UNIVERSIDAD NACIONAL DE LANÚS
DEPARTAMENTO DE DESARROLLO TECNOLÓGICO Y PRODUCTIVO
LIC. EN SISTEMAS
LIC. EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA FERROVIARIA
MATEMÁTICAS III

Guía práctica 5
Funciones vectoriales
Campos escalares

Funciones vectoriales

Vamos a trabajar ahora con **dos formas funcionales** de mucha utilidad. La primera es la que llamaremos *funciones vectoriales*, ya que tendrán una expresión vectorial cuyas componentes van a variar según un parámetro (consideraremos el caso de un parámetro t solamente).

1. A continuación, use el comando *curva* en Geogebra para graficar las siguientes funciones vectoriales:

    $a)\ r(t) = 2\,sen\,t \cdot i + 4\cos t \cdot j + t \cdot k,\ \ t \geq 0$

    $b)\ r(t) = \langle e^t, e^{2t} \rangle$

    $c)\ r(t) = \langle \sqrt{2}\,sen\,t, \sqrt{2}\,sen\,t, 2\cos t \rangle,\ \ 0 \leq t \leq {}^{\pi}/_{2}$

    $d)\ r(t) = e^t \cos t \cdot i + e^t \cdot sen\,t \cdot k + e^t \cdot k$

    $e)\ r(t) = cos^3 t \cdot i + sen^3 t \cdot j + 5 \cdot k$

    $f)\ r(t) = (0.2\,sen\,20t + 0.8)\cos t \cdot i + (0.2\,sen\,20t + 0.8)\,sen\,t \cdot j + 0.2\cos 20t \cdot k,$
    $0 \leq t \leq {}^{\pi}/_{2}.$

    $g)\ x = \cos t,\ \ y = sen\,t,\ \ \ z = \ln t$

    $h)\ r(t) = \langle |t| + t, |t| - t \rangle$

2. Demuestre que los puntos sobre una hélice cónica:

    $$r(t) = at\cos t \cdot i + bt\,sen\,t \cdot j + ct \cdot k, \quad a > 0,\ \ b > 0,\ \ c > 0$$

    yacen sobre un cono elíptico de ecuación:

    $$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

    Parametrización de una recta. Algunos casos de parametrización de rectas y segmentos:

    a) **Una recta que pasa por $\boldsymbol{P(a,b)}$ de pendiente $\boldsymbol{m}$** :

    $$x = a + rt, \quad y = b + st \qquad -\infty \leq t \leq \infty$$

    donde r y s (r no puede ser cero) son tales que $m = {}^{s}/_{r}$.

    b) **Una recta que pasa por $\boldsymbol{P(a,b)}$ y $\boldsymbol{Q(c,d)}$**:

    $$x = a + t(c-a), \quad y = b + t(d-b) \qquad -\infty \leq t \leq \infty$$

c) **Un segmento de recta que va desde $\boldsymbol{P(a,b)}$ hasta $\boldsymbol{Q(c,d)}$:**

$$x = a + t(c-a), \quad y = b + t(d-b) \quad 0 \le t \le 1$$

3. Hallar la ecuación vectorial y la ecuación paramétrica del segmento de recta que une a los puntos P y Q:

$a)$ $P(0,0,0)$, $Q(1,2,3)$ $\quad$ $b)$ $P(1,-1,2)$, $Q(4,1,7)$ $\quad$ $c)$ $P(-2,4,0)$, $Q(6,-1,2)$

4. Grafique la curva con las siguientes ecuaciones paramétricas:

$x = \sqrt{1 - 0.25\, cos^2\, 10t} \cdot \cos t$

$y = \sqrt{1 - 0.25\, cos^2\, 10t} \cdot sen\ t$

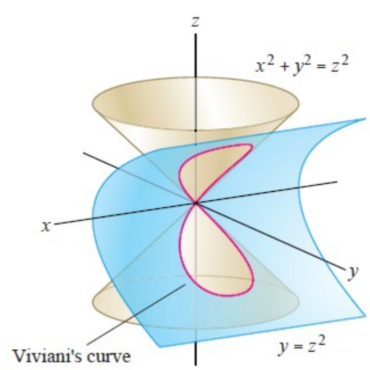
$z = 0.5 \cos 10t$

Demuestre que la gráfica yace en una esfera, use luego este resultado para explicar su apariencia.

