Disciplina: Matemática Computacional

Aula 10: Métodos de demonstração

Apresentação

Hoje continuaremos nosso estudo sobre lógica matemática. Até aqui, utilizamos ferramentas bastante úteis para analisar a veracidade de argumentos — tabelas-verdade, regras de inferência ou regras de equivalência. No entanto, quando o número de proposições cresce, a montagem e a análise dos argumentos ficam mais difíceis. E o que fazer nestes casos?

Recomenda-se o emprego de técnicas de demonstração. Conforme discriminado em Brochi (2016), demonstração ou prova é o processo de raciocínio lógico-dedutivo no qual, assumindo-se uma hipótese como verdadeira, deduz-se uma tese (resultado) através do uso de argumentos.

A grande vantagem que temos é a agilidade no processo de validação, que pode ser feita de várias formas — os denominados métodos de demonstração.

Objetivos

- Indicar os principais métodos de demonstração: direta, contradição, condicional e por indução;
- Exemplificar as diversas formas de demonstrar os teoremas;
- Aplicar as técnicas de demonstração em situações-problema típicas de lógica matemática.

Métodos de demonstração

Conforme descrito em Brochi (2016), trata-se das técnicas de prova de teoremas.

1

Teorema

Uma afirmação que pode ser demonstrada como verdadeira, por meio de outras afirmações que já foram provadas, como outros teoremas ou os axiomas.

2

Axíoma

É considerado uma verdade inquestionável e universalmente válida. É, muitas vezes, utilizado como princípio na construção de uma teoria ou como base no processo de argumentação.

Há diversas formas de construção desse processo de argumentação que permitem a prova de um teorema: direta, contradição, condicional e por indução. A partir de agora, começaremos a analisar cada uma delas.

Demonstração por prova direta

Trata-se da técnica de verificação da veracidade de argumentos com base na aplicação de regras de inferência. Conforme descrito em Brochi (2016), considera-se que uma proposição Q é formalmente dedutível do conjunto P de premissas p_1, p_2, ... , p_n se, e somente se, p_1, p_2, ... , p_n, Q for um argumento válido. Se a proposição Q é formalmente dedutível, ela é denominada teorema.

Exemplo

Dadas as premissas:

1) se p = 0 então p = q;

2) se p = q então q = r;

3) p ≠ r,

vamos provar que p ≠ 0.

Em primeiro lugar, vamos escrever as proposições na forma simbólica. Assim, temos as seguintes sentenças:

a: "p ≠ 0";

b: "p = q";

c: "p = r".

Portanto, queremos provar "p" dadas as premissas:

1. ~a → b (premissa)

2. b → c (premissa)

3. ~ c (premissa)

Para tal, podemos empregar a regra de inferência *modus tollens*, conforme explicado a seguir:

4. ~b (*modus tollens* em 2 e 3)

5. a (*modus tollens* em 1 e 4) → ou seja, dadas as premissas indicadas, realmente temos que p ≠ 0.

Exemplo

Vejamos outro caso de emprego, conhecido como o teorema da desigualdade das médias. De acordo com esse teorema, dados p e q como números reais não negativos, temos que:

$\sqrt{pq} \leq p + q\ 2$

Vamos agora demonstrar sua validade empregando a demonstração por prova direta. Para tal, vamos considerar que:

$(p - q)^2 \geq 0$

Expandido o binômio, temos que:

$$p^2 - 2\,pq + q^2 \geq 0$$

Se nós somarmos 4pq aos dois lados, temos que:

$$p^2 + 2pq + q^2 \geq 4pq$$

Fazendo agora a fatoração, você pode perceber que:

$$(p + q)^2 \geq 4pq$$

Ora, se extrairmos a raiz quadrada nos dois lados da inequação anterior, vemos que:

$$(p + q) \geq 2\sqrt{pq}$$

Passando o fator 2 para o outro lado da inequação, chegamos à demonstração esperada, pois vemos que:

$$((p + q))2 \geq \sqrt{pq}$$

Demonstração indireta ou por contradição

Uma forma comum de provar um teorema é assumir que o teorema é falso e então mostrar que tal suposição leva a uma consequência falsa, chamada contradição.

Essa técnica é bastante útil, pois às vezes é mais fácil provar uma afirmação da forma “se H então C” provando-se a afirmação equivalente a partir de sua contradição, ou seja, “se não C então não H”.

Exemplo

Seja U um conjunto infinito, e seja S um subconjunto finito de U. Seja T o complemento de S em relação a U. Então T é infinito.

Para provar esse teorema com base no método da contradição, suponha que T seja finito (ou seja, negamos a tese).

Como sabemos, a partir da definição do complemento de um conjunto complemento, os conjuntos S e T são disjuntos $eU{=}T{\cup}S$. Ora, se os conjuntos T e S são finitos, então seu conjunto-união (que por definição no enunciado é o conjunto-universo U) deve ser finito.

