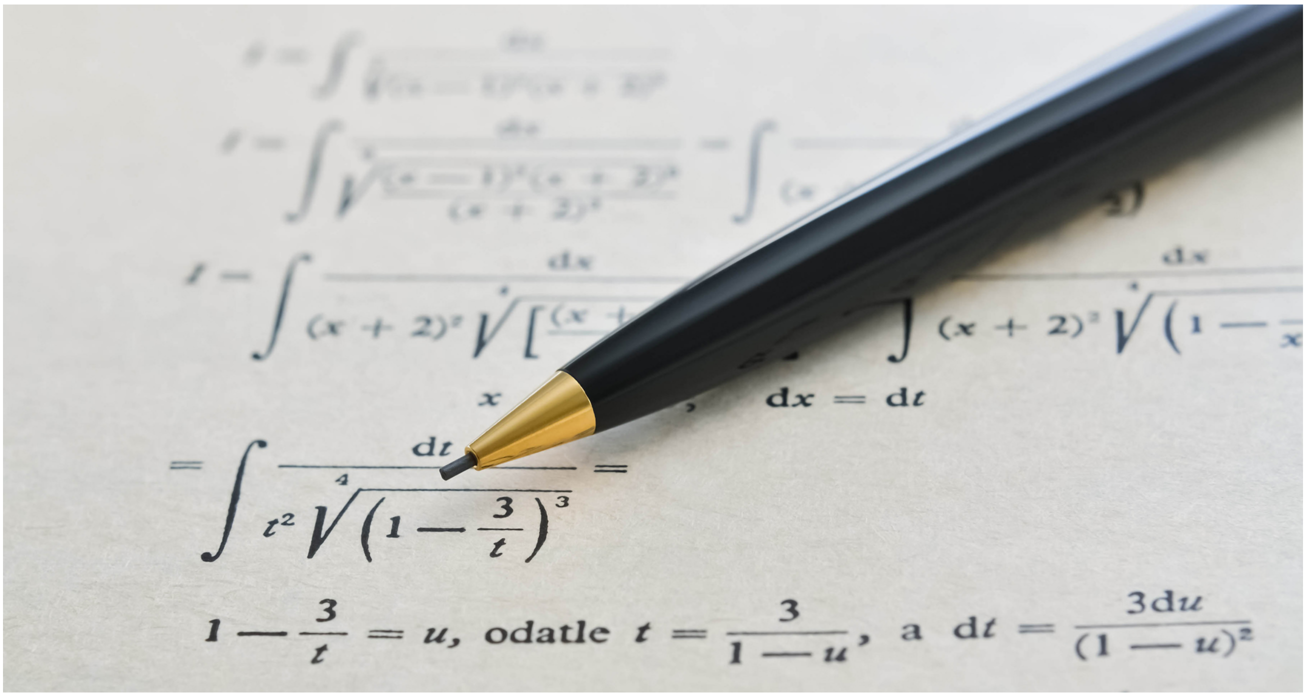


Integrais: aplicações

Prof. Jorge Luís Rodrigues Pedreira de Cerqueira

Descrição

Aplicação do conceito de integração na obtenção de comprimentos de arcos, áreas e volumes.

Propósito

Aplicar os conceitos da integração para determinar comprimentos de curvas, áreas de função e entre funções, como também área de superfície de revolução, além de empregar os conceitos de integração no cálculo de volumes de um sólido qualquer e de sólidos obtidos por revolução.

Preparação

Antes de iniciar o conteúdo deste tema, tenha em mãos papel, caneta e uma calculadora científica ou use a calculadora de seu smartphone/computador.

Objetivos

Módulo 1

Cálculo do comprimento de arcos de curva por integração

Aplicar o conceito da integração no cálculo do comprimento de arcos de curva.

Módulo 2

Cálculo de áreas por integração

Empregar o conceito da integral na obtenção do cálculo de áreas.

Módulo 3

Cálculo de volumes por integração

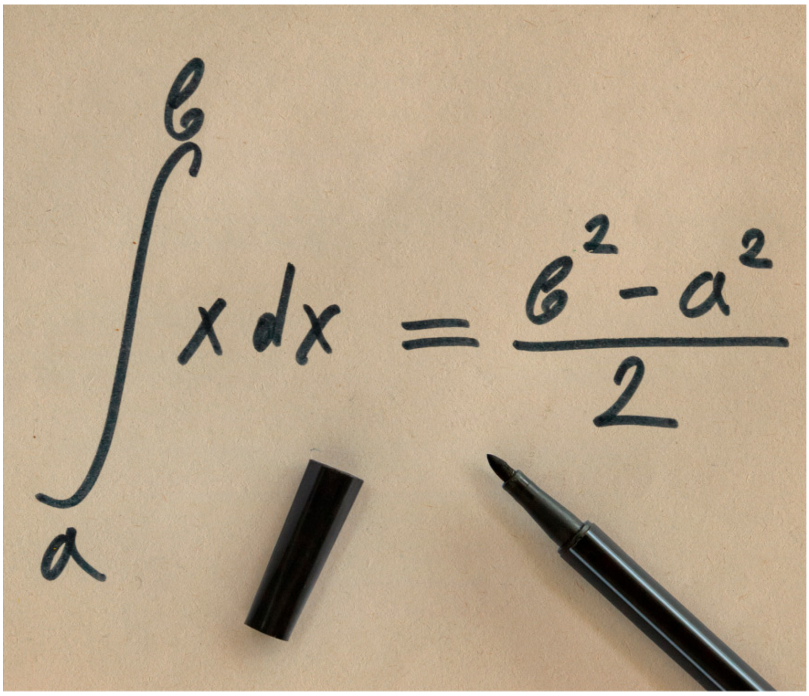
Aplicar o conceito da integral na obtenção do cálculo de volumes.

Introdução

Uma aplicação da operação da integral definida é a obtenção do comprimento do arco da curva traçada por uma função real.

A Geometria Analítica nos ensina a traçar distância, considerando uma reta, entre dois pontos. Acontece que o gráfico de uma função não é formado apenas por retas. Assim, torna-se necessário usar a ferramenta da integral para obter o comprimento desta curva. Esta ferramenta será estudada neste módulo.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



1 - Cálculo do comprimento de arcos de curva por integração

Ao final deste módulo, você deverá ser capaz de aplicar o conceito da integração no cálculo do comprimento de arcos de curva.

Comprimento de arco de uma curva

Como aplicar o conceito de integração no cálculo do comprimento de arcos de curva

Neste vídeo, explicaremos o comprimento do arco de uma curva e a função comprimento do arco.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.

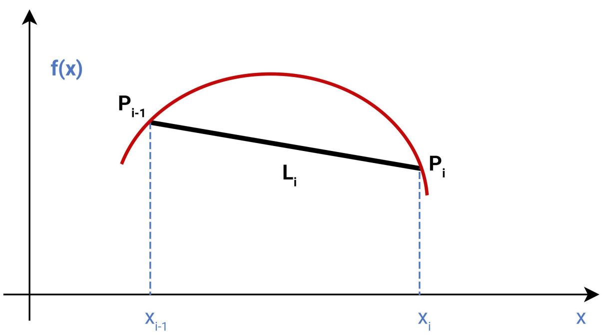
Em algumas aplicações, precisamos calcular **o comprimento de uma curva**, isto é, o comprimento do gráfico de uma função entre dois pontos do gráfico.

Se o gráfico for uma reta, é fácil obter as distâncias entre os dois pontos, mas o caso geral é quando o gráfico da função é definido pela função f(x). Nesta situação, adotamos a seguinte estratégia:

- Dividimos o gráfico em pontos com uma distância bem pequena entre eles, de forma a transformar essa distância numa reta;
- Dizemos que vamos aproximar o comprimento do arco do gráfico por uma poligonal, isto é, um gráfico montado apenas por retas.

Vamos utilizar a fórmula que nos permitirá obter esse comprimento, considerando, inicialmente, o comprimento da distância entre dois pontos do gráfico através de uma aproximação por uma reta.

Seja a função $f\left(x\right)$ e deseja-se obter a distância do gráfico entre os pontos P_{i-1} e P_i



Seja L_i a distância entre $P_{i-1}P_i$.

Como as coordenadas de P_i são $\left(x_{i-1}, y_{i-1}\right) = \left(x_{i-1}, f\left(x_{i-1}\right)\right)$ e $P_i\left(x_1, y_1\right) = \left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$

$$L_i = \overline{P_{i-1}P_1} = \sqrt{\left(y_i - y_{i-1}\right)^2 + \left(x_i - x_{i-1}\right)^2}$$

$$\text{Mas, } \left(y_i - y_{i-1}\right)^2 = \left(f\left(x_i\right) - f\left(x_{i-1}\right)\right)^2$$

$$\text{Com } x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$$

Rotacione a tela.

Existe um teorema conhecido como **teorema do valor médio** que nos diz que, em um intervalo x_1 e x_2, sempre existirá um ponto c_i que:

$$f'\left(c_i\right) = \frac{f\left(x_i\right) - f\left(x_{i-1}\right)}{x_i - x_{i-1}} \rightarrow \Delta f\left(x_i\right) = f'\left(c_i\right)\Delta x_i$$

$$\text{Assim, } \left(f\left(x_i\right) - f\left(x_{i-1}\right)\right)^2 = \left(\Delta f\left(x_i\right)\right)^2 = \left(f'\left(c_i\right)\Delta x_i\right)^2, \text{com } x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$$

$$L_i = \sqrt{\left(f\left(x_i\right) - f\left(x_{i-1}\right)\right)^2 + \Delta x_i^2} = \sqrt{\left(f'\left(c_i\right)\right)^2 \Delta x_i^2 + \Delta x_i^2} = \Delta x_i \sqrt{1 + \left(f'\left(c_i\right)\right)^2}$$

Rotacione a tela.

