UNIVERSIDAD NACIONAL DE LANÚS
DEPARTAMENTO DE DESARROLLO TECNOLÓGICO Y PRODUCTIVO
LIC. EN SISTEMAS
LIC. EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA FERROVIARIA
MATEMÁTICAS III

Guía práctica 4
Producto Escalar
Producto vectorial
Construcción de planos y rectas

1. Calcule los siguientes productos escalares:

$a)\ \langle 1,2,1\rangle \cdot \langle 4,3,5\rangle \quad b)\ \langle \frac{1}{6},\frac{1}{2}\rangle \cdot \langle 3,\frac{1}{2}\rangle \quad c)\ (i+j)\cdot(j+k) \quad d)\ (i+j+k)\cdot(3i-5k+2j)$

2. Calcule el ángulo entre los siguientes pares de vectores:

$1)\ a=\langle 2,1\rangle, \quad b=\langle 3,4\rangle \qquad 2)\ a=i+2j+k, \quad b=8i-4j-3k$

3. Hallar el valor (o los valores) de *c* tales que el ángulo entre $a=\langle 1,c\rangle$ y $b=\langle 1,2\rangle$ sea de $45°$.

4. Hallar los valores de m tales que el ángulo entre $a=i+cj+2k$ y $b=-i+2j-k$ sea de $60°$.

5. Halle el valor de k tal que $\langle k,2,-1\rangle$ y $\langle 2,3,k\rangle$ sean ortogonales. Haga lo mismo con:

$a)\ \langle k,3,2\rangle,\langle 1,k,1\rangle \qquad b)\ \langle 4,-2,7\rangle,\langle k^2,k,0\rangle$

6. Hallar un vector que sea ortogonal a $\langle -1,2,2\rangle$.

7. Hallar dos vectores, que no sean múltiplos uno del otro, que sean ambos ortogonales a $\langle 2,0,-3\rangle$.

8. Hallar los cosenos directores y ángulos directores de los siguientes vectores:

$a)\ \langle 1,2,3\rangle \qquad b)\ -i+3j+5k \qquad c)\ 2i+2j-k \qquad d)\ \langle 3,4,5\rangle$

9. Hallar $\vec{v}\cdot\vec{e}$ sabiendo que $|\vec{v}|=3$, $\vec{e}$ es un vector unitario y el ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{e}$ es $\frac{2\pi}{3}$.

10. Un vector tiene los ángulos directores $\alpha=\frac{\pi}{3}$ y $\gamma=\frac{\pi}{4}$. Hallar el ángulo director β.

11. Halle un vector unitario cuyos ángulos directores sean todos iguales.

Propiedades del producto escalar
Si **a**, **b** y **c** son vectores en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, y *c* un escalar, se cumplen

1. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$
2. $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$
3. $(c\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=c(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot(c\mathbf{b})$
4. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=|\mathbf{a}|^2$
5. $\mathbf{0}\cdot\mathbf{a}=0$

<u>Importante</u>: si el *producto escalar de dos vectores no nulos* es cero, los vectores son ortogonales.

12. Usando las propiedades del producto escalar, simplificar las siguientes expresiones:

$$a)\ (v-w)\cdot v + v\cdot w \qquad b)\ (v+w)\cdot(v+w) - 2v\cdot w \qquad c)\ (v+w)\cdot v - (v+w)\cdot w$$

$$d)\ (v+w)\cdot v - (v+w)\cdot w$$

13. Sabiendo que $u\cdot v = 2$, $|u| = 1$ y $|v| = 3$; y usando las propiedades del producto escalar, halle los valores de:

$$a)\ u\cdot(4v) \qquad b)\ 2u\cdot(3u-v) \qquad c)\ (u+v)\cdot v \qquad d)\ (u+v)\cdot(u-v)$$

14. Calcule las siguientes determinantes:

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -5 & 2 \end{vmatrix} \qquad c)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad d)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$e)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} \qquad f)\ \begin{vmatrix} a & 3 & -a \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & a & 5 \end{vmatrix} \qquad g)\ \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \\ -4 & 2 & 2 \end{vmatrix} \qquad h)\ \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

Definición del producto vectorial:

El producto vectorial (o producto cruz) de dos vectores en el espacio $\mathbb{R}^3$

Sean $\vec{a} = a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} + a_3\hat{k}$ y $\vec{b} = b_1\hat{\imath} + b_2\hat{\jmath} + b_3\hat{k}$ dos vectores en el espacio. Entonces, el **Producto vectorial** de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ queda definido por la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{\imath} + (a_3b_1 - a_1b_3)\hat{\jmath} + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{k}}$$

El **producto vectorial** visto como el determinante de una matriz

Sean $a = a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} + a_3\hat{k}$ y $b = b_1\hat{\imath} + b_2\hat{\jmath} + b\hat{k}$, entonces:

$$a\times b = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Una definición alternativa del producto vectorial:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \left(|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta\right)\mathbf{n}$$

Donde θ es el ángulo entre **a** y **b**, $0 \le \theta \le \pi$, y $\mathbf{n}$ es el vector unitario perpendicular al plano generado por a y b, y cuya dirección está dada por la regla de la mano derecha.

