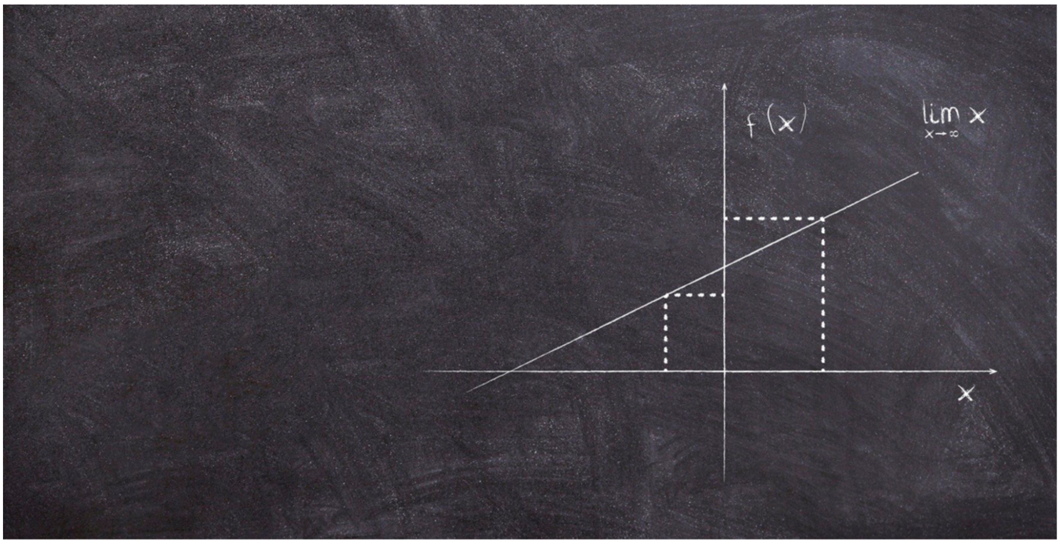


Limites: conceitos, propriedades e exemplos

Prof. Jorge Luís Rodrigues Pedreira de Cerqueira

Descrição

Limite de uma função real, seus conceitos e suas propriedades.

Propósito

Descrever o conceito de limite de uma função real por meio de uma abordagem intuitiva e analítica. Aplicar essa definição na continuidade e na obtenção das retas assíntotas.

Objetivos

Módulo 1

Definição de limite

Aplicar a abordagem intuitiva, simbólica e analítica do limite de uma função real.

Módulo 2

Cálculo de limite

Calcular o limite de uma função real.

Módulo 3

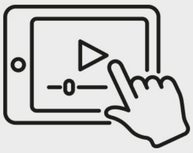
Continuidade de funções

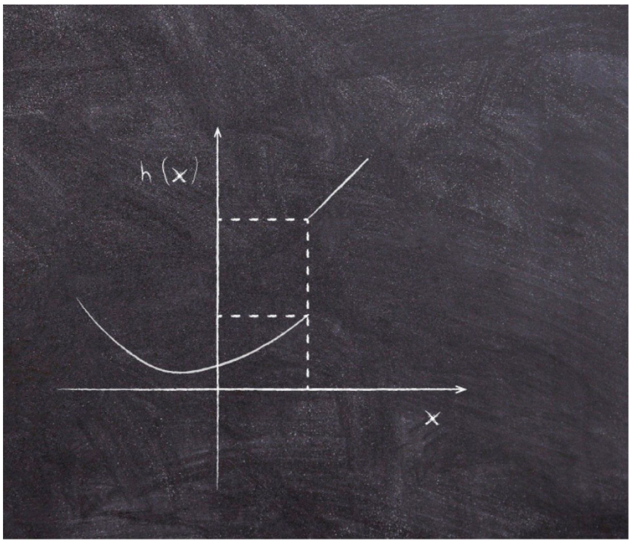
Aplicar o cálculo do limite na verificação da continuidade da função e na obtenção das assíntotas.

Introdução

Olá! Antes de começar sua leitura, assista ao vídeo a seguir e entenda o limite de uma função real, assim como seus conceitos e suas propriedades.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.





1 - Definição de limite

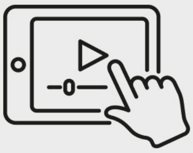
Ao final deste módulo, você será capaz de aplicar a abordagem intuitiva, simbólica e analítica do limite de uma função real.

Vamos começar!

Abordagem intuitiva, simbólica e analítica do limite de uma função

Assista ao vídeo a seguir para conhecer alguns conceitos iniciais importantes para o estudo deste módulo.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Noção intuitiva de uma função real

Em muitas aplicações da matemática, será necessário conhecer o comportamento de uma função quando a variável independente se aproximar de determinado valor. Em outras palavras, será importante saber para que valor essa função tende (ou se aproxima) quando o valor do seu domínio tender (ou se aproximar) de um número dado.

Essa análise do comportamento de uma função real de variável real é obtida por meio da operação matemática denominada de limite de uma função.

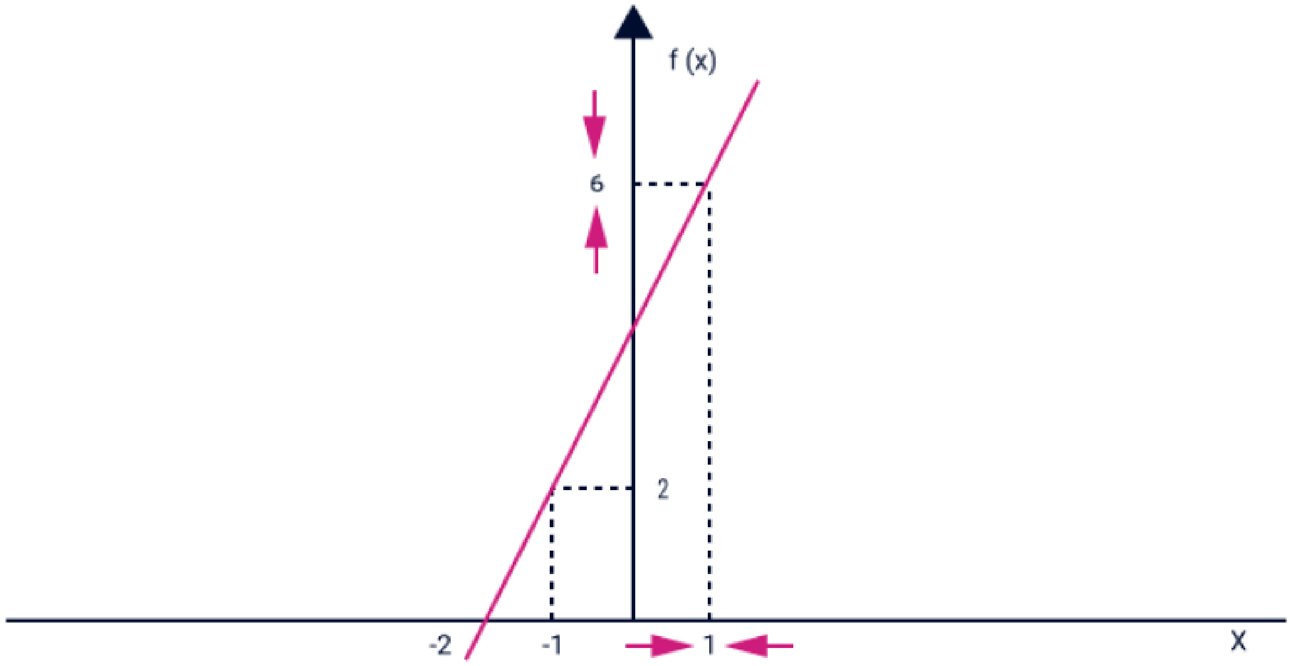
Comentário

A variável de entrada é denominada variável **independente**, sendo representada pela variável x e compondo o **domínio** da função. Já a variável da **saida** (valor da função) é chamada de variável **dependente**, sendo representada por $f(x)$ ou por y e compondo o **contradomínio** da função.

O limite de uma função pode ser abordado de forma intuitiva ou com uma formalidade matemática maior, utilizando uma simbologia e uma definição formal.

A aplicação dessa abordagem vai permitir que você descubra o valor do limite da função quando a variável de seu domínio tender a um número real. Você pode fazer isso observando o comportamento da função por meio de seu gráfico ou de uma tabela contendo seus valores.

Considere a função $f(x) = 2x + 4$ com domínio no conjunto dos números reais, cuja representação se encontra a seguir.



Foque o comportamento da função quando os valores de x se aproximam do número real 1. Observe que essa aproximação pode ocorrer por meio de dois sentidos opostos.

O primeiro sentido é por intermédio dos valores **superiores** ao número 1 ou valores à **direita** de 1 (vide a tabela). Representamos essa aproximação por $x \rightarrow 1_{+}$.

Aproximação por valores superiores ao 1 (à direita de 1)					
1,2	1,1	1,05	1,02	1,01	1,005

O segundo sentido é por meio dos valores **inferiores** ao número 1 ou valores à **esquerda** de 1. Representamos essa aproximação por $x \to 1_{-}$.

Aproximação por valores superiores ao 1 (à direita de 1)					
0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,995

Tal aproximação terá, como consequência, uma variação no valor da função $f(x)$.

As tabelas a seguir apresentam os valores obtidos pela função ao haver as aproximações descritas.

x	$f(x) = 2x + 4$
1,2	6,4
1,1	6,2
1,05	6,1
1,02	6,04
1,01	6,02
1,005	6,01
1,001	6,002
1,0001	6,0002
1,001	6,002
1,00001	6,00002

x	$f(x) = 2x + 4$
1,000001	6,000002

X	$f(x) = 2x + 4$
0,8	5,6
0,9	5,8
0,95	5,9
0,98	5,96
0,99	5,98
0,995	5,99
0,999	5,998
0,9999	5,9998
0,9999	5,99998
0,99999	5,99998
0,999999	5,999998

Conforme o valor de x se aproxima do número 1 tanto pelos valores à direita quanto por aqueles à esquerda, a função $f(x)$ fica mais próxima do número 6.

> **Em outras palavras, quanto mais o valor de x se aproxima de $1 (x \to 1)$, mais o valor de $f(x)$ se aproxima de 6 $(f(x) \to 6)$. Dizemos, assim, que o limite de $f(x)$ é igual a 6 quando x tende a 1.**

Ao retornar e observar novamente o gráfico, você verá como $f(x)$ se aproxima do número 6 conforme x se aproxima do número 1.

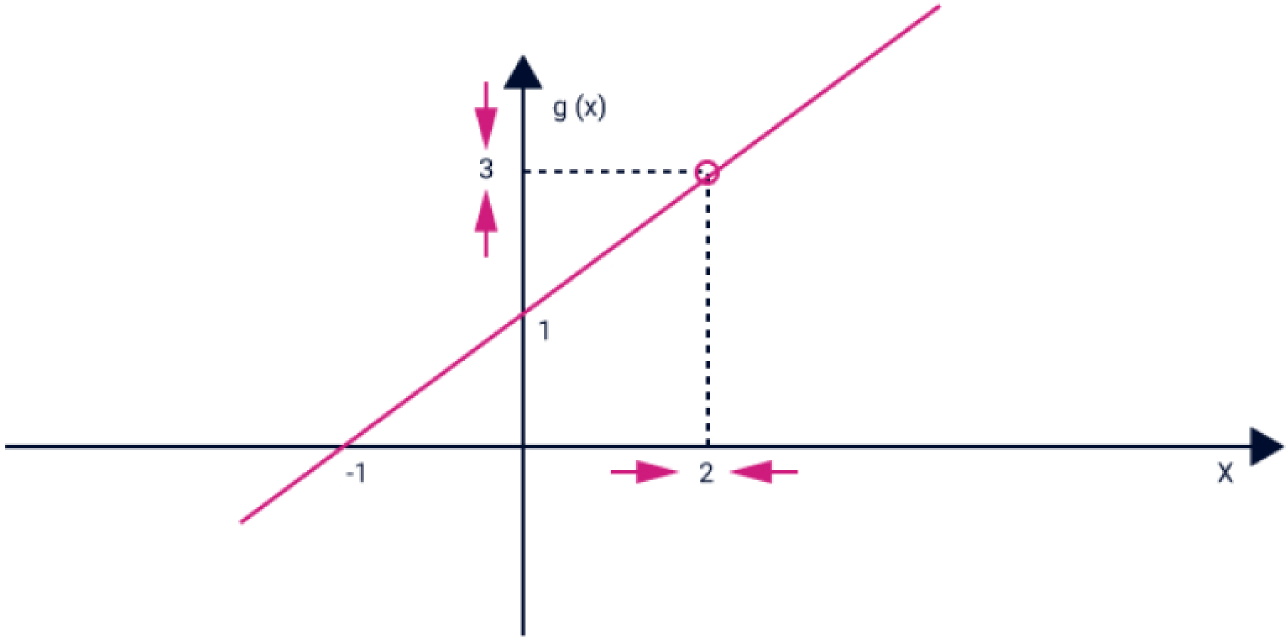
Agora vamos analisar a função $g(x) = \frac{x^2-x-2}{x-2}$ e tentar aplicar o conceito intuitivo para descobrir o comportamento de $g(x)$ quando x tende para o número 2 .

