1. LOGICA PROPOSICIONAL

Al finalizar el estudio de esté capítulo el estudiante estará en condiciones de:

- Determinar cuándo una expresión es una proposición.
- Identificar claramente el significado de los operadores lógicos.
- Realizar análisis de proposiciones, teniendo en cuenta el significado de los conectivos lógicos y los signos de agrupación.
- Escribir e interpretar el significado de las tablas de verdad de los conectivos lógicos.
- Entender el lenguaje proposicional, de acuerdo a un alfabeto, sintaxis y semántica definidos.
- Transformar una expresión proposicional a su equivalente en notación prefija.
- Construir el árbol de formación de una fórmula proposicional de acuerdo a la precedencia de los operadores.
- Transformar expresiones en lenguaje natural a proposiciones, haciendo uso de los conectivos lógicos.
- Expresar simbólicamente una proposición.

1.1. Introducción

La palabra lógica viene del griego y significa, razón, tratado o ciencia[2]. En matemáticas es la ciencia que estudia los métodos de razonamiento, proporciona reglas y técnicas para determinar si un argumento es válido o no, indica la forma correcta de obtener conclusiones y los métodos adecuados para llegar a ellas. El razonamiento lógico se emplea en las matemáticas y la computación para demostrar teoremas y para resolver una multitud de situaciones problémicas.

En un contexto real, el ser humano en sus actividades cotidianas debe comunicarse, esta comunicación puede realizarse de diversas maneras y con diferentes métodos, una es por medio de un lenguaje natural, el cual puede estar constituido entre otras por frases interrogativas, imperativas y frases declarativas. Sólo a través de estas últimas es posible una descripción del conocimiento. La lógica provee los elementos necesarios para representar el conocimiento a través de métodos de formalización de las frases declarativas.

La lógica por medio de la formalización del lenguaje y de sus reglas básicas proporciona las herramientas necesarias para poder tratar e intentar resolver rigurosamente problemas que tienen sus orígenes y aplicaciones en diferentes áreas de las ciencias.
En este capítulo se trabajará la lógica proposicional desde las frases declarativas simples (enunciados o proposiciones) que son los elementos básicos de transmisión del conocimiento humano. Como se podrá evidenciar las frases interrogativas no denotan hechos y por lo tanto no es posible verificar su veracidad.

A continuación se hace una descripción de los conceptos fundamentales para el desarrollo de este capítulo.

[2] http://www.mitecnologico.com/Main/LogicaIntroduccion

1.2. Proposiciones

Una proposición matemática es un enunciado, frase o expresión que tiene un significado determinado y que mediante un criterio definido puede ser clasificado inequívocamente como verdadero o falso. En lenguajes naturales tales como el español, alemán, inglés, entre otros, las proposiciones no pueden ser imperativas o interrogativas, únicamente pueden ser declarativas.

De acuerdo a lo anterior las siguientes oraciones u enunciados son proposiciones:

- `Los profesores van a la actividad deportiva.`
- `La ciudad está progresando.`
- `Julián es estudiante de Doctorado.`
- `Java es un lenguaje de programación.`
- `5 es un número impar.`
- `9 es un número compuesto.`

La proposición está asociada directamente a su significado, por ejemplo si se tienen las oraciones:

- `Esta llorando el niño`
- `El niño está llorando`

Se tiene en este caso que ambas oraciones tienen el mismo significado y son consideradas como proposiciones iguales, pero las oraciones son diferentes.

Hay oraciones o enunciados que no son proposiciones, teniendo en cuenta que no es posible que se evalúen como verdaderas o falsas ya que su objetivo no es especificar hechos. Ejemplo de enunciado que no son proposiciones pueden ser:

- `¿Quién soy?`
- `¡Hola amigo!`
- `¿Qué hora es?`
- `¡Por favor estudia!`
- `¿Cuál es tu fecha de nacimiento?`

En la lógica proposicional se puede determinar la validez de las expresiones únicamente desde el punto de vista de su estructura, sin tener en cuenta el significado semántico de tales expresiones.

Por ejemplo si se tiene la expresión:

- `Rasputín habita en Armenia.`

En esta expresión no se sabe si `Rasputín` es una persona, es un animal o cualquier otro concepto. Analizando la expresión podemos dar el valor de verdad o falsedad a esta, pero el significado de ella no lo consideraremos relevante, otros ejemplos son:

- `Liliana le dio la vuelta a Argelia.`
- `Los liberales son los ganadores del torneo.`
- `Orlando está de fiesta.`

1.3. Valor de las proposiciones.

Las proposiciones de forma tradicional se representan con letras minúsculas del alfabeto, para nuestro libro se representarán comúnmente con las letras `p, q, r, s, t, ...`, cada una de estas letras recibe el nombre de átomo. La forma de representación para proposiciones será mediante un átomo seguido de : (dos puntos) y posteriormente el enunciado.

p : enunciado o proposición

Los siguientes corresponden a representación de proposiciones según la notación:

- p: Armenia tiene 120 años
- q: Egipto está ubicado en Asia
- r: $7 < 3$
- t: $3x + 4z = 8$
- u: Las leonas no son las campeonas

Cuando se dice que una proposición matemática es verdadera o falsa se establece su valor de verdad, y por lo tanto se le da una interpretación a la proposición. Es por ellos que es común asignar valores de verdad a los enunciados.

La forma en la cual representaremos la interpretación de la proposición cuando se utilicen átomos, será mediante la letra minúscula v seguida de un átomo entre paréntesis y posteriormente la asignación del valor de la verdad.

v(átomo) = valor de verdad

En la lógica proposicional los valores posibles son: Verdadero (V) o Falso (F)

v(átomo) = V

v(átomo) = F

A continuación se muestran ejemplos de asignación de valor a las proposiciones.

p: Todos los números impares son primos v(p)= F, a la proposición p se le asignó el valor de falso.

q: 9 es un número compuesto v(q) = V, a la proposición q se le asignó el valor de verdadero.

r: $2 + 8 \neq 10$ v(r) = F, a la proposición r se le asignó el valor de falso.

s: 19 no es múltiplo de 6 v(s) = V , a la proposición s se le asignó el valor de verdadero.

t: Algunos números son pares v(t) = V, a la proposición t se le asignó el valor de verdadero.

1.4. Negación de una proposición

Negar una proposición matemática es convertirla en falsa, si es verdadera o en verdadera, si es falsa. La negación se puede expresar en lenguaje matemático de formas diferentes, las más comunes son:

- Anteponiendo a una proposición el símbolo: ¬
- Anteponiendo a una proposición el símbolo: ~
- Sobreponiendo el símbolo: ¯ a una proposición.

Para nuestro caso el símbolo que se utilizará para representar la negación es ¬. Algunos ejemplos de frases en las que aparece la negación son los siguientes:

- `No p`
- `Es falso p`
- `No es cierto p`
- `No es el caso p`
- `No se da el caso que p`

La interpretación más común del símbolo ¬ es `no`. Pero llevar esta interpretación al lenguaje natural es más complejo como se muestra en el siguiente caso:

Proposición	Negación de la proposición
El motor esta encendido	No el motor esta encendido

Al observar la negación de la frase, la misma no suena de la mejor manera, por ello es posible para este caso utilizar otras expresiones de lectura de ¬. Por ejemplo sería mejor para la negación de la anterior frase: `El motor no está encendido`.

Por ejemplo si se tiene la expresión: `Todos los futbolistas son disciplinados`, puede negarse de la siguiente manera:

- `No todos los futbolistas son disciplinados`
- `Es falso que todos los futbolistas son disciplinados`
- `No es cierto que todos los futbolistas son disciplinados`
- `No es el caso que todos los futbolistas son disciplinados`
- `Algunos futbolistas no son disciplinados`

El símbolo de la negación (¬) es un operador unario, inicialmente lo aplicaremos a los átomos, pero después se mostrará cómo aplicarlo a una expresión compuesta. A continuación se muestran casos en los cuales se aplica la negación a un enunciado o proposición.

Proposición	Valor	Negación de la proposición	Valor
5 es múltiplo de 8	F	5 no es múltiplo de 8	V
37 es un número primo	V	37 no es número primo	F
5 es mayor que 7	F	5 no es mayor que 7	V
$3 + 7 = 15$	F	$3+7 \neq 15$	V
x es mayor que z	V	x no es mayor que z	F

La forma en la cual se aplicará la negación a los átomos tiene la siguiente representación.

Valor de la proposición	Valor de la negación de la proposición
v(q) = F (se asigna Falso)	v(¬q) = Verdadero (se asigna Verdadero)
v(¬p)= V (se asigna Verdadero)	v(p) = Falso (se asigna Falso)
v(s) = V (se asigna Verdadero)	v(¬s) = Falso (se asigna Falso)

ACTIVIDAD

Determine para las siguientes proposiciones su valor de verdad, escriba la correspondiente negación de la proposición y su valor de verdad.

