# 2. Sistema de ecuaciones lineales

Milagros Riquenes Rodríguez, Raúl Hernández Fidalgo y
Salvador Ochoa Rodríguez

## SISTEMA DE ECUACIONES.

### Sistemas de ecuaciones lineales de dos ecuaciones y dos incógnitas.

Llamaremos sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas (o variables) a todo conjunto de ecuaciones de la forma:

$$a_1x+b_1y = c_1 \quad \text{con } a_1,\ b_1 \text{ y } c_1 \text{ números reales y } a_1 \text{ y } b_1 \text{ no nulos simultaneamente}$$
$$a_2x+b_2y = c_2 \quad \text{con } a_2,\ b_2 \text{ y } c_2 \text{ números reales y } a_2 \text{ y } b_2 \text{ no nulos simultaneamente}$$

**Conjunto solución:** La representación gráfica de una función lineal de la forma $y = mx + n$ con $m$ y $n$ números reales, es una recta del plano. Transformando algebraicamente en la ecuación $y = mx + n$ podemos generalizar que toda recta del plano está dada por la ecuación $ax + by = c$ con $a$ y $b$ números reales no simultáneamente nulos, por lo que obtener el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales, significa geométricamente, determinar el punto de intersección entre ambas rectas lo que permite conocer la posición de las mismas (secantes ó paralelas coincidentes ó disjuntas).

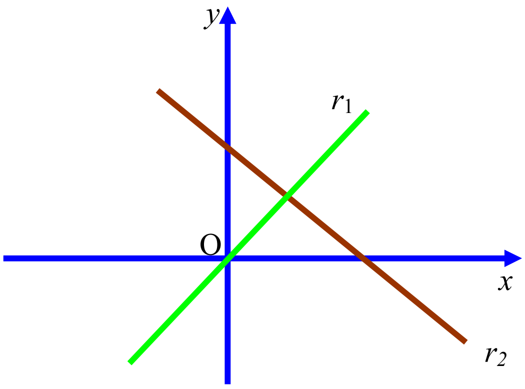


***Fig.* 1**

**Caso I:** $r_1$ y $r_2$ son secantes (se cortan en un punto) Fig.1

En este caso el conjunto solución del sistema, está formado por las coordenadas del punto de intersección de ambas rectas y el sistema es determinado (solución única); $S = \{(x_1; y_1)\}$

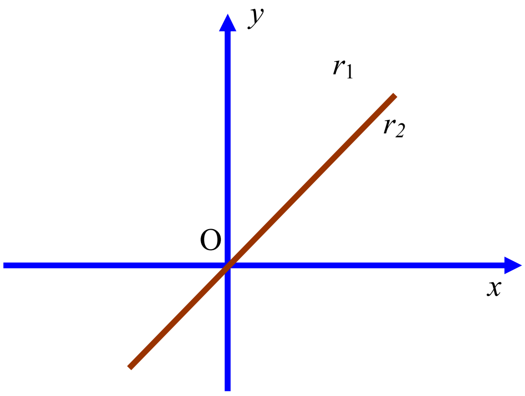


***Fig.* 2**

**Caso II:** $r_1$ y $r_2$ (Fig. 2) son paralelas coincidentes.

Aquí el conjunto solución en infinito ya que la intersección de ambas rectas es la propia recta $r_1$ ó $r_2$ que contienen infinitos puntos. En este caso el sistema es indeterminado; $S = r_1$ ó $S = r_2$.

**Caso III:** $r_1$ y $r_2$ (Fig. 3) son paralelas disjuntas.

En este caso el conjunto solución es vacío ya que dichas rectas no se interceptan; $S=\{\ \}$ ó $S=\phi$ y el sistema es imposible o incompatible.

Resolver un sistema de ecuaciones es hallar sus soluciones o demostrar que carece de ellas. A continuación mostraremos dos métodos para resolver estos sistemas.

- Método de adición algebraica.
- Método de sustitución.

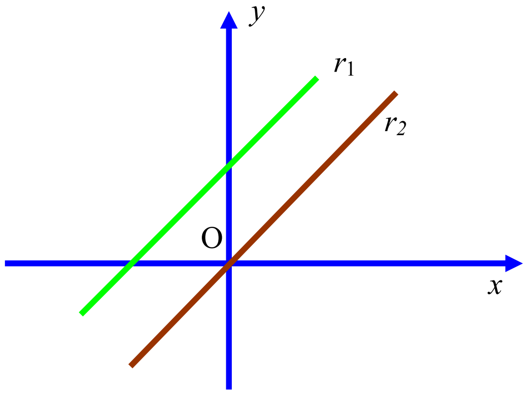


***Fig. 3***

**Método de adición algebraica.**

Para resolver un sistema de ecuaciones de dos ecuaciones con dos incógnitas se elimina una de las incógnitas y se procede a resolver la ecuación resultante con respecto a la otra, esta eliminación de una de las incógnitas puede lograrse sumando o restando las ecuaciones dadas después de haberlas multiplicado en casos necesarios por números convenientes.

Una vez hallado el valor de una de las incógnitas se sustituye en cualquiera de las ecuaciones del sistema la cual se resuelve respecto a la otra incógnita.

**Ejemplos.**

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $7x + y = 19$
$4x - y = 3$

b) $2x - y = 4$
$x - 2y = -1$

c) $2x + 3y = 5$
$3x + 2y = 5$

d) $3x + 8y = 23$
$11x + 6y = -9$

e) $1/3\,x - 1/2\,y = 6$
$1/6\,x - 1/4\,y = -1$

**Solución:**

a) En este sistema para eliminar la variable $\boldsymbol{y}$ con sumar ambas ecuaciones es suficiente.

$1)\ 7x + y = 19$
$2)\ 4x - y = 3$

$11x = 22$
$x = 2$

Sustituyendo en 1)

$7(2) + y = 19$
$y = 5$

$S=\{(2;5)\}$

Comprobación:

Se sustituye los valores obtenidos, en las ecuaciones originales para verificar que las mismas satisfacen ambas ecuaciones.

En ecuación 1) $\mathrm{MI}: 7(2)+5=19=\mathrm{MD}$. En ecuación 2) $\mathrm{MI}: 4(2)-5=3=\mathrm{MD}$

*b)* $2x - y = 4$

$x - 2y = -1$

En este ejemplo para eliminar la variable ***x*** ó ***y*** es necesario multiplicar por *-2* la ecuación (2) para eliminar la variable *x* o la ecuación *(1)* para eliminar la variable *y*.

Eliminemos ***y***, multiplicando la ecuación *(1)* por *(-2)*

$$\begin{array}{l} 1)\ 2x - y = 4 \ /.(-2) \\ 2)\ x - 2y = -1 \\ \hline -4x + 2y = -8 \\ \quad x - 2y = -1 \\ \hline \quad -3x = -9 \\ \quad x = 3 \end{array}$$

Sustituyendo en $(2)$:

$$3 - 2y = -1$$

$$y = \frac{-1-3}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$S = \{(3;2)\}$$

*c)* 1) $2x + 3y = 5$

2) $3x + 2y = 5$

En este caso para eliminar ***x*** ó ***y*** es necesario multiplicar ambas ecuaciones por el número que al sumar estas se anule una de las incógnitas.

Si se desea eliminar ***x*** se multiplica la ecuación (1) por *3* y la ecuación (2) por *(-2)*.

