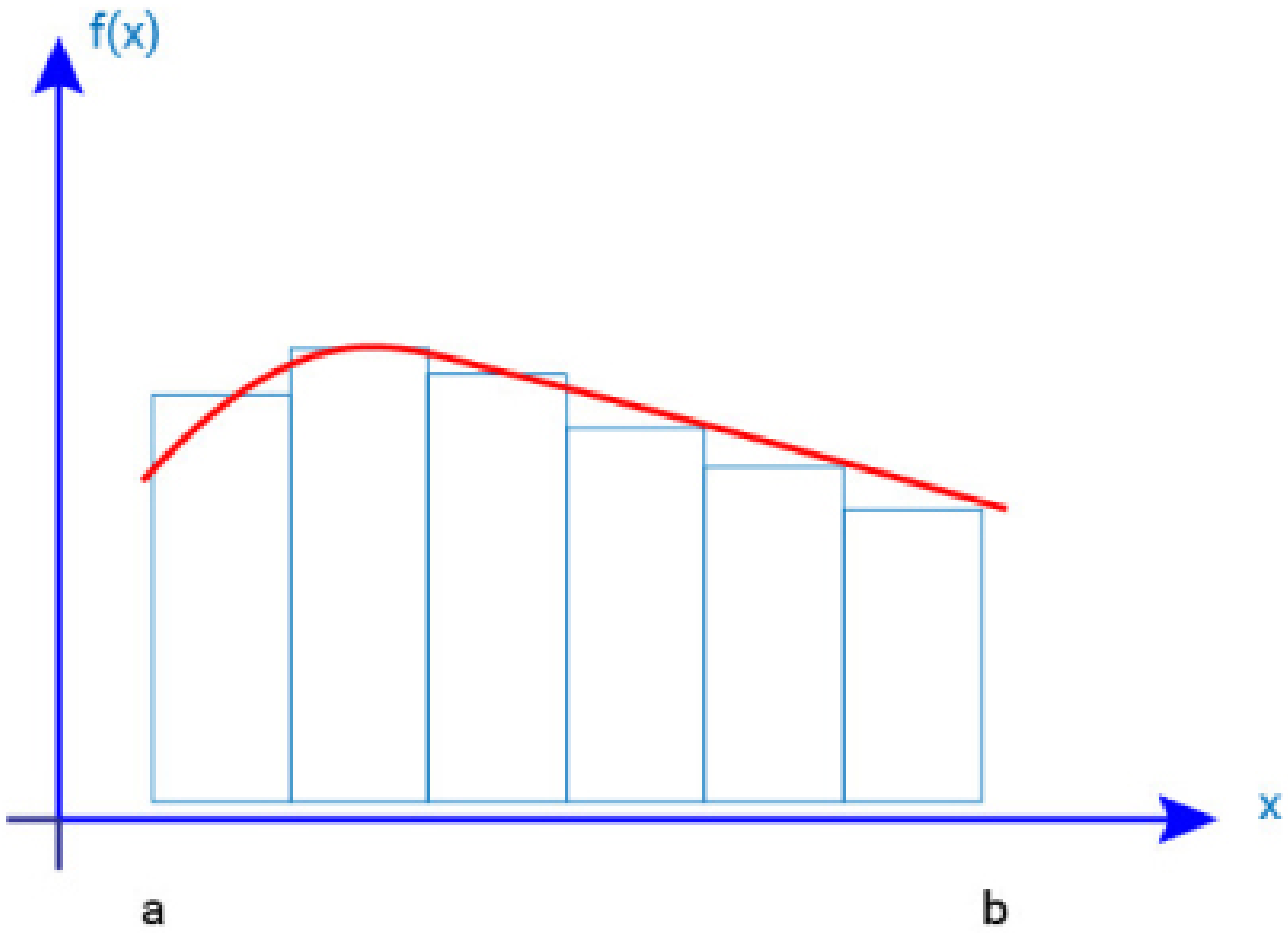
Integração definida

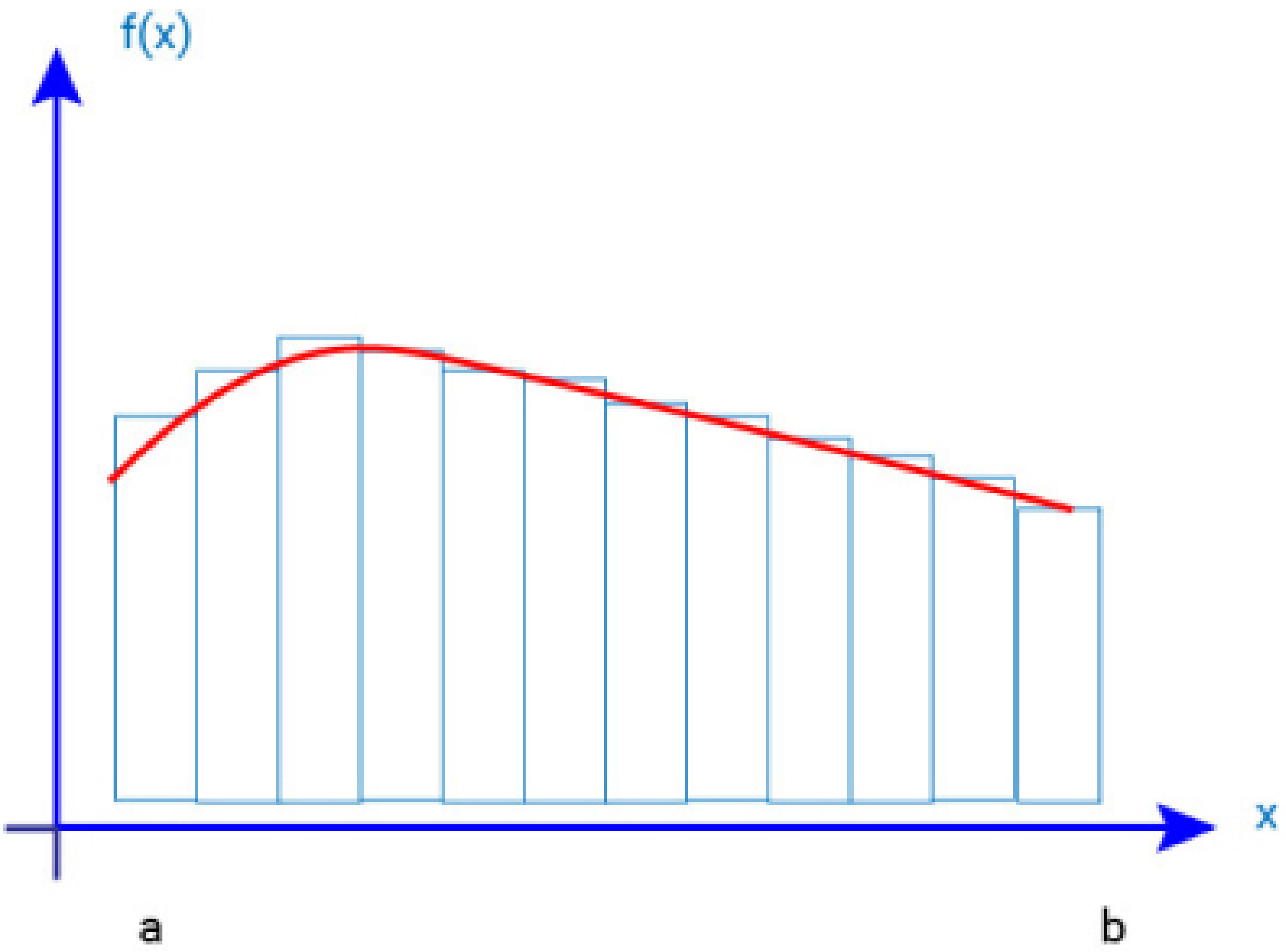
Diferentemente do caso da integração indefinida, que tem como resultado uma família de funções, a integral definida tem como resultado um número real. A integração definida foi criada inicialmente na busca do cálculo de áreas.

> **Um método adotado desde a Grécia antiga se baseava na substituição da região analisada por retângulos, de forma que esse conjunto de retângulos cobrisse a região e, assim, pela soma das áreas dos retângulos, obtinha-se a área da região.**

Veja as figuras a seguir.

Observe que a área entre a função $f(x)$ e o eixo x está sendo coberta por um conjunto de retângulos. Conforme se diminui a largura dos retângulos, o casamento da área e dos retângulos é melhor, e, dessa forma, graças a essa metodologia, o cálculo da área fica mais preciso.





Atenção!

Se trabalhássemos com retângulos com larguras tendendo a zero, otimizaríamos o casamento e o cálculo da área ficaria preciso.

Vamos agora trabalhar este conceito por um somatório que será denominado Soma de Riemann.

Soma de Riemann

Tomemos um intervalo $[a, b]$.

Definimos a partição P de um intervalo $[a, b]$ a um conjunto finito $P = u_0, u_1, \ldots, u_n$ que divide $[a, b]$ em n subintervalos $[u_{i-1}, u_i]$, tal que $a = u_0 < u_1 < \ldots < u_{n-1} < u_n = b$.

A amplitude de cada subintervalo $[u_{i-1}, u_i]$ é dada por $\mathit{\Delta} u_i = u_1 - u_{i-1}$.

Sejam uma função $f(x)$, uma partição P do intervalo $[a, b]$ e p_i um ponto pertencente ao subintervalo $[u_{i-1}, u_i]$, escolhido arbitrariamente, denomina-se **Soma de Riemann** de $f(x)$ em relação à partição P e ao conjunto de pontos p_i a expressão:

$$\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta u_i = f(p_1)\Delta u_1 + f(p_2)\Delta u_2 + \ldots + f(p_n)\Delta u_n$$

Rotacione a tela.

Repare na parcela $f(p_i)\Delta u_i$. Ela pode ser analisada com a área de um retângulo de base Δu_i e altura $f(p_i)$.

Se você retornar às figuras anteriores, poderá observar que a Soma de Riemann pode ser analisada como a soma das áreas dos retângulos apresentados.

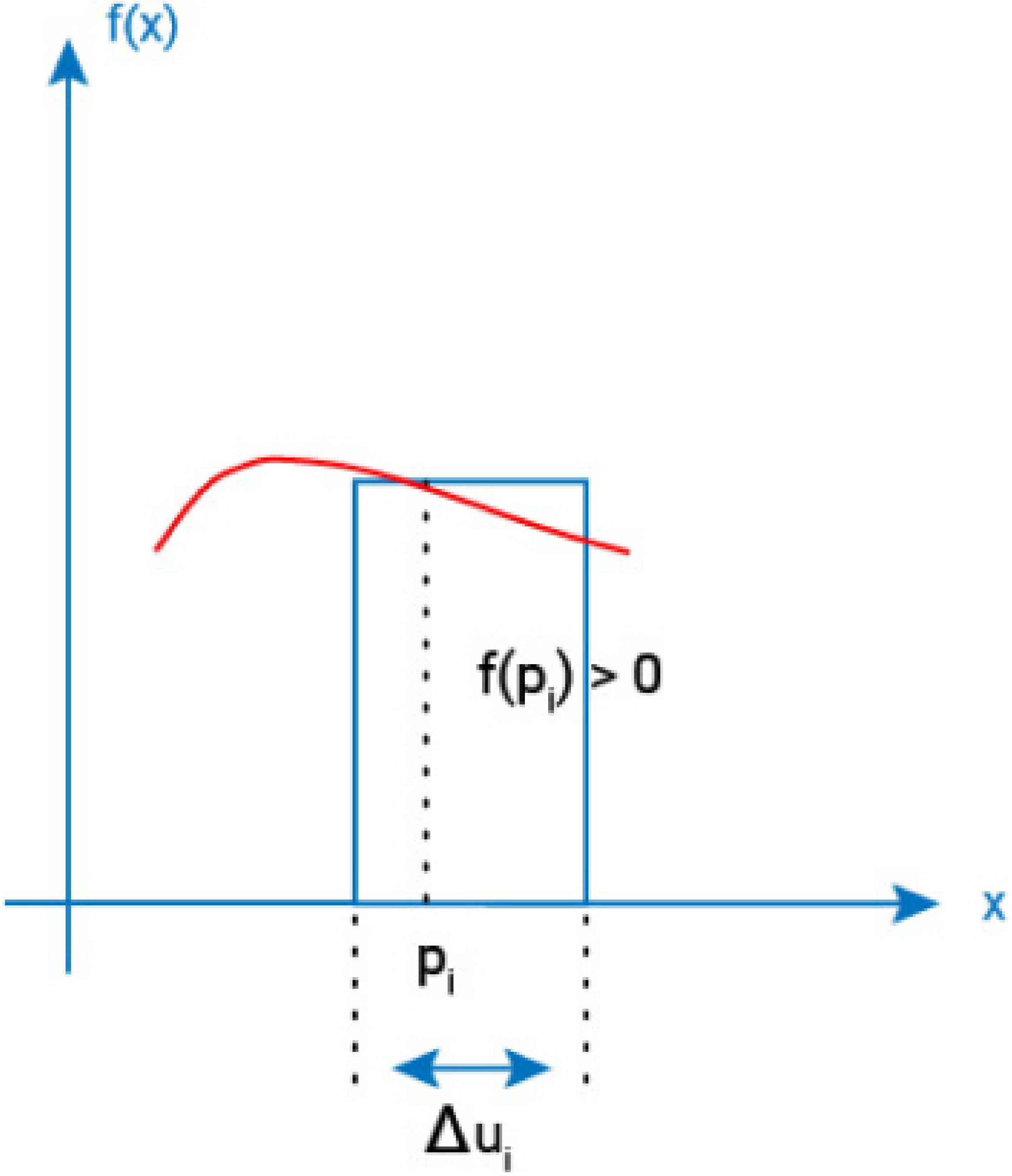
Cada retângulo tem sua base e altura dadas pelo valor da função no ponto p_i dentro do seu subintervalo.

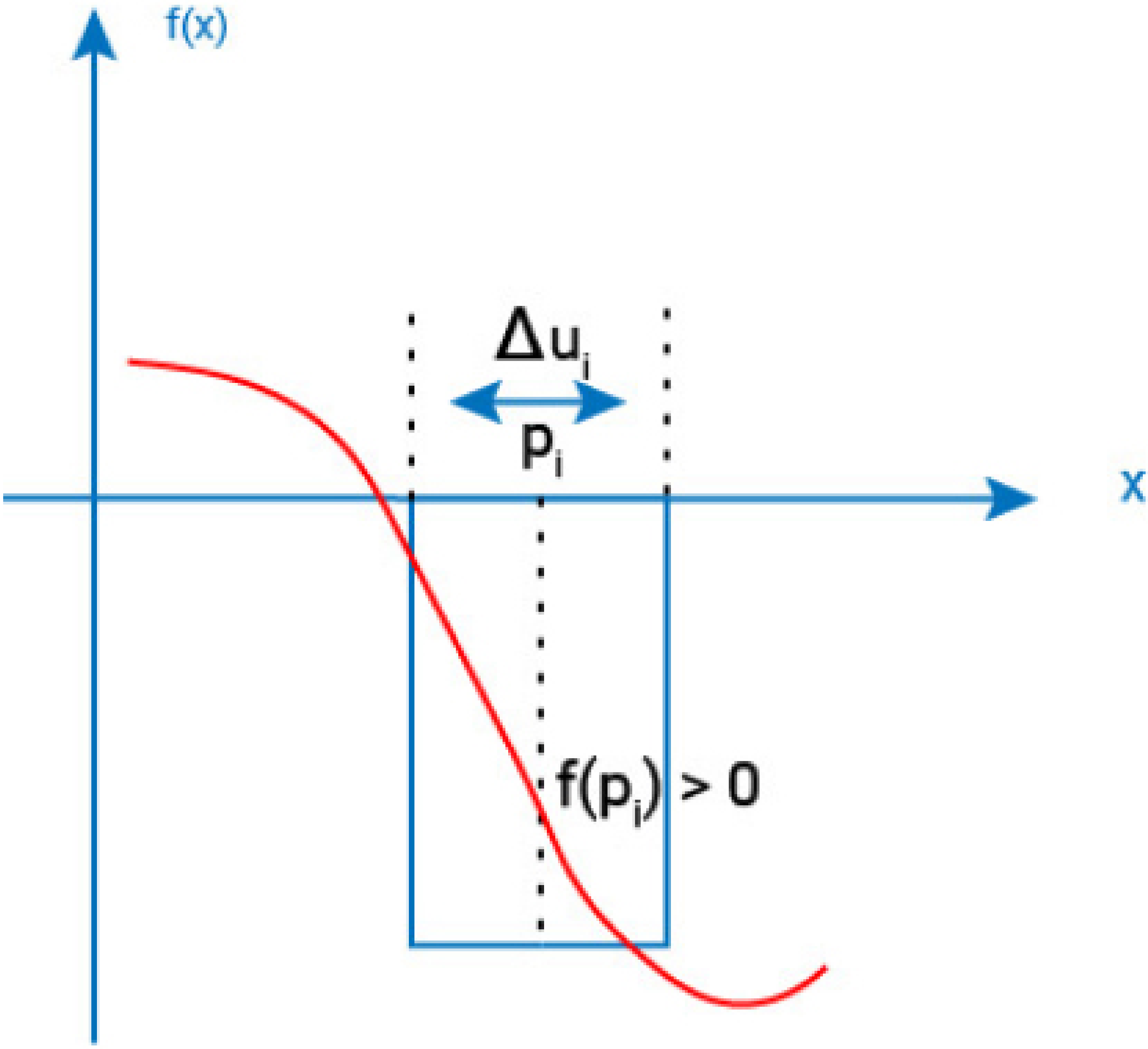
Atenção!