Estamos interessados em calcular o comprimento do gráfico de $f\left(x\right)$ entre os pontos do domínio [a,b]. Dividiremos os pontos [a,b] em uma partição P:

$$a < x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

Assim, o comprimento da poligonal que liga os pontos deste gráfico será dado por:

$$L\left(P\right) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(f\left(x_i\right) - f\left(x_{i-1}\right)\right)^2 + \left(x_i - x_{i-1}\right)^2}$$

$$L\left(P\right) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \sqrt{1 + \left(f'\left(c_i\right)\right)^2}$$

Rotacione a tela.

A poligonal aproximará melhor a curva do gráfico quando a distância entre os pontos, Δx, tender a zero. Assim:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \Delta c_i \sqrt{1 + \left(f'\left(c_i\right)\right)^2}$$

Rotacione a tela.

Fazer $\Delta x \to 0$ é semelhante a ter uma partição com um número infinito de intervalos, isto é, $i \to \infty$.

Usando a mesma analogia da definição da integral definida:

$$L = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \sqrt{1 + \left(f'\left(c_i\right)\right)^2} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'\left(x\right)\right)^2} dx$$

Rotacione a tela.

Vamos ver um exemplo:

Determine o comprimento do arco do gráfico da função $y = 3x^2 + 2$ entre os pontos $\left(0, 2\right)$ e $\left(1, 5\right)$.

Solução:

A resolução é dada com aplicação direta da fórmula:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'\left(x\right)\right)^2} dx$$

$$\text{Como } f\left(x\right) = 3x^2 + 2 \to f\prime\left(x\right) = 6x, \text{ Assim:}$$

$$L = \int_{x=0}^{x=1} \sqrt{1 + \left(6x\right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 36x^2} dx$$

Rotacione a tela.

Agora, necessitamos usar as técnicas de integração para calcular esta integral. Para resolver integrais do tipo $\sqrt{1 + \boldsymbol{a}^2 \boldsymbol{x}^2}$ usamos uma substituição de variável do tipo:

$$\operatorname{tg} \alpha = ax \to sec^2 \alpha d\alpha = adx$$

Rotacione a tela.

Assim:

$$\sqrt{1 + a^2x^2} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \sqrt{\sec^2 \alpha} = |\sec \alpha|$$

Rotacione a tela.

Portanto, no exemplo

$$\operatorname{tg} \alpha = 6x \to \sec^2 \alpha d\alpha = 6dx$$

Rotacione a tela.

Para

$$x = 0 \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 0 \rightarrow \alpha = 0$$

Para

$$x = 1 \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 6 \rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} 6$$

$$L = \int_{x=0}^{x=1} \sqrt{1 + \left(6x\right)^2} dx = \int_0^{\operatorname{arctg} 6} \sec \alpha \frac{1}{6} \sec^2 \alpha d\alpha$$

$$L = \frac{1}{6} \int_0^{\operatorname{arctg} 6} \sec^3 \alpha d\alpha$$

Ainda não temos uma integral imediata.

Verifique, a seguir, o cálculo da integral $\int \sec^3 \alpha d\alpha$

Obtenção das integrais com integrando $\sec^n \alpha$

$$I = \int \sec \alpha d\alpha$$

Para calcular esta integral, multiplica-se e divide-se o integrando por $\left(seca + \operatorname{tg} a\right)$

$$\int \sec \alpha d\alpha = \int \sec \alpha \frac{\sec \alpha + \operatorname{tg} a}{\sec \alpha + \operatorname{tg} a} d\alpha = \int \frac{\sec^2 \alpha + \sec \alpha \operatorname{tg} \alpha}{\sec \alpha + \operatorname{tg} a} d\alpha$$

Fazendo

$$u = \sec \alpha + \operatorname{tg} a \rightarrow du = \left(\sec \alpha \operatorname{tg} \alpha + \sec^2 \alpha\right) d\alpha$$

Rotacione a tela.

Assim:

$$\int \frac{\sec^2 \alpha + \sec \alpha \operatorname{tg} \alpha}{\sec \alpha + \operatorname{tg} \alpha} d\alpha = \int \frac{du}{u} = ln|u\ | + k, k \, \text{real}$$

Rotacione a tela.

Dessa forma,

$$\int \sec \alpha da = \ln |\sec \alpha + \operatorname{tg} \alpha| + k, k \text{ real}$$

$$I = \int \sec^2 \alpha d\alpha$$

Rotacione a tela.

Esta é uma integral Imediata, pois a derivada de tg a vale $\sec^2 \alpha$. Portanto α.

$$\int \sec^2 \alpha d\alpha = \operatorname{tg} \alpha + k, k \; real$$

$$I = \int \sec^3 \alpha d\alpha$$

Rotacione a tela.

Para calcular esta integral, utillzaremos a integral por partes:

$$\int \sec^3 \alpha d\alpha = \int \sec \alpha \sec^2 \alpha d\alpha$$

$$u = \sec \alpha \rightarrow du = \sec \alpha \operatorname{tg} \alpha d\alpha \text{ e } dv = \sec^2 \alpha d\alpha \rightarrow v = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\int \sec^3 \alpha d\alpha = \sec \alpha \operatorname{tg} \alpha - \int \operatorname{tg} \alpha \sec \alpha \operatorname{tg} \alpha d\alpha$$

Rotacione a tela.

Mas

$$\int \operatorname{tg} a \sec a \operatorname{tg} a d\alpha = \int \sec a \operatorname{tg}^2 \alpha d\alpha = \int \sec a \left(\sec^2 a - 1\right) d\alpha = \int \left(\sec^3 \alpha - \sec a\right) d\alpha$$

$$\int \sec^3 \alpha d\alpha = \sec \alpha \operatorname{tg} \alpha - \int \sec^3 \alpha d\alpha + \int \sec \alpha d\alpha$$

Rotacione a tela.

Desta forma,

$$2 \int \sec^3 \alpha da = \sec atg\alpha + \int \sec ad\alpha$$

Rotacione a tela.

Substituindo o valor de $\int \sec ad\alpha$

$$\int \sec^3 \alpha da = \frac{1}{2} \sec \alpha \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{2} \ln |\sec \alpha + \operatorname{tg} \alpha| + k, k\ real!$$

Rotacione a tela.

Atenção!

Para integrais $\int \sec^n \alpha$ d α, com com inteiro maior do que 3, usa-se a integral por partes como feito no último item.

Assim,

$$L = \frac{1}{6} \int_0^{\operatorname{arctg} 6} \sec^3 \alpha da = \frac{1}{6} \left[\frac{1}{2} \sec \alpha \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{2} \ln |\sec \alpha + \operatorname{tg} \alpha| \right]_0^{\operatorname{arctg} 6}$$

Rotacione a tela.

Lembrando que

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} 6\right) = 6 \rightarrow \sec\left(\operatorname{arctg} 6\right) = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg} 6\right)} = \sqrt{1 + 36} = \sqrt{37}$$

Rotacione a tela.

e que

$$\sec 0 = 1\ e\ \ \operatorname{tg} 0 = 0$$

$$L = \frac{1}{12} [\left(\sqrt{37} \cdot 6 + \ln |\sqrt{37} + 6|\right) - \left(1.0 + \ln |1 + 0|\right)] = \frac{1}{2} \sqrt{37} + \frac{1}{12} \ln\left(6 + \sqrt{37}\right)$$

Rotacione a tela.

Função comprimento de arco

Baseado na fórmula obtida no item anterior, pode-se definir uma função, chamada de função comprimento de arco, a que tem o objetivo de medir o comprimento de um arco de gráfico de uma função a partir de um ponto particular até outro ponto qualquer.

Assim, se a curva **C** tem seu gráfico definido pela função $\mathrm{f(x)}$, define-se $\mathrm{s(x)}$ como a função comprimento de arco dada por:

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt$$

Rotacione a tela.

Vamos ver mais um exemplo:

Obtenha a função comprimento de arco, definida pela função $g(x) = 16 - \frac{1}{8} \ln x + x^2$, para medir o arco a partir do ponto inicial $(\mathbf{1}, \mathbf{17})$. Determine o comprimento do arco do gráfico entre o ponto inicial e o ponto $\text{com}\, x = 3$.

Solução:

Como

$$g(x) = 16 - \frac{1}{8} \ln x + x^2 \rightarrow g'(x) = -\frac{1}{8x} + 2x$$

$$\sqrt{1 + \left(2x - \frac{1}{8x}\right)^2} = \sqrt{1 + 4x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{64x^2}} = \sqrt{\left(2x + \frac{1}{8x}\right)^2} = 2x + \frac{1}{8x}$$

Portanto,

$$(x) = \int_1^x \sqrt{1 + \left(2t - \frac{1}{8t}\right)^2} dt = \int_1^x \left(2t + \frac{1}{8t}\right) dt = \left[t^2 + \frac{1}{8} ln|t|\right]_1^x$$

$$s(x) = x^2 + \frac{1}{8} \ln x - 1, \text{com}\, x \geq 1$$

Assim, para $x = 3$ se terá

$$s(3) = 3^2 + \frac{1}{8}\ln 3 - 1 = 8 + \frac{1}{8}\ln 3$$

Rotacione a tela.