Proposición	Valor	Negación de la proposición	Valor
28 es un numero perfecto			
32 es el factorial de 6			
21 en serie Fibonacci corresponde al valor 8			
2 es el máximo común divisor entre 26 y 6			

Dadas los siguientes valores de las proposiciones, determine su valor de negación.

Valor de la proposición	Valor de la negación de la proposición
v(¬q) = V	
v(p)= V	
v(¬s) = F	
v(¬¬p) = F	

1.5. Proposiciones simples y compuestas

La lógica estudia fórmulas proposicionales simples o compuestas. Se considera que una proposición en su forma más sencilla, se llama atómica o simple, y una proposición con más de un verbo, o varios sujetos u objetos, se denomina compuesta. Una proposición es simple si expresa una sola idea sobre algo. Las proposiciones simples son aquellas donde no es posible encontrar otras proposiciones.

Ejemplos de proposiciones atómicas o simples:

- p: El cuadrado es un paralelogramo.
- q: María no quiere a Juan.
- r: 7 es un número primo.
- s: Canadá es una ciudad.
- t: 17 no es un número compuesto.
- u: 5 + 3 * 2 < 4 + 15

Las proposiciones compuestas están conformadas de varias proposiciones simples unidas a través de conectores lógicos. Los conectores lógicos más conocidos son: si… entonces…, si y sólo si…, y, o. Un conectivo lógico es por lo tanto, un elemento que permite la unión de proposiciones simples. Una proposición es compuesta si relaciona dos o más proposiciones simples por medio de un conectivo lógico. A continuación se muestran ejemplos de proposiciones compuestas:

- m: 13 es un número impar y 22 es un número par.
- n: 22 es divisible por 2 o por 11.
- o: $x^2 - 16 = 0$ si y sólo si $x = 4$.
- p: El árbol es de color verde o el árbol es de color café.
- q: Mauricio y Martha son mayores de edad.
- r: Mario gana la materia si y sólo si estudia el fin de semana.
- s: La vaca es un animal mamífero y cuadrúpedo.
- t: 18 es múltiplo de 9 y divisor de 54, o 18 es divisible por 3.

Por ejemplo si tenemos las siguientes proposiciones simples:

- o: El carro es costoso.
- p: El repuesto es de color blanco.
- q: El parqueadero es pequeño.
- r: La renta es mensual.

Es posible construir enunciados compuestos que denotan proposiciones más complejas para su análisis. En este caso se utilizarán los conectores lógicos: y, o, si... entonces..., si y sólo si...

- s: El carro es costoso y el repuesto es de color blanco.
- t: La renta es mensual si y sólo si el carro es costoso.
- u: Si el parqueadero es pequeño entonces el carro es costoso.
- v: La renta es mensual o el carro es costoso.

ACTIVIDAD

Dadas las siguientes proposiciones, construya enunciados utilizando los conectores lógicos: y, o, si… entonces…, si y sólo si…

- o: El café es un producto nacional.
- p: Quindío es un departamento de Colombia.
- q: Armenia es la Capital del Quindío.
- r: Armenia tiene un comité de cafeteros.

1.6. Conectivos Lógicos

Las proposiciones compuestas se unen por medio de conectivos lógicos, los cuales son operadores que permiten combinar proposiciones para formar otras proposiciones. Estos operadores que permiten la unión de enunciados o proposiciones se llaman operadores binarios. Las proposiciones compuestas tienen mucha capacidad de expresión dentro de la lógica. A continuación se muestran los principales conectivos lógicos.

Nombre	Conectivo lógico	Símbolo
Conjunción	y	^
Disyunción Inclusiva	o	$\vee$
Disyunción Exclusiva	o	$\underline{\vee}$
Condicional	si... entonces	$\rightarrow$
Bicondicional	si y sólo si	$\leftrightarrow$

A continuación se hará un análisis de cada uno de los conectivos lógicos.

1.6.1. Conjunción

De acuerdo a la anterior tabla, el conectivo lógico conjunción se representa mediante el símbolo ^. Sean p y q dos proposiciones, entonces la proposición p ^ q es llamada la conjunción entre la proposición p y la proposición q. Algunas frases en las que aparece la conjunción son los siguientes:

- p y q
- p pero q
- p aunque q
- p sin embargo q
- p no obstante q
- p a pesar de q
- p a menos q
- p igualmente q

La proposición p ^ q es verdadera únicamente cuando p es verdadera y q es verdadera, es decir, cuando ambas proposiciones son verdaderas a la vez. Algunos ejemplos de representación en lenguaje natural en los cuales se utiliza la conjunción son los siguientes:

- En Haití hay inflación y no hay crecimiento económico.
- El gobernador tiene buenas intenciones sin embargo no tiene presupuesto.
- La oferta es alta no obstante la demanda es muy poca.
- El Barcelona ganó a pesar de la poca asistencia de hinchas.
- Aunque está nevando es posible conducir.
- Está nevando pero es posible navegar.

En el idioma español, se utilizan métodos abreviados que es necesario dentro de las afirmaciones lógicas puntualizar, por ejemplo en el caso de la siguiente proposición:

- `Felipe y Andrea van a viajar a Medellín`

Se entiende realmente como:

- `Felipe va a viajar a Medellín`
- `Andrea va a viajar a Medellín`

En lógica cada afirmación debe tener su propio sujeto y su propio predicado[3]. En este caso se recomienda entonces transformar la proposición a dos proposiciones.

A continuación se muestran pares de proposiciones y se analizará su valor de verdad, recordando que la conjunción es cierta únicamente cuando ambos enunciados lo son.

t: 2 es un número par (V)
s: 2 es un número primo (V)
La conjunción de t con s es: $t \wedge s$, 2 es un número par y primo
Entonces como t y s son verdaderas, la conjunción es verdadera

w: $8 = 15 - 7$ (V)
r: $-4 > 0$ (F)
La conjunción es: $r \wedge w$, $8 = 15 - 7$ y $-4 > 0$
Entonces como w es verdadera y r es falsa, por lo tanto la conjunción es falsa.

p: $x \times 0 = x$ (F)
q: $x + 1 = x$ (F)
La conjunción de p con q es: $p \wedge q$, $x \times 0 = x \wedge x + 1 = x$
Entonces como p y q son falsas, la conjunción es falsa.

Un aspecto fundamental es la representación de proposiciones utilizando átomos unidos a través de conectivos lógicos. Por ejemplo si se tiene la expresión $p \wedge q$, se puede dar una interpretación arbitraria a cada uno de los átomos que componen la expresión de la siguiente manera:

- $v(p) = V$
- $v(q) = F$,

Entonces $v(p \wedge q) = F$, dado que al menos una de las interpretaciones es falsa.

A continuación se darán unas fórmulas proposicionales, se asignarán interpretaciones arbitrarias a los átomos y finalmente se dará el resultado de la evaluación de la proposición.

Proposición	Interpretación	Evaluación Proposición
$(p \wedge \neg q)$	$v(p) = F$, $v(\neg q) = V$	$v(p \wedge \neg q) = F$
$(p \wedge s)$	$v(p) = V$, $v(s) = V$	$v(p \wedge s) = V$
$(p \wedge q)$	$v(p) = F$, $v(q) = F$	$v(p \wedge q) = F$
$(\neg q \wedge q)$	$v(\neg p) = V$, $v(q) = F$	$v(\neg q \wedge q) = F$
$\neg(p \wedge \neg q \wedge r)$	$v(p) = V$, $v(\neg q) = V$, $v(r) = F$	$v\ \neg(p \wedge \neg q \wedge r) = V$

[3] http://www.fceia.unr.edu.ar/~iilcc/libro/PDF/capítulo05_nuevo.pdf. Silvia Bianchi. El predicado expresa propiedades y relaciones entre objetos.

Para el caso de la proposición: ¬(p ^ ¬q ^ r), de acuerdo con los valores de interpretación de cada uno de los átomos, se tiene que (p ^ ¬q ^ r) evalúa como falsa la expresión, pero teniendo en cuenta que a la misma le antepone el operador ¬, la expresión entonces se queda evaluada como verdadera.

ACTIVIDAD

Dadas las siguientes proposiciones, defina una interpretación para cada uno de los átomos y evalúe cada proposición.

Proposición	Interpretación	Evaluación Proposición
¬(p ^ ¬q)		
¬(p ^ ¬q ^ r)		
(p ^ q ^ r)		
((¬p ^ q) ^ p)		

1.6.2. Disyunción Inclusiva

El conectivo lógico que representa la disyunción inclusiva es el símbolo v. La proposición p v q es llamada la disyunción inclusiva entre las proposiciones p y q. Se considera la proposición p v q falsa, únicamente cuando la proposición p y la proposición q son falsas a la vez.

Algunas frases en las que aparece la disyunción son los siguientes:

- p o q
- p o q o ambos
- al menos p o q
- mínimo p o q

Algunas frases de representación en lenguaje natural en los cuales se utiliza la disyunción son las siguientes:

- El parcial estaba difícil o mal redactado
- Hizo frío o la persona es nerviosa.
- El Quindío es grande o había demasiado tráfico.
- Para pagar el crédito al menos se debe tener cuenta corriente o cuenta de ahorros.