Se a função estiver abaixo do eixo x, o valor de $f(pi)$ será negativo.

Assim, a parcela $f\,(p_i)\Delta u_i$ fica negativa, não podendo corresponder a uma área que é sempre positiva. Nesse caso, ela corresponde a menor área do retângulo.

As figuras a seguir apresentam este conceito desenhando apenas um retângulo.





Se cobrirmos toda a região com todos os retângulos correspondentes a cada partição, podemos dizer que a Soma de Riemann poderia ser analisada como a soma das áreas de todos os retângulos acima do eixo menos a soma das áreas de todos os retângulos abaixo do eixo, sendo uma boa aproximação para o valor da área acima do eixo menos a área abaixo do eixo.

Atenção!

No caso de termos apenas área acima dos eixos, a Soma de Riemann seria uma boa aproximação para área entre a função $f(x)$ e o eixo x, no intervalo do domínio de a até b.

É óbvio que essa aproximação ficará cada vez melhor conforme diminuirmos a base do retângulo, e isso se faz aumentando a partição do intervalo que faz com que os subintervalos fiquem com largura menor. Se a maior amplitude do subintervalo tender para zero, todos os subintervalos terão suas amplitudes tendendo para zero, assim teremos a melhor aproximação.

Chegamos ao momento de determinar a integração definida.

Definição: Seja $f(x)$ uma função contínua definida no intervalo (a, b); seja a partição $P = u_0, u_1, \ldots, u_n$, deste intervalo, que divide $[a, b]$ em n subintervalos $[u_{i-1}, u_i]$, tal que $a = u_0 < u_1 < \ldots < u_{n-1} < u_n = b$; sejam $\Delta u_i = u_1 - u_{i-1}$ a amplitude de cada subintervalo $[u_{i-1}, u_i]$ e $p_1, p_2, \ldots, p_n$, pontos arbitrariamente escolhidos, tais que cada p_i pertencente ao subintervalo $[u_{i-1}, u_i]$,a integral definida de $f(x)$ de a para b será dada por:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta u_{\max}\to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(p_i\right)\Delta u_i$$

Rotacione a tela.

Repare, portanto, que a integral definida é na verdade o limite da Soma de Riemann para quando as larguras dos subintervalos tendem a zero. Se o limite existir e der um número real, a integral existe e tem o valor deste limite.

Ao invés de fazermos no limite $\Delta u_{\max} \to 0$, que corresponde a ter todas as amplitudes tendendo para zero, poderia ter sido usado $n \to \infty$, que corresponderia a ter um número infinito de subintervalos, que na prática significa a mesma coisa.

O teorema determina a integração definida para uma função contínua em (a, b). Não iremos trabalhar com a condição que leva uma função a ser integrável. O que precisamos saber é que, se uma função for contínua em (a, b) ou até mesmo tiver algumas descontinuidades pontuais, a integral definida pode ser obtida da forma apresentada.

Atenção!

A notação da integral definida para o intervalo a e b é bem similar à notação da integral indefinida, apenas se colocando a mais os limites de integração a e b. Por isso ressaltamos que são operações matemáticas bem diferentes.

A obtenção da integral definida pelo limite da Soma de Riemann não é simples. Vamos ver um exemplo de como se faz. De qualquer maneira, vale lembrar que existe um teorema no cálculo – analisado no próximo item – que permitirá calcular a integral definida de forma mais direta.

Exemplo 4

Determine o valor de $\int_0^1 xdx$:

Solução

Necessitamos inicialmente montar uma Soma de Riemann para esta função $f(x) = x$ e este intervalo $[0, 1]$. Depois, precisamos obter o limite desta soma para quando o número de subintervalos tender ao infinito.

$$\int_0^1 xdx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(p_i\right)\Delta u_i,\ onde\ f(x) = x$$

Rotacione a tela.

Repare que o resultado deve ser o mesmo, não importando a partição nem a escolha arbitrária dos pontos pi. Assim, dividiremos os subintervalos de forma igual:

$$\Delta u_i = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

Rotacione a tela.

Com isso, os extremos dos subintervalos seriam:

$$\left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{i}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\right\}$$

Rotacione a tela.

E escolheremos o ponto p_i como o ponto médio de cada subintervalo, de forma que:

$$p_i = \frac{\left(\frac{i}{n} + \frac{(i-1)}{n}\right)}{2} = \frac{i}{n} - \frac{1}{2n}$$

Rotacione a tela.

Substituindo:

$$\int_0^1 x dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n} - \frac{1}{2n}\right)\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n} - \frac{1}{2n}\right)\frac{1}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n} - \frac{1}{2n}\right)\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n^2} - \frac{1}{2n^2}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n^2}\right) - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n}(i) - \frac{1}{2n^2} \sum_{i=1}^{n}(1)$$

$$\sum_{i=1}^{n}(i) = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n+1}{2}n \quad \mathrm{e} \quad \sum_{i=1}^{n}(1) = 1 + 1 + \ldots + 1 = n$$

Rotacione a tela.

Portanto:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n} - \frac{1}{2n}\right)\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\frac{n+1}{2}n - \frac{1}{2n^2} \cdot n = \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

Rotacione a tela.

Substituindo no limite:

$$\int_0^1 x dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n} - \frac{1}{2n}\right)\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Rotacione a tela.

Propriedades

Assim como as integrais indefinidas, a integral definida tem um conjunto de propriedades que podem ser usadas para ajudar no seu cálculo. Todas elas são demonstradas pela definição por meio do limite da Soma de Riemann:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b k[f(x) \pm g(x)]dx = k\int_a^b f(x)dx \pm k\int_a^b g(x)dx, k \text{ real}$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

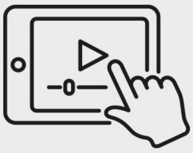
Rotacione a tela.

onde c é um ponto do intervalo (a, b).

Essas propriedades serão usadas em alguns exemplos nos próximos itens.

Teorema fundamental do cálculo

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Até este ponto, tem-se uma integração indefinida – relacionada à derivação, isto é, ao cálculo diferencial – e uma integração definida – associada ao cálculo integral.

O **Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)** tem sua importância, pois permitiu a conexão entre o cálculo diferencial e o integral.

eorema Fundamental do Cálculo (TFC)

O TFC não será demonstrado neste conteúdo, mas pode ser obtido em qualquer uma de nossas referências.

TFC – parte 1

Seja a função $f(x)$ integrável em $[a, x]$, com a real, e seja $F(x)$ sua primitiva neste intervalo, então:

$$g(x) = \int_a^x f(x)dx = F(x) - F(a)$$

Rotacione a tela.

Repare que:

$$g'(x) = F'(x) - F'(a)$$

Rotacione a tela.

Mas $F(a)$ é um número, então $F'(a) = 0$. Assim:

$$g'(x) = F'(x) = f(x)$$

Rotacione a tela.

Note que a primeira parte do TFC nos mostra que, ao derivarmos a integral definida com um dos limites variáveis, o resultado é o próprio integrando.

Exemplo 5

Determine a derivada de $g(x)$ sabendo que:

$$g(x) = \int_1^x \frac{\operatorname{sen}\left(t^2\right)}{\sqrt{1+t^2}} dt$$

Rotacione a tela.

Solução

Não será necessário resolver a integral para depois executar a derivada.

O TFC nos mostra que $g'(x)$ é o próprio integrando, assim:

$$g'(x) = \frac{\operatorname{sen}\left(x^2\right)}{\sqrt{1+x^2}}$$

Rotacione a tela.

Usando a regra da cadeia e as propriedades das integrais, podemos achar variações para este TFC:

$$g(x) = \int_a^x f(x)dx \rightarrow g'(x) = f(x),\ a\ real$$

$$g(x) = \int_a^{u(x)} f(x)dx \rightarrow g'(x) = f(u(x))u'(x),\ a\ real$$

$$g(x) = \int_{v(x)}^{u(x)} f(x)dx \rightarrow g'(x) = f(u(x))u'(x) - f(v(x))v'(x)$$

Rotacione a tela.

Exemplo 6

Determine a derivada de $g(x)$ sabendo que:

$$g(x) = \int_1^{x^2} \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{t})}{\sqrt{1+t^2}} dt$$

Rotacione a tela.

Solução

Não será necessário resolver a integral para depois executar a derivada.

Ainda assim, devemos tomar cuidado, pois o limite de integração não é mais a variável x, e sim uma função de x, isto é, $u(x) = x^2$.

Dessa forma, o TFC e a regra da cadeia nos mostram que $g'(x)$:

$$g'(x) = f(u(x))u'(x) = \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{u(x)})}{\sqrt{1+(u(x))^2}} u'(x) = \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2}\right)}{\sqrt{1+\left(x^2\right)^2}} \left(x^2\right)' = \frac{\operatorname{sen}(|x|)}{\sqrt{1+x^4}} \cdot 2x$$

Rotacione a tela.

A segunda parte é a mais importante para as nossas aplicações, pois nos ajudará a calcular a integral definida por meio das integrais indefinidas. O TFC - parte 2 é obtido substituindo um número real b no lugar do limite x.

TFC – parte 2

Seja a função $f(x)$ integrável em $[a, b]$, com a e b reais, e seja $F(x)$ sua primitiva neste intervalo, então:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Rotacione a tela.

Existem diversas notações para:

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = F(x)|_a^b$$

Rotacione a tela.

Exemplo 7

Determine o valor de $\int_0^1 x dx$:

Solução

O integrando é a função $f(x) = x$, sua primitiva será $F(x) = \frac{x^2}{2}$

Essa primitiva foi obtida pela integral indefinida, vista no primeiro item deste módulo. Pelo TFC:

$$\int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$$

Rotacione a tela.

Compare esta solução com a feita anteriormente e com a determinação da integral definida. Assim, você terá a medida da importância do TFC no cálculo integral.

Exemplo 8

Determine o valor de:

$$\int_0^{\pi/2} \left(3\left|x - \frac{\pi}{4}\right| - \cos x\right) dx$$

Rotacione a tela.

Inicialmente vamos usar as propriedades da integral:

$$\int_0^{\pi/2} 3\left|x - \frac{\pi}{4}\right| dx - \int_0^{\pi/2} \cos x dx$$

Rotacione a tela.

$$\int_0^{\pi/2} \cos x dx = [\operatorname{sen} x]_0^{\pi/2} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}(0) = 1 - 0 = 1$$

Rotacione a tela.

Para esta:

$$\int_0^{\pi/2} 3\left|x-\frac{\pi}{4}\right| dx = 3\int_0^{\pi/2}\left|x-\frac{\pi}{4}\right| dx$$

Rotacione a tela.

Repare que:

$$\left|x-\frac{\pi}{4}\right| = \begin{cases} \frac{\pi}{4}-x, x \leq \frac{\pi}{4} \\ \\ x-\frac{\pi}{4}, x \geq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Rotacione a tela.

Portanto são funções diferentes para cada intervalo. Logo, não podemos integrar diretamente entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ e devemos usar as propriedades da integral definida para determinar os intervalos em que a função tem a mesma equação em todos os pontos.

$$\int_0^{\pi/2}\left|x-\frac{\pi}{4}\right| dx = \int_0^{\pi/4}\left|x-\frac{\pi}{4}\right| dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2}\left|x-\frac{\pi}{4}\right| dx$$

$$\int_0^{\pi/2}\left|x-\frac{\pi}{4}\right| dx = \int_0^{\pi/4}\frac{\pi}{4}-x dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} x-\frac{\pi}{4} dx = \left[\frac{\pi}{4}x-\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[\frac{x^2}{2}-\frac{\pi}{4}x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[\left(\frac{\pi}{4}\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\right)-0\right] + \left[\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-\frac{\pi}{4}\frac{\pi}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{\pi}{4}\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi^2}{16} = \pi^2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right) = \frac{3\pi^2}{16}$$

Rotacione a tela.

Portanto, integral:

$$\int_0^{\pi/2} 3\left|x-\frac{\pi}{4}\right| dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx = 3\cdot\frac{3\pi^2}{16}-1 = \frac{9\pi^2}{16}-1$$

Rotacione a tela.

Mão na massa

Questão 1

Determine a integral

$$\int(3\sec x \operatorname{tg} x - 2\cos x) dx.$$

A $2cossecx + 3cosx + k, kreal$

B $3secx - 2senx + k, kreal$

C $3sec2x + 2cosx + k, kreal$

D $3tgx + 2senx + k, kreal$

E $3cosecx - 2senx + k, kreal$

Parabéns! A alternativa B está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EUsando%20as%20propriedades%20da%20integral%20indefinida%3A%3C%2Fp%3E%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%2
paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%5Cint(3%20%5Csec%20x%20%5Coperatorname%7
2%20%5Ccos%20x)%20d%20x%3D3%20%5Cint(%5Csec%20x%20%5Coperatorname%7Btg%7D%20x)%20d%20x-
2%20%5Cint%20%5Ccos%20x%20d%20x%24%24%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%
paragraph%20u-text--
medium'%3EUsando%20a%20tabela%20de%20integrais%20imediatas%3A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%2
paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3D3%20%5Csec%20x-
2%20%5Coperatorname%7Bsen%7D%20x%2Bk%2C%20k%20%5Ctext%20%7B%20real%20%7D%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%

Questão 2

Determine a função $g(\sqrt{3})$, sabendo que $g(x)$ faz parte da família de funções definidas por: $\int \left(\frac{1}{u} + \frac{2}{1+u^2}\right) du$ e $g(1) = \pi$.

A $\frac{1}{2} \ln 6 + \frac{7\pi}{3}$

B $\ln 3 + \frac{\pi}{6}$

C $\ln 3 - \frac{\pi}{6}$

D $\frac{1}{2} \ln 3 + \frac{7\pi}{6}$

E $\left|\frac{1}{4}\ln 3+\frac{\pi}{6}\right|$

Parabéns! A alternativa D está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EIntegral%20indefinida.%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%3Cyduqs-video-
player%20src%3D%22https%3A%2F%2Fplay.yduqs.videolib.live%2Fhome%3Ftoken%3Dc13a5f1d7ce146b8b68b11d5ec603f37%22%20videoId%3D%22
VID2%22%3E%0A%20%20%20%20%3C%2Fyduqs-video-player%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20

Questão 3

Seja $h(x)=\int_3^x \frac{3\,\ln x}{\sqrt{2+2x^2}}dx$. Determine o valor de $h'(2)$.

A $\frac{3\sqrt{10}}{10}\ln 2$

B $\frac{\sqrt{10}}{10}\ln 2-3$

C $3+\frac{\sqrt{10}}{10}\ln 2$

D $\frac{\sqrt{10}}{10}\ln 3$

E $3-\frac{3\sqrt{10}}{10}\ln 2$

Parabéns! A alternativa A está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EUsando%20o%20TFM%2C%20se%3A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%0A
paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20h(x)%3D%5Cint_%7B3%7D%5E%7Bx%7D%20%5Cfra
paragraph%20u-text--
medium'%3EPortanto%3A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20h%5E%7B%5Cprime%7D(2)%3D%5Cfrac%7B3%20%5

Questão 4

Determine o valor de $\int_1^2\left(3x^2-4x^{-1}+\sqrt{x}\right)dx$.

A $9+\ln 2+\frac{1}{3}(2\sqrt{2}+1)$

B $7-3\ln 2+\frac{2}{3}(\sqrt{2}+1)$

C $7-4\ln 2+\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$

D $9+4\ln 2+\frac{2}{3}(1-2\sqrt{2})$

E $\left|7+4\ln 2+\frac{2}{3}(1+2\sqrt{2})\right|$

Parabéns! A alternativa C está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EUsando%20as%20propriedades%20da%20integral%20definida%3A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%2C
paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%5Cbegin%7Bgathered%7D%0A%5Cint_%7B1%7D%5E%7B2%7D%5Cleft(3%20x%5E%7B2%7D-4%20x%5E%7B-
1%7D%2B%5Csqrt%7Bx%7D%5Cright)%20d%20x%3D3%20%5Cint_%7B1%7D%5E%7B2%7D%20x%5E%7B2%7D%20d%20x-
4%20%5Cint_%7B1%7D%5E%7B2%7D%20%5Cfrac%7B1%7D%7Bx%7D%20d%20x%2B%5Cint_%7B1%7D%5E%7B2%7D%20%5Csqrt%7Bx%7D%20d%20
4%20x%5E%7B-
1%7D%2B%5Csqrt%7Bx%7D%5Cright)%20d%20x%3D3%5Cleft%5B%5Cfrac%7Bx%5E%7B3%7D%7D%7B3%7D%5Cright%5D_%7B1%7D%5E%7B2%7D-
4%5B%5Cln%20%7Cx%7C%5D_%7B1%7D%5E%7B2%7D%2B%5Cleft%5B%5Cfrac%7B2%7D%7B3%7D%20x%5E%7B%5Cfrac%7B3%7D%7B2%7D%7D%5
4%20x%5E%7B-1%7D%2B%5Csqrt%7Bx%7D%5Cright)%20d%20x%3D3%5Cleft(%5Cfrac%7B2%5E%7B3%7D%7D%7B3%7D-
%5Cfrac%7B1%5E%7B3%7D%7D%7B3%7D%5Cright)-4(%5Cln%202-
%5Cln%201)%2B%5Cfrac%7B2%7D%7B3%7D%5Cleft(2%5E%7B%5Cfrac%7B3%7D%7B2%7D%7D-
1%5E%7B%5Cfrac%7B3%7D%7B2%7D%7D%5Cright)%3D%20%5C%5C%5C%5C%0A%3D7-
4%20%5Cln%202%2B%5Cfrac%7B2%7D%7B3%7D(2%20%5Csqrt%7B2%7D-
1)%20%5Cend%7Bgathered%7D%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20

Questão 5

Determine o valor de $\int_0^2 \left|x^2+x-2\right| dx$.