Uma dica: para traçar o gráfico de $g(x)$, verifica-se que $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$. Desse modo:

$$\frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)} = (x+1)$$

Rotacione a tela.

Assim, o gráfico de $g(x)$ é o mesmo da função $(x+1)$, com exceção para $x = 2$, em que g (x) não é definido. Veja:



Quando a variável independente x se aproxima do número 2 tanto pela direita quanto pela esquerda, o valor de g(x) se aproxima do valor de 3. Olhe o gráfico!

O interessante é que o limite de $g(x)$ é igual a 3 quando x tende para 2, mesmo com o número real 2 não pertencendo ao domínio da função $g(x)$.

Atenção!

Podemos obter o limite de uma função quando x tende a um número real p, mesmo que esse número p não pertença ao dominio da função.

Quanto a tal afirmação, o ponto não precisa pertencer ao dominio de $f(x)$, mas deve ser um ponto de acumulação desse domínio. De uma forma simples, o ponto de acumulação de um conjunto é um ponto que pode ser acessado por meio de um caminho de aproximação que passa pelos pontos do conjunto.

Em outras palavras, o caminho traçado para aproximar a variável independente x do ponto p deve obrigatoriamente pertencer ao domínio. Dessa forma, o ponto p tem de estar "colado" ao conjunto que define o domínio da função para permitir que se chegue a ele seguindo um caminho totalmente dentro do domínio da função.

Mas $g(x)$ não estava definido para o $x = 2$. Se agora definíssemos $g(x)$ para $x = 2$, por exemplo, fazendo $g(2) = 4$, mesmo assim o valor do limite de $g(x)$, quando x tende para 2, se manteria igual a 3, sendo um valor diferente do valor de $g(2)$.

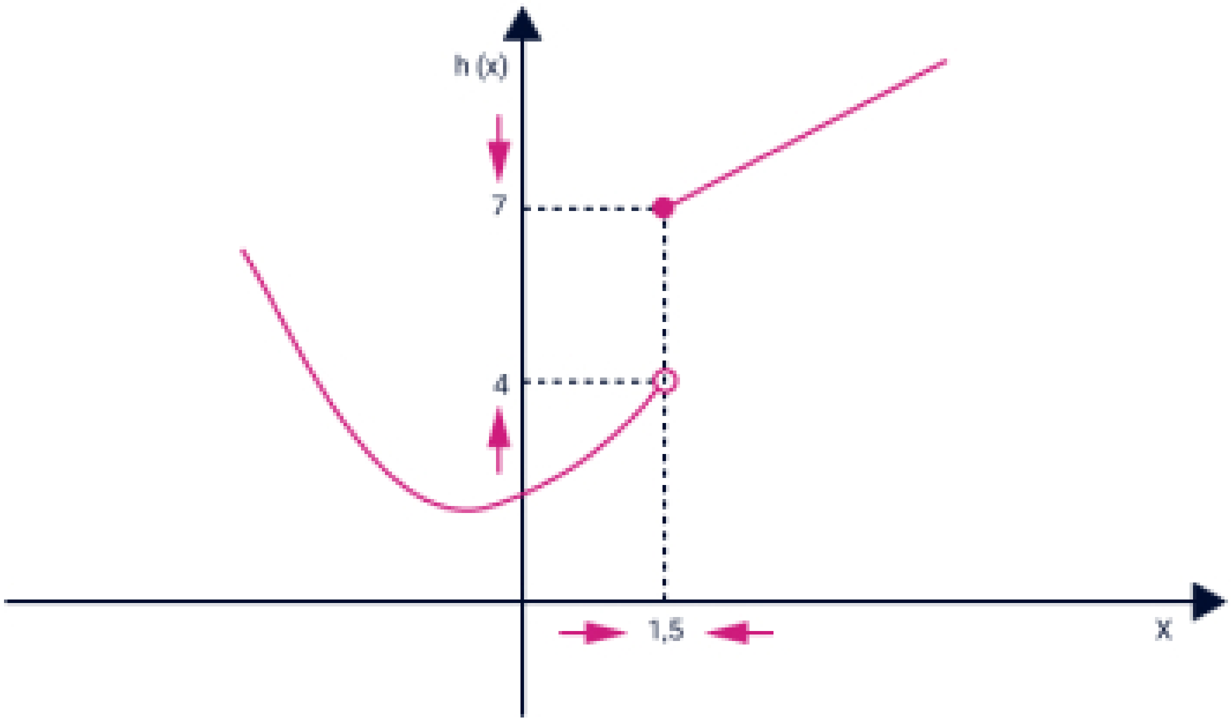
> **O valor do limite de uma função quando x tende a um número real p não é necessariamente o da função no ponto p.**

Esse aspecto vai estar associado à continuidade de uma função em um ponto. Tal conceito será analisado em um próximo módulo. Veremos que, quando a função for contínua, o valor da função no ponto será igual ao do limite no ponto.

Vamos analisar agora outra função $h(x)$ representada adiante. A diferença das anteriores é que essa função tem uma descontinuidade no ponto $x = 1,5$.

Qual será o limite de $h(x)$ quando x tender a 1,5?

Quando x se aproxima do número 1,5 pela direita $(x \to 1,5_+)$, o valor de $h(x)$ fica mais próximo do número 7, porém, quando a variável independente x se aproxima do número 1,5 pela esquerda $(x \to 1,5_-)$, a função $h(x)$ se aproxima do número 4. Há dois valores diferentes. E agora?



Qual é, portanto, o limite de $h(x)$ quando x tende a 1,5?

Nesse caso, o limite de $f(x)$ quando x tende a 1,5 não existe. Não conseguiremos achar nenhum valor real, único, que represente o comportamento de $f(x)$ quando o domínio se aproxima do número 1,5.

Atenção!

Apesar de não existir o limite da função quando x tende ao número 1,5, pode-se dizer que o limite à direita de $h(x)$, quando x tende a 1,5, é igual a 7 e que o limite à esquerda de $h(x)$, quando x tende a 1,5, é igual a 4. Os limites à direita e à esquerda são chamados de limites laterais e serão posteriormente definidos.

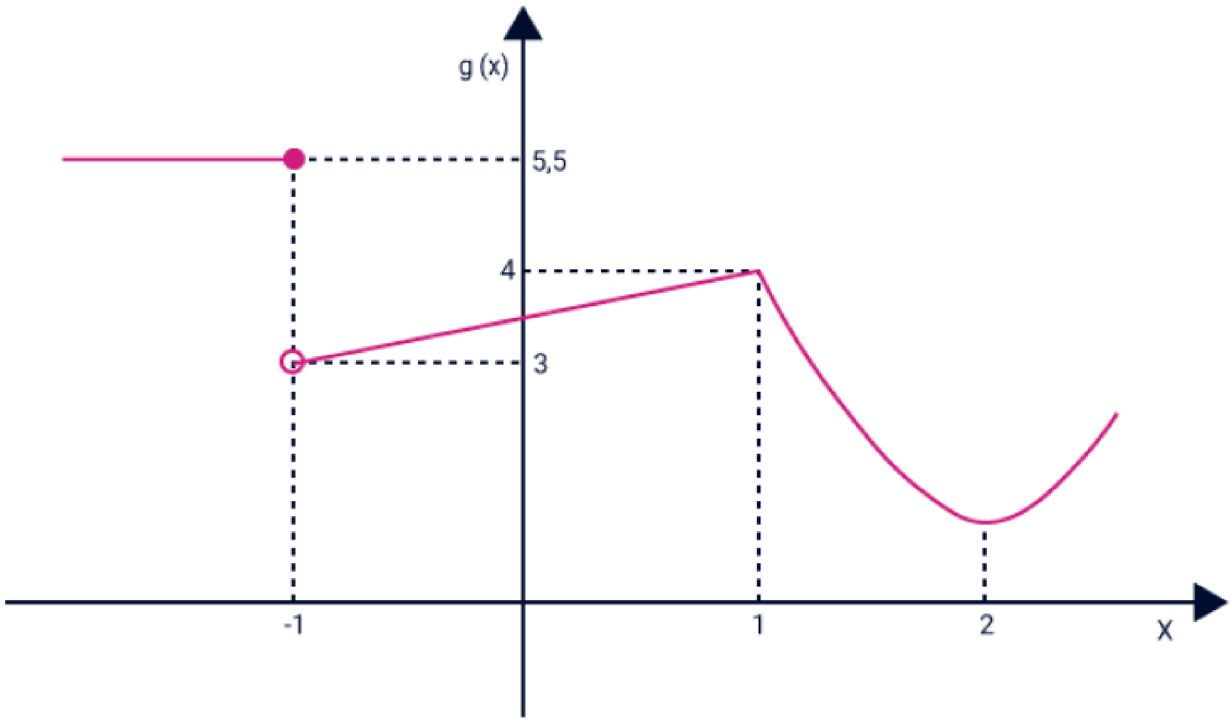
Exemplo 1

Aplicando o conceito intuitivo de limite, determine, caso exista, o valor do limite de $f(x) = \begin{cases} \frac{(x^2-9)}{x-3}, x \neq 3 \\ 12, x = 3 \end{cases}$ quando a variável independente x tende para 2 e quando x tende para 3.

Solução

Exemplo 2

Seja $g(x)$, cujo gráfico é dado a seguir. Utilizando o conceito intuitivo de limite, determine, caso exista:



a) O valor do limite de $g(x)$ quando x tende a -1, por valores inferiores.

b) O valor do limite de $g(x)$ quando x tende a -1, por valores superiores.

c) O valor do limite de $g(x)$ quando x tende a -1.

Solução

Abordagem simbólica do limite: notação

Você já aprendeu que, se a função $f(x)$ se aproximar de um número real L quando a variável independente x se aproximar de um número real p, em ambos os sentidos, o limite de $f(x)$ será igual a L quando x tender ao número real p.

Mas agora vamos representar simbolicamente esse limite. Para representá-lo, você deve utilizar a seguinte simbologia:

$$\lim_{x \to p} f(x) = L$$

Rotacione a tela.

Em que L e p são número reais.

Caso deseje calcular apenas o limite de $f(x)$ para os casos em que a variável x se aproxima do número p por apenas um dos sentidos, isto é, determinar o limite quando x tende a p por valores à esquerda $(x \to p$ -) ou por valores à direita $(x \to p_{+})$, você deve utilizar as seguintes simbologias para esses limites laterais:

$$\lim_{x \to p_-} f(x) = \boxed{L_I} \qquad ou \qquad \lim_{x \to p_+} f(x) = \boxed{L_S}$$

São números reais.

Exemplo 3

Represente simbolicamente a seguinte afirmativa: "O limite de $f(x)$ quando x tende ao número -2 é igual a zero".

Solução

Exemplo 4

Represente simbolicamente a seguinte afirmativa: "O limite de $g(y)$ quando y tende ao número 3 por valores superiores é igual a dez".

Solução

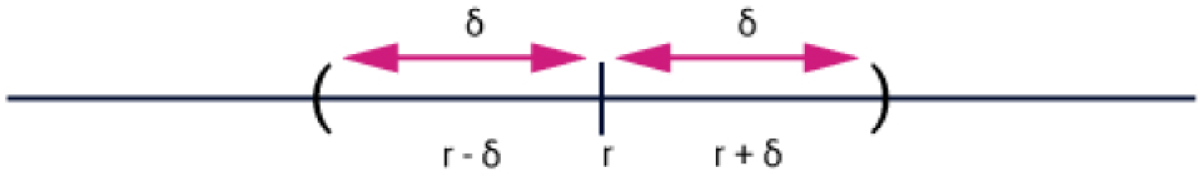
Abordagem analítica do limite: definição formal

Até aqui foi utilizada uma definição apenas intuitiva de limite apesar de já termos visto a representação simbólica. Afirmativas do tipo “se aproxima de” ou “tende a” são bastante vagas e necessitam de uma definição matemática mais rigorosa.

É necessário, portanto, determinar formalmente o limite de uma função real quando a variável independente tende a um número real. No entanto, antes de determiná-lo, é preciso definir a vizinhança de um número real.

Sejam r e δ números reais.

Define a vizinhança completa de r - ou, simplesmente, vizinhança - com a notação $V(r)$ todo intervalo aberto centrado em r, isto é, $(r-\delta, r+\delta)$, com $\delta > 0$. δ está relacionado ao tamanho (raio) da vizinhança.

