

1.	Amplificadores operacionales (AOP's)	3
1.1	Introducción	3
1.2	Descripción básica	3
1.3	Funcionamiento	6
1.3.1	Etapa diferencial	7
1.3.2	Etapa cambiadora de nivel	7
1.3.3	Etapa de salida	8
1.4	Configuraciones básicas del AOP	8
1.4.1	Realimentación negativa y positiva	8
1.4.2	Amplificador inversor	9
1.4.3	Amplificador no inversor	10
1.4.4	El amplificador sumador inversor	11
1.4.5	El amplificador derivador	12
1.5	Realización práctica	13
2.	Respuesta temporal	23
2.1	Introducción	23
2.1.1	Resistencia	23
2.1.1.1	Una resistencia conectada a un generador de corriente alterna	24
2.1.2	Bobina	25
2.1.2.1	Una bobina conectada a un generador de corriente alterna	25
2.1.3	Condensador	26
2.1.3.1	Un condensador conectado a un generador de corriente alterna	28
2.1.4	La función sinusoidal	30
2.1.4.1	Onda sinusoidal	31
2.1.5	Respuesta temporal	33
2.1.5.1	Valores significativos	35
2.1.5.2	Representación fasorial	35
2.2	Polos y ceros en una función de transferencia	36
2.2.1	Función de transferencia	36
2.2.2	Sistemas de primer orden	37
2.2.3	Sistemas de segundo orden	38
2.2.3.1	Frecuencia natural no amortiguada ( $\omega_n$ ) y relación de amortiguamiento ( $\xi$ )	39
2.2.4	Polos y ceros	39
2.2.4.1	Gráfica de los polos y ceros	39
2.2.4.2	Repetición y cancelación de polos y ceros	40
2.2.5	Estudio de los polos de una función de transferencia	41
2.2.5.1	Polos simples	41
2.2.6	Estudio del lugar geométrico de los polos	43
2.2.6.1	Especificaciones en el dominio temporal	44
2.3	Realización práctica	45
3.	Régimen permanente sinusoidal	55
3.1	Introducción	55
3.2	Impedancia de los componentes básicos	56
3.2.1	Cálculo de circuitos con las impedancias	57
3.3	Fasores	58

3.3.1	Definición de fasor .....	58
3.3.2	Representación fasorial de señales sinusoidales .....	59
3.3.3	Propiedades de los fasores .....	59
3.4	Análisis circuito RLC .....	60
3.4.1	Resonancia, factor de calidad y ancho de banda .....	62
3.5	Realización práctica .....	63
4.	Presupuesto .....	67
5.	Conclusiones .....	68
6.	Bibliografía .....	68
7.	Anexo .....	68

# 1. Amplificadores operacionales (AOP's)

## 1.1 Introducción

El amplificador operacional (AOP) es un circuito cuya popularidad y utilización ha crecido de una manera vertiginosa en los últimos años gracias a la gran cantidad de operaciones en las que puede ser utilizado, en electrónica analógica, prácticamente en todas, y en electrónica digital en bastantes. Gran parte de esta popularidad hay que agradecerla a la aparición de la integración de semiconductores, con la cual este circuito está hoy en día disponible en forma de pequeños circuitos integrados de bajo precio, considerándolo como un componente electrónico más.

El término de amplificador operacional fue nombrado para designar una clase de amplificadores que permiten realizar una serie de operaciones tales como suma, resta, multiplicación, integración, diferenciación..., importantes dentro de la computación analógica. La aparición y desarrollo de la tecnología integrada, que permitía fabricar sobre un único sustrato monolítico de silicio gran cantidad de dispositivos, dio lugar al surgimiento de amplificadores operacionales integrados que desembocaron en una revolución dentro de las aplicaciones analógicas. El AOP es un elemento estrella en los sistemas analógicos, con él podemos amplificar señales, atenuarlas, filtrarlas, etc. Los sistemas de control analógico encuentran en el AOP un elemento de conmutación sumamente simple.

Uno de los modelos de AOP's que desbancó a sus rivales de la época con una técnica de compensación interna muy relevante y de interés incluso en nuestros días fue el AOP 741, un circuito que por sus buenas características, relación precio-fiabilidad y buena disponibilidad, le hacen acreedor al título de más utilizado. Los amplificadores basados en tecnología CMOS han surgido como parte de los circuitos VLSI de mayor complejidad, aunque sus características eléctricas no pueden competir con los de la tecnología bipolar. Su campo de aplicación es más restrictivo pero estructura sencilla y su relativa baja área de ocupación les hacen idóneos en aplicaciones donde no se necesitan altas prestaciones como son los circuitos de capacidades conmutadas. Combinando las ventajas de los dispositivos CMOS y bipolares, la tecnología Bi-CMOS permite el diseño de excelentes AOP's.

## 1.2 Descripción básica

Vamos a considerar única y exclusivamente el amplificador operacional ideal, que aun no existiendo en la vida real, es una aproximación muy precisa y perfectamente válida para el análisis de sistemas reales. Para este estudio nos limitaremos a uno de los dispositivos de entre la amplia gama existente, el 741.

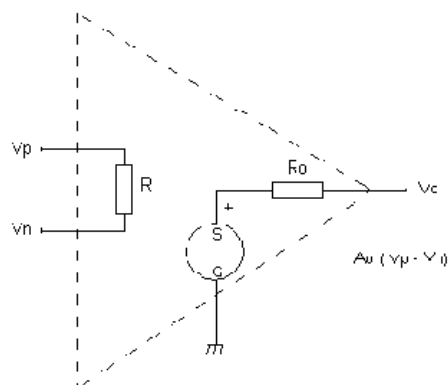
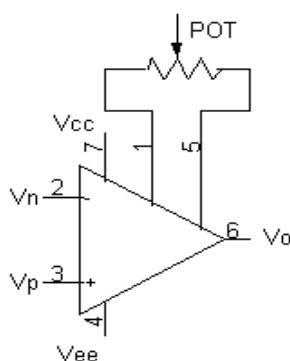


Figura 1.1

Un AOP es un dispositivo electrónico de alta ganancia siendo capaz de ofrecer una tensión de salida en función de una tensión de entrada, a la que se le dota de etapas adicionales para conseguir una salida variable entre los valores positivo y negativo de alimentación. La propiedad fundamental de un amplificador diferencial es la de amplificar la diferencia de las tensiones aplicadas a los terminales de entrada  $V_P$  y  $V_N$ , los cuales se llaman no inversor e inversor respectivamente.

Un amplificador operacional presenta cinco patillas, dos de ellas son las entradas del dispositivo, la primera de ellas llamada entrada inversora ( $V_N$ ), la otra denominada entrada no inversora ( $V_P$ ). Otra de las patillas del amplificador operacional corresponde a la salida del dispositivo ( $V_O$ ) mientras que las dos patillas restantes corresponden a la alimentación requerida por el dispositivo ( $V_{CC}$  y  $V_{EE}$ ,  $V_{CC}$  será la alimentación positiva y  $V_{EE}$  será la alimentación negativa). En realidad, los AOP's poseen al menos ocho terminales, cinco de los cuales son los definidos anteriormente, dos terminales más que se denominan ajuste centrado, que se utiliza para ajustar la tensión de salida ya que por no ser idénticas las entradas produce un desequilibrio interno y con este potenciómetro podemos ajustar esta señal de error a la salida, a este error se le denomina tensión de offset, y por último existe otra patilla que no tiene utilidad.



**Figura 1.2**

Asimismo, el 741 necesita dos tensiones de alimentación  $V_{CC}$  y  $V_{EE}$ , que pueden variar entre  $\pm 5V$  a  $\pm 18V$ . En todas nuestras aplicaciones supondremos una alimentación de  $\pm 15V$  salvo que se especifique lo contrario. La relación entre las tensiones de entrada y salida es

$$V_O = A_O \cdot (V_P - V_N)$$

en la que  $A_O$  es la ganancia sin realimentación, esta ganancia es de un valor muy alto, para el AOP 741 es de 200.000, equivalente a 106dB. Este valor tan alto de  $A_O$  está definido para una tensión de alimentación fija, a temperatura constante y sobre una carga determinada, sin embargo, este valor puede variar con los siguientes parámetros:

- temperatura: la ganancia disminuirá si también disminuye la temperatura, normalmente su valor es de 25 °C.
- frecuencia: disminuye la ganancia si la frecuencia aumenta, el valor de  $A_O$  sólo es constante para un valor muy bajo de frecuencia normalmente comprendido entre un valor de 5 a 10 Hz.
- tensión de alimentación: la ganancia disminuye al disminuir ésta, en nuestro caso del AOP 741 el valor de  $A_O$ , proporcionado por el fabricante, corresponde a una tensión de  $\pm 15V$ .

En el modelo interno de un AOP se observan las resistencias  $R_i$ , resistencia de entrada, y  $R_o$ , resistencia de salida. Los valores de estas resistencias para el AOP 741 son típicamente de  $2\text{ M}\Omega$  para la impedancia de entrada y de  $75\ \Omega$  para la impedancia de salida. La fuente de tensión de salida que tiene el AOP corresponde al valor de  $A_o \cdot (V_P - V_N)$ .

La tensión de entrada se define en modo diferencial ( $V_d$ ) y modo común ( $V_c$ ) como

$$V_d = (V_P - V_N)$$

$$V_c = \frac{(V_P + V_N)}{2}$$

y la tensión de salida viene expresada por

$$V_o = A_d \cdot V_d + A_c \cdot V_c$$

La  $A_d$  es la denominada ganancia en modo diferencial, y la  $A_c$  es la ganancia en modo común, que no se indica directamente, sino a través del parámetro de relación de rechazo en modo común ( CMRR ). El CMRR indica la relación entre la ganancia que proporciona el circuito a la tensión diferencial y la ganancia de la tensión común de entrada, tiene en cuenta que el AOP no puede rechazar totalmente las tensiones comunes que haya en las entradas, este valor es expresado en dB.

$$CMRR = 20 \cdot \log \frac{|A_o|}{|A_c|}$$

Otros parámetros que miden estas imperfecciones son los parámetros de offset, que producen una pequeña tensión de salida incluso en ausencia de tensión de entrada.

- corriente de polarización de entrada: es el valor medio de las corrientes de polarización de las entradas.
- corriente de offset de entrada: es la diferencia de las corrientes de polarización de las entradas.
- tensión de offset de entrada: es la tensión diferencial de entrada necesaria para obtener una tensión de salida de cero voltios.

El fabricante suele dar estos parámetros entre las características proporcionadas así como la variación de estos valores ante factores tales como la temperatura, frecuencia de entrada y tensiones de alimentación.

Otro parámetro muy importante de un AOP es la velocidad de variación de la tensión de salida, que se llama Slew Rate (SR), que viene definido como la máxima velocidad que puede tomar la variación de la tensión de salida para señales de entrada de gran amplitud.

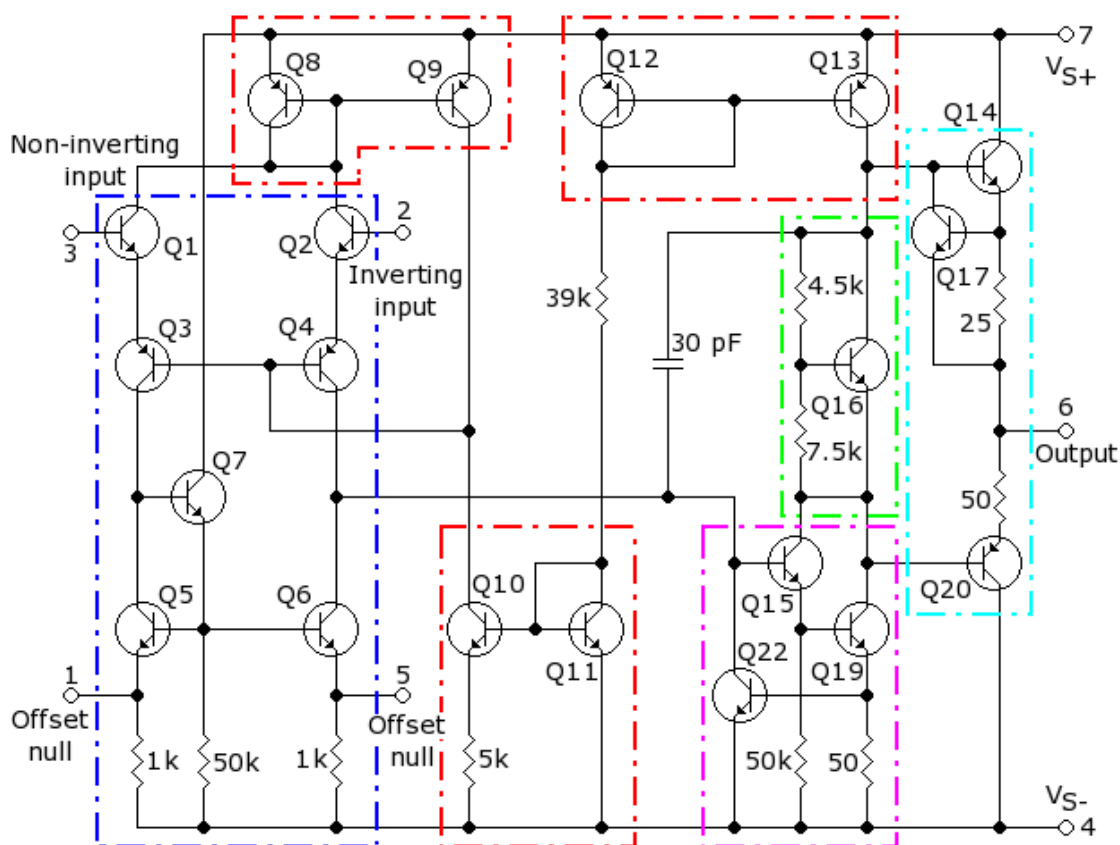
$$SR = \frac{|\Delta V_o|}{\Delta t}$$

Una vez explicado todos los parámetros que pueden afectar al comportamiento de AOP enumeraremos las características que definen a un AOP ideal

- resistencia de entrada infinita
- resistencia de salida cero
- ganancia en tensión en modo diferencial infinita
- ganancia en tensión en modo común cero
- corrientes de entradas cero
- ancho de banda infinito
- ausencia de desviación en las características con la temperatura

### 1.3 Funcionamiento

Para el estudio del funcionamiento de un amplificador operacional dividiremos en tres bloques fundamentales la estructura interna de un AOP 741: etapa diferencial, etapa cambiadora de nivel y etapa de salida.



Etapa diferencial

Etapa cambiadora de nivel

Etapa de salida

Figura 1.3

### 1.3.1 Etapa diferencial

En la etapa diferencial del amplificador operacional 741 se puede observar dos grupos de transistores Q1-Q3 y Q2-Q4 en configuración de colector común Q1 y Q2 y en base común Q3 y Q4. Los transistores actúan a modo de generadores de corriente, junto a estos componentes básicos se encuentran los restantes elementos de polarización. De las ramas comprendidas por los transistores Q5, Q7 y Q6 se podrían simplificar por tres fuentes de corriente  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  respectivamente, asimismo, dada la absoluta simetría respecto al eje vertical que pasa por la fuente de corriente proporcionada por  $I_2$  podemos decir que  $Q1=Q2$ ,  $Q3=Q4$  e  $I_1=I_3$ .

En ausencia de señales de entrada la corriente proporcionada por  $I_2$  se reparte por igual entre Q3 y Q4, dando lugar a una determinada tensión de salida. Si aplicamos una señal común a ambas entradas, variaremos las corrientes de polarización de Q1 y Q2, pero al suponer que tenemos una absoluta simetría en el circuito nos representará que la corriente  $I_2$  se reparte de manera equitativa entre Q3 y Q4 produciendo así que la tensión de salida no varíe.

Si aplicamos una pequeña tensión diferencial de manera que  $V_p > V_N$  conseguiremos aumentar la intensidad de base de Q1, con lo que también aumentará su corriente de emisor, este aumento de la corriente de emisor de Q1 provoca un aumento de la corriente de emisor de Q3 y consecuentemente provoca un aumento de su corriente de base. Si la corriente de base de Q3 aumenta, como  $I_2$  es constante, la corriente de base de Q4 disminuye, disminuyendo a su vez la corriente de colector de Q4. Como  $I_3$  es una fuente de corriente constante una disminución de la corriente de colector de Q4 provoca un aumento de la corriente que circula por la resistencia de emisor de Q4, y en consecuencia, aumentará la tensión en la misma. En resumen, podemos afirmar que un aumento de  $V_p$  respecto a  $V_N$  provoca un aumento de la tensión de salida.

Del mismo modo podemos decir que al invertir la polaridad de la tensión diferencial de entrada ( $V_p < V_N$ ), nos conlleva a una variación de sentido contrario de la tensión de salida, disminuyendo ésta respecto de su valor original.

### 1.3.2 Etapa cambiadora de nivel

La segunda etapa resulta ser un puente entre la entrada y la salida de manera que ambas queden separadas y con las impedancias adaptadas. Una tensión diferencial aplicada a las entradas provoca que la tensión de salida de la etapa diferencial aumente o disminuya respecto de un valor determinado. Sin embargo, esta variación de la tensión se produce con una única polaridad que hace desaprovechar la característica del AOP de estar alimentado por una fuente de alimentación simétrica. Por otra parte, la ganancia de tensión no es extremadamente alta, estando bastante lejos de la ganancia típica de este componente. Para resolver estos dos problemas se intercala a la salida de la etapa diferencial una etapa llamada cambiadora de nivel cuya propiedad principal es la de proporcionar una alta ganancia en tensión, permitir que la tensión de salida varíe entre los valores máximos de  $V_{CC}$  y  $V_{EE}$  y permitir un voltaje de salida cero voltios cuando  $V_p = V_N$ .

El transistor Q5 nos permite acoplar la señal procedente de la etapa diferencial sin sobrecargar la corriente proveniente de ésta, lo cual podría desequilibrar la tensión de salida del diferencial. Los transistores Q5 y Q6 forman un montaje llamado Darlington, el cual nos proporciona un aumento de la corriente y de la ganancia. Resulta muy interesante la inclusión del condensador, normalmente de 30 pF, es, como mucho, el componente más voluminoso de cuantos integran el chip ya que la capacidad requiere un área mínima de placas y un determinado espesor del dieléctrico. La misión de esta capacidad es la de compensar la frecuencia del amplificador, controlando así el ancho de banda de éste cuando se utiliza en circuitos con realimentación negativa.

### 1.3.3 Etapa de salida

La salida está formada esencialmente por un circuito seguidor de emisor con simetría complementaria. Una fuente de corriente polariza los transistores previos para que el conjunto apenas consuma potencia en ausencia de señal.

## 1.4 Configuraciones básicas del AOP

### 1.4.1 Realimentación negativa y positiva

En el circuito de la Figura 1.4 se observa un detalle importante, la señal correctora, que procede de la señal de salida del amplificador operacional, se resta a la señal de entrada del dispositivo. Suponiendo que la señal de error tiende a contrarrestar la procedente del amplificador operacional, si la salida de éste es muy grande, la señal de error se hace negativa y la corriente se estabiliza. Esta técnica recibe el nombre de *realimentación negativa*, ya que la información procedente de la salida se resta a la entrada, y es útil para situaciones en las que es necesario controlar el crecimiento de una señal.