Mão na massa

Questão 1

Marque a alternativa que apresenta a integral que deve ser calculada para determinar o comprimento do arco gerado pela função $g(x) = 3\ln x$, para $1 \le x \le 3$

A $L = \int_1^3 \sqrt{1 + 9\ln^2 x}dx$

B $L = \int_1^3 \frac{\sqrt{9+x^2}}{x}dx$

C $L = \int_1^3 (1 + 3\ln x)dx$

D $L = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}dx$

E $L = \int_1^3 \sqrt{1 + \frac{1}{x^3}}dx$

Parabéns! A alternativa B está correta.

Usando a fórmula para calcular o comprimento do arco:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx \text{ Como } f(x) = 3\ln x \rightarrow f'(x) = \frac{3}{x}$$

Assim,

$L = \int_1^3 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{x}\right)^2} dx = \int_1^3 \frac{\sqrt{9+x^2}}{x} dx$

Questão 2

Marque a alternativa que apresenta a integral que representa a função comprimento de arco que mede o comprimento do arco da função $f\left(x\right) = 4e^x$, a partir do ponto $x = 4$.

A $\int_0^x \sqrt{1 - 16e^{2x}} dx$

B $\int_4^x \sqrt{1 + e^{2x}} dx$

C $\int_4^x \sqrt{1 + 16e^{2x}} dx$

D $\int_0^x \sqrt{1 + 16e^x} dx$

E $\int_0^x \sqrt{1 + 18e^x} dx$

Parabéns! A alternativa C está correta.

Usando a fórmula para calcular a função comprimento do arco:

$$s\left(x\right) = \int_4^x \sqrt{1 + \left(f'\left(x\right)\right)^2} dx$$

Assim,

$$s\left(x\right) = \int_4^x \sqrt{1 + \left(4e^x\right)^2} dx = \int_4^x \sqrt{1 + 16e^{2x}} dx$$

Questão 3

Determine o valor de $s\left(\frac{\pi}{4}\right)$, onde $s(x)$ é a função comprimento de arco que determina o comprimento do arco da função $g(x) = \ln(\cos x)$, a partir do ponto com $x = 0$.

A $\ln 2$

B $\ln(\sqrt{3}+1)$

C $\ln 5$

D $\ln(\sqrt{2}+1)$

E $\ln 2\sqrt{3}$

Parabéns! A alternativa D está correta.

Usando a fórmula para calcular a função de comprimento do arco:

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

Como

$$f(x) = \ln(\cos x) \rightarrow f'(x) = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$$

Assim,

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1+(-\operatorname{tg} x)^2}dx = \int_0^x \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}dx = \int_0^x |\sec x|dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|$$

Logo,

$$s\left(\frac{\pi}{4}\right) = \ln\left(\sec\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right) = \ln(\sqrt{2}+1)$$

Questão 4

Determine o comprimento de arco que existe entre os pontos A e B que pertencem à curva de gráfico $h\left(x\right) = \frac{2}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}$. Sabe-se que o ponto A tem abscissa 0 e o ponto B abscissa 1.

A $\frac{5}{3}$

B $\frac{1}{5}$

C $\frac{3}{5}$

D $\frac{1}{3}$

E $\frac{4}{3}$

Parabéns! A alternativa A está correta.

Usando a fórmula para calcular o comprimento do arco:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(h'\left(x\right)\right)^2} dx$$

Como

$$h\left(x\right) = \frac{2}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}} \rightarrow h'\left(x\right) = \frac{2}{3}\frac{3}{2}\left(x^2+1\right)^{1/2} 2x = 2x\left(x^2+1\right)^{1/2}$$

Assim,

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(2x\left(x^2+1\right)^{1/2}\right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2\left(x^2+1\right)} dx$$

Logo,

$$L=\int_0^1 \sqrt{1+4x^4+4x^2}dx=\int_0^1 \sqrt{\left(2x^2+1\right)^2}dx=\int_0^1 \left(2x^2+1\right)dx$$

$$L=\left[\frac{2}{3}x^3+x\right]_0^1=\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}$$

Questão 5

Determine o comprimento de arco formado pela função $g\left(x\right)=\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{4x^2}$, entre $x=1$ e $x=2$.

A $\frac{33}{16}$

B $\frac{16}{33}$

C $\frac{33}{4}$

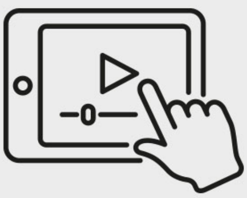
D $\frac{4}{33}$

E $\frac{33}{5}$

Parabéns! A alternativa A está correta.

Assista ao vídeo com a resolução da questão sobre Função comprimento do arco

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Questão 6

Determine a função comprimento de arco que calcula o comprimento do arco traçado pela função $g\left(x\right) = x^2 + 8$, a partir do ponto $x = 0$, para $x < \frac{\pi}{2}$.

A $s\left(x\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+4x^2} + \ln\left(\sqrt{1+4x^2}\right)\right)$

B $s\left(x\right) = \frac{1}{4}\left(2x\sqrt{1+4x^2} + \ln\left(\sqrt{1+4x^2} + 2x\right)\right)$

C $s\left(x\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{1+4x^2} - \ln\left(\sqrt{1+4x^2}\right)\right)$

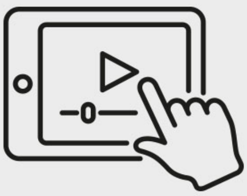
D $s\left(x\right) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \ln\left(\sqrt{1+x^2} + x\right)\right)$

E $s\left(x\right) = \frac{1}{3}\left(2x\sqrt{1+x^2} + \ln\left(\sqrt{1+x^2} + 3x\right)\right)$

Parabéns! A alternativa B está correta.

Assista ao vídeo com a resolução da questão sobre comprimento do arco.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Teoria na prática

Um arquiteto pretende construir um arco parabólico, virado para baixo, em um monumento. Ele deseja saber quantos metros de metal serão necessários para a obra. Sabe-se que o arco terá uma distância entre as duas pontas que tocam ao chão de 4 m e a altura do ponto médio será de 8 m.

Mostrar solução

Falta pouco para atingir seus objetivos.

Vamos praticar alguns conceitos?

Questão 1

Determine o comprimento do arco da curva $h\left(x\right) = x^{3/2}$, para $0 \leq x \leq 1$.

A $\frac{1}{27}\left(13\sqrt{13} - 8\right)$

B $\frac{1}{27}\left(\sqrt{13} - 4\right)$

C $\frac{1}{3}\left(3\sqrt{3} - 2\right)$

D $\frac{1}{9}\left(8 - \sqrt{13}\right)$

E $\frac{1}{27}\left(8-3\sqrt{13}\right)$

Parabéns! A alternativa A está correta.

Usando a fórmula para calcular o comprimento do arco:

$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'\left(x\right)\right)^2}dx$

Como

$f\left(x\right)=x^{3/2}\rightarrow f'\left(x\right)=\frac{3}{2}\sqrt{x}$

Assim,

$L=\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}dx=\int_0^1\frac{1}{2}\sqrt{4+9x}dx$

Fazendo uma substituição de variável

$u=4+9u\rightarrow du=9d\varepsilon$

Para $z=0\rightarrow u=4$ e para $z=1\rightarrow u=13$

$$L=\int_4^{13}\frac{1}{2}\sqrt{u}\frac{1}{9}du=\frac{1}{18}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_4^{13}=\frac{1}{27}\left(13\sqrt{13}-8\right)$$

Questão 2

Marque a alternativa que apresenta a função comprimento de arco que determina o comprimento do arco da função $f\left(x\right)=ln\left(secx\right)$ desde o ponto $x=0$, para um $x\leq\frac{\pi}{2}$.

A $s\left(x\right)=\ln\left(\sec x-\operatorname{tg}x\right),0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$

B $s\left(x\right)=\ln\left(\sec x+\operatorname{tg}x\right),0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$

C $s(x) = \ln(\sec x) + \ln(\operatorname{tg} x + 1), 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

D $s(x) = 2 - \ln(\operatorname{tg} x + 1), 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

E $s(x) = 2 - \ln(\operatorname{tg} x + 1), 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

Parabéns! A alternativa B está correta.

Usando a fórmula para calcular o comprimento do arco:

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Assim,

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2} dx = \int_0^x |\sec x| dx = [\ln|\sec x + \operatorname{tg} x|]_0^x = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|$$

$$s(x) = \ln(\sec x + \operatorname{tg} x), 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

2 - Cálculo de áreas por integração

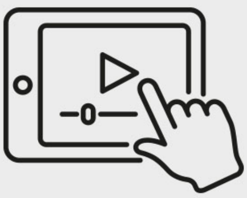
Ao final deste módulo, você deverá ser capaz de empregar o conceito da integral na obtenção do cálculo de áreas.

Cálculo de área de uma função

Como aplicar o conceito de integração no cálculo de áreas

Neste vídeo, falaremos sobre os cálculos de área de uma função, de área entre funções e o de área de uma superfície de revolução.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



A definição da integração definida se baseia no cálculo do limite de um somatório, denominado de soma de Riemann.