A continuación se muestran pares de proposiciones y se analizará su valor de verdad, recordando que la disyunción inclusiva es falsa únicamente cuando ambos enunciados lo son.

> r: 2 es un número primo (V)
> s: 2 es un número positivo (V)
> La disyunción de r con s es: r v s, 2 es un número primo o positivo.
> Entonces como r y s son verdaderas, la disyunción inclusiva es verdadera.

t: 2 + 8 ≠ 10 (F) q: 5 + 3 ≤ 2 (F) La disyunción de t con q es: t v q : 2 + 8 ≠ 10 o 5 + 3 ≤ 2 Entonces como t y q son falsas, la disyunción inclusiva es falsa.

u: El triángulo tiene tres lados. (V) w: El rectángulo es un pentágono. (F) La disyunción de u con w es: u v w, el triángulo tiene tres lados o el rectángulo es un pentágono. Entonces como u es verdadera y w es falsa, la disyunción inclusiva es verdadera.

A continuación se darán unas fórmulas proposicionales y se asignaran interpretaciones arbitrarias a los átomos. El operador que se utilizará es el de la disyunción.

Proposición	Interpretación	Evaluación proposición
(¬p v ¬q)	v(¬p) = F, v(¬q) = V	v(¬p v ¬q) = V
(p v s)	v(p) = V , v(p) = V	v(p v s) = V
(p v q v r)	v(p) = F , v(p) = F, v(r) = F	v(p v q v r) = F
(p v q v r)	v(p) = F , v(p) = F, v(r) = F	v¬(p v q v r) = V

ACTIVIDAD

Dadas las siguientes proposiciones, defina una interpretación para cada uno de los átomos y evalúe mediante su valor cada una de ellas.

Proposición	Interpretación	Evaluación Proposición
¬(¬p v ¬q)		
¬(p v q v ¬r)		
(p v q v r)		

1.6.3. Disyunción Exclusiva

El conectivo lógico que representa la disyunción inclusiva es el símbolo $\underline{v}$. La proposición p $\underline{v}$ q se denomina la disyunción exclusiva, p $\underline{v}$ q es verdadera, únicamente cuando una de las dos proposiciones es verdadera, pero no ambas a la vez:

Algunos ejemplos de representación en lenguaje natural en los cuales se utiliza la disyunción exclusiva son los siguientes:

- Hoy voy a cine o voy a jugar futbol.
- La tesis es laureada o meritoria.
- El mes en que se debe pagar impuesto es noviembre o diciembre.
- El rector se elige por consulta popular o por una comisión del Consejo

La disyunción se usa en un contexto de exclusividad, por ejemplo la oración:

- Javier puede comprar el tiquete para viajar el 10 de marzo a Santa Marta o para Ciudad de Panamá

Se puede interpretar que Javier o compra el tiquete para viajar a Santa Marta o para viajar a Ciudad de Panamá, pero no ambas.

A continuación se muestran pares de proposiciones y se analizará su valor de verdad.

p: 2 es un número par. (V)
q: 2 es un número impar. (F)
La disyunción de p con q es: p $\underline{v}$ q, 2 es un número par o impar.
Entonces como p es verdadera y q es falsa, la disyunción exclusiva es verdadera

t: 15 es un número primo. (F)
w: 15 es un número compuesto. (V)
La disyunción de t con w es: t $\underline{v}$ w, 15 es un número primo o 15 es un número compuesto.
Entonces como t es falsa y w es verdadera, la disyunción exclusiva es verdadera

A continuación se darán unas fórmulas proposicionales y se asignarán interpretaciones arbitrarias a los átomos.

Proposición	Interpretación	Evaluación proposición
(¬p $\underline{v}$ ¬q)	v(¬p) = F, v(¬q) = V	v(¬p $\underline{v}$ ¬q)= V
(p $\underline{v}$ q)	v(p) = F, v(¬q) = F	v(p $\underline{v}$ q)= F
(p $\underline{v}$ q)	v(p) = V, v(¬q) = V	v(p $\underline{v}$ q) = V
¬ (p $\underline{v}$ q)	v(p) = V, v(¬q) = V	v¬(p $\underline{v}$ q) = F

Después de analizar tanto la disyunción inclusiva como la disyunción exclusiva, se puede afirmar que no es una tarea sencilla definir si una oración es inclusiva o exclusiva. Existen casos en los cuales es sencillo identificar cuando una oración se interpreta de forma exclusiva, como por ejemplo en "el niño está despierto o está dormido". Existen casos en los cuales una oración se interpreta de forma inclusiva, por ejemplo "Quindío es más pequeño en extensión que Amazonas o Guaviare".

ACTIVIDAD

Dadas las siguientes proposiciones, defina una interpretación para cada uno de los átomos y evalúe mediante su operador cada una de ellas.

Proposición	Interpretación	Evaluación proposición
(¬p $\underline{v}$ q $\underline{v}$ s)		
(¬p $\underline{v}$ q)		
¬(p $\underline{v}$ q $\underline{v}$ r)		
¬(¬p $\underline{v}$ ¬q $\underline{v}$ r)		

1.6.4. Condicional

El conectivo lógico que representa la disyunción inclusiva es el símbolo $\rightarrow$. Sea p y q dos proposiciones: entonces la proposición, si p entonces q, se representa mediante $p \rightarrow q$. La proposición $p \rightarrow q$ es falsa si la primera proposición (antecedente) es verdadera y la segunda proposición (consecuente) es falsa. Algunos ejemplos de representación en lenguaje natural en los cuales se utiliza el condicional son los siguientes:

- Si p entonces q
- p implica q
- p sólo si q
- q si p
- p es suficiente para q
- Para q es suficiente p
- No p a menos que q
- q cuando p
- q es necesario para p
- Para p es necesario q
- p en consecuencia q
- p se deduce q
- p por ende q

Algunos ejemplos en lenguaje natural son los siguientes:

- Si el sol esta brillando entonces se puede hacer deporte.
- Si Pedro es matemático entonces calcula.
- Si un número es par entonces es divisible por 2.
- Si un número tiene dos divisores es suficiente para que sea primo.
- Un número es divisible por 5 cuando termina en 0 o en 5.
- Hoy es lunes y por ende hay pico y placa para mi carro.
- José perdió la materia en consecuencia perdió el semestre.

En el condicional si el antecedente es verdadero, su valor de verdad es igual al valor de verdad de su consecuente. Si el antecedente es falso, entonces el condicional es verdadero. Por ejemplo la oración:

- Si el Barcelona gana, el número de socios se incrementa

En este caso si es verdad que el Barcelona gana, entonces la oración "Si el Barcelona gana, el número de socios se incrementa", es verdadera si y solo si se incrementa el número de socios. Si el caso fuera que en Barcelona no gana, entonces la oración "Si el Barcelona gana, el número de socios se incrementa" es verdadero ya que su antecedente es falso.

A continuación se muestran pares de proposiciones y se analizará su valor de verdad, recordando que el condicional es falso únicamente el antecedente es verdadero y el consecuente es falso.

`p: 5 + 5 = 10 (V)`
`q: 5 × 2 = 10 (V)`
El condicional de `p → q es: Si 5 + 5 = 10 entonces 5 × 2 = 10`
Entonces como `p` y `q` son verdaderas, el condicional es verdadero

`w: 8 es un número par (V)`
`z: 8 no es divisible por 2 (F)`
El condicional de `w → z` es: Si 8 es un número par entonces no es divisible por 2
Entonces como `w` es verdadera y `z` es falsa, el condicional es falso

A continuación se darán unas fórmulas proposicionales y se asignaran interpretaciones arbitrarias a los átomos. El operador que se utilizará es el condicional.

Proposición	Interpretación	Evaluación proposición
(¬q → p)	v(¬q) = F, v(p) = V	v(¬q → p) = V
(p → s)	v(p) = V , v(s) = F	v(p → s) = F
¬(p → q)	v(p) = V , v(q) = F	v¬(p → q)= V
(p → s) → q	v(p) = V , v(s) = F, v(s) = F	v(p → s) → q = F

ACTIVIDAD

Dadas las siguientes proposiciones, defina una interpretación para cada uno de los átomos y evalúe mediante su valor cada proposición.

Proposición	Interpretación	Evaluación proposición
¬¬(¬q → p)		
¬(¬p → ¬s)		
¬(p → q) → ¬r		
(p→s) → (q→r)		
¬(p→s) → ¬(q→r)		

1.6.5. Bicondicional

El conectivo lógico que representa la disyunción inclusiva es el símbolo ↔. Sean `p` y `q` dos proposiciones, la proposición `p` si y sólo si `q`, se representa `p ↔ q`. El bicondicional es verdadero únicamente cuando tanto `p` como `q` tienen los mismos valores de verdad.

Algunos ejemplos de representación en lenguaje natural en los cuales se utiliza el bicondicional son los siguientes:

- `p si y sólo si q`
- `p es necesario y suficiente para q`
- `p es equivalente a q`
- `p cuando y sólo cuando q`
- `p entonces y sólo entonces q`

La proposición $p \leftrightarrow q$ es verdadera sólo cuando las dos proposiciones son ambas verdaderas o falsas.