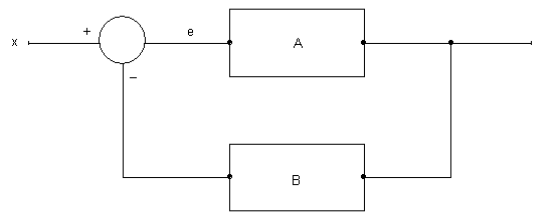


Figura 1.4

Otra posibilidad consiste en sumar la señal obtenida a la señal de error en vez de restarla, lo que se consigue con un pequeño cambio tal y como se muestra en la Figura 1.5. La realimentación que se emplea en este dispositivo es ahora *realimentación positiva*, y no es demasiado útil en aparatos ideales. Lo que ocurre con la señal de salida es que cada vez va creciendo más y más, ya que el lazo de realimentación tiende a hacer que  $\epsilon$  crezca sin control, la aparición de una señal en la salida hace que se sume un cierto factor a la entrada debido al segundo amplificador, lo que incrementa el nivel de la señal de salida, lo que a su vez vuelve a hacer mayor el valor de  $\epsilon$ , cerrándose así un círculo que lleva a infinito el nivel medido en  $y$ .

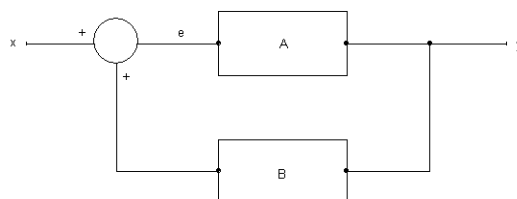


Figura 1.5



La realimentación positiva no es útil para construir amplificadores, pero tiene otras aplicaciones prácticas como por ejemplo en circuitos osciladores.

### 1.4.2 Amplificador inversor

Es el modo de configuración más importante en los circuitos con amplificadores operacionales, denominado inversor por estar desfasada la señal de salida  $180^\circ$  con relación a la de entrada, característica fundamental de este circuito. El circuito de la Figura 1.6 representa el esquema de un amplificador inversor típico que nos servirá para observar el efecto de la impedancia  $Z_2$  de realimentación sobre el comportamiento del amplificador operacional.

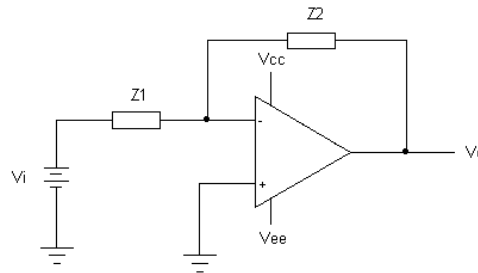


Figura 1.6

La conexión de  $Z_2$  entre el terminal de salida  $V_o$  y el terminal  $V_N$  equivale a conectar en paralelo con la impedancia de entrada del AOP ( $Z_i$ ) una impedancia de valor  $Z' = Z_2/A_o$  y dado que  $A_o \gg 1$  el valor de  $Z'$  prácticamente será cero. Por otra parte, si la impedancia de entrada total es  $Z_i' = Z_i \parallel Z'$  y dado que  $Z' \approx 0$ , entonces  $Z_i' \approx 0$ , lo que indica que la tensión de entrada diferencial ( $V_d$ ) es próxima a cero, y como  $V_P$  está conectado a masa, el potencial del terminal inversor también es prácticamente el de masa. Este efecto lo describimos diciendo que en la entrada del AOP existe un cortocircuito virtual (masa virtual), indicando con el término virtual que aunque esté incluida la impedancia  $Z_2$  para mantener la tensión diferencial igual a cero, en realidad no circula corriente a través de este cortocircuito.

En la Figura 1.7 se representa un amplificador inversor que utilizaremos para analizar y obtener la ganancia del amplificador operacional. Como se ha citado anteriormente, por el cortocircuito no circula corriente (masa virtual), y el punto que une las resistencias  $R_1$  y  $R_2$  se comportará como si estuviese conectado a masa.

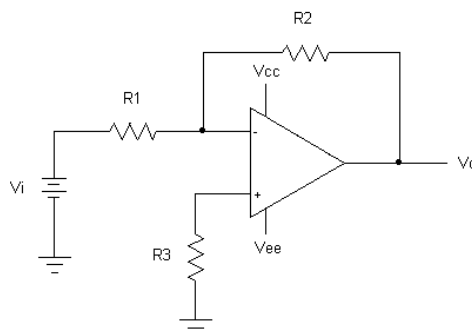


Figura 1.7

Utilizando la ley de Kirchhoff en el punto tenemos que

$$I_1 + I_2 = I_{B1}$$

suponiendo que el AOP es ideal tenemos que  $I_{B1} = 0$  por tanto

$$\frac{V_i - V_d}{R_1} + \frac{V_o - V_d}{R_2} = 0$$

y por otro lado al tener masa virtual ( $V_d = 0$ ) la ecuación nos queda

$$\frac{V_i}{R_1} + \frac{V_o}{R_2} = 0$$

finalmente podemos decir que

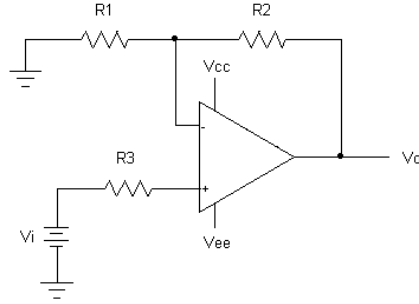
$$A_v = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{R_2}{R_1}$$

Una vez finalizado el análisis de este circuito se puede ver claramente que la tensión de salida es proporcional a la tensión de entrada, siendo el factor de proporcionalidad una constante que definimos con las resistencias  $R_1$  y  $R_2$ . Este simple diseño de amplificador operacional puede atenuar o amplificar las señales aplicadas a nuestra entrada, el nombre de inversor viene dado por el signo negativo presente en la fórmula, es decir, el montaje invierte la fase de la señal de entrada.

Finalmente podemos destacar la presencia de una  $R_3$ , cuya misión es la de compensar los posibles efectos no deseados debidos a imperfecciones en el funcionamiento de los amplificadores operacionales reales, en concreto lo que se busca es disminuir el efecto de unas intensidades de polarización residuales presentes en las entradas del amplificador operacional.

### 1.4.3 Amplificador no inversor

Este circuito presenta como característica más destacable su capacidad para mantener la fase de la señal, en el apartado anterior veíamos como al conectar el terminal  $V_P$  a masa e introducir la señal de entrada por el terminal  $V_N$ , la señal de salida  $V_o$  estaba invertida respecto a la entrada. Si por el contrario, se invierten las funciones de los terminales de entrada, el resultado es un amplificador no inversor, cuyo circuito básico es el mostrado en la Figura 1.8. Para analizar este circuito utilizaremos la misma metodología y razonamiento del circuito amplificador inversor.



**Figura 1.8**

Analizando las corrientes en el nudo  $V_N$  obtenemos que

$$I_1 - I_2 = 0 \quad \rightarrow \quad I_1 = I_2$$

por otra parte tenemos que  $V_p = V_i$  entonces

$$I_1 = \frac{V_i}{R_1} \quad I_2 = \frac{V_o - V_i}{R_2}$$

igualando ambas expresiones tenemos que

$$\frac{V_i}{R_1} = \frac{V_o - V_i}{R_2}$$

$$V_i \cdot R_2 = V_o \cdot R_1 - V_i \cdot R_1$$

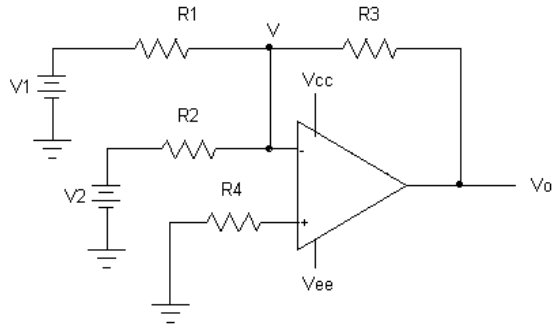
$$V_i \cdot (R_2 + R_1) = V_o \cdot R_1$$

$$A_v = \frac{V_o}{V_i} = \frac{R_2 + R_1}{R_1} = \frac{R_2}{R_1} + 1$$

Se puede apreciar como no existe signo negativo en la expresión (la señal no se invierte), siendo además la ganancia siempre superior a la unidad. Este circuito no permite atenuar señales.

#### **1.4.4 El amplificador sumador inversor**

La Figura 1.9 muestra un amplificador sumador inversor para dos entradas, el número de entradas no está limitado a dos, siendo posible ampliarlo cuando así se requiera. Para analizar el circuito utilizaremos el mismo desarrollo matemático que en los apartados anteriores.



**Figura 1.9**

Analizando las corrientes en el nudo V tenemos que

$$I_1 + I_2 = I_3$$

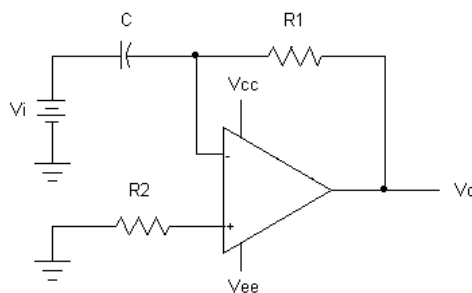
$$\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} = -\frac{V_o}{R_3}$$

$$V_o = -\left(V_1 \cdot \frac{R_3}{R_2} + V_2 \cdot \frac{R_3}{R_1}\right)$$

Al llegar a este punto se debe particularizar la presente configuración para obtener un sumador. Si se afirma la igualdad entre las resistencias  $R_1=R_2=R_3 \dots =R_N$  se obtiene una tensión de salida igual a la suma algebraica de tensiones de entrada, con la correspondiente inversión de fase.

#### 1.4.5 El amplificador derivador

En la Figura 1.10 se puede observar una configuración de un circuito derivador



**Figura 1.10**

Este circuito presenta una salida proporcional a la variación de la señal de entrada. Debido a la relación que existe entre la tensión y la corriente a través de un condensador, y aplicarla sobre nuestro circuito implementado resulta que la tensión de salida es la derivada de la tensión de entrada.

$$I = C \cdot \frac{dV}{dt}$$

El método utilizado para el análisis de este circuito es el mismo que en los amplificadores anteriores

$$I_1 = I_2$$

$$C \cdot \frac{dV_i}{dt} = -\frac{V_o}{R_1}$$

$$V_o = -R_1 \cdot C \cdot \frac{dV_i}{dt}$$

## 1.5 Realización práctica

EL objetivo principal de esta práctica es la familiarización con un circuito integrado comercial de un amplificador operacional, concretamente el  $\mu A741$ . Para ello se llevarán a cabo diversos montajes.

Antes de iniciar la práctica cabe recordar la representación de este dispositivo y su correspondiente patillaje de su encapsulado para diferenciar sus cinco patillas fundamentales a la hora de realizar el montaje práctico.

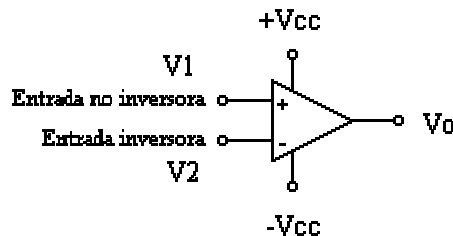


Figura 1.11

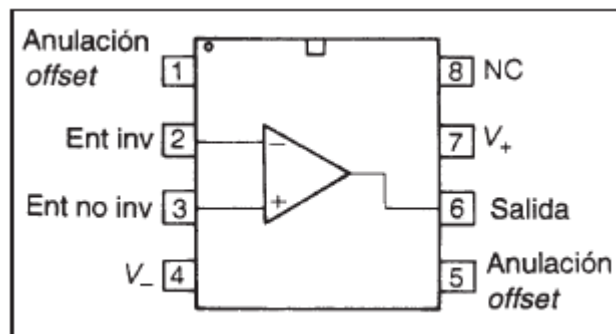


Figura 1.12

### Ejercicio 1

a) Diseñar un circuito inversor en el que la ganancia  $A_v=10$  y rellenar la siguiente tabla comprobando los valores teóricos con los prácticos. Dibujar a partir de los valores prácticos obtenidos la relación  $V_o/V_i$ .

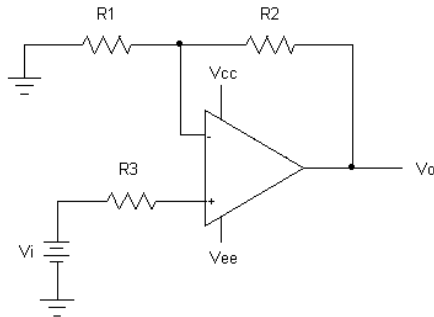


Figura 1.13

$$I_1 + I_2 = I_{B1}$$

$$\frac{V_i - V_d}{R_1} + \frac{V_o - V_d}{R_2} = 0$$

$$\frac{V_i}{R_1} + \frac{V_o}{R_2} = 0$$

$$A_v = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{R_2}{R_1}$$

$$10 = -\frac{R_2}{R_1}$$

$$10 \cdot R_1 = R_2$$

Si tomamos que  $R_1=10\text{k}\Omega$  tendremos que  $R_2=100\text{k}\Omega$

Vi	Teórico		Práctico	
	Vo	Vd	Vo	Vd
- 2V	20V	0V	- 12,91V	0,69V
- 1'8V	18V	0V	- 12,91V	0,41V
- 1'6V	16V	0V	- 12,91V	0,30V
- 1'4V	14V	0V	- 12,90V	0,03V
- 1'2V	12V	0V	- 12,80V	0V
- 1V	10V	0V	- 11,15V	0V
- 0'8V	8V	0V	- 8,80V	0V
- 0'6V	6V	0V	- 6,19V	0V
- 0'4V	4V	0V	- 3,46V	0V
- 0'2V	2V	0V	- 1,47V	0V
0V	0V	0V	0V	0V
0'2V	- 2V	0V	1,21V	0V
0'4V	- 4V	0V	3,82V	0V
0'6V	- 6V	0V	6,81V	0V
0'8V	- 8V	0V	8,07V	0V
1V	- 10V	0V	10,68V	0V
1'2V	- 12V	0V	12,77V	0,01V
1'4V	- 14V	0V	14,28V	0,24V
1'6V	- 16V	0V	14,28V	0,31V
1'8V	- 18V	0V	14,28V	0,58V
2V	- 20V	0V	14,28V	0,61V

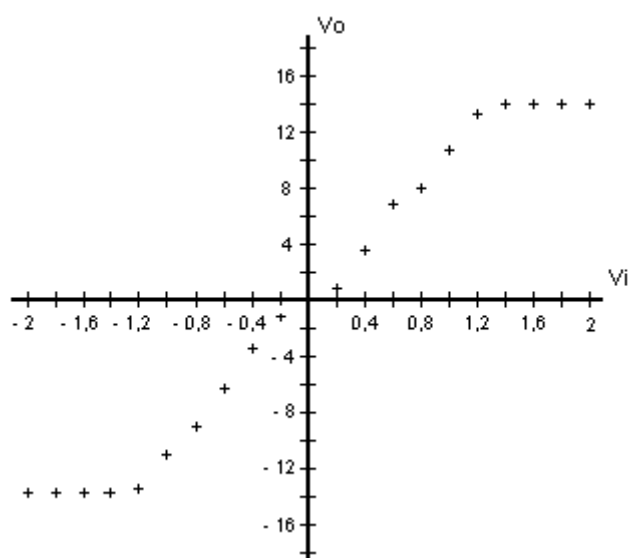
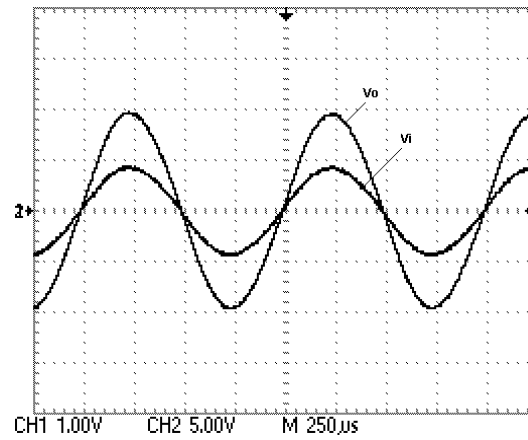


Figura 1.14

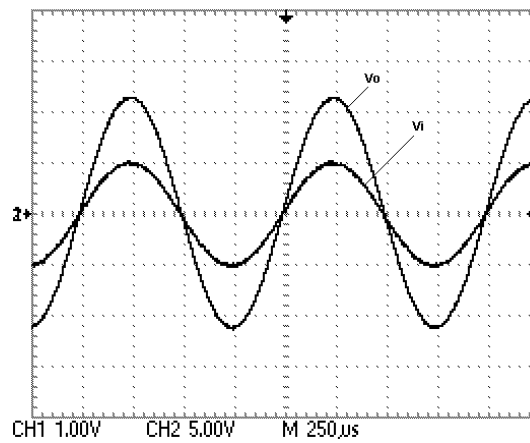
**b) Comprobar con el osciloscopio que el circuito tiene dicha ganancia aplicando varias señales senosoidales de distinta amplitud.**

*Circuito con  $V_i = 1V$  de pico*



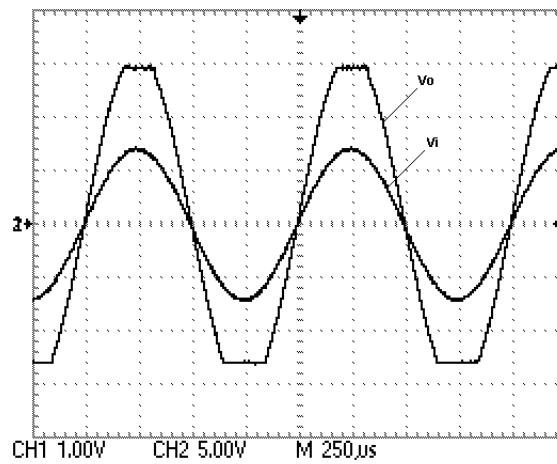
**Figura 1.15**

*Circuito con  $V_i = 1,2V$  de pico*



**Figura 1.16**

*Circuito con  $V_i = 1,4V$  de pico*



**Figura 1.17**



c) Encontrar el valor de la tensión de entrada  $V_i$  para la cual la salida deja de aumentar. ¿A qué es debido esto?

El valor obtenido de la tensión de entrada ha sido 1,4V. El amplificador que nosotros hemos utilizado con su correspondiente configuración, nos dará como máximo 14V, con lo que nos quiere decir que a partir de esta tensión el amplificador operacional saturará la señal de salida, tal y como se puede ver en la figura

## Ejercicio 2

a) Utilizando el circuito del ejercicio anterior para una  $V_i = -1V$  y cambiando  $R_2$  por un potenciómetro de  $1M\Omega$ , comprobar el valor de la tensión de salida  $V_o$  y calcular la ganancia de tensión  $A_v$  en dB.

$V_i = -1V$	Teórico		Práctico	
$R_2 (\Omega)$	$V_o (V)$	$A_v (dB)$	$V_o (V)$	$A_v (dB)$
0	0	$\infty$	0	$\infty$
100	10m	- 40	1,09	0,74
470	47m	- 26'55	1,09	0,74
1k	0'1	- 20	1,09	0,74
1'8k	0'18	- 14'89	1,09	0,74
2'2k	0'22	- 13'15	1,12	0,98
3'3k	0'33	- 9'62	1,32	2,41
4k7	0'47	- 6'55	1,54	3,75
6k8	0'68	- 3'34	1,73	4,76
10k	1	0	2	6,02
33k	3'3	10'37	4,28	12,62
68k	6'8	16'65	6,33	16,02
100k	10	20	9,87	19,88
120k	12	21'58	11	20,82
330k	33	30'37	12,95	22,24
470k	47	33'44	12,95	22,24
560k	56	34'9	12,95	22,24
1M	100	40	12,95	22,24
$\infty$	$\infty$	$\infty$	12,97	22,24

b) ¿Qué efecto produce la resistencia de realimentación en un amplificador operacional?

Cuánto más grande es la resistencia de realimentación más grande será la tensión de salida con lo que aumentaremos la ganancia en tensión pero antes se saturará el amplificador operacional.

