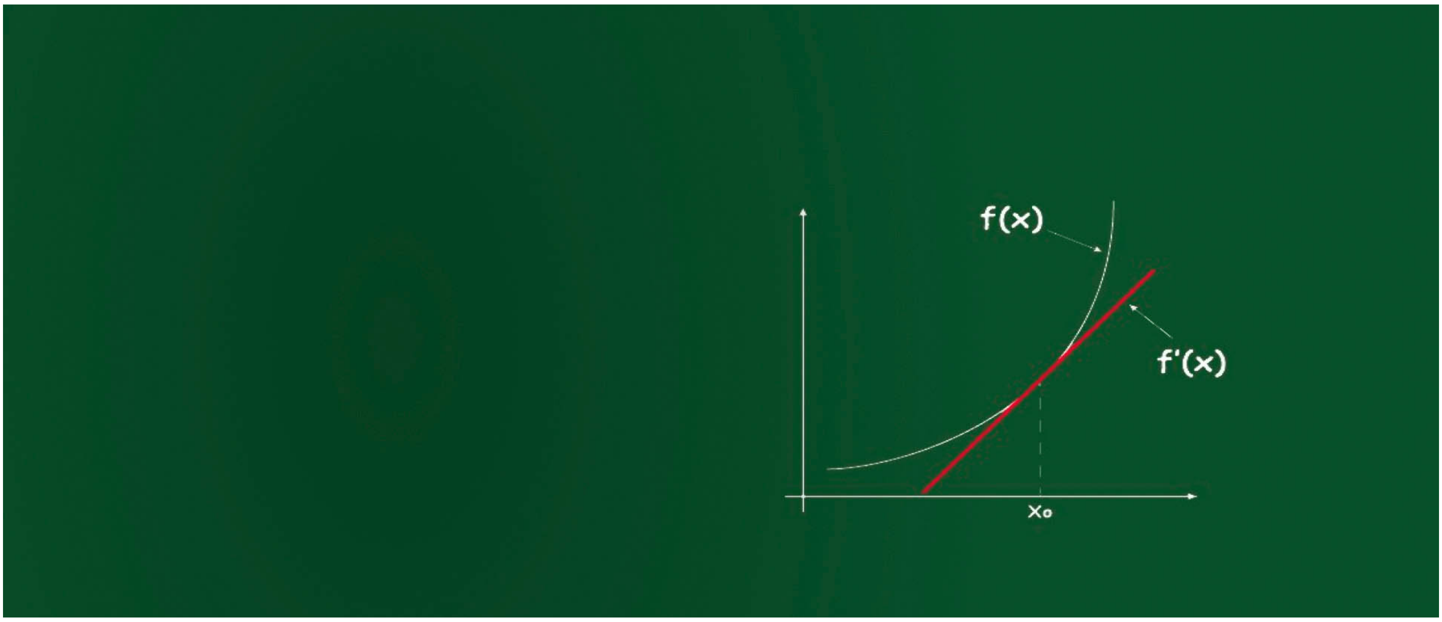



# Derivadas, conceitos, propriedades e cálculos

Prof. Jorge Luís Rodrigues Pedreira de Cerqueira

Prof. Gabriel Burlandy Mota De Melo, Prof. Gabriel Elmor Filho

## Descrição

Aplicação dos conceitos de derivada de uma função real.

## Propósito

Calcular a derivada de uma função real, por meio de uma abordagem gráfica e analítica, bem como aplicar suas regras e propriedades na derivação implícita e sua relação com a continuidade de uma função.

# Objetivos

Módulo 1

## Derivada de uma função real

Aplicar a abordagem gráfica e analítica para a derivada de uma função real e na sua relação com a continuidade de uma função.

Módulo 2

## Regras de derivação

Aplicar as regras de derivação para o cálculo da derivada.

Módulo 3

## Regra da cadeia

Empregar a derivada para funções compostas através da regra da cadeia.

Módulo 4

## Derivação implícita e de ordem superior

Representar o conceito da derivada para derivação implícita e derivada de ordens superiores.

# Introdução

No vídeo a seguir, você será apresentado ao estudo sobre derivadas: conceitos, propriedades e cálculos, e aos objetivos a serem atingidos em cada módulo.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.

# 1 - Derivada de uma Função Real

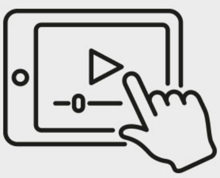
Ao final deste módulo, você será capaz de aplicar a abordagem gráfica e analítica para a derivada de uma função real e na sua relação com a continuidade de uma função.

## Vamos começar!

## Derivadas: Conceitos, Propriedades e Cálculos

Veja agora uma introdução sobre o assunto abordado neste primeiro módulo.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



## Abordagem gráfica da Derivada de uma Função

## Real

Graficamente, pode ser verificada a interpretação da derivada como uma taxa de variação instantânea ou como a inclinação da reta tangente à função em um ponto.

A derivada de uma função real em um ponto q será a taxa de variação instantânea dessa função no ponto, como também será o valor do coeficiente angular da reta tangente à função nesse ponto. Portanto, pela abordagem gráfica, podemos afirmar o seguinte:

### +

A derivada vai ser positiva nos pontos onde a reta tangente for crescente ou quando a taxa instantânea for positiva.

### −

A derivada vai ser negativa nos pontos onde a reta tangente for decrescente ou quando a taxa instantânea for negativa.

### 0

A derivada será nula se a tangente no ponto for horizontal, representando uma taxa instantânea nula.

Se a derivada representa uma taxa de variação instantânea, então a derivada de uma função constante, isto é, f(x) = k, k real, será nula em todo seu domínio.

### Exemplo

O crescimento da altura de uma planta pelo tempo é modelado por meio da equação $H(t) = 2t + 20$, com H medido em cm e $t$ medido em dias. 0 modelo vale para $t \geq 0$. Marque a alternativa que apresenta um significado para a derivada da função $H(t)$ para $t = 10$ dias. a) Representa a altura que a planta terá para quando $t = 10$ dias, como também, o valor do coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $H(t)$ para $t = 10$ dias. b) Representa a altura que a planta terá para quando $t = 10$ dias, como também o valor do coeficiente angular da reta secante ao gráfico de $H(t)$, entre os pontos $t = 0$ e $t = 10$. c) Representa a taxa de crescimento que a planta terá para quando $t = 10$ dias, como também o valor do coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $H(t)$, para $t = 10$. d) Representa a taxa de crescimento que a planta terá para quando $t = 10$ dias, como também o valor do coeficiente angular da reta secante ao gráfico de $H(t)$, entre os pontos $t = 0$ e $t = 10$.

Resposta

A primeira interpretação para a derivada será de taxa instantânea de H(t), isto é, qual será a taxa de crescimento da altura da planta no décimo dia.
Outra possibilidade é geométrica, isto é, a derivada de H(t) representará a inclinação da reta tangente a h(t) no ponto t = 10 dias.
Dessa forma, a alternativa correta é a letra C.

# Abordagem análitica da Derivada de uma Função Real

Analiticamente, transforma-se essa interpretação em uma equação que permite a determinação da derivada por meio do cálculo de um limite.

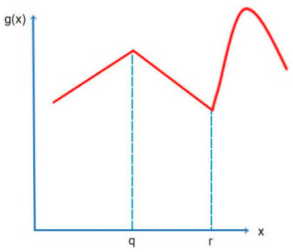
No item anterior, foi vista a definição da função derivada através de uma abordagem gráfica. A derivada de uma função em um ponto foi interpretada como a inclinação da reta tangente ou como a taxa de variação instantânea da função no ponto analisado. Agora, podemos definir a derivada analiticamente. Ressalta-se que a derivada de f(x) também é uma função real, denominada de derivada de f(x), como notação f'(x).

**Atenção**: Sejam f(x) uma função e um ponto **q** do seu domínio. A derivada da função f(x), no ponto **q**, é definida por:

$$f'(q) = \lim_{x \to q} \frac{f(x) - f(q)}{x - q}$$

Rotacione a tela.

Se o limite acima existir e for finito, a função será derivável ou diferenciável em **q** e terá valor igual ao do limite. Recorde que o limite vai existir quando os dois limites laterais existirem e forem iguais.




Se o limite à esquerda e o limite à direita apresentarem valores diferentes, quando **x** tende a **q**, não existirá a derivada de f(x) em **q**. Isso significa que, quando **x** tende ao ponto **q**, por valores superiores ou inferiores, vai apresentar duas taxas instantâneas ou duas inclinações da reta tangente diferentes, não sendo possível portanto definir-se uma derivada. Na prática, dizemos que a função forma *um bico*. Veja um exemplo no gráfico. A função **g(x)** não é derivável em **x = q** e **x = r**.

Um ponto importante é que só pode ser calculada a derivada de uma função em um ponto do seu domínio, diferentemente com o que acontecia com o limite.


Analisamos a derivada de uma função em um ponto, mas uma função será derivável em um intervalo aberto (a , b) se for derivável em todos os pontos interiores desse intervalo. Para os pontos extremos do domínio de uma função, não há como definir a derivada, pois não podemos montar os dois limites laterais. Assim, usamos o conceito de derivada à direita ou à esquerda, utilizando apenas um dos limites laterais.