Assim, a integral definida de $f\left(x\right)$ de a para b será dada por:

oma de Riemann

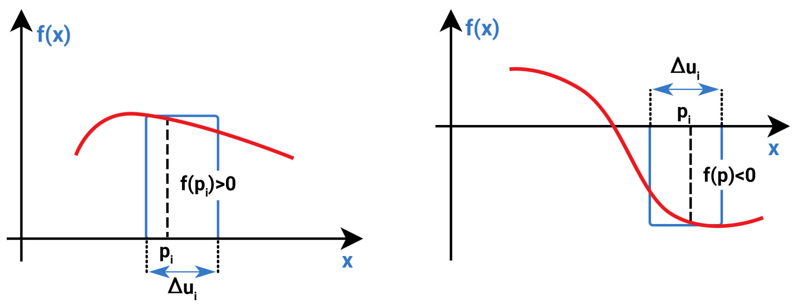
Na matemática, a soma de Riemann é uma aproximação obtida pela expressão. É nomeada em homenagem ao matemático alemão Bernhard Riemann. Uma aplicação muito comum é a aproximação da área de funções ou linhas em um gráfico, mas também o comprimento das curvas e outras aproximações.

Fonte: Wikipédia.

$$\int_a^b f\left(x\right)dx = \lim_{\Delta u_{\max}\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(p_i\right)\Delta u_i$$

Rotacione a tela.

As parcelas do somatório são as áreas dos retângulos, formados abaixo da curva f(x), quando a função está em cima do eixo, ou serão as áreas dos retângulos multiplicados por (− 1) quando a função estiver abaixo dos eixos.



Como área é sempre uma medida positiva, torna-se necessário trabalhar apenas com termos positivos. Assim, pode-se calcular a área A, entre a função f(x) e o eixo x, para a ≤ x ≤ b, pela integral:

$$A = \int_a^b |f\left(x\right)|dx$$

Rotacione a tela.

Para resolver esta integral, teremos que dividir em intervalos de integração em que o sinal de f(x) é sempre positivo ou sempre negativo.

Vamos ver um exemplo:

Determine a área entre o gráfico da função $g\left(x\right) = 2\cos x$ e o eixo x, para x entre $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$

Solução:

A área A será obtida pela integral.

$$A = \int_a^b |f(x)| dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |2\cos x| dx$$

A função $cosx$ é positiva para

$$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \rightarrow |2\cos x| = 2\cos x$$

Rotacione a tela.

A função $\cos x$ é negativa para

$$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{4} \rightarrow |2\cos x| = -2\cos x$$

Rotacione a tela.

Assim:

$$A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |2\cos x| dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(-2\cos x\right) dx = [2\operatorname{sen} x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A = \left(2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) + \left(-2\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = 2 - 2.\ \frac{\sqrt{2}}{2} - 2.\ \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 = 4 - 2\sqrt{2}$$

Rotacione a tela.

Repare que, se fosse feita a integral sem o módulo, o valor seria diferente, pois as parcelas abaixo do eixo diminuiriam das parcelas acima do eixo, ao invés de se somarem.

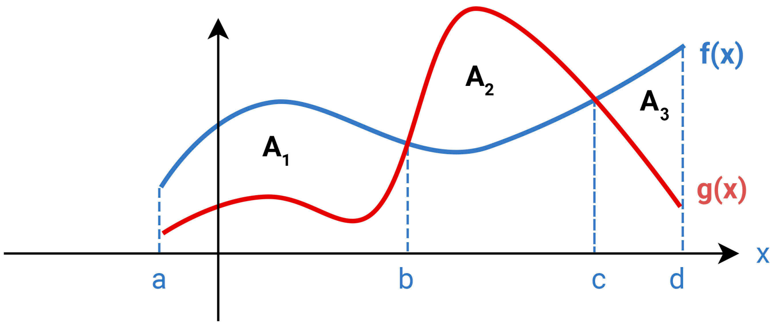
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 2\cos x dx = [2\operatorname{sen} x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = 2\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} - 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = 0$$

Rotacione a tela.

Cálculo de área entre funções

Deseja-se agora obter a área que se encontra entre dois gráficos f(x) e g(x).

Neste caso, também precisamos ter a noção em que intervalos f(x) é maior que g(x), estando acima no desenho dos gráficos, e onde f(x) é menor que g(x), estando abaixo no desenho dos gráficos.



Se observarmos, no gráfico, a área entre as funções $f\left(x\right)$ e $g\left(x\right)$ para a $\leq x \leq d$ é dada por $A = A_1 + A_2 + A_3$.

Repare que, em A_1 e A_3, a função f(x) está acima de $g\left(x\right)$, assim, estas áreas podem ser obtidas como se fossem área entre f(x) e o eixo x menos a área entre $g\left(x\right)$ e o eixo x. Portanto:

$$A_1 = \int_a^b \left(f\left(x\right) - g\left(x\right)\right)dx = \int_a^b f\left(x\right)dx - \int_a^b g\left(x\right)dx$$

$$A_3 = \int_c^d \left(f\left(x\right) - g\left(x\right)\right)dx = \int_c^d f\left(x\right)dx - \int_c^d g\left(x\right)dx$$

Rotacione a tela.

Para o caso de A_2, a função $f\left(x\right)$ está abaixo de $g\left(x\right)$. Logo, esta área pode ser obtida como a diferença entre a área de g(x) e o eixo x e a área entre $f\left(x\right)$ e o eixo x.

Assim:

$$A_2 = \int_b^c \left(g\left(x\right) - f\left(x\right)\right)dx = \int_b^c g\left(x\right)dx - \int_b^c f\left(x\right)dx$$

Rotacione a tela.

Podemos, então, juntar todas essas integrais utilizando o módulo, pois, assim, o integrando será calculado sempre pelo maior valor, menos o menor valor.

Desta forma, a área entre f(x) e g(x) para a ≤ x ≤ d é dada por:

$$A = \int_a^d \left|f\left(x\right) - g\left(x\right)\right|dx$$

Rotacione a tela.

Esta integral deve ser separada em intervalos nos quais a posição relativa entre as funções no gráfico não se altera. Assim, no exemplo do gráfico:

$$A = \int_a^d |f(x) - g(x)| dx = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right) dx + \int_b^c \left(g(x) - f(x)\right) dx + \int_c^d \left(f(x) - g(x)\right) dx$$

Rotacione a tela.

Vamos a um exemplo:

Calcule a área da região compreendida entre os gráficos da função $f(x) = 27x$ e $g(x) = 3x^3$ com $0 \leq x \leq 5$.

Solução:

Precisamos, inicialmente, verificar a posição relativa entre $f(x)$ e $g(x)$.

Os pontos onde estes gráficos se interceptam, com $0 \leq x \leq 5$, serão:

$$27x = 3x^3 \rightarrow x = 0/x = 3$$

Rotacione a tela.

Analisando os gráficos, para $0 \leq x \leq 3$, $f(x)$ está acima de $g(x)$ e para $3 \leq x \leq 5$, $g(x)$ está acima de $f(x)$

Desta forma,

$$A = \int_0^5 \left|27x - 3x^3\right| dx = \int_0^3 \left(27x - 3x^3\right) dx + \int_3^5 \left(3x^3 - 27x\right) dx$$

$$A = \left[\frac{27}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^4\right]_0^3 + \left[\frac{3}{4}x^4 - \frac{27}{2}x^2\right]_3^5 = \frac{27}{2}9 - \frac{3}{4}81 + \frac{3}{4}625 - \frac{27}{2}25 - \frac{3}{4}81 + \frac{27}{2}9$$

$$A = \frac{243}{4} + 408 - 216 = \frac{1011}{4}$$

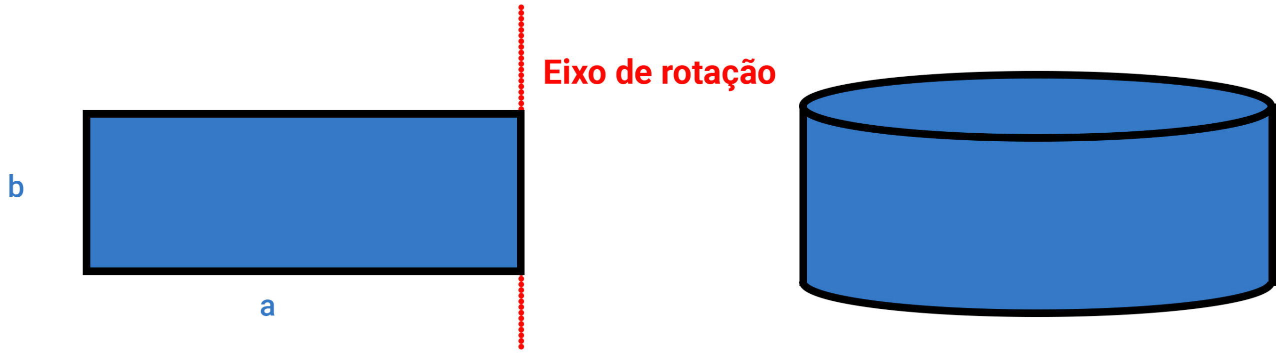
Rotacione a tela.

Cálculo de área de uma superfície de revolução

Inicialmente, precisamos definir o que é uma superfície de revolução.

> **Uma superfície de revolução é uma área formada ao girar uma curva em torno de uma reta. Assim, tal superfície é a fronteira lateral de um sólido, denominado de sólido de revolução.**

Por exemplo, imagine um retângulo de lados **a** e **b**. Vamos rotacionar este retângulo ao redor de um eixo de rotação colocado em um dos lados. Será formado um cilindro de revolução, com **altura b** e **raio da base a**.