5. **Curva de Viviani**. $\mathcal{C}$ es la intersección de las superficies:

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad\qquad y = z^2$$

a) Parametrizar en dos partes a $\mathcal{C}$, una correspondiente a $x \ge 0$ y otra a $x \le 0$, tomando a $t = z$ como parámetro.
b) Describir la proyección de $\mathcal{C}$ en el plano xy.
c) Demuestre que $\mathcal{C}$ yace sobre la esfera de radio 1, con centro en $(0,1,0)$. Como se muestra a continuación:



6. Algunas curvas interesantes en $\mathbb{R}^3$:

$a)$ $\begin{cases} x = \cos t + 2\cos 2t \\ y = sen\ t - 2\, sen\ 2t \\ z = 2\varepsilon\, sen\ 3t \end{cases}$ La **Hipotrocoide** $\qquad$ $b)$ $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\, sen\ t \\ z = 4\cos 3t \end{cases}$ La **Corona sinusoidal**

$c)$ $\begin{cases} x = 2\, sen\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot t\cos t \\ y = 2\, sen\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot t\, sen\ t \\ z = 2\, cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot t \end{cases}$ La **Espiral cónica de Pappus**

7. Calcular los siguientes límites:

$a)\ \lim_{t\to 0} \langle e^t, \frac{sen\, t}{t}, \cos t\rangle$

$b)\ \lim_{t\to 2} \left[\sqrt{t}\cdot i + \left(\frac{t^2-4}{t-2}\right)\cdot j + \left(\frac{t}{t^2+1}\right)\cdot k\right]$

$c)\ \lim_{t\to\infty} \langle e^{-t}, \frac{1}{t}, \frac{2t^2}{t^2+1}\rangle$

$d)\ \lim_{t\to -\infty} \left[\left(\frac{t-1}{2t+1}\right)\cdot i + e^{2t}\cdot j + tan^{-1}\, t\cdot k\right]$

8. Calcule $\frac{d}{dt} r\big(g(t)\big)$ en cada caso (use la regla de la cadena):

$a)\ r(t) = \langle t^2, 1-t\rangle, \qquad g(t) = e^t$

$b)\ r(t) = \langle t^2, t^3\rangle, \qquad g(t) = sen\, t$

$c)\ r(t) = \langle e^t, e^{2t}, 4\rangle, \quad g(t) = 4t+9$

9. Hallar la parametrización de la recta tangente en el punto indicado:

$a)\ r(t) = \langle t^2, t^4\rangle, t = -2 \quad b)\ r(t) = \langle \cos 2t, sen\, 3t\rangle, t = \frac{\pi}{4} \quad c)\ r(t) = \langle 1-t^2, 5t, 2t^3\rangle, t = 2$

Funciones de varias variables: Campos escalares

Nuestra siguiente **forma funcional** la llamaremos *campo escalar*, por una sencilla razón: siendo el dominio el plano *xy* (es una función de dos variables), el resultado de la operación siempre nos dará un número real, es decir, un escalar. Unos ejemplos:

$a)\ f(x,y) = \frac{-3y}{x^2+y^2+1} \qquad b)\ f(x,y) = -xye^{-x^2-y^2}$

$c)\ f(x,y) = x^2+4y^2 \qquad d)\ f(x,y) = x^3-3y^2x$

$e)\ f(x,y) = x^2y^2e^{-x^2-y^2} \qquad f)\ f(x,y) = ln(x^2+2y^2+1)$

10. Determine y grafique el dominio de los siguientes campos escalares:

$a)\ f(x,y) = \sqrt{2x^2-4xy-x-2y} \qquad b)\ f(x,y) = arc\cos xy + 2^{\frac{x}{\sqrt{1-y}}}$