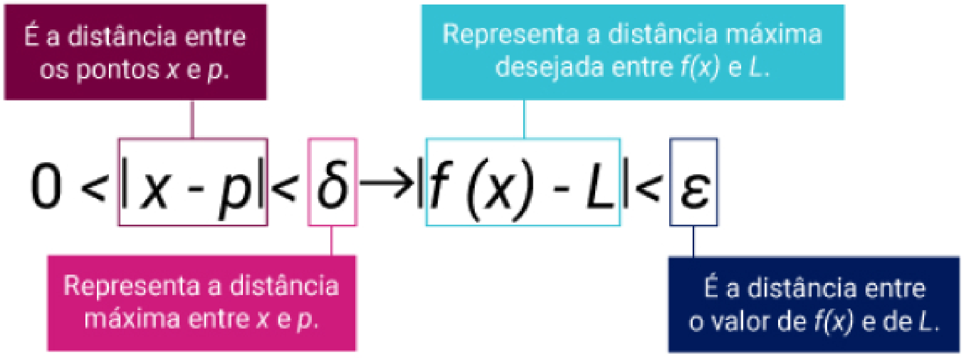


Se for considerado apenas um lado da vizinhança, esta será denominada de vizinhança à esquerda, V(r -), para o intervalo de $(r-\delta, r)$, e vizinhança à direita, $V(r+)$, para o intervalo de $(r, r+\delta)$.

Definição de limite de $f(x)$ quando x tende a um número real

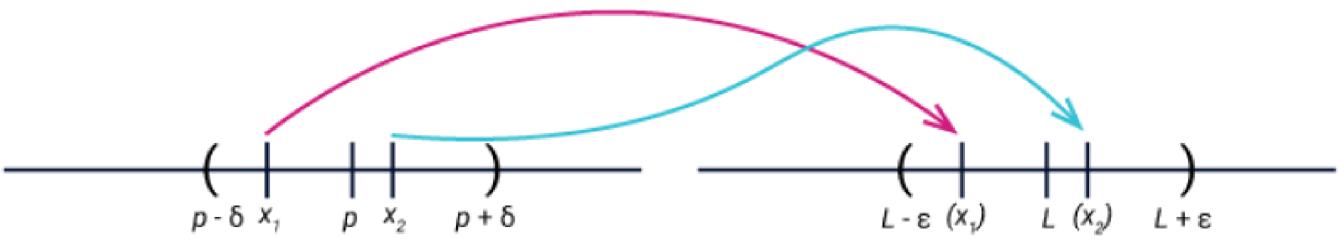
Seja uma função f real definida sobre um intervalo aberto que contém o número real p, exceto possivelmente no próprio ponto p.

Diz-se então que o limite de $f(x)$, quando x tende a p, é um número real L se, para todo número $\varepsilon > 0$, existe um número correspondente $\delta > 0$, dependente de ε, tal que, para todo x do domínio de $f(x)$, se tem a representação da imagem a seguir:



ε e δ são números reais positivos infinitesimais, isto é, tão pequenos como você quiser.

Assim, se existir o limite de $f(x)$, representado pelo número L, ao se escolher um valor de $\varepsilon > 0$ tão pequeno como você queira, representando a distância máxima entre $f(x)$ e L, vai existir um valor de δ que representa a distância entre a variável independente x e p. Também será suficientemente pequeno, de forma que, sempre que x estiver na vizinhança de p de raio δ, $f(x)$ estará na vizinhança de L de raio ε. Veja o esquema a seguir.



Em outras palavras, podemos dizer que:

> **Ao existir o limite de $f(x)$, representado pelo número L, quando x tende a p, significa que, para toda vizinhança de L, vai existir uma vizinhança em p tal que, toda vez que x estiver nessa vizinhança de p, $f(x)$ estará na vizinhança de**

$L.$

Curiosidade

A demonstração do teorema da unicidade pode ser realizada por meio da definição formal do limite.
O teorema da unicidade nos diz que, se existir o limite de $f(x)$ quando x tende a um número p, esse limite será único. Isto é, só pode existir um valor que represente o limite de $f(x)$ desde que ele exista.

A demonstração formal do limite tem uma aplicação prática. Você pode usá-la para se verificar se determinado número é ou não o valor do limite de uma função.

Mão na massa

Questão 1

Qual é a representação simbólica correta para representar o limite da função $h(z)$ quando z tende a um valor k, por valores inferiores?

A $\lim_{z \rightarrow k-} h(z)$

B $\lim_{z \rightarrow k+} h(z)$

C $\lim_{z \rightarrow k} h(z)$

D $\lim_{h(z)} k$

E $\lim_{z \rightarrow k-1} h(z)$

Parabéns! A alternativa A está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EComo%20se%20deseja%20apenas%20%5C(z%5C)%20tendendo%20a%20%5C(k%5C)%20por%20valores%20inferiores%20(%C3%A0%2
%7D%20h(z)%5C).%20Complementando%3A%20se%20fosse%20pedido%20o%20limite%20de%20%5C(h%20(%20z%20)%5C)%20quando%20a%20var
se%20os%20dois%20sentidos%3B%20assim%2C%20a%20simbologia%20%C3%A9%20%5C(%5Clim%20_%7Bz%20%5Crightarrow%20k%7D%20h(z)%5

Questão 2

Aplicando o conceito intuitivo de limite, determine, caso exista, o valor do limite de:

$f(x)=\begin{cases}\frac{(x^2-16)}{x-4}, x\neq 4\\ 10, x=4\end{cases}$, respectivamente, para quando a variável independente x tende para 3 e para quando x tende para 4.

A 5 e 6

B 7 e 8

C 4 e 5

D 2 e 3

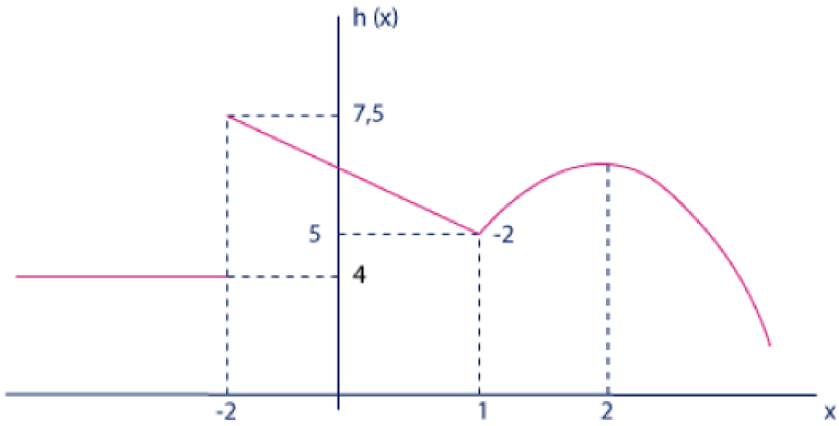
E 1 e 2

Parabéns! A alternativa B está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-paragraph'%3EVerifica-
se%20que%20%5C(%5Cleft(x%5E%7B2%7D-16%5Cright)%3D(x-4)
(x%2B4)%5C).%20%3C%2Fbr%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20Assim%3A%20%3C%2Fbr%3E%0A%2
16%5Cright)%7D%7Bx-4%7D%3D%5Cfrac%7B(x-4)(x%2B4)%7D%7B(x-
4)%7D%3Dx%2B4%2C%20%5Ctext%20%7B%20para%20%7D%20x%20%5Cneq%204%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%2
image%20src%3D%22img%2F12.jpg%22%20alt%3D%22%22%20title%3D%22Jorge%20Lu%C3%ADs%20Rodrigues%20Pedreira%20de%20Cerqueira%2
image%3E%20%3C%2Fbr%3E%0A%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20Dessa%20forma%2C%20quando%2

Questão 3

Seja $h(x)$, cujo gráfico é dado a seguir. Utilizando o conceito intuitivo de limite, determine, caso exista, o valor do limite de $h(x)$ quando x tende $a-2$.



A 7,5

B 4

C 2,5

D Não existe.

E $+\infty$

Parabéns! A alternativa D está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EConfira%20a%20solu%C3%A7%C3%A3o%20no%20v%C3%ADdeo%20a%20seguir%3A%0A%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%2
video-
player%20src%3D%22https%3A%2F%2Fplay.yduqs.videolib.live%2Fhome%3Ftoken%3Da9c1130ded5c4db5992b03c2cb52afa5%22%20videoId%3D%2
video-
player%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%

Questão 4

Utilizando o conceito intuitivo de limite, determine, caso exista, o limite de...

$$m(x)=\begin{cases}3x-1, \text{ para } x<0\\ 12, \text{ para } x=0\\ 2+e^x, \text{ para } x>0\end{cases}$$

... respectivamente quando x tende a 0 por valores superiores e por inferiores.

A – 1 e 3

B 12 e 12

C 3 e – 1

D 12 e – 1

E 6 e -1

Parabéns! A alternativa C está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-paragraph'%3EQuando%20%5C(x%5C)%20tem%20valores%20maiores%20(superiores)%20do%20que%200%20%2C%20a%20fun%C3%A7%C3%A3o%2
1%5C)%2C%20que%20%C3%A9%20a%20equa%C3%A7%C3%A3o%20de%20uma%20reta.%20Fazendo%20o%20gr%C3%A1fico%20dessa%20reta%2C%
se%20que%2C%20quando%20se%20aproximar%20do%20valor%200%20por%20valores%20inferiores%2C%20a%20fun%C3%A7%C3%A3o%20%5C(m%
1%3D-
1%5C).%20%3C%2Fbr%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%
%201%20%2C%20e%20%C3%A0%20direita%2C%20valendo%203%2C%20n%C3%A3o%20tem%20limite%2C%20pois%20os%20limites%20laterais%20s

Questão 5

Utilizando o conceito intuitivo de limite, determine o valor de k real para que exista o limite de...

$$p(z)=\begin{cases} 2z+k, \text{ para } z<1 \\ 9, \text{ para } z=1 \\ 1+2\ln z, \text{ para } z>1 \end{cases}$$

... quando z tende ao valor 1.

A – 2

B – 1

C 1

D 2

E 0

Parabéns! A alternativa B está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-paragraph'%3EConfira%20a%20solu%C3%A7%C3%A3o%20no%20v%C3%ADdeo%20a%20seguir%3A%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%2C
video-
player%20src%3D%22https%3A%2F%2Fplay.yduqs.videolib.live%2Fhome%3Ftoken%3Da5046ab8113145f88173836198e6ff62%22%20videoId%3D%22

video-
player%3E%0A%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%2

Questão 6

Ao se desejar provar que $\lim_{x \to 4} 8 - x = 4$, chegou-se, por meio da definição formal, à conclusão de que $|f(x) - 4| < \varepsilon$ sempre que $|x - 4| < \delta$. Nessa demonstração, qual é o valor de δ em função de ε?

A ε

B $\varepsilon/2$

C $\varepsilon/4$

D 2ε

E $\varepsilon_{/3}$

Parabéns! A alternativa A está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EParab%C3%A9ns!%20Voc%C3%AA%20entendeu%20o%20conceito%20da%20defini%C3%A7%C3%A3o%20formal%20do%20limite.%20%
4%7C%3C%5Cdelta%5C).%20%3C%2Fbr%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20Mas%3A%20%3C%2Fbr%3
x-4%7C%3D%7C4-x%7C%3D%7Cx-
4%7C%3C%5Cvarepsilon%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%24%24%20%3C%2Fbr%3E%0A%20%20%20%
se%20%5C(%5Cdelta%3D%5Cvarepsilon%5C).%20%3C%2Fbr%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20Se%3
4%7C%3C%5Cdelta%20%5Crightarrow%7C4-x%7C%3C%5Cdelta%20%5Crightarrow%7C8-x-
4%7C%3C%5Cdelta%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%24%24%20%3C%2Fbr%3E%0A%20%20%20%20%
x-4%7C%3D%7C(8-
x)-4%7C%3C%5Cvarepsilon%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%24%24%20%3C%2Fbr%3E%0A%20%20%2

Teoria na prática

Um cientista precisa verificar se o seu modelo matemático, representado por $f(x) = 2x + 6$, tende, para um valor de x real, a um valor igual a 8 quando a sua variável de entrada x tende a 1. Você pode ajudá-lo a fazer essa verificação por meio da definição formal de limite. Desse modo, prove que o $\lim_{x \to 1}(2x + 6) = 8$.

Mostrar solução

Falta pouco para atingir seus objetivos.

Vamos praticar alguns conceitos?

Questão 1

Seja $f(x) = \begin{cases} x+2, x<2 \\ x^2, x \geq 2 \end{cases}$. Aplicando o conceito intuitivo de limite, marque a alternativa que apresenta o do $\lim_{x\to 2} f(x)$.

A 1

B 3

C 4

D O limite não existe.

E O limite tende a ∞.

Parabéns! A alternativa C está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EQuando%20%5C(x%5C)%20se%20aproxima%20de%202%20por%20valores%20inferiores%2C%20%5C(f(x)%5C)%20%C3%A9%20definid

Questão 2

Qual das alternativas abaixo representa simbolicamente o limite de g(x) quando x tende para m apenas por valores superiores?