### Ejercicio 3

a) Montar el circuito de la Figura 1.18 denominado seguidor de tensión y rellenar la siguiente tabla.

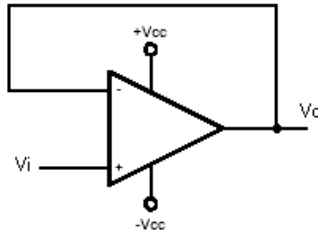


Figura 1.18

Teórico		Práctico	
Vi	Vo	Vi	Vo
- 8V	- 8V	- 8V	7,95V
- 6V	- 6V	- 6V	5,99V
- 4V	- 4V	- 4V	3,99V
- 2V	- 2V	- 2V	1,98V
0V	0V	0V	0V
2V	2V	2V	1,95V
4V	4V	4V	3,96V
6V	6V	6V	6,01V
8V	8V	8V	8,04V

b) Utilizando el generador de funciones e introduciendo una señal de 5V, poner diferentes tipos de entrada (senoidal, triangular, cuadrada...) y comprobar en el osciloscopio la señal de entrada y la de salida conjuntamente. Deducir cuál será la ganancia de este circuito.

$$V_d = 0$$

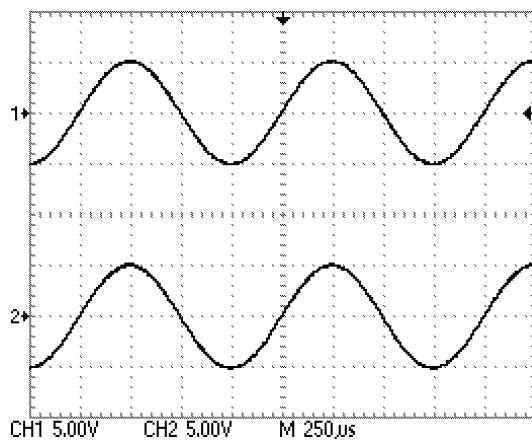
$$V_P - V_N = 0 \rightarrow V_P = V_N$$

$$V_P = V_i = V_N = V_o$$

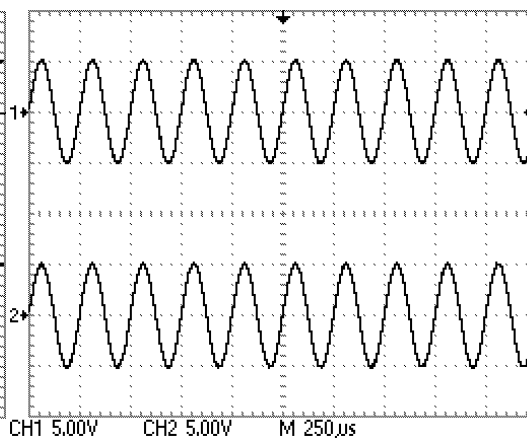
$$V_i = V_o \rightarrow GV = \frac{V_o}{V_i} = 1$$

**c) Aumentar la frecuencia del generador hasta 4kHz y comentar los resultados.**

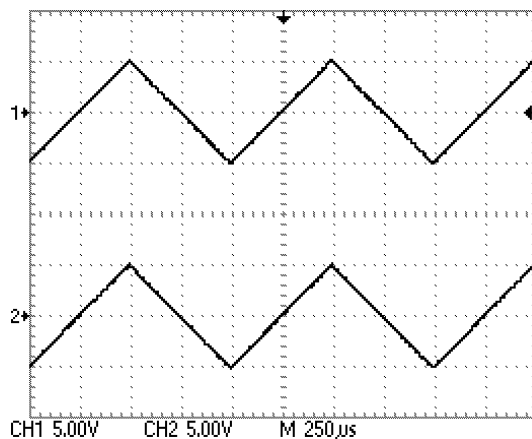
*Entrada sinusoidal frecuencia a 1kHz*



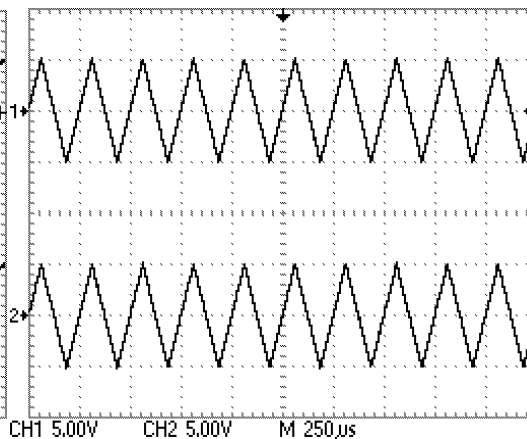
*Entrada sinusoidal frecuencia a 4kHz*



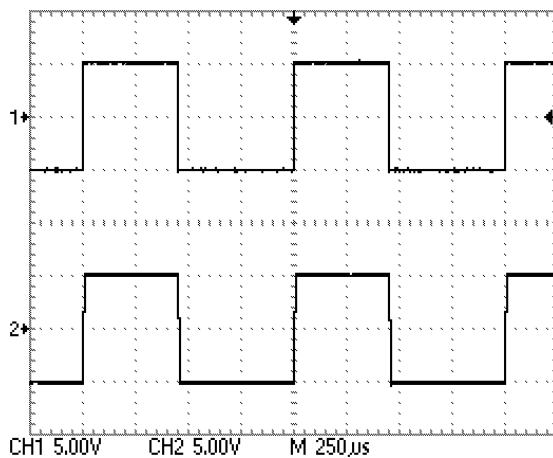
*Entrada triangular frecuencia a 1kHz*



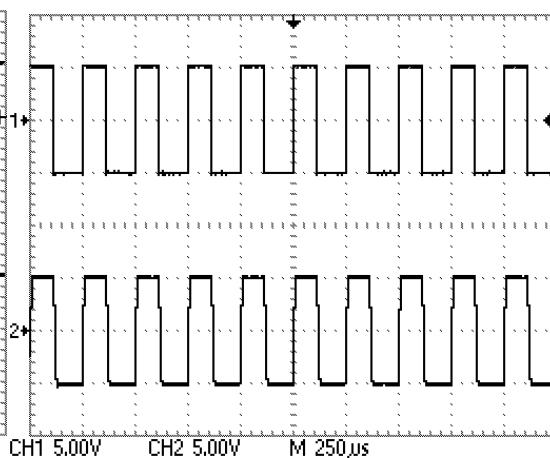
*Entrada triangular frecuencia 4kHz*



*Entrada cuadrada frecuencia 1kHz*



*Entrada cuadrada frecuencia a 4kHz*



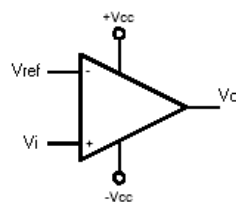
**d) ¿Qué finalidad tiene este circuito?**

Se podría decir que un circuito seguidor de tensión tiene como finalidad proporcionar un medio para aislar una señal de entrada de una carga mediante el uso de una etapa con ganancia unitaria de voltaje, sin inversión de polaridad o de fase, y que actúa como un circuito ideal con impedancia muy alta de entrada y baja impedancia de salida.

**e) Quitar la realimentación del circuito anterior y poner una tensión fija de 5V (Vref) en la entrada  $V_N$  del amplificador operacional. Rellenar la siguiente tabla y verificar que se cumple las siguientes expresiones:**

$$V_i > V_{ref} \Rightarrow V_o = V_{cc} = 15V$$

$$V_i < V_{ref} \Rightarrow V_o = -V_{cc} = 0V$$



**Figura 1.19**

$V_i$	$V_o$ teórica	$V_o$ práctica	$V_i$	$V_o$ teórica	$V_o$ práctica
4V	0V	1,32V	5'4V	15V	14,28V
4'7V	0V	1,32V	5'3V	15V	14,28V
4'8V	0V	1,32V	5'2V	15V	14,28V
4'9V	0V	1,32V	5'1V	15V	1,32V
5V	0V	1,32V	5V	0V	1,32V
5'1V	15V	1,32V	4'9V	0V	1,32V
5'2V	15V	14,28V	4'8V	0V	1,32V
5'3V	15V	14,28V	4'7V	0V	1,32V
5'4V	15V	14,28V	4'6V	0V	1,32V
5'5V	15V	14,28V	4V	0V	1,32V

**f) Repetir el ejercicio anterior pero intercambiando el valor de Vref de 5V a la entrada  $V_P$  del amplificador operacional. Deducir en este caso que pasará cuando  $V_i > V_{ref}$  y cuando  $V_i < V_{ref}$ .**

$V_i$	$V_o$ teórica	$V_o$ práctica	$V_i$	$V_o$ teórica	$V_o$ práctica
4V	15V	14,28V	5'4V	0V	1,32V
4'7V	15V	14,28V	5'3V	0V	1,32V
4'8V	15V	14,28V	5'2V	0V	1,32V
4'9V	15V	14,28V	5'1V	0V	1,32V
5V	0V	14,28V	5V	0V	1,32V
5'1V	0V	1,32V	4'9V	15V	14,28V
5'2V	0V	1,32V	4'8V	15V	14,28V
5'3V	0V	1,32V	4'7V	15V	14,28V
5'4V	0V	1,32V	4'6V	15V	14,28V
5'5V	0V	1,32V	4V	15V	14,28V

$$V_i > V_{ref} \Rightarrow V_o = -V_{cc} = 0V$$

$$V_i < V_{ref} \Rightarrow V_o = V_{cc} = 15V$$

#### Ejercicio 4

a) Montar el circuito de la Figura 1.20 teniendo en cuenta que todas las R son de valor 10kΩ, rellenar la tabla.

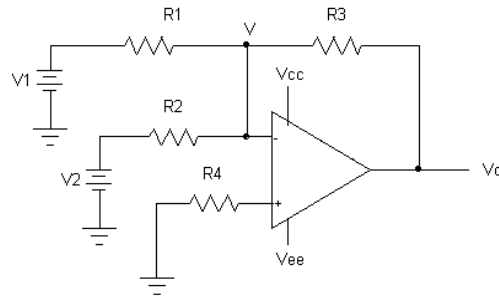


Figura 1.20

$$I_1 + I_2 = I_3$$

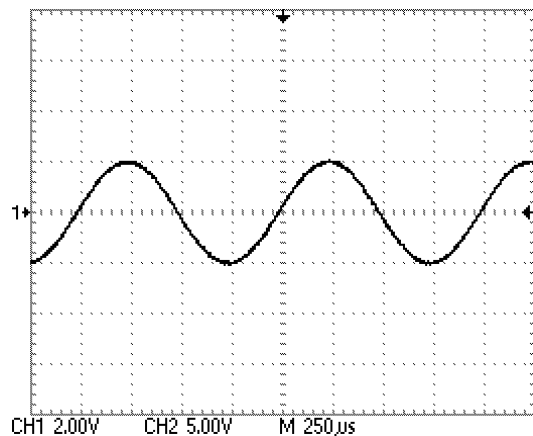
$$\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} = -\frac{V_o}{R_3}$$

$$V_o = -\left(V_1 \cdot \frac{R_3}{R_2} + V_2 \cdot \frac{R_3}{R_1}\right)$$

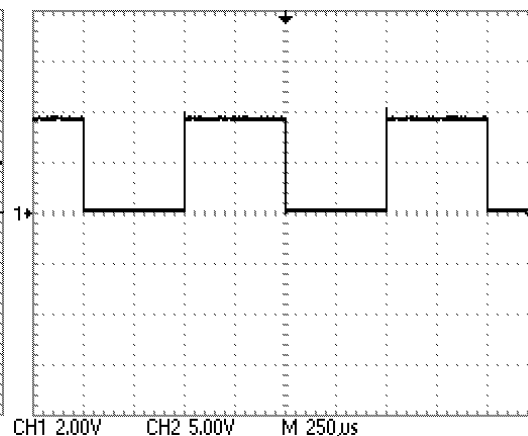
V1	V2	Teórico	Práctico
		Vo	Vo
8V	8V	- 16V	- 12,88V
- 9V	- 10V	19V	- 12,87V
2V	1V	- 3V	- 2,93V
- 3V	1V	2V	1,98V
4V	- 2V	- 2V	- 2,01V
3V	6V	- 9V	- 8,98V

b) Conectar una señal de 2V de pico en la entrada V1 y una señal TTL del generador de funciones a la entrada V2. Visualizar la señal de salida Vo y representarla gráficamente.

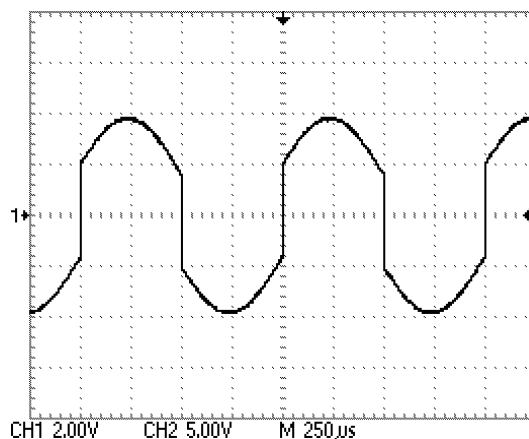
*Señal de 2V*



*Señal TTL*



*Suma de las dos señales anteriores*



## 2. Respuesta temporal

### 2.1 Introducción

En esta práctica se analizarán los diferentes tipos de respuesta de los circuitos RLC (Resistencia Bobina Condensador). Estos tipos de circuitos se pueden describir con una ecuación diferencial de segundo orden, las respuestas de estos circuitos varían según sus componentes R, L, y C. Una vez obtenidos los valores de la bobina y el condensador se realizarán los diagramas de Bode para mostrar el desfase entre tensión y corriente en la bobina y el condensador.

Para un mayor entendimiento de la respuesta de los diferentes circuitos electrónicos se hará una introducción básica del funcionamiento de los tres componentes electrónicos que van a formar parte de nuestros circuitos.

#### 2.1.1 Resistencia

Las resistencias son componentes electrónicos que tienen la propiedad de oponer el paso a la corriente eléctrica, la relación que existe entre la tensión aplicada a dos puntos de un conductor y la intensidad que circula entre los mismos es una constante a la que llamamos resistencia (Ley de Ohm). La unidad de medida son los Ohmios ( $\Omega$ ).

$$R = \frac{V}{I}$$



La resistencia eléctrica que existe entre dos puntos de un conductor cuando una diferencia de potencial constante de un voltio aplicada entre estos dos puntos produce, en dicho conductor, una corriente de intensidad de un amperio. Es un componente electrónico ideal, es decir, que su corriente es directamente proporcional a la tensión (menos en las resistencias especiales NTC, PTC, LDR, VDR).

Las características más importantes de las resistencias son:

- Valor nominal: es el valor en ohmios que posee y está inscrito en la propia resistencia con cifras o por medio de un código de colores (ver figura TAL).
- Tolerancia: es el error máximo con el que se fabrica la resistencia. Por ejemplo una resistencia de valor 10 con una tolerancia del 5% querrá decir que la resistencia tendrá un valor garantizado de  $10 \pm 5\%$ , teniendo en cuenta que el 5% de 10 es 0'5, daremos por buena la resistencia si su valor está comprendido entre 9'5 y 10'5.
- Potencia máxima: es la mayor potencia que será capaz de aguantar sin llegar a quemarse.

En la siguiente tabla se pueden ver los diferentes colores y numeración de las resistencias para poder averiguar su valor:

Color	1 <sup>er</sup> y 2 <sup>o</sup> anillo	3 <sup>er</sup> anillo	Tolerancia	Coefficiente T <sup>a</sup>
Negro	0	1	---	200
Marrón	1	10	1%	100
Rojo	2	100	2%	50
Naranja	3	1.000	---	15
Amarillo	4	10.000	---	25
Verde	5	100.000	0'5%	---
Azul	6	1.000.000	0'25%	10
Violeta	7	10.000.000	0'1%	5
Gris	8	100.000.000	---	1
Blanco	9	1.000.000.000	---	---
Oro	---	0'1	5%	---
Plata	---	0'01	10%	---
Sin anillo	---	---	20%	---

#### 2.1.1.1 Una resistencia conectada a un generador de corriente alterna

Es el circuito más simple y sencillo para analizar, el cuál está formado por una resistencia alimentada por una fuente de tensión alterna senoidal.

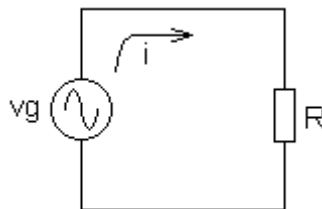


Figura 2.1

La tensión  $v_g$  tendrá un valor instantáneo que vendrá dado por

$$v_g = V_o \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad \text{donde } \omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

En corriente alterna la oposición al paso de la corriente eléctrica tiene dos componentes, una real y otra imaginaria. Esta oposición recibe el nombre de impedancia ( $Z$ ) y no resistencia. La impedancia se expresa mediante un número complejo ( $a + bj$ ), siendo  $a$  la parte real del número complejo y  $b$  la parte imaginaria. Una resistencia presenta una impedancia que sólo tiene componente real, ya que la componente imaginaria es de valor cero, con esto entonces tenemos el caso de que la impedancia total del circuito será igual al valor que presente la resistencia  $R$ , ya que no existe ningún otro componente en el circuito.

$$Z = R + 0j$$



Ahora calcularemos el valor de la corriente  $i$  que circula por el circuito aplicando la ley de Ohm.

$$i = \frac{v_g}{Z} = \frac{V_o \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)}{R + 0j} = \frac{V_o}{R} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$$

Con esta ecuación podemos observar que la corriente  $i$  será, al igual que la tensión  $v_g$ , de tipo alterna senoidal, y además, como el argumento de la función seno es el mismo en ambos casos la corriente  $i$  estará en fase con la tensión  $v_g$ .

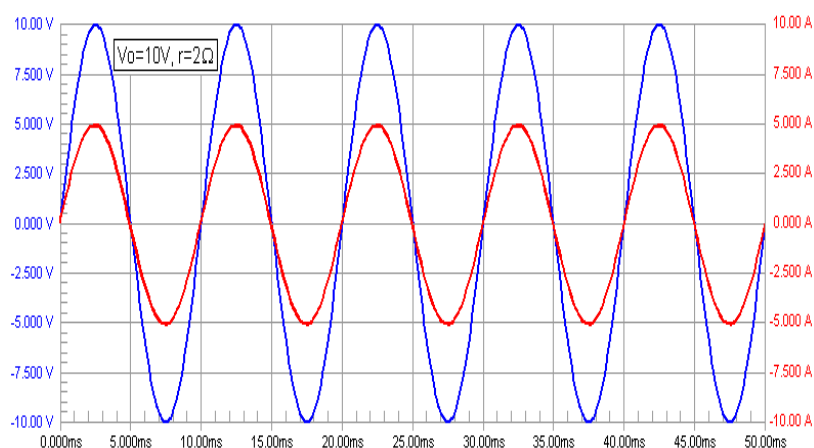


Figura 2.2

### 2.1.2 Bobina

Una bobina por su forma (espiras de alambre enrollado), almacena energía en forma de campo magnético. Todo cable por el que circula una corriente tiene a su alrededor un campo magnético generado por la corriente, siendo el sentido de flujo del campo magnético, el que establece la ley de la mano derecha (Electromagnetismo). La bobina es un componente formado por  $N$  espiras conductoras enrolladas sobre un núcleo de un material magnético o aire.

Al estar la bobina hecha de espiras de cable, el campo magnético circula por el centro de la bobina y cierra su camino por su parte exterior. Una característica interesante de las bobinas es que se oponen a los cambios bruscos de la corriente que circula por ellas. Esto significa que a la hora de modificar la corriente que circula por ellas (ejemplo: ser conectada y desconectada a una fuente de poder de corriente directa), esta tratará de mantener su condición anterior, es decir, La bobina o inductor es un elemento que reacciona contra los cambios en la corriente a través de él, generando una tensión que se opone a la tensión aplicada y es proporcional al cambio de la corriente.