$c)\ f(x,y) = e^{\sqrt{-y}} + \ln\big(5x^2+7\sqrt{2}\, y^2-\sqrt{2}\big) \qquad d)\ f(x,y) = \frac{\sqrt{16x-x^2-y^2-28}}{\sqrt{-64+y+16x-x^2}}$

$e)\ f(x,y) = \sqrt{x} + \ln\left[(x^2+y^2)\left(-x+2y-\frac{1}{3}\right)\right] \qquad f)\ f(x,y) = \sqrt{\ln(x+y)}$

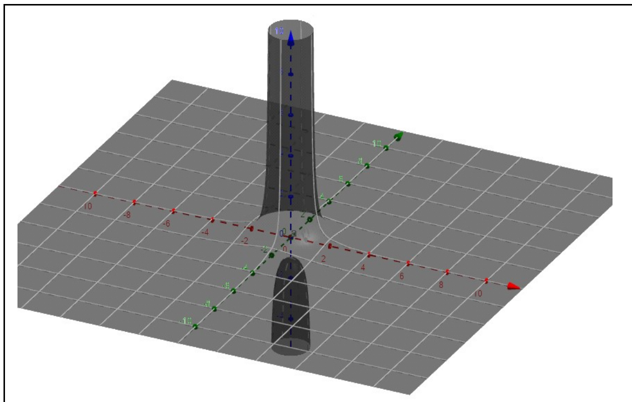
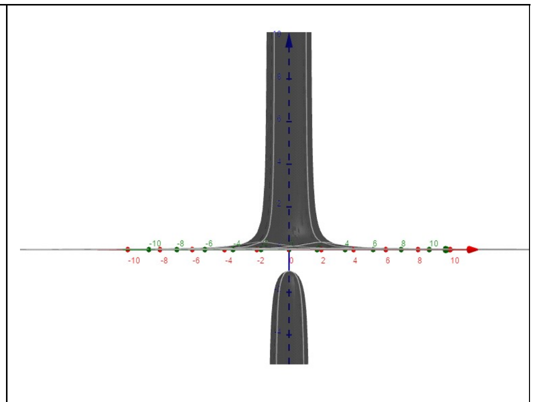
Una manera de visualizar la gráfica de un campo escalar viene de tomar la intersección del campo escalar con planos perpendiculares a los ejes coordenados. Es lo que llamaremos una *traza*. Veamos un ejemplo:

a. $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2-1}$

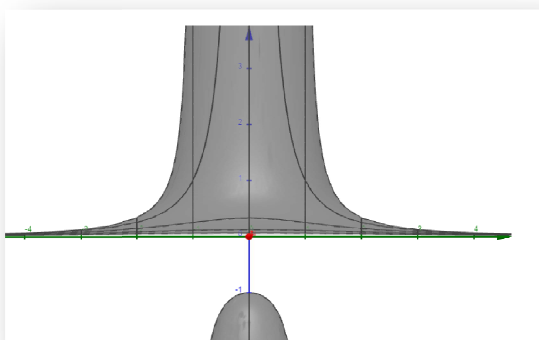
Si observamos bien la expresión, podremos darnos cuenta que f tiene existencia (está definida, toma valores) en cualquier punto del conjunto:

$$Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 1\}.$$

Observemos su gráfica desde varios ángulos:

	
Desde arriba…	**Al nivel del suelo…**

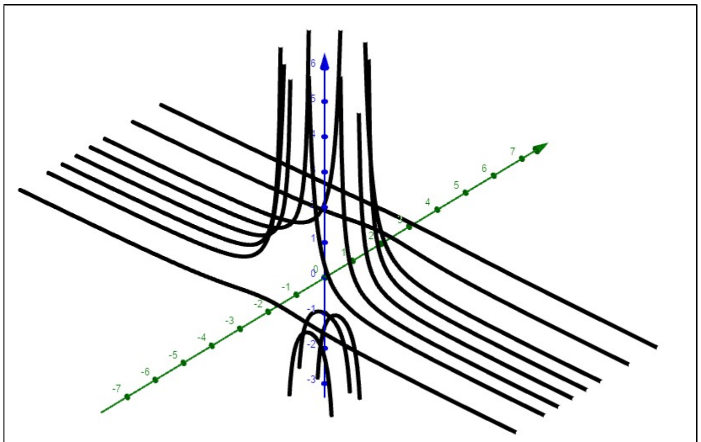
Observemos un poco más de cerca la imagen al nivel de suelo (al nivel del plano $z = 0$):



¿Pueden observar bien?
Observando la gráfica y haciendo algunos cálculos, podemos estimar que la imagen de esta función es el siguiente conjunto:

$Im(f) = \{z \in \mathbb{R} : (-\infty, -1] \cup (0, \infty)\}.$

Para visualizar mejor su comportamiento, vamos a considerar algunas *trazas*:



Aquí visualizamos las trazas para
$y = 0, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, -\frac{1}{2}, -1, -2, -3$

Otro concepto importante, son las *curvas de nivel*, las cuales son una forma de *representar en* $\mathbb{R}^2$ la proyección de las *trazas* que se obtienen al intersectar el campo escalar con *planos perpendiculares al eje* z. Se definen formalmente de la siguiente forma:

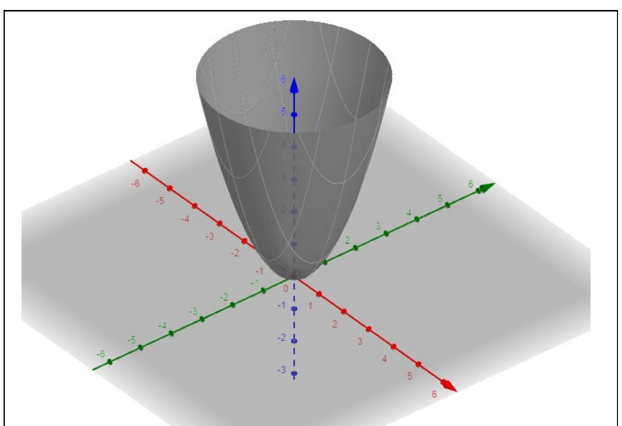
Definición 1: Sea $c \in \mathbb{R}$ y $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, La *curva de nivel* de f correspondiente al valor c es:

$$\gamma_c = \{(x, y) \in D: f(x, y) = c\}$$

En otras palabras, la curva de nivel es el conjunto de puntos del dominio ($D \subset \mathbb{R}^2$), tales que su imagen es c. Al considerar varios valores de c, obtenemos lo que llamamos *un mapa de contorno*. Veamos un ejemplo:

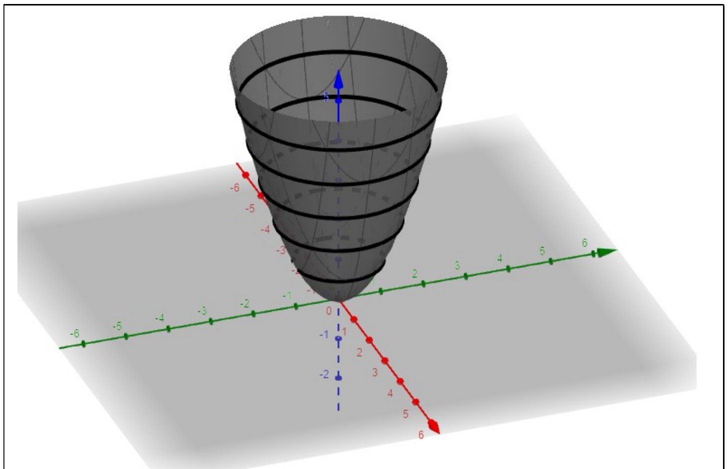
b. $f(x) = x^2 + y^2$

Veamos la superficie:



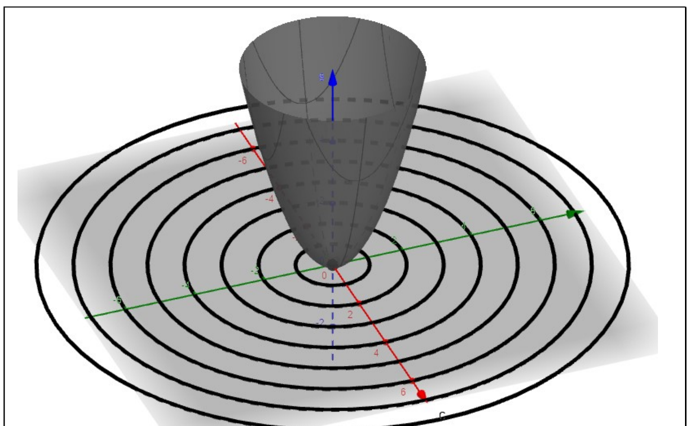
Paraboloide de revolución

Ahora veamos las trazas que surgen al intersectar la superficie con los planos paralelos al plano $z = 0$ (planos perpendiculares al eje z):



Trazas de corte con planos paralelos a $z = 0$

Y ahora mostramos las *curvas de nivel*, observen que las mismas *no están sobre la superficie*, sino en el plano xy:

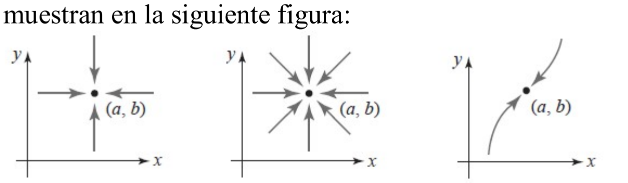


Curvas de nivel – Son conjuntos de puntos (x, y) del plano, para los cuales la altura es la misma.

11. En cada uno de los siguientes casos, dibuje algunas curvas de nivel para los campos escalares:

$$a)\ f(x,y) = x + 2y \qquad b)\ f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2 - 1} \qquad c)\ f(x,y) = e^{y - x^2}$$

La noción de límite para el caso de los *campos escalares* es algo más compleja que la que ya conocemos para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Al considerar el *límite al que se acerca un campo escalar, cuando sus valores se aproximan al punto (a,b)*, debemos pensar en todas las *infinitas posibilidades*, algunas de las cuales se muestran en la siguiente figura:



a) A lo largo de las rectas horizontal y vertical que pasan por (a, b) *b)* A lo largo de toda recta que pasa por (a, b) *c)* A lo largo de toda curva que pasa por (a, b)

12. Acceda al applet de Geogebra en el vínculo: https://www.geogebra.org/m/dhxddxn3
Para resolver varios tipos de ejercicios de cálculo de límites de campos escalares.

La información para esta guía puedes encontrarla en los siguientes videos:

Algunos elementos sobre trazas, curvas de nivel y campos escalares:
https://youtu.be/ZNiYUEXNTrQ

Sobre dominio de campos escalares y algunos elementos para recordar de límites:
https://youtu.be/Y_ztUujR2PM

Un problema de cálculo de dominio de un campo escalar:
https://youtu.be/Ihc6qPtHEUk

Ejemplos de límites en campos escalares:
https://youtu.be/8r4v6TLYv2k

Preparado por el profesor
Luis Enrique Millán
Universidad Nacional de Lanús
Buenos Aires, Mayo 2021