Para o caso de um intervalo fechado $[a, b]$, a função para ser derivável deverá atender aos seguintes requisitos: ser derivável em todo interior de $(a, b)$; existir a derivada à direita para o extremo inferior a:

$$f'(a) = \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existir a derivada à esquerda para o extremo superior b:

$$f'(b) = \lim_{x \to b-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

# Outras notações

Além da notação apresentada, a derivada de f(x) em relação à sua variável independente x pode ser representada por outras notações:

$$f\prime(x) = y(x) = Df(x) = D_x f(x) = \frac{dy}{dx}(x)$$

A notação $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ é denominada de notação de Leibniz.

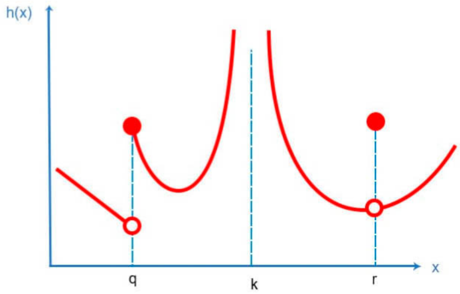
# Diferenciabilidade e continuidade

Um teorema importantíssimo no cálculo diferencial é o que relaciona a diferenciabilidade de uma função com a sua continuidade.

> Teorema: se uma função f(x) é derivável para x = q, então a função é contínua para x = q.

Um cuidado deve ser tomado: nada podemos afirmar sobre a volta desse teorema, isto é, se uma função for contínua em x = q ela pode ou não ser derivável em x = q. Por exemplo, no item anterior, as funções f(x) e g(x) são contínuas em x = q, porém a derivada de f(x) em q existe e a derivada de g(x) em q não existe.

Uma consequência direta do teorema é que se a função não for contínua em x = q, então a função não é derivável em x = q. Dizemos que ser contínua em um ponto é uma **condição necessária, mas não suficiente** para ser derivável no ponto.




Em outras palavras, para existir a derivada para x = q, além da função ser definida em x = q, ela deve ser obrigatoriamente contínua em x = q e, mesmo assim, pode haver casos nos quais a derivada não existirá, vide item anterior ”Retornando à análise gráfica”, temos aqui outra possibilidade de a derivada não existir, além de formar um bico apresentado no item anterior. Caso apresente uma descontinuidade em um ponto, a derivada não existirá. Os gráficos abaixo apresentam exemplos da não existência da derivada em x = q, x = k e x = r, pois a função é descontínua nestes pontos.

# Demonstração do Teorema entre Diferenciabilidade e Continuidade

**Teorema** Se f(x) for derivável no ponto q, então f(x) será contnnu no ponto p. Demonstração:Adotando a hipótese do teorema que f(x) é derivável em x = q.

$$\text{Assim, } f'(q) = \lim_{x \to q} \frac{f(x) - f(q)}{x - q} \text{ existe}$$

$$\text{Mas, } f(x) - f(p) = \frac{f(x) - f(q)}{(x - q)}(x - q), \text{ para } x \neq q$$

$$\text{Então, } \lim_{x \to q} f(x) - f(q) = \lim_{x \to q} \frac{f(x) - f(q)}{(x - q)}(x - q) = \lim_{x \to q} \frac{f(x) - f(q)}{(x - q)} \lim_{x \to q}(x - q)$$

$$\text{Mas, } \lim_{x \to q} \frac{f(x) - f(q)}{(x - q)} = f'(q) \text{ que é um número real e}$$

$$\lim_{x \to q}(x - q) = 0$$

Assim, então,

$$\lim_{x \to q} f(x) - f(q) = \lim_{x \to q} \frac{f(x) - f(q)}{(x - q)} \lim_{x \to q}(x - q) = f'(q).0 = 0$$

$$\lim_{x \to q} f(x) - f(q) = 0 \rightarrow \lim_{x \to q} f(x) = f(q)$$

Provando que f(x) é contínua para quando **x** tende a **q**.
Provando assim o teorema.

# Mão na massa

## Questão 1

Em determinada cidade, foi modelada a variação da temperatura, medida em °C, com o tempo, medido em minutos, após a meia-noite. A função T(t) define essa dependência para t ≥ 0. Qual o significado da função derivada T’(60)?

A T’(60) representa a taxa de variação da temperatura a 1 hora da madrugada.

B T’(60) representa a temperatura a 1 hora da madrugada.

C T’(60) representa a hora da madrugada quando a temperatura alcança 600C.

D T’(60) representa a soma das temperatura de meia-noite até 1 hora da madrugada.

E T’(60) representa a máxima temperatura de meia-noite até 1h da madrugada.

## Parabéns! A alternativa A está correta.

Se T(t) mede a temperatura com o tempo, a função T’(t) medirá como a temperatura irá variar com a variação do tempo em determinado horário após a meia-noite. Em outras palavras, T’(t) medirá a taxa de variação instantânea da temperatura T(°C) para um instante t(min) medido após a meia-noite. T’(60) representa a taxa de variação da temperatura a 1 hora da madrugada, isto é, 60min após a meia-noite. Vamos supor que T’(60) tenha valor de – 0,5. Então, quando estivermos no horário de 1h da madrugada, a temperatura irá decrescer 0,5°C por minuto. Logo, a alternativa é a letra A.

### Questão 2

Marque a alternativa verdadeira quanto ao conceito da abordagem gráfica da função derivada da função h(x) em um ponto p do seu domínio:

A Representa a taxa de variação média de h(x) no ponto **q**, bem como o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de h(x) no ponto **p**.

B Representa a taxa de variação instantânea de h(x) no ponto **q**, bem como o coeficiente angular da reta secante ao gráfico de h(x) no ponto **p**.

C Representa a taxa de variação instantânea de h(x) no ponto **q**, bem como o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de h(x) no ponto p.

D Representa a taxa de variação média de h(x) no ponto **q**, bem como o coeficiente angular da reta secante ao gráfico de h(x) no ponto **p**.

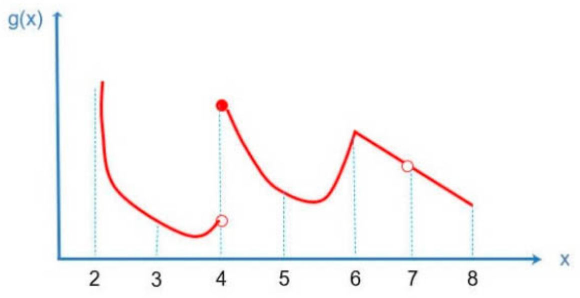
E Representa a taxa de variação máxima de h(x) no ponto **q**, bem como o coeficiente angular da reta normal ao gráfico de h(x) no ponto **p**.

## Parabéns! A alternativa C está correta.

Conforme definido na abordagem gráfica da derivada, esta representa a taxa de variação instantânea da função no ponto analisado. Além disso, ela permite o cálculo da inclinação da reta tangente no ponto, pois a derivada terá o valor do coeficiente angular da reta tangente.Assim, a alternativa verdadeira é a letra C. As demais associam a derivada à taxa média e coeficiente angular da reta secante, conceito não verdadeiro.

## Questão 3

Verifique o gráfico abaixo e marque a alternativa que apresenta apenas os pontos onde a função g(x) não é derivável.




A 3, 4 e 7.

B 4, 6 e 7.

C 4, 5 e 6.

D 4, 5 e 7.

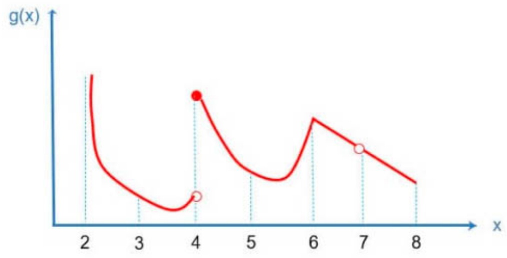
E 3, 5 e 7.

## Parabéns! A alternativa B está correta.

Como pode ser verificado pelo gráfico, no ponto x = 6 não existirá derivada, pois os limites laterais da taxa de variação (ou a tangente ao gráfico) quando x tende a 6 serão diferentes para aproximação por valores inferiores e superiores. Desta forma, não existirá derivada em x = 6. Para os pontos x = 4 e x = 7, existe uma descontinuidade da função, portanto não existirá a derivada. Nos demais pontos, pertencentes ao intervalo (2 , 8), a derivada existe, sendo o caso para x = 3 e x = 5. Assim, a única alternativa que apresenta apenas pontos onde não existe a derivada é a letra B.

## Questão 4

Verifique o gráfico abaixo e marque a alternativa que apresenta um intervalo onde a função g(x) é derivável.




A (2 , 8)

B (4 , 6)

C [4 , 7)

D [3, 5]

E [4 , 7]

## Parabéns! A alternativa B está correta.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.

## Questão 5

Marque a alternativa verdadeira quanto à relação entre diferenciabilidade e continuidade.

A Se a função não apresenta derivada em um ponto **q**, então ela é descontínua no ponto **q**.