Algunos ejemplos en lenguaje natural en el cual se tiene un condicional son los siguientes:

- Juan ve si y sólo si no es ciego
- 5 + 5 = 10 si y sólo si 5 × 2 = 10
- 28 es par si y sólo si es divisible por 2
- Un número es compuesto si y sólo si tiene más de dos divisores
- Un número es divisible por 3 si y sólo si al sumar sus cifras el resultado es múltiplo de 3

A continuación se muestran pares de proposiciones y se analizará su valor de verdad, recordando que el bicondicional es verdadero únicamente cuando las proposiciones tienen el mismo valor de verdad.

p: 10 no es número par (F)
q: 10 >= 8 (V)
El bicondicional de $p \leftrightarrow q$ es falso, teniendo en cuenta que p es falso y q es verdadero.

q: 28 es un numero perfecto (V)
r: 28 no es un número impar (V)
El bicondicional de $q \leftrightarrow r$ es verdadero, teniendo en cuenta que q es verdadero y r es verdadero.

A continuación se darán unas fórmulas proposicionales y se asignaran interpretaciones arbitrarias a los átomos. El operador que se utilizará es el condicional.

Proposición	**Interpretación**	**Evaluación proposición**
$(\neg q \leftrightarrow p)$	$v(\neg q) = F$, $v(p) = F$	$v(\neg q \leftrightarrow p) = T$
$(p \leftrightarrow s)$	$v(p) = V$, $v(s) = F$	$v(p \leftrightarrow s) = F$
$\neg\ (p \leftrightarrow s)$	$v(p) = F$, $v(s) = V$	$v(p \leftrightarrow s) = V$
$\neg\neg(p \leftrightarrow \neg q)$	$v(p) = V$, $v(\neg q) = F$	$v(p \leftrightarrow s) = F$

ACTIVIDAD

Dadas las siguientes proposiciones, defina una interpretación para cada uno de los átomos y evalúe mediante su valor de verdad, cada proposición.

Proposición	**Interpretación**	**Evaluación proposición**
$\neg(\neg q \leftrightarrow s)$		
$\neg(p \leftrightarrow \neg s)$		
$(\neg p \leftrightarrow \neg\neg s)$		
$\neg\neg(\neg p \leftrightarrow \neg q)$		
$(\neg q \leftrightarrow s) \leftrightarrow p$		

1.7. Tablas de Verdad

Un método para analizar los valores de certeza de las proposiciones es el de poner todas las posibilidades de certeza o falsedad en forma de una tabla, estas tablas básicas indican si una proposición molecular es verdadera o falsa y de esta forma analizar cada una de las posibilidades que aparecen en ella. Este algoritmo es llamado el método de las tablas de verdad porque puede ser ordenado en forma tabular y se considera ineficiente comparado con otros métodos que permiten analizar las fórmulas proposicionales. Otros métodos más eficientes serán posteriormente analizados en este libro.

El primer paso en la construcción de una tabla de verdad para una fórmula es conocer cuántas posibles combinaciones de la fórmula hay, es decir, en cuántas formas diferentes pueden combinarse los valores de verdad asignados a las fórmulas atómicas que las componen. Si `p` es una fórmula atómica, `p` sólo tiene dos combinaciones posibles `(V) o (F)`. Si `p` tiene dos fórmulas atómicas, existen cuatro combinaciones posibles. Si `p` tiene tres fórmulas atómicas, sus valores de verdad se pueden combinar de ocho formas diferentes, y así sucesivamente. Así si `p` tiene n fórmulas atómicas, habrá 2^n combinaciones posibles.

Se dan a continuación las tablas básicas de verdad para los cinco conectores lógicos de enlace de proposiciones explicados en la anterior sección.

1.7.1. Tabla de verdad de la conjunción.

Para comprender las combinaciones de la tabla de verdad de la conjunción comencemos con el siguiente estudio de caso:

- `Marina cocina arroz con coco.`

Pueden suceder entonces las siguientes combinaciones:

1. `Que Marina tenga el arroz y tenga el coco.`
2. `Que Marina tenga el arroz y no tenga el coco.`
3. `Que Marina no tenga el arroz y tenga el coco.`
4. `Que Marina no tenga el arroz y no tenga el coco.`

¿En cuál de los casos Marina puede preparar arroz con coco?

Como podemos observar sólo en la primera combinación, puesto que se tiene tanto el arroz como el coco. En los otros casos no podrá preparar arroz con coco. Representemos las anteriores combinaciones mediante una tabla de verdad:

p	**q**	**p ^ q**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Podemos concluir que la conjunción es verdadera si las dos proposiciones simples que la conforman son verdaderas. La conjunción es equivalente a la intersección de dos conjuntos, además debe cumplir con la propiedad conmutativa y asociativa.

ACTIVIDAD

Complete la tabla de verdad para la siguiente fórmula proposicional: $(\neg p \wedge \neg q) \wedge r$

p	q	r	¬p	¬q	(¬p ^ ¬q)	(¬p ^ ¬q) ^ r
V	V	V				
V	V	F				
V	F	V				
V	F	F				
F	V	V				
F	V	F				
F	F	V				
F	F	F				

1.7.2. Tabla de verdad de la disyunción inclusiva.

Para comprender las combinaciones de la tabla de verdad de la conjunción comencemos con el siguiente estudio de caso:

- En una oferta de empleo se anuncia que se necesita un administrador para servicios profesionales que tenga experiencia o empresa propia.

Pueden darse cuatro posibilidades:

1. Tiene experiencia o empresa propia.
2. Tiene experiencia o no tiene empresa propia.
3. No tiene experiencia o tiene empresa propia
4. No tiene experiencia o no tiene experiencia propia.

Ahora preguntémonos ¿cuándo es aceptado el administrador?

En el primer caso el administrador es aceptado porque dispone tanto de experiencia como de empresa propia. En los casos 2 y 3 también es aceptado porque dispone de al menos una de las dos. Sólo en el caso 4 el administrador no es aceptado porque no dispone de ninguno de los dos requerimientos solicitados en la oferta de empleo.

Representemos las anteriores combinaciones mediante una tabla de verdad:

p	**q**	**p v q**
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Podemos concluir que la disyunción inclusiva es falsa si las dos proposiciones simples que la conforman son falsas. La disyunción ofrece la alternativa tanto que sea una proposición o la otra como que se sean ambas proposiciones. Es equivalente a la operación de unión de dos conjuntos.

ACTIVIDAD

Complete la tabla de verdad para la siguiente fórmula proposicional: (p v ¬q) ^ ¬r

p	q	r	¬q	¬r	(p v ¬q)	(p v ¬q) ^ ¬r
V	V	V				
V	V	F				
V	F	V				
V	F	F				
F	V	V				
F	V	F				
F	F	V				
F	F	F				

1.7.3. Tabla de verdad de la disyunción exclusiva.

Para comprender las combinaciones de la tabla de verdad de la disyunción exclusiva comencemos con el siguiente estudio de caso:

- Un comprador necesita que le asignen un número de tarjeta del almacén, este le asignará un número de tarjeta que termine en número par o número impar.

Pueden darse cuatro posibilidades:

1. Que el número de tarjeta termine en par o termine impar.
2. Que el número de tarjeta termine en par o no termine en impar.
3. Que el número de tarjeta no termine en par o termine en impar.
4. Que el número de tarjeta no termine en par o no termine en impar.

El primer caso no es posible porque no pueden ocurrir a la vez ambas situaciones. Los casos 2 y 3 pueden ocurrir, ya que sólo se puede asignar al final un número par o impar. El caso 4 no es posible que ocurran ambas situaciones a la vez.

Representemos las anteriores combinaciones mediante una tabla de verdad:

p	**q**	**p $\underline{v}$ q**
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Podemos concluir que la disyunción exclusiva es verdadera sólo si una de las dos proposiciones simples que la conforman es verdadera. No pueden ocurrir ambas proposiciones al mismo tiempo.

ACTIVIDAD

Complete la tabla de verdad para la siguiente fórmula proposicional: $\neg(\neg p \underline{\vee} q) \vee \neg r$

p	q	r	¬p	¬r	$\neg(\neg p \underline{\vee} q)$	$\neg(\neg p \underline{\vee} q) \vee \neg r$
V	V	V				
V	V	F				
V	F	V				
V	F	F				
F	V	V				
F	V	F				
F	F	V				
F	F	F				

1.7.4. Tabla de verdad del condicional

Para comprender las combinaciones de la tabla de verdad del condicional comencemos con el siguiente estudio de caso:

- `Si Andrea es Ingeniera Civil entonces diseña puentes.`

Puede suceder que:

- `Andrea es Ingeniera Civil, entonces diseña puentes.`
- `Andrea es Ingeniera Civil, entonces no diseña puentes.`
- `Andrea es no es Ingeniera Civil, entonces diseña puentes.`
- `Andrea es no es Ingeniera Civil, entonces no diseña puentes.`

Analicemos cada una de las siguientes posibilidades:

- En el caso 1, si `Andrea es Ingeniera Civil, entonces diseña puentes.` Esta afirmación es verdadera.
- En el caso 2, si `Andrea es Ingeniera Civil, entonces no diseña puentes.` Esta afirmación es falsa porque para ser Ingeniero civil, es necesario que diseñe puentes.
- En el caso 3, si `Andrea es no es Ingeniera Civil, entonces diseña puentes`. Esta afirmación es verdadera porque alguien puede diseñar puentes sin ser Ingeniero civil.
- En el caso 4, si `Andrea es no es Ingeniera Civil, entonces no diseña puentes`. Esta afirmación es verdadera por deducción directa.

