Disciplina: Matemática Computacional

Aula 4: Funções

Apresentação

O tema da aula de hoje é o conceito de função. Assim, dentre outros assuntos, você terá a oportunidade de estudar: funções sobrejetoras, injetoras e bijetoras; composição de funções; função inversa; funções do primeiro e do segundo grau e seus gráficos; funções polinomiais: raízes e gráficos.

O conceito de função, mais do que presente em um curso da área de tecnologia, faz parte de nosso cotidiano. Em cada caso, vemos que há uma lei de formação que relaciona os elementos de dois conjuntos (consumo e quilometragem, tempo e complexidade, quantidade de itens e valor de compra), ou seja, existe uma função matemática.

Assim, nesta quarta aula, trataremos de funções, conceitos associados e principais tipos, associados a exemplos para que você não só entenda esse importante tema da matemática, mas também seja capaz de aplicá-lo em situações-problema associadas aos diversos ramos da tecnologia.

Objetivos

- Identificar e compreender os conceitos associados aos principais tipos de funções: sobrejetoras, injetoras e bijetoras;
- Descrever o conceito de funções compostas e inversas;
- Explicar os principais tipos de funções polinomiais: as funções de 1o e 2o graus.

Razão e proporção

Já de início, vamos ver a **definição de função**:

Considere dois conjuntos A e B. Dizemos que f é uma função de A em B (escrevemos $f : A \to B$) se, para todo elemento $x \in A$, há um único elemento $y \in B$.

Nessa definição, vemos que a função *f* apresenta a relação entre duas grandezas, *x* e *y*. Tais grandezas são denominadas variáveis. Em especial, a variável *x* é denominada variável independente, enquanto a variável *y*, por apresentar um resultado que depende da lei de formação *f* e do valor da variável *x*, é conhecida como variável dependente.

Saiba mais

Normalmente, indicamos uma função da forma f(x) (lê-se: f de x ou uma função de x). De modo alternativo, podemos utilizar y (ou outra letra qualquer) no lugar de f(x). Dependendo do caso, podemos substituir as letras y e f por outras formas, de acordo com a grandeza representada (velocidade, consumo, preço etc.).

Aqui em funções, os conceitos de domínio, contradomínio e imagem são idênticos ao que vimos na aula de relações. Logo, existem os termos **domínio da função** (D(f)), **contradomínio da função** (CD(f)) e **imagem da função** (Im(f)).

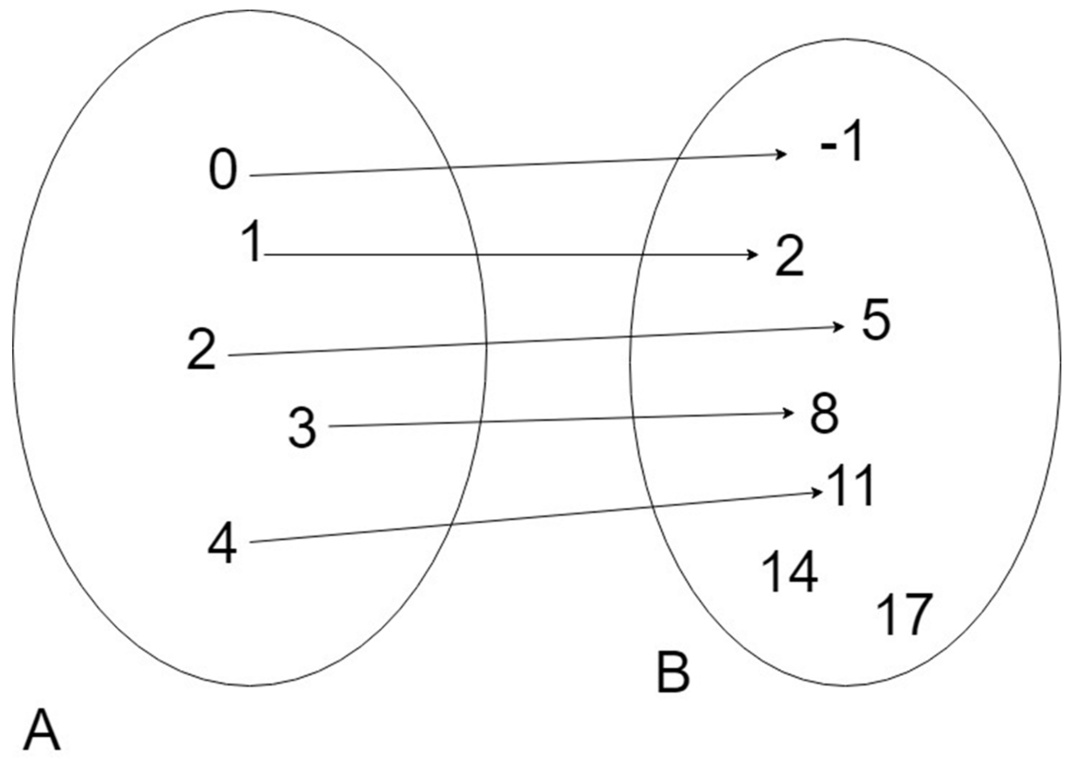
Em especial, o termo "imagem" pode ser utilizado para representar a associação individual com um elemento do domínio, de acordo com a lei de formação da função.