B Se a função é contínua em um ponto **q**, então ela é derivável no ponto **q**.

C Se a função apresenta derivada em um ponto **q**, então ela pode ser contínua ou não no ponto **q**.

D

Se a função não for contínua em um ponto **q**, então ela não é derivável no ponto **q**.

E Se a função for contínua em um ponto **q**, então ela apresenta um ponto de máximo local.

## Parabéns! A alternativa D está correta.

O teorema que relaciona a diferenciabilidade e continuidade afirma que, se uma função for diferenciável em um ponto, a função é contínua neste ponto, ou, se a função for descontínua no ponto, ela não é derivável neste ponto.
Assim, a alternativa correta é a da letra D.
A letra A é falsa, pois existem funções que não têm derivada no ponto, mas são contínuas nesse ponto. São as funções cujos limites laterais da derivada são diferentes (forma do gráfico em bico).
A letra B é falsa, pois existem funções que são contínuas no ponto, mas não existe derivada. São as funções cujos limites laterais da derivada são diferentes (forma do gráfico em bico ).
A letra C é falsa, pois se a função for derivável no ponto, obrigatoriamente ela tem que ser contínua no ponto.

## Questão 6

Seja a função $g(x) = \begin{cases} 4x+4, & x<2 \\ x^2+2, & x \geq 2 \end{cases}$. Marque a alternativa correta em relação à derivada de g(x) no ponto x = 2.

A Existe, pois apesar da função descontínua em x = 2, os limites laterais são iguais.

B Não existe, pois a função não é contínua no ponto x = 2.

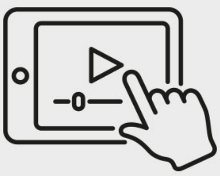
C Não existe, pois a função é contínua em x = 2.

D Existe, pois a função é contínua em x = 2.

E Não existe, pois a derivada de g(x) não é definida em x = 2.

## Parabéns! A alternativa B está correta.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



# Teoria na prática

Determinado experimento laboratorial criou uma população de bactérias. A quantidade de bactérias, em milhões, para o instante de tempo t, medido em horas, foi modelada como $B(t) = -t^2 + 4t + 6, t \geq 0$ O experimento ocorrerá de $0 \leq t \leq 5$.

Determine:

a) Para que instantes a taxa de crescimento das bactérias será positiva.

b) Para que instantes a taxa de crescimento das bactérias será negativa.c) Para que instantes a taxa de crescimento das bactérias será nula.

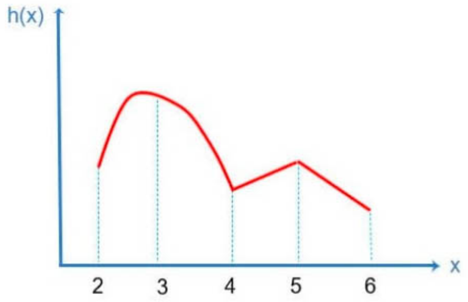
Mostrar solução

# Falta pouco para atingir seus objetivos.

## Vamos praticar alguns conceitos?

### Questão 1

Analise o gráfico e marque a alternativa que apresenta os pontos entre (2,6) onde a derivada de h(x) não existe.




A Apenas no x = 4.

B x = 3, x= 4 e x = 5.

C Apenas x = 5.

D x = 4 e x = 5.

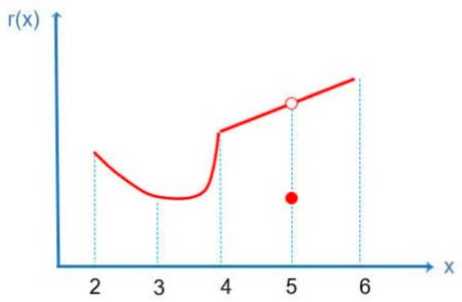
E x = 2 e x = 6

## Parabéns! A alternativa D está correta.

Você entendeu o conceito da abordagem analítica da derivada de uma função.
A derivada, nos pontos interiores do domínio, não existirá onde os limites laterais previstos na definição forem diferentes. Isto é, a reta tangente tirada para quando se aproximar pela esquerda vai ser diferente quando se aproximar pela direita. É o que foi denominado de formar um bico.
Dessa forma, não existirá derivada nos pontos x = 4 e x = 5.

## Questão 2

Analise o gráfico da função r(x) e marque a alternativa que apresenta a afirmativa correta:




A Não existirá a derivada de r(x) no ponto x = 4, pois a função é descontínua nesse ponto.

B Não existirá a derivada de r(x) no ponto x = 5, pois a função é descontínua nesse ponto.

C Existirá a derivada de r(x) no ponto x = 4, pois a função é contínua nesse ponto.

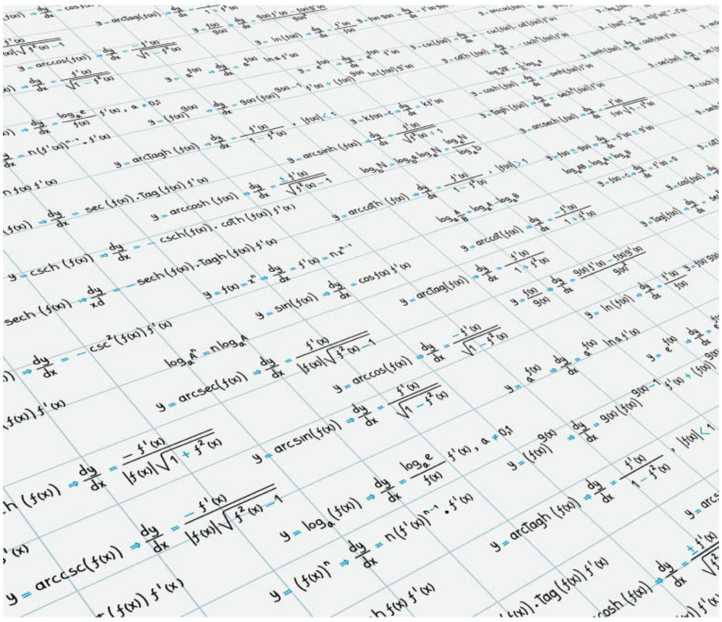
D Existirá a derivada de r(x) no ponto x = 5, pois, apesar de a função ser descontínua nesse ponto, os limites laterais são iguais.

E Não existe derivada de r(x) no ponto x = 3, pois a função é decrescente.

## Parabéns! A alternativa B está correta.

Você entendeu o conceito da relação entre diferenciabilidade e continuidade.

A continuidade da função em um ponto é condição necessária, mas não suficiente para a função ser derivável no ponto. Assim, para x = 5, onde a função é descontinua, não pode existir a derivada. Nos pontos onde a função é contínua, pode não haver a derivada se os limites laterais da definição da derivada forem diferentes, que é o caso para x = 4.



# 2 - Regras da derivação

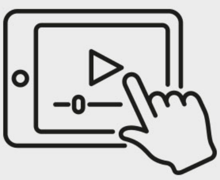
Ao final deste módulo, você será capaz de aplicar as regras de derivação para o cálculo da derivada.

## Vamos começar!

## Regras de derivação

Veja agora uma introdução sobre o assunto abordado neste módulo.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



# Cálculo da derivada pelo limite

A determinação da derivada de uma função diretamente por meio do limite de sua definição é uma possibilidade, apesar de ser necessária uma grande habilidade no cálculo do limite. A definição nos apresenta:

$$f'(q) = \lim_{x \to q} \frac{f(x) - f(q)}{x - q}$$

Rotacione a tela.

Seguindo a definição, para se calcular a derivada de f(x) em um ponto **q**, inicialmente deve-se montar a taxa média da função entre o ponto genérico **x** e o ponto **q**, $\frac{f(x)-f(q)}{x-q}$. Posteriormente, deve-se calcular o valor que essa taxa vai tender para quando a variável **x** tender ao ponto desejado **q**. Se esse limite existir e for finito, a derivada existe.

Existe outra equação equivalente à primeira para se representar esta taxa de variação. Essa nova equação é originada pela substituição de (x – q) por **h** . Assim, quando **x** tende a **q**, **h** tenderá a zero.

Essa segunda equação é mais usada quando se deseja obter a equação genérica da derivada, isto é, uma equação que vale para todo **x**:

$$f'(q) = \lim_{x \to q} \frac{f(x) - f(q)}{x - q} = \lim_{h \to 0} \frac{f(q+h) - f(q)}{h}$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Rotacione a tela.

# Exemplo

Determine a função derivada da função $f(x) = 2x^3$ em um ponto genérico e para x = 1 através da definição da derivada.

# Resposta

Vídeo disponível em:

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.

# Regras de derivação

As primeiras regras tratam de operações matemáticas em geral. Sejam as funções f(x) e g(x) deriváveis e uma constante real **k**. Assim:

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ : a derivada da soma é a soma da derivada.
- $(kf)'(x) = kf'(x)$ : a derivada de uma função multiplicada por uma constante é a constante que multiplica a derivada.
- $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ : regra do produto.- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$, quando $g(x) \neq 0$ : regra do quociente.