Representemos las anteriores combinaciones mediante una tabla de verdad:

p	**q**	**p → q**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Existen diferentes formas de representar la conectiva condicional. Analizaremos la forma directa y la forma reciproca.

La forma directa tiene la estructura $p \rightarrow q$, en este caso se tiene primero el antecedente y luego el consecuente. Por ejemplo las expresiones tienen la forma directa:

- El Barcelona gana todos los partidos, por lo tanto es el líder.
- Estamos en invierno, en consecuencia hace frio.
- Ganó el parcial, se deduce que estudió.

La forma recíproca tiene la estructura $q \rightarrow p$, se invierte el antecedente y el consecuente. Por ejemplo las expresiones tienen la forma recíproca.

- Se terminó el partido puesto que no paro la lluvia.
- Ganaré el concurso si cumplo con todos los requisitos

ACTIVIDAD

Complete la tabla de verdad para la siguiente fórmula proposicional: $(\neg p \rightarrow r) \ \underline{\vee} \ \neg q$

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p \rightarrow r)$	$(\neg p \rightarrow r) \ \underline{\vee} \ \neg q$
V	V	V				
V	V	F				
V	F	V				
V	F	F				
F	V	V				
F	V	F				
F	F	V				
F	F	F				

1.7.5. Tabla de verdad del bicondicional

Para comprender las combinaciones de la tabla de verdad del bicondicional comencemos con el siguiente caso. En la siguiente expresión:

- Un número es compuesto si y sólo si tiene más de dos divisores.

Puede suceder que: Para que un número sea compuesto es necesario que tenga más de dos divisores, y es suficiente que tenga más de dos divisores para que sea compuesto, por lo tanto el bicondicional es verdadero cuando las dos proposiciones que lo conforman son verdaderas.

Por otro lado, si un número no es compuesto es porque no tiene más de dos divisores, y es suficiente que no tenga más de dos divisores para que no sea compuesto, por lo tanto bicondicional es verdadero cuando las dos proposiciones que lo conforman son falsas.

Representemos las anteriores combinaciones mediante una tabla de verdad:

p	q	p ↔ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Podemos concluir que el bicondicional tiene valor de verdad verdadero cuando ambas proposiciones que lo conforman tienen el mismo valor de verdad.

ACTIVIDAD

Complete la tabla de verdad para la siguiente fórmula proposicional: $(\neg p \leftrightarrow r) \rightarrow \neg q$

p	Q	r	¬p	¬q	¬(¬p ↔ r)	(¬p ↔ r) → ¬q
V	V	V				
V	V	F				
V	F	V				
V	F	F				
F	V	V				
F	V	F				
F	F	V				
F	F	F				

Complete la tabla de verdad y deducir la fórmula que genera dicha tabla. La fórmula se debe escribir en la última columna de la primera fila.

p	q	R	¬p	(¬p $\underline{v}$ q)	(¬p $\underline{v}$ q) ↔ r	
V	V	V	F			V
V	V	F	F			V
V	F	V	F			F
V	F	F	F			F
F	V	V	V			V
F	V	F	V			V
F	F	V	V			F
F	F	F	V			F

1.8. Lenguaje de la lógica proposicional

En este punto ya hemos revisado como se representan las proposiciones, sus valores de verdad, los operadores lógicos y su relación con las proposiciones. Es por ello que es necesario formalizar el alfabeto, la sintaxis y la semántica de la lógica proposicional.

La correcta especificación de los anteriores elementos, permitirá trabajar con un lenguaje que esté libre de ambigüedades, esto teniendo en cuenta que cuando se usa el lenguaje natural es posible entrar en confusiones de interpretación.

1.8.1. Alfabeto de la lógica proposicional

Un alfabeto es un conjunto de símbolos que permite la construcción de expresiones más complejas. El alfabeto estará constituido por los siguientes símbolos:

1. Letras proposicionales: p, q, r , s …
2. Operadores lógicos: unarios ¬, binarios v , ^, →, ↔
3. Símbolos de asociación: paréntesis izquierdo'(' y derecho ')'
4. Valores de verdad: Verdadero (V), Falso (F).

1.8.2. Sintaxis de la lógica proposicional

Para la correcta estructuración de frases en el lenguaje proposicional, es necesario establecer una serie de reglas de formación, las cuales constituirán fórmulas bien formadas para este contexto.

1. Letras proposicionales: p, q, r, s …, pertenecen al lenguaje.
2. Siendo A y B fórmulas atómicas y/o fórmulas compuestas que pertenecen al lenguaje:(A),(B),(¬A),(¬B),(AvB),(A^B),(A→B),(A↔B) también pertenecen al lenguaje.

Ejemplos de fórmulas bien formadas son los siguientes:

- q
- (¬p)
- ((¬p v p) v (¬p))
- (¬p ^ ¬q)
- ¬ (¬p v ¬q) → (¬r ↔ ¬s)

Ejemplos de fórmulas mal formadas son los siguientes:

- q¬
- p ^ ¬q)
- ¬ ((¬p v ¬q) → (¬r ↔ ¬s
- ¬p v v p
- ↔ → (¬r ↔ ¬s)

1.8.3. Semántica de la lógica proposicional

Cuando se encuentren correctamente estructuradas las fórmulas proposicionales de acuerdo a la sintaxis, es posible entonces atribuir valores (verdadero o falso) que permitan dar un significado a tales fórmulas. Cuando se asignan los valores a cada uno de los átomos que conforman la fórmula A, se está dando una interpretación a A en términos de la función:

v: {p, q, ...} ↔ {V, F}

Por ejemplo si se tiene la fórmula A:(p v q), con v(p)= T y v(q)= F, es una interpretación para A dado que v asigna valores para cada uno de los átomos, entonces v(A)= T.

1.9. Precedencia de los conectivos lógicos

En ocasiones las fórmulas proposicionales pueden ser escritas con paréntesis que pueden ser considerados como innecesarios, por ejemplo la expresión $(\neg p \vee \neg q)$ contiene paréntesis y podría ser escrita $\neg p \vee \neg q$.

Con el objetivo de evitar las ambigüedades en la interpretación de las fórmulas proposicionales, se debe establecer un orden de precedencia para aplicar los operadores de una fórmula proposicional.

El siguiente será el orden en el cual se aplicará la precedencia de los conectivos lógicos:

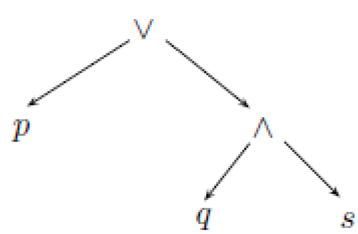
1. Operador de negación $\neg$
2. Operador de conjunción $\wedge$
3. Operador de disyunción $\vee$
4. Operador condicional $\rightarrow$
5. Operador bicondicional $\leftrightarrow$

De acuerdo a lo anterior el operador unario $\neg$ tiene la prioridad más alta. Por ejemplo si se tiene la fórmula $\neg p \rightarrow q$, debe ser entendida como $(\neg p) \rightarrow q$ y no como $\neg (p \rightarrow q)$. Para el caso de los operadores binarios $\wedge$ tiene mayor prioridad seguido de v, $\rightarrow$ y finalmente $\leftrightarrow$. Por ejemplo la expresión $\neg p \vee q \wedge r$, se debe entender como $\neg p \vee (q \wedge r)$.

Cuando se tengan expresiones con operadores que tengan el mismo orden de precedencia, estos se aplicarán de izquierda a derecha. Si no se establece esta prioridad de los operadores, es muy posible generar más de una interpretación para alguna fórmula proposicional.

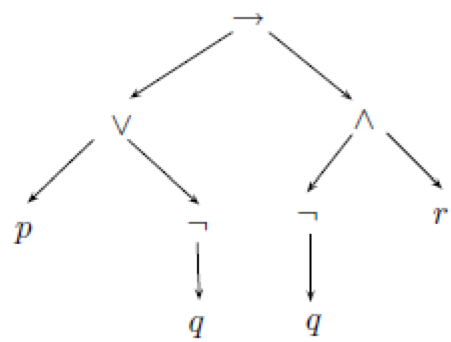
La representación de fórmulas proposicionales mediante árboles de formación, es otra alternativa para entender la precedencia de los operadores y permitirá evitar la ambigüedad de acuerdo al orden establecido.