Si se desea eliminar ***y*** se multiplica la ecuación (1) por *(-2)* y la ecuación (2) por *3*.

Eliminando ***x***

$$\begin{array}{l} 1)\ 2x + 3y = 5/.(3) \\ 2)\ 3x + 2y = 5/.(-2) \\ \hline 6x + 9y = 15 \\ -6x - 4y = -10 \\ \hline \quad 5y = 5 \\ \quad y = 1 \end{array}$$

Sustituyendo en la ecuación (1):

$$2x + 3(1) = 5$$

$$x = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$S = \{(1;1)\}$$

En general cuando se resuelve un sistema de la forma:

$1)\ a_1x + b_1y = c_1$

$2)\ a_1x + b_2y = c_2$

Por el método "Adición Algebraica" (método de reducción) es necesario conocer el factor por el que hay que multiplicar cada una de las ecuaciones y para ello se puede utilizar el siguiente procedimiento:

$1^{ro}$.- Hállese el Mínimo Común Múltiplo (MCM) de los coeficientes de la incógnita que desea eliminar.

$2^{do}$.- Divídase este MCM por el coeficiente de la incógnita a eliminar en la primera ecuación y el cociente dará el valor absoluto del factor que se debe usar para multiplicar esta ecuación.

$3^{ro}$.- Análogamente se determina el valor absoluto del factor que se utiliza en la segunda ecuación.

$4^{to}$.- El signo de cada factor dependerá del signo de los coeficientes de la incógnita a eliminar.

*d)* $3x + 8y = 23$

$11x + 6y = -9$

Eliminemos ***y*** :

MCM de 8 y 6 : ¿?

$8 = 2^3$

$6 = 2 . 3$

MCM de( 8 y 6) $= 2^3 . 3 = 24$

$24 : 8 = 3$ $\rightarrow$ valor absoluto del factor por el que se debe multiplicar la ecuación (1)

$24 : 6 = 4$ $\rightarrow$ valor absoluto del factor por el que se debe multiplicar la ecuación (2)

$$\begin{aligned}
(1)\ 3x + 8y &= 23 \quad /(-3) \\
(2)\ \underline{11x + 6y} &\underline{= -9 \quad /(4)} \\
-9x - 24y &= -69 \\
\underline{44x + 24y} &\underline{= -36} \\
35x &= -105 \\
x &= -105 : 35 \\
x &= -3
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (1)

$$\begin{aligned}
3(-3) + 8y &= 23 \\
-9 + 8y &= 23 \\
8y &= 23 + 9 \\
8y &= 32 \\
y &= 32 : 8 \\
y &= 4
\end{aligned}$$

$S = \{(-3, 4)\}$

e) $(1)\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y = 6$

$(2)\ \frac{1}{6}x - \frac{1}{4}y = -1$

Este sistema es de coeficientes fraccionarios por lo que se hace muy difícil la reducción de una variable. Es necesario que eliminemos las fracciones multiplicando cada ecuación por el MCM de sus denominadores.

En ecuación (1): MCM de 3 , 2 y 1 es 6

En ecuación (2): MCM de 6 , 4 y 1 es 12

$$(1)\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y = 6 \ /(6)$$

$$(2)\ \frac{1}{6}x - \frac{1}{4}y = -1\ /(12)$$

$$2x - 3y = 36$$

$$2x - 3y = -12 \quad \text{restando ambas ecuaciones se obtiene:}$$

$$0 = 48 \quad \rightarrow \text{Imposible}$$

Del resultado anterior se infiere que el sistema no tiene solución o sea

$S = \{\ \}$ y esto significa geométricamente que las rectas dadas por dichas ecuaciones son paralelas disjuntas.

**Método de Sustitución.**

Consiste en despejar una de las incógnitas en una ecuación y sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación, resultando una ecuación de una incógnita que se resuelve por el método de solución de ecuaciones lineales. Una vez encontrado el valor de una de las incógnitas por sustitución se encuentra el valor de la otra.

**Ejemplos.**

Resolver los siguientes sistemas:

*a)* $2x - 3y = 6$
$3x + y = 20$

*b)* $x(y-2) - y(x-3) = -14$
$y(x-6) - x(y+9) = 54$

a) $(1)\ 2x - 3y = 6$
$(2)\ 3x + y = 20$

Despejar $x$ en la ecuación (1). Puede despejarse cualquier de las dos incógnitas en cualquier ecuación.

3) $x = \dfrac{6+3y}{2}$

Sustituyendo en la ecuación (2): $3\left(\dfrac{6+3y}{2}\right)+y=20$

$3\left(\dfrac{6+3y}{2}\right)+y=20/.2$

$3(6+3y)+2y=40$

$18+9y+2y=40$

$18+11y=40$

$y=\dfrac{40-18}{11}=\dfrac{22}{11}=2 \rightarrow$ Sustituyendo en 3) $x=\dfrac{6+3(2)}{2}=\dfrac{12}{2}=6$

$S=\{(6,2)\}$

*b)* $x\,(y\text{ -}2)\text{ - }\;y(x\text{ - }3)\;=\;\text{-}14$
$y\,(x\text{ - }6)\text{ - }x\,(y\;+9)=\;\;54$

En este caso debe calcularse primeramente las operaciones indicadas hasta transformar este sistema en un sistema de la forma:

$$a_1x \;+\; b_1y \;=\; c_1$$
$$a_1x \;+\; b_2y \;=\; c_2$$

En ecuación (1) : $\quad xy\text{ - }2x\text{ - }yx\;+\;3y\;=\;\text{-}14 \quad \rightarrow -2x+3y=-14$
Enecuación (2): $\quad yx\text{ - }6y\;\text{ - }xy\;\text{ - }9x\;=\;54 \;\rightarrow\; \text{-}9x\;\text{ - }\;6y=54\;\;/\text{:(-}3)$
$$3x \;+\; 2y \;=\; \text{-}18$$

Obteniéndose el sistema:

(1) $\text{-}2x \;+\; 3y \;=\; \text{-}14$
(2) $3x \;+\; 2y \;=\; \text{-}18$

Para resolver el mismo debe procederse como en el ejemplo anterior:

Despejar y en ecuación (1):

3) $\quad y=\dfrac{-14+2x}{3}$

Sustituyendo en la ecuación (2):

$3x \;+\; 2\left(\dfrac{-14+2x}{3}\right) \;=\; \text{-}18$

$3x \;+\; 2\left(\dfrac{-14+2x}{3}\right) \;=\; \text{-}18\,/.3$

$9x\;-28+4x\;=\;\text{-}54$
$13x=\text{-}54+28=-26$

$x=\dfrac{-26}{13}=-2$

Sustituyendo en (3):

$y=\dfrac{-14+2(-2)}{3}=\dfrac{-18}{3}=-6$

$S=\{(\text{-}2,\text{-}6)\}$

## Sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas.

**Ejemplos.**

Resolver los siguientes sistemas

a) $$\begin{aligned} 3x + 2y - z &= -4 \\ 2x + 3y + 4z &= 11 \\ 5x - 4y - 2z &= 14 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x + 5y + 2z &= 3 \\ 3x - 2y - 2z &= -1 \\ 3y - z &= -6 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} s + t &= 10 \\ t + r &= 16 \\ r + s &= 20 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} - \frac{1}{z} &= 5 \\ -\frac{1}{x} - \frac{2}{y} + \frac{3}{z} &= 4 \\ \frac{3}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} &= -2 \end{aligned}$$

Los sistemas a resolver, son sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas y para resolverlos se elimina una incógnita entre dos ecuaciones y luego se elige otro par de ecuaciones y se elimina de nuevo la misma incógnita. Resulta así un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que se resuelven de la manera ya estudiada. Los valores obtenidos para estas dos incógnitas se sustituyen en cualquiera de las ecuaciones del sistema original.