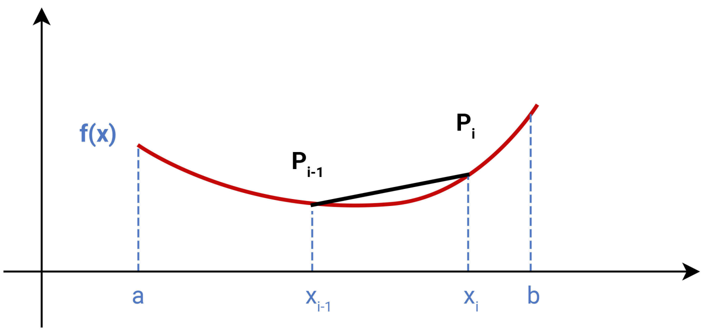


A área da superfície de revolução será a área lateral do cilindro, que valerá $A = 2\pi rh = 2\pi ab$.

Poderíamos imaginar de forma contrária, isto é, desenrolando a superfície de um cilindro, assim se geraria um retângulo. Outros exemplos podem ser encontrados na literatura de referência.

Vamos agora realizar um caso geral. Imagine a curva definida pela função $f\left(x\right)$ para $a \leq x \leq b$.

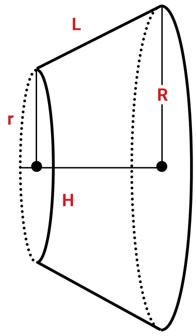
A função $f\left(x\right)$ deve ser positiva e ter derivada contínua. Considere a superfície gerada ao rotacionar esta função ao redor do eixo x.



Considere uma faixa de valores de x_{i-1} até x_i.

Os valores foram escolhidos bem afastados na figura para facilitar o entendimento da fórmula.

Ao girar em torno do eixo x, esta faixa vai gerar, aproximadamente, a lateral de um tronco de cone circular.



Da geometria aprendemos que a área da lateral do tronco de cone circular vale $A = \pi\left(r + R\right)L$. Quando aproximamos os dois pontos r e R tendem a ter o mesmo valor, assim $A = 2\pi rL$. Comparando com o gráfico da função f(x). O valor de $r = f\left(x_{i-1}\right)$ e o valor de $L = P_iP_{i-1}$

Mas já aprendemos no módulo de comprimento de arco que:

$$L_i = \sqrt{\left(f\left(x_i\right) - f\left(x_{i-1}\right)\right)^2 + \Delta x_i^2} = \sqrt{\left(f'\left(c_i\right)\right)^2 \Delta x_i^2 + \Delta x_i^2} = \Delta x_i \sqrt{1 + \left(f'\left(c_i\right)\right)^2}$$

Rotacione a tela.

Em que c_i está entre x_{i-1} e x_i

Se fizemos Δx_i tender a zero, melhor será a aproximação da superfície de revolução com o tronco de cone gerado. Além disso, x_{i-1} é praticamente igual a x_i que será praticamente igual a c_i.

Portanto, a área gerada por uma faixa tendendo a zero em torno do ponto x_i será:

$$\Delta A = \lim_{\Delta x \to 0} 2\pi f\left(x_i\right) \Delta x_i \sqrt{1 + \left(f'\left(x_i\right)\right)^2}$$

Rotacione a tela.

A área total será a soma das áreas desde x = a até x = b. Usando o mesmo princípio utilizado na definição da integração definida, obtém-se a fórmula da área da superfície de revolução gerada ao girar o gráfico de f(x) ao redor do eixo x:

$$A = \int_a^b 2\pi f\left(x\right) \sqrt{1 + \left(f'\left(x\right)\right)^2} dx$$

Rotacione a tela.

De forma análoga, demonstra-se que a área da superfície de revolução gerada ao girar o gráfico da função f(x) ao redor do eixo y será:

$$A=\int_a^b 2\pi x\sqrt{1+\left(f'\left(x\right)\right)^2}dx$$

Rotacione a tela.

Observe neste caso que o raio do tronco não será mais f(x), e sim o valor da abscissa x.

Vamos a mais um exemplo?

Determine a área da superfície de revolução gerada ao girar a função $y=2x^2$, para $0\leq x\leq 1$, ao redor do eixo y.

Solução:

$$f\left(x\right)=2x^2\rightarrow f'\left(x\right)=4x$$

Rotacione a tela.

Assim,

$$A=\int_0^1 2\pi x\sqrt{1+\left(f'\left(x\right)\right)^2}dx=\int_0^1 2\pi x\sqrt{1+\left(4x\right)^2}dx$$

Rotacione a tela.

Para resolver a integral, faz-se

$$u=1+16x^2\rightarrow du=32xdx$$

Rotacione a tela.

Para $x=0\rightarrow u=1$ e para $x=1\rightarrow u=17$. Portanto:

$$A=\int_1^{17} 2\pi\frac{1}{32}\sqrt{u}du=\frac{\pi}{16}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_1^{17}=\frac{\pi}{24}\left(17\sqrt{17}-1\right)$$

Rotacione a tela.

Mão na massa

Questão 1

Determine a área da região formada entre a função $f\left(x\right) = 4 - 2x$ e o eixo x para $1 \leq x \leq 3$

A 1

B 2

C 3

D 4

E 5

Parabéns! A alternativa B está correta.

A área será a área entre $f\left(x\right)$ e o eixo $1 \leq x \leq 3$.

Assim:

$$A = \int_1^3 |f\left(x\right)| dx = \int_1^3 |4 - 2x| dx$$

Temos que analisar os intervalos em que $f\left(x\right)$ são positivos ou negativos:

1. $f\left(x\right) \geq 0 \rightarrow 4 - 2x \geq 0 \rightarrow 2x \leq 4 \rightarrow x \leq 2$
2. $f\left(x\right) \geq 0 \rightarrow 4 - 2x \leq 0 \rightarrow 2x \geq 4 \rightarrow x \geq 2$

Assim,

$A = \int_1^3 |4 - 2x| dx = \int_1^2 \left(4 - 2x\right) dx + \int_2^3 \left(2x - 4\right) dx$

$$A = \left[4x - x^2\right]_1^2 + \left[x^2 - 4x\right]_2^3 = \left(8 - 4\right) - \left(4 - 1\right) + \left(9 - 12\right) - \left(4 - 8\right) = 4 - 3 - 3 - 4 = 2$$

Questão 2

Determine a área da superfície de revolução gerada ao girar a função $h\left(x\right) = 3x^3$, para $0 \leq x \leq 2$, ao redor do eixo y.

A $A = \int_0^2 6\pi x^3 \sqrt{1 + 81x^4} dx$

B $A = \int_0^2 2\pi x \sqrt{1 + 9x^2} dx$

C $A = \int_0^2 2\pi x \sqrt{1 + 81x^4} dx$

D $A = \int_0^2 3\pi x^3 \sqrt{1 + 9x^2} dx$

E $A = \int_0^2 4\pi x^3 \sqrt{1 + 27x^4} dx$

Parabéns! A alternativa C está correta.

$$f\left(x\right) = 3x^3 \rightarrow f'\left(x\right) = 9x^2$$

Assim,

$A = \int_0^2 2\pi x \sqrt{1 + \left(f'\left(x\right)\right)^2} dx = \int_0^2 2\pi x \sqrt{1 + \left(9x^2\right)^2} dx$ $A = \int_0^2 2\pi x \sqrt{1 + 81x^4} dx$

Questão 3

Determine a área limitada superiormente por $f\left(x\right) = 16$ e inferiormente por $g\left(x\right) = 2x^2$, para os valores de x no intervalo $\left[0, 2\right]$.

A $\frac{80}{3}$

B $\frac{70}{3}$

C $\frac{50}{3}$

D $\frac{10}{3}$

E $\frac{20}{3}$

Parabéns! A alternativa A está correta.

$$A = \int_0^2 |f(x) - g(x)| dx = \int_0^2 \left(f(x) - g(x)\right) dx = \int_0^2 \left(16 - 2x^2\right) dx = \left[16x - \frac{2}{3}x^3\right]_0^2$$

$$A = 32 - \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{80}{3}$$

Questão 4

Determine a área da região formada entre a função $f(x) = 2x^2 - 6x - 8$, o eixo x e as retas $x = -2$ e $x = 6$

A $\frac{17}{3}$

B $\frac{76}{3}$

C $\frac{218}{3}$

D $\frac{511}{3}$

E $\frac{275}{3}$

Parabéns! A alternativa C está correta.

A área será a área entre $f\left(x\right)$ e o eixo x, para $-2 \leq x \leq 6$. Assim:

$$A=\int_{-2}^{6}\left|f\left(x\right)\right|dx=\int_{-2}^{6}\left|2x^2-6x-8\right|dx=2\int_{-2}^{6}\left|x^2-3x-4\right|dx$$

Temos que analisar os intervalos em que $f\left(x\right)$ são positivos ou negativos.

Determinando a raiz de $f\left(x\right)=x^2-3x-4$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{4+4.41}}{2}=\frac{3\pm 5}{2}=\begin{cases}4\\-1\end{cases}$$

Por ser uma equação do segundo grau de concavidade para cima:

1. $f\left(x\right)\geq 0 \rightarrow x\leq -1$ ou $x\geq 4$
2. $f\left(x\right)\leq 0 \rightarrow -1\leq x\leq 4$

Assim,

$$A = 2\int_{-2}^{6} \left|x^2 - 3x - 4\right| dx = 2\int_{-2}^{-1} \left(x^2 - 3x - 4\right) dx + 2\int_{-1}^{4} \left(-x^2 + 3x + 4\right) dx$$

$$+ 2\int_{4}^{6} \left(x^2 - 3x - 4\right) dx = 2\left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 - 4x\right]_{-2}^{-1} + 2\left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 4x\right]_{-1}^{4} +$$

$$2\left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 - 4x\right]_{4}^{6} = 2\left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4\right) - 2\left(-\frac{8}{3} - \frac{12}{2} + 8\right) + 2\left(-\frac{64}{3} + \frac{48}{2} + 16\right) +$$

$$-2\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 4\right) + 2\left(\frac{216}{3} - \frac{108}{2} - 24\right) - 2\left(\frac{64}{3} - \frac{48}{2} + 16\right) = \frac{17}{3} + \frac{76}{3} + \frac{125}{3} = \frac{218}{3}$$

Questão 5

Determine a área da região limitada pela função $f\left(x\right) = x, g\left(x\right) = x^3$ e pelas retas $x = -2$ e $x = 3$.