Por ejemplo si se tiene la expresión: $(p \vee q) \wedge s$, el árbol de representación será el siguiente.



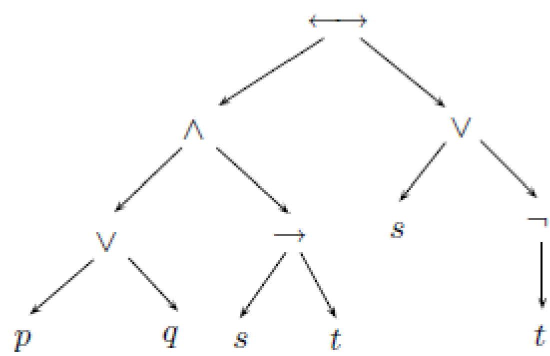
Es de anotar en este caso que la expresión esta previamente con paréntesis y en estos casos se debe primero representar la subexpresión que está dentro de ellos.

Por ejemplo si se tiene la expresión: $(p \vee \neg q) \rightarrow (\neg q \wedge r)$, el árbol de representación será el siguiente:



En este caso el operador principal de la expresión es la implicación y por ello se ubica como el padre del árbol, este árbol tiene dos subexpresiones que se pueden denominar hijo izquierdo e hijo derecho, cada uno de los cuales se compone de una expresión.

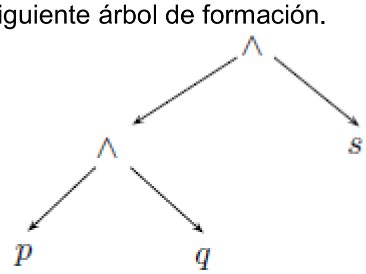
La expresión: ((p v q) ^ (s→t)) ↔ (s v ¬t), tiene el siguiente árbol de representación:



En este caso el operador principal de la expresión es él bicondicional y por ello se ubica como el padre del árbol, este árbol tiene dos subexpresiones que se pueden denominar hijo izquierdo e hijo derecho, cada uno de los cuales se compone de una expresión. El hijo izquierdo tiene a su vez una expresión compuesta de hijo izquierdo e hijo derecho, cuyo operador principal es la conjunción. El hijo derecho tiene como operador principal es la disyunción.

ACTIVIDAD

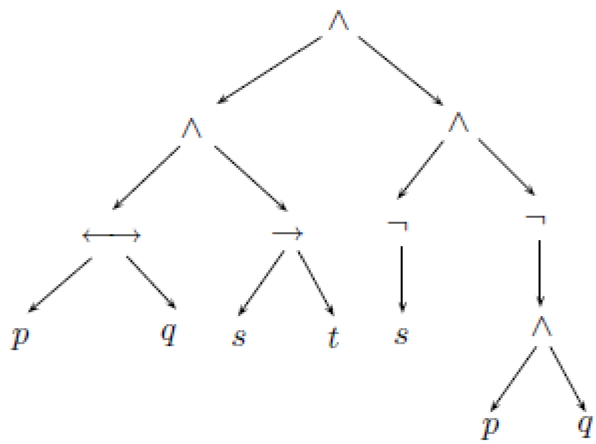
Escriba la expresión asociada al siguiente árbol de formación.



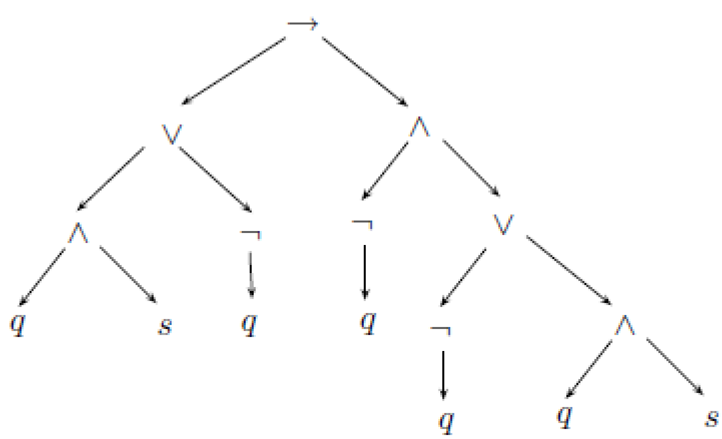
Dadas las siguientes fórmulas proposicionales, dibuje su árbol de formación:

- $p \rightarrow q \rightarrow r \wedge q \leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$
- $q \rightarrow \neg (p \wedge \neg p) \rightarrow r \vee s \rightarrow p$
- $(p \leftrightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q) \wedge p \wedge s \leftrightarrow \neg q$
- $(p \wedge r) \vee (\neg p \wedge q) \rightarrow \neg q$

Dado el siguiente árbol de formación, escriba su correspondiente fórmula proposicional.



Dado el siguiente árbol de formación, escriba su correspondiente fórmula proposicional.



1.10. Notación Prefija

Como se observó en la sección anterior, una fórmula proposicional puede ser presentada e interpretada sin ambigüedades siempre y cuando se tenga establecida una prioridad para los operadores.

La notación prefija permite representar fórmulas proposicionales de forma tal que los operadores que componen la fórmula, se escriben primero que los operandos que componen la fórmula. El tipo de operadores a los que se hace referencia es a los operadores binarios.

1.10.1. Transformación a prefijo

Es posible definir una serie de pasos para transformar una fórmula proposicional a su equivalente en prefijo. Por ejemplo si se tiene la fórmula: `a ^ b`, la fórmula escrita en notación prefija sería: `^ab`.

Para expresar la fórmula: `a ^ b` en prefijo, se deben realizar los siguientes pasos:

1. Se debe agrupar los elementos de la fórmula teniendo en cuenta la prioridad de los operadores `(a ^ b)`
2. se debe escribir en prefijo la fórmula proposicional: `^ab`

El siguiente ejemplo transforma una expresión: `a v (b ^ c)` a su equivalente en prefijo. Convirtiendo a prefijo la fórmula que está entre paréntesis, la misma queda representada así:

`a v (^bc)`

Ahora considerando la expresión `(^bc)` como un operando, se tiene que la expresión en prefijo queda finalmente expresada de la siguiente manera:

`va^bc` (Fórmula en prefijo)

Dada la siguiente fórmula: `(p → q v s) → (q ↔ r ^ t)`, se debe transformar a su equivalente en prefijo.

En este caso es necesario agrupar los átomos de la fórmula teniendo en cuenta la precedencia de los operandos que la componen. La fórmula de acuerdo a lo anterior queda expresada de la siguiente manera:

`(p → (q v s)) → (q ↔ (r ^ t))`

Primero se aplica el procedimiento de transforma a prefijo las expresiones que están con paréntesis más internos:

`(p → (vqs)) → (q ↔ (^rt))`

Posteriormente es posible eliminar de la fórmula los paréntesis más internos:

`(p → vqs) → (q ↔ ^rt)`

Luego se trasforma a prefijo tanto la fórmula `(p → vqs)` como `(q ↔ ^rt)`, quedando de la siguiente manera:

`(→pvqs) → (↔q^rt)`

Finalmente se transforma la fórmula en prefijo y la misma queda expresada de la siguiente manera:

`→→pvqs↔q^rt (Fórmula en prefijo)`

Observemos el siguiente ejemplo con la fórmula: `(a → b) ^ (b → a)`. En este caso la prioridad está establecida mediante la agrupación de los operandos mediante paréntesis, se procede entonces a transformar a notación prefija:

$(\rightarrow ab) \wedge (\rightarrow ba)$

Las expresiones $(\rightarrow ab)$ y $(\rightarrow ba)$ son consideradas en este punto operandos, entonces se procede a transformar la fórmula a prefijo. También se eliminan los paréntesis existentes en la fórmula.