Exemplo

Considere os conjuntos A = {0, 1, 2, 3, 4} e B = {—1, 2, 5, 8, 11, 14, 17}, e a função y = f(x) tal que y = 3x — 1, com x ∈ A e y ∈ B. Neste caso, temos:

- D(f) = A = {0, 1, 2, 3, 4}
- CD(f) = B = {—1, 2, 5, 8, 11, 14, 17}
- Im(f) = {—1, 2, 5, 8, 11}
- Em particular, temos que "11" é a imagem de "4", pois 3 · 4 — 1 = 7.

Além dessa forma algébrica, podemos representar a função f(x) utilizando diagramas, como indicado na figura ao lado.



Representação da função f(x) = {x ∈ A e y ∈ B/ y = 3x — 1} com diagramas.

Você pode perceber que há grande semelhança com a definição de relação que vimos na aula anterior. No entanto, há algumas características peculiares ao conceito de função.

Atenção

- Todos os elementos do conjunto A devem se relacionar com elementos do conjunto B; e
- Cada elemento de A está associado a um único elemento de B.

Logo, nem toda relação é uma função.

Veja dois exemplos que contextualizam a afirmação acima destacada:

Clique nos botões para ver as informações.

Exemplo 1

A relação $y = x^2 + 3$ definida nos conjuntos A = {—1, 0, 2} e B = {1, 2, 3, 4} com x ∈ A e y ∈ B não é uma função, já que o elemento 2 do conjunto A não se relaciona com nenhum elemento do conjunto B, pois $(2)^2 + 3 = 7$, que não pertence ao conjunto B.

Exemplo 2

A relação y=±x, dados os conjuntos A = {0, 1, 4} e B = {—2, 0, 1, 2, 3} com x ∈ A e y ∈ B também não é uma função, pois o elemento 4 do conjunto A se relaciona com dois elementos do conjunto B, —2 e +2, a partir do emprego da lei de formação indicada.

Comentário

Quanto ao contradomínio, não há essa preocupação. No entanto, o comportamento do conjunto B pode variar caso a caso: há situações em que todos os elementos de CD (f) estão associados a elementos de D(f). Em outros casos, cada elemento de CD (f) está associado a um único elemento de D(f). Assim, dependendo do caso, podemos classificar as funções em injetora, sobrejetora ou bijetora.

Uma função f de A em B é denominada sobrejetora (ou sobrejetiva) quando todo elemento do conjunto B é imagem de, pelo menos, um elemento do conjunto A, ou seja, quando CD(f) = Im(f).

