Trabajo práctico Nº 6 (Integral indefinida)

1. Verifique los resultados de las siguientes integrales.

a) $\int x^7 dx = \frac{1}{8}x^8 + c$ b) $\int 2\operatorname{sen} x\, dx = -2\cos x + c$

c) $\int x^4 \operatorname{sen}(x^5) dx = -\frac{1}{5}\cos(x^5) + c$

2. Calcule las siguientes integrales.

a) $\int \frac{1}{x^7} dx$ Rta: $-\frac{1}{6x^6} + c$

b) $\int \left(x^4 + x^3 + \operatorname{sen} x\right) dx$ Rta: $\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - \cos x + c$

c) $\int \frac{1}{x-2} dx$ Rta: $\ln|x-2| + c$

d) $\int x\sqrt{x} dx$ Rta: $\frac{2}{5}x^{5/2} + c$

e) $\int \left(2x^{3/5} + \sqrt{x^5} - 6\right) dx$ Rta: $\frac{5}{4}x^{8/5} + \frac{2}{7}x^{7/2} - 6x + c$

f) $\int \left(\ln 2 + \frac{1}{x}\right) dx$ Rta: $x\ln 2 + \ln|x| + c$

g) $\int (\cos x - 2\operatorname{sen} x + 1) dx$ Rta: $\operatorname{sen} x + 2\cos x + x + c$

h) $\int \frac{x\,.\sqrt[5]{x}}{x^{1/2}} dx$ Rta: $\frac{10}{17}x^{17/10} + c$

i) $\int (x+3)^2 dx$ Rta: $\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 9x + c$

j) $\int (2x+3)^2 dx$ Rta: $\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 + 9x + c$

3. Calcule las siguientes integrales.(Sustitución)

a) $\int (2x+3)^5 dx$ Rta: $\frac{(2x+3)^6}{12} + c$

b) $\int x^4 \operatorname{sen}(x^5) dx$ Rta: $-\frac{1}{5}\cos(x^5) + c$

c) $\int \frac{e^x}{1-e^x} dx$ Rta: $-\ln\left|1-e^x\right| + c$

d) $\int \frac{2x+1}{x^2+x} dx$ Rta: $\ln\left|x^2 + x\right| + c$

e) $\int \frac{dx}{\sqrt{5+x}}$ Rta: $2\sqrt{5+x} + c$

f) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{5-2x^2}}$ Rta: $-\frac{1}{3}\left(5-2x^2\right)^{3/4}+c$

g) $\int \frac{\ln x}{x}dx$ Rta: $\frac{1}{2}\ln^2|x|+c$

h) $\int \operatorname{sen}^2 x\cos x\,dx$ Rta: $\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3}+c$

i) $\int \operatorname{tg} x\,dx$ Rta: $-\ln|\cos x|+c$

j) $\int \operatorname{sen}^5 x\cos x\,dx$ Rta: $\frac{\operatorname{sen}^6 x}{6}+c$

k) $\int \frac{\operatorname{sen}2x}{1+\operatorname{sen}^2 x}dx$ Rta: $\ln(1+\operatorname{sen}^2 x)+c$

l) $\int \operatorname{sen} x\cos x\,dx$ Hágase $t=\operatorname{sen} x$ y luego $t=\cos x$. Verifique que ambos resultados difieren en una constante.

m) $\int \frac{x^2+2/3}{\sqrt{x^3+2x}}dx$ Rta: $\frac{2}{3}\left(x^3+2x\right)^{1/2}+c$

n) $\int \frac{x^3}{\left(1+x^2\right)^3}dx$ Rta: $-\frac{2x^2+1}{4\left(1+x^2\right)^2}+c$

Resolución punto k):

$$\int \frac{\operatorname{sen}2x}{1+\operatorname{sen}^2 x}dx= \qquad t=1+\operatorname{sen}^2 x \Rightarrow dt=2\operatorname{sen}x\cos x\,dx$$

$$\int \frac{\operatorname{sen}2x}{1+\operatorname{sen}^2 x}dx=\int \frac{\operatorname{sen}2x}{t}\frac{dt}{2\operatorname{sen}x\cos x}$$

$$\int \frac{\operatorname{sen}2x}{1+\operatorname{sen}^2 x}dx=\int \frac{dt}{t}=\ln|t|+c=\ln\left(1+\operatorname{sen}^2 x\right)+c$$