A 4

B 3

C 2

D 1

E 0

Parabéns! A alternativa B está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-paragraph'%3EIntegral%20definida.%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%3Cyduqs-video-player%20src%3D%22https%3A%2F%2Fplay.yduqs.videolib.live%2Fhome%3Ftoken%3D2e175eae77ba405488af4dcf601e89ee%22%20videoId%3D%22
VID3%22%3E%0A%20%20%20%20%3C%2Fyduqs-video-player%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20

Questão 6

Determine o intervalo em que a função $h(x)=\int_0^{x^2}\frac{2x+4}{(1+x)}dx.$ é estritamente crescente.

A $x<0$

B $x>0$

C $-1<x<1$

D $x<-3$

E $x>+3$

Parabéns! A alternativa B está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-paragraph'%3ETeorema%20Fundamental%20do%20C%C3%A1lculo.%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cyduqs-video-player%20src%3D%22https%3A%2F%2Fplay.yduqs.videolib.live%2Fhome%3Ftoken%3D1e60a1c97480419ead60f478d4bf0c0f%22%20videoId%3D%22
VID3%22%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3C%2Fyduqs-video-player%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20

Teoria na prática

A área entre a função $f(x)=2e^x+3x^2$, o eixo x, para $0\leq x\leq 2$ pode ser obtida pela integral definida de $f(x)$ entre 0 e $2.$ Obtenha essa área.

Mostrar solução

Falta pouco para atingir seus objetivos.

Vamos praticar alguns conceitos?

Questão 1

Determine a expressão de $g(x)$, sabendo que $g(0) = (0)$ e $g(x)$ é da família da integral $\int \left(2e^x + 5\operatorname{sen} x - \frac{4}{x+1}\right) dx$.

A $2e^x - 5\cos x - 4\ln|x+1|$

B $e^x + 5\operatorname{sen} x - \ln|x-1| + 2$

C $2e^x - 5\cos x - 4\ln|x+1| + 3$

D $2e^x + 5\cos x - 4\ln|x+1| + 4$

E $e^x - 5\cos x - 5\ln|x+1| + 1$

Parabéns! A alternativa C está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EUsando%20a%20propriedade%20da%20integra%C3%A7%C3%A3o%20indefinida%3A%3C%2Fp%3E%20%20%20%20%20%20%20%20%2
paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%5Cint%5Cleft(2%20e%5E%7Bx%7D%2B5%20%5Co
%5Cfrac%7B4%7D%7Bx%2B1%7D%5Cright)%20d%20x%3D2%20%5Cint%20e%5E%7Bx%7D%20d%20x%2B5%20%5Cint%20%5Coperatorname%7Bsen
4%20%5Cint%20%5Cfrac%7B1%7D%7Bx%2B1%7D%20d%20x%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%24%24
paragraph%20u-text--
medium'%3EUsando%20a%20tabela%20de%20integrais%20imediatas%3A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%2
paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20g(x)%3D%5Cint%5Cleft(2%20e%5E%7Bx%7D%2B5%
%5Cfrac%7B4%7D%7Bx%2B1%7D%5Cright)%20d%20x%3D2%20e%5E%7Bx%7D-5%20%5Ccos%20x-
4%20%5Cln%20%7Cx%2B1%7C%2Bk%2C%20k%20%5Ctext%20%7B%20real%20%7D%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%2
paragraph%20u-text--
medium'%3EMas%3A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20g%20(%200%20)%3D%200%20%3D2%20e%20%5E%
5%20%5Ccos%200-4%20%5Cln%201%2B%20k%20%3D2-
5%2B%20k%20%3D%200%20%5Crightarrow%20k%20%3D%203%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%24%2
paragraph%20u-text--
medium'%3EAssim%3A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20g%20(%20x%20)%3D2%20e%20%5E%7B%20x%20%

5%20%5Ccos%20x-
4%20%5Cln%20%7C%20x%20%2B1%7C%2B3%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%24%24%3C%2Fp%3E%0

Questão 2

Determine o valor de: $\int_1^4 \left(\frac{32}{x^3}+\frac{3}{5}x^2-\frac{1}{x+4}\right)dx.$

A $78-\ln\left(\frac{8}{5}\right)$

B $86+\ln\left(\frac{1}{5}\right)$

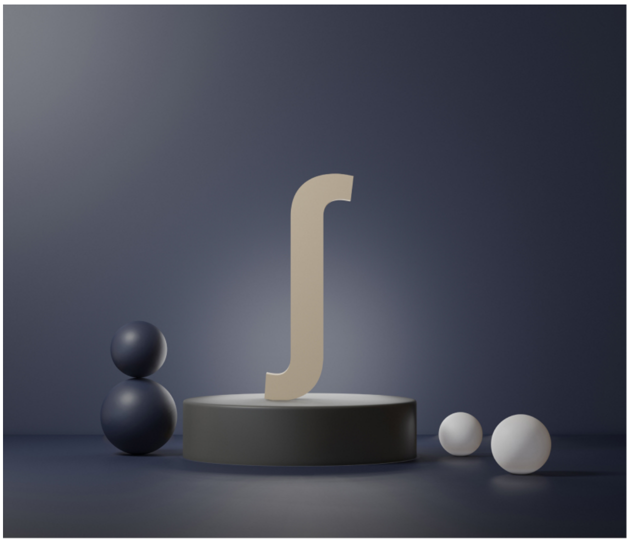
C $36+\ln\left(\frac{3}{8}\right)$

D $66-\ln\left(\frac{3}{5}\right)$

E $56-\ln\left(\frac{2}{5}\right)$

Parabéns! A alternativa A está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%5Cint_%7B1%7D%5E%7B4%7D%5Cleft(%5Cfrac%7B32%7D%7Bx%5E%7B3%7D%7D%2B%5Cfrac%7B3%7D%7B5%7D%20x%5E%
%5Cfrac%7B7%7D%7Bx%2B4%7D%5Cright)%20d%20x%3D32%20%5Cint_%7B1%7D%5E%7B4%7D%20x%5E%7B-
3%7D%20d%20x%2B%5Cfrac%7B3%7D%7B5%7D%20%5Cint_%7B1%7D%5E%7B4%7D%20x%5E%7B2%7D%20d%20x-
%5Cint_%7B1%7D%5E%7B4%7D%20%5Cfrac%7B1%7D%7Bx%2B4%7D%20d%20x%0A%24%24%20%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-
paragraph%20u-text--
medium'%3EUsando%20o%20TFC%20para%20se%20resolver%20as%20integrais%20definidas%20em%20fun%C3%A7%C3%A3o%20das%20indefinida
paragraph%20u-text--medium%20c-table'%3E%0A%24%24%0A%5Cbegin%7Bgathered%7D%0A%5Cint_1%5E4%20x%5E%7B-
3%7D%20d%20x%3D%5Cleft%5B%5Cfrac%7Bx%5E%7B-3%2B1%7D%7D%7B-3%2B1%7D%5Cright%5D_1%5E4%3D-
%5Cfrac%7B1%7D%7B2%7D%5Cleft%5Bx%5E%7B-2%7D%5Cright%5D_1%5E4%3D-
%5Cfrac%7B1%7D%7B2%7D%5Cleft(%5Cfrac%7B1%7D%7B4%5E2%7D-
%5Cfrac%7B1%7D%7B1%5E2%7D%5Cright)%3D%5Cfrac%7B15%7D%7B32%7D%20%5C%5C%5C%5C%0A%5Cint_1%5E4%20x%5E2%20d%20x%3D%5C
1%5E3%5Cright)%3D%5Cfrac%7B63%7D%7B3%7D%3D21%20%5C%5C%5C%5C%0A%5Cint_1%5E4%20%5Cfrac%7B1%7D%7Bx%2B4%7D%20d%20x%3
%5Cln%205%0A%5Cend%7Bgathered%7D%0A%24%24%0A%0A%0A%3C%2Fp%3E%0A%0A%0A%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-text--
medium'%3EAssim%3A%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%5Cint_%7B1%7D%5E%7B4%7D%5Cleft(%5Cfrac%7B32%7D%7Bx%5E%7B3%7D%7D%2B2%20x%5E%7B2%7D-
%5Cfrac%7B7%7D%7Bx%2B4%7D%5Cright)%20d%20x%3D32%20%5Ccdot%20%5Cfrac%7B15%7D%7B32%7D%2B3.21-(%5Cln%208-
%5Cln%205)%3D78-
%5Cln%20%5Cleft(%5Cfrac%7B8%7D%7B5%7D%5Cright)%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%2



2 - Técnica de integração por substituição de variável

Ao final deste módulo, você será capaz de empregar a técnica de integração por substituição de variável na resolução de problemas envolvendo integrais.

Técnicas de integração

Compreendendo a técnica de integração por substituição de variável

Veja a técnica de integração por substituição de variável na resolução de problemas com integrais.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.

A resolução de integrais definidas ou indefinidas que não são integrais imediatas requer uma transformação de seu integrando de forma a convertê-lo em uma função cuja função primitiva seja conhecida, o que possibilita solucionar a integral.

Essas técnicas são conhecidas como técnicas de integração ou de primitivação. Aqui analisaremos as três de maior abrangência, entre elas a técnica de integração por substituição de variável, que usa uma filosofia de alterar a variável do integrando de forma a transformá-la em uma função de integral conhecida.

A técnica de integração é um conjunto de ferramentas que permite solucionar integrais cujo integrando não são funções com primitivas conhecidas. Em outras palavras, são técnicas que permitem transformar a integral em uma integral imediata, de solução conhecida.

Atenção!

A mesma integral pode ser solucionada por várias técnicas diferentes, bem como, em certas oportunidades, existe a necessidade de se usar mais de uma técnica, uma após a outra, para solucionar a integral.

Imagine a técnica de integração como uma ferramenta, assim cada uma se aplica melhor a determinada situação. O conhecimento de que técnica deve ser utilizada se adquire com a experiência obtida na resolução de grande número de integrais.

Na literatura que consta em nossas referências, existe uma gama de técnicas disponíveis. Neste conteúdo veremos as três de maior importância:

Substituição de variável

Integração por partes

Integração por frações parciais

Na técnica de substituição de variável, busca-se alterar a variável utilizada na integral, de forma a transformar o integrando em uma função cuja primitiva é conhecida.

Esta técnica de alterar a variável é bastante ampla, podendo apresentar várias versões, cada uma com um conjunto de integrais que podem ser aplicadas. Existem métodos que envolvem produtos de seno e cosseno, produtos de secante e tangente, supressão de raízes quadradas etc.

Integração por substituição de variável

Seja uma integral $\int f(x)dx$, cuja variável de integração é a variável x, mas que não se conheça a primitiva de f(x), devendo, portanto, empregar-se um método para o cálculo da integral.

A metodologia buscada por este método visa encontrar uma função $g(u) = x$ ou uma variável $u = g(x)$ de forma a transformar a integral em uma nova integral na variável u que seja imediata.

> **Ao realizarmos uma substituição de variável na integral, devemos usar a regra da cadeia para a substituição do diferencial.**

Seja a função $f(x)$ contínua, portanto, integrável, no intervalo I; seja a função $g(u)$ com imagem no conjunto I, se utilizarmos a mudança de variável pela função $x = g(u)$, logo $dx = g'(u)du$, teremos:

$$\int f(x)dx = \int f(g(u))g'(u)du = \int h(u)du$$

Rotacione a tela.

Assim a integral indefinida em x foi transformada em uma integral na variável u. Para o caso da integral definida deve-se lembrar de alterar também os limites de integração.

Assim:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(u))g'(u)du = \int_c^d h(u)du$$

Rotacione a tela.

Em que $g(c) = a$ e $g(d) = b$.

Exemplo 1

Determine $\int \sqrt{4x+7}dx$:

Solução

Observe que não se conhece a integral imediata para este integrando. Mas, aplicando:

$$u=4x+7 \rightarrow x=\frac{1}{4}u-\frac{7}{4}=g(u)$$

Rotacione a tela.

Temos:

$$dx=g'(u)du=\frac{1}{4}du$$

Rotacione a tela.

Assim:

$$\sqrt{4x+7}dx=\sqrt{u}\frac{1}{4}du$$

Rotacione a tela.

Portanto:

$$\int \sqrt{4x+7}dx=\int \frac{1}{4}\sqrt{u}du=\frac{1}{4}\int \sqrt{u}du$$

Rotacione a tela.

Esta agora é uma integral imediata, logo:

$$\int \sqrt{4x+7}dx=\frac{1}{4}\left(\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right)=\frac{1}{6}u^{\frac{3}{2}}+k, k \text{ real}$$

Rotacione a tela.

Retornando para a variável inicial:

$$\int \sqrt{4x+7}dx=\frac{1}{6}\sqrt{(4x+7)^3}+k, k \text{ real}$$

Rotacione a tela.

Exemplo 2

Determine $\int_1^3 \sqrt{4x+7}dx$:

Solução

Os primeiros passos foram realizados no exemplo anterior. Necessitamos apenas obter os novos limites:

$$x=\frac{1}{4}u-\frac{7}{4}=g(u) \rightarrow \begin{cases} x=1 \rightarrow u=4x+7=11 \\ x=3 \rightarrow u=4x+7=19 \end{cases}$$

Rotacione a tela.

Assim:

$$\int_1^3 \sqrt{4x+7}dx = \frac{1}{4}\int_{11}^{19} \sqrt{u}du = \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_{11}^{19} = \frac{1}{6}(19\sqrt{19} - 11\sqrt{11})$$

Rotacione a tela.

Podemos usar também uma substituição do tipo $u = g(x)$. **Considere a integral $\int f(x)dx$ da qual não se conhece a primitiva de $f(x)$.**

Se mudarmos a variável de forma que $u = g(x)$. Assim, deve-se tentar obter a função $g(x) = u$ de tal forma a se transformar a integral anterior:

$$\int f(x)dx = \int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + k = F(g(x)) + k, k \text{ real}$$

Rotacione a tela.

Para o caso da integral definida, usa-se o mesmo raciocínio, apenas com o passo intermediário da transformação dos limites de integração.

Exemplo 3

Determine o valor da integral $\int 3x^2 \cos\left(x^3\right)dx$:

Solução

Observe que não se conhece a primitiva do integrando, mas fazendo:

$$u = x^3 \rightarrow du = 3x^2dx$$

Rotacione a tela.

Portanto:

$$\int 3x^2 \cos\left(x^3\right)dx = \int \cos(u)du = \operatorname{sen} u + k, k \text{ real}$$

Rotacione a tela.

Retornando à variável inicial:

$$\int 3x^2 \cos\left(x^3\right)dx = \operatorname{sen}\left(x^3\right) + k, k \text{ real}$$

Rotacione a tela.

Observe que, para verificar se está correta a resposta, pode-se derivar a resposta e comparar com o integrando analisado.

Exemplo 4

Determine o valor da integral:

$$\int_0^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}} 3x^2 \cos\left(x^3\right)dx$$

Rotacione a tela.

Solução

Os passos iniciais já foram dados, transformando os limites de integração:

$$u=x^3 \rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow u=0 \\ x=\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}} \rightarrow u=\frac{\pi}{2} \end{cases} \rightarrow \int_0^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}} 3x^2 \cos\left(x^3\right) dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u) du=[\operatorname{sen} u]_0^{\frac{\pi}{2}}=\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}-\operatorname{sen} 0=1$$

Rotacione a tela.

Como já comentado, existem métodos específicos para integrandos particulares que podem ser encontrados nas referências deste conteúdo. Para exemplificar, vamos apenas mencionar um caso.

Seja $f(x)=\mathrm{C} \operatorname{sen}^m(x) \cos^n(x)$ com C real e m e n inteiros positivos. Repare que $f(x)$ é um produto de senos e cossenos do mesmo arco. Para o caso que se tenha pelo m ou n ímpares, podemos usar o seguinte método:

Se m for ímpar

Fazer:

$$u=\cos(x) \rightarrow du=-\operatorname{sen} x dx$$

Usar a relação fundamental e substituir:

$$\operatorname{sen}^2 x=1-\cos^2 x=1-u^2$$

Assim, transformaremos o integrando em uma função polinomial cujas primitivas conhecemos.

Se n for ímpar

Fazer:

$$u=\operatorname{sen}(x) \rightarrow du=\cos x dx$$

Usar a relação fundamental e substituir:

$$\cos^2 x=1-\operatorname{sen}^2 x=1-u^2$$

Assim, transformaremos o integrando em uma função polinomial cujas primitivas conhecemos.

Se m e n forem ímpares

Escolher um dos casos anteriores.

Este método só não pode ser usado quando se tem m e n pares.

Exemplo 5

Determine a integral:

$$\int \operatorname{sen}^3(2x)\cos^3(2x)dx$$

Rotacione a tela.

Verifique que é um produto de senos e cossenos do mesmo arco. Como tanto o número que eleva o seno quanto o número que eleva o cosseno são ímpares, temos liberdade de escolher $u = \cos 2x$ ou $u = \operatorname{sen} 2x$. Se apenas um dos expoentes fosse ímpar, a variável u deveria ser, obrigatoriamente, igual à função trigonométrica elevada ao expoente par.

Pelo método de substituição de variável para:

$$u = \operatorname{sen} 2x \rightarrow du = 2\cos 2x dx$$

Rotacione a tela.