# Derivada das principais funções

Após as regras gerais, podemos, por meio da definição de derivada, obter as regras de derivação para uma lista de funções. As funções principais, usadas no cálculo diferencial e integral, já tiveram suas derivadas obtidas, gerando equações que podem ser utilizadas de forma direta.

| | |
|---|---|
| $f(x) = k, k \text{ real } \to f'(x) = 0$ | $f(x) = x^n \to f'(x) = nx^{n-1}$ |
| $f(x) = e^x \to f'(x) = e^x$ | $f(x) = \ln x \to f'(x) = \frac{1}{x}, x > 0$ |
| $f(x) = a^x, a > 0 \to f'(x) = \ln a \cdot a^x, a > 0$ | $f(x) = \log_a x \to f'(x) = \frac{1}{x \ln a}, x > 0$ |
| $f(x) = \operatorname{sen} x \to f'(x) = \cos x$ | $f(x) = \cos x \to f'(x) = -\operatorname{sen} x$ |

| | |
|---|---|
| $f(x)=\operatorname{tg} x \rightarrow f'(x)=\sec^2 x$ | $f(x)=\operatorname{ctg} x \rightarrow f'(x)=-\operatorname{cossec}^2 x$ |
| $f(x)=\sec x \rightarrow f'(x)=\sec x \operatorname{tg} x$ | $f(x)=\operatorname{cossec} x \rightarrow f'(x) = -\operatorname{cossec} x \operatorname{ctg} x$ |
| $f(x)=\operatorname{arcsen} x \rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $f(x)=\arccos x \rightarrow f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $f(x)=\operatorname{arctg} x \rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ | $f(x)=\operatorname{arcctg} x \rightarrow f'(x)=-\frac{1}{1+x^2}$ |

Tabela: Principais derivadas.
Jorge Luís Rodrigues Pedreira de Cerqueira.

## Exemplo

Determine a derivada da função $f(x)=\sqrt[3]{x}+2x^4\sqrt{x}$, com x ≥ 0, em um ponto genérico por meio da definição da derivada.

## Solução

Usaremos as regras de derivação relacionadas às operações matemáticas e as deduzidas no item anterior.

$$f(x)=g(x)+kh(x)r(x)=\sqrt[3]{x}+2x^4\sqrt{x}=x^{1/3}+2x^4x^{1/2}$$

então

$$f\prime(x)=g\prime(x)+k(h\prime(x)r(x)+h(x)r\prime(x))$$

assim

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}+2\left(4x^3x^{\frac{1}{2}}+x^4\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}\right)=\frac{x^{-\frac{2}{3}}}{3}+8x^{\left(3+\frac{1}{2}\right)}+x^{\left(4-\frac{1}{2}\right)}$$

$$f'(x)=\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}+8x^{\frac{7}{2}}+x^{\frac{7}{2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+9x^3\sqrt{x}$$

Além disso, podem ser calculadas outras funções derivadas através do uso das regras de derivação aqui apresentadas:

## Determinação da derivada da função $h(x) = f(x)^{g(x)}$

Se $h(x) = f(x)^{g(x)}$ então $\ln h(x) = \ln(f(x))^{g(x)} = g(x) \ln f(x)$

Assim $h(x) = e^{g(x) \cdot \ln[\mathrm{f}(x)]}$

Assim, a derivada de $h(x)$ deve ser a mesma derivada que $\exp(g(x) \ln f(x))$

Sabe-se que a derivada de exp $(u(x))$ é igual a $u'(x) \exp(u(x))$

$h'(x) = e^{g(x) \cdot \ln[f(x)]} = [g(x) \ln f(x)]' e^{g(x) \cdot \ln[f(x)]}$

Usando a regra do produto
$[g(x) \ln f(x)]' = g'(x) \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)}$

mas $e^{g(x) \cdot \ln[f(x)]} = e^{\ln[f(x)]^{g(x)}} = f(x)^{g(x)}$

Desse modo,

$$h'(x) \cdot \left(g'(x) \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)}\right) e^{g(x) \cdot \ln[f(x)]}$$

$$h'(x) \cdot \left(g'(x) \ln f(x) + \frac{g(x)}{f(x)}\right) f(x)^{g(x)}$$

Ressalta-se que não é necessário se decorar a fórmula final, bastando se entender o caminho da resolução.

### Exemplo

Determine a derivada de $y = x^{4x}$

**Resposta**

A função $y = f(x)^{g(x)}$ com $f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$ e $g(x) = 4x \rightarrow g'(x) = 4$.

Pela fórmula $y' = \left(4 \ln x + \frac{4x}{x}\right) e^{4x \cdot \ln[x]} = 4(1 + \ln x) e^{4x \cdot \ln[x]}$

Manipulando $e^{4x \cdot \ln[x]} = e^{\ln[x]^{4x}} = x^{4x} \rightarrow y' = 4(1 + \ln x) x^{4x}$.

# Mão na massa

### Questão 1

Determine a derivada da função $h(x) = 3^x + 2e^x$, para $x = 0$

A $2 + \ln 3$

B $\ln 3$

C $1 + \ln 2$

D $3 + \ln 2$

E $3$

## Parabéns! A alternativa A está correta.

Usando as regras de derivação:

$h\prime(x) = (\ln 3)3^x + 2e^x$

Assim, $h\prime(0) = 3^0 \ln 3 + 2e^0 = \ln 3 + 2$.

Assim, a alternativa correta é a letra A.

## Questão 2

Determine a equação da derivada da função $h(x) = x^2 \cos x$

A $2x \cos x - x^2 \operatorname{sen} x$

B $2x \cos x + x^2 \operatorname{sen} x$

C $x^2 \cos x - 2x \operatorname{sen} x$

D $2 \cos x - x \operatorname{sen} x$

E $2 \cos x - \operatorname{sen} x$

## Parabéns! A alternativa A está correta.

Usando a regra do produto:

$$h'(x) = \left(x^2\right)' \cos x + x^2(\cos x)' = 2x\cos x + x^2(-\operatorname{sen} x) = 2x\cos x - x^2 \operatorname{sen} x$$

Assim, a alternativa correta é a letra A.

## Questão 3

Determine a derivada da função $g(x) = \frac{x^2+1}{x^3}$, com $x \neq 0$, para $x = 2$, através das regras da derivação.

A $\frac{7}{16}$

B $-\frac{7}{16}$

C $\frac{5}{16}$

D $-\frac{5}{16}$

E 0

## Parabéns! A alternativa B está correta.

Usando as regras de derivação relacionadas às operações matemáticas:

Se $g(x) = \frac{f(x)}{h(x)} \rightarrow g'(x) = \frac{f'(x)h(x) - f(x)hr(x)}{h^2(x)}$ , onde $h(x) = x^3$ e $f(x) = x^2 + 1$

$g\prime(x) = \frac{2xx^3 - (x^2+1)3x^2}{x^6} = \frac{2x^4 - 3x^4 - 3x^2}{x^6} = \frac{-x^4 - 3x^2}{x^6} = -\frac{x^2+3}{x^4}$

$g\prime^{(2)} = -\frac{x^2+3}{x^4} = -\frac{2^2+3}{2^4} = -\frac{7}{16}.$

Assim, a alternativa correta é a letra B.

## Questão 4

Uma grandeza física C(t) é definida como a taxa de variação instantânea da grandeza A(t) pela variação do tempo. Sabendo que $A(t) = 2e^t + 3\log t, t > 0$, determine a equação de C(t).

A $e^t + \frac{3}{\ln 10}$

B $2e^t + \frac{3}{t}$

C $2e^t + \frac{3}{t \ln 10}$

D $e^t \ln 2 - \frac{1}{t \ln 10}$

E $tln2 - t$

## Parabéns! A alternativa C está correta.

Se C(t) é a taxa de variação de A(t) pelo tempo, então C(t) = A’(t).

Usando as regras de derivação:

$$A(t) = 2e^t + 3\log t$$
$$A\prime(t) = 2e^t + \frac{3}{t \ln 10}$$

Assim, a alternativa correta é a letra C.

## Questão 5

Determine o coeficiente angular da reta tangente à função $g(x) = 4\ln x + \cos x \operatorname{sen} x$ no ponto $x = \pi$

A $\frac{4}{\pi}$

B $4 + \frac{4}{\pi}$

C $1 + \frac{1}{\pi}$

D $1 + \frac{4}{\pi}$

E 0

## Parabéns! A alternativa D está correta.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.

## Questão 6

Determine a função derivada da função $f(x) = 3\sqrt{x}$, com x $\geq$ 0, para x = 1, através do cálculo da derivada pelo limite da sua definição.

A $\frac{3}{2}$

B $\frac{1}{2}$

C $\frac{5}{2}$

D $\frac{7}{2}$

E 0

## Parabéns! A alternativa A está correta.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.

# Teoria na prática

O valor da temperatura de um forno (T), medido em $^{O}C$, depende da tensão elétrica de alimentação (V), medida em volts. A equação T(V) = 40arctg (V) + 100 representa este modelo. Determine qual a taxa de variação instantânea da variação da temperatura para quando V for igual 20V.