La unidad de medida de las bobinas son los Henrios (H), y su ecuación es:

$$L = \frac{dI}{dt}$$



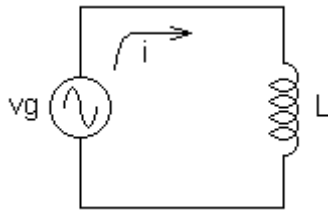
El valor que tiene una bobina depende de:

- El número de espiras que tenga la bobina (a más vueltas mayor inductancia, es decir, mayor valor en Henrios).
- El diámetro de las espiras (a mayor diámetro, mayor inductancia, es decir, mayor valor de Henrios).
- La longitud del cable en que está hecha la bobina.
- El tipo de material del que está hecho el núcleo, si es que lo tiene.

Una de las aplicaciones más comunes de las bobinas y que forma parte de nuestra vida diaria es la bobina que se encuentra en nuestros autos y forma parte del sistema de ignición. Otro ejemplo sería las fuentes de alimentación, en donde las bobinas se usan para filtrar componentes de corriente alterna para obtener corriente continua a la salida.

#### 2.1.2.1 Una bobina conectada a un generador de corriente alterna

El circuito sobre el que vamos a estudiar el comportamiento de la bobina en corriente alterna es el siguiente:



**Figura 2.3**

En el circuito representado la bobina presentará una oposición al paso de la corriente eléctrica y ésta será reactiva. La naturaleza de la reactancia inductiva es de carácter electromagnético. Una bobina inducirá en sus extremos, debido a su autoinducción, una tensión que se opone a la tensión que se le aplique, al menos durante unos instantes. Esto provoca que no pueda circular la corriente libremente.

Cuanto mayor sea la velocidad de variación de la tensión aplicada mayor valor tendrá la tensión inducida en la bobina, y a consecuencia de esto menor será la corriente que podrá circular por ella. Así, a mayor frecuencia de la tensión aplicada mayor será la reactancia de la bobina y, a la inversa, a menor frecuencia de la tensión aplicada menor será la reactancia de la bobina. La impedancia que presenta una bobina viene definida por la siguiente expresión:

$$Z_L = 0 + jX_L$$

En donde  $X_L$  es la reactancia inductiva de la bobina, que viene a ser la oposición que ésta presenta al paso de la corriente alterna, y se calcula de esta forma:

$$X_L = 2 \cdot \pi \cdot f$$

A continuación veremos qué valor tendrá la corriente que circula por el circuito, para ello partiremos de la expresión que se suele usar para definir la autoinducción:

$$V = L \cdot \frac{di}{dt}$$

Como  $v_g$  es la tensión en los extremos de la bobina podemos poner:

$$V_g = V_o \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) = L \cdot \frac{di}{dt} \quad \Rightarrow \quad V_o \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) \cdot dt = L \cdot di$$

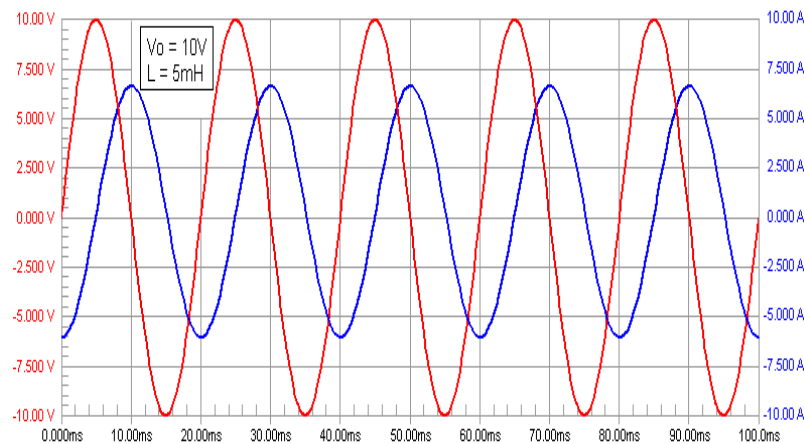
Integrando los dos miembros de la igualdad tendremos que:

$$-\frac{V_o}{2 \cdot \pi \cdot f} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) = L \cdot i$$

Despejando de la ecuación anterior la corriente  $i$ , y teniendo en cuenta la igualdad trigonométrica  $-\cos \alpha = \sin(\alpha - 90^\circ)$  quedará de la siguiente forma:

$$i = \frac{V_o}{X_L} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t - 90^\circ)$$

Finalmente, podemos observar que una bobina en corriente alterna atrasa  $90^\circ$  la corriente respecto a la tensión.



**Figura 2.4**

### 2.1.3 Condensador

Un condensador es un componente eléctrico que es capaz de almacenar carga eléctrica. Internamente está formado por dos conductores próximos uno del otro, separados entre sí por un aislante de tal forma que puedan estar cargados con el mismo valor pero de signo contrario.

Estos dos conductores internos son dos placas metálicas o armaduras paralelas de la misma superficie y encaradas, separadas por una lámina no conductora o dieléctrico. Al conectar una de las placas a un generador ésta se carga e induce una carga de mismo valor pero de signo opuesto a la otra placa. En definitiva, tenemos dos placas cargadas con una carga cada una pero de signo contrario, por lo tanto la carga neta del sistema es cero.

Los condensadores pueden conducir corriente continua durante sólo un instante, en cambio funcionan bien como conductores en circuitos de corriente alterna. Es por esta propiedad por la cuál este componente es muy útil cuando se tiene que impedir que la corriente continua entre en determinadas partes de un circuito electrónico. La capacidad de un condensador es proporcional a la carga e inversamente proporcional a la diferencia de potencial (con el vacío como dieléctrico), la unidad de medida del condensador son los Faradios (F).

$$C = \frac{Q}{V}$$



Como hemos dicho anteriormente en el condensador hay una distancia entre las dos placas, y entre ellas un campo eléctrico, por lo que la diferencia de potencial entre las placas será como se expresa en la siguiente ecuación:

$$V = E \cdot d$$

donde E es la intensidad de campo y d es la distancia entre las dos placas.

El valor del dieléctrico puede variar según el medio en donde se encuentre, cuando se introduce un dieléctrico en un condensador, que no es el vacío, su capacidad aumenta ya que la capacidad que inicialmente tenía se multiplica por la constante relativa del medio:

$$C = \epsilon_r \cdot C_0$$

La energía acumulada en un condensador es igual al trabajo necesario para cargar una carga total Q en un condensador descargado.

$$W = 0,5 \cdot Q^2 / C$$

Si tenemos en cuenta que:

$$Q = C \cdot V_0$$

La energía de un condensador cargado tendrá la expresión siguiente:

$$E = 0,5 \cdot C \cdot V_0^2$$

Los condensadores están encapsulados con plástico para conseguir un mayor aislante eléctrico, tienen una alta estabilidad térmica y son resistentes a la humedad.

Los condensadores pueden ser de tres tipos: planos, esféricos y cilíndricos, pero los más utilizados son los planos ya que su capacidad es directamente proporcional al producto del dieléctrico por la superficie, e inversamente proporcional a la distancia.

#### *2.1.3.1 Un condensador conectado a un generador de corriente alterna*

El circuito en el que vamos a analizar el comportamiento de la corriente alterna en un condensador es el siguiente:

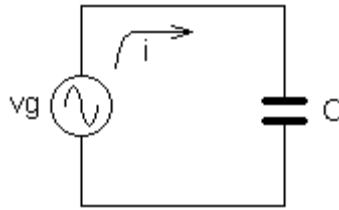


Figura 2.5

En este circuito el condensador presentará una oposición al paso de la corriente alterna, dicha oposición recibe el nombre de reactancia capacitiva. Este tipo de oposición al paso de la corriente eléctrica es de carácter reactivo, entendiendo como tal una reacción que introduce el condensador cuando la tensión que se le aplica tiende a variar lentamente o nada. Cuando el condensador está totalmente descargado se comporta como un cortocircuito, y cuando está totalmente cargado se comporta como una resistencia de valor infinito.

Para valores intermedios de carga se comportará como una resistencia de valor intermedio, limitando la corriente a un determinado valor. Como en corriente alterna el condensador está continuamente cargándose y descargándose, mientras más lentamente varíe la tensión (frecuencia baja) más tiempo estará el condensador en estado de casi carga que en estado de casi descarga, con lo que presentará de media una oposición alta al paso de la corriente. Para variaciones rápidas de la tensión (frecuencias altas) el efecto será el contrario y por tanto presentará una oposición baja al paso de la corriente. Podemos decir entonces que la naturaleza de este tipo de oposición es de carácter electrostático, la carga almacenada en el condensador se opone a que éste siga cargándose y esta oposición será mayor cuanto más carga acumule el condensador.

La impedancia que presenta este circuito viene dada por:

$$Z = 0 - jX_C$$

En donde  $X_C$  es la reactancia capacitiva y tiene por ecuación:

$$X_C = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C}$$

Como se puede comprobar la impedancia que presenta un condensador sólo tiene componente imaginaria o reactiva.

Para calcular la expresión de la corriente que circula por un condensador partiremos de la expresión ya conocida que relaciona la tensión en extremos de un condensador, su capacidad eléctrica y el valor de la carga que almacena dicho condensador.

$$V = \frac{q}{C}$$

La tensión en extremos del condensador la llamaremos  $v_g$ , con lo que podemos poner:

$$v_g = V_o \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) = \frac{q}{C}$$

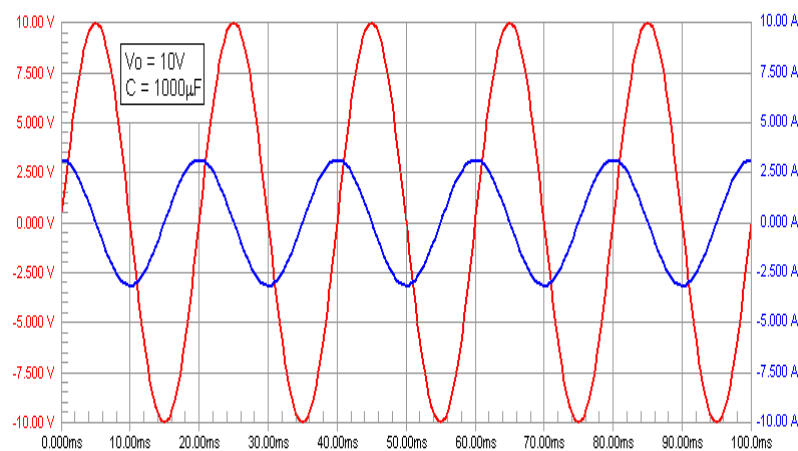
Si ahora derivamos la carga respecto al tiempo obtendremos la corriente  $i = \frac{dq}{dt}$

$$V_o \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) = \frac{i}{C}$$

Reordenando los términos y teniendo en cuenta que  $\cos \alpha = \sin(\alpha + 90^\circ)$  obtenemos finalmente la siguiente ecuación:

$$i = \frac{V_o}{X_C} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + 90^\circ)$$

Esta expresión final supone un desfase de  $90^\circ$  en delante de la corriente que circula por el circuito respecto a la tensión aplicada en extremos del condensador.



**Figura 2.6**

#### 2.1.4 La función sinusoidal

La forma de onda de la corriente alterna más comúnmente utilizada es la onda senoidal, puesto que se consigue una transmisión más eficiente de la energía. Sin embargo, en ciertas aplicaciones se utilizan otras formas de onda periódicas, tales como la triangular o la cuadrada.

Algunos tipos de ondas periódicas tienen el inconveniente de no tener definida su expresión matemática, por lo que no se puede operar analíticamente con ellas. Por el contrario, la onda senoidal no tiene esta indeterminación matemática y presenta las siguientes ventajas:

- La función seno está perfectamente definida mediante su expresión analítica y gráfica. Mediante la teoría de los números complejos se analizan con suma facilidad los circuitos de alterna.
- Las ondas periódicas no senoidales se pueden descomponer en suma de una serie de ondas senoidales de diferentes frecuencias que reciben el nombre de armónicos. Esto es una aplicación directa de las series de Fourier.
- Se pueden generar con facilidad y en magnitudes de valores elevados para facilitar el transporte de la energía eléctrica.
- Su transformación en otras ondas de distinta magnitud se consigue con facilidad mediante la utilización de transformadores.

#### 2.1.4.1 Onda sinusoidal

Una señal sinusoidal  $a(t)$ , se puede expresar matemáticamente según sus parámetros característicos como una función del tiempo por medio de la siguiente ecuación:

$$a(t) = A_o \cdot \sin(\omega t + \beta)$$

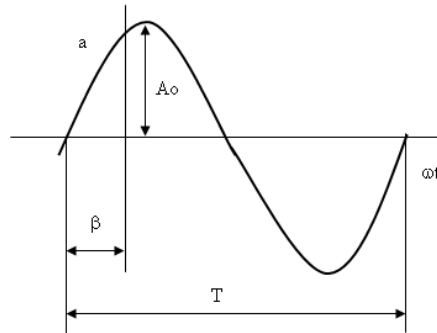


Figura 2.7

donde

**$A_o$**  es la amplitud, también llamado valor máximo o valor de pico, y es el máximo alejamiento en valor absoluto de la curva medida desde el eje x.

**$\omega$**  es la pulsación en radianes por segundo (rad/s), también llamada velocidad angular  $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$

**$T$**  es el periodo de oscilación (s), el menor conjunto de valores de x que corresponden a un ciclo completo de valores de la función. Toda función de una variable que repite sus valores en un ciclo completo es una función periódica.

**$t$**  es el tiempo en segundos (s)

**$\beta$**  es el ángulo de fase inicial en radianes (rad). La fase da una idea del desplazamiento horizontal de la senoide, si dos sinusoides tienen la misma frecuencia y fase se dice que están en fase, y si dos sinusoides tienen la misma frecuencia pero distinta fase se dice que están en desfase y una de ellas está adelantada o retrasada con respecto a la otra.

Una onda senoidal se trata de una señal analoga puesto que sus valores oscilan en una rama de opciones prácticamente infinita, podemos ver en la figura 2.8 que la onda describe una curva continua. De hecho, esta onda es la gráfica de la función matemática seno que posee las siguientes características:

- En un triángulo rectángulo, el seno de un ángulo agudo  $a$ , que se designa por  $\text{sen } a$ , es igual a la longitud del cateto opuesto al ángulo dividida por la longitud de la hipotenusa.
- El seno de un ángulo cualquiera se asigna mediante la circunferencia goniométrica. Es la ordenada del punto en el que el segundo lado del ángulo la corta.

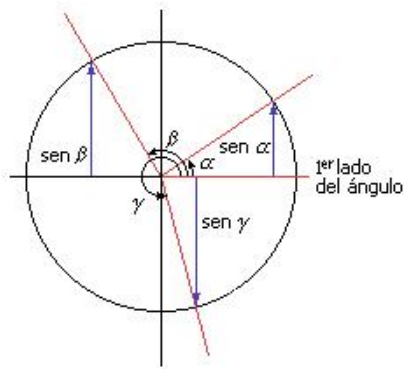


Figura 2.8

- La función  $y = \sin x$  describe la variación del seno de ángulos medidos en radianes. Es continua y periódica de periodo  $2\pi$  (recordar que en radianes  $\pi$  significa  $180^\circ$ ). Se denomina función sinusoidal.

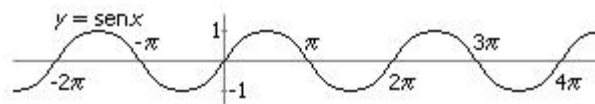


Figura 2.9

La amplitud  $A$  determina el valor máximo que puede adquirir la función, puesto que la función seno oscila entre  $-1$  y  $+1$ , al multiplicarla por un factor  $A$  oscilará entre  $-A$  y  $+A$  tal y como se muestra en la figura 2.10 en la que se ve representado simultáneamente las funciones  $y = \sin(x)$  y  $y = 3 \sin(x)$ .

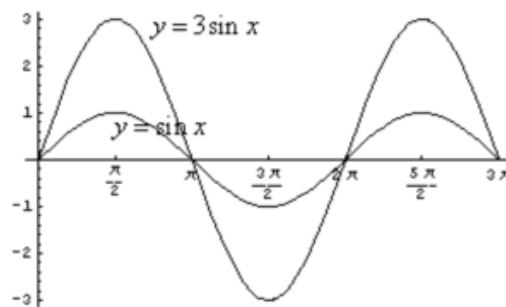


Figura 2.10

En el caso en el que la variable sea el tiempo, tal y como se muestra en la figura 2.11, se observa perfectamente que la única diferencia entre ellas es el periodo, la primera función  $y = \sin(x)$  tiene un periodo de  $2\pi$ , y la segunda función  $y = \sin(4x)$  tiene como periodo  $\pi/2$ .



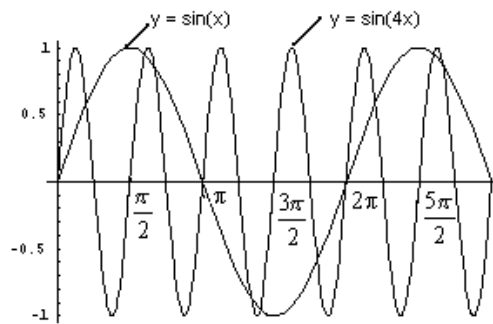


Figura 2.11

Finalmente el desfase  $\beta$  modifica la posición horizontal de la curva, al aumentar su valor la senoide se desplaza hacia la izquierda. Tal y como se muestra en la figura 2.12 se puede ver esta propiedad:

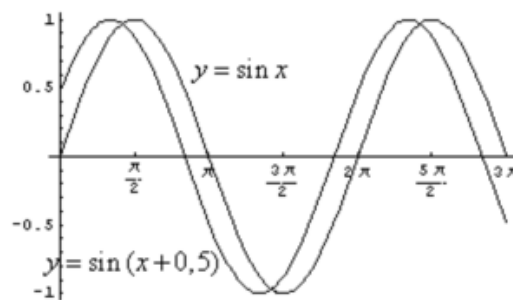


Figura 2.12

Obviamente si el desfase fuese negativo la curva quedaría hacia la derecha.

### 2.1.5 Respuesta temporal

Una vez obtenido el modelo matemático de un sistema, disponemos de varios métodos para analizar el comportamiento del sistema. Los sistemas de control se diseñan para conseguir un determinado comportamiento, tanto en régimen permanente como transitorio. La respuesta en el tiempo de un sistema de control se divide normalmente en dos partes: respuesta transitoria y respuesta estacionaria, también denominada permanente o en estado estable. En sistemas de control la respuesta transitoria se define como la parte de respuesta temporal que tiende a cero cuando el tiempo se hace muy grande, esta respuesta es originada por la propia característica dinámica del sistema y determina el comportamiento del sistema durante la transición del algún estado inicial hasta el estado final.

La respuesta estacionaria es la parte de la respuesta temporal que permanece una vez que la transitoria ha desaparecido. Depende fundamentalmente de la señal de excitación al sistema, y si el sistema es estable es la respuesta que perdura cuando el tiempo crece infinitamente.

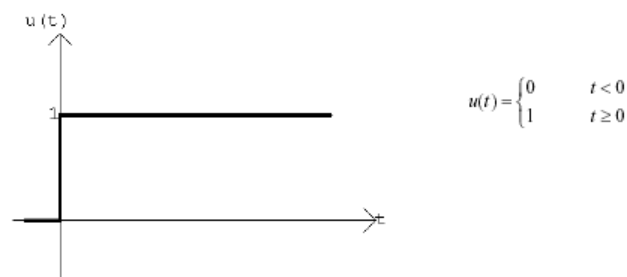
La respuesta transitoria es importante ya que es una parte significativa del comportamiento dinámico del sistema y la desviación entre la respuesta de salida y la entrada se debe controlar cuidadosamente antes de alcanzar el estado estable. La respuesta estacionaria también es importante ya que indica en dónde termina la salida del sistema cuando el tiempo se hace grande.