Vamos lembrar também que:

$$\operatorname{sen}^2(2x) + \cos^2(2x) = 1 \rightarrow \cos^2 2x = 1 - \operatorname{sen}^2 2x$$

Rotacione a tela.

Então:

$$\operatorname{sen}^3(2x)\cos^3(2x)dx = \operatorname{sen}^3(2x)\cos^2(2x)\cos(2x)dx = \operatorname{sen}^3(2x)\left(1 - \operatorname{sen}^2(2x)\right)^2\cos(2x)dx$$

$$= u^3\left(1-u^2\right)^2\frac{1}{2}du$$

$$\int \operatorname{sen}^3(2x)\cos^3(2x)dx = \frac{1}{2}\int u^3\left(1-u^2\right)^2 du$$

Rotacione a tela.

Repare que agora se tem uma função polinomial cuja primitiva conhecemos:

$$\frac{1}{2}\int u^3\left(1-u^2\right)^2 du = \frac{1}{2}\int\left(u^3 - 2u^5 + u^7\right)du = \frac{u^4}{8} - \frac{u^6}{6} + \frac{u^8}{16} + k, k \text{ real}$$

Rotacione a tela.

Retornando à variável inicial:

$$\int \operatorname{sen}^3(2x)\cos^3(2x)dx = \frac{\operatorname{sen}^4(2x)}{8} - \frac{\operatorname{sen}^6(2x)}{6} + \frac{\operatorname{sen}^8(2x)}{16} + k, k \text{ real}$$

Rotacione a tela.

Mão na massa

Questão 1

Determine a integral $\int \frac{3}{\sqrt[3]{4x-5}} dx$.

A $\frac{9}{8} \sqrt[3]{(4x-5)^2} + k, \text{ k real}$

B $\frac{9}{8} \frac{1}{\sqrt[3]{(4x-5)^2}} + k, k \text{ real}$

C $\frac{9}{8} \sqrt{4x-5} + k, k \text{ real}$

D $\frac{9}{4} \frac{1}{\sqrt{4x-5}} + k, \text{ k real}$

E $\frac{3}{8} \frac{1}{\sqrt{4x-5}} + k, \text{ k real}$

Parabéns! A alternativa A está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EUsando%20o%20m%C3%A9todo%20de%20substitui%C3%A7%C3%A3o%20de%20vari%C3%A1vel%3A%3C%2Fp%3E%20%20%20%20
paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20u%20%3D%204%20x%20-
5%20%5Crightarrow%20d%20u%20%3D%204%20d%20x%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%24%24%3
paragraph%20u-text--
medium'%3EAssim%3A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph%20u-text--medium%20c-table'%3E%24%24%5Cint%20%5Cfrac%7B3%7D%7B%5Csqrt%5B3%5D%7B4%20x-
5%7D%7D%20d%20x%3D3%20%5Cint%20%5Cfrac%7B1%7D%7B%5Csqrt%5B3%5D%7Bu%7D%7D%20%5Cfrac%7B1%7D%7B4%7D%20d%20u%3D%5
%5Cfrac%7B1%7D%7B3%7D%7D%20d%20u%3D%5Cfrac%7B3%7D%7B4%7D%5Cleft(%5Cfrac%7Bu%5E%7B-
%5Cfrac%7B1%7D%7B3%7D%2B1%7D%7D%7B-
%5Cfrac%7B1%7D%7B3%7D%2B1%7D%5Cright)%2Bk%3D%5Cfrac%7B3%7D%7B4%7D%5Ccdot%20%5Cfrac%7B3%7D%7B2%7D%20u%5E%7B%5Cfr
paragraph%20u-text--
medium'%3ERetornando%20para%20vari%C3%A1vel%20inicial%3A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%2
paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%5Cint%20%5Cfrac%7B3%7D%7B%5Csqrt%5B3%
5%7D%7D%20d%20x%3D%5Cfrac%7B9%7D%7B8%7D%20%5Csqrt%5B3%5D%7B(4%20x-
5)%5E%7B2%7D%7D%2Bk%2C%20k%20%5Ctext%20%7B%20real%20%7D%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%2

Questão 2

Determine a integral $\int_0^1 x^2 e^{-x^3} dx$.

A $\frac{1}{3}+\frac{1}{3e}$

B $\frac{1}{3}-\frac{1}{e}$

C $\frac{1}{3}+\frac{1}{e}$

D $\frac{1}{3}-\frac{1}{3e}$

E $\left|-\frac{1}{3}+\frac{1}{3e}\right|$

Parabéns! A alternativa D está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EUsando%20o%20m%C3%A9todo%20de%20substitui%C3%A7%C3%A3o%20de%20vari%C3%A1vel%3A%3C%2Fp%3E%20%20%20%20%
paragraph%20u-text--medium%20c-table'%3E%24%24%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20u%3D-
%20x%20%5E%7B3%7D%20%5Crightarrow%20d%20u%20%3D-
%203%20x%20%5E%7B2%7D%20d%20x%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%24%24%3C%2Fp%3E%0A%
paragraph%20u-text--
medium'%3EAssim%3A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20x%5E%7B2%7D%20e%5E%7B-
x%5E%7B3%7D%7D%20d%20x%3De%5E%7Bu%7D%5Cleft(-
%5Cfrac%7B1%7D%7B3%7D%5Cright)%20d%20u%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%24%24%3C%2Fp
paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20x%20%3D%200%20%5Crightarrow%20u%20%3D%
%201%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%24%24%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%
paragraph%20u-text--
medium'%3ELogo%3A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%5Cint_%7B0%7D%5E%7B1%7D%20x%5E%7B2%7
x%5E%7B3%7D%7D%20d%20x%3D%5Cint_%7B0%7D%5E%7B-1%7D%5Cleft(-
%5Cfrac%7B1%7D%7B3%7D%5Cright)%20e%5E%7Bu%7D%20d%20u%3D%5Cleft(-
%5Cfrac%7B1%7D%7B3%7D%5Cright)%20%5Cint_%7B0%7D%5E%7B-
1%7D%20e%5E%7Bu%7D%20d%20u%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%24%24%3C%2Fp%3E%0A%20%
paragraph%20u-text--
medium'%3EEsta%20%C3%A9%20uma%20integral%20imediata.%20Portanto%3A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%
paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%24%24%0A%5Cbegin%7Bgathered%7D%0A%5Ci
x%5E3%7D%20d%20x%3D%5Cleft(-%5Cfrac%7B1%7D%7B3%7D%5Cright)%5Cleft%5Be%5Eu%5Cright%5D_0%5E%7B-1%7D%3D%5Cleft(-
%5Cfrac%7B1%7D%7B3%7D%5Cright)%5Cleft(e%5E%7B-1%7D-e%5E0%5Cright)%20%5C%5C%5C%5C%0A%3D%5Cleft(-
%5Cfrac%7B1%7D%7B3%7D%5Cright)%5Cleft(%5Cfrac%7B1%7D%7Be%7D-1%5Cright)%3D%5Cfrac%7B1%7D%7B3%7D-
%5Cfrac%7B1%7D%7B3%20e%7D%0A%5Cend%7Bgathered%7D%0A%24%24%0A%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%2

Questão 3

Determine a integral $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x dx$.

A $\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3}-\frac{\operatorname{sen}^5 x}{5}+k, \text{ k real}$

B $\frac{\cos^3 x}{5} - \frac{\cos^5 x}{3} + k,\ \text{k real}$

C $\frac{\operatorname{sen}^3 x}{5} + \frac{\operatorname{sen}^5 x}{3} + k,\ \text{k real}$

D $\frac{\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + k, k \text{ real}$

E | $\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + k,\ \text{k real}$

Parabéns! A alternativa A está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EUsando%20o%20m%C3%A9todo%20de%20substitui%C3%A7%C3%A3o%20de%20vari%C3%A1vel%3A%3C%2Fp%3E%20%20%20%20
paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20u%20%3D%20s%20e%20n%20x%20%5Crightarrow
paragraph%20u-text--
medium'%3EDevemos%20lembrar%20tamb%C3%A9m%20que%3A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20
paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%5Coperatorname%7Bsen%7D%5E%7B2%7D%20x
%5Coperatorname%7Bsen%7D%5E%7B2%7D%20x%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%24%24%3C%2Fp%3E
paragraph%20u-text--
medium'%3EEnt%C3%A3o%3A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%5Coperatorname%7Bsen%7D%5E%7B2%7D%20x
%5Coperatorname%7Bsen%7D%5E%7B2%7D%20x%5Cright)%20%5Ccos%20x%20d%20x%3Du%5E%7B2%7D%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%
u%5E%7B2%7D%5Cright)%20d%20u%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%24%24%3C%2Fp%3E%0A%20
paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%5Cint%20%5Coperatorname%7Bsen%7D%5E%7B
u%5E%7B2%7D%5Cright)%20d%20u%3D%5Cint%5Cleft(u%5E%7B2%7D-
u%5E%7B4%7D%5Cright)%20d%20u%3D%5Cfrac%7B1%7D%7B3%7D%20u%5E%7B3%7D-
%5Cfrac%7B1%7D%7B5%7D%20u%5E%7B5%7D%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20k%2C%20%5Ctext%
paragraph%20u-text--
medium'%3ERetornando%20%C3%A0%20vari%C3%A1vel%20inicial%3A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%2
paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%5Cint%20%5Coperatorname%7Bsen%7D%5E%7B
%5Cfrac%7B1%7D%7B5%7D%20u%5E%7B5%7D%2Bk%3D%5Cfrac%7B%5Coperatorname%7Bsen%7D%5E%7B3%7D%20x%7D%7B3%7D-
%5Cfrac%7B%5Coperatorname%7Bsen%7D%5E%7B5%7D%20x%7D%7B5%7D%2Bk%2C%20k%20%5Ctext%20%7B%20real%20%7D%0A%20%20%20

Questão 4

Determine o valor de $\int\left(x^3+1\right) \cos \left(x^4+4 x\right) d x$.

A $\frac{1}{4} \cos \left(x^4+4 x\right)+k,\ \text{k real}$

B $\operatorname{sen}\left(x^4+4 x\right)+k, k \text{ real}$

C $\frac{1}{4} \operatorname{sen}\left(x^4+4 x\right)+k, k \text{ real}$

D $\cos\left(x^4+4x\right)+k,\ \text{k real}$

E $-\frac{1}{4}\cos\left(x^4+4x\right)+k, k\ \text{real}$

Parabéns! A alternativa C está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EIntegra%C3%A7%C3%A3o%20por%20substitui%C3%A7%C3%A3o%20de%20vari%C3%A1vel.%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%
video-
player%20src%3D%22https%3A%2F%2Fplay.yduqs.videolib.live%2Findex.html%3Ftoken%3D4c89076cec274d549cdd0f42a5219588%22%20videoId
VID2%22%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20

Questão 5

Determine o valor da integral $\int_0^1 \frac{3u}{1+u^4}du.$

A $\frac{3\pi}{5}$

B $\frac{3\pi}{8}$

C $\frac{5\pi}{8}$

D $\frac{\pi}{8}$

E $\frac{\pi}{5}$

Parabéns! A alternativa B está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EUsando%20o%20m%C3%A9todo%20de%20substitui%C3%A7%C3%A3o%20de%20vari%C3%A1vel%3A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20
paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20t%3D%20u%20%5E%7B2%7D%20%5Crigh
paragraph%20u-text--
medium'%3EAssim%3A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%5Cfrac%7B3%20u%7D%7B1%2Bu%5E%
paragraph%20u-text--
medium'%3EEsta%20%C3%A9%20uma%20primitiva%20conhecida.%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20
paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%5Ctext%20%7B%20Se%20%7D%20u%20
paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%5Cint_%7B0%7D%5E%7B1%7D%20%5Cf

Questão 6

Determine a integral $\int \frac{6x-18}{x^2-6x+7} dx$.

A $3\ln|x| + k,\ \mathrm{k\ real}$

B $\ln|x^2 - 6x + 7| + k, k\ \mathrm{real}$

C $3\ln|x^2 - 6x + 7| + k,\ \mathrm{k\ real}$

D $\ln|x + 7| + k, k\ \mathrm{real}$

E $\ln|x^2 - 3x + 7| + k, k\ \mathrm{real}$

Parabéns! A alternativa C está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EIntegra%C3%A7%C3%A3o%20por%20substitui%C3%A7%C3%A3o%20de%20vari%C3%A1vel.%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%
video-
player%20src%3D%22https%3A%2F%2Fplay.yduqs.videolib.live%2Findex.html%3Ftoken%3Dcec06a93527c4550954a0b2c2d9622f4%22%20videoId
VID3%22%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20

Teoria na prática

Um arquiteto precisava estimar a área entre uma linha de uma construção e o chão. Para isso, modelou a linha desejada aplicando a função:

$$h(x) = 2x\sqrt{4 + 3x^2}$$

Para $0 \leq x \leq 1$, com $h(x)$ e x medidos em metros. Sabendo que essa área pode ser obtida pela integral definida de $h(x)$ entre os valores de x dados, obtenha o valor.

Mostrar solução

Falta pouco para atingir seus objetivos.

Vamos praticar alguns conceitos?

Questão 1

Determine $\int \sqrt[3]{3x-5}dx.$

A $(x-5)^{\frac{4}{3}}+k, k \text{ real}$

B $(3x-5)^{\frac{1}{3}}+k, k \text{ real}$

C $\frac{1}{4}(3x-5)^{\frac{4}{3}}+k, \text{ k real}$

D $\frac{1}{4}(x+5)^{\frac{4}{3}}+k, k \text{ real}$

E $\frac{1}{4}(x-4)^{\frac{4}{3}}+k, \text{ k real}$

Parabéns! A alternativa C está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EFazendo%20%5C(u%20%3D%203%20x%20-%205%2C%5C)%20tem-
se%20%5C(d%20u%20%3D%203%20d%20x.%5C)%3C%2Fp%3E%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%0A'
paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%5Cint%20%5Csqrt%5B3%5D%7B3%20x-
5%7D%20d%20x%3D%5Cint%20%5Csqrt%5B3%5D%7Bu%7D%20%5Cfrac%7B1%7D%7B3%7D%20d%20u%3D%5Cfrac%7B1%7D%7B3%7D%20%5Cint
paragraph%20u-text--
medium'%3EAssim%3A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%5Cint%20%5Csqrt%5B3%5D%7B3%20x-
5%7D%20d%20x%3D%5Cfrac%7B1%7D%7B4%7D(3%20x-
5)%5E%7B%5Cfrac%7B4%7D%7B3%7D%7D%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%5Ctext%20%7B%20%2I

Questão 2

Determine $\int_0^1 2u^3\sqrt{1+u^2}du.$

A $\frac{(\sqrt{2}+1)}{15}$

B $\frac{4(\sqrt{2}+1)}{15}$

C $\frac{4(\sqrt{2}-1)}{15}$

D $\frac{(\sqrt{2}-1)}{15}$

E $\frac{3(\sqrt{2}-1)}{15}$

Parabéns! A alternativa B está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EFazendo%20%5C(%20t%3D1%2B%20u%20%5E%7B2%7D%2C%20%5C)%20temos%20%5C(d%20t%20%3D%202%20u%20d%20u.%20%
paragraph%20u-text--
medium'%3EPortanto%3A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%202%20u%20%5E%7B3%7D%20%5Csqrt%7B1%2B%
1)%20%5Csqrt%7B%20t%20%7D%20d%20t%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%24%24%3C%2Fp%3E%
paragraph%20u-text--
medium'%3EPara%20%20%5C(%20u%20%3D%200%20%E2%86%92%20t%20%3D%201%20%2B%200%20%3D%201%20%5C)%20e%20%20%5C(%20u
paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%5Cbegin%7Bgathered%7D%0A%20%20%20%20%
1)%20%5Csqrt%7Bt%7D%20d%20t%3D%5Cint_%7B1%7D%5E%7B2%7D%20t%20%5Csqrt%7Bt%7D%20d%20t-
%5Cint_%7B1%7D%5E%7B2%7D%20%5Csqrt%7Bt%7D%20d%20t%20%5C%5C%5C%5C%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%2
%5Cleft%5B%5Cfrac%7B2%7D%7B3%7D%20t%5E%7B%5Cfrac%7B3%7D%7B2%7D%7D%5Cright%5D_%7B1%7D%5E%7B2%7D%3D%5Cfrac%7B2%7D
%5Cfrac%7B2%7D%7B5%7D%201%5E%7B2%7D%20%5Csqrt%7B1%7D-
%5Cfrac%7B2%7D%7B3%7D%202%20%5Csqrt%7B2%7D%2B%5Cfrac%7B2%7D%7B3%7D%20%5Ccdot%201%20%5Csqrt%7B1%7D%20%5C%5C%5C
%5Cfrac%7B2%7D%7B5%7D-
%5Cfrac%7B4%7D%7B3%7D%20%5Csqrt%7B2%7D%2B%5Cfrac%7B2%7D%7B3%7D%3D%5Cfrac%7B24%20%5Csqrt%7B2%7D-6-
20%20%5Csqrt%7B2%7D%2B10%7D%7B15%7D%3D%5Cfrac%7B4%20%5Csqrt%7B2%7D%2B4%7D%7B15%7D%3D%5Cfrac%7B4(%5Csqrt%7B2%7D

3 - Técnica de integração por partes

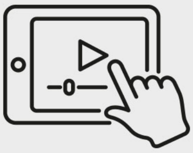
Ao final deste módulo, você será capaz de aplicar a técnica de integração por partes na resolução de problemas envolvendo integrais.