Mostrar solução

# Falta pouco para atingir seus objetivos.

## Vamos praticar alguns conceitos?

### Questão 1

Determine a derivada da função $f(x) = \left(2x^2+1\right)\sqrt{x+1}$, para $x = 0$.

A 1

B $\frac{2}{3}$

C $\frac{1}{2}$

D -1

E 0

### Parabéns! A alternativa C está correta.

Você entendeu as regras de derivação!

Usando as regras de derivação:

$$f'(x)=\left(2x^2+1\right)'\sqrt{x+1}+\left(2x^2+1\right)(\sqrt{x+1})'=4x\sqrt{x+1}+\left(2x^2+1\right)\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+1}}$$
$$f'(0)=4.0\sqrt{0+1}+\left(20^2+1\right)\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{0+1}}=\frac{1}{2}$$

## Questão 2

Determine a derivada da função $f(x)=\frac{x^2\ln x}{5+\cos x}$, no ponto X = π

A $\frac{\pi(1+2\ln\pi)}{4}$

B $\frac{5+\ln\pi}{\pi^2}$

C $\frac{\pi(1-2\ln\pi)}{2}$

D $\frac{5+\ln\pi}{\pi^2+5}$

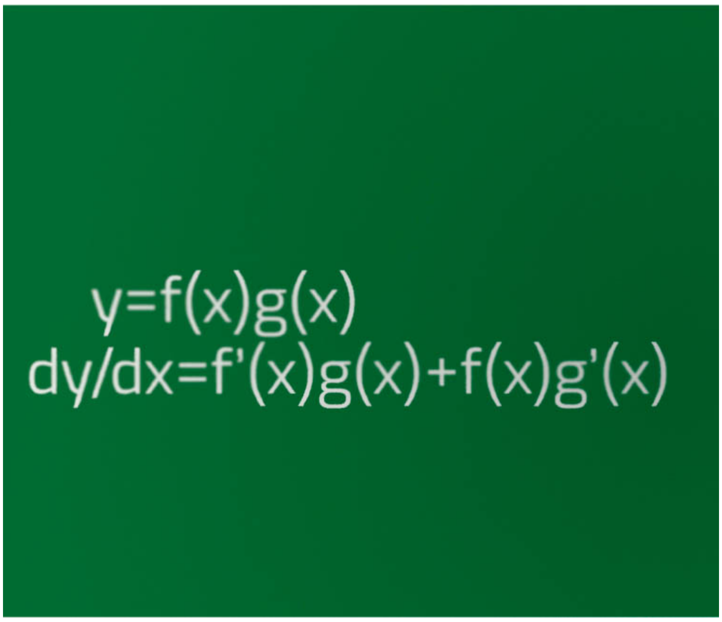
E 2 + lnπ

## Parabéns! A alternativa A está correta.

Você entendeu as regras de derivação das principais funções!

Usando as regras de derivação:

$$f(x)=\frac{x^2\ln x}{5+\cos x}\rightarrow f'(x)=\frac{\left(x^2\ln x\right)'(5+\cos x)-\left(x^2\ln x\right)(5+\cos x)'}{(5+\cos x)^2}$$
$$f'(x)=\frac{\left(2x\ln x+x^2\frac{1}{x}\right)(5+\cos x)-\left(x^2\ln x\right)(-\operatorname{sen}x)}{(5+\cos x)^2}=\frac{(2x\ln x+x)(5+\cos x)+\left(x^2\ln x\right)\operatorname{sen}x}{(5+\cos x)^2}$$
$$f'(\pi)=\frac{(2\pi\ln\pi+\pi)(5+\cos\pi)+\left(\pi^2\ln\pi\right)\operatorname{sen}\pi}{(5+\cos\pi)^2}=\frac{4(\pi+2\pi\ln\pi)}{16}=\frac{\pi(1+2\ln\pi)}{4}$$




# 3 - Regra da cadeia

Ao final deste módulo, você será capaz de empregar a derivada para funções compostas através da regra da cadeia.

## Vamos começar!

## Derivação de Funções Compostas (Regra da Cadeia)

Neste vídeo, será realizada uma introdução sobre este terceiro módulo.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.

## Derivada da função composta

A regra que permite o cálculo da derivada de uma função composta de funções reais é denominada de regra da cadeia. Esse nome vem do conceito que iremos realizar a derivada em uma sequência multiplicativa de derivadas, sendo o elo de uma cadeia.

Sejam as funções f(x) e g(x) e sua composta definida por $h(x) = f(g(x)) = fog(x)$.

O teorema nos diz que se f(x) e g(x) forem diferenciáveis, então h(x) será diferenciável e sua derivada será calculada por: $h\prime(x) = f'(g(x))g'(x)$.

Por exemplo, seja a função $f(x) = \ln x$ e $g(x) = x^2$.

Definindo a função h(x) como sendo a composta de f(x) com g(x), $h(x) = fog(x) = f(g(x))$.

Deseja-se calcular a derivada de $h(x)$. Assim:

$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$

Como: $fl(x) = \frac{1}{x}\mathrm{egl}(x) = 2x$

Logo, $h'(x) = f'(g(x))g'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot 2x = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}, x \neq 0$

Atenção!

Para usar essa regra, foi executado o cálculo de fora para dentro, em uma cadeia de cálculos. Em outras palavras, deriva inicialmente a função g(x) que está dentro da função f(x) e depois derivamos a função f(x).

Se analisarmos a derivada como uma taxa de variação de h(x) em relação a **x**, então a taxa dependerá da taxa de variação de f(x) em relação a g(x) e de g(x) em relação a **x**, por isso a derivada da composta é o produto das derivadas individuais aplicadas cada uma em sua variável de domínio.

As mesmas regras de derivação apresentadas para as principais funções, no módulo anterior, podem ser adaptadas agora para o caso de uma função composta. Por exemplo:

$$f(x) = (u^n(x)), n \text{ inteiro } \rightarrow f'(x) = n\left(u^{n-1}(x)\right)u'(x)$$
$$f(x) = \operatorname{sen}(u(x)) \rightarrow f'(x) = \cos(u(x))u'(x)$$
$$f(x) = \ln(u(x)) \rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Rotacione a tela.

Repare que esta última fórmula foi o exemplo executado:

$$h(x) = fog(x) = \ln\left(x^2\right) = \frac{\left(x^2\right)'}{x^2} = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$$

Pode também ser usada a notação de Leibniz para representar a regra da cadeia. Por exemplo, para o caso da função composta h(x)= f(g(x)). Se denominarmos h(x) = y(x), então f(u) = y(u) e g(x) = u(x). Para se calcular a derivada de h(x), teremos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Rotacione a tela.

Isto é, deriva inicialmente a função de **y** em relação à variável **u** e, posteriormente, deriva a função **u** em relação à variável **x**.

### Exemplo

Determine a derivada da função $h(x) = fog(x),\ \text{sendo}\ f(x) = x^5$ e $g(x) = \operatorname{sen} x.$

**Resposta**

Usando a regra para derivada para função composta:

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$
$$f'(x) = 5x^4 \text{ então, } f'(g(x)) = f'(\operatorname{sen}(x)) = 5 \operatorname{sen}^4(x) g'(x) = \cos(x)$$
$$\text{Assim, } h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 5 \operatorname{sen}^4(x) \cos(x)$$

Se $f(x) = \left(u^5(x)\right) \rightarrow f'(x) = 5\left(u^4(x)\right)u'(x)$, como $u(x) = \cos x$ e $u\prime(x) = -\operatorname{sen} x$

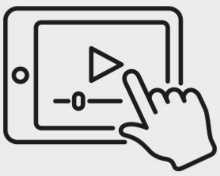
Como, $h(x) = \cos^5 x \rightarrow h'(x) = 5 \operatorname{sen}^4 x \cos x$

# Regra da cadeia

## Aplicação da regra da cadeia

Agora que já conhecemos a regra da cadeia para função composta, vamos usá-la para achar a derivada de uma função que é composição de várias funções.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



### Exemplo

Deseja-se obter a taxa de variação da função $g(x) = \sqrt{x}$ em relação à variável independente s, para quando s = 0. Sabe-se que:
x é função de t e vale $x(t) = t^2 + 1$;
t é função de y e vale $t(y) = 1 + \operatorname{tg} y$;
y depende de s e vale $y(s) = 2^s - 1$

**Resposta**

Usando a notação de Leibniz:

$\frac{dg}{ds} = \frac{dg}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{dy} \cdot \frac{dy}{ds}$

$g'(x) = \frac{dg}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x'(t) = \frac{dx}{dt} = 2t, t'(y) = \frac{dt}{dy} = \sec^2 y$ e $y'(s) = \frac{dy}{ds} = 2^s \ln 2$

Assim $g'(s) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \cdot (2t) \cdot \left(\sec^2 y\right)\left(2^s \ln 2\right).$

Substituindo nas equações para $s = 0 \rightarrow y = 2^0 - 1 = 0 \rightarrow t = 1 + tg0 = 1 \rightarrow x = 1 + 1 = 2$

$g'(0) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \cdot (2.1) \cdot \left(\sec^2 0\right)\left(2^0 \ln 2\right) = \frac{\ln 2}{\sqrt{2}}$

A regra da cadeia pode ser usada para calcular a derivada de uma função inversa conhecendo-se a derivada da função.