A $\lim_{x\to m^-} g(x)$

B $\lim_{x\to m+} g(x)$

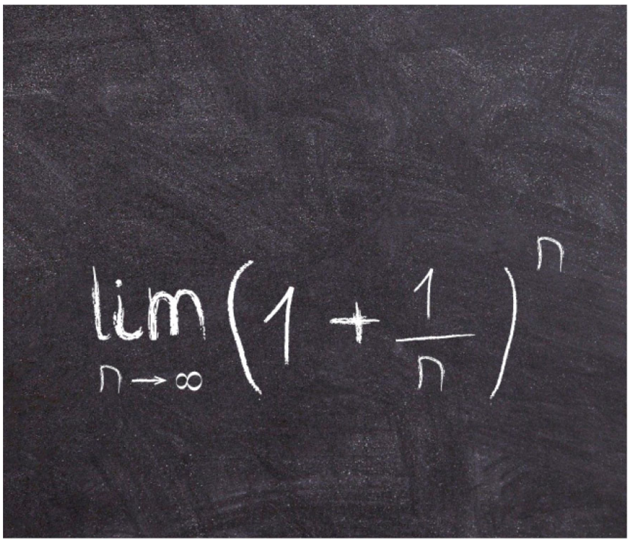
C $\lim_{x \to m} g(x)$

D $\lim_{x \to g(x)} p$

E $\lim_{x \to 0} g(x)$

Parabéns! A alternativa B está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EComo%20se%20deseja%20apenas%20%5C(x%5C)%20tendendo%20a%20%5C(m%5C)%20por%20valores%20%C3%A0%20direita%20(su
%7D%7D%20g(x)%5C).%20%3C%2Fbr%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20Para%20o%20limite%20de%
se%20os%20dois%20sentidos%3B%20assim%2C%20a%20simbologia%20%C3%A9%20%5C(%5Clim%20_%7Bx%20%5Crightarrow%20m%7D%20g(x)%



2 - Cálculo de limite

Ao final deste módulo, você será capaz de calcular o limite de uma função real.

Vamos começar!

Limite de uma função real

Assista ao vídeo a seguir para conhecer alguns conceitos iniciais importantes para o estudo deste módulo.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.

Limites laterais

Comentado anteriormente, o conceito de limite lateral é uma alternativa por meio da qual podemos verificar a existência ou não do limite e até mesmo estimar o seu valor. Além dessa alternativa e da determinação do limite pela aplicação da abordagem intuitiva, podemos usar algumas propriedades e teoremas para calcular, de forma analítica, o limite de $f(x)$ quando x tende a um número real p.

Por fim, o conceito de limite pode ser extrapolado para se analisar o comportamento da função no infinito ou quando ela tende ao infinito. Observe estas definições:

Limite no Infinito

Quando seu domínio tende a **mais ou menos infinito**.

Limite Infinito

Quando o valor da função tende a **mais ou a menos infinito**.

Os limites laterais de $f(x)$ quando x tende a um número real p são representados por:

$$\lim_{x \to p_-} f(x) = \boxed{L_I} \qquad ou \qquad \lim_{x \to p_+} f(x) = \boxed{L_S}$$

São números reais.

Conheça alguns conceitos importantes:

Limite inferior

O limite inferior ou limite à **esquerda**, L_I, existirá se, quando x tender ao número p, pelos valores inferiores (menores) ao p, a função real $f(x)$ tender ao valor de L_I.

Limite superior

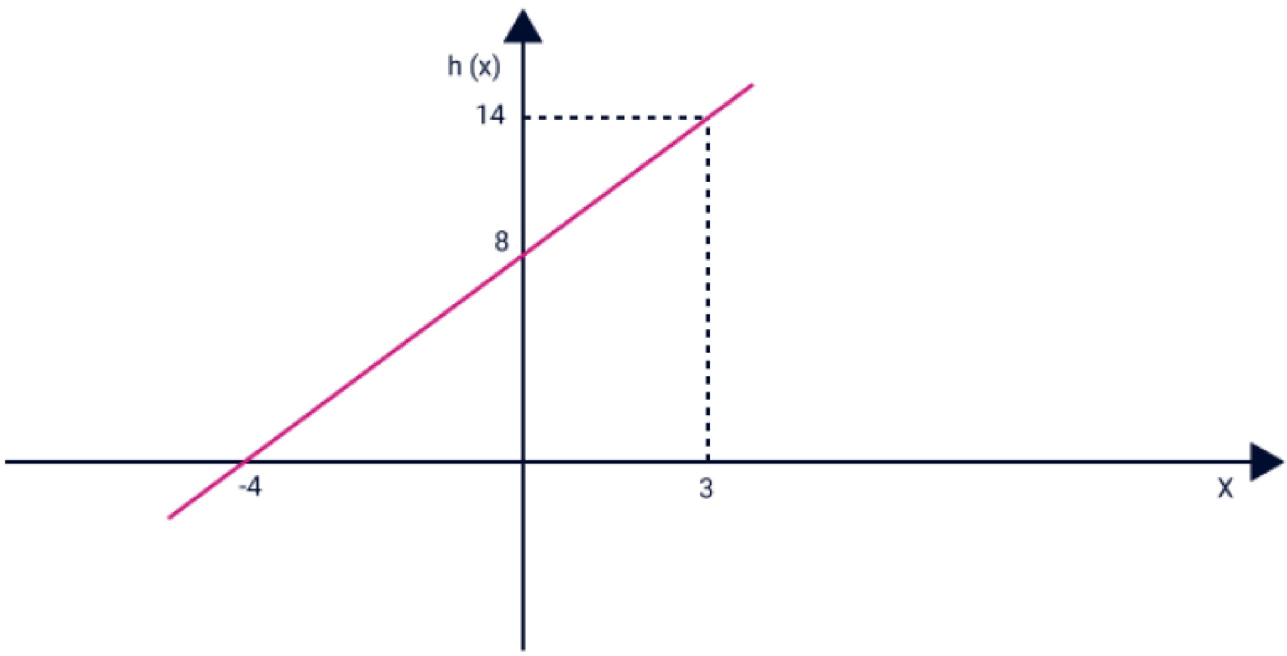
O limite superior ou limite à **direita**, L_S, existirá se, quando x tender ao número p pelos valores superiores (maiores) ao p, a função real $f(x)$ tender ao valor de L_S.

Limites laterais

Os limites laterais podem ser **iguais**, como se verifica na função $h(x)$ representada a seguir. Você pode perceber que, quando x tender a 3 por valores inferiores e superiores a 3, a função $h(x)$ tenderá ao número 14.

Observe:

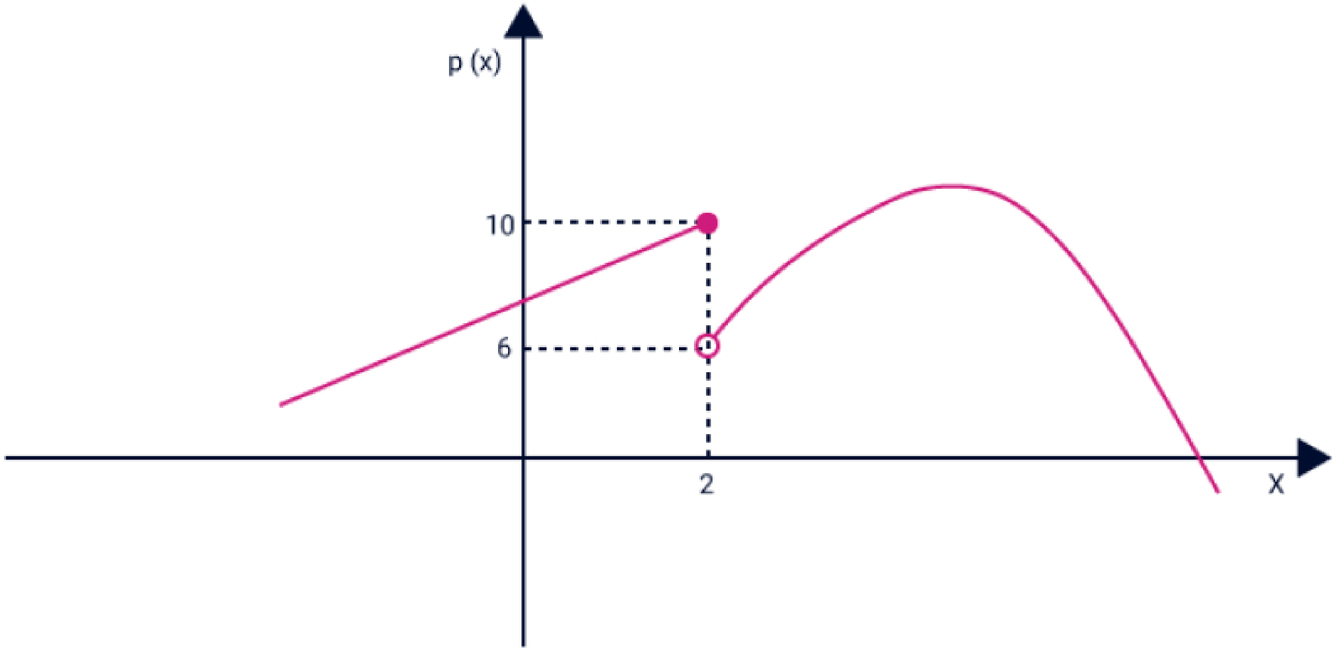
$$\lim_{x \to 3-} h(x) = \lim_{x \to 3+} h(x) = 14$$



Os limites laterais também podem ser diferentes entre si, como na função $p(x)$ representada a seguir. Verifique que, quando x tende a 2 por valores inferiores, a função $p(x)$ tende a 10. Já quando x tende a 2 por valores superiores, a função $p(x)$ tende a 6.

$$\lim_{x \to 2^-} p(x) = 10 \text{ e } \lim_{x \to 2+} p(x) = 6$$

Rotacione a tela.



Da mesma forma que o limite, existe a necessidade de uma definição formal para os limites laterais.

Definição de limites laterais à esquerda de $f(x)$ quando x tende a um número real:

$$\lim_{x \to p_-} f(x) = L_I$$

Se, para todo número $\varepsilon > 0$, existe um número correspondente $\delta > 0$, dependente de ε, tal que, para todo x do domínio de $f(x)$,

$$p - \delta < x < p \to |f(x) - L_I| < \varepsilon$$

Definição de limites laterais à direita de $f(x)$ quando x tende a um número real:

$$\lim_{x \to p_+} f(x) = L_S$$

Se, para todo número $\varepsilon > 0$, existe um número correspondente $\delta > 0$, dependente de ε, tal que, para todo x do domínio de $f(x)$,

$$p < x < p + \delta \to |f(x) - L_s| < \varepsilon$$

A importância dos limites laterais recai na possibilidade de se verificar a existência ou não do limite da função no ponto e, além disso, de se obter o valor do limite.

Atenção!

O limite de $f(x)$ quando x tende ao número real p vai existir e será igual a L se e somente se:

- Existirem os dois limites laterais de $f(x)$ quando x tender a p;
- Os limites laterais forem iguais a L.

$$\lim_{x \to p} f(x) = L \leftrightarrow \begin{cases} \exists \lim_{x \to p-} f(x) \\ \exists \lim_{x \to p^+} f(x) \\ \lim_{x \to p^-} f(x) = \lim_{x \to p+} f(x) = L \end{cases}$$

Retomando os gráficos anteriores, você pode perceber que o limite de $h(x)$ existe, pois, quando x tender a 3, os limites laterais vão existir e serão iguais a $\lim_{x \to 3-} h(x) = \lim_{x \to 3+} h(x) = 14$.

Além disso, você pode calcular o $\lim_{x \to 3} h(x) = 14$.

Para o caso de $p(x)$, o limite não existirá, pois, apesar de os limites laterais existirem, eles são diferentes. Portanto, $\nexists \lim_{x \to 2} p(x)$.

Exemplo 5

Calcule os dois limites laterais da função $f(x) = 2|x|/x$ quando x tende para zero.

Solução

Exemplo 6

Determine o limite da função $f(x) = 2|x|/x$ quando x tende para zero.

Solução

Teoremas para cálculo dos limites de $f(x)$

Agora podemos conhecer alguns teoremas que nos permitirão calcular o limite de uma função real quando x tende a um número real p de uma forma analítica - e não apenas intuitiva.

As demonstrações desses teoremas podem ser feitas por meio da definição formal de limite.

Teorema da substituição direta

Sejam $m(x)$ e $n(x)$ funções polinomiais e $\frac{m(x)}{n(x)}$, uma função racional, então:

$$\lim_{x \to p} m(x) = m(p)$$

$$\lim_{x \to p} \frac{m(x)}{n(x)} = \frac{m(p)}{n(p)}, \text{se } \mathrm{n}(p) \neq 0$$

Na verdade, o teorema acima vale para qualquer função que seja contínua no ponto p do seu domínio. A definição de função contínua será feita no próximo módulo, mas já podemos adiantar que, além das funções polinomiais e racionais, as trigonométricas, exponenciais, trigonométricas inversas e logaritmicas também são contínuas em seus domínios.