Integração por partes

Compreendendo a técnica de integração por partes

Veja a técnica de integração por partes na resolução de problemas com integrais.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



A integração por partes é uma técnica com bastante aplicação. Este método de primitivação tem uma correspondência com a regra do produto na diferenciação, o que por ela é definido.

Vamos, portanto, definir a regra que pode ser aplicada na resolução de diversas integrais que não são imediatas. Suponha as funções $f(x)$ e $g(x)$ deriváveis em um intervalo I, então:

$$
\begin{gathered}
(f(x) \cdot g(x))^{\prime}=f^{\prime}(x) g(x)+f(x) g^{\prime}(x) \\
f(x) g^{\prime}(x)=(f(x) \cdot g(x))^{\prime}-f^{\prime}(x) g(x)
\end{gathered}
$$

Rotacione a tela.

Integrando os dois lados da equação:

$$
\int f(x) g^{\prime}(x) d x=\int(f(x) \cdot g(x))^{\prime} d x-\int f^{\prime}(x) g(x) d x
$$

Rotacione a tela.

Como:

$$
\int(f(x) \cdot g(x))^{\prime} d x=f(x) g(x)
$$

Rotacione a tela.

Tem-se a regra de integração por partes:

$$
\int f(x) g^{\prime}(x) d x=f(x) g(x)-\int f^{\prime}(x) g(x) d x
$$

Rotacione a tela.

Usando uma nova simbologia de $u=f(x)$ e $v=g(x)$, consequentemente:

$$
d u=f^{\prime}(x) d x \quad \text { e } \quad d v=g^{\prime}(x) d x
$$

Rotacione a tela.

Obtém-se uma forma mais usual da regra de integração por partes:

$$
\int u d v=u v-\int v d u
$$

Rotacione a tela.

Foque na regra de integração por partes! Ela mostra que podemos calcular a integral $\int udv$$$, mais complexa, pelo cálculo de outra integral, $\int vdu$, teoricamente mais simples. A constante de integração real da integral indefinida pode ser colocada no fim do processo.

Exemplo 1

Determine a integral:

$$\int x \operatorname{sen} x dx$$

Rotacione a tela.

A integral $\int x \operatorname{sen} x dx$ não é uma integral imediata. Assim, ela necessita de uma técnica de integração para transformar o integrando:

O integrando $x \operatorname{sen} x dx$ deve ser transformado totalmente no produto udv. Todos os termos do integrando devem fazer parte da função u ou da função dv. Esses termos só podem aparecer uma vez. Neste exemplo, os termos são: $x, \operatorname{sen} x$, e dx.

Escolhe-se como $u = x$, assim $du = dx$. O que resta do integrando deve fazer parte do dv. Dessa forma, $dv = \operatorname{sen} x dx$, então:

$$v = (-1) \cos x = (-\cos x)$$

Rotacione a tela.

Veja que V é a função cuja diferencial vale $\operatorname{sen} x dx$.

Usando a integração por partes:

$$\int x \operatorname{sen} x dx = x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) dx$$
$$\int x \operatorname{sen} x dx = -x \cos x + \int \cos x dx$$

Rotacione a tela.

A integral $\int \cos x dx$ é imediata e se sabe a solução:

$$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + k, k \text{ real}$$

Rotacione a tela.

Portanto:

$$\int x \operatorname{sen} x dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x + k, k \text{ real}$$

Rotacione a tela.

No caso da integral definida, a regra é semelhante. Aplicando o cálculo da integral definida estudada anteriormente:

$$\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu$$

Rotacione a tela.

Exemplo 2

Determine a integral:

$$\int_0^\pi x \operatorname{sen} x d x$$

Rotacione a tela.

Solução

Usando o mesmo raciocínio do exemplo anterior, será escolhido:

$$u=x \rightarrow d u=d x \quad \text { e } \quad d v=\operatorname{sen} x d x \rightarrow v=-\cos x$$

Rotacione a tela.

Portanto:

$$\int_0^\pi x \operatorname{sen} x d x=[-x \cos x]_0^\pi-\int_0^\pi(-\cos x) d x=[-x \cos x]_0^\pi+\int_0^\pi \cos x d x$$

$$\int_0^\pi x \operatorname{sen} x d x=[-x \cos x]_0^\pi+[\operatorname{sen} x]_0^\pi$$

Rotacione a tela.

Assim:

$$\int_0^\pi x \operatorname{sen} x d x=[-\pi \cos (\pi)-0 \cdot \cos (0)]+[\operatorname{sen}(\pi)-\operatorname{sen}(0)]=-\pi(-1)-0+0-0=\pi$$

Rotacione a tela.

Repare que os limites de integração já poderiam ter sido aplicados diretamente na solução da integral indefinida:

$$\int_0^\pi x \operatorname{sen} x d x=[-x \cos x+\operatorname{sen} x]_0^\pi=\pi$$

Rotacione a tela.

Atenção!

Deve ser feita a escolha correta das funções u e dv. A escolha errada, ao invés de simplificar o problema, irá complicá-lo.

Volte no Exemplo 1. Se ao invés de ter escolhido $u=x$ e $dv=\operatorname{sen} x dx$, fossem escolhidos $u=senx \in dv=xdx$.

$$u=\operatorname{sen} x \rightarrow d u=\cos x d x \quad \text { e } \quad d v=x d x \rightarrow v=\frac{1}{2} x^2$$

Rotacione a tela.

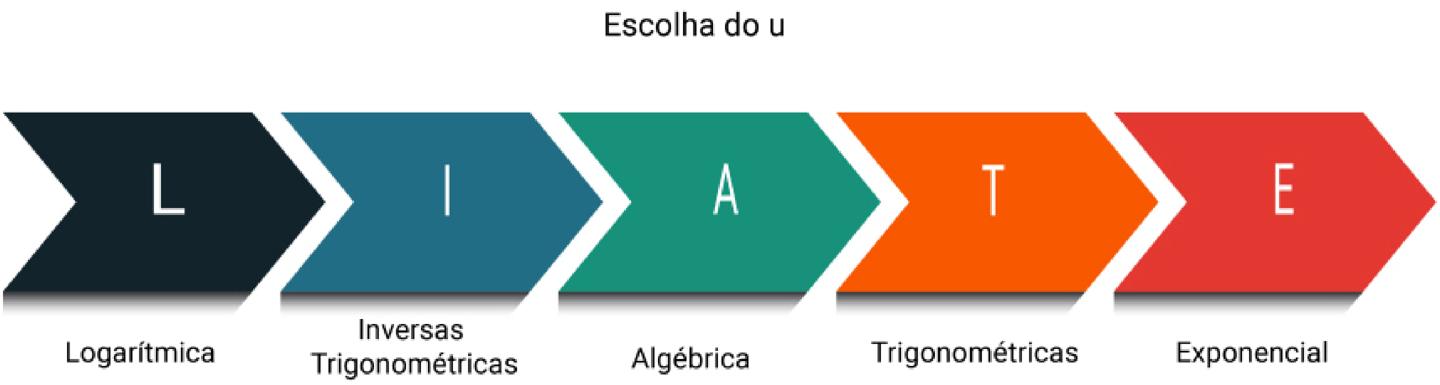
Assim:

$$\int x \operatorname{sen} x d x=\frac{1}{2} x^2 \operatorname{sen} x-\frac{1}{2} \int x^2 \cos x d x$$

Rotacione a tela.

Veja como a escolha errada tornou o método sem efetividade, transformando a integral em uma integral mais complicada.

A escolha de termos é aprendida com a prática dos exercícios. Mas, existe uma regra prática que é guardada pela palavra LIATE, que mostra a prioridade do segmento do integrando que deve fazer parte do u. A seta aponta da maior para a menor prioridade de escolha para parte do u. Observe:



Assim, no Exemplo 1, havia no integrando uma parte algébrica (x) e uma parte trigonométrica $(senx)$, portanto, pela regra prática, a algébrica tem prioridade sobre a trigonométrica, por isso foi escolhido $u = x$, e não $u = senx$.

Às vezes, para resolução da integral, é necessária a aplicação da integração por partes mais de uma vez ou até mesmo a integração por partes combinada com outro método de integração, como a substituição de variável.

Exemplo 3

Determine a integral:

$$\int 2 \cos x e^x dx$$

Rotacione a tela.

Solução

Usando a regra do LIATE para separar os termos do integrando, a função trigonométrica é prioridade em relação à função exponencial, assim:

$$u = \cos x \rightarrow du = -\operatorname{sen} x dx \quad e \quad dv = 2e^x dx \rightarrow v = 2e^x$$

Rotacione a tela.

Usando a integração por partes:

$$\int 2 \cos x e^x dx = 2e^x \cos x - \int 2e^x (-\operatorname{sen} x) dx = 2e^x \cos x + \int 2e^x \operatorname{sen} x dx$$

Rotacione a tela.

Aparentemente, fez-se a escolha errada, mas não. Precisamos aplicar novamente a integração por partes, mas agora no termo:

$$\int 2e^x \operatorname{sen} x dx$$

Rotacione a tela.

Usando a regra LIATE na nova integral:

$$u = \operatorname{sen} x \rightarrow du = \cos dx \quad \text{e} \quad dv = 2e^x dx \rightarrow v = 2e^x$$

Rotacione a tela.

Portanto:

$$\int 2e^x \operatorname{sen} x dx = 2e^x \operatorname{sen} x - \int 2e^x \cos x dx$$

Rotacione a tela.

Substituindo na equação inicial:

$$\int 2e^x \cos x dx = 2e^x \cos x + \int 2e^x \operatorname{sen} x dx = 2e^x \cos x + 2e^x \operatorname{sen} x - \int 2e^x \cos x dx$$

Rotacione a tela.

Repare que a integral desejada aparece novamente no lado direito com sinal negativo, podendo ser jogada para o lado esquerdo. Façamos:

$$I = \int 2e^x \cos x dx$$

Rotacione a tela.

$$I = 2e^x(\cos x + \operatorname{sen} x) - I \rightarrow 2 = 2e^x(\cos x + \operatorname{sen} x) \rightarrow I = e^x(\cos x + \operatorname{sen} x) + k, kr \text{ real}$$

Rotacione a tela.

Mão na massa

Questão 1

Determine a integral $\int_0^2 xe^x dx$.

A $e^2 + 1$

B $e^2 - 1$

C e^2

D 1

E 0

Parabéns! A alternativa A está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EUsando%20a%20integra%C3%A7%C3%A3o%20por%20fra%C3%A7%C3%B5es%20parciais%20para%20resolver%20a%20integral%3A%
paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%5Cint_%7B0%7D%5E%7B2%7D%20x%20e%5E%7Bx%7D%20d%20x%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-
paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0Au%3D%20x%20%5Crightarrow%20d%20u%3D%20d%20x%20%5Cquad%20%5Ctext%20%7B%20e%20%7D%20%5Cquad%20d%
paragraph%20u-text--medium'%3ELembre-
se%20de%20que%20a%20fun%C3%A7%C3%A3o%20alg%C3%A9brica%20tem%20prioridade%20para%20ser%20escolhida%20em%20rela%C3%A7%
paragraph%20u-text--medium'%3EAssim%3A%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%5Cint_%7B0%7D%5E%7B2%7D%20x%20e%5E%7B%20x%20%7D%20d%20x%20%3D%5Cleft%5B%20x%20e%20%5E%7B%20x
%5Cint_%7B0%7D%5E%7B2%7D%20e%5E%7B%20x%20%7D%20d%20x%20%3D%5Cleft%5B%20x%20e%5E%7B%20x%20%7D%5Cright%5D_%7B0%7
%5Cleft%5Be%5E%7B%20x%20%7D%5Cright%5D_%7B0%7D%5E%7B2%7D%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-
text--
medium'%3EPois%20a%20integral%20%5C(%20%5Cint%20e%5E%7Bx%7D%20d%20x%20%5C)%20%C3%A9%20uma%20integral%20imediata.%20Po
paragraph%20u-text--medium%20c-table%20u-
centered'%3E%24%24%0A%5Cint_%7B0%7D%5E%7B2%7D%20x%20e%20%5E%7B%20x%20%7D%20dx%20%3D%5Cleft%5B2%20%5Ccdot%20e%20%
0%20.%20e%20%5E%7B0%7D%5Cright%5D-%5Cleft%5B%20e%20%5E%7B2%7D-
%20e%20%5E%7B0%7D%5Cright%5D%3D2%20e%20%5E%7B2%7D-
%20e%20%5E%7B2%7D%2B1%3D%20e%20%5E%7B2%7D%2B1%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%2

Questão 2

Determine a integral $\int 4x\cos(2x)dx$.

A $2x\cos(2x) - \text{sen}(2x) + k, k \text{ real}$

B $2x\,\text{sen}(2x) + \cos(2x) + k, k \text{ real}$

C $2x\,\text{sen}(2x) - \cos(2x) + k, k \text{ real}$

D $2x\cos(2x) + \text{sen}(2x) + k, k \text{ real}$

E $2x\cos(x) + \text{sen}(x) + k, \text{ k real}$

Parabéns! A alternativa B está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EUsando%20a%20integra%C3%A7%C3%A3o%20por%20partes%20para%20resolver%20a%20integral%3A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%2
paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%5Cint%204%20x%20%5Ccos%20(2%20x)%20d%20x%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-

text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0Au%3Dx%20%5Crightarrow%20d%20u%3Dd%20x%20%5Cquad%20e%20%5Cquad%20d%20v%3D(2%20x)%20d%20x%20%5Crig
paragraph%20u-text--medium'%3ELembre-
se%20de%20que%20a%20fun%C3%A7%C3%A3o%20alg%C3%A9brica%20tem%20prioridade%20para%20ser%20escolhida%20como%20%5C(%20u%
paragraph%20u-text--medium'%3EAssim%3A%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%5Cint%204%20x%20%5Ccos%20(2%20x)%20d%20x%3D2%20x%20%5Coperatorname%7Bsen%7D(2%20x)-
%5Cint%202%20%5Coperatorname%7Bsen%7D(2%20x)%20d%20x%3D2%20x%20%5Coperatorname%7Bsen%7D(2%20x)%2B%5Ccos%20(2%20x)%2
%5Ccos%20(2%20x%20)).%20%5C)%20%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20

Questão 3

Determine o valor de $\mathrm{g(e)}$ sabendo que $g(x)=\int \ln x d x$ e que $g(1)=0$.

A $e-1$

B e

C 1

D $e+1$

E $2e+1$

Parabéns! A alternativa C está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EAplicando%20a%20integra%C3%A7%C3%A3o%20por%20partes%20e%20usando%20a%20regra%20pr%C3%A1tica%20do%20LIATE%
paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0Au%3D%5Cln%20x%20%5Crightarrow%20d%20u%3D%5Cfrac%7B1%7D%7Bx%7D%20d%20x%20%5Cquad%20%5Ctext%20%7B
paragraph%20u-text--medium'%3EAssim%3A%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0Ag(x)%3D%5Cint%20%5Cln%20x%20d%20x%3Dx%20%5Cln%20x-
%5Cint%20x%20%5Cfrac%7B1%7D%7Bx%7D%20d%20x%3Dx%20%5Cln%20x-%5Cint%20d%20x%3Dx%20%5Cln%20x-
x%2Bk%2C%20k%20%5Ctext%20%7B%20real%20%7D%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-text--
medium'%3EMas%2C%20%20%5C(g(1)%20%3D%201%20%5Ccdot%20ln1%20%E2%80%93%201%20%2B%20k%20%3D%20k%20%E2%80%93%201%
paragraph%20u-text--medium%20c-table'%3E%24%24%0Ag%20(%20x%20)%3D%20x%20%5Cln%20x%20-
%20x%20%2B%201%20%5Crightarrow%20g%20(%20e%20)%3D%20e%20%5Cln%20e-
e%2B1%3D1%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20

Questão 4

Determine o valor $h(\pi)$, sabendo que $h(x)=\int e^x \operatorname{sen} x d x$ e $h(0)=-\frac{1}{2}$.

A $\frac{1}{2} e^\pi$

B $\frac{1}{2}$

C e^{π}

D 1

E $1-e$

Parabéns! A alternativa A está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EIntegra%C3%A7%C3%A3o%20por%20partes.%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%2
video-
player%20src%3D%22https%3A%2F%2Fplay.yduqs.videolib.live%2Fhome%3Ftoken%3Dfcb5cd8baae1477ebc8b4d2da314dc2b%22%20videoId%3D%
VID2%22%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3C%2Fyduqs-video-
player%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20

Questão 5

Sabe-se que $m(0)=-\frac{1}{4}$ e que $m(x)$ é uma das funções obtidas pela integral $\int \frac{z^2}{e^{2z}} dz$. Determine o valor de $m\left(\frac{1}{2}\right)$.

A $\frac{1}{8e}$

B $-\frac{5}{8e}$

C $-\frac{1}{8e}$

D $\frac{5}{8e}$

E $\frac{2}{e}$

Parabéns! A alternativa B está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EUsando%20a%20integra%C3%A7%C3%A3o%20por%20partes%20para%20resolver%20a%20integral.%0A%20%20%20%20%20%20%2
video-
player%20src%3D%22https%3A%2F%2Fplay.yduqs.videolib.live%2Findex.html%3Ftoken%3D2da4f91fa44c456984cfd40b48f0b588%22%20videoId%

VID3%22%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3C%2Fyduqs-video-
player%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20

Questão 6

Determine o valor de $\int_0^1 2 \operatorname{arctg} x dx$.