Propiedades del producto vectorial.
Si **a**, **b** y **c** son vectores, y *c* un escalar, se cumplen:

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
2. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$
3. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$
4. $c(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (c\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (c\mathbf{b})$
5. $\mathbf{a} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$
6. $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$
7. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$
8. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$

Importante: el *producto vectorial de dos vectores no nulos* es cero, si los vectores son paralelos.

Interpretación geométrica del siguiente triple producto:

El volumen del paralelepípedo formado por los vectores a, b y c, viene dado por:

$$V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$$

Importante: de lo anterior se deduce que: *si* a, b y c *son vectores coplanares, entonces V da cero*.

15. Usando los cálculos de los productos vectoriales de los vectores unitarios canónicos, halle las siguientes operaciones:

$$a)\ (i+j)\times k \qquad b)\ (j-k)\times(j+k) \qquad c)\ (i-3j+2k)\times(j-k)$$

$$d)\ (2i-3j+4k)\times(i+j-7k)$$

16. Sabiendo que $u\times v = \langle 1,1,0\rangle$, $u\times w = \langle 0,3,1\rangle$, $v\times w = \langle 2,-1,1\rangle$, calcule los siguientes productos vectoriales:

$$a)\ v\times u \qquad b)\ w\times(u+v) \qquad c)\ (u-2v)\times(u+2v) \qquad d)\ v\times(u+v)$$

$$e)\ (3u+4w)\times w \qquad f)\ (v+w)\times(3u+2v)$$

17. Describir todos los vectores unitarios que son ortogonales a los siguientes vectores:

$$a)\ \vec{\imath},\vec{\jmath} \qquad b)\ -5\vec{\imath}+9\vec{\jmath}-4\vec{k}, \qquad 7\vec{\imath}+8\vec{\jmath}+9\vec{k}$$

$$c)\ -5\vec{\imath}+9\vec{\jmath}-4\vec{k}, \qquad -7\vec{\imath}+8\vec{\jmath}+9\vec{k}, \qquad \vec{0}$$

$$d)\ 2\vec{\imath}-4\vec{\jmath}-3\vec{k}, \qquad -4\vec{\imath}+8\vec{\jmath}-6\vec{k}$$

18. Hallar el área de los triángulos dados los siguientes vértices:

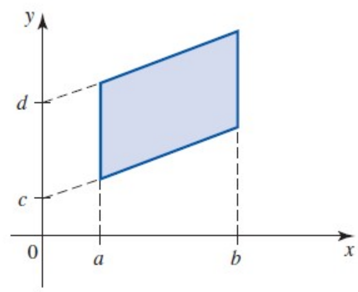
$a)\ P(1,0,0), Q(0,1,0), R(0,0,1) \quad b)\ P(1,1,1), Q(1,2,1), R(2,2,3) \quad c)\ P(0,0,0), Q(1,3,2), R(-1,-2,3)$

19. Cuáles de las siguientes expresiones tienen sentido. Explique:

$a)\ (a \times b) \cdot c \qquad b)\ a \times (b \cdot c) \qquad c)\ (a + b) \cdot (c \times d)$

$d)\ (a \times b) \cdot (c \times d) \qquad e)\ a \times [(b \cdot c)d] \qquad f)\ (a \times b) \times (c \times d)$

20. Hallar el área del paralelogramo mostrado en la figura, en función de a, b, c y d:



21. Sean $a = a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} + a_3\hat{k}$, $b = b_1\hat{\imath} + b_2\hat{\jmath} + b_3\hat{k}$ y $c = c_1\hat{\imath} + c_2\hat{\jmath} + c_3\hat{k}$. Demuestre que:

$$a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

22. Demuestre que:

$$(a + b) \times (a - b) = 2(b \times a).$$

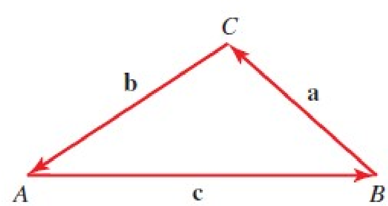
23. Demuestre que:

$$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0$$

24. Demuestre que:

$$(a \times b) \cdot (c \times d) = \begin{vmatrix} a \cdot c & b \cdot c \\ a \cdot d & b \cdot d \end{vmatrix}$$