4. Resuelva aplicando integración por partes.

a) $\int x\operatorname{sen} x\,dx$ Rta: $\operatorname{sen} x - x\cos x + c$

b) $\int xe^x\,dx$ Rta: $e^x(x-1)+c$

c) $\int \ln x\,dx$ Rta: $x(\ln x-1)+c$

d) $\int x\ln x\,dx$ Rta: $\frac{1}{2}x^2\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+c$

e) $\int e^x\operatorname{sen} x\,dx$ Rta: $\frac{1}{2}e^x\left(\operatorname{sen}x-\cos x\right)+c$

f) $\int e^x\cos x\,dx$ Rta: $\frac{1}{2}e^x\left(\operatorname{sen}x+\cos x\right)+c$

g) $\int x^3 \ln x \, dx$ Rta: $\frac{1}{4}x^4\left(\ln x - \frac{1}{4}\right) + c$

h) $\int x\cos(5x)\,dx$ Rta: $\frac{1}{5}x\,\mathrm{sen}(5x) + \frac{1}{25}\cos(5x) + c$

i) $\int \mathrm{sen}(\ln x)\,dx$ Rta: $\frac{1}{2}x[\mathrm{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)] + c$

j) $\int x^2 e^x \, dx$ Rta: $e^x(x^2 - 2x + 2) + c$

k) $\int 2^x x^2 \, dx$ Rta: $\frac{2^x}{\ln 2}\left(x^2 - \frac{2x}{\ln 2} + \frac{2}{\ln^2 2}\right) + c$

l) $\int \arcsin x \, dx$ Rta: $x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c$

m) $\int \arccos x \, dx$ Rta: $x \arccos x - \sqrt{1 - x^2} + c$

Resolución punto j):

$$\int x^2 e^x \, dx = \qquad \begin{cases} u = x^2 & dv = e^x dx \\ du = 2x dx & v = e^x \end{cases}$$

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2\int x e^x \, dx \qquad \begin{cases} u = x & dv = e^x dx \\ du = dx & v = e^x \end{cases}$$

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2\left(x e^x - \int e^x dx\right)$$

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c$$

$$\int x^2 e^x \, dx = \boxed{e^x(x^2 - 2x + 2) + c}$$

5. Integrar las siguientes funciones racionales (cociente de funciones polinómicas) con raíces reales en el denominador.

a) $\int \frac{x - 1}{x^3 - x^2 - 2x} dx$ Rta: $\ln\left|\frac{x^3(x-2)}{(x+1)^4}\right|^{1/6} + c$

b) $\int \frac{dx}{x^2 - 9}$ Rta: $\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|^{1/6} + c$

c) $\int \frac{dx}{4 - x^2}$ Rta: $\ln\left|\frac{x+2}{2-x}\right|^{1/4} + c$

d) $\int \frac{2x^3 - 11x^2 + 23x - 17}{x^2 - 3x + 2} dx$ Rta: $x^2 - 5x + \ln\left|(x-2)(x-1)^3\right| + c$

e) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+2}{x^3-x}dx$ Rta: $x+\ln\left|\frac{(x+1)(x-1)^2}{x^2}\right|+c$

f) $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+3}{x^2-3x+2}dx$ Rta: $x+\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+c$

g) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}dx$ Rta: $-\frac{1}{6}\ln|x|+\frac{3}{10}\ln|x-2|-\frac{2}{15}\ln|x+3|+c$

h) $\displaystyle\int \frac{x^4-3}{x^3+x^2}dx$ Rta: $\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{x}+3\ln|x|-2\ln|x+1|+c$

i) $\displaystyle\int \frac{x^2-x+4}{(x-2)(x-1)^2}dx$ Rta: $\frac{4}{x-1}+\ln\left|\frac{(x-2)^6}{(x-1)^5}\right|+c$

j) $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)^3}dx$ Rta: $\frac{1-2x}{2(x-1)^2}+c$

k) $\displaystyle\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3}dx$ Rta: $\frac{4x+3}{2(x+1)^2}+2\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+c$

Resolución punto h): $\displaystyle\int \frac{x^4-3}{x^3+x^2}dx$

Por ser el polinomio del numerador de mayor grado que el denominador, hacemos la división.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & +\,0x^3 & +\,0x^2 & +\,0x & -\,3 & x^3+x^2 \\
\cline{6-6}
-x^4 & -\,x^3 & & & & x-1 \\
\cline{1-2}
& -x^3 & +\,0x^2 & & & \\
& +x^3 & +\,x^2 & & & \\
\cline{2-3}
& & x^2 & -\,3 & &
\end{array}
$$

$$\frac{x^4-3}{x^3+x^2}=\frac{(x^3+x^2)(x-1)+(x^2-3)}{x^3+x^2}=(x-1)+\frac{x^2-3}{x^3+x^2} \qquad \text{I}$$

$$\frac{x^2-3}{x^3+x^2}=\frac{x^2-3}{x^2(x+1)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x+1} \qquad \boxed{\text{II}}$$

$$\frac{x^2-3}{x^2(x+1)}=\frac{A(x+1)+Bx(x+1)+Cx^2}{x^2(x+1)} \Rightarrow$$

$x^2-3=A(x+1)+Bx(x+1)+Cx^2$ ¿Por qué?