Es decir, se reduce el sistema dado a uno de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y después a una ecuación lineal en una incógnita. Se puede utilizar, según sea más cómodo, el método de sustitución o el de reducción.

Solución:

a) $$\begin{aligned} (1)\quad 3x + 2y - z &= -4 \\ (2)\quad 2x + 3y + 4z &= 11 \\ (3)\quad 5x - 4y - 2z &= 14 \end{aligned}$$

Tomemos las ecuaciones (1) y (2) y eliminemos z

$$\begin{aligned} 1)\quad 3x + 2y - z &= -4 \quad /(4) \\ 2)\quad \underline{2x + 3y + 4z} &\underline{= 11} \\ 12x + 8y - 4z &= -16 \\ \underline{2x + 3y + 4z} &\underline{= 11} \\ 4)\quad 14x + 11y &= -5 \end{aligned}$$

Tomemos las ecuaciones (1) y (3) y eliminemos z

$$\begin{aligned} 1)\quad 3x + 2y - z &= -4 \quad /(-2) \\ 3)\quad \underline{5x - 4y - 2z} &\underline{= 14} \\ -6x - 4y + 2z &= 8 \\ \underline{5x - 4y - 2z} &\underline{= 14} \\ 5)\quad -x - 8y &= 22 \end{aligned}$$

Con las ecuaciones (4) y (5) formemos el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

$$\begin{array}{lrcl} (4) & 14x + 11y & = & -5 \\ (5) & -x - 8y & = & 22 \ /(14) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 14x + 11y & = & -5 \\ -14x - 112y & = & 308 \\ \hline -101y & = & 303 \\ y & = & 303 : (-101) \\ y & = & -3 \end{array}$$

Sustituyendo en ecuación (5)

$$\begin{array}{rcl} -x - 8(-3) & = & 22 \\ x & = & (22 - 24) : (-1) \\ x & = & 2 \end{array}$$

Sustituyendo en ecuación (1):

$$\begin{array}{rcl} 3(2) + 2(-3) - z & = & -4 \\ z & = & -4 : (-1) \\ z & = & 4 \end{array}$$

Comprobación:

En ecuación (1): $\mathrm{MI}: 3(2) + 2(-3)\ \ 4 = -4 = \mathrm{MD}$

En ecuación (2): $\mathrm{MI}: 2(2) + 3(-3) + 4(4) = 11 = \mathrm{MD}$

En ecuación (3): $\mathrm{MI}: 5(2) - 4(-3) - 2(4) = 14 = \mathrm{MD}$

$S = \{(2, -3, 4)\}$

*b*)

$$\begin{array}{lrcl} 1) & x + 5y + 2z & = & 3 \\ 2) & 3x - 2y - 3z & = & -1 \\ 3) & 3y - z & = & -6 \end{array}$$

Tomemos las ecuaciones (1) y (2) y convenientemente eliminemos $x$:

$$
\begin{array}{ll}
(1) & x + 5y + 2z = 3 \;/.(-3) \\
(2) & 3x - 2y - 3z = -1 \\
\hline
 & -3x - 15y - 6z = -9 \\
 & 3x - 2y - 3z = -1 \\
\hline
4) & -17y - 9z = -10
\end{array}
$$

Con las ecuaciones (3) y (4) formamos el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

$$
\begin{array}{ll}
3) & 3y - z = -6 \;/.(-9) \\
4) & -17y - 9z = -10 \\
\hline
 & -27y + 9z = 54 \\
 & -17y - 9z = -10 \\
\hline
 & -44y = 44 \\
 & y = 44 : (-44), \text{ por lo que } y = -1
\end{array}
$$

Sustituyendo en (3) para hallar a $z$

$$
\begin{aligned}
3(-1) - z &= -6 \\
-3 - z &= -6 \\
-z &= -6 + 3 \\
-z &= -3 \;/(-1) \\
z &= 3
\end{aligned}
$$

Sustituyendo en ecuación (1)

$$
\begin{aligned}
x + 5(-1) + 2(3) &= 3 \\
x &= 3 - 1 \\
x &= 2
\end{aligned}
$$

$S = \{(2, -1, 3)\}$

c) $(1)\ s + t = 10$

$(2)\ t + r = 16$

$(3)\ r + s = 20$

Ordenemos el sistema dado en la forma *r, s* y *t*:

c) $(1)\ s + t = 10$

$(2)\ r + t = 16$

$(3)\ r + s = 20$

Tomemos las ecuaciones (1) y (2) y eliminemos convenientemente $t$:

$$
\begin{array}{ll}
(1) & s + t = 10 /.(-1) \\
(2) & r + t = 16 \\
\hline
 & -s - t = -10 \\
 & r + t = 16 \\
\hline
4) & r - s = 6
\end{array}
$$

Con las ecuaciones (3) y (4) formemos el sistema de dos con dos:

(3) $r + s = 20$

(4) $-s + r = 6$

$2r = 26 \,/ : 2$

$r = 13$

Sustituyendo en ecuación (3):

$13 + s = 20$

$s = 7$

Sustituyendo en ecuación (1)

$7 + t = 10$

$t = 10 - 7$

$t = 3$

$S = \{(13; 7; 3)\}$

Observe que el conjunto solución está expresado en el mismo orden de las variables $r, s$ y $t$

d) $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} - \frac{1}{z} = 5$

$-\frac{1}{x} - \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 4$

$\frac{3}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} = -2$

En este caso las variables se encuentran en los denominadores, para facilitar la solución recomendamos el siguiente cambio de variables:

$\frac{1}{x} = A;\ \frac{1}{y} = B$ y $\frac{1}{z} = C$

Sustituyendo en el sistema original se obtiene el sistema:

(1) $2A + 3B - C = 5$

(2) $-A - 2B + 3C = 4$

(3) $3A + 2B - 3C = -2$

Sumemos ecuación (1) y (2) y eliminemos la variable A:

(1) $2A + 3B - C = 5$ $\qquad$ $2A + 3B - C = 5$

(2) $-A - 2B + 3C = 4 \,/ .(2)$ $\qquad$ $\underline{-2A - 4B + 6C = 8}$

(4) $-B + 5C = 13$

Sumemos ecuación (1) y (3) y eliminemos la variable A:

$$\begin{array}{l} (1)\quad 2\mathrm{A}+3B-C=5/.(3) \\ (3)\quad 3\mathrm{A}+2B-3C=-2/.(-2) \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6A+9B-3C=15 \\ -6A-4B+6C=4 \\ \hline (5)\qquad 5B+3C=19 \end{array}$$

Tomemos las ecuaciones (4) y (5) y eliminemos la variable B

$$\begin{array}{l} (4)\ \text{-}B+5C=13/.5 \\ (5)\ 5B+3C=19 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{-}5B+25C=65 \\ 5B+3C=19 \\ \hline 28C=84 \end{array}$$

$$C=\frac{84}{28}=3$$

Sustituyendo en ecuación (4): $\text{-}B+5(3)=13 \rightarrow B=\dfrac{13-15}{-1}=2$

Sustituyendo en ecuación (1): $2\mathrm{A}+3(2)-3=5 \rightarrow A=\dfrac{5-3}{2}=1$

Para hallar los valores de *x; y* e *z* se sustituye en las ecuaciones del cambio de variables.

$$A = 1/x \quad \rightarrow 1 = 1/x$$
$$x = 1$$
$$B = 1/y \quad \rightarrow 2 = 1/y$$
$$y = 1/2$$
$$C = 1/z \quad \rightarrow 3 = 1/z$$
$$z = 1/3$$

Se comprueba en el sistema original.