Em outras palavras, podemos estender o teorema anteriormente apresentado para o cálculo do limite de qualquer uma da lista dessas funções quando x tende a um ponto p do seu domínio.

Exemplo 7

Determine, caso exista, $\lim_{x\to 2}\left(7x^4+x^2-8x+2\right)$.

Solução

Exemplo 8

Determine, caso exista, $\lim_{x\to\pi}\operatorname{sen}x$.

Solução

Teorema da substituição de funções

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções tais que $f(x)=g(x)$ para todos os pontos do domínio, à exceção de $x=p$. Nesse caso, se o limite de $g(x)$ quando x tende a p existe, o limite de $f(x)$ também existe e $\lim_{x\to p}f(x)=\lim_{x\to p}g(x)$.

Anteriormente, usamos intuitivamente esse teorema ao verificar o limite da função $g(x)=\frac{x^2-x-2}{x-2}$ pois tal função $g(x)$ era igual à função $(x+1)$ para todos os pontos do domínio, à exceção de $x=2$. Portanto, $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}x+1=3$.

Atenção!

O teorema da substituição direta inicialmente não pode ser usado nas funções racionais no caso em que $n(p)$, que está no denominador, tem um valor igual a zero. Porém, em alguns casos, nos quais tanto $m(p)$ quanto $n(p)$ se anulam mutuamente, pode-se tentar retirar essa restrição por meio de um cancelamento de fatores comuns entre o numerador e o denominador.

Desse modo, se definirá uma nova função que apresenta os mesmos valores da função original, à exceção do ponto p, podendo usar o teorema da substituição de funções.

Exemplo 9

Cálculo do limite pelo teorema de substituição de funções

Assista ao vídeo a seguir para conhecer o exemplo 9.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.

Propriedades algébricas do limite

O limite de $f(x)$ apresenta propriedades algébricas que podem ser utilizadas para calcular o limite da função quando x tende ao número p. Todas essas propriedades podem ser demonstradas graças à definição formal do limite.

Sejam k, p, L e T números reais e seja n um número natural diferente de zero. Se $\lim_{x \to p} f(x) = L$ e $\lim_{x \to p} g(x) = T$, então:

Limite de uma constante

$$\lim_{x \to p} k = k, k \text{ real}$$

Rotacione a tela.

Propriedade da soma e da diferença

$$\lim_{x \to p} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to p} f(x) \pm \lim_{x \to p} g(x) = L \pm T$$

Rotacione a tela.

Propriedade do produto por uma constante

$$\lim_{x \to p} [k f(x)] = k \lim_{x \to p} f(x) = kL$$

Rotacione a tela.

Propriedade de produto

$$\lim_{x \to p} [f(x) \cdot g(x)] = \left[\lim_{x \to p} f(x)\right] \cdot \left[\lim_{x \to p} g(x)\right] = LT$$

Rotacione a tela.

Propriedade do quociente

$$\lim_{x \to p} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to p} f(x)}{\lim_{x \to p} g(x)} = \frac{L}{T}, \text{ se } \lim_{x \to p} g(x) = T \neq 0$$

Rotacione a tela.

Propriedade da potenciação

$$\lim_{x \to p} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to p} f(x)\right]^n = L^n$$

Rotacione a tela.

Propriedade da raiz

$$\lim_{x \to p} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to p} f(x)} = \sqrt[n]{L}, \text{ para o caso de } n \text{ par} : L \geq 0$$

Rotacione a tela.

Propriedade logarítmica

$$\lim_{x \to p} \ln\lfloor f(x) \rfloor = \ln \left(\lim_{x \to p} f(x) \right) = \ln L, \text{ se } \lim_{x \to p} f(x) = L > 0$$

Rotacione a tela.

Propriedade exponencial

$$\lim_{x \to p} \exp\lfloor f(x) \rfloor = \exp \left(\lim_{x \to p} f(x) \right) = e^L$$

Rotacione a tela.

Exemplo 10

Determine, caso exista, $\lim_{x \to 0} 10 \ln(x+2) \cos x^2$.

Solução

Exemplo 11

Determine, caso exista, $\lim_{x \to 1} \ln \left(\sqrt{\frac{2x+14}{3+x^2}} \right)$.

Solução

Limites no infinito e limites infinitos

Limites no infinito

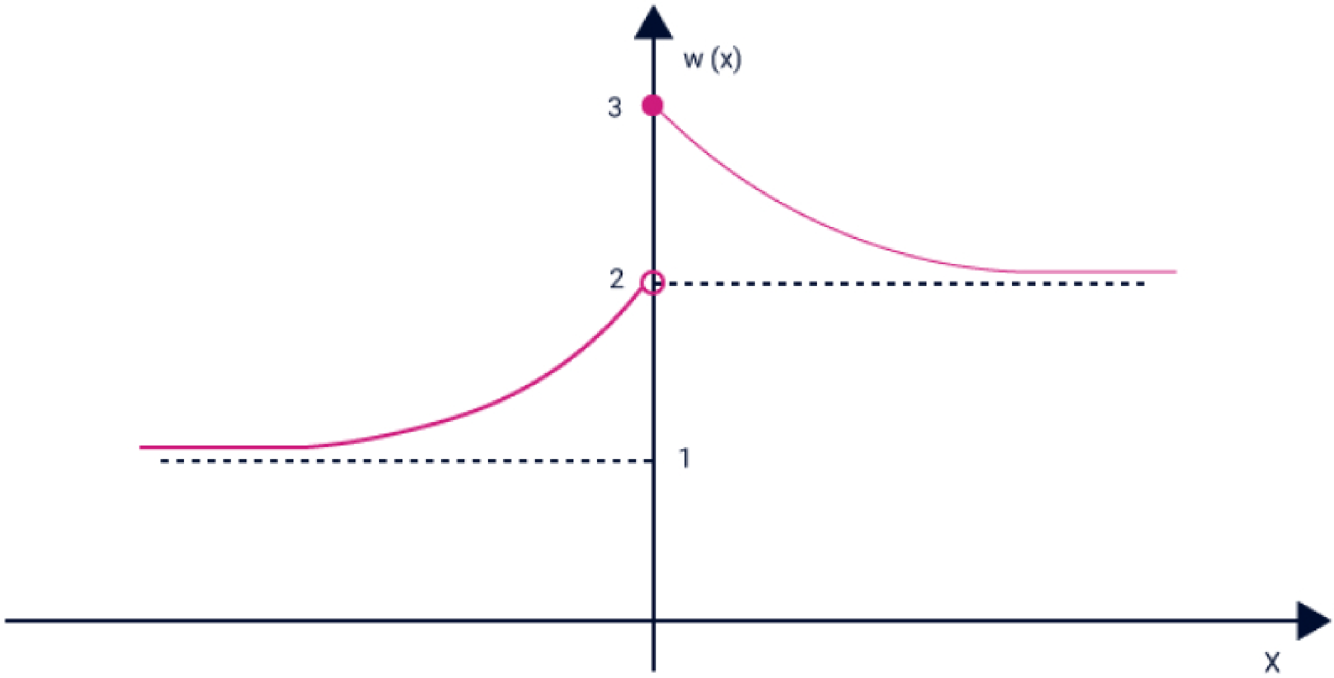
Até este ponto, definimos e calculamos os limites de uma função quando a variável independente de seu domínio tende a um número real p. Contudo, poderemos estender esse cálculo do limite para quando x tender ao infinito ou ao menos infinito.

Atenção!

Um número real x tenderá para infinito, $x \to \infty$, sempre que $\forall M$ real, $x > M$. Um número real x tenderá para menos infinito, $x \to -\infty$, sempre que $\forall M$ real, $x < -M$.

Esse tipo de limite será utilizado para se obter o comportamento da função quando x assumir valores cada vez maiores, ou seja, crescer sem limitação, representado por $x \to \infty$, ou quando x assumir valores cada vez menores ou decrescer sem limitação, representado por $x \to -\infty$.

Veja o gráfico da função $w(x)$, a seguir:



Quando x tende para infinito, o gráfico da função $w(x)$ tende para a reta y $= 2$. Isso quer dizer que o valor de $w(x)$ fica cada vez mais próximo de 2; portanto, o limite de $w(x)$ quando x tende ao infinito vale 2 . De forma análoga, quando x tende para menos infinito, o gráfico da função tende para a reta $y = 1$.

Assim, o valor de $w(x)$ fica cada vez mais próximo de 1; consequentemente, o limite de $w(x)$, quando x tende a menos infinito, vale 1.

As retas $y = 1$ e y $= 2$ no gráfico são chamadas de assíntotas horizontais e serão definidas no próximo módulo.

> **Utiliza-se, portanto, a simbologia $\lim_{x \to \infty} f(x) = L_1$ para indicar o comportamento de $f(x)$ se aproximando cada vez mais de L_1, sem nunca alcançar, quando x tende ao infinito. No gráfico anterior, L_1 vale 2.**
>
> **De forma análoga, há a notação $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L_2$ para o caso em que x tende ao menos infinito. No caso anterior, L_2 vale 1.**

Todos os teoremas e propriedades algébricas vistas neste módulo quando x tende a um número real p podem ser usadas também quando x tende apenas para os limites laterais ou quando x tende a mais ou menos infinito.

Para o cálculo de limites envolvendo infinito, devemos conhecer algumas operações:

Ao se dividir um número real por um número que tende ao infinito, o quociente tende a zero.

$\frac{N}{\infty} \to 0_+$	$\frac{N}{\infty} \to 0_-$	$\frac{N}{\infty} \to 0_-$	$\frac{N}{-\infty} \to 0_+$
Quando $N \geq 0$	Quando $N \geq 0$	Quando $N \leq 0$	quando $N \leq 0$

0_+ significa que tende a zero pela direita (valores positivos);

0_ significa que tende a zero pela esquerda (valores negativos).

Ao se dividir um número que tende a mais ou menos infinito por um número real, o quociente tende a mais ou menos infinito. Assim, existem as seguintes possibilidades:

$\frac{\infty}{N} \to \infty$	$\frac{-\infty}{N} \to -\infty$	$\frac{\infty}{N} \to -\infty$	$\frac{-\infty}{N} \to \infty$
Quando $N \geq 0$	Quando $N \geq 0$	Quando $N \leq 0$	Quando $N \leq 0$

Exemplo 12

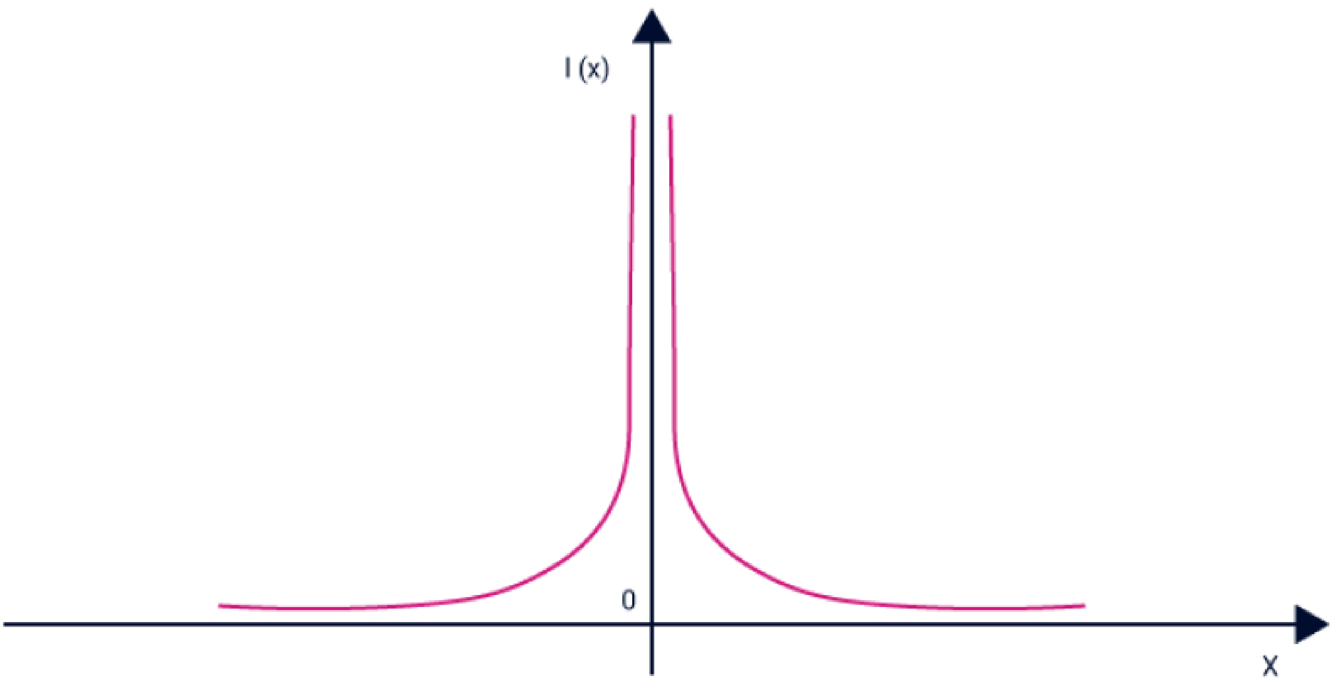
Calcule o valor de $\lim_{u \to \infty} \frac{5}{2e^u}$.