De este modo hemos logrado determinar de un modo simple la estabilidad absoluta de un sistema, se dice que un sistema es estable si su respuesta transitoria decae a cero cuando el tiempo tiende a infinito. Si la respuesta en estado estable de la salida no coincide exactamente con la deseada se dice que el sistema tiene un error de estado estacionario.

Para facilitar el análisis en el dominio del tiempo, en sistemas de control, interesa minimizar la desviación de la señal de salida respecto a la señal de entrada en estado transitorio. Por este motivo, se caracteriza la respuesta transitoria respecto a entradas típicas o conocidas, conociendo que, como el sistema es lineal, la respuesta del sistema a señales más complejas es perfectamente predecible a partir del conocimiento de la respuesta a estas entradas de prueba más simples. Las señales de entrada de uso más común son:

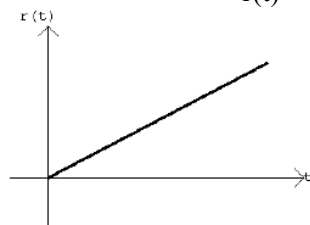
a) Entrada función escalón (función de Heaviside): representa un cambio instantáneo en la entrada de referencia.

$$r(t) = A \cdot u(t) \quad \text{siendo } u(t) \text{ el escalón unitario}$$



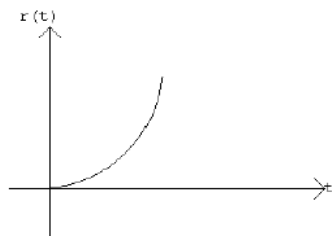
b) Entrada función rampa: es una señal que cambia constantemente con el tiempo, esta señal nos dice cómo responde el sistema a señales que cambian linealmente con el tiempo.

$$r(t) = A \cdot t \cdot u(t)$$

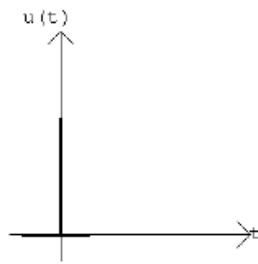


c) Entrada función parabólica: esta función representa una señal que tiene una variación más rápida que la función rampa.

$$r(t) = A \cdot \frac{t^2}{2} \cdot u(t)$$



d) Entrada función impulso unitario (delta de Dirac): señal en el que la entrada corresponde a un pulso.



$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \infty & t = 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$

#### 2.1.5.1 Valores significativos

En toda señal sinusoidal hay unos valores significativos que se deben de indicar:

**Valor instantáneo a(t):** es el valor que toma la ordenada en un instante t determinado.

**Valor pico a pico App:** es la diferencia entre su pico máximo y su pico negativo. Por ejemplo una señal sinusoidal que oscila entre +Ao y -Ao tendrá como valor de pico a pico (+Ao)-(-Ao)= 2Ao

**Valor medio A<sub>med</sub>:** es el valor del área que forma con el eje de abcisas partido por su periodo. El área se considera positiva si está por encima del eje de abcisas y negativa si está por debajo. Como en una señal sinusoidal el semiciclo positivo es idéntico al negativo, su valor medio es nulo. Por eso el valor medio de una onda sinusoidal se refiere a un semiciclo. Mediante el cálculo integral se puede demostrar que su expresión es la siguiente:

$$A_{med} = \frac{2A_o}{\pi}$$

**Valor eficaz A:** este valor es el que produce el mismo efecto calorífico que su equivalente en corriente continua. Matemáticamente, el valor eficaz de una magnitud variable con el tiempo, se define como la raíz cuadrada de la media de los cuadrados de los valores instantáneos alcanzados durante un período:

$$A = \frac{A_o}{\sqrt{2}}$$

#### 2.1.5.2 Representación fasorial

Una función senoidal puede ser representada por un vector giratorio al que se denomina fasor o vector de Fresnel, girará con una velocidad angular  $\omega$  y su módulo será el valor máximo o eficaz.

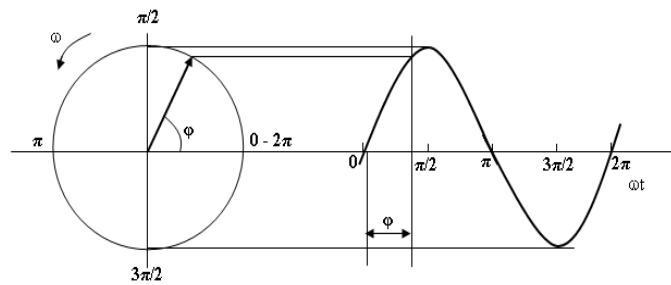


Figura 2.13

La razón de utilizar la representación fasorial está en la simplificación que ello supone. Matemáticamente, un fasor puede ser definido fácilmente por un número complejo, por lo que puede emplearse la teoría de cálculo de estos números para el análisis de sistemas de corriente alterna. Consideremos por ejemplo una tensión de corriente alterna cuyo valor instantáneo sea el siguiente:

$$v(t) = 4 \cdot \text{sen}\left(1000t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Tomamos como módulo del fasor su valor eficaz, la representación gráfica de la anterior tensión será la representada en la figura 2.13 y se anotará como:

$$\vec{V} = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi j}{4}} = 2\sqrt{2} \angle 45^\circ$$

denominadas formas polares o bien:

$$\vec{V} = 2 + 2j$$

denominadas forma binómica.

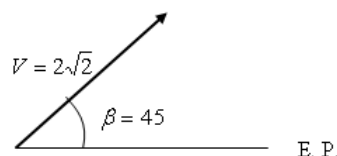


Figura 2.14

## 2.2 Polos y ceros en una función de transferencia

### 2.2.1 Función de transferencia

Una función de transferencia es un modelo matemático que da la respuesta de un sistema a una señal de entrada. Laplace fue uno de los primeros matemáticos en describir estos modelos, a través de su transformación matemática.

Una función de transferencia, por definición, se puede determinar por la siguiente expresión:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

donde,

$H(s)$  es la función de transferencia

$Y(s)$  es la transformada de Laplace de la respuesta

$U(s)$  es la transformada de Laplace de la señal de entrada

La función de transferencia puede considerarse también como la respuesta de un sistema inicialmente inerte a un impulso como señal de entrada:

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} h(t) dt.$$

La salida o respuesta en frecuencia del sistema se calcula de la siguiente forma:

$$Y(s) = H(s) \cdot U(s)$$

Y la respuesta en función del tiempo se calcula con la transformada inversa de Laplace de  $Y(s)$ , tal y como se muestra en la siguiente expresión:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$$

En definitiva, cualquier sistema físico, mecánico, eléctrico, etc... se puede traducir a una serie de valores matemáticos a través de los cuales se conoce el comportamiento de estos sistemas frente a valores concretos. Como por ejemplo, en análisis de circuitos eléctricos, en el que la función de transferencia se presenta como:

$$H(s) = \frac{V_o}{V_{in}}$$

### 2.2.2 Sistemas de primer orden

Un sistema de primer orden se describe mediante una ecuación diferencial de primer orden, el sistema más simple tiene la ecuación:

$$\frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = b_0 r(t)$$

donde  $a_0$  y  $b_0$  son constantes. Utilizando la transformada de Laplace y reagrupando los términos:

$$sY(s) - y(0^-) + a_0 Y(s) = b_0 R(s)$$

y despejando  $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{b_0}{s + a_0} R(s) + \frac{y(0^-)}{s + a_0}$$

donde el primer sumando es la componente de estado cero y el segundo es la componente de entrada cero, por tanto tendrá como condición inicial y valor cero.

La función de transferencia que relaciona pues  $Y(s)$  con  $R(s)$  nos quedará como:

$$F(s) = \frac{b_0}{s + a_0}$$

La constante de tiempo de un sistema estable de primer orden es:

$$\tau = \frac{1}{\alpha_0}$$

Al estimular el sistema con un paso unitario  $u(t)$  con condiciones iniciales nulas, la respuesta  $y(t)$  puede calcularse de la siguiente forma:

$$Y(s) = F(s) \cdot U(s) = \frac{1}{s + \alpha} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2 + \alpha s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \alpha}$$

$$1 = A(s + \alpha) + Bs$$

$$\text{término } s \rightarrow 0 = A + B \rightarrow A = -B$$

$$\text{término indep.} \rightarrow 1 = \alpha A \rightarrow A = 1/\alpha$$

$$Y(s) = \frac{1/\alpha}{s} + \frac{-1/\alpha}{s + \alpha}$$

$$y(t) = L^{-1} \{Y(s)\} = \frac{1}{\alpha} u(t) - \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} u(t) = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) u(t)$$

En esta expresión se puede comprobar que la respuesta del sistema dependerá del valor de  $\alpha$ .

### 2.2.3 Sistemas de segundo orden

Un sistema de segundo orden se describe mediante una ecuación diferencial de segundo orden, el sistema tiene la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \alpha_1 \frac{dy}{dt} + \alpha_0 y(t) = b_m \frac{d^m r}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dr}{dt} + b_0 r(t)$$

Utilizando la transformada de Laplace y reagrupando los términos tenemos:

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0} R(s) + \frac{\text{polinomio con condiciones iniciales}}{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

Siendo el primer sumando la componente de estado cero y el segundo la componente de entrada cero, que tendrá como valor en su estado inicial cero.

La función de transferencia quedará de la forma:

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

Para averiguar las soluciones  $s_1$  y  $s_2$  del denominador de la función utilizaremos la fórmula general de la forma cuadrática:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

### 2.2.3.1 Frecuencia natural no amortiguada ( $\omega_n$ ) y relación de amortiguamiento ( $\xi$ )

La respuesta natural de un sistema subamortiguado de segundo orden queda descrito por la frecuencia angular  $\omega$  y la constante exponencial  $a$ , la cual se puede determinar a partir del polinomio del sistema:

$$s^2 + a_1s + a_0 = (s + a)^2 + \omega^2$$

También se puede obtener otra descripción en función de la respuesta natural no amortiguada ( $\omega_n$ ), y de la relación de amortiguamiento ( $\xi$ ). La relación existente entre estas descripciones y el polinomio es la siguiente:

$$s^2 + a_1s + a_0 = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

al igualar las dos descripciones anteriores tenemos que :

$$a = \xi \cdot \omega_n \quad \omega = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2}$$

Para valores de  $\xi$  comprendidos entre 0 y 1, las raíces características estarán en una circunferencia de radio  $\omega_n$  con centro en el origen del plano complejo.

Para  $\xi = 0$ , las raíces estarán en el eje imaginario.

Para  $\xi = 1$ , ambas raíces repetidas, estarán sobre el eje real negativo.

### 2.2.4 Polos y ceros

Una forma fácil de analizar una gráfica de una función de transferencia es examinar los polos y ceros de la misma, ya que a través de estos cálculos podemos hacernos una idea más cualitativa de lo que hace el sistema.

Dada una función de transformación en continua en el dominio de Laplace,  $H(s)$ , o en el dominio discreto de  $z$ ,  $H(z)$ , un cero es cualquier valor de  $s$  o  $z$  para los cuales la función de transferencia es cero. Por otro lado, un polo es cualquier valor de  $s$  o  $z$  para la cual la función de transferencia es infinita.

#### 2.2.4.1 Gráficas de los polos y ceros

Para representar gráficamente los polos y los ceros en un plano  $s$  o  $z$  lo haremos marcando con una 'x' para los polos y con una 'o' para los ceros. Para entender mejor el cálculo de los polos y ceros haremos un ejemplo de análisis de una función de transferencia, por ejemplo:

$$H(s) = \frac{s^2 + 4s + 5}{s^2 + 6s + 8}$$

Para calcular los ceros de esta función hay que igualarla a cero

$$H(s) = 0 \Rightarrow s^2 + 4s + 5 = 0$$

Para hallar las dos soluciones de esta ecuación utilizaremos la fórmula general para un polinomio de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$s = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = -2 \pm i$$

una solución será  $s_1 = -2 + i$ , y la otra será  $s_2 = -2 - i$ , y estas soluciones serán los dos ceros que como se puede observar tienen parte imaginaria.

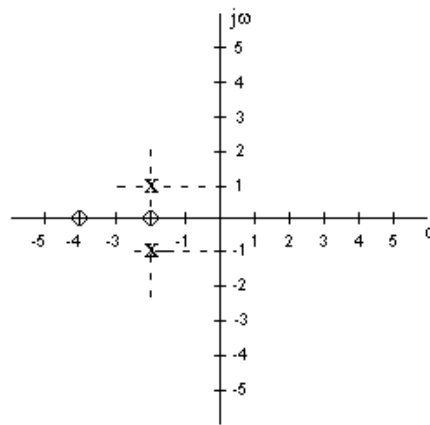
Para calcular los polos de esta función de transferencia, ésta misma tiene que tomar un valor infinito, para que esto suceda el denominador de esta función deberá de ser cero.

$$s^2 + 6s + 8 = 0$$

$$s = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{2} = -3 \pm 1$$

de la misma forma anterior hemos obtenido el valor de los dos polos, un polo tendrá como solución  $s = -2$  y el otro  $s = -4$ .

En la figura 2.15 se puede observar la ubicación gráficamente de los ceros y los polos tal y como hemos calculado anteriormente.



**Figura 2.15**

Una vez calculados y representados gráficamente los ceros y los polos se puede deducir de la gráfica que la magnitud de función de transferencia será mayor cuando se encuentre cerca de los polos y menor cuando se encuentre cerca de los ceros. Esto nos da una idea cualitativa de lo que el sistema hace en varias frecuencias y es crucial para la función de estabilidad.

#### 2.2.4.2 Repetición y cancelación de polos y ceros

En una función es posible tener más de un polo o cero en el mismo punto. Por ejemplo en la función de transferencia  $H(s) = s^2$  tendrá dos ceros en el origen, y en la función de transferencia  $H(s) = 1/s^3$  tendrá tres polos en el origen.

Se puede cometer un error al pensar que la función  $\frac{(s+3)(s+1)}{(s+1)}$  es la misma que

$(s+3)$ , en teoría son equivalentes ya que el polo y el cero se encuentran en  $s = -1$  y se cancelan mutuamente, sin embargo si esto fuese una función de transferencia de un sistema que fue creado por un circuito no sería común que el polo y el cero estuviesen en el mismo lugar ya que ocurriría un cambio de infinito en un polo a cero en el cero en una región de señales.



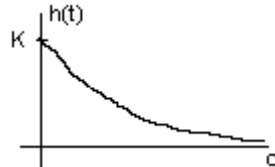
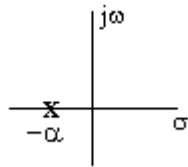
## 2.2.5 Estudio de los polos de una función de transferencia

### 2.2.5.1 Polos simples

a) Polo real negativo en el semiciclo izquierdo

$$H(s) = \frac{\text{-----}}{(s + \alpha)} \quad \text{polo} = -\alpha \quad \text{ESTABLE}$$

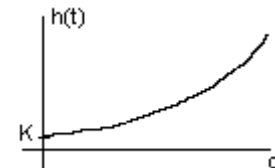
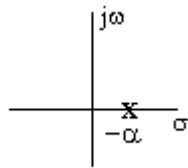
$$h(t) = K \cdot e^{-\alpha t}$$



b) Polo real positivo en el semiciclo derecho

$$H(s) = \frac{\text{-----}}{(s - \alpha)} \quad \text{polo} = +\alpha \quad \text{INESTABLE}$$

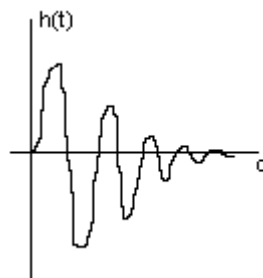
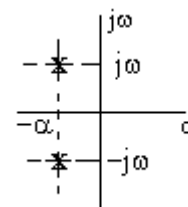
$$h(t) = K \cdot e^{\alpha t}$$



c) Polos complejos en el semiciclo izquierdo

$$H(s) = \frac{\text{-----}}{(s + \alpha)^2 + \omega^2} \quad \text{polo}_{1,2} = -\alpha \pm j\omega \quad \text{ESTABLE}$$

$$h(t) = 2 \cdot K \cdot e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi)$$



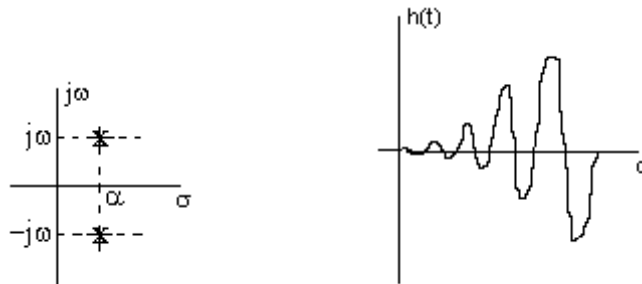
d) Polos complejos en el semiciclo derecho

$$H(s) = \frac{\text{-----}}{(s - \alpha)^2 + \omega^2}$$

$$\text{polo}_{1,2} = \alpha \pm j\omega$$

INESTABLE

$$h(t) = 2 \cdot K \cdot e^{\alpha t} \cos(\omega t + \varphi)$$



e) Polos sobre el eje  $j\omega$

$$H(s) = \frac{\text{---}}{s}$$

$$\text{polo} = 0 \text{ (origen)}$$

MARGINALMENTE

ESTABLE



f) Polos complejos sobre el eje  $j\omega$

MARGINALMENTE

$$H(s) = \frac{\text{-----}}{(s^2 + \omega^2)} = \frac{\text{-----}}{[s - j\omega] \cdot [s - (-j\omega)]}$$

$$\text{polo} = \pm j\omega$$

ESTABLE



Para ver la estabilidad de una función de transferencia miramos los polos, en la figura 2.16 podemos ver representada en forma de resumen cuando una función es estable o inestable.