En ecuación (1)

$$\mathrm{MI}=\frac{2}{1}+\frac{3}{\frac{1}{2}}-\frac{1}{\frac{1}{3}}=2+6-3=5=MD$$

Análogamente se comprueba en las restantes ecuaciones. $S = \left\{ \left( 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right) \right\}$

**Sistemas de Ecuaciones Cuadráticas.**

**Ejemplos.**

Resolver los siguientes sistemas:

a) 1) $(x + 3)^2 + y^2 = 8$
   2) $x - y + 3 = 0$

b) 1) $x^2 = 4y$
   2) $2y^2 = x$

c) 1) $x^2 + y^2 = 1$
   2) $(x-2)^2 + y^2 = 1$

Estos sistemas son cuadráticos ya que contienen al menos una ecuación de segundo grado por lo que es conveniente aplicar el método de sustitución.

**Solución:**

a) 1) $(x + 3)^2 + y^2 = 8$
   2) $x - y + 3 = 0$

En este caso, donde existe una ecuación lineal y una cuadrática, se despeja una variable en la ecuación lineal y se sustituye en la cuadrática resultando una ecuación cuadrática, cuyas soluciones se sustituyen en la lineal para hallar el conjunto solución del sistema.

Despejando $x$ en ecuación (2) :

2) $x = y - 3$

Sustituyendo en (1)

$$(y - 3 + 3)^2 + y^2 = 8$$
$$2y^2 = 8$$
$$y^2 = 4$$

$$y = \sqrt{4} = 2 \quad \text{ó} \quad y = -\sqrt{4} = -2$$

Sustituyendo en (3)

$Si\ y = 2 \rightarrow x = 2 - 3 = -1$

$Si\ y = -2 \rightarrow x = -2 - 3 = -5$

Comprobación : Para $x = -1$ e $y = 2$

En ecuación (1)

$\mathrm{MI}: (-1+3)^2 + 2(2) = 4 + 4 = 8 = \mathrm{MD}$

En ecuación (2)

$MI: -1 - 2 \ + \ 3 \ = 0 = MD$

En ecuación (1)

Para $x = -5$ e $y = -2$

$MI: (-5+3)^2 \ + (-2)^2 = 4 \ + \ 4 = 8 = MD$

En ecuación (2)

$MI: (-5) - (-2) + 3 = \ 0 = MD$

$S = \{ (-1, 2), \ (-5, -2) \}$

b) 1) $x^2 \ = \ 4y$

2) $2y^2 \ = \ x$

En este ejemplo ambas ecuaciones son cuadráticas por lo que se despeja la variable lineal en cualquier ecuación, obteniéndose la ecuación (3), se sustituye en el otra ecuación, se resuelve la ecuación resultante, obteniéndose así los valores de una variable, y con estos se sustituye en la ecuación (3) para obtener los valores de la otra variable.

En el ejemplo, la variable *x* en la ecuación (2) está despejada.

$x \ = \ 2y^2$, con esto sustituimos en ecuación (1):

$$(2y^2)^2 \ = \ 4y$$

$$4y^4 \ - \ 4y \ = \ 0$$

$$4y\left(y^3 \ - 1\right) = \ 0$$

$$4y \ = \ 0 \qquad ó \qquad y^3 - \ 1 \ = 0$$

$$y \ = \ 0 \qquad\qquad y = \ 1$$

$Si \ \ y \ = \ 0 \ \ \rightarrow x = 0$

$Si \ \ y \ = \ 1 \ \ \rightarrow x = 2$

$S = \{ (0, 0), \ (2, 1) \}$

c) 1) $x^2 \ + \ y^2 \ = \ 1$

2) $(x-2)^2 \ + \ y^2 \ = \ 1$

En este caso todas las incógnitas que intervienen en el sistema son cuadráticas por lo que hay que utilizar el método de reducción o sustitución.

$$
\begin{array}{lrcl}
1) & x^2 + y^2 & = & 1 \,/(-1) \\
2) & \underline{(x-2)^2 + y^2} & = & \underline{1} \\
 & -x^2 - y^2 & = & -1 \\
 & \underline{x^2 - 4x + 4 + y^2} & = & \underline{1} \\
 & -4x + 4 & = & 0 \\
 & x & = & (-4):(-4) \\
 & x & = & 1
\end{array}
$$

Sustituyendo en ecuación (1):

$$
\begin{aligned}
(1)^2 + y^2 &= 1 \\
y^2 &= 0 \\
y &= 0 \rightarrow S = \{(1;\ 0)\}
\end{aligned}
$$

Realice la comprobación.

**Problemas que conducen a sistemas de ecuaciones lineales.**

Seguidamente estudiaremos la resolución de problemas que conducen a sistemas de ecuaciones lineales. El planteamiento de los mismos requiere saber expresar en lenguaje algebraico las condiciones que en lenguaje común contiene el enunciado del problema como mostraremos en los ejemplos siguientes:

| | |
|---|---|
| Un número | $x$ |
| Un número aumentado en 2 | $x + 2$ |
| Un número disminuido en 3 | $x - 3$ |
| El duplo de un número | $2x$ |
| El triplo de un número | $3x$ |
| La mitad de un número | $x/2$ ó $\frac{1}{2}x$ |
| El cuadrado de un número | $x^2$ |
| El duplo de un número aumentado en 5 | $2x + 5$ |
| La edad de una persona hace cuatro años | $x - 4$ |
| La edad de una persona dentro de 5 años | $x + 5$ |
| Dos números enteros consecutivos | $n$ y $n+1$ |
| Un número par | $2n$ |
| Un número impar | $2n + 1$ |
| Si las cifras de un número natural es $d$ y las cifras de las unidades es $u$ | $n = 10d+u$<br>Ej: $54 = 10(5) + 4$ |
| Si una persona camina $x$ km por hora, el número de kms que camina en $t$ horas (a un paso uniforme) | $x.\ t$ |
| El número de centavos que hay en $x$ pesos y en $y$ pesetas | $100x + 20y$ |

Toda situación en la que se persigue la determinación de uno o varios números desconocidos mediante la relación (o relaciones) que existen entre ellos y otros conocidos, se dice que es un problema.

Los números y las relaciones conocidas constituyen los datos del problema. Los números cuya determinación se pide son las incógnitas.

A continuación mostraremos con algunos ejemplos la técnica de la resolución de los problemas por medio de ecuaciones (resolución algebraica).

**Ejemplos.**

Resolver los siguientes problemas:

a) La suma de dos números es igual a 52. La diferencia entre el triplo de uno y el quíntuplo del otro es igual a 100. ¿Cuáles son los números?

b) La suma de las edades de un matrimonio y de su hijo es 84 años. La quinta parte de la edad del hijo es igual a la diferencia entre las edades del padre y la madre. La suma de las edades de la madre y el hijo es igual a cuatro tercios de la edad del padre. ¿Cuáles son sus edades?

c) Cuáles son las longitudes de los lados de un triángulo si cada dos lados suman 9 cms, 12 cms y 13 cms.