Solução

Limites infinitos

Até este ponto obtivemos os valores de limites da função iguais a um número real L tanto quanto x tende a um número real p ou ao infinito.

Outra extensão que pode ser feita é quando determinada função tem um comportamento de tender não a um número, e sim ao infinito, quando x se aproxima de um número real ou até mesmo do infinito. Veja o gráfico da função $I(x)$:



Observe que, quando x tende a zero tanto por valores superiores quanto por inferiores, a função assume valores que tendem para o infinito. O infinito não é um número. Porém, ao usarmos a notação $\lim_{x \to 0} I(x) = \infty$, estamos representando o comportamento da função ao assumirmos valores tão grandes quanto quisermos, ou seja, crescendo sem limitações.

O conceito de limites laterais também pode ser aplicado nesse caso. Podemos afirmar que:

$$\lim_{x\to 0^+} I(x) = \lim_{x\to 0^-} I(x) = \infty \leftrightarrow \lim_{x\to 0} I(x) = \infty$$

Rotacione a tela.

Veja o caso da função $k(x)$. Observe o comportamento da função quando $x \to 1_+$. Veja que, nesse caso, a função $k(x)$ assume valores que tendem ao infinito.

Agora foque o comportamento da função quando $x \to 1\_$. Nesse caso, a função $K(x)$ assume valores que tendem ao menos infinito.

Portanto, nesse caso, existem os limites laterais, mas não existe o limite no ponto, pois:

$$\lim_{x\to 1+} k(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} k(x) = -\infty \to \nexists \lim_{x\to 1} k(x)$$

Rotacione a tela.

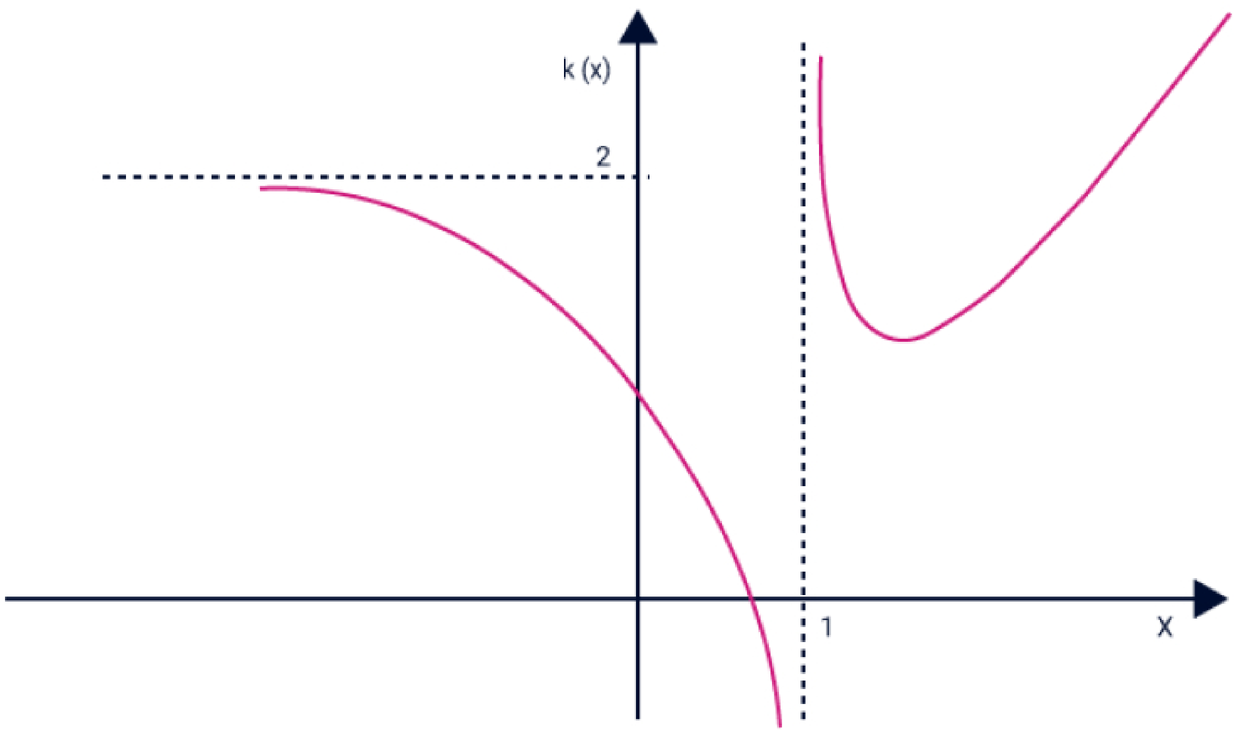
Quando a função tender para menos ou mais infinito, quando se tende a um ponto, tal função vai tender a uma reta vertical. Essa reta é denominada assíntota vertical e será estudada no próximo módulo.

Para finalizar as possíveis formas do limite, analise agora o comportamento de $k(x)$ quando x tende para o infinito: você observará que a função também tende para o infinito.

Dessa forma, podemos representar que:

$$\lim_{x\to \infty} k(x) = \infty$$

Rotacione a tela.



Da mesma forma que o limite de $f(x)$, quando x tende a um número real, tem uma definição formal, os limites no infinito de $f(x)$, bem como os limites infinitos, também apresentam definições formais.

Teorema de Leibniz

Um teorema que também pode ser usado para calcular limites de funções polinomiais quando x tende a zero ou a $\pm\infty$ é o teorema de Leibniz.

Todo polinômio é equivalente ao seu termo de maior grau, em que a sua variável independente tende para mais ou menos infinito.

×

Todo polinômio é equivalente ao seu termo de menor grau, em que a sua variável independente tende para zero.

Exemplo 13

Calcule o valor de $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{4x^6 - 3x^2 + 8}}{x^3 - x + 1}$.

Solução

Exemplo 14

Calcule o valor de $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4x^6 - 3x^2 + 8}}{x^3 - x + 1}$.

Solução

Exemplo 15

Calcule o valor de $\lim_{x \to 0} \frac{x^3 + 8}{x^4 + x + 1}$.

Solução

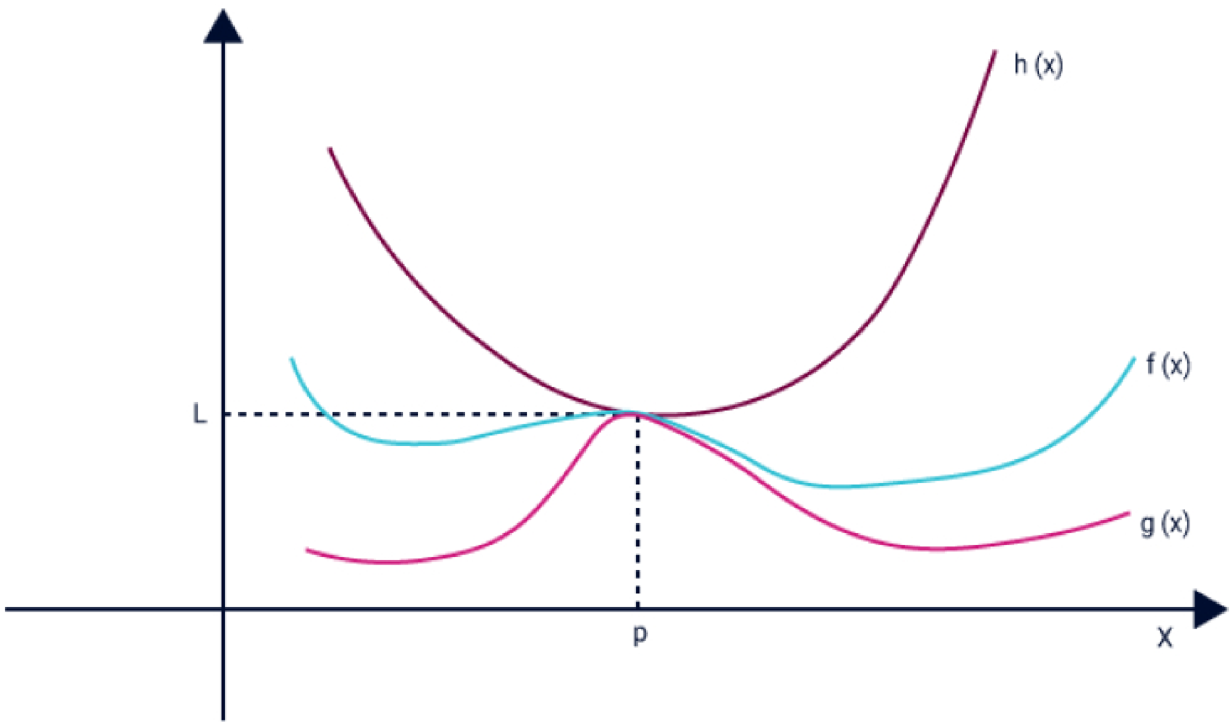
Teorema do confronto

Além dos teoremas apresentados neste módulo, existem outros que podem ser usados para cálculo dos limites de uma função real, como a equivalência, os limites fundamentais e o teorema do confronto, entre outros.

O teorema do confronto será visto agora. Suponha que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo x em um intervalo aberto I, contendo o ponto p, exceto, possivelmente, no próprio ponto. Imagine também que $\lim_{x \to p} g(x) = \lim_{x \to p} h(x) = L$; então, $\lim_{x \to p} f(x) = L$.

Esse teorema é chamado de confronto, pois a função $f(x)$ se encontra sempre entre as duas funções, como se estivesse limitada por elas. Assim, se o limite superior e o inferior tendem ao mesmo número, $f(x)$ obrigatoriamente terá de tender a esse número.

Observe na imagem a seguir:



Exemplo 16

Aplicando o teorema do confronto, calcule o limite de $f(x)$ quando x tende a 2, sabendo que, na vizinhança do ponto $x=2$, vale a desigualdade:

$$-x^2+10x+5 \leq f(x) \leq x^2-5x+27$$

Rotacione a tela.

Solução 1

Existe um teorema que é consequência direta do teorema do confronto e pode ser muito útil.

Teorema

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções com o mesmo domínio S, tais que $\lim_{x \rightarrow p} f(x)=0$ e $|g(x)| \leq M$ para todo x pertencente a S, em que M é um número real > 0. Desse modo, $\lim_{x \rightarrow p} f(x) g(x)=0$.

Em outras palavras, se uma função tiver limite tendendo a zero quando x tender a um número p e a outra for limitada, então o limite do produto de $f(x) g(x)$ tenderá a zero.

Exemplo 17

Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Solução

Não importa a técnica utilizada para se resolver um limite de $f(x)$: caso o limite se transforme em uma indeterminação, nada podemos afirmar. Com isso, teremos que introduzir uma nova técnica para tentar resolvê-lo.

Segue a lista das principais indeterminações:

$\infty - \infty$	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$0.\infty$

Mão na massa

Questão 1

Determine, caso exista, $\lim_{x \rightarrow 1}\left(x^4+2\right)(\ln(x)+1)$.

A 1

B 2

C 3

D 4

E 5

Parabéns! A alternativa C está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EUsando%20a%20propriedade%20alg%C3%A9brica%3A%20%3C%2Fbr%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%2
(%5Cln%20(x)%2B1)%3D%5Clim%20_%7Bx%20%5Crightarrow%201%7D%5Cleft(x%5E%7B4%7D%2B2%5Cright)%20%5Clim%20_%7Bx%20%5Crightarro
(%5Cln%20(x)%2B1)%3D%5Clim%20_%7Bx%20%5Crightarrow%201%7D%5Cleft(x%5E%7B4%7D%2B2%5Cright)%20%5Clim%20_%7Bx%20%5Crightarro

Questão 2

Calcule o valor de $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4-8}}{x^2-1}$.