Exemplo

Dados os conjuntos A = {—3, —2, —1, 0, 1, 2, 3} e B = {—3, —2, 1, 6}, considere a função f: A → B tal que $f(x) = x^2 - 3$. Temos que:

- $f(-3) = (-3)^2 - 3 = 9 - 3 = 6$
- $f(-2) = (-2)^2 - 3 = 4 - 3 = 1$
- $f(-1) = (-1)^2 - 3 = 1 - 3 = -2$
- $f(0) = (0)^2 - 3 = 0 - 3 = -3$
- $f(1) = (1)^2 - 3 = 1 - 3 = -2$
- $f(2) = (2)^2 - 3 = 4 - 3 = 1$
- $f(3) = (3)^2 - 3 = 9 - 3 = 6$
- $f(3) = (3)^2 - 3 = 9 - 3 = 6$

Vemos que todos os elementos de B estão associados a, pelo menos, um elemento de A. Assim, temos que esta função é **sobrejetora**.

Uma função f de A em B é denominada injetora (ou injetiva) quando cada elemento da sua imagem tem uma única associação com elemento do domínio, ou seja, se para quaisquer dois elementos distintos de seu domínio correspondem dois elementos distintos de sua imagem.

Exemplo

Dados os conjuntos A = {0, 1, 2, 3} e B = {−3, −2, 1, 6, 13}, considere a função f: A → B tal que $f(x) = x^2 - 3$. Temos que:

- $f(0) = (0)^2 - 3 = 0 - 3 = -3$
- $f(1) = (1)^2 - 3 = 1 - 3 = -2$
- $f(2) = (2)^2 - 3 = 4 - 3 = 1$
- $f(3) = (3)^2 - 3 = 9 - 3 = 6$

> Vemos aqui que o conjunto imagem Im(f) é dado por {−3, −2, 1, 6} e que cada um destes elementos está associado a apenas um elemento do conjunto domínio D(f). Logo, temos que esta função é injetora.

Uma função f de A em B é denominada bijetora (ou bijetiva) quando todo elemento do conjunto B é imagem de um único elemento do conjunto A, ou seja, quando é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.

Exemplo

Dados os conjuntos A = {0, 1, 2, 3} e B = {−3, −2, 1, 6}, considere a função f: A → B tal que $f(x) = x^2 - 3$. Temos que:

- $f(0) = (0)^2 - 3 = 0 - 3 = -3$
- $f(1) = (1)^2 - 3 = 1 - 3 = -2$
- $f(2) = (2)^2 - 3 = 4 - 3 = 1$
- $f(3) = (3)^2 - 3 = 9 - 3 = 6$

> Todos os elementos do conjunto B são imagem de um único elemento do conjunto A, ou seja, a função é sobrejetiva e injetiva ao mesmo tempo. Logo, essa função é um exemplo de função bijetiva.

Função inversa e função composta

Agora podemos ver dois tipos especiais de emprego de funções: inversa e composta.

Funções Inversas

Uma aplicação clássica de função em mecânica é o cálculo da distância percorrida por um móvel em determinado intervalo de tempo a uma velocidade constante.

Chamando de *s* a distância percorrida, *v* a velocidade empregada e *t* o intervalo de tempo, temos que $s = v \cdot t$. No entanto, podemos fazer o cálculo inverso, ou seja, o tempo *t* gasto para percorrer determinada distância *s*. Basta isolar a variável *t*, de modo a obter $t = s/v$.

Assim, vemos que as funções $s = v \cdot t$ e $t = s/v$ são denominadas funções inversas.

Segundo Brochi (2016), qualquer par (x,y) que pertença à primeira é tal que o par (y, x) pertence à segunda. Logo, o que é domínio em uma função é imagem em sua inversa, e vice-versa. A notação que utilizamos para determinar a função inversa de f é f^{-1}.

Atenção

Um ponto interessante para notar é que uma função f admite função inversa f^{-1} quando ela é bijetora (todo elemento do contradomínio está associado a um único elemento do domínio).

Funções Compostas

Considere uma empresa cujo faturamento f é dependente da receita r obtida, de acordo com a lei de formação $f(r) = 0{,}9 \cdot r + 1\,000$.