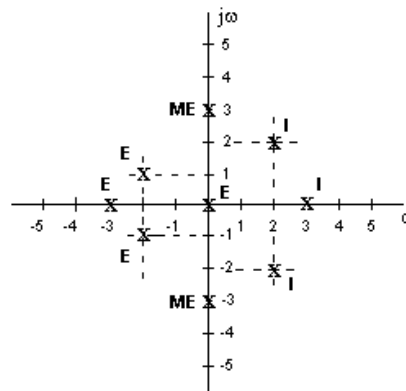


Figura 2.16

### 2.2.6 Estudio del lugar geométrico de los polos

Considerando una función de transferencia de segundo orden:

$$H(s) = \frac{N(s)}{as^2 + bs + c}$$

orden  $N(s) \leq 2$   
a, b, c números reales

normalizamos,

$$H(s) = K \frac{N(s)}{s^2 + 2\cdot\rho\cdot\omega_0\cdot s + \omega_0^2}$$

donde,

$\omega_0$  es la frecuencia angular o natural  
 $\rho$  es el coeficiente de amortiguamiento

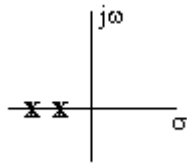
para encontrar los polos igualaremos el denominador de la función a cero

$$s^2 + 2\cdot\rho\cdot\omega_0\cdot s + \omega_0^2 = 0$$

$$s = \frac{-2\cdot\rho\cdot\omega_0 \pm \sqrt{4\cdot\rho^2\cdot\omega_0^2 - 4\cdot\omega_0^2}}{2} = \frac{-2\cdot\rho\cdot\omega_0 \pm 2\cdot\omega_0 \sqrt{\rho^2 - 1}}{2}$$

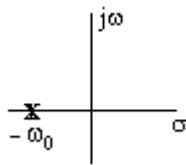
$$s = \omega_0 ( - \rho \pm \sqrt{\rho^2 - 1} )$$

si  $\rho > 1$   $s_{1,2} = \omega_0 ( - \rho \pm \sqrt{\rho^2 - 1} )$



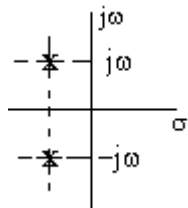
ESTABLE

si  $\rho = 1$   $s_{1,2} = - \omega_0$



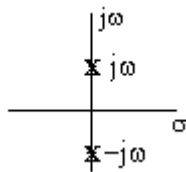
AMORTIGUAMIENTO CRITICO

si  $0 < \rho < 1$   $s_{1,2} = \omega_0 ( - \rho \pm j \sqrt{\rho^2 - 1} )$



SISTEMA SUBAMORTIGUADO

si  $\rho = 0$   $s_{1,2} = \pm j \omega_0$



SISTEMA OSCILANTE

#### 2.2.6.1 Especificaciones en el dominio temporal

Las especificaciones para el diseño de un sistema de control frecuentemente involucran ciertos requerimientos asociados a la respuesta temporal del sistema. Estos requerimiento se muestran en la figura 2.17 para una respuesta a un escalón:

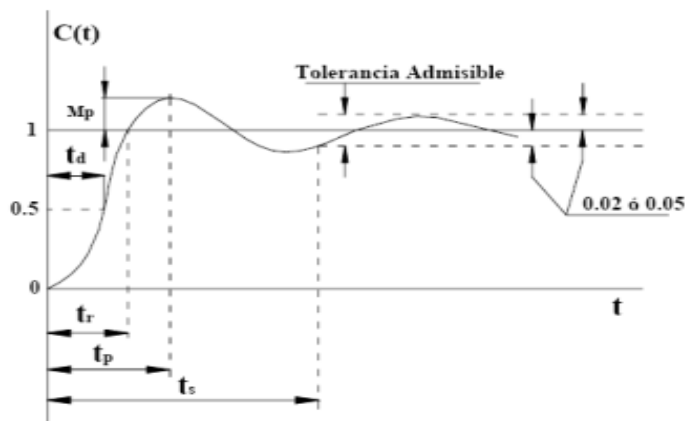


Figura 2.17

donde:

$t_r$ , tiempo de subida (rise time), es el tiempo necesario para que la respuesta pase del 10% al 90% de su valor final, o tiempo que tarda el sistema en alcanzar su nuevo valor set-point.

$t_p$ , tiempo de pico (peak time), es el tiempo que tarda el sistema en alcanzar el valor máximo.

$t_s$ , tiempo de establecimiento (settling time), es el tiempo que toma el sistema para que el transitorio decaiga.

$t_d$ , tiempo de retardo, es el tiempo para el que la respuesta alcanza la mitad del valor final.

$M_p$ , sobrepico (overshoot), es el valor máximo cuando el sistema se sobrepasa en el transitorio.

## 2.3 Realización práctica

El objetivo de esta práctica es estudiar la respuesta temporal de circuitos usando ecuaciones diferenciales. Veremos sistemas de primer orden, aquéllos que dan lugar a ecuaciones diferenciales cuya solución es una exponencial decreciente (solución homogénea) más la correspondiente solución particular. También estudiaremos sistemas de segundo orden en los que podremos ver que tienen un comportamiento más variado teniendo sistemas oscilantes, amortiguados, etc.

### Ejercicio 1 Carga y descarga de C

#### Carga del condensador

Si el condensador está inicialmente descargado, cuando se cierra el interruptor en el instante  $t=0$  en el circuito de la figura 2.18, aparece una corriente variable durante un cierto intervalo de tiempo.

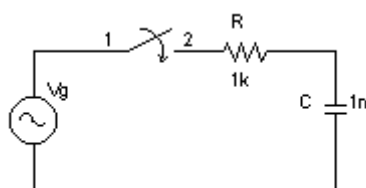


Figura 2.18

Para el conocimiento del circuito determinaremos la corriente de malla  $i(t)$  y el voltaje de la resistencia y condensador.

$$V_g(t) = V_R(t) + V_C(t)$$

Teniendo en cuenta que  $V_R(t) = R \cdot i(t)$  e  $i(t) = C \frac{dV_C(t)}{dt}$  nos queda

$$V_g(t) = R \cdot C \frac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t)$$

Esta es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden con coeficientes constantes, en la que la solución es la suma de la solución particular y solución homogénea. En nuestro circuito esto corresponde a la componente natural y componente forzada respectivamente. Toda ecuación diferencial de primer orden requiere una condición inicial, y en nuestro caso se obtiene del voltaje en el condensador en el instante de cierre del interruptor  $V_C(t=0) = V_{C0}$ . Teniendo en cuenta que aplicamos una tensión constante  $V_g$  en  $t \geq 0$ , la componente forzada será igual al valor de  $V_g$ , mientras que la componente natural será de tipo exponencial:

$$V_C(t) = V_h(t) + V_f(t) = (V_{C0} - V_g)e^{-\frac{t}{RC}} + V_g \quad \text{para } t \geq 0$$

Observemos que el coeficiente de la componente natural se ha ajustado para que se satisfaga la condición inicial. Suponiendo que el condensador inicialmente está descargado no quedará la siguiente ecuación:

$$V_C(t) = V_g \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

Sabiendo que  $V_g(t) = V_R(t) + V_C(t)$  tendremos que:

$$V_R(t) = V_g - V_g \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) = V_g \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

que irá disminuyendo exponencialmente con el tiempo, y la intensidad  $i(t)$  será:

$$i(t) = \frac{V_g}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

El voltaje de  $V_C(t)$  aumenta progresivamente hacia el límite  $V_g$ , valor para el cual el condensador está totalmente cargado. La constante de tiempo  $\tau = R \cdot C$ , representa el instante para el cual el voltaje  $V_C(t)$  ha alcanzado el 63% del voltaje final de  $V_g$ .

### *Descarga del condensador*

Estando el condensador cargado, desconectando la tensión del circuito y dejando únicamente la resistencia conectada con el condensador, la corriente en la descarga del condensador pasa a través de la resistencia. Tal y como se muestra en la figura 2.19 se puede observar como quedaría el circuito y la ecuación resultante.

$$V_R(t) + V_C(t) = 0 \Rightarrow RC \frac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t) = 0$$

$$V_C(t) = V_{CO} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad V_R(t) = -V_{CO} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad i(t) = -\frac{V_{CO}}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

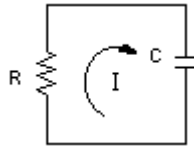


Figura 2.19

El signo menos en la corriente indica que su signo es contrario al supuesto, por tanto, se deduce que el condensador está funcionando de forma análoga a un generador de tensión que suministra energía al circuito durante el tiempo que dura la descarga. Para la descarga del condensador se obtiene la misma constante de tiempo, que en este caso, es el tiempo en el cual  $V_C(t)$  alcanza el 36% del valor inicial  $V_{CO}$ .

a) Montar el circuito de la figura 2.20 tomando como valores de  $R = 10k\Omega$  y  $C = 2200\mu F$ , alimentando el circuito con una tensión en continua de 12V. Rellenar la siguiente tabla ayudándose de un reloj para medir el tiempo de carga y descarga del condensador.

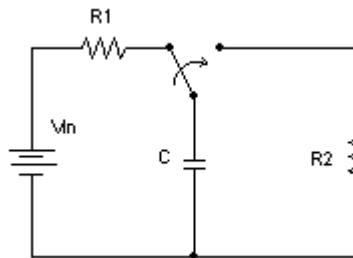


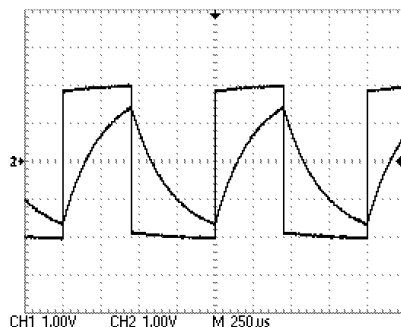
Figura 2.20

Carga del condensador		Descarga del condensador	
Tiempo (s)	Vc (V)	Tiempo (s)	Vc (V)
0	0	0	11,91
10	3,92	10	7,94
20	6,85	20	5,13
30	8,64	30	3,46
40	9,73	40	2,16
50	10,47	50	1,50
60	10,96	60	1,01
70	11,27	70	0,68
80	11,47	80	0,49
90	11,60	90	0,35
100	11,69	100	0,25
110	11,75	110	0,19
120	11,79	120	0,15
130	11,82	130	0,11
140	11,84	140	94m
150	11,85	150	78m
160	11,87	160	65m

b) ¿Qué ocurre si se cambia los valores de R por una de  $1k\Omega$ ? Justificar los resultados.

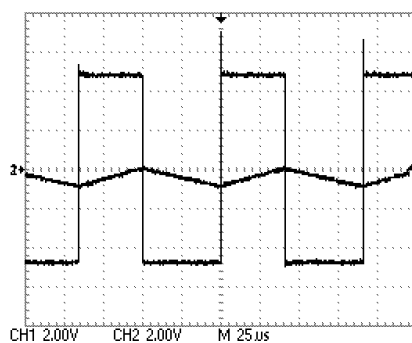
Cuando se cambia la resistencia de valor a  $1k\Omega$ , tanto en la carga como en la descarga lo hace más rápidamente. Teniendo en cuenta que la constante de tiempo es  $\tau = R \cdot C$ , al disminuir la resistencia disminuiríamos el tiempo que  $V_c$  tardará en alcanzar el 63% del valor final de  $V_g$ .

c) Utilizando el mismo circuito anterior con un  $C = 220nF$ ,  $R = 1k\Omega$  y cambiando la fuente de alimentación en continua por una señal cuadrada de 2V de pico y con la ayuda del osciloscopio visualizar la señal del condensador.



d) Aumentar la frecuencia 10 veces y visualizar la forma de onda obtenida en el condensador. ¿Cuál es su amplitud en relación con la amplitud de la onda cuadrada? Justificar los resultados.

Como se puede comprobar a una frecuencia más alta la señal en el condensador tiene una amplitud más pequeña ya que la señal tarda menos en llegar a la señal de entrada.



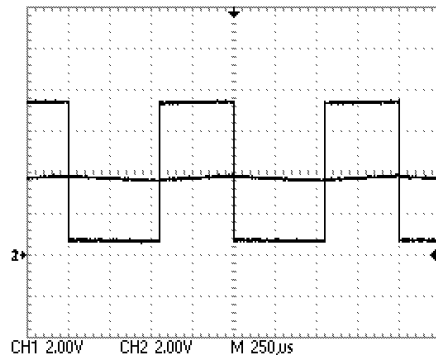
e) Calcular de forma teórica y práctica la constante de tiempo

Fórmula constante de tiempo	$\tau = R \cdot C$
Valor teórico de la constante de tiempo	$\tau = 1k \cdot 220n = 220\mu s$
Valor práctico de la constante de tiempo	$\tau \approx 0,8 \cdot 250\mu = 200\mu s$

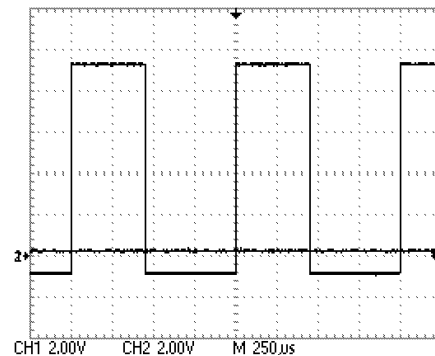


f) Conectar una R de  $100\Omega$  en serie con un condensador C de  $100\mu\text{F}$  respetando la polaridad del mismo, y aplicar una tensión de continua de +5V con el generador de funciones actuando sobre el mando DC offset. Visualizar en el osciloscopio la señal obtenida en el condensador y observar la evolución del proceso de carga y descarga del condensador.

*Carga del condensador*

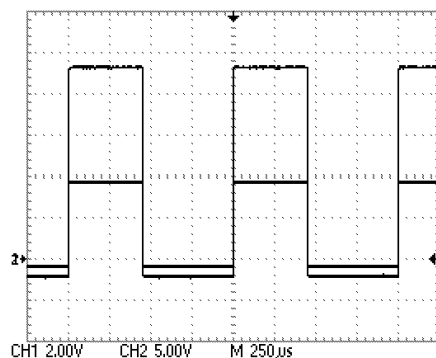


*Descarga del condensador*

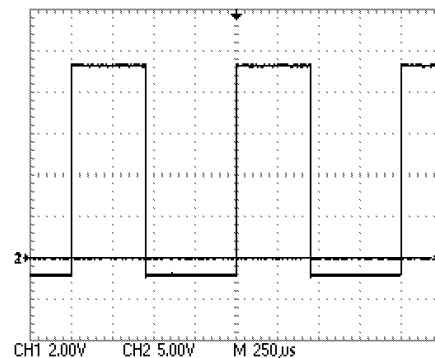


g) Repetir el ejercicio anterior cambiando el condensador electrolítico de por uno de  $10\text{nF}$ .

*Carga del condensador*



*Descarga del condensador*



## Ejercicio 2 Carga y descarga de L

*Carga del inductor*

El fenómeno de inducción electromagnética, descrito por la ley de Faraday, explica la producción de un voltaje inducido adicional cuando aumenta o disminuye la intensidad de corriente que atraviesa una bobina con coeficiente de autoinducción L. Los cambios en la intensidad de corriente llevan aparejadas variaciones de flujo magnético  $\phi(t)$  que atraviesa la bobina.

$$\phi(t) = L \cdot i(t)$$

y según al ley de Faraday:

$$V_L(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} = L \frac{di(t)}{dt}$$

Suponiendo que el coeficiente de autoinducción  $L$  es constante en el tiempo, el sentido del voltaje inducido es tal que, por su defecto en la corriente, se opone a las variaciones de flujo magnético en el interior de la bobina (ley de Lenz).

En el circuito de la figura 2.21 la intensidad de corriente  $i(t)$  no alcanza instantáneamente el valor estacionario, sino que se rige por la siguiente ecuación:

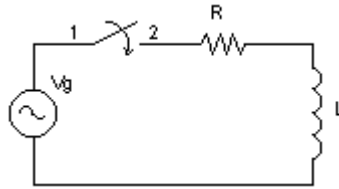


Figura 2.21

$$Vg(t) = V_R(t) + V_L(t) \Rightarrow Vg(t) = R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

$$\frac{Vg(t)}{R} = i(t) + \frac{L}{R} \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

Considerando que  $Vg(t) = Vg \cdot u(t)$  donde  $Vg$  es constante y  $u(t)$  es una función escalón nos quedará una ecuación como:

$$i(t) = i_L(t) = \left( i_{L0} - \frac{Vg}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{Vg}{R}$$

La condición inicial es la corriente que circula por la bobina en el momento de cerrar el interruptor  $i_L(t=0) = i_{L0}$ , en este caso tendremos:

$$i_L(t) = \frac{Vg}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

Las caídas de tensión tanto en  $R$  como en  $L$  serán las siguientes ecuaciones:

$$V_R(t) = Vg \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \quad V_L(t) = Vg \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

La constante de tiempo del circuito RL serie es igual a  $\frac{L}{R}$ , que representa el tiempo necesario para que la corriente alcance el 63% del valor final estacionario.

#### Descarga del inductor

Para analizar el proceso de disminución de corriente a través de la bobina, consideraremos la situación para la cual se ha alcanzado el régimen estacionario descrito previamente en el que la ecuación diferencial es la siguiente:

$$Vg(t) = V_R(t) + V_L(t) \Rightarrow Vg(t) = R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} = 0$$

$$i_L(t) = \frac{Vg}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

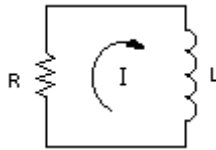


Figura 2.22

suponiendo que al iniciar la descarga circulase por la bobina una intensidad de corriente  $i_{LO} = \frac{V_g}{R}$ , en donde la tensión y la corriente de la resistencia vendrán dadas por:

$$V_R(t) = -V_L(t) = -V_g \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \quad i_R(t) = -\frac{V_g}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

El signo menos en la corriente indica que su signo es contrario al supuesto, se deduce que la bobina está funcionando de forma análoga a un generador de corriente y, por tanto, suministrando, energía al circuito durante el tiempo que dura su descarga de corriente.

**Montar el circuito de la figura 2.23 cambiando la fuente de alimentación en continua por una señal cuadrada de 5V de pico, R de 470Ω y L de 10mH. Con la ayuda del osciloscopio visualizar la señal del inductor con varios intervalos de frecuencia.**

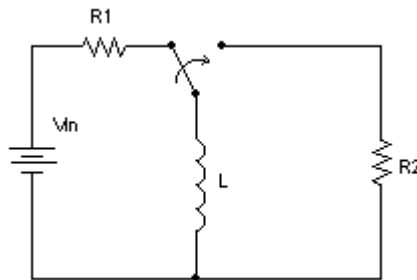
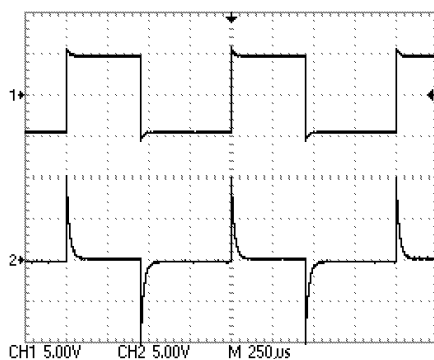
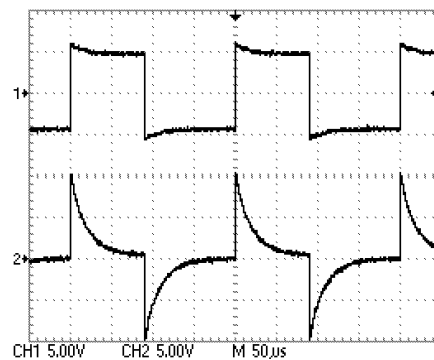


Figura 2.23

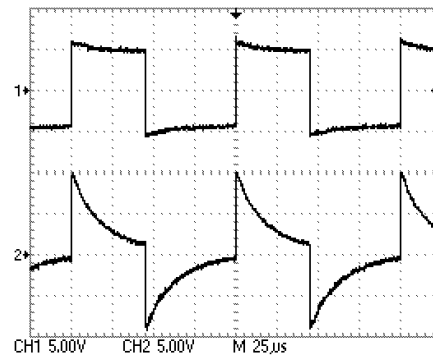
**Frecuencia a 1kHz**



**Frecuencia a 5kHz**



### Frecuencia a 10kHz



### b) Calcular de forma teórica y práctica la constante de tiempo

Fórmula constante de tiempo	$\tau = L / R$
Valor teórico de la constante de tiempo	$\tau = 470 \cdot 250\mu s = 21,27\mu s$
Valor práctico de la constante de tiempo	$\tau \approx 0,15 \cdot 250\mu s = 37,5\mu s$

### Ejercicio 3 Circuito RLC

La ecuación que representa el circuito de la figura 2.24 es:

$$V_g(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_C(t) = i(t) \cdot R + L \frac{di(t)}{dt} + V_C(t)$$

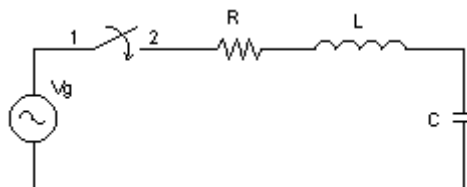


Figura 2.24

Como la intensidad que atraviesa cada uno de los elementos del circuito es la misma, utilizaremos la expresión de la corriente en el condensador  $i(t) = i_C(t) = C \frac{dV_C(t)}{dt}$ , y suponiendo que la señal de entrada sea un escalón podremos escribir:

$$V_g u(t) = R \cdot C \frac{dV_C(t)}{dt} + L \cdot C \frac{d^2 V_C(t)}{dt^2} + V_C(t)$$

Esta es una ecuación diferencial de segundo orden, cuya solución general es la suma de la solución particular y la solución homogénea y requiere dos condiciones iniciales para su solución. En el caso del circuito RLC serie éstas se obtienen del voltaje inicial en el condensador y la corriente inicial en la bobina.

