Disciplina: Matemática Computacional

Aula 8: Predicados e quantificadores

Apresentação

Como visto na aula anterior, o profissional de engenharia se depara com vetores em várias situações do dia a dia, calculando esforços sobre corpos, forças e campos eletromagnéticos ou mesmo simulando situações que envolvam otimizações de recursos, dentre outros exemplos.

No entanto, veremos nesta aula que tais conceitos não são suficientes para ilustrar todas as situações-problema existentes em lógica matemática e que, por seu caráter aplicado, se mostram relevantes na representação de eventos e raciocínios do dia a dia.

Objetivos

- Conceituar predicados e quantificadores;
- Identificar as formas de representação de predicados e quantificadores;
- Aplicar os conceitos de predicados e quantificadores em situações-problema de lógica matemática.

Sentença aberta, o denominado predicado

Fonte: Pixabay <https://pixabay.com/pt/illustrations/pagar-d%C3%ADgito-n%C3%BAmero-preenchimento-1036469/>

Uma proposição é afirmativa, apresenta um pensamento de sentido completo e pode ser classificada como verdadeira ou falsa: "Juliana é linda" é um exemplo de proposição. No entanto, além disso, há outros conceitos de largo emprego em engenharia e que envolvem sentenças abertas, as quais não contemplam essas características.

Por exemplo, "x é par" não apresenta um raciocínio de sentido completo, tampouco pode ser descrita como verdadeira ou falsa, enquanto não sabemos o valor de x: 2, 3, ¾ ou o que seja. Aqui, vemos um exemplo de sentença aberta, o denominado predicado.

Assim, começaremos o estudo do cálculo de predicados na modelagem e resolução de operações com sentenças abertas. Abordaremos a definição de predicados, sua diferenciação quanto a proposições, as definições de conjunto universo e conjunto verdade, bem como a definição e exemplos de quantificadores.

Definição de predicados

Proposições

Vimos na Aula 5 que proposição é toda sentença declarativa que pode ser classificada como verdadeira ou falsa.

Quando se afirma, por exemplo, que “—7 é um número inteiro”, é possível verificar que se trata de uma afirmação verdadeira.

Mesmo em proposições como “Rafaela é atleta”, ainda que não a conheçamos, pode-se supor que alguém, em algum lugar, a conheça e possa dizer se ela é realmente atleta ou não.

Então, as sentenças “—7 é um número inteiro” e “Rafaela é atleta” são proposições.

No entanto, há sentenças que, inicialmente, não podem ser classificadas como verdadeiras ou falsas. Isso ocorre quando nos referimos a um conjunto de números ou coleção de pessoas ou elementos, e não a um valor ou a alguém especificamente.

Predicados

Reformulando as duas sentenças apresentadas anteriormente, não é possível afirmar se “x é um número natural” ou se “x é atleta”, pois não temos como avaliar a veracidade dessas sentenças.

Assim, as sentenças “x é um número natural” e “x é atleta” são denominadas sentenças abertas, as quais também denominamos de predicados. Nesses dois predicados, vemos que a letra x (pode ser utilizada qualquer outra) representa a variável do predicado.

Também representamos, de forma geral, um predicado por qualquer letra maiúscula do nosso alfabeto. Se a variável envolvida é representada por x, então o predicado pode ser indicado por P (x).

Além disso, é crucial contar com mais dois conceitos, muito úteis no estudo de cálculo de predicados:

1

Conjunto universo

Representa o conjunto de possibilidades lógicas que a variável x pode assumir em uma sentença aberta. O conjunto universo é representado como Ux ou, simplesmente, U.

2

Conjunto verdade

Representa o conjunto que contém o(s) elemento(s) que, ao substituir(em) a variável x, torna(m) a sentença verdadeira. Por sua vez, a notação utilizada para representar este conjunto é Vx ou V.

Exemplo

Em primeiro lugar, considere a sentença “$x + 4 < 6$”. Trata-se de uma sentença aberta ou predicado, pois envolve a variável x. Assim, a determinação de seu valor lógico depende dos valores que são atribuídos a x. Podemos representá-la na forma: $P(x): x + 4 < 6$.

Possibilidade 1

Considerando U = N, o conjunto verdade será dado por V = {0,1}, pois dentre os números naturais somente o “0” e o “1” satisfazem P (x).

Agora que você já identificou que se trata de um predicado, precisamos definir o conjunto de valores que o tornam verdadeiro, ou seja, seu conjunto verdade V. No entanto, para determinar seu conjunto verdade é preciso, antes, definir o conjunto universo U. Vamos analisar duas possibilidades:

Possibilidade 2

Considerando U = N, o conjunto verdade será dado por V = {0,1}, pois dentre os números naturais somente o “0” e o “1” satisfazem P (x).