A 0

B 1

C 2

D 3

E ∞

Parabéns! A alternativa B está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-paragraph'%3EPelo%20teorema%20de%20Leibniz%3A%20%3C%2Fbr%3E%3C%2Fbr%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%2
%5Cinfty%7D%20%5Cfrac%7B%5Csqrt%7Bx%5E%7B4%7D-8%7D%7D%7Bx%5E%7B2%7D-1%7D%3D%5Clim%20_%7Bx%20%5Crightarrow-%5Cinfty%7D%20%5Cfrac%7B%5Csqrt%7Bx%5E%7B4%7D%7D%7D%7Bx%5E%7B2%7D%7D%3D%5Clim%20_%7Bx%20%5Crightarrow-%5Cinfty%7D%20%5Cfrac%7B%5Cleft%7Cx%5E%7B2%7D%5Cright%7C%7D%7Bx%5E%7B2%7D%7D%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20
%5Cinfty%7D%20%5Cfrac%7B%5Cleft%7Cx%5E%7B2%7D%5Cright%7C%7D%7Bx%5E%7B2%7D%7D%20%5Clim%20_%7Bx%20%5Crightarrow-%5Cinfty%7D%201%3D1%5C)%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20

Questão 3

Calcule o valor de $\lim_{x \to 0} \frac{x^7+8x}{x^5+x+7}$.

A 0

B 1

C 2

D 3

E 4

Parabéns! A alternativa A está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EPor%20meio%20teorema%20de%20Leibniz%2C%20como%20%5C(x%5C)%20est%C3%A1%20tendendo%20a%20zero%2C%20tem-
se%20%5C(x%5E%7B7%7D%2B8%20x%20%5Crightarrow%208%20x%5C)%20e%20%5C(x%5E%7B5%7D%2Bx%2B7%20%5Crightarrow%207%5C)%2C%

Questão 4

Calcule o valor de $\lim_{u \to -\infty} \frac{10}{e^u}$.

A 0

B 1

C 2

D ∞

E $-\infty$

Parabéns! A alternativa D está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3ENo%20c%C3%A1lculo%20do%20limite%2C%20%C3%A9%20preciso%20conhecer%20as%20fun%C3%A7%C3%B5es%20envolvidas.%20N
%5Cinfty%7D%20%5Cfrac%7B10%7D%7Be%5E%7Bu%7D%7D%3D%5Cfrac%7B%5Clim%20_%7Bw%20%5Crightarrow-
%5Cinfty%7D%2010%7D%7B%5Clim%20_%7Bw%20%5Crightarrow-%5Cinfty%7D%20e%5E%7Bu%7D%7D%3D%5Cfrac%7B10%7D%7Be%5E%7B-
%5Cinfty%7D%7D%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%24%24%20%3C%2Fbr%3E%3C%2Fbr%3E%0A%20%
%5Cinfty%7D%5C)%20tender%C3%A1%20a%20zero.%20%3C%2Fbr%3E%3C%2Fbr%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%
%5Cinfty%7D%20%5Cfrac%7B10%7D%7Be%5E%7Bu%7D%7D%3D%5Cfrac%7B10%7D%7Be%5E%7B-
%5Cinfty%7D%7D%3D%5Cfrac%7B10%7D%7B0%7D%20%5Crightarrow%20%5Cinfty%5C)%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%

Questão 5

Calcule $\lim_{z \to \pi} \frac{(z-\pi)^2}{4} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{z-\pi}}\right) + 2.$

A 0

B 1

C 2

D 3

E 4

Parabéns! A alternativa C está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EConfira%20a%20solu%C3%A7%C3%A3o%20no%20v%C3%ADdeo%20a%20seguir%3A%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%2
video-
player%20src%3D%22https%3A%2F%2Fplay.yduqs.videolib.live%2Fhome%3Ftoken%3D3919537a9838424991d4e38422c307bd%22%20videoId%3D%2
video-
player%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%2

Questão 6

Determine, caso exista, $\lim_{x \to 2} \frac{(x^2-4)}{x^2-x-2}$.

A $\frac{1}{3}$

B $\frac{2}{3}$

C $\frac{4}{3}$

D $\frac{5}{3}$

E 0

Parabéns! A alternativa C está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EConfira%20a%20solu%C3%A7%C3%A3o%20no%20v%C3%ADdeo%20a%20seguir%3A%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%2
video-
player%20src%3D%22https%3A%2F%2Fplay.yduqs.videolib.live%2Fhome%3Ftoken%3D070ff78ccca04b748de324c4d670b5de%22%20videoId%3D%22
video-
player%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%2

Teoria na prática

O valor da pressão de um forno é modelado pela função $f(x)=(2+e^{-x})\frac{x^3+4x+2}{3x^3-2x+1}$, na qual x é uma variável de controle. Para que valor a pressão do forno vai tender caso essa variável de controle cresça indefinidamente, isto é, $\lim_{x\to\infty} f(x)$?

Mostrar solução

Falta pouco para atingir seus objetivos.

Vamos praticar alguns conceitos?

Questão 1

Calcule o limite de $f(x)=\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2-x-1}$ quando x tende para 1.

A -1

B 3

C -4

D 2

E -3

Parabéns! A alternativa C está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EVoc%C3%AA%20entendeu%20o%20c%C3%A1lculo%20do%20limite%20por%20meio%20dos%20teoremas.%20%3C%2Fbr%3E%3C%2Fb
3%7D%7Bx%5E%7B2%7D-x-
1%7D%3D%5Cfrac%7Bm(1)%7D%7Bn(1)%7D%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%24%24%20%3C%2Fbr%
se%20usar%20a%20substitui%C3%A7%C3%A3o%20direta%2C%20pois%20%5C(f(x)%5C)%20%C3%A9%20uma%20fun%C3%A7%C3%A3o%20racional

3%7D%7Bx%5E%7B2%7D-x-1%7D%3D%5Cfrac%7Bm(1)%7D%7Bn(1)%7D%3D%5Cfrac%7B4%7D%7B-1%7D%3D-
4%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%24%24%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20

Questão 2

Calcule $\lim_{x \to -\infty} \frac{8}{\sqrt[3]{x^3+x^2+8}}$.

A 0

B ∞

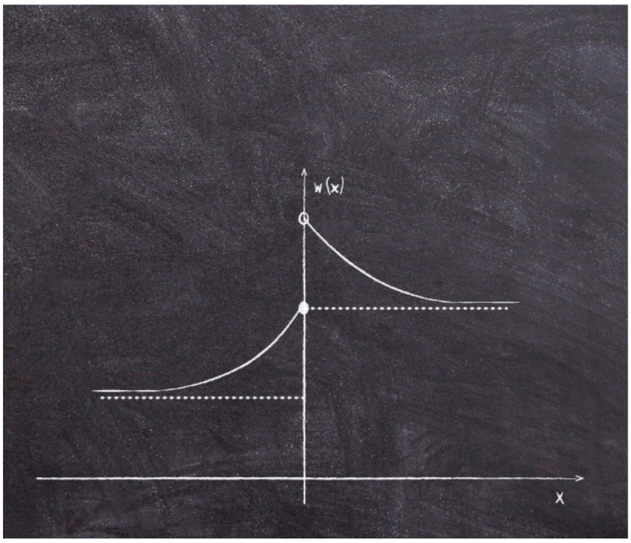
C -1

D 2

E - ∞

Parabéns! A alternativa A está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EPelo%20teorema%20de%20Leibniz%2C%20como%20%5C(x%5C)%20est%C3%A1%20tendendo%20a%20menos%20infinito%2C%20tem-
se%20%5C(x%20%5E%7B%203%20%7D%2B%20x%20%5E%7B%202%20%7D%2B%208%20%5Crightarrow%20x%20%5E%7B%203%20%7D%5C)%2C%2
%5Cinfty%7D%20%5Cfrac%7B8%7D%7B%5Csqrt%5B3%5D%7Bx%5E%7B3%7D%2Bx%5E%7B2%7D%2B8%7D%7D%3D%5Clim%20_%7Bx%20%5Crightar
%5Cinfty%7D%20%5Cfrac%7B8%7D%7B%5Csqrt%5B3%5D%7Bx%5E%7B3%7D%7D%7D%3D%5Clim%20_%7Bx%20%5Crightarrow-
%5Cinfty%7D%20%5Cfrac%7B8%7D%7Bx%7D%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%24%24%20%3C%2Fbr%
se%20usar%20a%20substitui%C3%A7%C3%A3o%20direta%20por%20serem%20fun%C3%A7%C3%B5es%20cont%C3%ADnuas.%20Desse%20modo%3
%5Cinfty%7D%20%5Cfrac%7B8%7D%7B%5Csqrt%5B3%5D%7Bx%5E%7B3%7D%2Bx%5E%7B2%7D%2B8%7D%7D%3D%5Clim%20_%7Bx%20%5Crightar
%5Cinfty%7D%20%5Cfrac%7B8%7D%7Bx%7D%3D%5Cfrac%7B8%7D%7B-
%5Cinfty%7D%3D0%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%24%24%20%3C%2Fbr%3E%3C%2Fbr%3E%0A%20



3 - Continuidade de funções

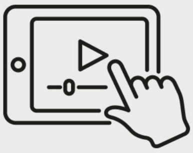
Ao final deste módulo, você será capaz de aplicar o cálculo do limite na verificação da continuidade da função e na obtenção das assíntotas.

Vamos começar!

Limite e continuidade de uma função

Assista ao vídeo a seguir para conhecer alguns conceitos iniciais importantes para o estudo deste módulo.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Continuidade de uma função

O conceito de continuidade de uma função em um ponto p é definido por meio do seu limite quando x tende a p. Dizer que uma função $f(x)$ é contínua em um ponto p significa afirmar que seu gráfico não sofre nenhuma interrupção nesse ponto.

Relembrando

Nas funções apresentadas no módulo 1, no item sobre noções intuitivas de limite, a função $f(x)$ é contínua. No entanto, a função $g(x)$ não é contínua em $x = 2$, e $h(x)$ não é contínua em $x = 1,5$.

Definição de continuidade em um ponto

Seja $f(x)$ uma função com domínio no intervalo aberto (a, b) e p, um ponto pertencente a tal intervalo. Diz-se, portanto, que p é um ponto interior do domínio de $f(x)$.

A função $f(x)$ será contínua em p se as seguintes condições forem satisfeitas:

$$\exists f(p)$$

$$\exists \lim_{x \to p} f(x)$$

$$\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$$

Dessa forma, para uma função ser contínua em p, ela deverá ser definida em p e precisará existir o limite de $f(x)$ quando x tender a p; assim, haverá os dois limites laterais. Por fim, o valor do limite tem de ser igual ao da função em p.

Atenção!

Para que a função $f(x)$ seja contínua em todo intervalo (a, b), ela deve ser contínua em todos os pontos desse intervalo.

Como já mencionamos, as funções polinomiais, racionais, trigonométricas, exponenciais, trigonométricas inversas e logarítmicas são contínuas em seus domínios, pois elas atendem à definição da continuidade em cada ponto no qual são definidas.

A definição anterior foi feita para um ponto interior ao domínio de uma função, ou seja, não vale para o caso de pontos extremos do domínio. A função $f(x)$ será contínua em um intervalo fechado $[a$, b] se for contínua em todos os pontos do intervalo aberto (a, b) e se, para os extremos do domínio:

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$$

Define a continuidade de $f(x)$ pela **direita** no ponto a.

$$\lim_{x \to b-} f(x) = f(b)$$

Define a continuidade de $f(x)$ pela **esquerda** no ponto b.

Para o caso de intervalos de domínio $[a, \infty)$, a continuidade da função é garantida pelos pontos nos interiores e pela continuidade pela direita no ponto a. Já nos intervalos de domínio $(\infty, b]$, a continuidade dela é garantida pelos pontos nos interiores e pela continuidade pela esquerda no ponto b.

Exemplo 18

Obtenha o valor das constantes a e b reais para que a função $g(x) = \begin{cases} x^2 - a, x < 2 \\ b, x = 2 \\ 3x - x^2 + 1, x > 2 \end{cases}$ seja contínua em todo seu domínio.

Solução

Existem alguns teoremas que podem ser usados para verificar a continuidade de uma função baseada no conhecimento da continuidade de outra. O primeiro deles se baseia na operação matemática de funções contínuas.

Propriedades das funções contínuas

Se as funções $f(x)$ e $g(x)$ forem contínuas em $x = p$, então a função $h(x)$, definida abaixo, também será contínua em $x = p$.

- Soma ou diferença: $h(x) = f(x) \pm g(x)$.
- Multiplicação por uma constante real: $h(x) = kf(x)$, k real.
- Quociente: $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ desde que $g(p) \neq 0$.
- Produto: $h(x) = f(x)g(x)$.
- Potenciação: $h(x) = f^n(x)$, sendo n um inteiro positivo.
- Raiz: $h(x) = \sqrt[n]{f(x)}$, desde que a raiz seja definida em um intervalo que contenha p.

Exemplo 19

Verifique se a função $h(x) = \cos x + \left(x^2 + 1\right) \ln x$ é contínua para $x > 0$.

Solução

O próximo teorema garante a continuidade de uma função caso ela seja uma composição de funções contínuas.

Continuidade de função composta

Toda composição de funções contínuas também é uma função contínua. Se $f(x)$ é contínua em $x = p$ e $g(x)$ é em $x = f(p)$, então $g(f(x))$ é contínua em $x = p$.