No entanto, a receita obtida, por sua vez, é também dependente de outra variável, o preço p, de modo que podemos representar da forma $r(p) = 0{,}8 \cdot p$. Ou seja, a função receita é, na verdade, uma variável independente da função faturamento.

Desse modo, temos que o faturamento poderia ser expresso diretamente como uma função do preço, digamos, sob a expressão g(p), que relaciona o faturamento f ao preço p, pois $f(r) = 0{,}9 \cdot r + 1\,000$, mas r pode ser substituída por $0{,}8 \cdot p$.

> Logo, f(r) é, em verdade, $f(r(p)) = 0{,}9 \cdot (0{,}8 \cdot p) + 1\,000$. Assim, $g(p) = 0{,}72 \cdot p + 1\,000$. Fizemos a composição das funções de faturamento e receita, gerando uma função composta [1] g(p) que equivale à função f(r(p)) (em notação alternativa, $(f \circ r)(p)$, em que a letra o indica composição de funções).

Funções do primeiro e do segundo graus e seus gráficos

Para finalizar este estudo, veremos dois tipos de funções que apresentam uma grande quantidade de aplicações: a função do 1º grau e a função do 2º grau. Vamos às definições:

Uma função f na variável x, tal que f: R → R, é denominada função do primeiro grau se pode ser escrita na forma f (x) = ax + b (ou y = ax + b), em que a e b são valores reais quaisquer, com a ≠ 0.

Comentário

Temos aqui que a constante real *a* é denominada coeficiente angular (ou de inclinação) da função. Ela é sempre o valor (coeficiente) que multiplica a variável independente *x*. Já a constante *b* é denominada coeficiente linear da função, e é sempre o valor que aparece isolado, isto é, não multiplica a variável independente.

Veja um exemplo de função do 1º grau:

Exemplo

Considere a função f(x) = 3x + 3. Aqui, temos:

- x: incógnita, valor variável ou, simplesmente, variável.
- f(x): regra de transformação do valor da variável x de interesse. Em outras palavras, trata-se de uma função na variável x. Neste caso, para cada valor de x de interesse, a regra de transformação – ou melhor, a função – retorna um valor equivalente ao triplo de x (3x) acrescido de 3 unidades (3x + 3).

Você pode calcular, para cada valor de x, um valor para a função f(x), como nos casos a seguir:

x	f(x)
2	3 · (2) + 3 = 6 + 3 = 9
4	3 · (4) + 3 = 12 + 3 = 15
—1	3 · (—1) + 3 = —3 + 3 = 0

O gráfico da função de primeiro grau é sempre uma reta, e o "sinal" do coeficiente angular determina se ela será crescente (*a > 0*) ou decrescente (*a < 0*). Já o coeficiente linear *b* indica o ponto (valor) no qual a reta, que é o gráfico da função de primeiro grau, cruza o eixo vertical *y*. Observe abaixo, o gráfico da função f(x) = 3x + 3.