Temos a sentença x2 + 5x + 6. Se o conjunto universo for U = R, temos que V = {—2, —3}. No entanto, se U for o conjunto dos números naturais, temos que V é o conjunto vazio, pois não haverá elementos do conjunto universo que satisfaçam à sentença.

Quantificadores

É comum encontrar expressões tais como “tudo”, “todo”, “para todo”, “qualquer que seja”, “existe”, “existe um único”, dentre outras, para indicar a extensão do emprego de um predicado, expressando uma ideia da quantidade de valores que pertencem ao conjunto-verdade de uma sentença aberta. Essas expressões são denominadas de quantificadores.

Atenção

Dentre os diferentes tipos que existem, é importante conhecer os dois tipos mais utilizados de quantificadores, que são:

- Universal (para todo, todo, qualquer que seja);
- Existencial (existe, existe um único).

O quantificador universal é expresso pelo símbolo “∀”. É utilizado para exprimir o fato de que, para todo x em um dado conjunto-universo, a sentença P (x) é verdadeira. Simbolicamente, temos “∀x, P (x)”.

Exemplo

A sentença “Todo número inteiro é racional” pode ser escrita, na linguagem simbólica, como $\forall x, x \in Z \rightarrow x \in Q$ (lê-se: “para todo x pertencente a Z, temos x pertencente a Q” ou “qualquer que seja x pertencente a Z, temos x pertencente a Q”).

Outras formas de expressar esse predicado são:

$P(x): x \in Q$
$(\forall x \in Z)(P(x))$

O conjunto universo dessa sentença é o conjunto dos números inteiros (U = Z). Essa sentença aberta é verdadeira para todos os valores do conjunto universo, pois para qualquer valor inteiro que atribuirmos a x, teremos satisfeita a condição $P(x): x \in Q$. Sabemos que os números inteiros são também números racionais.

Assim, concluímos que o conjunto verdade dessa sentença quantificada é V = Z. Daí, você pode já observar um ponto interessante: as sentenças quantificadas com o quantificador universal são verdadeiras somente quando o conjunto universo e o conjunto verdade são iguais.

Exemplo

O quantificador universal é utilizado quando queremos nos referir a todos os elementos de um conjunto. Se afirmarmos que “todo número natural ímpar não é múltiplo de 2”, podemos reescrever essa afirmação de outra forma:

- Seja *a* um número natural ímpar;
- Logo, *a* pode ser escrito na forma 2n + 1, sendo que n é natural, isto é, para todo a pertencente aos naturais, a = 2n + 1.

Para simplificar a notação, podemos substituir o termo todo por ∀, o qual possui o mesmo significado, podendo ainda ser lido como “qualquer que seja” ou “para cada”. Logo, podemos expressar essa afirmação como $n \in \mathbb{N}, \forall a, a\ ímpar, a = 2 \cdot n + 1$.

Exemplo

Seja n um número natural qualquer. Podemos afirmar que $\forall n \in \mathbb{N}, n \cdot 0 = 0 \cdot n = 0$. A afirmação apresentada em linguagem simbólica ilustra que, independentemente do número natural que escolhermos, o seu produto com zero resultará em zero.

Já o quantificador existencial é utilizado para expressar que a proposição P (x) é verdadeira não para todos, mas para um ou mais elementos de um dado conjunto.

Atenção

O quantificador universal é expresso pelo símbolo “∃”, que pode ser lido como “existe pelo menos um”.

Sentenças abertas como “existe x tal que P (x)”, “existe pelo menos um x tal que P (x)” ou, ainda, “para algum x ocorre P (x)” podem ser escritas, na forma simbólica, como: $\exists x, P(x)$. Veja os exemplos a seguir.

Exemplo 1

Considere a sentença: “∃x, 5x + 15 = 0”, com U = Z. Ela é verdadeira, pois, para x = −3, a equação “5x + 15 = 0” é verdadeira. Portanto, existe um valor de x que satisfaz a condição apresentada, isto é, que faz a sentença quantificada ser verdadeira.

Neste exemplo, em particular, o conjunto verdade é V = {—3}. Por sinal, se o conjunto verdade fosse vazio, nós teríamos uma sentença quantificada falsa.

Por outro lado, considere novamente a sentença: “∃x, 5x + 15 = 0”, mas com U = N.

Observe que, nesse caso, a sentença quantificada é falsa, pois o único valor real que satisfaz a condição apresentada é o “—3”, que não é um elemento pertencente ao universo, pois não é um número natural. Temos, portanto, V = ∅.

Exemplo 2

Existe pelo menos um número natural n que, subtraído de seu cubo, resulta em 0, isto é, $\exists n \in \mathbb{N}, n^3-n$=0.

Será que a afirmação anterior é válida para qualquer valor de n? A resposta é: não. Se escolhermos o valor de 2 para n, teremos 23 — 2 = 8 — 2 = 6. Logo, vemos que nem todos os valores de n fazem com que a sentença resulte em zero.