$\boxed{\wedge\rightarrow ab\rightarrow ba}$ (Fórmula en prefijo)

A continuación se muestran otros ejemplos para transformar una fórmula proposicional a su equivalente en notación prefija. Por ejemplo la fórmula: $(p \vee q) \wedge r \wedge s$

Entonces debemos agrupar usando paréntesis teniendo en cuenta la prioridad de operadores.

$$(((p \vee q) \wedge r) \wedge s)$$

Para transformar a prefijo, resolvemos mediante los siguientes pasos la fórmula proposicional:

$$(((\vee pq) \wedge r) \wedge s)$$

$$((\wedge \vee pqr) \wedge s)$$

$\boxed{\wedge\wedge \vee pqrs}$ (Fórmula en prefijo)

Transformar a prefijo la siguiente fórmula proposicional: $(p \leftrightarrow q) \vee ((q \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow p))$

$(\leftrightarrow p\ q) \vee ((\rightarrow q\ \ r) \wedge (\rightarrow r\ \ p))$

$(\leftrightarrow p\ q) \vee (\wedge \rightarrow q\ \ r \rightarrow r\ \ p)$

$\boxed{\vee \leftrightarrow p\ q \wedge \rightarrow q\ \ r \rightarrow r\ \ p}$ (Fórmula en prefijo)

Transformar a prefijo la siguiente fórmula proposicional: $p \wedge (q \vee s) \wedge t \wedge (p \leftrightarrow q)$

La fórmula se agrupa por medio de paréntesis:

$(((p \wedge (q \vee s)) \wedge t) \wedge (p \leftrightarrow q))$

Resolvemos la fórmula para transformar a prefijo mediante los siguientes pasos:

$((p \wedge (\vee q\ s)) \wedge t) \wedge (\leftrightarrow p\ q)$

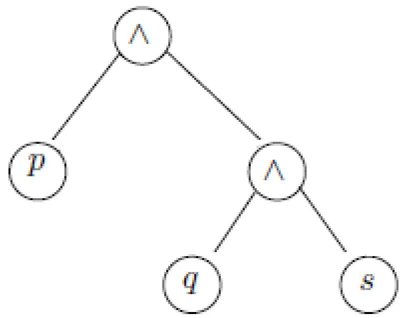
$((\wedge\ p \vee q\ s) \wedge t) \wedge (\leftrightarrow p\ q)$

$(\wedge \wedge p \vee q\ s\ t) \wedge (\leftrightarrow p\ q)$

$\boxed{\wedge \wedge \wedge p \vee q\ s\ t \leftrightarrow p\ q}$ (Fórmula en prefijo)

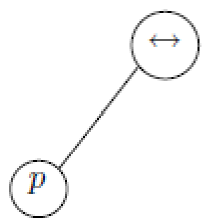
1.10.2. Árbol de formación

Una fórmula proposicional puede ser representada mediante un árbol, por ejemplo `p v (q ^ s)`, queda expresada mediante un árbol de formación de la siguiente manera:

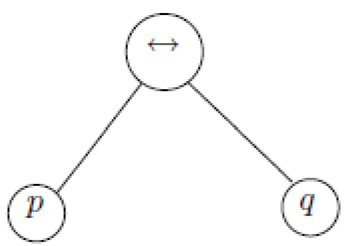


Existe una forma que permite la construcción de un árbol que representa una expresión. Inicialmente se debe transformar la fórmula original a prefijo y entonces partiendo de ello, se puede construir el árbol.

Por ejemplo para la fórmula: $p \leftrightarrow q$, primero se transforma a notación en prefijo: $\leftrightarrow pq$. El primer elemento de la fórmula $\leftrightarrow$ se inserta como el elemento que será la raíz del árbol de formación.



Después se insertan por la izquierda elementos a la fórmula hasta que se inserte un operando.



Luego se regresa en el árbol hasta el padre del nodo insertado y se inserta el siguiente elemento en la derecha del nodo. Si el elemento insertado fue un operador insertamos el siguiente a la izquierda. Si el elemento insertado fue un átomo, volvemos hacía atrás e insertamos el siguiente elemento a la derecha. Este proceso continúa hasta que se agote la expresión escrita en prefijo.

Si se desea representar la siguiente fórmula: `p ^ q v r`, mediante un árbol de formación, es necesario realizar una serie de pasos. Inicialmente se debe organizar la fórmula de acuerdo a la prioridad de los operadores y posteriormente se transformará a prefijo.

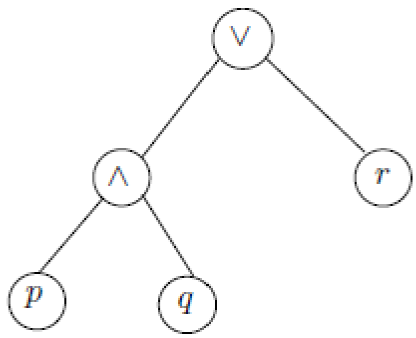
Para este caso se debe agrupar la expresión de acuerdo a la precedencia de los operadores, quedando de la siguiente manera:

((p ^ q) v r)

((^pq) v r)

$\boxed{\text{v ^ pqr (Fórmula en prefijo)}}$

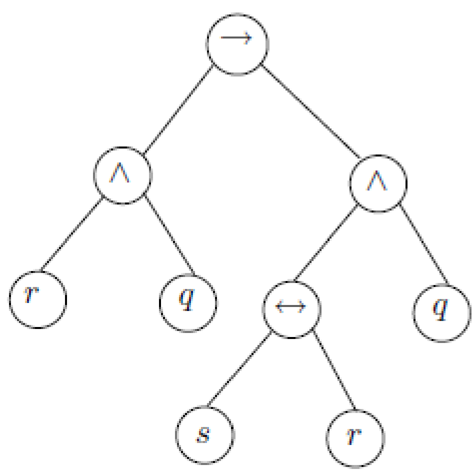
Se empieza por el primer elemento de la fórmula y posteriormente se siguen los pasos para construir el árbol de formación.



Si se tiene la fórmula: r ^ p → (s ↔ r) ^ q, construir su árbol de formación. Primero se debe transformar la expresión a su equivalente en prefija.

(r ^ p) → ((s ↔ r) ^ q)
(^rp) → ((↔s r) ^ q)
(^rp) → (^ ↔s r q)
→ ^ r p ^ ↔ s r q,

Entonces el árbol de formación de la fórmula es:



ACTIVIDAD

Eliminar todos los paréntesis posibles de las siguientes fórmulas:

- (((p → q) v r) → (p ^ ¬p))
- (¬(p ^ q) → (q ^ r))
- ((p → (q ^ r)) → (¬¬p ^ q))
- (((p v q) v (r v s)) → ¬p)
- (p → ((q ↔ s) → p))
- ((p → q) ↔ ((s v q) v r) → p))

Escribir con paréntesis las siguientes fórmulas:

- p → q ↔ r v s
- q → ¬p v r v s
- p v q ↔ ¬r v s
- q ^ ¬q v p → r

Transformar a prefija las siguientes expresiones infijas:

- (¬(¬p v ¬q v q)) → q
- (p v q ^ r) → q
- (p → p → q) ↔ (p v q ^ r)
- (((p v q) v (r v s)) → ¬p)
- ¬ (p → ((q ↔ s) → ¬p))

1.11. Formalización de proposiciones

Es posible que las expresiones en lenguaje natural se puedan expresar de una manera más formal, mediante representación de proposiciones. Esta representación se realiza mediante uso de átomos unidos por los conectores. En la lógica proposicional esta formalización es importante pues más adelante se verá que se pueden aplicar reglas de deducción que permiten determinar la validez de una determinada expresión.

Por ejemplo si tenemos las expresiones:

- Prepara la comida
- Escucha música

Las mismas se pueden representar de la siguiente manera:

- p: Prepara comida
- q: Escucha música

Cada una de las expresiones denota una fórmula atómica. Es posible entonces escribir en un lenguaje natural, las siguientes expresiones proposicionales:

Proposiciones	Enunciado
¬q	No escucha música
¬p	No prepara comida
p v q	Prepara comida o escucha música
p ^ q	Prepara comida y escucha música
q v ¬p	Prepara comida o no escucha música
¬p ^ ¬q	No prepara comida y no escucha música
¬¬q	No es cierto que no escucha música
p ↔ q	Prepara comida, si y sólo si, escucha música
p → q	Si prepara comida, entonces escucha música
p → ¬q	Si prepara comida, entonces no escucha música
q → p	Si Escucha música, entonces prepara comida

Teniendo en cuenta que ya se han trabajado los elementos conceptuales fundamentales de la lógica proposicional, es posible entonces establecer el valor de verdad de una expresión o fórmula proposicional. Por ejemplo si se tiene las expresión.

- Si María no participa en el foro, entonces no aprueba el curso.

Deseamos saber cuando esta expresión es verdadera y cuando es falsa. Para ello entonces definimos:

- p: participa en el foro
- q: aprueba el curso

La expresión entonces se convierte en: $\neg p \rightarrow \neg q$

La tabla de verdad asociada a la anterior expresión, contiene dos variables proposicionales y teniendo en cuenta que una tabla de verdad con n variables proposicionales tiene 2^n proposiciones, tenemos para este caso $2^2 = 4$ asignaciones. Representemos las anteriores combinaciones mediante una tabla de verdad:

p	**q**	**¬p**	**¬q**	**¬p → ¬q**
V	V	F	F	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Para comprender las combinaciones de la tabla de verdad analicemos la expresión:

- Si María no participa en el foro, entonces no aprueba el curso.

Puede suceder que:

- María no participa en el foro, entonces no aprueba el curso.
- María no participa en el foro, entonces aprueba el curso.
- María participa en el foro, entonces no aprueba el curso.
- María participa en el foro, entonces aprueba el curso.

Analicemos cada una de las siguientes posibilidades:

- En el caso 1, si María no participa en el foro, entonces no aprueba la lección. Esta afirmación es verdadera.
- En el caso 2, si María no participa en el foro, entonces aprueba la lección. Esta afirmación es verdadera, porque maría puede ganar el curso sin participar en el foro.
- En el caso 3, si María participa en el foro, entonces no aprueba el curso. Esta afirmación es falsa, porque si participo entonces debe aprobar el curso.
- En el caso 4, si María participa en el foro, entonces aprueba el curso. Esta afirmación es verdadera.