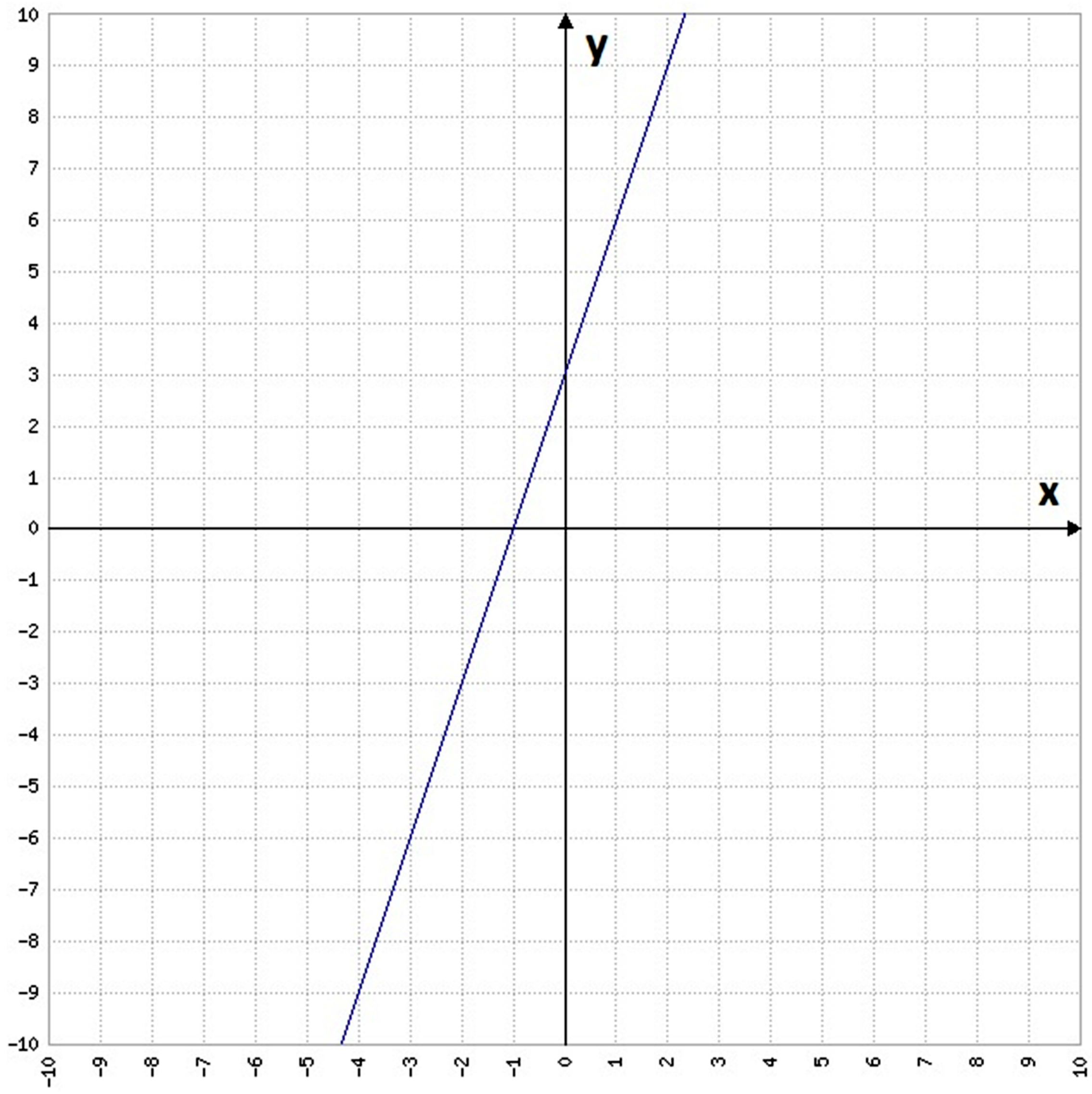


Gráfico da função linear f(x) = 3x + 3

Uma função do primeiro grau é sempre bijetora, pois ela é injetora e sobrejetora.

Como todos os elementos do contradomínio participam da relação (o conjunto imagem é igual ao contradomínio), concluímos que ela é sobrejetora. Além disso, sempre que x1 ≠ x2, temos f (x1) ≠ f (x2), o que nos leva a concluir que ela é injetora (cada valor de y está associado a um único valor de x).

Dois pontos que, geralmente, são importantes nas aplicações de funções são **raiz** e **intercepto**.

1

Raiz

A raiz de uma função é o valor (ou os valores) de x para o qual (ou para os quais) a função se anula.

2

Intercepto

O intercepto de uma função é o ponto de interseção do seu gráfico com o eixo y. Neste caso, temos que a raiz é x = —1 e o intercepto é dado pelo par ordenado (0, 3).