# Derivada da função inversa

Seja f(x) uma função que possua inversa. Seja g(x) a função inversa de f(x):

Assim, f(g(x)) = x para todo x no domínio da função g(x).

Derivando os dois lados da equação:
$[f(g(x))]' = [x]' = 1$

Se supormos que f(x) e g(x) são deriváveis, aplicando a regra da cadeia:
$[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x) = 1$ para todo x no domínio de g(x).

Assim, g'(x) = $\frac{1}{f'(g(x))}$

Costuma-se dizer que a derivada da inversa é a inversa da derivada.

## Exemplo

Determine a derivada da função g(x) = arcsen x através da derivada da função f(x) = senx.

## Solução

Como g(x) será a inversa de f(x), então:
$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$, mas $f'(x) = \cos x \rightarrow f'(g(x)) = \cos(\operatorname{arcsen} x)$.

Se chamarmos $\alpha = \operatorname{arcsen} x \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = x \cos \alpha = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \sqrt{1 - x^2}$

Então, $f'(g(x)) = \cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1 - x^2}$ e $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Que é a derivada da função arcsen x.

# Mão na massa

## Questão 1

Determine a derivada da função $h(x) = \ln\left(x^2 + x + 1\right)$ para $x = 1$.

A 0

B 1

C 2

D 3

E 4

## Parabéns! A alternativa B está correta.

A função h(x) pode ser analisada como uma composição de funções.

Se $f(x) = \ln(x)$ e $g(x) = x^2 + x + 1$, assim $h(x) = f(g(x)) = \ln\left(x^2 + x + 1\right)$.

Portanto, $hl(x) = fl(g(x)).\, gl(x)$

$$f'(g(x)) = \frac{1}{g(x)} \text{ e } g\prime(x) = 2x + 1$$

$$h'(x) = f\prime(g(x)) \cdot g\prime(x) = \frac{1}{g(x)}(2x + 1) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$$

Para $x = 1 \rightarrow h\prime(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1} = \frac{2.1+1}{1^2+1+1} = \frac{3}{3} = 1.$

Assim, a alternativa correta é a letra B.

## Questão 2

Determine a derivada da função $f(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{x})$ para $x = \pi^2$.

A $-\frac{1}{2\pi}$

B $\frac{1}{2\pi}$

C 0

D $2\pi$

E $3\pi$

## Parabéns! A alternativa A está correta.

A função h(x) pode ser analisada como uma composição de funções.

Se $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $h(x) = \sqrt{x}$, assim $f(x) = g(h(x)) = \operatorname{sen}(\sqrt{x})$.

Portanto, $f\prime(x) = g\prime(h(x)) \cdot h\prime(x)$

$g'(h(x)) = \cos(h(x))$ e $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = \cos(h(x))\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos(\sqrt{x})$

Para $x = \pi^2 \rightarrow f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi^2}}\cos\left(\sqrt{\pi^2}\right) = \frac{\cos(\pi)}{2\pi} = -\frac{1}{2\pi}$.

Assim, a alternativa correta é a letra A.

## Questão 3

Determine a derivada da função $f(x) = \operatorname{arccotg}\left(3x^3 + 1\right)$ para $x = 1$.

A $\frac{8}{15}$

B $-\frac{8}{15}$

C $\frac{9}{17}$

D $-\frac{9}{17}$

E $\frac{1}{17}$

## Parabéns! A alternativa D está correta.

A função h(x) pode ser analisada como uma composição de funções.

Se $g(x) = \operatorname{arccotg}(x) e h(x) = 3x^3 + 1$, assim $f(x) = g(h(x)) = \operatorname{arccotg}\left(3x^3 + 1\right)$

Portanto, $f\prime(x) = g\prime(h(x)) \cdot h\prime(x)$

$$g'(h(x)) = -\frac{1}{1 + (h(x))^2} \text{ e } h'(x) = 9x^2$$

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h\prime(x) = -\frac{1}{1 + (h(x))^2}\left(9x^2\right) = -\frac{9x^2}{1 + \left(3x^3 + 1\right)^2}$$

$$\text{Para } x = 1 \rightarrow f'(1) = -\frac{9.1}{1 + (3.1 + 1)^2} = -\frac{9}{1 + 16} = -\frac{9}{17}$$

Assim, a alternativa correta é a letra D.

## Questão 4

Determine a equação da derivada da função $f(x) = \sqrt[3]{\cos\left(x^2\right)}$ em relação à variável x.

A $f'(x) = \frac{x \operatorname{sen}\left(x^2\right)}{\sqrt[3]{\cos^2(x^2)}}$

B $f'(x) = \frac{1}{3} \frac{\operatorname{sen}\left(x^2\right)}{\sqrt[3]{\cos^2(x^2)}}$

C $f'(x) = -\frac{2}{3} \frac{x \operatorname{sen}\left(x^2\right)}{\sqrt[3]{\cos^2(x^2)}}$

D $f'(x) = \frac{2}{3} \frac{\cos\left(x^2\right)}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2(x^2)}}$

E $f'(x) = \frac{1}{3} \frac{\operatorname{sen}\left(x^2\right)}{\sqrt{\cos(x^2)}}$

## Parabéns! A alternativa C está correta.

A função h(x) pode ser analisada como uma composição de funções.

$$f(u) = \sqrt[3]{u} \rightarrow f'(u) = \frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}$$
$$u(v) = \cos(v) \rightarrow u'(v) = -\operatorname{sen}(v)$$
$$v(x) = x^2 \rightarrow v'(x) = 2x$$

Logo, $f(u(v(x)))$.

Assim fica mais fácil através da representação de Leibniz:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}(-\operatorname{sen}(v)) \cdot 2x$$

Substituindo os valores das funções até ficarmos dependendo apenas de 2x:

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}(-\operatorname{sen}(v)) \cdot 2x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{\cos^2 v}}\left(-\operatorname{sen}\left(x^2\right)\right) \cdot 2x$$
$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{\cos^2 v}}\left(-\operatorname{sen}\left(x^2\right)\right) \cdot 2x = \frac{1}{3\sqrt[3]{\cos^2\left(x^2\right)}}\left(-\operatorname{sen}\left(x^2\right)\right) \cdot 2x$$
$$f'(x) = -\frac{2}{3}\frac{x\operatorname{sen}\left(x^2\right)}{\sqrt[3]{\cos^2\left(x^2\right)}}$$

Assim, a alternativa correta é a letra C.

## Questão 5

Seja a função $g(x) = 2\operatorname{arctg}\left(e^x\right)$. Determine o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de g(x) no ponto x = 0.

A 2

B 1

C 3

D 4

E 0

## Parabéns! A alternativa B está correta.

O coeficiente angular da reta tangente é igual à derivada da função no ponto.

A função g(x) pode ser analisada como uma composição de funções.

Se f(x) = ex e h(x) = 2 arctg(x) , então g(x)= h(f(x))

$$h'(f(x)) = \frac{2}{1+(f(x))^2} = \frac{2}{1+e^{2x}}$$
$$f\prime(x) = e^x$$

Assim, $gl(x) = hl(f(x)) \cdot fl(x) = \frac{2e^x}{1+e^{2x}}, gl(0) = \frac{2.1}{1+1} = 1.$

Pode também ser usada a regra direta:

Se $f(x) = \operatorname{arctg}(u(x)) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+u^2} u'(x), \text{com}\, u(x) = e^x \text{ e } u(x) = e^x.$

Como $g(x) = g(x) = 2\operatorname{arctg}(e^x) \rightarrow g'(x) = \frac{2e^x}{1+e^{2x}}.$

Assim, a alternativa correta é a letra B.

## Questão 6

Use a regra da cadeia para determinar a derivada da função $f(x) = \operatorname{tg}\left(\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right)$ para x=1.

A $\frac{1}{2}\sec^2(\ln(\sqrt{2}))$

B $\frac{1}{2}\sec^2(\ln(\sqrt{2}))$

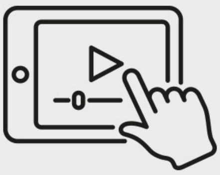
C $\sec((\ln(\sqrt{2})))$

D $\sec^2(\sqrt{2})$

E $sec(ln2)$

## Parabéns! A alternativa B está correta.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



# Teoria na prática

A área de uma esfera é calculada por $4\pi R^2$, onde R é o raio da esfera. Se o raio da esfera varia com o tempo através da equação $R(t) = 4 \cdot \ln\left[t^2 + 1\right]$, para $t \geq 0$, determine a taxa de variação da área da efera para um instante t.

Mostrar solução

# Falta pouco para atingir seus objetivos.

## Vamos praticar alguns conceitos?

### Questão 1

Sejam as funções $f(x) = e^x$ e $g(x) = \sqrt{x^4 + 9}$. Define-se a função h(t) = fog(t). A função h(t) representa a variação de posição de um foguete, medida em km, em relação à variável tempo (t), medida em minutos. Determine a velocidade instantânea do foguete para t = 2.