La solución  $V_C(t)$  para  $t \geq 0$  es la suma de la respuesta forzada  $V_{CF}$  (solución particular) y la respuesta natural  $V_{CN}$  (solución homogénea). La respuesta forzada es del mismo tipo que la entrada:  $V_{CF}(t) = V_g$ . La respuesta natural es solución de la ecuación homogénea:

$$L \cdot C \frac{d^2 V_{CN}(t)}{dt^2} + R \cdot C \frac{dV_{CN}(t)}{dt} + V_{CN}(t) = 0$$

Considerando una solución de tipo exponencial en la que  $V_{CN}(t) = k \cdot e^{st}$  tendremos:

$$k \cdot e^{st} \left( s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC} \right) = 0$$

cuyas soluciones, exceptuando de  $k = 0$ , serán:

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

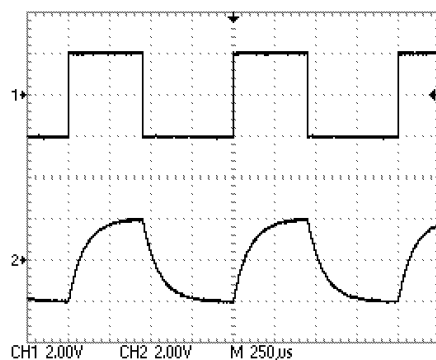
una vez halladas las soluciones tendremos que:

$$V_{CN}(t) = k_1 \cdot e^{s_1 t} + k_2 \cdot e^{s_2 t}$$

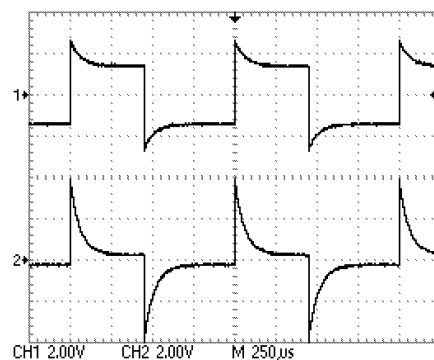
Las dos constantes que aparecen en la ecuación,  $k_1$  y  $k_2$ , se determinarán a partir de las condiciones iniciales del circuito.

**Observar la respuesta a un escalón en un circuito RLC serie, con un inductor de 10mH, un condensador de 10nF y una resistencia de 100Ω.**

*Voltaje de entrada y condensador*

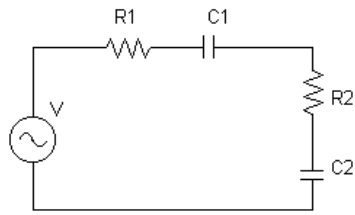


*Voltaje de entrada e inductor*

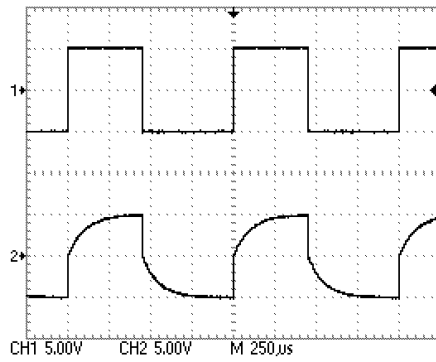


#### Ejercicio 4 Circuito de segundo orden

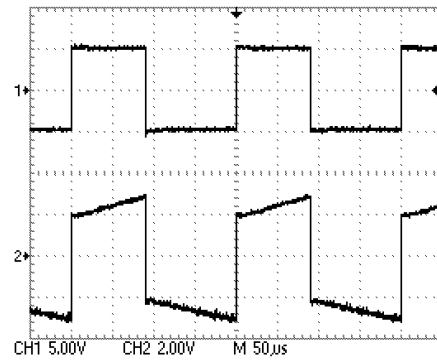
Montar el circuito de la figura 2.25 y visualizar el voltaje en los tres puntos diferentes del circuito para dos intervalos de frecuencia comparando las gráficas. Utilizar  $R = 10k\Omega$  y  $C = 10nF$ .  $V_1$  será el voltaje entre  $R_1$  y  $C_1$ ,  $V_2$  será el voltaje entre  $C_1$  y  $R_2$ ,  $V_3$  será el voltaje entre  $R_2$  y  $C_2$ .



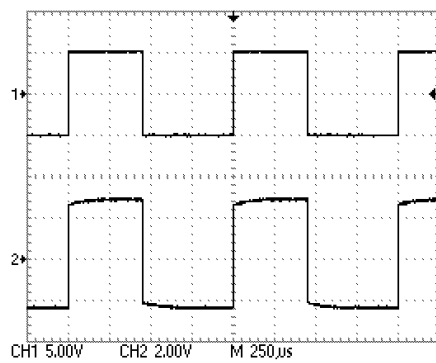
$V_1$  a frecuencia 1kHz



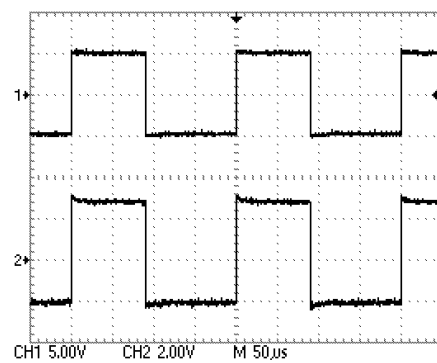
$V_1$  a frecuencia 5kHz



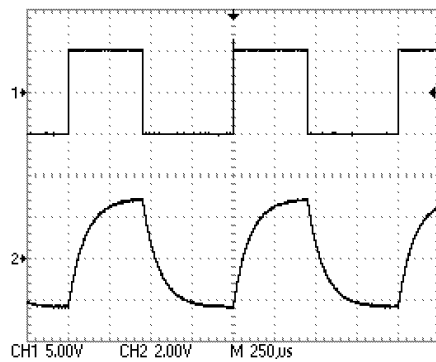
$V_2$  a frecuencia 1kHz



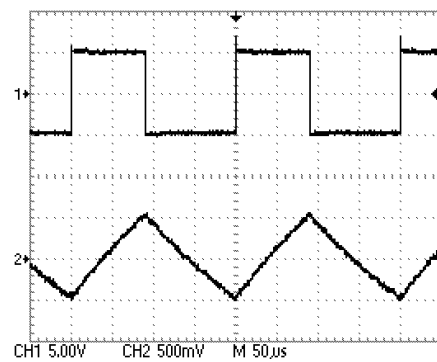
$V_2$  a frecuencia 5kHz



$V_3$  a frecuencia 1kHz



$V_3$  a frecuencia 5kHz



### 3. Régimen permanente sinusoidal

#### 3.1 Introducción

En esta práctica estudiaremos la respuesta en régimen permanente de circuitos con resistencias, bobinas y condensadores cuando la señal de entrada es de tipo sinusoidal (corriente alterna sinusoidal). La elección de este tipo de excitación no es causal, ya que a partir de la respuesta del circuito a una señal sinusoidal de frecuencia arbitraria es posible determinar el comportamiento del mismo frente a otras señales de entrada periódicas.

Los métodos de análisis de circuitos en corriente alterna en el dominio de la frecuencia son análogos a los establecidos para el caso de corriente continua y se mantiene la validez de los teoremas y relaciones fundamentales. Las magnitudes fundamentales del análisis en régimen permanente sinusoidal son: fasor de corriente, fasor de voltaje e impedancia.

Para esta práctica consideraremos el análisis de circuitos sometidos a una o más excitaciones permanentes de tipo sinusoidal. Pueden considerarse tres tipos diferentes de análisis:

- Análisis de un circuito funcionando en régimen permanente sinusoidal a una frecuencia dada (análisis fasorial). Este tipo de análisis también permite mediante la aplicación del principio de superposición, la consideración de circuitos sometidos a excitaciones con frecuencias diferentes pero fijas.
- Análisis de la variación de respuesta en función de la frecuencia de un circuito sometido a una sola excitación sinusoidal (respuesta en frecuencia). Este tipo de análisis permite, entre otras posibilidades, determinar en función de la frecuencia la variación de la fase y el módulo de distintas variables, la variación de la función de transferencia, la frecuencia de resonancia, o la influencia de la variación de algún elemento pasivo.
- Análisis en el dominio del tiempo. Este tipo de análisis permite representar la variación de magnitudes eléctricas en función del tiempo. Pueden considerarse circuitos con dos o más excitaciones diferentes.

Las señales en régimen permanente sinusoidal pueden ser tratadas como combinaciones lineales de señales sinusoidales. Muchos circuitos funcionan en régimen permanente sinusoidal y el objetivo principal de este análisis es obtener el módulo y la fase de la respuesta. El módulo y la fase de la respuesta dependen de las características de la excitación y de los elementos del circuito, conociendo también que, la frecuencia de la respuesta es igual a la de la excitación.

Las magnitudes fundamentales se tratan mediante fasores y los elementos pasivos, resistencias, condensadores, inductancias, se tratan como impedancias. A la hora de hacer los cálculos matemáticos se utilizan las identidades de Euler y los números complejos, también pueden aplicarse las leyes de Kirchhoff, análisis por mallas y nudos, principio de superposición, etc.

### 3.2 Impedancia de los componentes básicos

La impedancia eléctrica ( $Z$ ) mide la oposición de un circuito o de un componente eléctrico al paso de una corriente eléctrica alterna sinusoidal. El concepto de impedancia generaliza la ley de Ohm en el estudio de circuitos en corriente alterna.

En general, la solución para las corrientes y las tensiones de un circuito formado por resistencias, inductancias y condensadores y sin ningún componente de comportamiento no lineal, son soluciones de ecuaciones diferenciales. Pero cuando todos los generadores de tensión y de corriente tienen la misma frecuencia constante y sus amplitudes son constantes, las soluciones en estado estacionario son sinusoidales y todas las tensiones y corrientes tienen la misma frecuencia y tienen la amplitud y la fase constante.

El formalismo de las impedancias consiste en pocas reglas que permiten calcular circuitos que contienen elementos resistivos, inductivos o capacitivos de manera similar al cálculo de circuitos resistivos en corriente continua. Estas reglas son válidas si estamos en régimen permanente sinusoidal con corriente alterna y que todos los componentes sean lineales.

Sea un componente electrónico o eléctrico en un circuito alimentado por una corriente sinusoidal de la forma  $I \cdot \cos(\omega t)$ , si la tensión en sus extremidades es  $V_o \cdot \cos(\omega t)$ , la impedancia del circuito o del componente se define como un número complejo  $Z$  cuyo módulo es el cociente  $V/I$  y su argumento es  $\varphi$ . Las unidades de las impedancias son los ohms.

$$Z = \frac{V_o}{I_o} \quad \arg(Z) = \varphi$$

**Resistencia:** la impedancia de una resistencia  $R$  es igual al valor de la propia resistencia ya que son los únicos componentes que tienen una impedancia real.

$$Z_R = R$$

**Inductancia:** la impedancia de una inductancia tiene la forma siguiente:

$$Z_L = j\omega L$$

en donde  $\omega = 2\pi f$  y  $j = \sqrt{-1}$

**Capacidad:** en el caso de un condensador la impedancia es:

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

Una impedancia puede representarse como la suma de una parte real y otra parte imaginaria,  $Z = R + jX$ , en donde  $R$  es la parte real y  $X$  la parte imaginaria. La admitancia es el inverso de la impedancia,

$$Y = \frac{1}{Z}$$



### 3.2.1 Cálculo de circuitos con las impedancias

Los circuitos que contienen impedancias se pueden calcular de la misma manera que se calculan circuitos con resistencias en corriente continua. Uno de los métodos por ejemplo sería el cálculo de corrientes mediante las leyes de Kirchhoff, en el que se aplicaría que la suma de las corrientes que llegan a un nudo es cero, y la suma de todas las tensiones alrededor de una malla es cero. La única diferencia en esta ocasión es que tanto las tensiones como las corrientes son complejas.

Generalizando como dice la ley de Ohm, la tensión entre las extremidades de una impedancia es igual al producto de la corriente por la impedancia.

$$V_Z = Z \cdot I_Z$$

Tanto la impedancia como la corriente y la tensión son complejas. Las impedancias se tratan como las resistencias con la ley de Ohm, es decir, cuando hay más de una impedancia conectada en serie, la impedancia total es la suma de todas las impedancias de los componentes conectados en serie. De la misma forma pasa cuando hay varias impedancias conectadas en paralelo, que la impedancia total será el inverso de la suma del inverso de todas las impedancias del circuito.

$$\text{Serie: } Z_T = Z_a + Z_b + \dots + Z_n \qquad \text{Paralelo: } \frac{1}{\frac{1}{Z_a} + \frac{1}{Z_b} + \dots + \frac{1}{Z_n}}$$

Una vez hecho todos los cálculos del circuito, el resultado de una tensión o de una corriente es, generalmente, un número complejo. Este número complejo se puede interpretar de la siguiente manera:

- El módulo indica el valor de la tensión o de la corriente calculada. Si, por ejemplo, los valores utilizados para los generadores eran valores de pico, el resultado también será un valor de pico, y si los valores eran eficaces, el resultado también será un valor eficaz, todo vendrá acorde con el valor dado por el generador.
- El argumento de este número complejo nos dará el desfase que hay con respecto al generador utilizado como referencia de fase. Si el argumento es positivo la tensión o la corriente calculadas estarán en avance de fase, lo contrario sucede si el argumento es negativo.

Realizaremos un ejemplo de un circuito electrónico para el mejor entendimiento del cálculo de la corriente y tensiones. Para ello utilizaremos el circuito de la figura 3.1, que representa una resistencia y una inductancia en serie alimentadas por un generador sinusoidal:

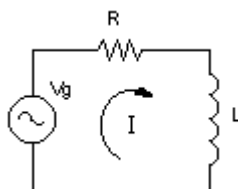


Figura 3.1

Consideraremos que tenemos un generador sinusoidal de  $V=10\cdot\cos(\omega\cdot t)$ , 10 voltios de amplitud, una frecuencia de 10kHz, una resistencia de  $1,2k\Omega$  y una inductancia de 10mH. Calcularemos la corriente que circula por el circuito:

$$I = \frac{V}{Z_L + Z_R}$$

$$I = \frac{V}{j\omega L + R} = \frac{10}{j2\cdot\pi\cdot10000\cdot0,01 + 1200} = \frac{10}{1200 + j628,3} = 0,00654 - j0,003424 \text{ A}$$

Por tanto nos quedará una corriente que tiene como módulo

$$I = \frac{10}{1200 + j628,3} = 7,38 \text{ mA}$$

y como argumento

$$\varphi = \arctg\left(\frac{10}{1200 + j628,3}\right) = -0,4823\text{rad} = -27,63^\circ$$

El valor de la corriente es un valor de pico ya que tomamos un valor de tensión del generador de pico, si se quisiera tener el valor eficaz del mismo habría que dividir este valor por  $\sqrt{2}$ . La corriente está en retardo de fase con respecto a la fase del generador tal y como se puede comprobar en el resultado final, es lógico el resultado obtenido ya que se trata de un circuito inductivo.

Las impedancias no pueden utilizarse cuando los generadores no tienen la misma frecuencia, el formalismo de las impedancias no puede aplicarse directamente. En ese caso lo que se puede hacer es utilizar el teorema de superposición, se hace un cálculo separado para cada una de las frecuencias (reemplazando en cada uno de los cálculos todos los generadores de tensión de frecuencia diferente por un circuito abierto). Cada una de las tensiones y corrientes totales del circuito será la suma de cada una de las tensiones o corrientes obtenidas a cada una de las frecuencias. Para hacer estas últimas sumas hay que escribir cada una de las tensiones en la forma real, con la dependencia del tiempo y el desfase,  $V_i\cdot\cos(\omega_i\cdot t + \varphi_i)$  para las tensiones y las fórmulas similares para las corrientes.

Si las señales no son sinusoidales pero son periódicas y continuas se pueden descomponer las señales en serie de Fourier y utilizar el teorema de superposición para separar el cálculo en uno para cada una de las frecuencias. El resultado final será la suma de los resultados para cada una de las frecuencias de la descomposición en serie.

### 3.3 Fasores

#### 3.3.1 Definición de fasor

Un fasor es una constante que representa la amplitud compleja, magnitud y fase, de una función de tiempo senoide. Normalmente se expresa de una forma exponencial, en ingeniería los fasores se utilizan para simplificar los cálculos con sinusoides, ya que permiten reducir un problema de ecuaciones diferenciales a uno algebraico.

El fasor no tiene entidad real, combina en un solo número la información de módulo y fase de la señal a la que está asociado. Las técnicas de análisis están diseñadas para obtener los fasores asociados a las magnitudes de interés. Las magnitudes de potencia y energía carecen de fasores asociados.

### 3.3.2 Representación fasorial de señales sinusoidales

Una senoide u onda seno está definida como una función de forma

$$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

donde

y es la función que varía con el tiempo

A es la amplitud de la senoide, es un valor de pico y es constante

$\omega$  es la frecuencia angular dada por  $\omega = 2\pi f$  donde f es la frecuencia

t es el tiempo

$\varphi$  es el ángulo de fase de la senoide, es constante y viene expresada en radianes

La función anterior puede ser expresada de la siguiente forma

$$y = R[A(\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi))]$$

R(Z) es la parte real del número complejo Z, y de forma equivalente, según la fórmula de Euler

$$y = R[A \cdot \exp(j(\omega t + \varphi))]$$

$$y = R[A \cdot \exp(j\omega t) \cdot \exp(j\varphi)]$$

definiremos que Y es la representación fasor de esta senoide y quedará de la siguiente forma

$$Y = A \cdot \exp(j\varphi)$$

de forma que tendremos

$$y = R[Y \cdot \exp(j\omega t)]$$

el fasor Y es el número complejo que contiene la magnitud y fase de la senoide. Los fasores normalmente se escriben en notación angular

$$Y = A \angle \varphi$$

el ángulo de fase normalmente se especifica en grados en lugar de en radianes, y la magnitud suele venir especificada en valor eficaz en lugar de valor de pico.

El tratamiento teórico y práctico del régimen permanente sinusoidal se simplifica mucho haciendo una transformación de las funciones seno y coseno reales a la función exponencial de variable compleja, esta transformación es la que previamente hemos presentado como la identidad de Euler.

### 3.3.3 Propiedades de los fasores

Para agilizar el uso de fasores a la hora de realizar los cálculos debemos tener en cuenta una serie de propiedades propias de los fasores:

- Sólo es válido el empleo de fasores en señales sinusoidales.
- El fasor es un número complejo independiente del tiempo.
- La simbología V e I nos indica las amplitudes de la señal, tensión y corriente respectivamente.
- $\varphi$  es la fase inicial.
- La representación gráfica y las operaciones con fasores son idénticas a las de los números complejos.
- Los cálculos del régimen permanente sinusoidal se realizarán con fasores .

- Los fasores no sirven para analizar el régimen transitorio.