No entanto, por hipótese, U é infinito! Então U seria ao mesmo tempo finito e infinito, o que é um absurdo (uma contradição). Com base nessa análise, vemos que nossa hipótese inicial não pode ser verdadeira e que, portanto, T é infinito — ou seja, provamos a tese.

Exemplo

Dadas as premissas:

- **Prove que, se x^2 é par, então x também é par.**

Para provar esse teorema, vamos considerar as proposições p: “x^2 é par” e q: “x é par”. Nosso objetivo é provar que o condicional “$p \rightarrow q$” é verdadeiro ou que “$p \Rightarrow q$”. Então, pelo método da contradição (também conhecido como redução ao absurdo), vamos supor que q é uma proposição falsa.

Partiremos das premissas “p” e “~q”. A premissa “~q” pode ser escrita como “x não é par” ou, de modo equivalente, “x é ímpar”. Sendo assim, dizemos que existe um inteiro k tal que o número x pode ser escrito na forma $x = 2k + 1$.

Portanto, temos:

- $x^2 = (2k + 1)^2$
- $x^2 = 4k^2 + 4k + 1$
- $x^2 = 2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1$

Agora, considerando um valor c tal que $c = (2k^2 + 2k)$, podemos concluir que c é um número par, pois (2k2 + 2k) são pares. Desse modo, a soma deles também é um número par. Temos então $x^2 = 2c + 1$, o que nos leva a concluir que x^2 é ímpar.

No entanto, essa conclusão contradiz a proposição p: “x^2 é par”. Logo, por redução ao absurdo, concluímos que a proposição ~q: “x é ímpar” é falsa e que, portanto, a proposição q: “x é par” é verdadeira.

Vamos ver um novo exemplo, agora aproveitando o caso estudado quando vimos a demonstração por prova direta.

Exemplo

Vamos utilizar o método de demonstração indireta para provar o teorema da desigualdade das médias.

Conforme vimos, de acordo com esse teorema, dados p e q como números reais não negativos, temos que:

$\sqrt{pq} \leq (p+q)2$

Para tal, vamos considerar que:

$\sqrt{pq} > (p+q)2$

Então, elevando ambas as partes da inequação ao quadrado, temos que:

$$pq > (p^2 + 2pq + q^2)4$$

Multiplicando ambos os termos por 4, vemos que:

$$4pq > p^2 + 2pq + q^2$$

Subtraindo ambos os lados da inequação por 4pq, temos que:

$$0 > p^2 - 2pq + q^2$$

A expressão à direita na inequação anterior representa um produto notável, o qual pode ser expresso como:

$$0 > (p-q)^2$$

Tal conclusão é uma redução ao absurdo, pois não existe um quadrado de um número real que seja negativo. Logo, a hipótese é inválida e provamos que, na verdade,

$$((p+q))2 \geq \sqrt{pq}$$

Comentário

Outra forma indireta de demonstração refere-se a um método aplicável em argumentos cuja conclusão tem a forma condicional "p → q".

Nesse caso, de forma semelhante ao método de demonstração indireta (contradição ou redução ao absurdo), devemos supor que "~(p → q)" verdadeira — ou seja, a negação da conclusão.

Em seguida, partindo das premissas dadas (hipótese) e da premissa provisória, que é a negação da conclusão (tese), devemos aplicar as regras necessárias até se chegar a uma contradição. Dessa forma, concluímos pela veracidade da conclusão.

Exemplo

Para demonstrar a validade do argumento ~p → q, q → ~r,$r \vee s$, ~s → p, precisamos, em primeiro lugar, considerar, além das três premissas originais (~p→q, q →~r e $r \vee s$), uma quarta premissa adicional (~s). Com base nessas quatro premissas, vemos que é possível chegar aos seguintes argumentos:

Ordem	Argumento	Fundamento
1	r	Silogismo disjuntivo de $r \vee s$ e ~s
2	~p → r	Silogismo hipotético de ~p → q e q → ~r
3	r → p	Contraposição do argumento ~p → r
4	p	Modus ponens de r e r → p

Ordem	1
Argumento	r
Fundamento	Silogismo disjuntivo de $r \vee s$ e ~s

Ordem	2
Argumento	~p → r
Fundamento	Silogismo hipotético de ~p → q e q → ~r

Ordem	3
Argumento	r → p
Fundamento	Contraposição do argumento ~p → r

Ordem	4
Argumento	p
Fundamento	Modus ponens de r e r → p

Demonstração por indução

Como última técnica, vemos agora um método de demonstração para provar propriedades que são verdadeiras para um conjunto ordenado de elementos.

Exemplo

Imagine uma longa fila de cartas de baralho dispostas em sequência e considere as duas declarações seguintes como fatos verdadeiros:

1	A primeira carta de baralho da fila cairá;
2	Se uma carta do baralho cair, a próxima carta também cairá.

Note que essas duas afirmações são suficientes para demonstrar que é verdadeira a conclusão “todas as cartas de baralho da fila cairão”, independentemente da quantidade n de cartas.