Os únicos valores básicos para que a igualdade seja verdadeira são n = 1 e n = 0. Por sinal, existe ainda o valor de n —1, mas nós não o consideramos parte do conjunto verdade porque —1 não pertence ao conjunto dos números naturais.

Atenção

Quando a condição P (x) refere-se a valores numéricos e o conjunto universo não é explicitado, deve-se considerar o conjunto universo U como o conjunto dos números reais R.

Exemplo

Seja P (x) = x + 8 ≥ 10. Vamos determinar o conjunto verdade de cada uma das sentenças apresentadas a seguir:

- **a)** ∃x,P(x)
- **b)** ∀x,P(x)

No caso da letra a), como não foi definido o conjunto universo, consideramos U = R. Dessa forma, a sentença P (x) tem como conjunto verdade V = [2, ∞[. Como V é um conjunto não vazio, concluímos que a sentença quantificada do item (a) é verdadeira, pois existe pelo menos um valor (na verdade, um conjunto infinito de valores) que faz a sentença aberta ser verdadeira.

Já no caso da letra b), como V ≠ U, concluímos que a sentença quantificada é falsa, pois nem todos os elementos do universo satisfazem a condição P(x) indicada no exemplo.

Representação de quantificadores como conjunções ou disjunções

Para finalizar esta aula, é importante saber que sentenças quantificadas também podem ser expressas através da disjunção ou conjunção de proposições:

A sentença quantificada universal "∀x, P (x)", considerando como conjunto universo U = {a1, a2, ... , an}, é equivalente à conjunção P (a1) ∧ P (a2) ∧ ... ∧ P (an).

Em linguagem simbólica, escrevemos:

$\forall$x, P (x) $\Leftrightarrow$ P (a1) $\wedge$ P (a2) $\wedge$ ... $\wedge$ P (an)

A sentença quantificada existencial "∃x, P (x)", considerando como conjunto universo U = {a1, a2, ... , an}, é equivalente à disjunção P (a1) ∨ P(a2) ∨ ... ∨ P (an).

Em linguagem simbólica, escrevemos:

$\exists$x, P (x) $\Leftrightarrow$ P (a1) $\vee$ P (a2) $\vee$ ... $\vee$ P (an)

Atividades

1. A definição "conjunto de possibilidades lógicas que a variável x pode assumir em uma sentença aberta" se refere ao conceito de:

a) Conjunto verdade
b) Conjunto universo
c) Conjunto variável
d) Conjunto aberto
e) Nenhuma das alternativas anteriores.

2. Veja as seguintes sentenças abertas:

- P(x): $x^2 - 5x + 6 = 0$
- Q(x): $x + 4 <= 0$
- U = R

Assinale a ÚNICA alternativa que apresenta corretamente a sequência de valores lógicos para:

- ∀x, P(x)
- ∃x, P (x)
- ∀x, Q (x)

a) F – F – F
b) V – V – V
c) F – V – F
d) V – V – F
e) F – V – V

---

3. Assinale a ÚNICA alternativa que apresenta a negação da sentença "Para todo y, existe x tal que x + y = 1":

a) Existe ao menos um valor de y, tal que, para ao menos um valor de x, o valor de x + y é diferente de 1.
b) Existe ao menos um valor de y, tal que, para todo x, o valor de x + y é diferente de 1.
c) Existe ao menos um valor de y, tal que, para todo x, o valor de x + y é igual a 1.
d) Para todos os valores de x e y, o valor de x + y é diferente de 1.
e) Nenhuma das alternativas anteriores

---

4. A definição "conjunto que contém o(s) elemento(s) que, ao substituir(em) a variável x, torna(m) a sentença verdadeira" se refere ao conceito de:

a) Conjunto verdade
b) Conjunto universo
c) Conjunto variável
d) Conjunto aberto
e) Nenhuma das alternativas anteriores

Notas

Referências

BROCHI, A. L. C. **Matemática aplicada à computação**. Rio de Janeiro: Editora SESES, 2016. 200p.

Próximos passos

- Variáveis livres e ligadas;
- Negação e alcance do escopo de quantificadores, enfatizando suas principais definições e representação;
- Representação de situações do cotidiano;
- Informações relevantes expressas por meio de quantificadores.

Explore mais

Certamente, há materiais adicionais que podem complementar e ampliar seu conhecimento sobre predicados e quantificadores, motivando-o ainda mais para os novos desafios que virão. Assim, segue uma lista de sites na internet para que você os consulte depois:

- Lógica e matemática discreta: Aula 7 - Quantificadores e funções <https://www.youtube.com/watch?v=ENptMNeiDTQ> ;
- Matemática discreta – 03 <//www.univasf.edu.br/~jorge.cavalcanti/Mat_Disc_Parte03.pdf> ;
- Lógica de proposições quantificadas: cálculo de predicados <https://homepages.dcc.ufmg.br/~loureiro/md/md_2ProposicoesQuantificadas.pdf> ;