UNIVERSIDAD NACIONAL DE LANÚS
DEPARTAMENTO DE DESARROLLO PRODCUTIVO Y TECNOLÓGICO
LICENCIATURA EN SISTEMA
MATEMÁTICAS III

Compilación de problemas y ejercicios
Varios autores

PUNTOS Y VECTORES

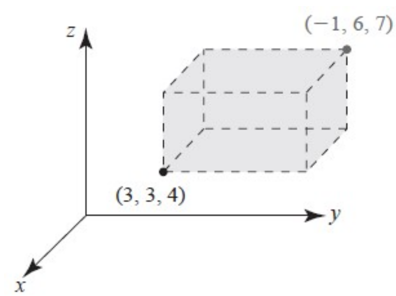
1. Describa geométricamente los puntos $P(x, y, z)$ que satisfacen las siguientes condiciones:

   7. $z = 5$ **8.** $x = 1$

   9. $x = 2, y = 3$ **10.** $x = 4, y = -1, z = 7$

2. Halle las coordenadas de los vértices del paralelepípedo formado por los planos coordenados y los planos de coordenadas: $x = 2,\ y = 5, z = 8.$

3. En la figura siguiente se muestran dos vértices de un paralelepípedo rectangular que tiene lados paralelos a los planos de coordenadas. Determine las coordenadas de los restantes seis vértices.



4. Si el módulo del vector $\vec{A}$ es 3, calcule el módulo del vector $\vec{B}$. Sabiendo que:

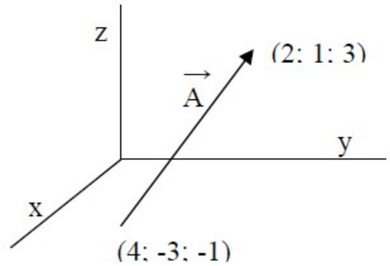
$$\vec{A} = \langle 1, a, a \rangle \qquad \vec{B} = 2a\hat{\imath} + a\hat{\jmath} + 4\hat{k}$$

5. Determine los valores de m y n, si se cumple la siguiente relación:

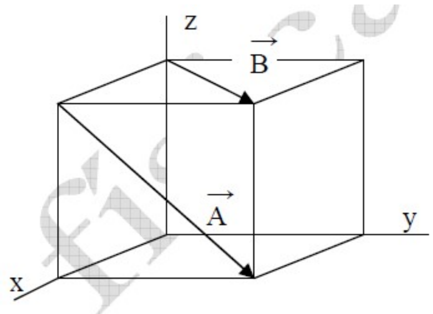
$$\vec{A} = m\vec{B} + n\vec{C} \text{ donde: } \vec{A} = \hat{\imath} - \hat{\jmath}\ ;\ \vec{B} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 3\hat{k}\ ;\ \vec{C} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{k}$$

6. Un vector $\vec{A}$ tiene su origen en el punto $(2, -1, -2)$ y su extremo en un punto P. Un segundo vector, tiene su origen en P y su respectivo extremo en el punto $(-3,1,3)$. Calcular el modulo que resulta de sumar estos dos vectores.

7. Calcular el vector normal del vector de la siguiente figura:



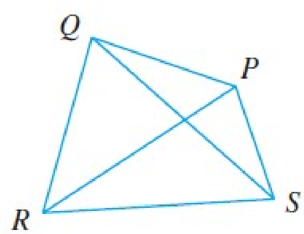
8. Calcular el resultado de la suma de los dos vectores de la siguiente imagen, sabiendo que la arista del cubo mide dos unidades:



9. ¿Cómo podrías probar que el *punto medio* entre los puntos de coordenadas $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ viene dado por la expresión:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

10. En la siguiente figura:



Escribe cada una de las siguientes expresiones como un solo vector:

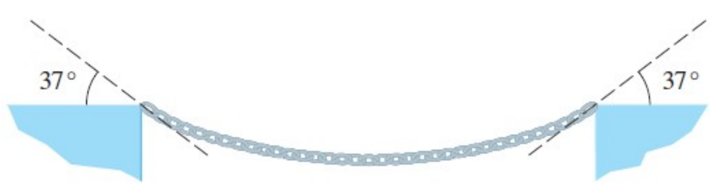
(a) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ (b) $\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{PS}$

(c) $\overrightarrow{QS} - \overrightarrow{PS}$ (d) $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{PQ}$

11. Construye un vector unitario que tenga la misma dirección que el vector $8\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 4\hat{k}$.

12. Si $\boldsymbol{v}$ es un vector que está en el primer cuadrante y tiene un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ con la parte positiva del eje horizontal y $|\boldsymbol{v}| = 4$, expresar a $\boldsymbol{v}$ en función de sus coordenadas cartesianas.

13. **Problema difícil**. La tensión T en cada extremo de la cadena es de $25N$. ¿Cuál es el peso de la cadena?



14. **Problema difícil**. Suponga que un vector tiene los ángulos respectivos α, β y γ con las partes positivas de los ejes $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$. Encuentre los componentes del vector y demuestre que:

$$cos^2x + cos^2y + cos^2z = 1$$

CONJUNTOS ECUACIONES Y DESIGUALDADES

15. Describa las regiones del espacio tridimensional que definen el par de ecuaciones en cada caso:

1. $x = 2, \quad y = 3$ **2.** $x = -1, \quad z = 0$

3. $y = 0, \quad z = 0$ **4.** $x = 1, \quad y = 0$

5. $x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0$ **6.** $x^2 + y^2 = 4, \quad z = -2$

7. $x^2 + z^2 = 4, \quad y = 0$ **8.** $y^2 + z^2 = 1, \quad x = 0$

9. $x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x = 0$

10. $x^2 + y^2 + z^2 = 25, \quad y = -4$

11. $x^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 25, \quad z = 0$

12. $x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 4, \quad y = 0$

16. Describa las regiones del espacio tridimensional que definen las siguientes desigualdades y combinaciones de desigualdades y ecuaciones:

13. **a.** $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z = 0$ **b.** $x \geq 0, \quad y \leq 0, \quad z = 0$

14. **a.** $0 \leq x \leq 1$ **b.** $0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$

c. $0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1$

15. **a.** $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ **b.** $x^2 + y^2 + z^2 > 1$

16. **a.** $x^2 + y^2 \leq 1, \quad z = 0$ **b.** $x^2 + y^2 \leq 1, \quad z = 3$

c. $x^2 + y^2 \leq 1$, sin restricción sobre z

17. **a.** $x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0$

b. $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad z \geq 0$

18. **a.** $x = y, \quad z = 0$ **b.** $x = y$, sin restricción sobre z

La ecuación general de una esfera de centro (h, k, l) y radio r
$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$

17. A continuación, halle el centro y el radio de las esferas expresadas mediante las siguientes ecuaciones:

35. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 10 = 0$

36. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 5y + 2z + 5 = 0$

37. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y = 0$

38. $x^2 + y^2 + z^2 = y$

39. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 6x - 4y + 2z = 1$

40. $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 6z + 1$

Preparado por:
Profesor Luis Enrique Millán
Abril 2021