A $\frac{18}{5}e^5 km/\min$

B $\frac{1}{5}e^2 km/min$

C $\frac{1}{15}e^{15} km/\min$

D $\frac{16}{5}e^5 km/min$

E $\frac{1}{5}e^5 km/min$

### Parabéns! A alternativa D está correta.

Você entendeu o conceito da derivada da função composta!

$$
\begin{aligned}
&h\prime(t) = f\prime(g(t))g\prime(t) \\
&\text{mas } f\prime(u) = e^u \rightarrow f'(g(t)) = e^{\sqrt{x^4+9}} \\
&g\prime(t) = \frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+9}} = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+9}} \\
&h'(t) = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+9}} e^{\sqrt{x^4+9}} \text{ então, } h'(2) = \frac{2.8}{\sqrt{16+9}} e^{\sqrt{16+9}} = \frac{16}{5} e^5
\end{aligned}
$$

## Questão 2

Use a regra da cadeia para derivar a função y em relação à variável t, sabendo que $y(x) = \operatorname{ctg} x$ e que $x(s) = s^3$ e $s(t) = t^2$:

A $\frac{dy}{dt} = -4t^3 \sec^2\left(t^4\right)$

B $\frac{dy}{dt} = \csc^2\left(t^6\right)$

C $\frac{dy}{dt} = -6t^5 \csc^2\left(t^6\right)$

D $\frac{dy}{dt} = t^5 \csc^2\left(t^6\right)$

E $\frac{dy}{dt} = 3t^2 \cdot \sec^2\left(t^6\right)$

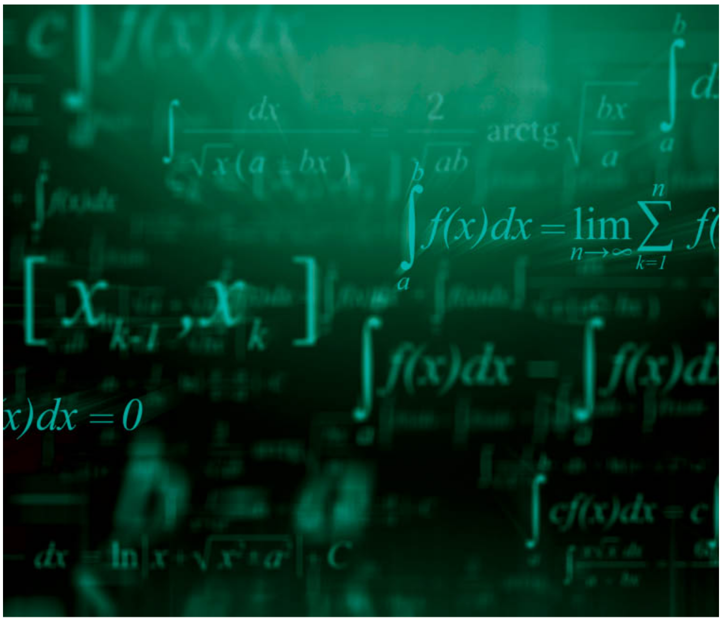
## Parabéns! A alternativa C está correta.

Você entendeu o conceito da regra da cadeia!

$$
\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx} = -\csc^2 x \quad , \frac{dx}{ds} = 3s^2 \text{ e } \frac{ds}{dt} = 2t \\
&\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \\
&\frac{dy}{dt} = -\csc^2 x \cdot 3s^2.2t
\end{aligned}
$$

Substituindo para ficar apenas a variável t:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dy}{dt} = -csc^2\left(s^3\right) \cdot 3\left(t^2\right)^2 \cdot 2t \\
&\frac{dy}{dt} = -6t^5 \csc^2\left(t^6\right)
\end{aligned}
$$



# 4 - Derivação Implícita e de Ordem Superior

Ao final deste módulo, você será capaz de representar o conceito da derivada para derivação implícita e derivada de ordens superiores.

## Vamos começar!

## Derivada de uma Função Implícita e de Ordem Superior

Neste vídeo, você será introduzido ao tema do quarto módulo.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.

# Derivação de Ordem Superior

Como já foi visto, a derivada de uma função real também é uma função real. Dessa forma, a função derivada pode possuir, por sua vez, também uma derivada.

A derivação de uma função derivada é denominada de derivação de ordem superior.

A derivada de uma função, estudada até esse ponto, é denominada de derivada de primeira ordem.

A derivada da derivada é denominada de derivada de segunda ordem, e assim, sucessivamente.

Representamos a derivada de ordem superior **n**, **n** inteiro positivo, por $f^{(n)}(x)$ ou $D^{(n)}f(x)$.

Utilizando a notação de Leibniz, a derivada de segunda ordem é representada por:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Rotacione a tela.

A derivada de terceira ordem é dada por:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)$$

Rotacione a tela.

E a derivada de ordem **n**:

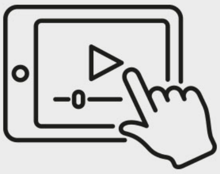
$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{d}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)\right)$$

Rotacione a tela.

# Derivação de ordem superior

Assista ao vídeo e veja exemplos sobre derivação de ordem superior.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



# Derivação implícita

Até esse ponto, você trabalhou com a derivada de uma função real que apresenta uma função explícita, isto é, a função representada por meio de uma equação que depende da sua variável independente. Por exemplo:

$$f(x) = 3\cos x + 5 \text{ ou } g(x) = \ln\left(x^2 + 1\right)$$

Rotacione a tela.

Em todas elas, a dependência com a variável **x** é expressa claramente.

Em certos problemas matemáticos, porém, não temos como obter essa equação explicita para uma função. Nesses casos, a função será representada de uma forma implícita. Por exemplo, $x^2 + y\cos x + y^2 = 3$, verifica-se que, apesar de **y = f(x)** estar representada implicitamente pela equação, não é possível obter uma equação explícita de **y** em função de **x**.

Em outras palavras, a equação **F(x,y) = k**, k real, representará a função **y = f(x)**.

> Como, então, obter a derivada de uma função implícita? Na verdade, para se obter a derivada de uma função, não é necessário obter a equação explícita.

A operação matemática da derivada pode ser aplicada diretamente na equação implícita que relaciona a função com a sua variável independente. Esse tipo de operação é denominada de derivação implícita. Pois, se $F(x, y) = k \rightarrow \frac{d(F(x,y)}{dx} = 0$.

O método é derivar a equação implícita termo a termo, usando a Regra da Cadeia.

Deve ser lembrado que y é função de x, assim $\frac{dy}{dx}$ não é zero, e sim y’.

Por exemplo, se tivermos um termo $y^6$, a derivação desse termo será $6yy' = 6y\frac{dy}{dx}$.

Às vezes, teremos que usar as regras de derivação.

Por exemplo, o termo $x^2y^2$, a derivação vai ter que usar a regra do produto, isto é, $2x^2 + x^2 2yy'$.

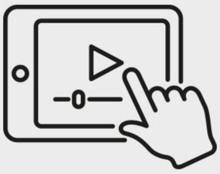
### Atenção!

Na equação da função derivada, podem aparecer termos relacionados a y, além dos relacionados à variável independente x.

# Derivação implícita

Veja agora a aplicação do método de derivação implícita.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



# Mão na massa

## Questão 1

Seja $f(x) = 4x^5 + 2x^4 - x + 4$, determine a derivada de terceira ordem para x = 1:

A 198

B 202

C 288

D 312

E 296

## Parabéns! A alternativa C está correta.

Como se deseja a derivada de terceira ordem, teremos que derivar três vezes a função.

$$f(x) = 4x^5 + 2x^4 - x + 4 \rightarrow f'(x) = 20x^4$$
$$f'(x) = 20x^4 + x^3 - 1 \rightarrow f''(x) = 80x^3 + 24x^2$$
$$f''(x) = 80x^3 + 24x^2 \rightarrow f^{(3)}(x) = 240x^2 + 48x$$

Assim:

$$f^{(3)}(x) = 240x^2 + 48x \rightarrow f^{(3)}(1) = 240 \cdot 1 + 48 \cdot 1 = 288$$

Logo, a resposta correta é a letra C.

## Questão 2

Um movimento circular acelerado tem equação da posição angular, medida em rad, em relação ao tempo dada por $\theta(t) = \pi + 2t + 10t^2$. Sabendo que a aceleração angular é derivada de segunda ordem da posição angular, em relação ao tempo, marque a alternativa que apresenta o valor da aceleração angular deste movimento, medida em rad/$s^2$:

A -20 rad/$s^2$

B -10 rad/$s^2$

C 20 rad/$s^2$

D -5 rad/$s^2$

E 5 rad/$s^2$

## Parabéns! A alternativa C está correta.

Como se deseja a derivada de segunda ordem, teremos que derivar duas vezes a função.

$$\theta(t) = \pi + 2t + 10t^2 \rightarrow w(t) = \theta'(t) = 2 + 20t$$
$$w(t) = 2 + 20t \rightarrow \alpha(t) = w'(t) = \theta''(t) = 20rad/s^2$$

Logo, a resposta correta é a letra C.