Já a função do segundo grau apresenta a seguinte definição (BROCHI, 2016):

Denominamos função do segundo grau, na variável x, toda função f: R → R que pode ser escrita na forma f (x) = ax2 + bx + c (ou y = ax^2 + bx + c) em que a, b e c são valores reais quaisquer, com a ≠ 0.

É importante notar que:

- O único coeficiente que não pode ser nulo é *a*. Caso isso aconteça, a função deixa de ser do segundo grau.
- O gráfico de uma função do 2º grau tem o formato de uma parábola, cuja concavidade pode ser para cima (quando $a > 0$) ou para baixo (quando $a < 0$).

Alguns outros pontos importantes:

Clique nos botões para ver as informações.

Raiz

Valor de x em que y assume o valor 0. Uma função do segundo grau pode ter ou não raízes. Além disso, o encontro da parábola pode se dar em um único ponto ou em dois.

Intercepto

Ponto de interseção de uma função com o eixo vertical y, ou seja, é o ponto da função em que $x = 0$.

Discriminante (Δ)

Dado por $b^2 - 4ac$. O sinal do discriminante indica o número de raízes da equação.

$\Delta > 0$: 2 raízes distintas

$\Delta = 0$: 1 raiz dupla

$\Delta < 0$: nenhuma raiz

Vértice da parábola

ponto mais baixo da parábola, quando a concavidade é voltada para cima ($a > 0$), ou o ponto mais alto, quando a concavidade é voltada para baixo ($a < 0$). E, em relação ao eixo vertical que passa sobre o vértice, a parábola apresenta simetria. É representado pelo par ordenado −b2a,−Δ4a.

De acordo com a fórmula de Bhaskara, temos que as raízes de uma equação do 2º grau são dadas por

x1,2=−b±Δ2a

Veja ao lado o gráfico da função $y = x^2 — 5x + 6$.

Perceba que, aplicando a fórmula de Bhaskara indicada, a função apresenta duas raízes (x = 2 e x = 3), o intercepto é o ponto (0, 6) e o vértice é dado por x = 2,5 e y = —0,25. O domínio de uma função quadrática é composto por todos os números reais.

Com relação à imagem, é preciso considerar que a coordenada y_v a limita. Se a concavidade da parábola é voltada para cima, então o conjunto-imagem é dado por Im (f) = [y_V, ∞[. Quando a concavidade é voltada para baixo, temos Im (f) = [⁻∞, y_V[. No caso da função apresentada neste exemplo, temos Im (f) = [–0,25, ∞[.