**Algunos aspectos a tener en cuenta en la solución de los problemas:**

1) Representación (según el enunciado, escoger las variables a utilizar).

2) Planteo (formación de las ecuaciones).

3) Resolución (aplicación de los métodos estudiados para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas).

4) Interpretación de los resultados obtenidos y con esto dar la respuesta.

a) 1er número $\rightarrow x$

2do número $\rightarrow y$

1) $x + y = 52 \,/ .(-3)$

2) $3x\text{-}5y = 100$

$$-3x - 3y = -156$$
$$3x - 5y = 100$$
$$-8y = -56 \,/:(-8)$$
$$y = 7$$

Sustituyendo en la ecuación 1):

$$x + 7 = 52$$
$$x = 52 - 7 = 45$$

R/ El primer número es 45 y el segundo es 7.

b) Edad del padre ------ $x$

Edad de la madre --- $y$

Edad del hijo ------ $z$

1) $x+y+z=84$

2) $\frac{z}{5}=x-y \quad /\cdot(5)$

3) $y+z=\frac{4x}{3} \quad /\cdot(3)$

1) $x+y+z=84$

2) $-5x+5y+z=0$

3) $-4x+3y+3z=0$

En ecuación (1) y (2)

1) $x+y+z=84 \;/.(5)$

2) $\underline{-5x+5y+z=0}$

$5x+5y+5z=420$

$\underline{-5x+5y+z=0}$

$10y+6z=420 \;/:(2)$

4) $5y+3z=210$

En ecuación (1) y (3)

1) $x+y+z=84 \;/.(4)$

3) $\underline{-4x+3y+3z=0}$

$4x+4y+4z=336$

$\underline{-4x+3y+3z=0}$

$7y+7z=336 \;/:(7)$

5) $y+z=48$

Con ecuación (4) y (5)

4) $5y+3z=210$

5) $\underline{y+z=48 \;/.(-3)}$

$5y+3z=210$

$-3y-3z=-144$

$2y=66$

$y=33$

Sustituyendo en (5)

$33+z=48$

$z=48-33$

$z=15$

Sustituyendo en (1)

$x+33+15=84$

$x=36$

R/ La edad del padre es: 36 años

La edad de la madre: 33 años

La edad del hijo es: 15 años

c) Los lados del triángulo.

$L1$------- $x$

$L2$ ------- $y$

$L3$ ------- $z$

1) $x+y=9$

2) $y+z=12$

3) $x+z=13$

En ecuación (1) y (2)

1) $x+y=9/.(-1)$

2) $\underline{y+z=12}$

$-x-y=-9$

$\underline{y+z=12}$

4) $-x+z=3$

Sustituyendo en (3)

$x + 8 = 13$

$x = 5$

En ecuación (3) y (4)

3) $x+z=13$

4) $\underline{-x+z=3}$

$2z=16$

$z=16:2$

$z=8$

Sustituyendo en (1)

$5 + y = 9$

$y = 4$

R/ Las longitudes de los lados son 5cms; 4cms y 8 cms respectivamente.

**Ejercicios:**

1. Dado el siguiente sistema de ecuaciones.

   ( I ) $3x + y = 2$

   ( II ) $2x + 3y = 5$

Halle su conjunto solución.
Represente gráficamente la función definida por la ecuación (I).

2. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales

I) $\begin{aligned} 4x+3y-2z &= 5 \\ 5x - y - 4z &= 15 \\ 3x + 2y &= 5 \end{aligned}$

II) $\begin{aligned} 6x + y + 2z &= 5 \\ x - 10y - 2z &= 7 \\ 5x - 2y + z &= 5 \end{aligned}$

III) $\begin{aligned} 15\,(x + 2) - 20y &= 50 \\ 20(x - 3) - 40(y - x) &= 20 \end{aligned}$

IV) $\begin{aligned} x+y+z &= 3 \\ 2x-y+z &= 2 \\ 2y+z &= 3 \end{aligned}$

V) $\begin{aligned} x+y+2z &= 1 \\ x+2y-z &= -2 \\ x+3y+z &= 5 \end{aligned}$

3. Resuelva y compruebe: $\begin{aligned} \frac{x}{4}+\frac{y}{4} &= \frac{1}{2} \\ \frac{x}{2}-\frac{z}{3} &= \frac{1}{6} \\ 4y + z &= 5 \end{aligned}$

4. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

*a.* $\begin{aligned} x - y &= -5 \\ x + y &= 7 \end{aligned}$

*b.* $\begin{aligned} 2x + y &= 4 \\ 3x + y &= 5 \end{aligned}$

*c.* $\begin{aligned} x + y &= 14 \\ x - 3y &= -7 \end{aligned}$

*d.* $\begin{aligned} 6x - y &= 13 \\ 3x - y &= 4 \end{aligned}$

*e.* $\begin{aligned} 3x - 2y &= 7 \\ 4x + 3y &= 37 \end{aligned}$

*f.* $\begin{aligned} 2x + 9y &= 3 \\ 4x + 3y &= 80 \end{aligned}$

*g.* $\begin{array}{r} -10x+11y=36 \\ 4x+3y=-18 \end{array}$

*h.* $\begin{array}{r} 5x-6y=-2 \\ 3x+8y=80 \end{array}$

*i.* $\begin{array}{r} 13x+15y=17 \\ -7x+10y=27 \end{array}$

*j.* $\begin{array}{r} x+12y=58 \\ 5x-8y=18 \end{array}$

*k.* $\begin{array}{r} 9x+20y=33 \\ 8x+15y=21 \end{array}$

*l.* $\begin{array}{r} 6x+2(y+3)=0 \\ 3(x+y)=-11 \end{array}$

*m.* $\begin{array}{l} \frac{1}{3}x+\frac{1}{5}y=3 \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y=4{,}25 \end{array}$

*n.* $\begin{array}{l} x=\frac{3}{2}y-9 \\ y=\frac{3}{4}x+3 \end{array}$

*o.* $\begin{array}{l} \frac{x}{5}+\frac{y}{2}=5 \\ x-y=4 \end{array}$

*p.* $\begin{array}{l} \frac{2}{3}x+y=16 \\ x+y=14 \end{array}$

*q.* $\begin{array}{l} \frac{x}{9}+\frac{y}{7}=10 \\ \frac{x}{3}+y=50 \end{array}$

*r.* $\begin{array}{l} \frac{1}{3}(x-y)=x-4 \\ \frac{1}{2}(x+y)=x-y+\frac{1}{2} \end{array}$

*s.* $\begin{array}{l} \frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}=2 \\ \frac{3}{x+y}+\frac{4}{x-y}=7 \end{array}$

*t.* $\begin{array}{l} \frac{4}{x}+\frac{3}{5y}=4{,}2 \\ \frac{9}{2x}-\frac{6}{y}=2{,}5 \end{array}$

*u.* $\begin{array}{l} x+y+z=15 \\ x-y+z=5 \\ x-y-z=-9 \end{array}$

*v.* $\begin{array}{l} 6x+y+2z=4 \\ x-10y-2z=7 \\ 5x-2y+z=5 \end{array}$

*w.*
$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 6z - 16 \\ 4x - y &= z + 5 \\ 3x + 2(z - 1) &= x \end{aligned}$$