A $\frac{55}{4}$

B $\frac{75}{4}$

C $\frac{85}{4}$

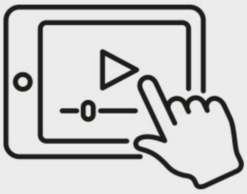
D $\frac{95}{4}$

E $\frac{35}{4}$

Parabéns! A alternativa B está correta.

Assista ao vídeo com a resolução da questão sobre área entre funções.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Questão 6

Determine a área da superfície de revolução gerada ao girar a função $h\left(x\right) = e^x$, para $1 \leq x \leq 2$, ao redor do eixo x

A $$A = \pi\left[e^2\sqrt{1+e^4} + \ln\left(e^2 + \sqrt{1+e^4}\right)\right]$$

B $$A = 2\pi\left[e^2\sqrt{1-e^4} + \ln\left(e^2 + \sqrt{1-e^4}\right) - e\sqrt{1-e^2} + \ln\left(e + \sqrt{1-e^2}\right)\right]$$

C $$A = 2\pi\left[e^2\sqrt{1+e^4} - \ln\left(e^2 + \sqrt{1+e^4}\right) + e\sqrt{1+e^2} - \ln\left(e + \sqrt{1+e^2}\right)\right]$$

D $$A = \pi\left[e^2\sqrt{1+e^4} + \ln\left(e^2 + \sqrt{1+e^4}\right) - e\sqrt{1+e^2} - \ln\left(e + \sqrt{1+e^2}\right)\right]$$

E $$A = 2\pi\left[e^2\sqrt{1-e^4} + \ln\left(e^2 - \sqrt{1+e^4}\right)\right]$$

Parabéns! A alternativa D está correta.

Assista ao vídeo com a resolução da questão sobre Área de superfície de revolução.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.

Teoria na prática

Determine a fórmula da área de uma elipse de **eixo maior 2a** e **eixo menor 2b**. Com **a** e **b** reais positivos.

Mostrar solução

Falta pouco para atingir seus objetivos.

Vamos praticar alguns conceitos?

Questão 1

Determine a área da região formada entre a função $f\left(x\right) = 3ln\ x$ e o eixo x, para x entre $0,5$ e 2.

A $3\ln 2 - \frac{3}{2}$

B $\ln 2 + \frac{3}{2}$

C

$\frac{9}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}$

D $\frac{7}{2}\ln 2 + \frac{3}{2}$

E $6\ln 2 - \frac{3}{2}$

Parabéns! A alternativa C está correta.

A área será aquela entre $f(x)$ e o eixo x, para $0,5 \leq x \leq 2$. Assim:

$$A = \int_{0,5}^{2} |f(x)| dx = \int_{0,5}^{2} |3\ln(x)| dx = 3\int_{0,5}^{2} \ln(x) \mid dx$$

Temos que analisar os intervalos em que $f(x)$ são positivos ou negativos.

$$\ln x \geq 0 \to x \geq 1$$

$$\ln x \leq 0 \to x \leq 1$$

$$A = 3\int_{0,5}^{2} |\ln(x)| dx = 3\int_{0,5}^{1} -\ln(x) dx + 3\int_{1}^{2} \ln(x) dx$$

Deve ser resolvido $\int \ln(x) dx$.

Utilizaremos a integral por partes.

$u = \ln(x) \to du = \frac{1}{x} dx$ e $dv = dx \to v = x$
$\int \ln(x) dx = x\ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x\ln x - x + k, k$ real

$$A = 3\int_{0,5}^{1} (-\ln(x)) dx + 3\int_{1}^{2} \ln(x) dx = -3[x\ln x - x]_{0,5}^{1} + 3[x\ln x - x]_{1}^{2} =$$

$$= -3\left[(1\ln 1 - 1) - \left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right)\right] + 3[(2\ln 2 - 2) - (1\ln(1) - 1)] =$$

$$= 3 - \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{3}{2} + 6\ln 2 - 6 + 3 = \frac{9}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}$$

Questão 2

Determine a área da superfície de revolução gerada ao girar a função $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$, para $0 \leq x \leq 3$, ao redor do eixo x

A 8π

B 18π

C 32π

D 45π

E 9π

Parabéns! A alternativa B está correta.

Aplicação direta da fórmula:

$A = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx\ f(x) = \sqrt{9 - x^2} \rightarrow f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$

Assim,

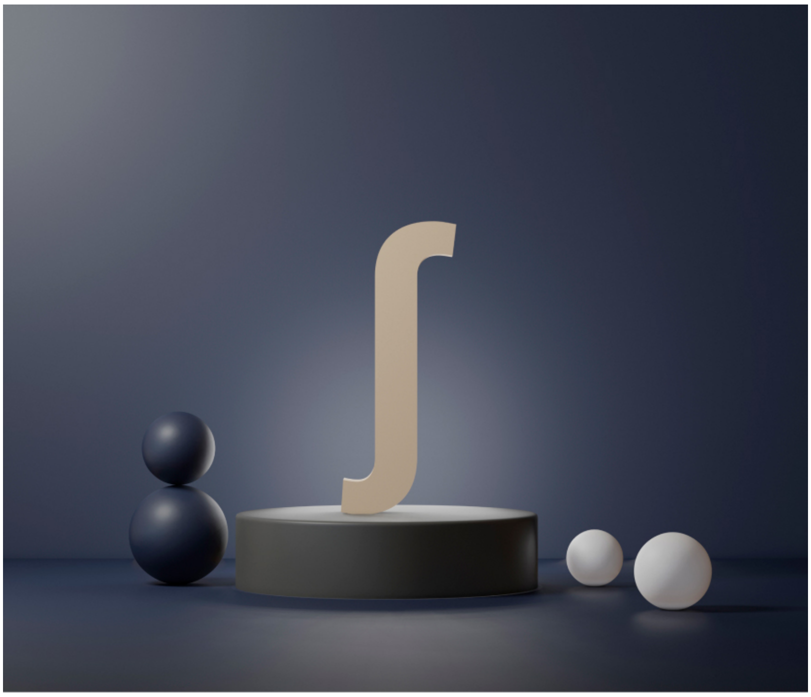
$A = \int_0^3 2\pi\sqrt{9 - x^2}\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx = \int_0^3 2\pi\sqrt{9 - x^2}\sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\right)^2}dx$

Mas $1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{9-x^2} = \frac{9}{9-x^2}$

Portanto,

$$A = \int_0^3 2\pi\sqrt{9 - x^2}\sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}\right)^2}dx =$$

$$= \int_0^3 2\pi\sqrt{9 - x^2}\sqrt{\frac{9}{9 - x^2}}dx = \int_0^3 6\pi dx = 18\pi$$



3 - Cálculo de volumes por integração

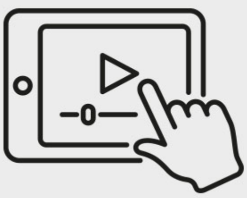
Ao final deste módulo, você deverá ser capaz de aplicar o conceito da integral na obtenção do cálculo de volumes.

Cálculo de volume de sólido de rotação

Como aplicar o conceito de integração no cálculo de volumes

Neste vídeo, mostraremos o cálculo de volume de sólido de rotação.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Outra aplicação importante para integral é o cálculo de volumes.

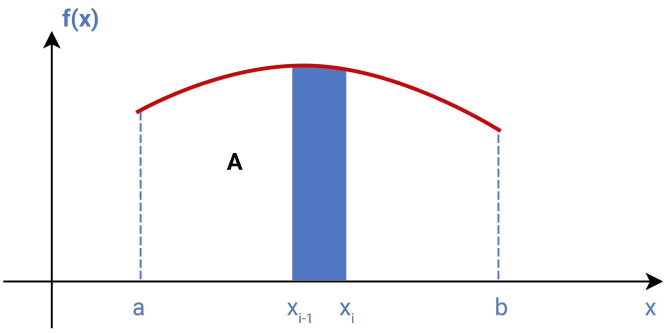
Uma função contínua e positiva gera uma área entre seu gráfico e o eixo x. Da mesma forma, esta função também gera uma área entre seu gráfico e o eixo y.

> **Cada uma destas duas áreas descritas podem ser rotacionadas em torno do eixo x ou do eixo y, gerando quatro sólidos de revolução diferentes. A integral definida pode ser usada para se calcular o volume destes sólidos.**

Seja uma função f(x) contínua e com f(x) $\geq$ 0 para [a,b].

Seja C o conjunto de pontos obtidos pela rotação, em torno do eixo x, da área A da região limitada por f(x) e o eixo x com a $\leq$ x $\leq$ b.

Estamos interessados em obter o volume da região gerada pelo conjunto C.