Para el siguiente ejemplo se desea saber cuándo es verdadera la siguiente expresión:

- El departamento del Quindío progresa si y sólo si se tiene crecimiento económico y no existe la corrupción

En este caso definimos las expresiones atómicas de la siguiente manera:

- p: El departamento del Quindío progresa
- q: crecimiento económico
- r: existe la corrupción

La representación de la expresión en lógica proposicional es: $p \leftrightarrow (q \wedge \neg r)$

La tabla de verdad de esta expresión contiene tres variables p,q,r, tenemos entonces $2^3 = 8$ asignaciones. Representemos las anteriores combinaciones mediante una tabla de verdad:

p	q	r	¬r	(q ^ ¬r)	p ↔ (q ^ ¬r)
V	V	V	F	F	F
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	V
F	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V
F	F	F	V	F	V

- Las posibilidades en las cuales la expresión "El departamento del Quindío progresa si y sólo si se tiene crecimiento económico y no existe la corrupción", se hace verdadera son las siguientes:

- El departamento del Quindío progresa si y sólo si se tiene crecimiento económico y no existe la corrupción.
- El departamento del Quindío no progresa si y sólo si se tiene crecimiento económico y no existe la corrupción.
- El departamento del Quindío no progresa si y sólo si no se tiene crecimiento económico y no existe la corrupción.
- El departamento del Quindío no progresa si y sólo si no se tiene crecimiento económico y existe la corrupción.

A continuación se formalizan una serie de expresiones mediante lógica proposicional.

- Las vacas sólo están locas si no actúan normalmente o se dejan cuidar por su amo.

  Para traducir esta afirmación en lógica de proposiciones es necesario identificar las proposiciones atómicas, p representa "Las vacas sólo están locas", q representa "actúan normalmente", r "se dejan cuidar por su amo". Finalmente se tiene la representación lógica:

  $$p \rightarrow (\neg q \vee r)$$

  En este caso la expresión también puede representarse: $p \rightarrow \neg q \vee r$, por la prioridad definida para los operadores.

- Si el tiempo de ejecución del algoritmo es superior a 1000 unidades de tiempo, será porque no se realizó el proceso de análisis de forma correcta o por errores en el cálculo final.

  Las proposiciones atómicas de la expresión son:

  p: Tiempo de ejecución del algoritmo es superior a 1000 unidades de tiempo
  q: Realizó el proceso de análisis de forma correcta
  r: Errores en el cálculo final

  La representación lógica es: $(\neg q \vee r) \rightarrow p$

- Andrea cancela análisis de algoritmos o estructura de datos, pero no ambas; no obstante si Andrea cancela análisis de algoritmos, tampoco cancela estructuras de datos.

  Las proposiciones atómicas de la expresión son:

  p: Cancela análisis de algoritmos
  q: Cancela estructura de datos

  La representación lógica es: $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q)$

  En este ejemplo se tiene que $(p \vee q)$ corresponde a "Andrea cancela análisis de algoritmos", la palabra pero denota el operador ^, "no ambos" se representa mediante la expresión $(\neg p \vee \neg q)$, la palabra "no obstante" denota el operador ^, finalmente "si Andrea cancela análisis de algoritmos, tampoco cancela estructuras de datos"

- Querer o no querer cuando ser o no ser

  Las proposiciones atómicas de la expresión son:

  q: querer
  p: ser

  La representación lógica es: $(q \vee \neg q) \rightarrow (p \vee \neg p)$

- La causa del bajo rendimiento académico de los estudiantes en la Universidad es que se está implementando un modelo educativo erróneo en la enseñanza media. A pesar de eso, el efecto de la existencia de dicho bajo rendimiento académico de los estudiantes es que la deserción estudiantil se ha incrementado.

  Las proposiciones atómicas de la expresión son:

  p: La causa del bajo rendimiento académico de los estudiantes en la Universidad
  q: se está implementando un modelo educativo erróneo en la enseñanza media
  r: la deserción estudiantil se ha incrementado

  La representación lógica es: $(q \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow r)$

- El software funciona correctamente solo cuando se introducen buenas prácticas, además, el software no es seguro a menos que no se introduzcan técnicas de encriptación.

  Las proposiciones atómicas de la expresión son:

  p: el software funciona correctamente
  q: se introducen buenas prácticas
  r: el software es seguro
  s: se introduzcan técnicas de encriptación

  La representación lógica es: $(p \rightarrow q) \wedge (\neg s \rightarrow \neg r)$

- Las prácticas se realizan en el laboratorio de ingeniería o en el de ciencias (no en ambos), sin embargo, las prácticas se realizan en el laboratorio de ciencias solo si el de ingeniería está ocupado.

  Las proposiciones atómicas de la expresión son:

  p: las prácticas se realizan en el laboratorio de ingeniería
  q: las prácticas se realizan en el laboratorio de ciencias
  r: el de ingeniería está ocupado

La representación lógica es: $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (q \rightarrow r)$

De la anterior proposición se puede concluir:

- Que es suficiente que las prácticas no se realicen en el laboratorio de ingeniería para que el laboratorio de ciencias este ocupado.

- Los profesores están conformes cuando el estudiante gana el parcial a pesar de que no enseñan lo suficiente.

  Las proposiciones atómicas de la expresión son:

  p: Los profesores están conformes
  q: el estudiante gana el parcial
  r: enseñan lo suficiente

  La representación lógica es: $(q \rightarrow p) \wedge \neg r$

- Para ganar análisis de algoritmos es necesario ganar los parciales, además hay asesoría con los profesores, sin embargo los alumnos no ganan la asignatura.

  Las proposiciones atómicas de la expresión son:

  p: ganar análisis de algoritmos
  q: ganar los parciales
  r: asesoría con los profesores
  s: los alumnos no ganan la asignatura

  La representación lógica es: $(q \rightarrow p) \wedge r \wedge \neg s$

Los siguientes son otros ejemplos de formalización de expresiones:

- En Zambia hay inflación y no hay crecimiento económico, por tanto, Zambia no va bien.

  $$(p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r$$

- Para ganar el factor X es suficiente actuar bien si se cuenta con un buen cantante.

  $$r \rightarrow (q \rightarrow p)$$

- Julio solo tiene afán cuando no tiene cerveza, y además está tranquilo si está ganando el equipo.

  $(p \rightarrow \neg q) \wedge (s \rightarrow r)$

- Para que Héctor esté feliz es necesario que tenga salud, a no ser que a Paulo le dé un susto o cierren el teatro.

  $\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (r \vee s)$

ACTIVIDAD

Dadas las proposiciones p y q y las siguientes expresiones, formalícelas en lógica proposicional.

Expresiones	Formalización
como mínimo p	
p suficiente para q	
q a no ser que q	
q es suficiente para p	
a veces q, siempre p	
q siempre que p	
q a pesar de p	

Sean las proposiciones p: Es tenista profesional, q: Vive en Armenia, formalizar los siguientes enunciados:

Expresiones	Formalización
Es tenista profesional y vive en Armenia	
Es tenista profesional pero no vive en Armenia	
Es falso que sea tenista profesional o viva en Armenia	
No es tenista profesional ni vive en Armenia	
No cierto que no sea tenista profesional	
No cierto que no sea tenista profesional o no sea tenista profesional y no viva en Armenia	
Es tenista profesional si y solo si vive en Armenia o no vive en Armenia.	

Formalizar a lógica proposicional los siguientes razonamientos

- Si la complejidad computacional del algoritmo es logarítmica, será porque se implementó un algoritmo muy eficiente y porque se aplicaron técnicas de optimización de código.
- El bajo rendimiento académico de los estudiantes no logrará mejorarse a no ser que se logre identificar su causa y se consiga encontrar alternativas adecuadas o bien para prevenirlo o para mejorarlo.
- Si el América gana la copa o llega a las finales, será debido a que tiene muy buenos jugadores y a que tendrá a la afición a su favor.
- A no ser que haya derechos de petición, el resultado de la convocatoria saldrá púbicamente el jueves.

Dada la expresión: Para que hoy gane el Barcelona basta que sea domingo, a no ser que haya mal clima y hoy hay mal clima. Y las siguientes son las proposiciones:

- p: hoy es domingo
- q: hoy gane el Barcelona
- r: hay mal clima

Seleccionar el formalismo correcto:

- $(((p \wedge r) \rightarrow \neg q) \wedge r$
- $((\ (p \wedge \neg r) \rightarrow q) \wedge r$
- $(\neg(p \rightarrow q) \rightarrow r) \wedge r$
- $(p \rightarrow (r \rightarrow q)) \wedge r$

Dada la expresión: No es cierto que me enfermo siempre que trasnocho; solo me enfermo si tengo muchas preocupaciones. Seleccione su formalización.

- $\neg(q \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow q)$
- $(\neg q \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow r)$
- $(\neg q \rightarrow p) \wedge (r \rightarrow p)$
- $\neg(q \rightarrow p) \wedge (r \rightarrow p)$