*x.*
$$\begin{aligned} \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{z}{3} &= 3 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{6} - \frac{z}{2} &= 13 \\ \frac{x}{6} - \frac{y}{3} + \frac{z}{6} &= 0 \end{aligned}$$

*y.*
$$\begin{aligned} x + \frac{1}{2}(y + z) &= 5 \\ y + \frac{(x + z)}{2} &= 5 \\ z + \frac{(x + y)}{2} &= 5 \end{aligned}$$

*z.*
$$\begin{aligned} x^2 &= 12y \\ y &= \frac{x}{4} \end{aligned}$$

*aa.*
$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= 2y \\ y - x &= 0 \end{aligned}$$

*bb.*
$$\begin{aligned} y^2 &= 2x + 1 \\ y - x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

*cc.*
$$\begin{aligned} (y - 1)^2 &= 8(x - 2) \\ y - x &= 1 \end{aligned}$$

*dd.*
$$\begin{aligned} \frac{x^2}{4} + y^2 &= 1 \\ y + 1 &= \frac{x}{2} \end{aligned}$$

**Problemas:**

1. La suma de dos números es 48. La diferencia entre el duplo del mayor y el triplo del menor es 6. ¿Cuáles son los números?

2. Si la mitad del número se resta del mayor de dos números, el resultado es 36. Halla los números, si difieren en 35.

3. La diferencia de dos números racionales es 5/8. El duplo del mayor menos el triplo del menor es igual a uno. ¿Cuáles son los números?

4. La suma del triplo de un número con el cuádruplo de otro es 85. La suma de la tercera parte del primero y la quinta parte del segundo es 7. ¿Cuales son los números?

5. Para fabricar una pieza entre dos obreros se necesitan 48 minutos. Si la diferencia entre los tiempos empleados entre ambos es de 8 minutos. ¿Qué tiempo empleó cada uno en la fabricación de la pieza?

6. Entre dos terminales marítimas se embarcan 2 000 t de azúcar por hora, si una de ellas embarca las 2/3 partes de lo que embarca la otra. ¿Cuántas toneladas de azúcar embarca cada una de las terminales por hora?

7. En una tabla gimnástica, los 196 alumnos participantes forman 6 círculos y 4 estrellas. Para formar un círculo y una estrella se necesitan 40 alumnos. ¿Con cuántos alumnos se forma un círculo y con cuántos una estrella?

8. La diferencia entre el duplo de las horas voluntarias realizadas por Mario y el triplo de las horas realizadas por Alexis es de 12 h, y la mitad del número de horas voluntarias de Mario excede en 13h a la tercera parte de las de Alexis. ¿Cuántas horas de trabajo voluntario realizó cada uno?

9. En el décimo grado de un preuniversitario, seis veces el número de varones es igual a cinco veces el número de hembras, y la mitad del número de varones excede en 10 a la tercera parte del número de hembras. ¿Cuántas hembras y cuántos varones hay en el grado?

10. En un aula de 38 alumnos, la cuarta parte de los aprobados excede en 2 a la cantidad de alumnos suspensos. ¿Cuántos alumnos aprobados y cuántos suspensos hay en el aula?

11. En un preuniversitario, la cuarta parte de los alumnos que practican pelota, sumados con la tercera parte de los que practican natación es igual a 20. Si se divide el triplo del número de los que juegan pelota entre el número de los que practican natación, el cociente es 4. ¿Cuántos alumnos practican cada deporte?

12. A una obra en construcción se le envían en el mes 80 cargas con un total de 488 t de materiales. Algunos camiones cargan 5 t y los restantes 7 t. ¿Cuántas cargas de cada tipo se han enviado?

13. La suma de tres números es 19. El triplo del menor más el duplo del mediano menos el mayor es igual a 18. El menor más el mediano excede en tres unidades al mayor. Halla los números.

14. Un melón, una piña y un aguacate cuestan \$ 2.60; dos melones y tres piñas cuestan \$5.60; dos piñas y tres aguacates cuestan \$2.90. ¿Cuánto vale cada fruta?

15. El número de horas voluntarias realizadas por Norma, Caridad y Moraima suman 100. Entre Norma y Caridad han realizado los mismos números de horas que Moraima, y cuatro veces las horas realizadas por Norma e igual al número de horas realizadas por Moraima y Caridad. ¿Cuántas horas de trabajo voluntario han realizado cada una?

16. La suma de las edades de Fermín, Leopoldo y Jorge es de 75 años. La suma de las edades de Fermín y Leopoldo es de 45 años y el duplo de la edad de Jorge excede en 15 años a la suma de las edades de Fermín y Leopoldo. ¿Qué edad tiene cada uno, si Fermín es 5 años menor que Leopoldo?

17. En un kiosco se venden 3 clases de revistas a \$0.15, \$0.20 y \$0.25 respectivamente. En un día se vendieron 255 revistas por un valor de \$52.50. Si el triplo de las que se venden a \$0.15 es igual al duplo de las que se venden a \$0.25. ¿Cuántas revistas de cada tipo se han vendido?

18. En un triángulo cualquiera la suma de las amplitudes del ángulo mediano y del ángulo menor excede en 36º al ángulo mayor y la suma de los ángulos mayor y mediano es igual al triplo del ángulo menor. ¿Cuántos grados mide cada uno?

19. En un número de 3 cifras, la suma de ellas es 14, la suma del triplo de las cifras de las centenas con las cifras de las unidades es igual a las cifras de las decenas. Si al números se le suman 99, el nuevo número tiene las mismas cifras pero en orden inverso. ¿Cuál es el número?

20. En un número de 3 cifras, la suma de ellas es 15, la suma de las cifras de las centenas y de las decenas es igual al cuádruplo de las cifras de las unidades, y si al número se le resta 18, se intercambian las cifras de las unidades y de las decenas. ¿Cuál es el número?

21. Un campesino tiene en su casa ovejas y gallinas. En total se tienen 56 patas y 17 cabezas. ¿Cuántas ovejas y cuántas gallinas tiene?

22. La entrada a un espectáculo cuesta 80 centavos los mayores y 50 centavos los menores. Una noche entraron al espectáculo 320 personas y habiendo todas pagado la entrada, se recaudó por este concepto 220 pesos. ¿Cuántos mayores y cuántos menores entraron esa noche?

23. Un caballo y un mulo caminaban juntos, llevando sobre sus lomos pesados sacos. Lamentábase el caballo de su penosa carga a lo que el mulo le dijo: ¿De qué te quejas? Si yo tomara un saco, mi carga sería el doble de la tuya. En cambio si te doy un saco, tu carga se igualaría a la mía. ¿Diga cuántos sacos llevaba el caballo y cuántos el mulo?

24. Un tren de carga con 38 vagones transporta 730 toneladas de minerales. Algunos vagones cargan 15t de mineral; los demás, transportan 20t. ¿Cuántos vagones de cada tipo hay?

25. Los tres ángulos interiores de un triángulo están en la razón. $\frac{5}{6}$ **y** $\frac{6}{7}$. Calcula la amplitud de cada uno.

26. En un grupo de estudiantes del 7mo grado de una ESBU, hay 35 estudiantes. Si el cuádruple de la cantidad de hembras excede en 20 a la cantidad de varones, ¿cuántas hembras y cuántos varones tiene el grupo?

27. La entrada a una piscina cuesta \$5.00 por 3 mayores y 4 menores. ¿Cuánto paga cada uno, si un domingo entraron 31 mayores y 20 niños y se recaudó por este concepto \$41.00?