Vamos analisar uma faixa de valores entre x_{i-1} e x_i:

- Ao rotacionar esta faixa de valores, a região do espaço formada por ela pode ser aproximada por um cilindro de altura $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e raio dado por $f\left(x_{i-1}\right)$ ou $f\left(x_i\right)$.
- Quanto menor o valor do Δx_i melhor é a aproximação. Assim, podemos considerar que o volume da região C será composto pela soma de cilindros, com alturas Δx_i tendendo para zero;
- Observe que quando $\Delta x_i \to 0$, o valor de $f\left(x_i\right)$ fica praticamente igual ao valor de $f\left(x_{i-1}\right)$.

O volume do cilindro infinitesimal é dado por $\Delta V = \pi r^2 h = \pi\Big(f\left(x_i\right)\Big)^2 \Delta x_i$

$$V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi\Big(f\left(x_i\right)\Big)^2 \Delta x_i$$

Rotacione a tela.

Com o mesmo raciocínio da **Soma de Riemann** utilizado na definição da integral definida, define-se o volume formado pela rotação de f(x) em torno do **eixo x**, para **a $\leq$ x $\leq$ b** como:

$$V = \int_a^b \pi\Big(f(x)\Big)^2 dx$$

Rotacione a tela.

Vamos a mais um exemplo:

Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto de pontos formados pela função $f\left(x\right) = \sqrt{1 - x^2}$ e o eixo x, para $-1 \le x \le 1$.

Solução:

A função $f\left(x\right)$ é contínua e positiva neste intervalo. Usando a fórmula do volume:

$$V = \int_a^b \pi\left(f\left(x\right)\right)^2 dx = \int_{-1}^{1} \pi\left(\sqrt{1 - x^2}\right)^2 dx = \int_{-1}^{1} \pi\left(1 - x^2\right) dx$$

$$V = \pi\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \pi\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \pi\left(-1 - \frac{-1}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi$$

Rotacione a tela.

Observe que este resultado já era conhecido.

- A área formada por $f\left(x\right)$ entre $-1 \le x \le 1$ é de uma semicircunferência de raio 1;
- Ao rodar em torno do eixo x, gera uma esfera de raio 1;
- O volume da esfera de raio r é conhecido da Geometria como $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, confirmando a resposta obtida.

Além do sólido de rotação apresentado inicialmente, pode-se gerar mais três sólidos de rotação, ao rotacionar as áreas relacionadas à função f(x) contínua e positiva em torno dos eixos **x** ou **y**.

A demonstração destas fórmulas segue o raciocínio análogo ao anterior, ou ao **teorema de Pappus**, e pode ser encontrada em qualquer uma de nossas referências.

Seja f(x) uma função contínua e positiva em [a,b].

A

Seja a área **A** formada pelo conjunto de pontos entre f(x) e o eixo **x** para a ≤ **x** ≤ **b**.

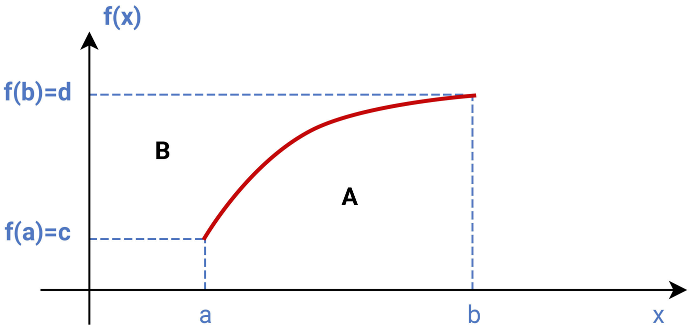
B

Seja a área **B** formada pelo conjunto de pontos entre f(x) e o eixo **y** para **a** ≤ **x** ≤ **b**.

Serão gerados quatro sólidos de rotação:

- Rotação da área A em torno do eixo x;
- Rotação da área A em torno do eixo y;
- Rotação da área B em torno do eixo x;
- Rotação da área B em torno do eixo y.

As fórmulas para calcular o volume de cada um destes sólidos são apresentadas a seguir.



Para rotação da área B, necessita-se definir a função $g\left(y\right)$, que é a inversa de $f\left(x\right)$. Lembre-se de que só existe função inversa de funções em um intervalo em que $f\left(x\right)$ será estritamente crescente ou estritamente decrescente.

Desta forma, tem-se:

1. Volume gerado pela rotação da área A em torno do eixo x, para $a \leq x \leq b : V = \int_a^b \pi\left(f\left(x\right)\right)^2 dx$
2. Volume gerado pela rotação da área B em torno do eixo y, para $c \leq y \leq d : V = \int_c^d \pi\left(g\left(y\right)\right)^2 dy$
3. Volume gerado pela rotação da área A em torno do eixo y, para $a \leq x \leq b : V = \int_a^b 2\pi x f\left(x\right) dx$
4. Volume gerado pela rotação da área B em torno do eixo x, para $c \leq y \leq d : V = \int_c^d 2\pi y g\left(y\right) dy$

Um ponto importante. Nas integrais do item 2 e item 4, o limite inferior deve ser sempre o menor número, assim, se $d > c$, os limites serão $\int_c^d I\left(y\right) dy$ mas se $d < c$, os limites serão $\int_d^c I\left(y\right) dy$.

Veja a seguir uma sequência de exemplos.

Exemplo 1

Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto de pontos formados pela função $f\left(x\right) = x^2$ e o eixo x, para $0 \leq x \leq 2$.

Solução:

Desejamos, aqui, o volume do sólido gerado por uma área do tipo A em torno do eixo x.

Assim:

$$V_1 = \int_a^b \pi\left(f\left(x\right)\right)^2 dx = \int_0^2 \pi\left(x^2\right)^2 dx = \pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{32\pi}{5}$$

Rotacione a tela.

Exemplo 2

Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y, do conjunto de pontos formados pela função $f\left(x\right) = x^2$ e o eixo x, para $0 \leq x \leq 2$.

Solução:

Observe que desejamos o volume do sólido gerado por uma área do tipo A em torno do eixo y.

Assim:

$$V_2 = \int_a^b 2\pi x f\left(x\right) dx = \int_0^2 2\pi x x^2 dx = \int_0^2 2\pi x^3 dx = 2\pi\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 8\pi$$

Rotacione a tela.

Exemplo 3

Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y, do conjunto de pontos formados pela função $f\left(x\right) = x^2$ e o eixo y, para $0 \leq x \leq 2$

Solução:

Nesta questão, desejamos o volume do sólido gerado por uma área do tipo B em torno do eixo y.

Necessitamos da função $g\left(y\right) = f^{-1}\left(x\right)$. Se $f\left(x\right) = x^2 \rightarrow g\left(y\right) = \sqrt{y}$.

Para $x = 0 \rightarrow f\left(0\right) = c = 0$ e $x = 2 \rightarrow f\left(2\right) = d = 4$

Assim:

$$V_3 = \int_c^d \pi\left(g\left(y\right)\right)^2 dy = \int_0^4 \pi\left(\sqrt{y}\right)^2 dy = \int_0^4 \pi y dy = \pi\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi$$

Rotacione a tela.

Exemplo 4

Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto de pontos formados pela função $f\left(x\right) = x^2$ e o eixo y, para $0 \leq x \leq 2$.

Solução:

Nesta questão, queremos o volume do sólido gerado por uma área do tipo B em torno do eixo x.

Necessitamos da função $g\left(y\right) = f^{-1}\left(x\right)$. Se $f\left(x\right) = x^2 \rightarrow g\left(y\right) = \sqrt{y}$.

Para $x = 0 \rightarrow f\left(0\right) = c = 0$ e $x = 1 \rightarrow f\left(2\right) = d = 4$

Assim:

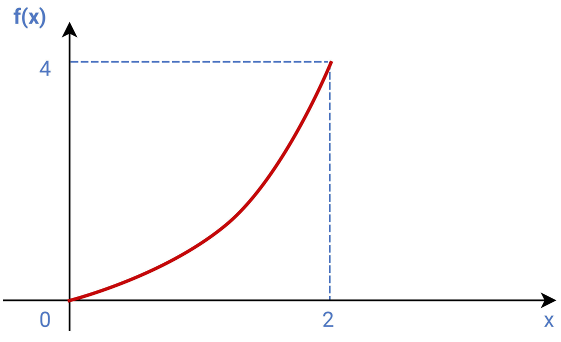
$$V_4 = \int_c^d 2\pi y g\left(y\right) dy = \int_0^4 2\pi y \sqrt{y} dy = \int_0^4 2\pi y^{3/2} dy = 2\pi \left[\frac{2}{5} y^{5/2}\right]_0^4 = \frac{128\pi}{5}$$

Rotacione a tela.

Repare que existe uma relação entre os volumes obtidos.

Se você desenhar o gráfico de $f\left(x\right)$ e observar, os volumes V_1 e V_4 se completam formando um cilindro que foi obtido por uma rotação de um retângulo de lados 2 e 4 em torno do eixo x. Isto é, o cilindro terá raio da base 4 e altura 2, portanto, volume 32π.

Veja que $V_1 + V_4 = 32\pi$.



Igualmente, os volumes V_2 e V_3 se completam formando um cilindro que foi obtido por uma rotação de um retângulo de lados 4 e 2 em torno do eixo y. Isto é, o cilindro terá raio da base 2 e altura 4, portanto, volume 16π. Veja que $V_2 + V_3 = 16\pi$.

Foi visto o volume gerado por uma área definida por uma função, mas caso se deseje volume gerado por áreas entre funções, pode-se usar o conceito de um volume menos o outro, aplicando-se as fórmulas aqui apresentadas para calcular o volume individual para cada função.