Essa pequena história traz, apesar de sua simplicidade, a ilustração de um método poderoso de demonstração, cujo emprego é bastante disseminado, sendo utilizadas áreas tão distintas como teoria dos números, geometria, análise combinatória, dentre outras.

Conforme descrito por Dias (2018), se pudermos provar que valem as duas condições...

C1: $P(n0)$ é verdadeira (ou seja, vale a propriedade para n0);

C2: É verdadeira a implicação $P(n) \to P(n + 1)$ para todo $n \geq n0$

... então podemos afirmar que a propriedade $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq n0$.

No uso prático, para provar um teorema por indução (de acordo com esse método, também denominado de princípio de indução finita), devemos assim mostrar que as duas condições do princípio apresentado anteriormente estão satisfeitas. Isso nos garante a validade da propriedade para a infinidade de casos aos quais o teorema faça referência.

No caso da segunda condição, como uma implicação só é falsa se sua premissa for verdadeira e a conclusão falsa, basta excluir essa possibilidade para termos a validade da implicação desejada.

Assim, o que normalmente se faz é tomar um k genérico qualquer maior ou igual a n_0 e, admitindo que $P(k)$ seja verdadeiro, mostrar que necessariamente $P(k + 1)$ também deve ser verdadeiro.

Desse modo, se você fizer também a prova de que vale a propriedade para o primeiro natural n_0, o princípio da indução nos garante a validade da propriedade em todos os casos afirmados.

Ou seja, temos aqui que a aplicação do método de demonstração por indução se baseia em duas etapas: a primeira é denominada base e a segundo passo indutivo.

A base refere-se à etapa em que se mostra que o enunciado (conclusão) vale para $n = 1$. Já o passo de indução é a etapa em que se prova que se o enunciado vale para $n = k$, então vale também para $n = k + 1$.

Exemplo

Vamos demonstrar, por indução, a validade da fórmula abaixo para todo número pertencente ao conjunto dos números naturais.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1)6$$

1. 01
   Em primeiro lugar, é preciso verificar se ela é válida para n = 1:

- $1^2 = 1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)6 = (1 \cdot 2 \cdot 3)6 = 1$

1. 02
   Considere que a fórmula é válida para n = k.

1. 03
   Teste sua validade para n = k + 1

- $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = k(k+1)(2k+1)6 + (k+1)^2$
- $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = (k(k+1)(2k+1) + 6 \cdot (k+1)^2)6$
- $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = (k+1)[k(2k+1) + 6 \cdot (k+1)]6$
- $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = (k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)6$
- $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = (k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]6$

Ou seja, de acordo com o indicado na fórmula. Desse modo, fica demonstrada a validade da fórmula para k + 1.

Atividades

1. Assinale a ÚNICA alternativa que apresenta o conceito definido por “afirmação que pode ser demonstrada como verdadeira, por meio de outras afirmações que já foram provadas”:

a) Teorema
b) Axioma
c) Demonstração
d) Prova
e) Tese

2. Assinale a ÚNICA alternativa que apresenta o conceito definido por “verdade inquestionável e universalmente válida”:

a) Teorema
b) Axioma
c) Demonstração
d) Prova
e) Tese

3. Assinale a ÚNICA alternativa que apresenta o conceito definido por “processo de raciocínio lógico-dedutivo no qual, assumindo-se uma hipótese como verdadeira, deduz-se uma tese (resultado) através do uso de argumentos”:

a) Teorema
b) Axioma
c) Demonstração
d) Hipótese
e) Tese

4. Assinale a ÚNICA alternativa que apresenta corretamente os dois passos do princípio da indução finita:

a) Teorema e axioma
b) Indução e dedução
c) Apresentação e demonstração
d) Base e passo indutivo
e) Hipótese e tese

5. Assinale a ÚNICA alternativa que apresenta o método de demonstração que traz a base para a técnica de demonstração condicional:

a) Demonstração direta
b) Demonstração indireta
c) Demonstração por indução
d) Demonstração por dedução
e) Nenhuma das alternativas anteriores

Notas

Referências

BROCHI, A. L. C. **Matemática aplicada à computação**. Rio de Janeiro: Editora SESES, 2016.

DIAS, D. P. **Indução finita**. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~brolezzi/disciplinas/20141/mat1513/tge.pdf <https://www.ime.usp.br/~brolezzi/disciplinas/20141/mat1513/tge.pdf> . Acesso em: 25 Jan. 2019.

Próximos passos

Explore mais

Não deixe de assistir aos seguintes vídeos:

- Exemplos de demonstração direta <https://www.youtube.com/watch?v=dwaRGU9eXFg> ;
- Métodos de demonstração <https://www.youtube.com/watch?v=hWeVttOXBWA> ;
- Lógica e matemática discreta: Princípio da Indução Finita I <https://www.youtube.com/watch?v=QhoTDQZsfcU> .