28. En una fábrica de calzado solo se elaboran zapatos para niños y mujeres. Si 3 pares de zapatos de niños y 2 pares de mujeres cuestan \$140.00 y en una jornada se vendieron 20 pares de niños y 40 pares de mujeres y se recaudaron \$2000.00. ¿Cuánto cuesta un par de zapato de niño y uno de mujer?

29. Una parcela de autoconsumo de un CDR de nuestra provincia tiene forma rectangular. Si uno de los lados es menor en $3m$ que el otro y el área del terreno es $28m^2$ . Calcula la longitud que tiene la cerca que rodea dicha parcela.

30. Entre Juan, Daniel y Pedro sembraron 36 árboles frutales. Entre Juan y Daniel sembraron 22, entre Daniel y Pedro sembraron 23 y entre Pedro y Juan sembraron 27. ¿Cuántos árboles frutales sembró cada uno?

31. En un ómnibus articulado viajan 96 personas. El número de mujeres es el triplo del número de niños y la cantidad de hombres es igual a la suma de la cantidad de mujeres y niños. ¿Cuántos niños viajan en el ómnibus?

32. El denominador de una fracción supera en 3 unidades al numerador. Si a cada término de la misma se le adicionan 2 unidades se obtiene la fracción $\frac{2}{3}$. ¿Cuál es la fracción inicial?

33. El promedio de las notas de Miguel, un estudiante de Pre Universitario, en las asignaturas: Español, Inglés y Geografía es 88 puntos. Si hubiera obtenido 100 puntos en Español, el promedio sería 92 pero si en lugar de obtener 100 en Español lo hubiera obtenido en Geografía sería 94 el promedio. ¿Qué promedio hubiera obtenido si los 100 puntos los hubiera obtenido en Inglés?

34. Dos fábricas producen el mismo tipo de piezas. José trabaja en una de ellas y Pablo en la otra. Entre ellos tiene lugar el siguiente diálogo:

José: Si mi fábrica lograse aumentar su producción diaria en 19 piezas, entonces produciría cada día el doble de lo que tu fábrica produce diariamente.

Pablo: ¿Tú conoces la producción diaria del país?

José: Sí, es de 87 piezas.

Pablo: Pues si tu fábrica produjese diariamente 2 piezas menos, entonces el cuadrado de esa producción sumado con lo que el país produce diariamente sería 8 veces lo que nuestras dos fábricas juntas producen al día en estos momentos.

¿Cuántas piezas producen diariamente cada fábrica?

35. Las tres cifras de un número suman 13. Si del número se resta 270 se obtiene otro número de tres cifras en el cual resultan intercambiadas la cifra de las centenas y de las decenas, pero se conserva la cifra de las unidades. El número de dos cifras formado por la cifra de las decenas y la de las unidades del número original es igual a 6 veces la cifra de las centenas. ¿Cuál es el número?

36. En un mercado agropecuario hay dos cajas que contienen en total 90 Kg. de frijoles. Si de la caja más pesada se sacase el 10 % del contenido y se echase en la otra entonces ambas tendrían la misma cantidad. ¿cuántos Kg. de frijoles contiene cada caja?

37. Dos fábricas debían producir entre ambas 360 piezas de repuesto, según sus respectivos planes de producción. La primera de ellas cumplió su plan al 112% y la segunda al 110% y entre las dos produjeron 400 piezas de repuesto.

a) ¿Cuál era el plan de producción de cada fábrica?

b) ¿Cuántas piezas de repuesto produjeron cada fábrica?

38. En un taller de piezas de repuesto había en total 120 piezas de dos tipos. Una empresa adquirió la mitad de las piezas del tipo I y tres cuartos de las piezas del tipo II. Si lo que quedó es el 40% de las piezas que había inicialmente, calcula cuántas piezas de cada tipo había al principio.

39. Un número de cuatro cifras es mayor que 1000 pero menor que 2000.La cifra de las unidades es igual a la cifra de las decenas disminuida en 2. La cifra de las centenas es igual a la cifra de las unidades aumentada en 2. La suma de la cifra de las decenas y la cifra de las centenas es igual a la cifra de las unidades aumentada en 11. ¿Cuál es el número?

40. Dos grupos de estudiantes, en una jornada de trabajo voluntario, están recogiendo tomates. Al inicio de la jornada se le entregó a cada uno cierta cantidad de cajas vacías. La tercera parte de las cajas entregadas al grupo B excede en 4 a la cuarta parte de las entregadas al grupo A. Al terminar la sesión de campo, entre los dos grupos lograron llenar todas las cajas pero el grupo A, llenó 30 cajas menos que las que le habían sido entregadas y la cantidad de cajas que logró llenar el grupo B excede en dos al duplo de los que llenó el grupo A. ¿Cuántas cajas vacías se entregaron al inicio de la jornada a cada grupo?

41. En un Instituto Pre Universitario Vocacional en Ciencias Exactas hay 400 varones más que hembras. Se decidió trasladar para otro centro de este mismo tipo al 70% de los varones y al 20% de las hembras, quedando en el centro inicial, 100 hembras más que varones. ¿Cuántas hembras y cuántos varones se quedaron?

42. En un recipiente hay 10 Kg. de mezcla de alcohol y agua. Se añade cierta cantidad de agua de forma que la cantidad de alcohol representa el 30% del total. Se añade otra cantidad igual de agua y

entonces el alcohol representa el 20% del total. ¿Cuánta agua se añadió en total y qué cantidad de alcohol hay?

43. En una granja estatal tenían sembrados 480 ha más de papas que de cereales. Después de haber recolectado el 80% del cultivo de papas y el 25% del de cereales quedaron en el campo 300 ha más de cereales que de papas. ¿Qué cantidad de hectáreas de cada uno de los cultivos habían sembrados en la granja?

44. Alejandro hizo dos llamadas de larga distancia desde Ciudad de la Habana, una a Santiago de Cuba y la otra a Matanzas. La operadora al final le informa que habló en cada ocasión más de tres minutos y que en total estuvo conversando 15 minutos por lo que debe pagar $7,40. Más tarde, Alejandro consultó la siguiente tabla para saber lo que le cobraron por cada llamada:

| Desde Ciudad de la Habana a los siguientes territorios. | Tres minutos | Minuto adicional |
|---|---|---|
| Pinar del Río, Isla de la Juventud, Matanzas | 1.00 | 0.25 |
| Las Tunas, Holguín, Granma, Santiago de Cuba, Guantánamo | 2.40 | 0.60 |

¿Cuántos minutos estuvo hablando Alejandro con cada provincia?

¿Cuánto pagó por cada llamada?

45. Una empresa de la industria electrónica produce teclados y pantallas para calculadoras gráficas en dos plantas: en la A y en la B. En la planta A se fabrican 14 teclados y 9 pantallas por hora y en cada jornada de 8 horas se desechan como promedio 2 teclados y 2 pantallas. En la planta B, de más moderna tecnología, se producen 55 teclados y 55 pantallas por hora. ¿Cuántas jornadas de 8 horas debe trabajar cada planta para que conjuntamente produzcan 1210 teclados y 1090 pantallas?

46. En una UBPC se plantaron 2 caballerías más de papas que de boniatos. Después de una semana de trabajo en la recolección, los trabajadores de la UBPC verificaron que aun quedaba por recoger el 21% de la plantación de papas y el 75% de la de boniatos, lo que implicaba que faltaba por recoger 3,9 caballerías más de boniatos que de papas. ¿Cuántas caballerías de cada cultivo se habían plantado?