Vamos a mais um exemplo:

Determine o volume gerado pela rotação, em torno do eixo x, da área entre as funções $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$ **para** $0 \leq x \leq 1$

Solução:

Para este intervalo, a função $f(x)$ sempre estará acima da função $g(x)$. Portanto, podemos enxergar este volume gerado como a diferença entre o volume gerado pela rotação da área de $f(x)$, com o eixo x, e o volume gerado pela rotação da área gerada por $g(x)$ com o eixo x.

Assim:

$$V_f = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx = \int_0^1 \pi(x)^2 dx = \pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{3}$$

$$e$$

$$V_g = \int_a^b \pi(g(x))^2 dx = \int_0^1 \pi\left(x^2\right)^2 dx = \pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{\pi}{5}$$

Rotacione a tela.

Portanto,

$$V = V_f - V_g = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5} = \frac{5\pi - 3\pi}{15} = \frac{2\pi}{15}$$

Rotacione a tela.

Mão na massa

Questão 1

Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto de pontos formados pela função $f(x) = 2\sqrt{x}$ e o eixo **x**, para $0 \leq x \leq 1$.

A 1

B 2π

C 3π

D 4π

E 0

Parabéns! A alternativa B está correta.

Desejamos, aqui, o volume do sólido gerado por uma área do tipo A em torno do eixo x.

Assim,

$$V = \int_a^b \pi\left(f\left(x\right)\right)^2 dx = \int_0^1 \pi\left(2\sqrt{x}\right)^2 dx = \int_0^1 4\pi x dx = 4\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2\pi$$

Questão 2

Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y, do conjunto de pontos formados pela função $f\left(x\right) = 25x^3$ e o eixo **x**, para $0 \leq x \leq 3$.

A 200π

B 243π

C 2000π

D 2430π

E 234π

Parabéns! A alternativa D está correta.

Assista ao vídeo com a resolução da questão sobre Cálculo de volume de sólido de revolução.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.

Questão 3

Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto de pontos formados pela função $f\left(x\right) = \sqrt[5]{x}$ e o eixo **y**, para $0 \leq x \leq 1$.

A $\frac{\pi}{6}$

B $\frac{\pi}{7}$

C $\frac{2\pi}{7}$

D $\frac{\pi}{2}$

E $\frac{2\pi}{6}$

Parabéns! A alternativa C está correta.

Nessa questão, queremos o volume do sólido gerado por uma área do tipo B em torno do eixo x.

Assim:

$$V = \int_0^1 2\pi y g\left(y\right) dy = \int_0^1 2\pi y y^5 dy = \int_0^1 2\pi y^6 dy = 2\pi \left[\frac{1}{7} y^7 \right]_0^1 = \frac{2\pi}{7}$$

Questão 4

Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, da área existente entre as funções $g\left(x\right) = 8\sqrt{x}$ e $h\left(x\right) = x^2$, para $0 \leq x \leq 2$.

A $\frac{16\pi}{5}$

B $\frac{62\pi}{5}$

C $\frac{128\pi}{5}$

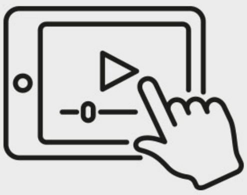
D $\frac{608\pi}{5}$

E $\frac{32\pi}{5}$

Parabéns! A alternativa D está correta.

Assista ao vídeo com a resolução da questão sobre cálculo de volume de sólido de revolução.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Questão 5

Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y, do conjunto de pontos formados pela função $f\left(x\right) = 2$ **arccos** $\left(x\right)$ e o **eixo** y, para $0 \leq x \leq 1$.

A $\frac{\pi^2}{2}$

B $\frac{\pi^2}{4}$

C $2\pi^2$

D π^2

E $3\pi^2$

Parabéns! A alternativa A está correta.

Desejamos, aqui, o volume do sólido gerado por uma área do tipo B em torno do eixo y.

Necessitamos da função $g(y) = f^{-1}(x)$.

Se $f(x) = 2\arccos x \rightarrow g(y) = \cos\left(\frac{y}{2}\right)$

Para

$x = 0 \rightarrow f(0) = c = \pi$ e $x = 1 \rightarrow f(1) = d = 0$

Observe que a função $f(x) = 2\arccos(x)$ é decrescente, assim gerou um $d < c$.

Assim:

$$V = \int_d^c \pi(g(y))^2 dy = \int_0^\pi \pi\left(\cos\left(\frac{y}{2}\right)\right)^2 dy = \int_0^\pi \pi\cos^2\left(\frac{y}{2}\right) dy$$

Usando a relação

$$\cos^2\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{1}{2}\cos y + \frac{1}{2}$$

Assim:

$$V = \int_0^\pi \pi\cos^2\left(\frac{y}{2}\right) dy = \int_0^\pi \frac{\pi}{2}\cos y dy + \int_0^\pi \frac{\pi}{2} dy = \frac{\pi}{2}[\operatorname{sen} y]_0^\pi + \frac{\pi}{2}[y]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}$$

Questão 6

O volume do sólido gerado pela rotação, em torno do **eixo** x, do conjunto de pontos formados pela função $f\left(x\right) = k \ln x$ e o **eixo y**, para $1 \leq x \leq$ e, vale 8π. Determine o valor de k real positivo.

A 1

B 2

C $\frac{1}{2}$

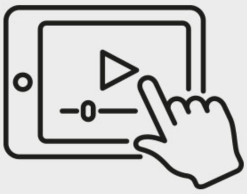
D $\frac{1}{4}$

E $\frac{1}{8}$

Parabéns! A alternativa B está correta.

Assista ao vídeo com a resolução da questão sobre cálculo de volume de sólido de revolução.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Teoria na prática

Determine a fórmula do volume de um elipsoide gerado pela rotação de uma semielipse de **eixo maior 2a** e **eixo menor 2b**. Com **a** e **b** reais positivos.

Mostrar solução

Falta pouco para atingir seus objetivos.

Vamos praticar alguns conceitos?

Questão 1

Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto de pontos formados pela função $f\left(x\right) = 2e^x$ e o eixo x, para $0 \leq x \leq 2$.

A $2\pi\left(e^2 - 1\right)$

B $2\pi\left(e^4 - 1\right)$

C $2\pi e^2$

D $2\pi\left(e^4 + 1\right)$

E $\pi\left(e^4 + 1\right)$ |

Parabéns! A alternativa B está correta.

Desejamos, aqui, o volume do sólido gerado por uma área do tipo A em torno do eixo x.

Assim,

$$V = \int_a^b \pi\left(f\left(x\right)\right)^2 dx = \int_0^2 \pi\left(2e^x\right)^2 dx = \int_0^2 4\pi e^{2x} dx = 4\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^2 = 4\pi\left(\frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}\right)$$

$$V = 2\pi\left(e^4 - 1\right)$$

Questão 2

Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto de pontos formados pela função $f\left(x\right) = x^2 + 1$ e o eixo y, para $0 \leq x \leq 1$.

A $\frac{30\pi}{16}$

B $\frac{16\pi}{15}$

C $\frac{32\pi}{15}$

D $\frac{\pi}{15}$

E $\frac{8\pi}{15}$

Parabéns! A alternativa C está correta.

Desejamos, aqui, o volume do sólido gerado por uma área do tipo B em torno do eixo x.

Necessitamos da função $g\left(y\right) = f^{-1}\left(x\right)$.

Se $f\left(x\right) = x^2 + 1 \rightarrow g\left(y\right) = \sqrt{y-1}$.
Para $x = 0 \rightarrow f\left(0\right) = c = 1$ e $x = 1 \rightarrow f\left(1\right) = d = 2$

Assim:

$V = \int_1^2 2\pi y g\left(y\right) dy = \int_1^2 2\pi y\sqrt{y-1} dy$

Resolver a integral por substituição $u = y - 1 \rightarrow du = dy$

Para $y = 1 \rightarrow u = 0$ e $y = 2 \rightarrow u = 1$

$$V = \int_1^2 2\pi y \sqrt{y-1} dy = \int_0^1 2\pi \left(u+1\right) \sqrt{u} du = 2\pi \int_0^1 \left(u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\right) du$$

$$V = 2\pi \left[\frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 + 2\pi \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = 2\pi \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{3}\right) = \frac{32\pi}{15}$$

Considerações finais

Ao longo deste tema, foi utilizado a integração definida de uma função real na aplicação de cálculos de comprimentos, áreas e volumes.

No primeiro módulo, empregamos a integral na determinação do comprimento do arco de um gráfico de uma função. No segundo, a integral foi usada para calcular áreas entre uma função e o eixo x, entre funções e até mesmo de superfícies de revolução. Por fim, no último módulo, a integração foi aplicada no cálculo de quatro superfícies diferentes de revolução.

Referências

GUIDORIZZI, H. L. **Cálculo**, Volume 1. 5. ed. São Paulo: LTC, 2013. cap. 13, p. 400-416.

HALLET, H. *et al*. **Cálculo, a uma e a várias variáveis**. 5. ed. São Paulo: LTC, 2011. cap. 8, p.353-374.

LARSON, R.; EDWARDS, B. H. **Cálculo, com aplicações**. 6. ed. São Paulo: LTC, 2003. cap. 5, p.359-378.

STEWART, J. **Cálculo**, Volume 1. 5. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2008. cap. 6, p. 434-457, cap. 8, p. 542-556.

THOMAS, G. B. **Cálculo**, Volume 1. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012. cap. 6, p. 351-380.

Explore +

Para saber mais sobre os assuntos tratados neste tema, pesquise na internet sobre aplicação de integração.