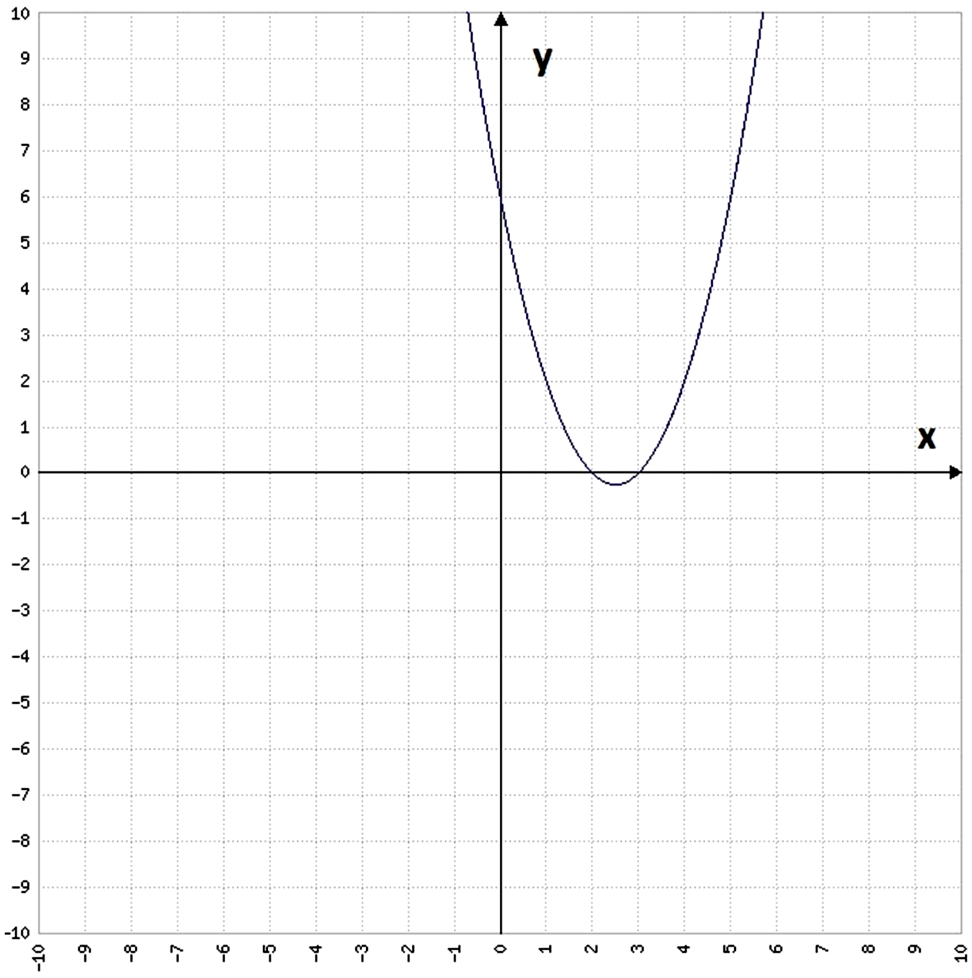


Gráfico da função do 2º grau f(x) = y = x2 — 5x + 6.

Atividade

1. Quanto à função f(x) = 3 + x, assinale a ÚNICA alternativa certa:

a) função é injetora e seu gráfico é representado por uma reta.
b) A função é injetora e seu gráfico é representado por uma parábola.
c) A função é sobrejetora e seu gráfico é representado por uma reta.
d) A função é sobrejetora e seu gráfico é representado por uma parábola.
e) A função é bijetora e seu gráfico é representado por uma reta.

2. Em uma fábrica, existe o custo fixo de R$50,00 para a produção de peças, mais um custo variável de R$5,00 por unidade produzida. Sabendo-se que o dono da empresa destinou, no máximo, R$1000,00 para custear a produção, calcule o número máximo de peças unitárias (x) que podem ser produzidas, sem ultrapassar o orçamento estipulado.

a) 200 peças
b) 20 peças
c) 190 peças
d) 100 peças
e) 10 peças

3. O lucro L (em milhares de reais) referente à produção e comercialização de uma quantidade de x toneladas de certo produto é dado pela função $L = -x^2 + 30x - 125$. Qual é a quantidade que deve ser produzida e comercializada para que o lucro seja máximo?

a) 5
b) 10
c) 15
d) 20
e) 25

Notas

Função Composta [1]

É interessante notar que a função composta não é comutativa.

Referências

BROCHI, A. L. C. **Matemática aplicada à Computação**. Rio de Janeiro: SESES, 2016.

Próxima aula

- Cálculo proposicional;
- Definições, principais procedimentos para resolução de problemas associados à linguagem natural e simbólica;
- Proposições simples e compostas.

Explore mais

Assista aos seguintes vídeos:

- Funções sobrejetoras e injetoras <https://www.youtube.com/watch?v=8ror_qymvlo> ;
- Introdução às funções inversas <https://pt.khanacademy.org/math/algebra2/manipulating-functions/introduction-to-inverses-of-functions/v/introduction-to-function-inverses> ;
- O que é uma função? <https://pt.khanacademy.org/math/algebra/algebra-functions/evaluating-functions/v/what-is-a-function> ;
- Função Injetora, Sobrejetora e Bijetora <https://www.youtube.com/watch?v=zv6m9ww3Jfs> ;
- Matemática – Aula 17 – Função polinomial do 1o grau <https://www.youtube.com/watch?v=Vkxrhm_UcJU> .