A $\ln 2$

B $\frac{\pi}{2}$

C $\frac{\pi}{2}+\ln 2$

D $\frac{\pi}{2}-\ln 2$

E $2 \ln 2$

Parabéns! A alternativa D está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EAplicando%20a%20integra%C3%A7%C3%A3o%20por%20partes%20e%20usando%20a%20regra%20pr%C3%A1tica%20do%20LIATE%
paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0Au%3D%5Coperatorname%7Barctg%7D%20x%20%5Crightarrow%20du%20%3D%5Cfrac%7B1%7D%7B1%2B%20x%20%5E%7B2
paragraph%20u-text--medium'%3EAssim%3A%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%5Cint_%7B0%7D%5E%7B1%7D%202%20%5Coperatorname%7Barctg%7D(x)%3D%5B2%20x%20%5Coperatorname%7Barctg
%5Cint_%7B0%7D%5E%7B1%7D%202%20x%20%5Cfrac%7B1%7D%7B1%2Bx%5E%7B2%7D%7D%20d%20x%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20c
paragraph%20u-text--
medium'%3ERepare%20que%20a%20integral%20da%20direita%20n%C3%A3o%20%C3%A9%20tamb%C3%A9m%20imediata.%20Nesse%20caso%2C
paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%5Cint_%7B0%7D%5E%7B1%7D%20%5Cfrac%7B2%20x%7D%7B1%2Bx%5E%7B2%7D%7D%20d%20x%0A%24%24%3C%2Fp%3
paragraph%20u-text--medium'%3EFazendo%3A%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0Az%20%3D1%2B%20x%20%5E%7B2%7D%20%5Crightarrow%20d%20z%20%3D2%20x%20d%20x%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0
paragraph%20u-text--
medium'%3EPara%20%5C(%20x%20%3D%201%20%E2%86%92%20z%20%3D%201%20%2B%201%20%3D%202%20%5C)%20e%20para%20%20%5C(
paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%5Cint_%7B0%7D%5E%7B1%7D%20%5Cfrac%7B2%20x%7D%7B1%2Bx%5E%7B2%7D%7D%20d%20x%3D%5Cint_%7B1%7D%5
paragraph%20u-text--medium'%3EQue%20%C3%A9%20uma%20integral%20imediata%3A%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-
paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%5Cint_%7B1%7D%5E%7B2%7D%20%5Cfrac%7B1%7D%7Bz%7D%20d%20z%3D%5Cleft%5B%5Cleft.%5Cln%20%7Cz%7C%5C
paragraph%20u-text--medium'%3ESubstituindo%20na%20equa%C3%A7%C3%A3o%20inicial%3A%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-
paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%5Cbegin%7Baligned%7D%0A%26%5Cleft.%5Cint_%7B0%7D%5E%7B1%7D%202%20%5Coperatorname%7Barctg%7D(x)%3D
%5Cint_%7B0%7D%5E%7B1%7D%202%20x%20%5Cfrac%7B1%7D%7B1%2Bx%5E%7B2%7D%7D%20d%20x%3D%5B2%20x%20%5Coperatorname%7
%5Cleft%5B%5Cln%20%7Cz%7C_%7B1%7D%5E%7B2%7D%5Cright.%20%5C%5C%5C%5C%0A%26%3D%5B2.1%20.%20%5Coperatorname%7Barctg
%5B%5Cln%202-%5Cln%201%5D%3D2%20.%20%5Cfrac%7B%5Cpi%7D%7B4%7D-0-%5Cln%202%3D%5Cfrac%7B%5Cpi%7D%7B2%7D-
%5Cln%202%0A%5Cend%7Baligned%7D%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20

Teoria na prática

Uma barra de $\frac{\pi}{2} m$ de comprimento tem uma densidade linear de massa dada pela equação: $\delta(x) = 2x^2 \cos x$, medida em kg/m, em que X é a distância entre o ponto da barra e a extremidade inferior da barra.

Verifica-se, portanto, que a massa da barra não é dividida uniformemente. Determine a massa da barra de $\frac{\pi}{2} m$, lembrando que a massa é obtida pela integral da densidade de massa.

Mostrar solução

Falta pouco para atingir seus objetivos.

Vamos praticar alguns conceitos?

Questão 1

Determine a integral $\int 3x \cos(3x) dx$.

A $x \cos(3x) - \frac{1}{3} \cos(3x) + k, k$ real

B $x \operatorname{sen}(3x) - \frac{1}{3} \cos(3x) + k, k$ real

C $x \operatorname{sen}(3x) + \frac{1}{3} \cos(3x) + k, k$ real

D $x \operatorname{sen}(3x) + \frac{1}{3} \operatorname{sen}(3x) + k, k$ real

E $x \cos(3x) + \frac{1}{3} \cos(3x) - k, k$ real

Parabéns! A alternativa C está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0Au%20%3D%20x%20%5Crightarrow%20d%20u%20%3D%20d%20x%20%5Cquad%20%5Ctext%20%7B%20e%20%7D%20%5Cqua
paragraph%20u-text--medium'%3EPortanto%3A%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%5Cint%203%20x%20%5Ccos%20(3%20x)%20d%20x%3Dx%20%5Coperatorname%7Bsen%7D(3%20x)-
%5Cint%20%5Coperatorname%7Bsen%7D(3%20x)%20d%20x%3Dx%20%5Coperatorname%7Bsen%7D(3%20x)%2B%5Cfrac%7B1%7D%7B3%7D%20%

Questão 2

Determinada área é calculada pela integral $\int_{-2}^{0}(-2) \times e^{-x} dx$. Marque a alternativa que apresenta o valor da área.

A $2e^2 + 2$

B $3e^2 - 1$

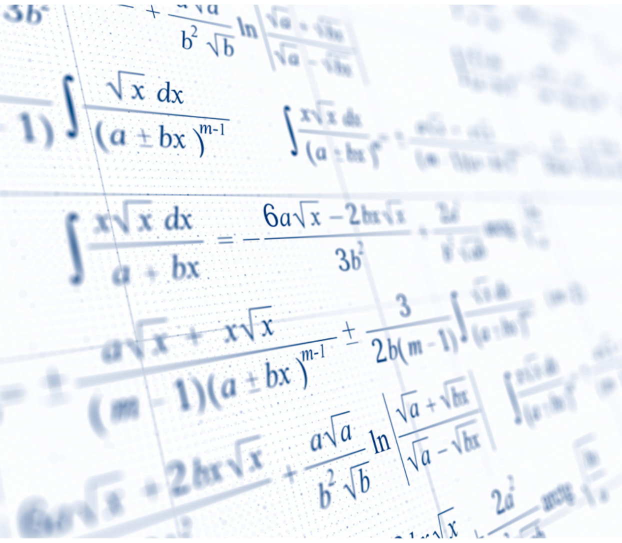
C $5 - e^2$

D $1 + 3e^2$

E $3e^2 - 3$

Parabéns! A alternativa A está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EUsando%20a%20integra%C3%A7%C3%A3o%20por%20partes%20para%20resolver%20a%20integral%3A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%2
paragraph%20u-text--medium%20c-table'%3E%24%24%0A%5Cint_%7B-2%7D%5E%7B0%7D%20x%20e%5E%7B-
x%7D%20d%20x%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0Au%3D%20x%20%5Crightarrow%20d%20u%20%3D%20d%20x%20%5Cquad%20e%20%5Cquad%20d%20v%20%3D(-
%202%20)%20e%20%5E%7B-%20x%20%7D%20d%20x%20%5Crightarrow%20v%20%3D2%20e%20%5E%7B-
%20x%20%7D%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-text--medium'%3ELembre-
se%20de%20que%20a%20fun%C3%A7%C3%A3o%20alg%C3%A9brica%20tem%20prioridade%20para%20ser%20escolhida%20como%20u%20em%2
paragraph%20u-text--medium%20c-table'%3E%24%24%0A%5Cint_%7B-2%7D%5E%7B0%7D%20x%20e%5E%7B-
x%7D%20d%20x%3D%5Cleft%5Bx%202%20e%5E%7B-x%7D%5Cright%5D_%7B-2%7D%5E%7B0%7D-%5Cint_%7B-
2%7D%5E%7B0%7D%202%20e%5E%7B-x%7D%20d%20x%3D%5Cleft%5B2%20x%20e%5E%7B-x%7D%5Cright%5D_%7B-
2%7D%5E%7B0%7D%2B%5Cleft%5B2%20e%5E%7B-x%7D%5Cright%5D_%7B-
2%7D%5E%7B0%7D%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-text--
medium'%3EPortanto%3A%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%5Cbegin%7Bgathered%7D%0A%5Cint_%7B-2%7D%5E%7B0%7D(-2)%20x%20e%5E%7B-
x%7D%20d%20x%3D%5Cleft%5B2.0%20.%20e%5E%7B-0%7D-(2)(-2)%20%5Ccdot%20e%5E%7B-
(-2)%7D%5Cright%5D%2B%5Cleft%5B2%20e%5E%7B-0%7D-2%20e%5E%7B-(-2)%7D%5Cright%5D%3D4%20e%5E%7B2%7D%2B2-
2%20e%5E%7B2%7D%20%5C%5C%0A4%20e%5E%7B2%7D%2B2-
2%20e%5E%7B2%7D%3D2%20e%5E%7B2%7D%2B2%0A%5Cend%7Bgathered%7D%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%



4 - Técnica de integração por frações parciais

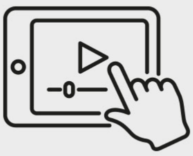
Ao final deste módulo, você será capaz de empregar a técnica de integração por frações parciais na resolução de problemas envolvendo integrais.

Revisão de funções racionais

Compreendendo a técnica de integração por frações parciais

Veja a técnica de integração por frações parciais na resolução de problemas com integrais.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Outra técnica de integração com aplicação no cálculo de integrais cujo integrando é uma fração racional é a integração por frações parciais. Esse método de primitivação transforma o integrando em uma soma de frações mais simples, denominadas frações parciais, cuja primitiva conhecemos.

Função racional é uma função que representa o quociente entre dois polinômios, assim $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, onde $P(x)$ $Q(x)$ são polinômios.

Polinômio é uma função do tipo:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_j x^j + \ldots a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Rotacione a tela.

Com j número natural diferente de zero, sendo que a_j, denominado coeficientes, são números reais. O número n é o grau do polinômio, com $a_n \neq 0$.

Atenção!

Se o grau do polinômio $P(x) >$ grau do polinômio $Q(x)$, então a função $f(x)$ será **imprópria**.

Se o grau do polinômio $P(x) \leq$ grau do polinômio $Q(x)$, então a função $f(x)$ será **própria**.

Veja os exemplos abaixo:

$$f(x) = \frac{3x+5}{2x^2-4-4}$$

É uma função racional própria, pois o grau do numerador vale 1 e o grau do denominador vale 2. Assim o grau do numerador é menor do que o grau do denominador.

$$g(x) = \frac{5}{x^3+6x+1}$$

É uma função racional própria, pois o grau do numerador vale 0 e o grau do denominador vale 3. Assim o grau do numerador é menor do que o grau do denominador.

$$h(x) = \frac{2x^2+3x-3}{x+7}$$

É uma função racional imprópria, pois o grau do numerador vale 2 e o grau do denominador vale. Assim o grau do numerador é maior do que o grau do denominador.

O método de frações parciais serve para um integrando com uma função racional própria. Se a função for imprópria, passa a ser necessário um passo intermediário, executando uma divisão entre os polinômios para transformar a função racional própria em um polinômio mais uma função racional própria.

Assim, seja $T(x)$ uma função racional imprópria, com:

$$T(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Rotacione a tela.

Dividindo $P(x)$ por $Q(x)$, podemos transformar:

$$T(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Rotacione a tela.

Em que $S(x)$ é um polinômio de grau m, correspondente à parte inteira da divisão, e $\frac{R(x)}{Q(x)}$ é uma função racional própria, ou seja, grau $R(x) < \ grau \ Q(x)$. O valor de $m = grau \ P(x) - \ grau \ Q(x)$.

Veja um exemplo de passo intermediário.

Exemplo 1

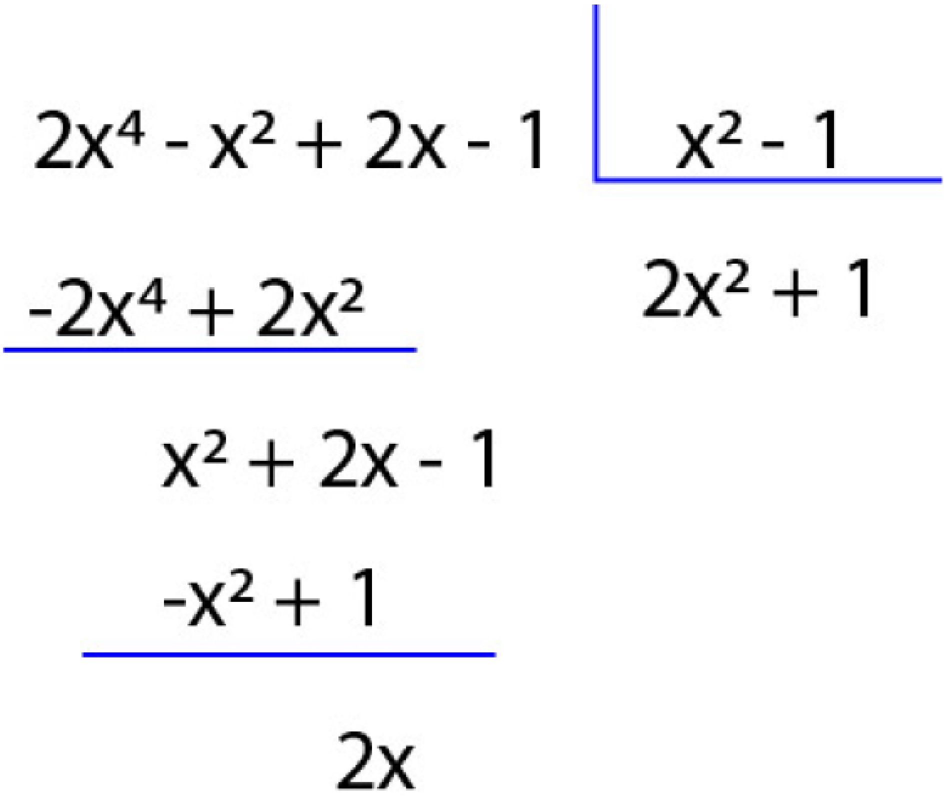
Transforme a integral em um integrando com função racional própria:

$$\int \frac{2x^4 - x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1} dx$$

Rotacione a tela.

Solução

O integrando é uma função racional imprópria com numerador de grau 4 e denominador de grau 2. Assim, deve-se dividir os dois polinômios para se obter a função racional própria mais o polinômio:



Logo:

$$\frac{2x^4 - x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1} = (2x^2 + 1) + \frac{2x}{x^2 - 1}$$

Rotacione a tela.

Portanto:

$$\int \frac{2x^4 - x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1} dx = \int (2x^2 + 1) dx + \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx$$

Rotacione a tela.

A primeira integral é de um polinômio, sendo uma integral imediata. Na segunda parcela, o integrando é uma função racional própria, que vai ser resolvida pelo método do próximo item.

Atenção!

Lembre-se de que para integrandos polinomiais, usaremos a integral imediata:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k, n \neq -1 \text{ e k real}$$

Integração por frações parciais

O método de frações parciais é um método utilizado quando o integrando é uma função racional. Cabe ressaltar, porém, que há casos em que, embora o integrando não seja uma função racional, após a aplicação de uma substituição de variável, ele se transforma em uma, podendo ser trabalhado por essa técnica de integração.

Atenção!

Essa técnica é utilizada somente quando a função racional for própria, isto é, quando o grau do numerador for menor do que o do denominador. Para funções racionais impróprias, necessitamos do passo intermediário.

O método se inicia fatorando o polinômio do denominador, $Q(x)$, em fatores lineares do tipo $(x-p),\ \mathrm{p\ real}$, e fatores quadráticos irredutíveis do tipo $\left(ax^2+bx+c\right)$, em que a, b e c são reais e $a^2-4bc<0$.

Existe um teorema da álgebra que garante que sempre será possível fazer essa fatoração. Os fatores lineares correspondem às raízes reais do polinômio $Q(x)$ e os fatores quadráticos irredutíveis, às raízes complexas conjugadas do polinômio $Q(x)$. Este material considerará que você sabe obter raízes de um polinômio.

Dividiremos o método em quatro casos:

$Q(x)$ apenas com raízes reais sem multiplicidade

$Q(x)$ com raízes reais com multiplicidade

$Q(x)$ com raízes complexas sem multiplicidade

$Q(x)$ com raízes complexas com multiplicidade

$Q(x)$ com raízes complexas com multiplicidade

Tomemos o polinômio $Q(x)$ de grau n que apresenta apenas n raízes reais sem multiplicidade. Para este caso, após a fatoração de $Q(x)$, ele será transformado em um produto de fatores lineares diferentes entre si:

$$Q(x)=k\left(x-\alpha_1\right)\left(x-\alpha_2\right)\ldots\left(x-\alpha_n\right)$$

Rotacione a tela.

Com k real e $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ raízes reais. Assim, chegamos à função:

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{k\left(x-\alpha_1\right)\left(x-\alpha_2\right)\ldots\left(x-\alpha_n\right)}=\frac{A_1}{\left(x-\alpha_1\right)}+\frac{A_2}{\left(x-\alpha_2\right)}+\ldots+\frac{A_n}{\left(x-\alpha_n\right)}$$

Rotacione a tela.

Com $A_1,A_2,\ldots,A_n$ reais.

Cada raiz real α_j corresponderá a uma parcela do tipo $\frac{A_j}{\left(x-\alpha_j\right)}$.