Exemplo 20

Verifique se a função $h(x) = \operatorname{tg}\left(\sqrt{x^2 + 1}\right)$ é contínua para todo valor de x.

Solução

Assíntotas

Assíntota é uma reta imaginária tal que a distância entre a curva que descreve o gráfico da função e essa reta tende para zero, mas sem nunca ser zero. Podemos defini-la também como uma reta tangente à curva de $f(x)$ no infinito.

Existem três tipos de assíntotas:

Assíntota vertical

Assíntota horizontal

Assíntota inclinada

Exemplo 21

Obtenha, caso existam, as assíntotas inclinadas para $f(x) = 2\operatorname{arctg}\left(e^{-x}\right) - x$ quando x tende ao infinito.

Solução

Exemplo 22

Obter, caso existam, as assíntotas verticais e horizontais da função $h(x) = \begin{cases} 3e^{x}, x \leq 0 \\ 4 + \frac{1}{x}, x > 0 \end{cases}$

Solução

Mão na massa

Questão 1

Sabe-se que a função $f(x)$ é contínua em todo seu domínio. Seja um ponto p do domínio de $f(x)$. Marque a alternativa correta. Os limites laterais de $f(x)$ quando x tende a p.

A Podem ser diferentes entre si, desde que o limite de $f(x)$ quando x tende a p seja igual a $f(p)$.

B Devem ser obrigatoriamente iguais, mas podem ter valores diferentes do que $f(p)$.

C Devem ser iguais ao limite de $f(x)$ tendendo a p, mas podem ser diferentes de $f(p)$.

D Devem ser iguais entre si e obrigatoriamente iguais a $f(p)$.

E Devem ser iguais entre si e tendem a infinito.

Parabéns! A alternativa D está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EPara%20uma%20fun%C3%A7%C3%A3o%20ser%20cont%C3%ADnua%2C%20o%20limite%20deve%20existir%20em%20%5C(p%5C)%3B

Questão 2

Seja a função $h(x)\begin{cases}4-x^2, x<3\\ p, x=3\\ x+k, x>3\end{cases}$, p e k reais. Determine o valor de $(k+p)$ para que a função $h(x)$ seja contínua em $x=3$.

A -2

B -8

C -5

D -13

E -12

Parabéns! A alternativa D está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EPara%20ser%20cont%C3%ADnua%20em%20%5C(x%3D3%5C)%2C%20os%20limites%20laterais%20devem%20ser%20iguais%2C%20al
%7D%20h(x)%3D%5Clim%20_%7Bx%20%5Crightarrow%203-%7D%204-x%5E%7B2%7D%3D4-3%5E%7B2%7D%3D-
5%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%24%24%20%3C%2Fbr%3E%3C%2Fbr%3E%0A%20%20%20%20%20
%7D%20x%2Bk%3D3%2Bk%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%24%24%20%3C%2Fbr%3E%3C%2Fbr%3E
5%20%5Crightarrow%20k%3D-
8%5C)%20%3C%2Fbr%3E%3C%2Fbr%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20E%20%24%24%0A%20%20%2
5%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%24%24%20%3C%2Fbr%3E%3C%2Fbr%3E%0A%20%20%20%20%20
13%5C).%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20

Questão 3

Obtenha a equação da assíntota horizontal, se existir, do gráfico da função $g(x)=\frac{3x^2+8}{x^2-1}$ para quando x tende ao infinito.

A $y=-8$

B $y=3$

C $y=0$

D $y=2$

E $y=-2$

Parabéns! A alternativa B está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EConfira%20a%20solu%C3%A7%C3%A3o%20no%20v%C3%ADdeo%20a%20seguir%3A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%2
video-
player%20src%3D%22https%3A%2F%2Fplay.yduqs.videolib.live%2Fhome%3Ftoken%3D9be36000ab6a491ab1486f27319b8706%22%20videoId%3D%2
video-player%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20

Questão 4

Obtenha, caso exista, a equação da assíntota vertical para a função $g(x)=\begin{cases} x^2, x \leq 4 \\ x+4, x>4 \end{cases}$

A $x=1$

B $x=2$

C $x=4$

D Não existe assíntota vertical.

E $x=0$

Parabéns! A alternativa D está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EA%20fun%C3%A7%C3%A3o%20%5C(h(x)%5C)%20tem%20uma%20descontinuidade%20para%20%5C(x%3D4%5C)%2C%20sendo%2C%
%7D%20g(x)%3D%5Clim%20_%7B4-
%7D%20x%5E%7B2%7D%3D16%20%5Ctext%20%7B%20e%20%7D%20%5Clim%20_%7B4%2B%7D%20g(x)%3D%5Clim%20_%7B4%2B%7D%20x%2B4%3

Questão 5

Seja a função $h(x) = \begin{cases} 5e^x, x \leq 0 \\ 4 + \frac{1}{x}, x > 0 \end{cases}$. Marque a alternativa correta.

A Há uma assíntota vertical e uma horizontal para x tendendo a mais infinito.

B Há uma assíntota vertical e duas assíntotas horizontais diferentes.

C Não tem assíntota vertical, mas existem duas assíntotas horizontais com a mesma equação.

D Há uma assíntota vertical e uma horizontal para x tendendo a menos infinito.

E Não existem assíntotas.

Parabéns! A alternativa B está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EConfira%20a%20solu%C3%A7%C3%A3o%20no%20v%C3%ADdeo%20a%20seguir%3A%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%2
video-
player%20src%3D%22https%3A%2F%2Fplay.yduqs.videolib.live%2Fhome%3Ftoken%3D250a2e9e8305410e90578dfb89e35bf2%22%20videoId%3D%2
video-
player%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%2

Questão 6

Obtenha, caso existam, as assíntotas inclinadas para $f(x) = \operatorname{arctg}\left(e^{-x}\right) + x$ quando x tende ao infinito.

A $y = x$

B $y = x + 1$

C $y=x-1$

D Não existe assíntota inclinada.

E Não existem assíntotas horizontais e verticais.

Parabéns! A alternativa A está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EVamos%20calcular%20os%20limites%20necess%C3%A1rios%3A%20%3C%2Fbr%3E%3C%2Fbr%3E%0A%20%20%20%20%20%20%2
x%7D%5Cright)%2Bx%7D%7Bx%7D%3D%5Clim%20_%7Bx%20%5Crightarrow%20%5Cinfty%7D%20%5Cfrac%7B%5Coperatorname%7Barctg%7D%5Clef
x%7D%5Cright)%7D%7Bx%7D%2B1%3D%5Cfrac%7B%5Coperatorname%7Barctg%7D%5Cleft(e%5E%7B-
x%7D%5Cright)%7D%7B%5Cinfty%7D%2B1%20%5C%5C%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%26%5Clim%2
%5Cinfty%7D%5Cright)%7D%7B%5Cinfty%7D%2B1%3D%5Cfrac%7B%5Coperatorname%7Barctg%7D(0)%7D%7B%5Cinfty%7D%2B1%3D%5Cfrac%7B0%
m%20x%3D%5Clim%20_%7Bx%20%5Crightarrow%20%5Cinfty%7D%20f(x)-
x%3D%5Clim%20_%7Bx%20%5Crightarrow%20%5Cinfty%7D%5Cleft(%5Coperatorname%7Barctg%7D%5Cleft(e%5E%7B-
x%7D%5Cright)%2Bx%5Cright)-x%3D%5Coperatorname%7Blimarctg%7D_%7Bx%20%5Crightarrow%20%5Cinfty%7D%5Cleft(e%5E%7B-
x%7D%5Cright)%20%5C%5C%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%26%5Clim%20_%7Bx%20%5Crightarrow
m%20x%3D%5Clim%20_%7Bx%20%5Crightarrow%20%5Cinfty%7D%20%5Coperatorname%7Barctg%7D%5Cleft(e%5E%7B-
x%7D%5Cright)%3D%5Coperatorname%7Barctg%7D%5Cleft(e%5E%7B-
%5Cinfty%7D%5Cright)%3D%5Coperatorname%7Barctg%7D(0)%3D0%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%

Teoria na prática

A tensão elétrica em um dispositivo eletrônico aumenta com o aumento de uma variável de controle x. A equação que modula a relação vale $V=\frac{50x^2}{2x^2+1}$, sendo medida em V. Para $x=0$, a tensão é nula, mas, conforme a variável x, tanto para valores positivos quanto para valores negativos, a tensão de V aumenta. Se essa tensão superar os $60V$, o dispositivo queima.

Estude o comportamento da tensão quando x tende a mais ou menos infinito para verificar se ocorrerá ou não a queima.

Mostrar solução

Falta pouco para atingir seus objetivos.

Vamos praticar alguns conceitos?

Questão 1

Determine a soma $a+b+c$ de forma a garantir que a função...

$$f(x)=\begin{cases} a, x=2 \\ x^2-2x+10, 2<x<3 \\ x+b, 3\leq x<5 \\ c, x=5 \end{cases}$$

... seja contínua no seu domínio $[2,5]$.

A 20

B 25

C 30

D 35

E 40

Parabéns! A alternativa D está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EParab%C3%A9ns!%20Voc%C3%AA%20entendeu%20a%20defini%C3%A7%C3%A3o%20da%20continuidade%20da%20fun%C3%A7%C3%
2%20x%2B10%3D2%5E%7B2%7D-
2%20%5Ccdot%202%2B10%3D10%3Df(2)%3Da%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%24%24%20%3C%2Fb
%7D%20f(x)%3D%5Clim%20_%7Bx%20%5Crightarrow%203%2B%7D%20f(x)%3Df(3)%20%5C%5C%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%2
%7D%20f(x)%3D%5Clim%20_%7Bx%20%5Crightarrow%203-%7D%20x%5E2-2%20x%2B10%3D3%5E2-
2.3%2B10%3D13%20%5C%5C%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%5Clim%20_%7Bx%20%5Crightarrow%2
%7D%7D%20f(x)%3Df(5)%20%5Crightarrow%20%5Clim%20_%7Bx%20%5Crightarrow%205%5E%7B-
%7D%7D%20x%2B10%3D15%3Df(5)%3Dc%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%24%24%20%3C%2Fbr%3E%

Questão 2

Obtenha a equação da assíntota vertical, se existir, do gráfico da função $h(x)=\frac{1}{x-5}$.

A $x=3$

B $x=5$

C $x=7$

D Não existe.

E $x=0$

Parabéns! A alternativa B está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EVoc%C3%AA%20entendeu%20a%20obten%C3%A7%C3%A3o%20das%20ass%C3%ADntotas%20verticais.%20O%20ponto%20de%20des
5%3D0%20%5Crightarrow%20x%20%3D%205%5C).%20%3C%2Fbr%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20
%7D%7D%20h(x)%3D%5Clim%20_%7Bx%20%5Crightarrow%203-%7D%20%5Cfrac%7B1%7D%7Bx-5%7D%3D%5Cfrac%7B1%7D%7B0-%7D%3D-
%5Cinfty%20%5C%5C%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%26%5Clim%20_%7Bx%20%5Crightarrow%205%
5%7D%3D%5Cfrac%7B1%7D%7B0%2B%7D%3D%5Cinfty%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%5Cend%7Ba

Considerações finais

Ao longo dos três módulos, descrevemos a abordagem do limite tanto de forma intuitiva quanto daquela com a formalidade matemática necessária. Além disso, vimos o conceito de limites laterais e técnicas para o cálculo de limites da função em pontos reais, bem como no infinito. Por fim, analisamos uma aplicação do limite na verificação da continuidade e na obtenção das assíntotas.

Você certamente já entende os principais conceitos relacionados ao limite de uma função real, sendo capaz de calcular o limite de uma função real, assim como aplicar esse cálculo em problemas matemáticos relacionados à tendência do comportamento de uma função.

Referências

GUIDORIZZI, H. L. **Cálculo**. v. 1. 5. ed. São Paulo: LTC, 2013. cap. 3. p. 54-98.

HALLET, H. *et al*. **Cálculo**, a uma e a várias variáveis. 5. ed. São Paulo: LTC, 2011. cap. 1. p. 47-53.

LARSON, R.; EDWARDS, B. H. **Cálculo**, com aplicações. 6. ed. São Paulo: LTC, 2003. cap. 1. p. 77-91.

STEWART, J. **Cálculo**. v. 1. 5. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2008. cap. 2. p. 92-148.

THOMAS, G. B. **Cálculo**. v. 1. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012. cap. 2. p. 61-110.

Explore +

Para se aprofundar mais no assunto, pesquise por:

- Conceito de vizinhança;

- Conceito de ponto de acumulação;
- Teorema da unicidade;
- Definição de limites de uma função no infinito e no menos infinito.

Você encontrará esses e outros conceitos importantes nesta obra:

MUNEM; FOULIS. **Cálculo**. v. 1. Rio de Janeiro: Ltc, 2008.