Cuando alguna de las funciones  $v(t)$  o  $i(t)$  se expresen como función coseno y la otra como función seno, se tendrá que tener en cuenta la relación trigonométrica  $\sin(\varphi) = \cos(\varphi - \pi/2)$ , que nos indica que la gráfica de la función seno está retrasada  $90^\circ$  con respecto a la de la función coseno. En el siguiente ejemplo se puede observar numéricamente como resolverlo:

$$v(t) = 5 \cdot \cos(\omega t + \pi/3) \Rightarrow V = 5 \cdot \exp(j\pi/3) = 5 \cdot \cos(\pi/3) + j \sin(\pi/3) = 2,5 + j0,87$$

$$i(t) = 5 \cdot \sin(\omega t + \pi/3) = 5 \cdot \cos(\omega t + \pi/3 - \pi/2) = 5 \cdot \cos(\omega t - \pi/6) \Rightarrow I = 5 \cdot \exp(-j\pi/6) = 5 \cdot \cos(\pi/6) - j \sin(\pi/6) = 4,3 - j0,5$$

### 3.4 Análisis circuito RLC serie

Utilizaremos el circuito de la figura 3.2, circuito RLC serie, para entender mejor el análisis de los voltajes y corriente de cada elemento que compone el circuito.

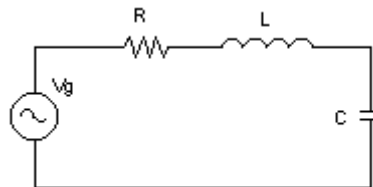


Figura 3.2

La ecuación resultante por análisis de malla de voltaje la obtenemos de la ley de Kirchhoff y queda de la siguiente manera:

$$V_g = V_R + V_L + V_C = R \cdot I + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = \left[ R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] \cdot I$$

la impedancia del circuito es

$$\begin{aligned} Z(j\omega) &= \frac{V}{I} = R + Z_L + Z_C = R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = \\ &= R + j\omega L \left( 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) = R + jL \frac{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)}{\omega} \end{aligned}$$

la frecuencia angular  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  anula la parte imaginaria de la impedancia, la impedancia en forma de módulo quedará:

$$\begin{aligned} Z(j\omega) &= |Z(j\omega)| \exp(j\varphi) = \\ &= \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \exp(j\varphi) \end{aligned}$$

para calcular la corriente procederemos con su ecuación

$$I = \frac{V_g}{Z}$$

$$I = \frac{V_g}{Z} = \frac{V_g}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \exp[j(\theta - \varphi)]$$

$$i(t) = \frac{V_g}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos(\omega t + \theta - \varphi)$$

una vez conocida la impedancia y la corriente pasaremos a calcular el fasor de voltaje en cada elemento del circuito.

$$V_R = R \cdot I = V_g \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \exp[j(\theta - \varphi)]$$

$$V_L = j\omega L \cdot I = V_g \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \exp\left[j\left(\theta - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$V_C = \frac{I}{j\omega C} = V_g \frac{1}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \exp\left[j\left(\theta - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

en la figura 3.3 se puede comprobar el diagrama fasorial donde las longitudes de los fasores representan las magnitudes de los voltajes en cada elemento, y los ángulos de los desfases.

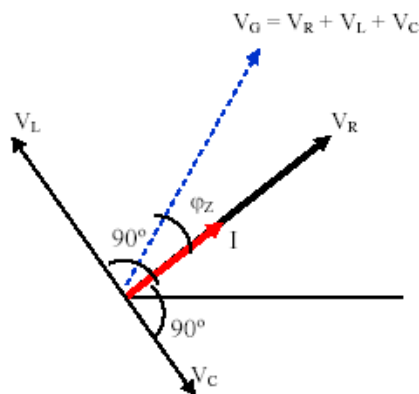


Figura 3.3

### 3.4.1 Resonancia, factor de calidad y ancho de banda

Continuando con el circuito anterior RLC serie, debemos decir que existe una frecuencia ( $f_0$ ) a la que la impedancia del circuito es mínima,  $Z(f_0) = R$ . Esta frecuencia viene dada por:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

A consecuencia de esto tenemos que la corriente es máxima y está en fase con el voltaje del generador, esta es la situación típica de resonancia del circuito. A la frecuencia de resonancia los voltajes en la bobina y en el condensador tienen la misma amplitud pero están desfasados  $180^\circ$ .

$$V_L = \frac{\omega_0 L}{R} V_g \exp\left[j\left(\theta - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{1}{\omega_0 RC} V_g \exp\left[j\left(\theta - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right] = -V_C$$

El factor de calidad del circuito RLC serie es

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{\sqrt{L/C}}{R}$$

El voltaje máximo en el inductor y en el condensador es igual, en amplitud al voltaje del generador amplificado por el factor de calidad. Podemos estudiar el circuito RLC serie también como un filtro, tomando como señal de salida el voltaje en la resistencia, tenemos la siguiente función de transferencia:

$$|H_V(j\omega)| = \left| \frac{V_R}{V_g} \right| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Este sistema se forma un filtro paso-banda, que deja pasar la banda de frecuencias centrada entorno a  $\omega_0$ , denominada frecuencia central o de resonancia. La banda de paso está definida por el intervalo comprendido entre las frecuencias angulares  $\omega_1$  y  $\omega_2$  donde la amplitud del voltaje de salida está atenuado en 3dB, con respecto a la amplitud del voltaje de salida máximo, tal y como muestra la figura 3.4. Por este motivo, el ancho de la banda de paso recibe el nombre de ancho de banda a 3dB [ $B_{3dB} = (\omega_2 - \omega_1)/2\pi = f_2 - f_1$ ].

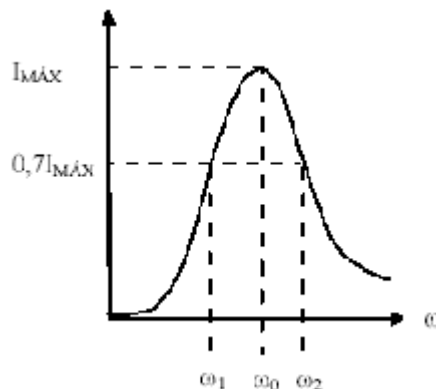


Figura 3.4

Aplicando la definición de ancho de banda a 3dB, resulta fácil obtener la relación entre frecuencia de resonancia, ancho de banda y factor de calidad.

$$B_{3dB} = \frac{f_0}{Q} \quad [\text{Hz}]$$

### 3.5 Realización práctica

#### Ejercicio 1 Circuito RLC

Montar el circuito de la figura 3.5 aplicando una señal de 5Vp para unos valores de  $R = 150\Omega$ , una  $L = 10\text{mH}$  y  $C = 47\mu\text{F}$ . Realizar los siguientes apartados:

a) Tomando como señal de salida el voltaje en la resistencia, determinar la expresión de la función de transferencia  $H(f) = V_R(f) / V_G(f)$ .

$$V_R = R \cdot I = V_G \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \exp[j(\theta - \varphi)]$$

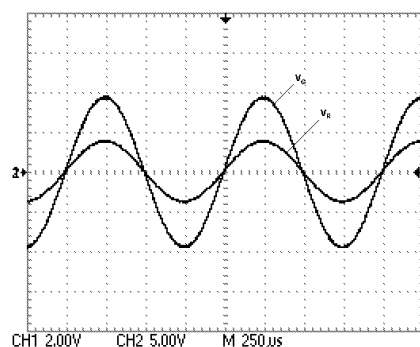
$$H(f) = \frac{V_R}{V_G} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \exp[j(\theta - \varphi)]$$

b) Determinar el valor teórico de la frecuencia de resonancia del circuito RLC.

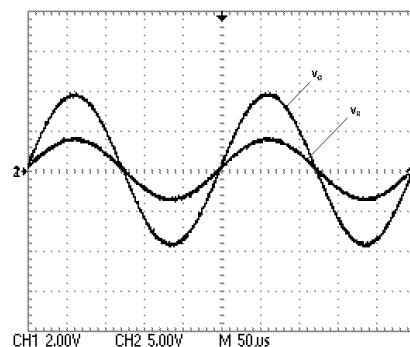
$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{47\text{m} \cdot 10\text{m}}} = 7,34\text{kHz}$$

c) Visualizar en el osciloscopio el voltaje del generador, la resistencia, la bobina y el condensador en el intervalo de frecuencias de 1kHz a 10kHz.

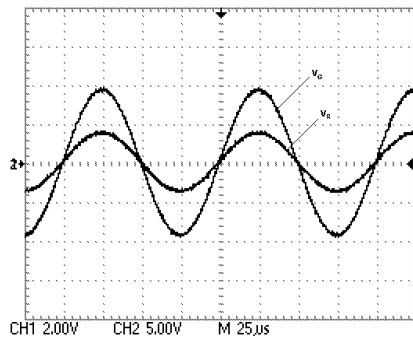
*Voltaje en la resistencia*



*frecuencia a 1kHz*

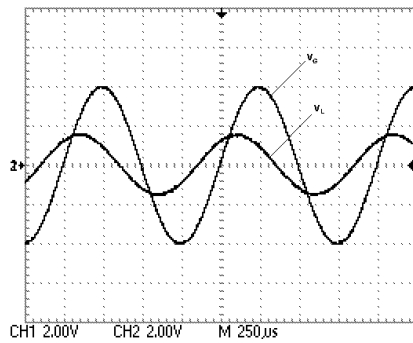


*frecuencia a 4kHz*

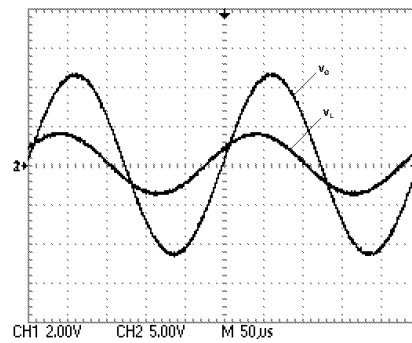


*frecuencia a 10kHz*

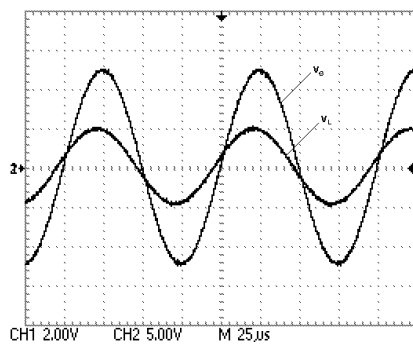
### *Voltaje en la bobina*



*frecuencia a 1kHz*

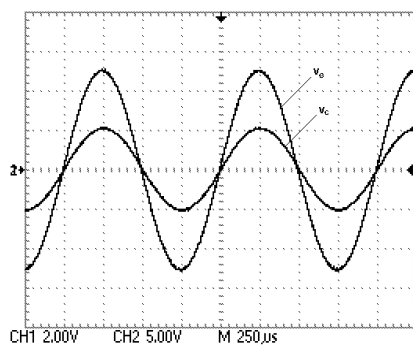


*frecuencia a 4kHz*

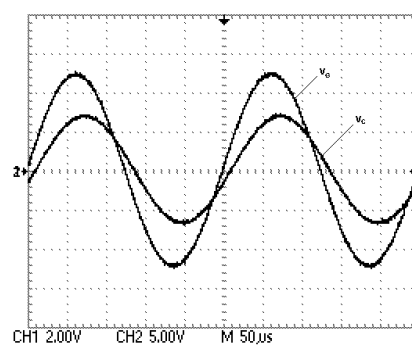


*frecuencia a 10kHz*

### *Voltaje en el condensador*

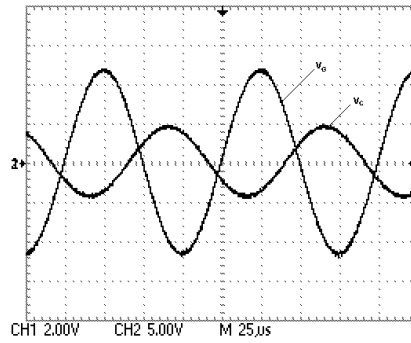


*frecuencia a 1kHz*



*frecuencia a 4kHz*



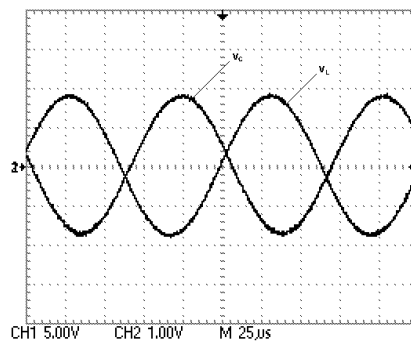


*frecuencia a 10kHz*

**d) Determinar el valor práctico de la frecuencia de resonancia.**

Para determinar la frecuencia de resonancia recordemos que la corriente es máxima y está en fase con el voltaje del generador, esta es la situación típica de resonancia del circuito. A la frecuencia de resonancia los voltajes en la bobina y en el condensador tienen la misma amplitud pero están desfasados  $180^\circ$ .

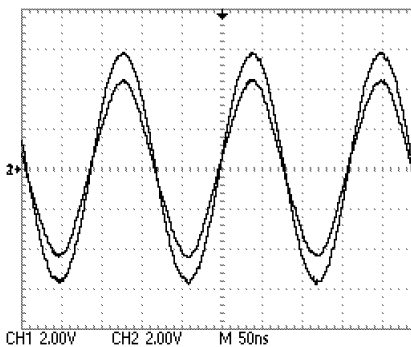
$$f_0 \approx 7,8\text{kHz}$$



*voltaje en condensador y bobina*

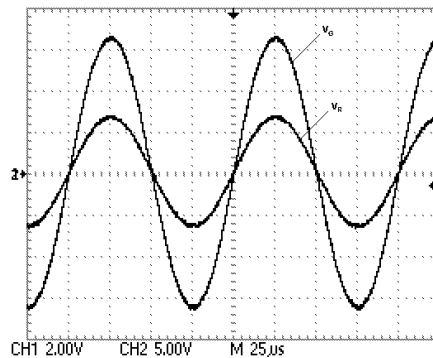
**e) Determinar experimentalmente la frecuencia a la que el voltaje en la resistencia es 3dB inferior al voltaje del generador ( $V_R \approx 0,7V_G$ ), el ancho de banda a 3dB y el factor de calidad.**

$$V_R \approx 0,7 \cdot 5 = 3,5\text{V} \Rightarrow f \approx 6,22\text{MHz}$$



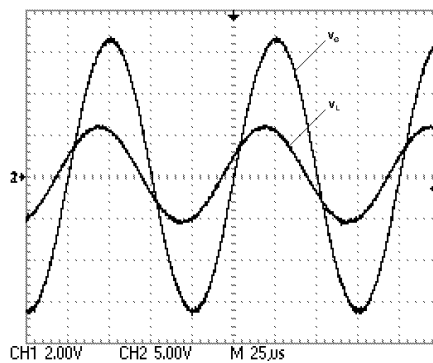
f) Ajustar la frecuencia a 10kHz y medir la amplitud y el desfase con respecto a al voltaje del generador en cada componente del circuito.

*Voltaje de  $V_G$  y  $V_R$  en fase*



el desfase de  $V_G$  con  $V_R$  es cero

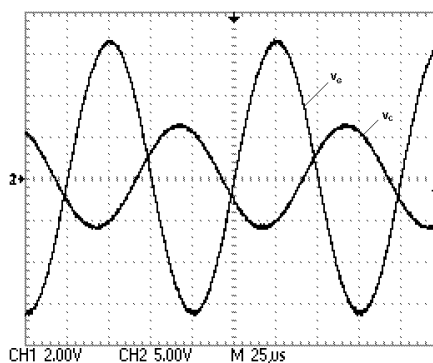
*Voltaje de  $V_G$  y  $V_L$  con señal en la bobina retrasada*



desfase de  $V_G$  con  $V_L$  es:  $0,25 \cdot 25 \cdot 10^{-6} = 6,25 \cdot 10^{-6} \text{ s} \Rightarrow f = 160 \text{ kHz}$

$$x = \frac{2 \cdot \pi \cdot 0,25}{4} = 0,125 \cdot \pi = \frac{\pi}{8} = 45^\circ$$

*Voltaje de  $V_G$  y  $V_C$  con señal en el condensador adelantada*



desfase de  $V_G$  con  $V_L$  es:  $0,25 \cdot 25 \cdot 10^{-6} = 6,25 \cdot 10^{-6} \text{ s} \Rightarrow f = 160 \text{ kHz}$

$$x = \frac{2 \cdot \pi \cdot 0,25}{4} = 0,125 \cdot \pi = \frac{\pi}{8} = 45^\circ$$

#### 4. Presupuesto

Para hacer el presupuesto voy a contabilizar en conjunto el material necesario para todas las prácticas y no por separado. No tendré en cuenta a la hora de introducir en el presupuesto el valor de los diferentes cables de conexión o como placa de entrenamiento protoboard ya que este material debe tenerlo cada alumno.

<u>Material</u>	<u>Valor</u>	<u>Cantidad</u>	<u>Precio</u>
Resistencia (1/4W)	100Ω	1	0,01 €
	150Ω	1	0,01 €
	470Ω	1	0,01 €
	1kΩ	1	0,01 €
	10kΩ	3	0,03 €
	100kΩ	1	0,01 €
Potenciómetro	1MΩ	1	0,20 €
Condensador electrolítico voltaje de 25V	47μF	1	0,01 €
	100μF	1	0,01 €
	2200μF	1	0,11 €
Condensador cerámico Voltaje de 25V	10nF	2	0,02 €
	220nF	1	0,01 €
Bobina	10mH	1	0,01 €
Amplificador operacional μA 741	μA741	1	0,14 €
<b>Total:</b>			<b>0,59 €</b>

## 5. Conclusiones

De todas estas prácticas podemos sacar la conclusión que son necesarias para el buen entendimiento de las clases teóricas. Toda parte teórica debe ser apoyada por una parte práctica en la que podamos visualizar los efectos aprendidos en teoría. Estas prácticas están realizadas con el propósito de que el alumno comparta experiencias y conocimientos en el diseño e implementación de circuitos electrónicos, como también en el tipo de análisis a utilizar.

La teoría es una parte importante para el desarrollo de estas prácticas, es por ello que en las diferentes prácticas a realizar se encuentra una parte teórica para después poder hacer la parte práctica, teniendo así una base mínima o unos mínimos conocimientos de qué se está haciendo o qué se va a hacer. Gracias a las dos partes, tanto teoría como práctica, la realización de estas prácticas no debe de ser ningún impedimento para el alumno.

Hay miles de formas para poder hacer unas prácticas e intentar que el alumno comprenda lo que está haciendo y la finalidad del mismo, por ello he intentado que estas prácticas no sean aburridas para el alumno y que a la hora de montarlas sean intuitivas y atractivas, es decir, que al alumno no le de ningún tipo de pereza hacer los montajes prácticos y compararlos con los resultados teóricos. Otra cosa importante es la duración de las prácticas, se ha intentado aprovechar el máximo tiempo del que dispondrán los alumnos para realizarlas y que entre dentro de esos márgenes.

En definitiva, son prácticas para aprender y adquirir nuevos conocimientos o ampliarlos, y no la monotonía de llegar, hacer el montaje, tomar datos y fin de la práctica.

## 6. Bibliografía

Robert Boylestad & Louis Nashelsky, “Teoría de circuitos de electrónica”, Prentice Hill, 1992

Agustín Castejón y Germán Santamaría, “Tecnología eléctrica”, Mc Graw Hill, 1993

Jesús Pareja, Aurelio Muñoz y Carlos Angulo, “Semiconductores avanzados”, Mc Graw Hill, 1990

Publicació docent UPC, “Prácticas de análisis de circuitos”, UPC

Angel Zetina, “Electrónica Básica”, Limusa, 2004

Gustavo A. Ruiz, “Electrónica básica para ingenieros”, 2001

<http://www.electronicafacil.net>

<http://www.wikipedia.es>

## 7. Anexo