25. De acuerdo a la siguiente figura:



a. Demuestre que:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$$

(Atención: nos referimos aquí al vector nulo)

b. Demuestre que:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$$

c. De lo anterior, deduzca la ley de los senos:

$$\frac{sen\ A}{a} = \frac{sen\ B}{b} = \frac{sen\ C}{c}$$

Donde:

$$a = |\mathrm{a}|, \qquad b = |\mathrm{b}|, \qquad c = |\mathrm{c}|.$$

Algunas ecuaciones y resultados interesantes sobre rectas y planos en $\mathbb{R}^3$:

Ecuación vectorial de una recta

Una ecuación vectorial para la recta L que pasa por $P_0(x_0, y_0, z_0)$ paralela a $\mathbf{v}$ es

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \qquad -\infty < t < \infty,$$

donde $\mathbf{r}$ es el vector de posición de un punto $P(x, y, z)$ en L y $\mathbf{r}_0$ es el vector de posición de vector $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

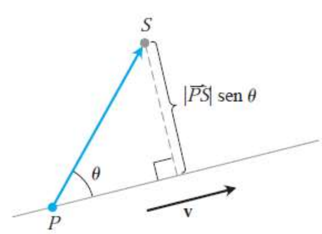
Ecuaciones paramétricas de una recta

La parametrización estándar de la recta que pasa por $P_0(x_0, y_0, z_0)$y que es paralela a $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ es

$$x = x_0 + tv_1, \quad y = y_0 + tv_2, \quad z = z_0 + tv_3, \quad -\infty < t < \infty$$

Distancia de un punto S a una recta que pasa por P y que es paralela a $\mathbf{v}$

$$d = \frac{|\overrightarrow{PS} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}$$



Ecuación de un plano

El plano que pasa por $P_0(x_0, y_0, z_0)$, normal a $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ se describe igualmente por cada una de las siguientes ecuaciones

Ecuación vectorial: $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$

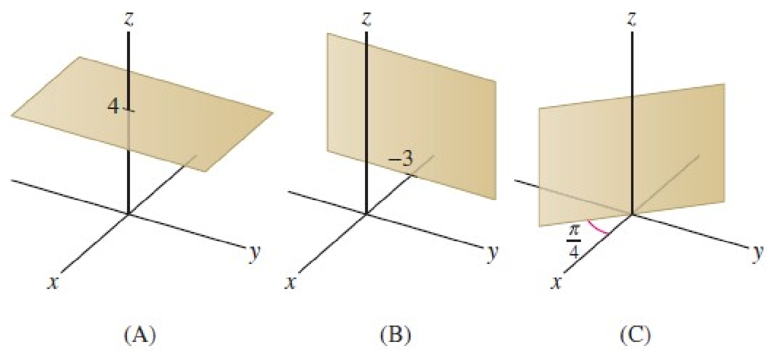
Ecuación cartesiana: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

Ecuación cartesiana simplificada: $Ax + By + Cz = D$, donde $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$

26. Diga cuáles de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:
    a. Dos rectas paralelas a una tercera, son paralelas.
    b. Dos rectas perpendiculares a una tercera, son paralelas.

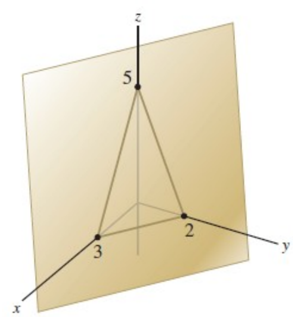
c. Dos planos paralelos a un tercero, son paralelos.
d. Dos planos perpendiculares a un tercero, son paralelos.
e. Dos rectas paralelas a un plano, son paralelas.
f. Dos rectas perpendiculares a un plano, son paralelas.
g. Dos planos perpendiculares a una recta, son paralelos.

27. Hallar un vector normal y la ecuación para los planos representados en las siguientes imágenes:



28. Hallar las ecuaciones del plano con la correspondiente descripción:
   a. Pasa por el origen y es paralelo a $4x - 9y + 1 = 3$.
   b. Pasa por $(4,1,9)$ y es paralelo a $x + y + z = 3$.
   c. Pasa por $(4,1,9)$ y es paralelo a $x = 3$.
   d. Pasa por $(3,5,-9)$ y es paralelo al plano xz.

29. Hallar la ecuación del plano correspondiente a la figura:



30. ¿Es cierto que la recta $x = 1 - 2t$, $y = 2 + 5t$, $z = -3t$ es paralela al plano $2x + y - z = 8$? Justifique su respuesta.

31. Hallar la fórmula de la distancia D de un punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ al plano $ax + by + cz + d = 0$.

32. a) Halle en qué punto se intersecan las siguientes rectas:

$$r = \langle 1,1,0\rangle + t\langle 1,-1,2\rangle$$
$$r = \langle 2,0,2\rangle + s\langle -1,1,0\rangle$$

b) Halle la ecuación del plano que contiene esas rectas.

Preparado por el profesor
Luis Enrique Millán
Universidad Nacional de Lanús
Buenos Aires, Mayo 2021