## Questão 3

Seja $f(x) = e^x \cos x$, determine a equação da derivada de segunda ordem de f(x).

A $2e^x \cos x$

B $-e^x$ sen x

C $-e^x \cos x$

D $-2e^x \cos x$

E $3e^x$ sen x

## Parabéns! A alternativa D está correta.

Como se deseja a derivada de segunda ordem, teremos que derivar duas vezes a função.

Usando a regra do produto e as derivadas das funções ex e cos x:

$$f(x) = e^x \cos x \rightarrow f'(x) = e^x \cos x + e^x(-\operatorname{sen} x) = e^x(\cos x - \operatorname{sen} x)$$

Usando novamente a regra do produto e as derivadas das funções ex, cos x e sen x:

$$f'(x) = e^x(\cos x - \operatorname{sen} x) \rightarrow f''(x) = e^x(\cos x - \operatorname{sen} x) + e^x(-\operatorname{sen} x - \cos x) = -2e^x \operatorname{sen} x$$

Logo, a resposta correta é a letra D.

## Questão 4

Seja a equação $y \operatorname{sen} x + x^2 + 2 \operatorname{sen} y = 0$, para $0 \leq x \leq \pi$ e $0 \leq y \leq \pi$, que relaciona implicitamente a variável $y$ em função de $x$, determine o valor da derivada de $y$ em relação a $x$, para o ponto $x = 0$

A $-\frac{\pi}{2}$

B $\frac{\pi}{2}$

C 0

D $\pi$

E $\frac{\pi}{4}$

## Parabéns! A alternativa C está correta.

Derivando termo a termo, lembrando que y é função de x:

$$\begin{gathered}(y \operatorname{sen} x)' + \left(x^2\right)' + (2 \operatorname{sen} y)' = (0)' \\ y(\cos x) + y' \operatorname{sen} x + 2x + 2 \cos y y' = 0 \\ (2x + y \cos x) + y'(\operatorname{sen} x + 2 \cos y) = 0\end{gathered}$$

Assim, achando o valor de y' em função de x e y:

$$\begin{gathered}y'(\operatorname{sen} x + 2 \cos y) = -y \cos x - 2x \\ y' = -\frac{y \operatorname{sen} x + 2x}{\operatorname{sen} x + 2 \cos y}\end{gathered}$$

Na equação original: $x = 0 \rightarrow y \operatorname{sen} 0 + 0^2 + 2 \operatorname{sen} y = 0 \rightarrow \operatorname{sen} y = 0 \rightarrow y = 0$.

Substituindo para $x = 0$ e $y = 0 \rightarrow y' = -\frac{0 \operatorname{sen} 0 + 2.0}{\operatorname{sen} 0 + 2 \cos 0} = -\frac{0}{1} = 0$.

Logo, a resposta correta é a letra C.

## Questão 5

Determine o coeficiente da reta tangente ao gráfico da função y = g(x) no ponto x = 1 e y = 1, sabendo que $2x^3 + 2(y+1)^3 - 9x(y+1) = 0$.

A $\frac{1}{5}$

B $\frac{4}{5}$

C $\frac{3}{5}$

D

$\frac{7}{5}$

E $\frac{4}{7}$

## Parabéns! A alternativa B está correta.

Lembre-se de que o coeficiente angular da reta tangente é a derivada da função y no ponto.

Derivando a equação implícita termo a termo:

$$\left(2x^3\right)' \rightarrow 6x^2, \left(2(y+1)^3\right)' \rightarrow 6(y+1)^2y' \in (9x(y+1))' \rightarrow 9(y+1) + 9xy'$$

Assim $\left(2x^3 + 2(y+1)^3 - 9x(y+1)\right)' = 0 \rightarrow 6x^2 + 6(y+1)^2y' - 9(y+1) - 9xy' = 0$

Manipulando matematicamente:

$$y'\left(6(y+1)^2 - 9x\right) = -6x^2 + 9(y+1) = 3\left(3(y+1) - 2x^2\right)$$
$$y' = 3\frac{3y - 2x^2 + 3}{3\left(2(y+1)^2 - 3x\right)} = \frac{3y - 2x^2 + 3}{2(y+1)^2 - 3x}$$

Assim, para x =1 e y=1,

$$y' = \frac{3 - 2 + 3}{2.4 - 3} = \frac{4}{5}$$

, sendo a alternativa B a verdadeira.

## Questão 6

Determine a derivada de segunda ordem de y em relação a x, sabendo que $e^{y}$–$3xy = 2$, para quando x = 0.

A $\frac{9}{2}\ln 2 + 4$

B $\frac{9}{2}\left(\ln 2 - \ln^2 2\right)$

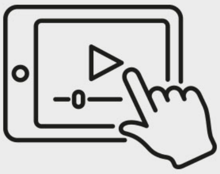
C $\left(\ln 2 - \ln^2 2\right)$

D $\frac{9}{2}(\ln 8 - 4)$

E $\frac{5}{2}(\ln 2)$

### Parabéns! A alternativa B está correta.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



# Teoria na prática

Sabe-se que a velocidade é a taxa de variação da posição pelo tempo e a aceleração é a taxa de variação da velocidade pelo tempo. A posição de um carro, medida em metros, depende do instante de tempo t, medido em s, através da equação $S(t) = t^3 + 4t - 32$, com $t \geq 0$. Determine a velocidade e a aceleração para t = 2s.

Mostrar solução

# Falta pouco para atingir seus objetivos.

## Vamos praticar alguns conceitos?

### Questão 1

Seja m o valor da derivada de segunda ordem da função $h(x) = \frac{3x}{x+\frac{1}{x}}$ para x = 1. Calcule m + 2:

A $\frac{2}{3}$

B $\frac{1}{2}$

C $\frac{3}{4}$

D $\frac{2}{5}$

E $\frac{1}{3}$

## Parabéns! A alternativa B está correta.

Você entendeu o conceito da derivação em ordem superior!

$$h(x)=\frac{3x}{x+\frac{1}{x}}=\frac{3x^2}{x^2+1}\rightarrow h'(x)=\frac{6x\left(x^2+1\right)-3x^2\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{6x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$h''(x)=\left(\frac{6x}{\left(x^2+1\right)^2}\right)'=\frac{6\left(x^2+1\right)^2-6x\cdot 2\cdot\left(x^2+1\right)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^4}$$

$$h''(x)=\frac{6\left(x^2+1\right)\left(\left(x^2+1\right)-4x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^4}=\frac{6\left(1-3x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$$

Assim:

$$h''(1)=\frac{6(1-3.1)}{(1+1)^3}=-\frac{3}{2}=m$$

Portanto, $2+h''(1)=\frac{1}{2}$

## Questão 2

A relação entre y e x é dada pela equação $yx^2+\cos y=1$. Determine a equação que representa a derivada de y em relação a x:

A $\frac{2xy}{\operatorname{sen} y-x^2}$

B $\frac{xy}{\operatorname{sen} y+x^2}$

C $\frac{4xy}{\cos y-x^2}$

D $\frac{xy}{\operatorname{sen} y-2x^2}$

E $\frac{xy}{\operatorname{sen} y-x^2}$

## Parabéns! A alternativa A está correta.

Você entendeu o conceito da derivação implícita!

Derivando termo a termo:

$$\left(yx^2\right)' = y'x^2 + 2xy$$
$$(\cos y)\prime = -\operatorname{sen} y$$

Assim,

$$y'x^2 + 2xy - \operatorname{sen} y y' = 0 \rightarrow y'\left(x^2 - \operatorname{sen} y\right) + 2xy = 0 \rightarrow y' = \frac{-2xy}{x^2 - \operatorname{sen} y} = \frac{2xy}{\operatorname{sen} y - x^2}$$

# Considerações finais

Ao longo dos quatro módulos, foi possível definir e aplicar o conceito da derivada de uma função real. Definimos a derivação por meio de uma abordagem gráfica e de uma abordagem analítica, associando o conceito ao de taxa de variação instantânea e ao coeficiente angular da reta tangente à função.

A definição da derivada foi utilizada para se obter diversas regras de derivação que facilitam o cálculo da derivada. Uma lista de derivadas das principais funções foi disponibilizada.

Posteriormente, o conceito da derivada foi aplicado na Regra da Cadeia, na derivação de funções compostas, na derivação de ordem superior e, finalmente, na derivação implícita.

# Referências


GUIDORIZZI, H. L. **Cálculo**. 5. ed. São Paulo: LTC, 2013.

HALLET H. *et al*. **Cálculo**, a uma e a várias variáveis. 5. ed. São Paulo: LTC, 2011.

LARSON, R.; EDWARDS, B. H. **Cálculo**, com aplicações. 6. ed. São Paulo: LTC, 2003.

STEWART, J. **Cálculo**. 5. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2008

THOMAS, G. B. **Cálculo**. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012.

# Explore +

Para saber mais sobre os assuntos tratados neste tema, pesquise na internet.

- O curso de unidade: Derivadas – Definições e Regras Básicas e Regra da Cadeia, no site da Khan Academy.