Dessa forma, a integral será transformada em soma de integrais do tipo:

$$\int\frac{A_j}{\left(x-\alpha_j\right)}dx=A_j\ln\left|x-\alpha_i\right|+k,k\ \mathrm{real}$$

Rotacione a tela.

Os valores de $A_1,A_2,\ldots,A_n$ serão obtidos colocando o lado direito com o mesmo denominador e igualando $P(x)$ ao numerador que se obterá na direita. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 2

Determine a integral:

$$\int \frac{2x^4 - x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1} dx$$

Rotacione a tela.

Solução

Como o integrando é uma função racional imprópria, o primeiro passo é transformá-la em uma função racional própria. Essa transformação já foi feita no exemplo anterior. Temos, então:

$$\frac{2x^4 - x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1} = \left(2x^2 + 1\right) + \frac{2x}{x^2 - 1}$$

Rotacione a tela.

E, portanto:

$$\int \frac{2x^4 - x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1} dx = \int \left(2x^2 + 1\right) dx + \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx$$

Rotacione a tela.

Vamos agora calcular a integral $\int \frac{2x}{x^2-1} dx$ aplicando o método de frações parciais.

Analisando $Q(x) = x^2 – 1$, verifica-se que 1 e -1 são as raízes. Dessa forma:

$$Q(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \quad \text{e} \quad \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

Rotacione a tela.

Transformando o lado direito no mesmo denominador:

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{(A+B)x + (A-B)}{x^2 - 1}$$

Rotacione a tela.

Temos:

$$\frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{(A+B)x + (A-B)}{x^2 - 1}$$

Rotacione a tela.

Agora deve-se comparar o numerador da esquerda $P(x) = 2x$ com o numerador da direita. Para que os dois polinômios sejam iguais, eles devem ser iguais termo a termo, assim:

$$2x = (A+B)x + (A-B) \rightarrow \begin{cases} A + B = 2 \\ A - B = 0 \end{cases} \rightarrow A = B \rightarrow 2A = 2 \rightarrow A = B = 1$$

Rotacione a tela.

Logo:

$$\int \frac{2x}{x^2-1}dx = \int \frac{1}{x+1}dx + \int \frac{1}{x-1}dx$$

e

$$\int \frac{2x^4-x^2+2x-1}{x^2-1}dx = \int (2x^2+1)dx + \int \frac{1}{x+1}dx + \int \frac{1}{x-1}dx$$

Rotacione a tela.

As integrais agora são todas imediatas.

$$\int \frac{2x^4-x^2+2x-1}{x^2-1}dx = \frac{2}{3}x^3 + x + \ln|x+1| + \ln|x-1| + k, k \text{ real}$$

Rotacione a tela.

$Q(x)$ apresenta raízes reais com multiplicidade

Neste caso, o polinômio $Q(x)$ de grau n terá apenas raízes reais, porém algumas sem multiplicidade e outras com multiplicidade.

Atenção!

Lembre-se de que multiplicidade é o número de vezes que a mesma raiz aparece no polinômio.

Após a fatoração de $Q(x)$, ele será transformado em um produto de fatores lineares elevados à sua multiplicidade.

$$Q(x) = k(x-\alpha_1)^{r_1}(x-\alpha_2)^{r_2}\cdots(x-\alpha_n)^{r_n}$$

Rotacione a tela.

Com k real, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ reais e $r_1, r_2, \ldots, r_n$ naturais diferentes de zero. O número r_j corresponde à multiplicidade da raiz α_j.

O raciocínio é análogo ao caso anterior. Toda raiz real α_j sem multiplicidade, ou que seria sinônimo de multiplicidade $1(r=1)$, será transformada em uma parcela do tipo $\frac{A_j}{(x-\alpha_j)}$.

Toda raiz real α_i com multiplicidade $(r \neq 1)$ será transformada em r termos do tipo:

$$\frac{B_1}{(x-\alpha_j)} + \frac{B_2}{(x-\alpha_j)^2} + \ldots + \frac{B_r}{(x-\alpha_j)^r}, \text{com } B_1, B_2, \ldots, B_r \text{ reais}$$

Rotacione a tela.

Será usada neste caso a seguinte integral imediata:

$$\int \frac{B_r}{(x-\alpha_j)^r}dx, (r \geq 2) = -\frac{B_r}{(r-1)}\frac{1}{(x-\alpha_j)^{r-1}} + k, k \text{ real}$$

Rotacione a tela.

Após a transformação de $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ na soma de parcelas que foram definidas, a solução segue os mesmos passos do primeiro caso.

Exemplo 3

Determine a integral:

$$\int_3^5 \frac{2x+5}{x^3-3x-2} dx$$

Rotacione a tela.

Solução

O integrando já é uma função racional própria, podendo, portanto, aplicar diretamente o método das frações parciais.

Analisando as raízes de $Q(x) = x3–3x–2$, verifica-se que são -1 uma raiz dupla (multiplicidade 2) e 2 é uma raiz sem multiplicidade. Dessa forma:

$$Q(x) = x^3 - 3x - 2 = (x-2)(x+1)^2$$

Rotacione a tela.

O termo correspondente à raiz 2 será $\frac{A}{x-2}$.

Os termos correspondentes à raiz -1 serão $\frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$

Assim:

$$\frac{2x+5}{x^3-3x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

Rotacione a tela.

Com A, B e C reais. Transformando o lado direito no mesmo denominador:

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + B(x+1)(x-2) + C(x-2)}{(x-2)(x+1)^2} =$$
$$\frac{Ax^2 + 2Ax + A + Bx^2 - Bx - 2B + Cx - 2C}{x^3 - 3x - 2} = \frac{(A+B)x^2 + (2A - B + C)x + (A - 2B - 2C)}{x^3 - 3x - 2}$$

Rotacione a tela.

Temos:

$$\frac{2x+5}{x^3-3x-2} = \frac{(A+B)x^2 + (2A - B + C)x + (A - 2B - 2C)}{x^3 - 3x - 2}$$

Rotacione a tela.

Agora, deve-se comparar o numerador da esquerda $P(x) = 2x$ com o numerador da direita. Para que dois polinômios sejam iguais, eles devem ser iguais termo a termo, assim:

$$2x+5=(A+B)x^2+(2A-B+C)x+(A-2B-2C)$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A-B+C=2 \rightarrow A=-B \rightarrow \begin{cases} 3A+C=2 \\ 3A-2C=5 \end{cases} \rightarrow 9A=9 rightarrow A=1, B=-1 e C=-1 \\ A-2B-2C=5 \end{cases}$$

Rotacione a tela.

Logo:

$$\int_3^5 \frac{2x+5}{x^3-3x-2}dx=\int_3^5 \frac{1}{(x-2)}dx+\int_3^5 \frac{(-1)}{(x+1)}dx+\int_3^5 \frac{(-1)}{(x+1)^2}dx$$

Rotacione a tela.

Resolvendo as integrais imediatas, temos:

$$\int_3^5 \frac{2x+5}{x^3-3x-2}dx=[\ln|x-2|]_3^5-[\ln|x+1|]_3^5+\left[\frac{1}{(x+1)}\right]_3^5=\ln 3-\ln 1-\ln 6+\ln 4+\frac{1}{6}-\frac{1}{4}$$

$$\int_3^5 \frac{2x+5}{x^3-3x-2}dx=\ln\left(\frac{3.4}{6}\right)+\frac{2-3}{12}=\ln 2-\frac{1}{12}$$

Rotacione a tela.

$Q(x)$ apresenta raízes complexas sem multiplicidade

Neste caso, o polinômio $Q(x)$ de grau n terá pelo menos um par de raízes complexas sem multiplicidade. Lembre-se da álgebra, em que as raízes complexas aparecem em pares (complexos conjugados).

Assim, $Q(x)$, após a fatoração, apresentará, para cada par de raízes complexas sem repetição, um termo do tipo (ax^2+bx+c), com $b^2 – 4ac$, que são fatores quadrados irredutíveis, isto é, não podem ser transformados no produto de dois fatores lineares.

Cada par de raízes complexas terá uma parcela associada do tipo $\frac{Ax+B}{(ax^2+bxc)}$ com A, B, a, b e c reais. Então, este termo levará à integral:

$$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)}dx$$

Rotacione a tela.

Para cálculo dessa integral, dependendo do caso determinado pelos valores das constantes obtidas, utilizaremos as integrais imediatas envolvendo $ln(u)$ ou $arctg(u)$.

Atenção!

Lembre-se de que:

$$\int \frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\text{acrtg}\left(\frac{x}{a}\right)+k, k \text{ real}.$$

As raízes reais com ou sem multiplicidade que podem aparecer seguem o raciocínio dos itens anteriores. Os demais passos são idênticos aos casos anteriores.

$Q(x)$ apresenta raízes complexas com multiplicidade

Neste caso, o polinômio $Q(x)$ de grau n terá pares de raízes complexas repetidas, isto é, com multiplicidade r. Assim, $Q(x)$, após a fatoração, apresentará, para cada par de raízes complexas com multiplicidade r, um termo quadrático irredutível elevado à sua multiplicidade. Ou seja, $\left(ax^2+bx+c\right)^r$, com a, b e c reais e **r** natural maior do que 1.

Comentário

Cada par de raízes complexas com multiplicidade r estará associada a uma soma de parcelas do tipo:

$$\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)}+\frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^2}+\ldots+\frac{Bx+F}{(ax^2+bx+c)^r}$$

Em que r é a multiplicidade do par de raízes.

A solução da integral envolvendo esses termos usa integrais imediatas relacionadas a $ln(u)$, $arctg(u)$ e funções **racionais**.

As demais raízes reais e complexas sem multiplicidade que aparecerem seguem os termos vistos nos casos anteriores. Os demais passos são idênticos aos apresentados.

Mão na massa

Questão 1

Determine a integral $\int_2^5 \frac{x-8}{(x-1)(x+6)}\,dx$.

A $\ln\left(\frac{121}{256}\right)$

B $2\ln\left(\frac{256}{121}\right)$

C $2\ln\left(\frac{121}{256}\right)$

D $\ln\left(\frac{256}{121}\right)$

E $3\ln\left(\frac{256}{121}\right)$

Parabéns! A alternativa A está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EUsando%20a%20integra%C3%A7%C3%A3o%20por%20fra%C3%A7%C3%B5es%20parciais%20para%20resolver%20a%20integral%3A%
paragraph%20u-text--medium%20c-table'%3E%24%24%0A%5Cint_%7B2%7D%5E%7B5%7D%20%5Cfrac%7Bx-
8%7D%7Bx%5E%7B2%7D%2B5%20x-6%7D%20d%20x%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-text--
medium'%3ETemos%20que%20o%20integrando%20%C3%A9%20uma%20fun%C3%A7%C3%A3o%20racional%20pr%C3%B3pria%2C%20com%20den
6.%20%5C)%20%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0AQ%20(%20x%20)%3D%20x%20%5E%7B2%7D%2B5%20x%20-6%3D(%20x%20-1)
(%20x%20%2B6)%20%5Cquad%20%5Ctext%20%7B%20e%20%7D%20%5Cquad%20%5Cfrac%7B%20x%20-
8%7D%7B%20x%20%5E%7B2%7D%2B5%20x%20-6%7D%3D%5Cfrac%7B%20A%20%7D%7B%20x%20-
1%7D%2B%5Cfrac%7B%20B%20%7D%7B%20x%20%2B6%7D%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-text--
medium'%3ETransformamos%20o%20lado%20direito%20no%20mesmo%20denominador%3A%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-
paragraph%20u-text--medium%20c-table'%3E%24%24%0A%5Cfrac%7B%20A%20%7D%7B%20x%20-
1%7D%2B%5Cfrac%7B%20B%20%7D%7B%20x%20%2B6%7D%3D%5Cfrac%7B%20A%20(%20x%20%2B6)%2B%20B%20(%20x%20-
1)%7D%7B(%20x%20%2B6)(%20x%20-1)%7D%3D%5Cfrac%7B(%20A%20%2B%20B%20)%20x%20%2B(6%20A%20-
%20B%20)%7D%7B%20x%20%5E%7B2%7D%2B5%20x%20-6%7D%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-text--
medium'%3EPortanto%3A%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-text--medium%20c-table'%3E%24%24%0A%5Cfrac%7Bx-
8%7D%7Bx%5E%7B2%7D%2B5%20x-6%7D%3D%5Cfrac%7B(A%2BB)%20x%2B(6%20A-B)%7D%7Bx%5E%7B2%7D%2B5%20x-
6%7D%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-text--medium'%3EAgora%2C%20deve-
se%20comparar%20o%20numerador%20da%20esquerda%20%20%5C(%20P(x)%20%3D%20x%20%E2%80%93%208%20%5C)%20%20com%20o%20r
paragraph%20u-text--medium%20c-table'%3E%24%24%0Ax%20-8%3D(%20A%20%2B%20B%20)%20x%20%2B(6%20A%20-
%20B%20)%20%5Crightarrow%5C%7B%20A%20%2B%20B%20%3D16%20A%20-%20B%20%3D-8%20%5Crightarrow%207%20A%20%3D%0A-
7%20%5Crightarrow%20A%20%3D-1%20%5Crightarrow%20B%20%3D2%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-text-
-medium'%3EDessa%20forma%3A%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%5Cbegin%7Baligned%7D%0A%26%5Cint_%7B2%7D%5E%7B5%7D%20%5Cfrac%7Bx-8%7D%7Bx%5E%7B2%7D%2B5%20x-
6%7D%20d%20x%3D%5Cint_%7B2%7D%5E%7B5%7D%20%5Cfrac%7B-1%7D%7Bx-
1%7D%20d%20x%2B%5Cint_%7B2%7D%5E%7B5%7D%20%5Cfrac%7B2%7D%7Bx%2B6%7D%20d%20x%3D-%5Cleft%5B%5Cln%20%7Cx-
1%7C_%7B2%7D%5E%7B5%7D%2B%5Cleft%5B2%20%5Cln%20%7Cx%2B6%7C_%7B2%7D%5E%7B5%7D%5Cright.%5Cright.%20%5C%5C%5C%5C%0
2%20%5Cln%208-%5Cln%204%2B%5Cln%201%3D%5Cln%2011%5E%7B2%7D-%5Cln%208%5E%7B2%7D-
%5Cln%204%3D%5Cln%20%5Cleft(%5Cfrac%7B121%7D%7B64.4%7D%5Cright)%3D%5Cln%20%5Cleft(%5Cfrac%7B121%7D%7B256%7D%5Cright)%
paragraph%20u-text--medium%20c-table%20u-
centered'%3E%0A%24%24%0A%5Cbegin%7Bgathered%7D%0A%26%20f(4)%3D%5Cln%206%3D%5Cln%206%2B%5Cln%201%2Bk%20%5Crightarrow

Questão 2

Determine o valor de $f(8)$, sabendo que $f(x)$ faz parte da família de funções geradas pela integral $\int \frac{2x-1}{(x+2)(x-3)} dx$ e que $f(4) = ln6.$

A ln 20

B ln 30

C ln 40

D ln 50

E ln 60

Parabéns! A alternativa D está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EUsando%20a%20integra%C3%A7%C3%A3o%20por%20fra%C3%A7%C3%B5es%20parciais%20para%20resolver%20a%20integral%3A%
paragraph%20u-text--medium%20c-table'%3E%24%24%0A%5Cint%20%5Cfrac%7B2%20x-1%7D%7B(x%2B2)(x-
3)%7D%20d%20x%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0ATemos%20que%20o%20integrando%20%C3%A9%20uma%20fun%C3%A7%C3%A3o%20racional%20
2.%20%5C)%20%0A%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-text--medium%20c-table'%3E%24%24%0A%5Cfrac%7B2%20x%20%7D%7B(x%2B2)(x-

3)%7D%3D%5Cfrac%7B%20A%20%7D%7B%20x%20%2B2%7D%2B%5Cfrac%7B%20B%20%7D%7B%20x%20-
3%7D%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-text--
medium'%3ETransformamos%20o%20lado%20direito%20no%20mesmo%20denominador%3A%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-
paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%5Cfrac%7B%20A%20%7D%7B%20x%20%2B2%7D%2B%5Cfrac%7B%20B%20%7D%7B%20x%20-
3%7D%3D%5Cfrac%7B%20A%20(%20x%20-%203%20)%2B%20B%20(%20x%20%2B2)%7D%7B(%20x%20%2B2)(%20x%20-
3)%7D%3D%5Cfrac%7B(%20A%20%2B%20B%20)%20x%20%2B(%202%20B%20-3%20A%20)%7D%7B(%20x%20%2B2)(%20x%20-
3)%7D%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-text--
medium'%3EPortanto%3A%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%5Cfrac%7B2%20x%20-1%7D%7B(%20x%20%2B2)(%20x%20-
3)%7D%3D%5Cfrac%7B(%20A%20%2B%20B%20)%20x%20%2B(2%20B%20-%203%20A%20)%7D%7B(%20x%20%2B2)(%20x%20-
3)%7D%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-text--medium'%3EAgora%2C%20deve-
se%20comparar%20o%20numerador%20da%20esquerda%20%5C(%20P(x)%20%3D%202x%20%5C)%20com%20o%20numerador%20da%20direita.%
paragraph%20u-text--medium%20c-table'%3E%24%24%0A2%20x%20-%201%20%3D(%20A%20%2B%20B%20)%20x%20%2B(2%20B%20-
%203%20A%20)%20%5Crightarrow%5C%7B%20A%20%2B%20B%20%3D%202%202%20B%20-%203%20A%20%3D-
%201%20%5Crightarrow%205%20A%0A%3D%205%20%5Crightarrow%20A%20%3D%201%20%5Crightarrow%20B%20%3D%201%0A%24%24%3C%2
paragraph%20u-text--medium'%3EDessa%20forma%3A%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0Af(x)%3D%5Cint%20%5Cfrac%7B2%20x-1%7D%7B(x%2B2)(x-
3)%7D%20d%20x%3D%5Cint%20%5Cfrac%7B1%7D%7Bx%2B2%7D%20d%20x%2B%5Cint%20%5Cfrac%7B1%7D%7Bx-
3%7D%20d%20x%3D%5Cln%20%7Cx%2B2%7C%2B%5Cln%20%7Cx-
3%7C%0A%2B%20k%20%2C%20k%20%5Ctext%20%7B%20real%20%7D%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-
text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%5Cbegin%7Bgathered%7D%0Af%20(4)%3D%5Cln%206%2B%5Cln%201%2Bk%3D%5Cln%206%20%5Crightarrow%20k%20%3

Questão 3

Determine a integral indefinida $\int \frac{x^2+x+25}{(x+1)(x-4)^2} dx$.