47. Entre dos Institutos Preuniversitarios en el Campo había a principios de curso 62 alumnos de duodécimo grado que manifestaron interés por estudiar carreras pedagógicas. A mediados de curso, el número de interesados en el IPUEC 1 se incrementó en un 20%, y en el IPUEC 2, en un 25%, de modo que entre ambos centros hay ahora 76 alumnos que desean estudiar una carrera pedagógica. ¿Cuántos alumnos de grado 12 aspiran en estos momentos a una carrera pedagógica en cada escuela?

48. En un grupo de duodécimo grado todos sus alumnos eligieron en la primera opción una carrera de los grupos de humanidades, ciencias técnicas o ciencias naturales, comportándose las cifras de este modo:

El 20% de la matrícula optó por carreras de humanidades, las $3/4$ partes del resto de los alumnos prefirieron carreras técnicas, mientras que 8 alumnos optaron por ciencias naturales.

a) Halla la matrícula del grupo.

b) ¿Cuántos alumnos optaron por las carreras técnicas en la primera opción?

49. En el pasado campeonato nacional de pelota en nuestro país, después que cada equipo había celebrado la misma cantidad de juegos, los jugadores A y B habían conectado la mayor cantidad de jonrones, en ese orden. El triplo de los jonrones conectados por B era superior en 16 al duplo de los conectados por A. Si el cuadrado de los jonrones conectados por B lo dividimos por los conectados por A, el cociente es 20 y el resto es 16. ¿Cuántos jonrones conectó cada jugador?

50. Dos camiones distribuyeron cierta cantidad de materiales, de modo que cada uno transportó la mitad. El primer camión realizó 17 viajes, transportando siempre el máximo de su capacidad, excepto en el último viaje que solo utilizó el 50% de su capacidad. El segundo camión dio un viaje más y en cada viaje transportó una tonelada menos que la capacidad máxima del primer camión. ¿Cuántas toneladas de materiales transportaron entre los dos camiones?

51. En una cooperativa de producción agropecuaria se sembraron 40,5 hectáreas más de ajos que de cebolla. Al terminar la recolección de las $\frac{3}{5}$ partes de las hectáreas de ajo y el 30% de las hectáreas de cebolla se concluyó que se había recolectado un total de 97,2 hectáreas ¿Cuántas hectáreas de ajo y de cebollas fueron sembrada en la cooperativa?

52. En febrero una casa de vivienda consumió en el mes, durante el período nocturno el doble de la electricidad que consumió durante el período diurno. Medidas internas aplicadas en ese núcleo familiar hicieron que en marzo, durante el período nocturno, el consumo eléctrico del mes disminuyera en un 25% y durante el período diurno se ahorra un 20%, lo que hizo que el consumo eléctrico de la vivienda este mes fuese de 184Kwh ¿En qué tanto por ciento disminuyó el consumo de energía de un mes a otro, una vez aplicadas las medidas?

53. En un Instituto Preuniversitario en el Campo participaron en el curso anterior todos sus alumnos en la Brigadas Estudiantiles de Trabajo. Si la cantidad de hembras participantes excedió en 70 al 40% de la cantidad de varones, y la razón entre la cantidad de hembras y varones es 3 : 4. ¿En cuánto supera la cantidad de varones a la cantidad de hembras?

54. En los Concursos Nacionales de Matemática, Física, Química e Informática las provincias que obtuvieron los tres primeros lugares, en ese orden, fueron Ciudad de la Habana con 105 puntos, Las Tunas con 74 puntos y Villa Clara con 65 puntos. En Matemática y Física la provincia ganadora resultó ser Ciudad de la Habana con 34 puntos en cada una de estas asignaturas; en matemática, Villa Clara logró 15 puntos y Las Tunas 5, pero en Física Las Tunas alcanzó 32 puntos y Villa Clara , 3 puntos. En Informática la provincia ganadora fue Villa Clara con 4 puntos más que Las Tunas y esta 4 puntos más que Ciudad de la Habana. Si el total de puntos de estas tres provincias en Informática fue de 57 puntos, determina cuántos puntos obtuvo cada una de estas tres provincias en Informática y Química

55. Dos brigadas de estudiantes de un IPUEC se propusieron recoger conjuntamente en un día 280 cajas de tomates. Después de terminar la jornada de la mañana, la brigada 1 había recogido las dos

quintas de lo que se propuso y la brigada 2 el 60%, quedando por recoger entre las dos 142 cajas ¿Cuántas cajas de tomates le faltaban por recoger a cada brigada en la jornada de la tarde para completar el total de cajas que se propusieron?

56. En los meses de agosto y septiembre del año pasado, nuestro país fue azotado por los huracanes Gustav y Ike. Debido a las afectaciones provocadas se decidió, por parte de la dirección del país, asignar materiales de la construcción en las zonas más afectadas como parte del programa para la recuperación. En un Consejo Popular de la provincia La Habana se asignaron 3t más de cemento que de arena. Al transcurrir una semana, se determinó que aún faltaban por descargar el 20% de la cantidad de toneladas de cemento y el 70% de la cantidad de toneladas de arena lo cual equivale a que se tendrán que entregar 6,9t más de arena que de cemento.¿Cuántas toneladas de cada material se entregaron?

57. En días pasados se realizó una convocatoria para participar en un trabajo voluntario en la agricultura. Tanto el sábado como el domingo, el 60% del total de participantes eran hombres. Se sabe que el sábado participaron 25 hombres más que mujeres. Si el domingo participaron 10 mujeres menos que el sábado. ¿Cuántas personas más participaron el sábado que el domingo?

58. Tres trabajadores sociales Maria, Luís y José visitaron cierto número de viviendas durante dos jornadas de trabajo con la finalidad de actualizar el cobro de los efectos electrodomésticos entregado como parte de los proyectos de la Revolución. Como resultado del trabajo realizado en la primera jornada se sabe que fueron visitadas por los tres un total de 100 viviendas, y que Maria visitó 5 casa menos que las que visitó Luís, sin embargo en la segunda jornada con respecto a la primera, la cantidad de viviendas visitada por Luís disminuyó en un 10%, mientras que José aumentó en 5 la cantidad de viviendas visitadas. Si en esta última jornada se visitaron por ellos dos el 77% del total de las viviendas visitadas durante la primera jornada, ¿Cuántas viviendas visitó Luís y cuántas Losé en esta última jornada?

## BIBLIOGRAFÍA

1. Álvarez Socarrás Ada Matemática para curso Introductorio/ Ada Álvarez Socarrás.- Camagüey: /s.c/,/s.a/.—191p.
2. Ballester, Sergio: Cómo Sistematizar los conocimientos matemáticos. Editorial Academia. Ciudad de la Habana. 1995.
3. Ballester, Sergio y C. Arango: Cómo Consolidar Conocimientos Matemáticos. Editorial Academia. Ciudad de la Habana. 1995.
4. Campistrus, Pérez L. Y otros: Matemática. Orientaciones Metodológicas 10 grado. Editorial Pueblo y Educación 1989.
5. Cuadrado González, Zulema. Matemática 10mo grado / Zulema Cuadrado González, Richard Nerido Castellanos y Celia Rizo Cabrera. —La Habana: Editorial Pueblo y Edición,
6. 1991. —152p.
7. Exámenes de Ingreso a la Educación Superior