Por tratarse de una identidad esta expresión se debe verificar para cualquier valor de x.
Elegimos valores convenientes para x.

Si $x=0 \Rightarrow -3=A \Rightarrow A=-3$

Si $x=-1 \Rightarrow -2=C \Rightarrow C=-2$

Para calcular B también elegimos un valor apropiado para x.

Si $x=1 \Rightarrow -2=A.2+B.2+C$

Reemplazando por $A=-3$ y $C=-2 \quad \Rightarrow \quad B=3$

Reemplazando en I por II:

$$\int \frac{x^4-3}{x^3+x^2}dx=\int\left(x-1+\frac{-3}{x^2}+\frac{3}{x}+\frac{-2}{x+1}\right)dx=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{x}+3\ln|x|-2\ln|x+1|+c$$

Miscelánea

6. Resuelva las siguientes integrales.

a) $\int x\sqrt{1+x}\,dx$ Rta: $\frac{2}{3}\left[x(1+x)^{3/2}-\frac{2}{5}(1+x)^{5/2}\right]+c$

b) $\int \frac{1}{x}\cos(\ln x)dx$ Rta: $\operatorname{sen}(\ln x)+c$

c) $\int \frac{3}{x^4+2x^3+x^2}dx$ Rta: $6\ln|x+1|-6\ln|x|-\frac{3}{x}-\frac{3}{x+1}+c$

d) $\int \operatorname{sen}^2(2x+1)\,dx$ Rta: $\frac{1}{4}\left[2x+1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(4x+2)\right]+c$

e) $\int \cos^3(3x-2)\,dx$ Rta: $\frac{1}{3}\left[\operatorname{sen}(3x-2)-\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3(3x-2)\right]+c$

f) $\int e^{4x+3}\,dx$ Rta: $\frac{1}{4}e^{4x+3}+c$

g) $\int \frac{3}{\sqrt{4-x^2}}dx$ Rta: $3\operatorname{arcsen}\frac{x}{2}+c$

h) $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+5}}dx$ Rta: $\frac{1}{2}\ln\left(2x+\sqrt{4x^2+5}\right)+c$

i) $\int \sqrt{3+2x^2}\,dx$ Rta: $\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\sqrt{2}x\sqrt{2x^2+3}+3\ln\left(\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2+3}\right)\right]+c$

j) $\int \sqrt{3-2x^2}\,dx$ Rta: $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{2}x\sqrt{3-2x^2}+3\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{6}x}{3}\right)+c$

k) $\int x\operatorname{ch}x\,dx$ Rta: $x\operatorname{sh}x-\operatorname{ch}x+c$

l) $\int \sqrt{5x^2-9}\,dx$ Rta: $\frac{\sqrt{5}}{10}\left[\sqrt{5}x\sqrt{5x^2-9}-9\ln\left(\sqrt{5}x+\sqrt{5x^2-9}\right)\right]+c$

m) $\int x^2\,\mathrm{sh}(x^3-2)\,dx$ Rta: $\frac{1}{3}\mathrm{ch}(x^3-2)+c$

n) $\int \mathrm{arc\,tg}\,x\,dx$ Rta: $x\,\mathrm{arc\,tg}\,x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+c$

o) $\int \mathrm{ch}(3x-5)\,dx$ Rta: $\frac{1}{3}\mathrm{sh}(3x-5)+c$

p) $\int x\,\mathrm{arc\,sen}\,x\,dx$ Rta : $\frac{x^2}{2}\mathrm{arc\,sen}\,x+\frac{1}{4}\left[x\sqrt{1-x^2}+\mathrm{arc\,sen}\sqrt{1-x^2}\right]+c$

A partir de acá, optativos:

q) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$ Rta : $\sqrt{x^2-1}-\mathrm{arc\,tg}\sqrt{x^2-1}+c$

r) $\int \frac{x^2+3}{x^2+\sqrt{2}}\,dx$ Rta : $x+\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}}\mathrm{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt[4]{2}}+c$

s) $\int \frac{\ln(x^2+2x-8)}{(x+1)^2}\,dx$ Rta : $-\frac{1}{x+1}\ln(x^2+2x-8)+\frac{1}{3}\left[\ln|x-2|-\ln|x+4|\right]+c$

t) $\int \frac{\ln(x^2+x)}{x^2}\,dx$ Rta : ¿?

u) $\int \frac{1}{e^x\,\mathrm{ch}\,x}\,dx$ Rta : ¿? Ayuda : hágase $t=e^x$