A $\ln|x+4| - \frac{9}{(x-4)} + k,\ \text{k real}$

B $\ln|x+1| + \ln|x-4| + \frac{1}{(x-4)} + k, k \text{ real}$

C $\ln|x+1| - \frac{9}{(x-4)} + k, k \text{ real}$

D $2\ln|x+1| + \frac{1}{(x-4)} + k, k \text{ real}$

E $|2\ln|x+1| + \frac{5}{(x-4)} + k, k \text{ real}$

Parabéns! A alternativa C está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EIntegra%C3%A7%C3%A3o%20por%20fra%C3%A7%C3%B5es%20parciais.%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%2(
video-
player%20src%3D%22https%3A%2F%2Fplay.yduqs.videolib.live%2Fhome%3Ftoken%3D90e1acec0e394198b66b965389feebc9%22%20videoId%3D%
VID2%22%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3C%2Fyduqs-video-
player%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20

Questão 4

Determine o valor de $\int_0^2 \frac{x^3+4x+3}{x^2+4} dx$.

A $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}$

B $\frac{3\pi}{5}+\frac{3}{2}$

C $\frac{3\pi}{8}+\frac{1}{2}$

D $\frac{\pi}{8}+\frac{3}{2}$

E $\frac{\pi}{5}-\frac{1}{2}$

Parabéns! A alternativa C está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0AP%20(%20x%20)%3D%20x%20%5E%7B3%7D%2B4%20x%20%2B3%3D%20x%20%5Cleft(%20x%20%5E%7B2%7D%2B4%5Crigh
paragraph%20u-text--medium'%3EAssim%3A%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%5Cfrac%7BP(X)%7D%7Bq(X)%7D%3D%5Cfrac%7Bx%5Cleft(x%5E%7B2%7D%2B4%5Cright)%2B3%7D%7Bx%5E%7B2%7D%2E
paragraph%20u-text--medium'%3EEnt%C3%A3o%3A%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%5Cint_%7B0%7D%5E%7B2%7D%20%5Cfrac%7Bx%5E%7B3%7D%2B4%20x%2B3%7D%7Bx%5E%7B2%7D%2B4%7D%20d%20x
paragraph%20u-text--
medium'%3EObserve%20que%20as%20duas%20parcelas%20da%20direita%20j%C3%A1%20s%C3%A3o%20integrais%20imediatas.%3C%2Fp%3E%0
paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%5Cint_%7B0%7D%5E%7B2%7D%20%5Cfrac%7Bx%5E%7B3%7D%2B4%20x%2B3%7D%7Bx%5E%7B2%7D%2B4%7D%20d%20x
%20%5Cfrac%7B3%7D%7B2%7D%20%5Coperatorname%7Barctg%7D(0)%2B%5Cfrac%7B1%7D%7B2%7D%202%5E%7B2%7D%0A%24%24%3C%2Fp%
paragraph%20u-text--medium%20c-table'%3E%24%24%0A%3D%5Cfrac%7B3%7D%7B2%7D%20%5Cfrac%7B%5Cpi%7D%7B4%7D-
%5Cfrac%7B3%7D%7B2%7D%2B2%3D%5Cfrac%7B3%20%5Cpi%7D%7B8%7D%2B%5Cfrac%7B1%7D%7B2%7D%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%20%2

Questão 5

Determine o valor da integral $\int_1^2 \frac{10x^2+40x+12}{x(x+1)^2}dx.$

A $arctg(4)+2ln3-6$

B $2ln3+4ln2-5$

C $14ln2-2ln3+3$

D $10ln2+ln3+6$

E $9ln2 + 3ln3 + 6$

Parabéns! A alternativa C está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EIntegra%C3%A7%C3%A3o%20por%20fra%C3%A7%C3%B5es%20parciais.%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%2(
video-
player%20src%3D%22https%3A%2F%2Fplay.yduqs.videolib.live%2Fhome%3Ftoken%3Df25ffe3db81b45289cf1d7006a322e3e%22%20videoId%3D%
VID3%20%20%20%22%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3C%2Fyduqs-video-
player%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20

Questão 6

Determine o valor de $\int_2^4 \frac{5}{(x-1)(x^2+4)} dx$.

A $\ln\left(\frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{30}}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 4 + \frac{\pi}{8}$

B $\ln\left(\frac{3\sqrt{8}}{\sqrt{20}}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi}{8}$

C $\ln\left(\frac{3\sqrt{8}}{\sqrt{20}}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 20 + \frac{\pi}{6}$

D $\ln\left(\frac{3\sqrt{8}}{\sqrt{20}}\right) + \frac{1}{8}\operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi}{32}$

E $\ln\left(\frac{3\sqrt{8}}{\sqrt{20}}\right) + \frac{1}{4}\operatorname{arctg} 20 + \frac{\pi}{3}$

Parabéns! A alternativa B está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EO%20integrando%20%C3%A9%20uma%20fun%C3%A7%C3%A3o%20racional%20pr%C3%B3pria.%20O%20numerador%20%20%5C(%2
paragraph%20u-text--medium'%3EAssim%3A%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%5Cfrac%7B5%7D%7B(x-1)%5Cleft(x%5E%7B2%7D%2B4%5Cright)%7D%3D%5Cfrac%7B%20A%20%7D%7B%20x%20-
1%7D%2B%5Cfrac%7B%20B%20x%20%2B%20C%20%7D%7B%20x%20%5E%7B2%7D%2B4%7D%3D%5Cfrac%7B%20A%20%5Cleft(%20x%20%5E%7B
(%20x%20-1)%7D%7B(%20x%20-
1)%5Cleft(%20x%20%5E%7B2%7D%2B4%5Cright)%7D%3D%20%5Cfrac%7B(%20A%20%2B%20B%20)%20x%20%5E%7B2%7D%2B(%20C%20-
%20B%20)%20x%20%2B(4%20A%20-%20C%20)%7D%7B(%20x%20-
1)%5Cleft(%20x%20%5E%7B2%7D%2B4%5Cright)%7D%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-text--
medium'%3ESe%20compararmos%20o%20denominador%3A%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%5Cleft%5C%7B%5Cbegin%7Barray%7D%7Bl%7D%20%0AA%20%2B%20B%20%3D%200%20%5C%5C%0AC%20-
%20B%20%3D%200%20%5C%5C%0A4%20A%20-
%20C%20%3D%205%0A%5Cend%7Barray%7D%20%5Crightarrow%20A%20%3D%201%20%5Crightarrow%20B%20%3D-
%201%20%5Ctext%20%7B%20e%20%7D%20C%20%3D-%201%20%5Cright.%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-
text--medium'%3EAssim%3A%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%5Cint_%7B2%7D%5E%7B4%7D%20%5Cfrac%7B5%7D%7B(x-
1)%5Cleft(x%5E%7B2%7D%2B4%5Cright)%7D%20d%20x%3D%5Cint_%7B2%7D%5E%7B4%7D%20%5Cfrac%7B1%7D%7Bx-
1%7D%20d%20x%2B%5Cint_%7B2%7D%5E%7B4%7D%20%5Cfrac%7B-x-
1%7D%7Bx%5E%7B2%7D%2B4%7D%20d%20x%3D%5Cint_%7B2%7D%5E%7B4%7D%20%5Cfrac%7B1%7D%7Bx-1%7D%20d%20x-
%0A%5Cint_%7B2%7D%5E%7B4%7D%20%5Cfrac%7Bx%7D%7Bx%5E%7B2%7D%2B4%7D%20d%20x-
%5Cint_%7B2%7D%5E%7B4%7D%20%5Cfrac%7B1%7D%7Bx%5E%7B2%7D%2B4%7D%20d%20x%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-
paragraph%20u-text--medium%20c-table'%3E%24%24%0A%3D%5B%5Cln%20%7Cx-1%7C%5D_%7B2%7D%5E%7B4%7D-

%5Cleft%5B%5Cfrac%7B1%7D%7B2%7D%20%5Cln%20%5Cleft%7C%20x%20%5E%7B2%7D%2B4%5Cright%7C%5Cright%5D_%7B2%7D%5E%7B4%7I
%5Cleft%5B%5Cleft%5B%5Cfrac%7B1%7D%7B2%7D%20%5Coperatorname%7Barctg%7D%5Cleft(%5Cfrac%7B%20x%20%7D%7B2%7D%5Cright)%5C
paragraph%20u-text--medium%20c-table'%3E%24%24%0A%3D%5Cln%203-%5Cln%201-
%5Cfrac%7B1%7D%7B2%7D%20%5Cln%2020%2B%5Cfrac%7B1%7D%7B2%7D%20%5Cln%208-
%5Cfrac%7B1%7D%7B2%7D%20%5Coperatorname%7Barctg%7D%202%2B%5Cfrac%7B1%7D%7B2%7D%20%5Coperatorname%7Barctg%7D(1)%3D%
%5Cfrac%7B1%7D%7B2%7D%20%5Coperatorname%7Barctg%7D%202%2B%5Cfrac%7B%5Cpi%7D%7B8%7D%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%20%20

Teoria na prática

Sabemos da física que a derivada da posição com o tempo é a velocidade. Dessa forma, a variação de posição pode ser obtida por meio da integral da função velocidade entre dois intervalos de tempo.

Exemplo: Determine a variação da posição entre os instantes t = 0s e t = 10s, sabendo que a velocidade do objeto é dada pela função

$$v(t)=\frac{100}{t^3+5t^2+100t+500}, \text{ em m/s}$$

Mostrar solução

Falta pouco para atingir seus objetivos.

Vamos praticar alguns conceitos?

Questão 1

Determine a integral $\int \frac{x}{x^2+x-2}dx$.

A $\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{2}{3}\ln|x-2|+k, k \text{ real}$

B $\frac{1}{2}\ln|x+2|+\frac{2}{3}\ln|x-1|+k, k \text{ real}$

C $\frac{1}{3}\ln|x-1|+\frac{2}{3}\ln|x+2|+k, k \text{ real}$

D $\frac{1}{3}\ln|x-2|+\frac{1}{2}\ln|x-12|+k,\ \text{k real}$

E $\frac{1}{2}\ln|x+2|+\frac{1}{3}\ln|x-2|+k, k\text{ real}$

Parabéns! A alternativa C está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EO%20integrando%20%C3%A9%20uma%20fun%C3%A7%C3%A3o%20racional%20pr%C3%B3pria.%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%
paragraph%20u-text--
medium'%3EO%20numerador%20%5C(%20Q(x)%20%3D%20x%5E2%20%2B%20x%20%E2%80%93%202%20%3D%20(x%20%E2%80%93%201)%20(x%
paragraph%20u-text--medium'%3EAssim%3A%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%5Cfrac%7B%20x%20%7D%7B%20x%20%5E%7B2%7D%2B%20x%20-2%7D%3D%5Cfrac%7B%20A%20%7D%7B%20x%20-
1%7D%2B%5Cfrac%7B%20B%20%7D%7B%20x%20%2B%202%20%7D%3D%5Cfrac%7B%20A%20(%20x%20%2B2)%2B%20B%20(%20x%20-
1)%7D%7B(%20x%20-1)(%20x%20%2B2)%7D%3D%5Cfrac%7B(%20A%20%2B%20B%20)%20x%20%2B(2%20A%20-
%20B%20)%7D%7B%20x%20%5E%7B2%7D%2B%20x%20-2%7D%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-text--
medium'%3ESe%20compararmos%20o%20denominador%3A%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%5Cleft%5C%7B%5Cbegin%7Barray%7D%7Bc%7D%20%0AA%20%2B%20B%20%3D%201%20%5C%5C%5C%5C%0A2%20A%20
%20B%20%3D%200%0A%5Cend%7Barray%7D%20%5Crightarrow%20B%20%3D2%20A%20%5Crightarrow%20A%20%3D%5Cfrac%7B%201%20%7D%
paragraph%20u-text--medium%20c-table'%3E%24%24%0A%5Cint%20%5Cfrac%7Bx%7D%7Bx%5E%7B2%7D%2Bx-
2%7D%20d%20x%3D%5Cint%20%5Cfrac%7B1%7D%7B3%7D%20%5Cfrac%7B1%7D%7Bx-
1%7D%20d%20x%2B%5Cint%20%5Cfrac%7B2%7D%7B3%7D%20%5Cfrac%7B1%7D%7Bx%2B2%7D%20d%20x%3D%5Cfrac%7B1%7D%7B3%7D%20%
1%7C%2B%5Cfrac%7B2%7D%7B3%7D%20%5Cln%20%7Cx%2B2%7C%2Bk%2C%20k%20%5Ctext%20%7B%20real%20%7D%0A%24%24%3C%2Fp%3E

Questão 2

Determine o valor de $\int_0^3 \frac{x^4+9x^2+1}{x^2+9} dx$.

A $\frac{\pi}{4}+3$

B $\frac{\pi}{12}+9$

C $\frac{\pi}{4}-9$

D $\frac{\pi}{12}-3$

E $\frac{\pi}{4}-12$

Parabéns! A alternativa B está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EO%20integrando%20%C3%A9%20uma%20fun%C3%A7%C3%A3o%20racional%20impr%C3%B3pria%2C%20pois%20o%20grau%20do%
lo%20em%20fra%C3%A7%C3%A3o%20pr%C3%B3pria%2C%20deve-
se%20dividir%20o%20numerado%20pelo%20denominador%20ou%20observar%20que%3A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%
paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0AP(x)%3Dx%5E%7B4%7D%2B9%20x%5E%7B2%7D%2B1%3Dx%5E%7B2%7D%5Cleft(x%5E%7B2%7D%2B9%5Cright)%2B1%0A%
paragraph%20u-text--medium'%3EAssim%3A%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-text--medium%20c-

table'%3E%24%24%0A%5Cfrac%7B%20P%20(%20X%20)%7D%7B%20q%20(%20X%20)%7D%3D%5Cfrac%7B%20x%20%5E%7B2%7D%5Cleft(%20x%2
paragraph%20u-text--medium'%3EEnt%C3%A3o%3A%3C%2Fp%3E%0A%3Cp%20class%3D'c-paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%5Cint_%7B0%7D%5E%7B3%7D%20%5Cfrac%7Bx%5E%7B4%7D%2B9%20x%5E%7B2%7D%2B1%7D%7Bx%5E%7B2%7D%2B9%
paragraph%20u-text--
medium'%3EObserve%20que%20as%20duas%20parcelas%20da%20direita%20j%C3%A1%20s%C3%A3o%20integrais%20imediatas.%3C%2Fp%3E%0
paragraph%20u-text--medium%20c-
table'%3E%24%24%0A%5Cbegin%7Bgathered%7D%0A%5Cint_%7B0%7D%5E%7B3%7D%20%5Cfrac%7Bx%5E%7B4%7D%2B9%20x%5E%7B2%7D%2B
%5Cfrac%7B1%7D%7B3%7D%20%5Coperatorname%7Barctg%7D(0)%2B%5Cfrac%7B1%7D%7B3%7D%203%5E%7B3%7D%20%5C%5C%0A%3D%5Cfr
0%2B9%3D%5Cfrac%7B%5Cpi%7D%7B12%7D%2B9%0A%5Cend%7Bgathered%7D%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%

Considerações finais

Definimos e utilizamos a operação da integração indefinida e definida. Inicialmente, analisamos a integração indefinida como a antiderivada que tem como resultado uma família de funções denominadas primitivas. Posteriormente, determinamos a integral definida, que tem como resultado um número real. Ela é obtida pelo limite de uma Soma de Riemann.

Apresentamos o Teorema Fundamental do Cálculo e vimos a sua importância no relacionamento do cálculo integral, principalmente na obtenção das integrais definidas de forma mais direta, usando as funções primitivas do integrando. No segundo, terceiro e quarto módulos, introduzimos as principais técnicas de integração, que permitiram a resolução de integrais indefinidas e definidas com integrandos mais complexos.

A partir de agora, você seja capaz de aplicar a integração definida e indefinida nos diversos problemas do cálculo integral.

Referências

GUIDORIZZI, H. L. **Cálculo** – Volume 1. 5 ed. São Paulo: LTC, 2013.

KHAN ACADEMY. **Curso de Cálculo Integral** – Integração. Consultado na internet em 14 jul. de 2020.

LARSON, R.; EDWARDS, B.H. **Cálculo** – Com aplicações. 6 ed. São Paulo: LTC, 2003.

STEWART, J. **Cálculo** – Volume 1. 5 ed. São Paulo: Thomson Learning, 2008.

Explore +

Confira a indicação que separamos especialmente para você!

Pesquise “Integração” no site da Khan Academy.