LICENCIATURA EN SISTEMAS

DEPARTAMENTO DE DESARROLLO PRODUCTIVO Y TECNOLÓGICO

MATEMÁTICA 2

(TRABAJO PRÁCTICO N° 2)

Docentes a cargo:

Laura Loidi

Vanesa Plaul

Año 2021

Trabajo Práctico N° 2

(Continuidad-Teorema del valor intermedio-Teorema de Bolzano)

1. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados. Cuando corresponda clasificar el tipo de discontinuidad.

a) $f(x) = |x|$ en $x = 0$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $x = 0$

c) $f(x) = sen\dfrac{\pi}{x}$ en $x = 0$

d) $f(x) = xsen\dfrac{\pi}{x}$ en $x = 0$

e) $f(x) = Entx = [x]$ en $x = 3$

f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{Si } x \neq 1 \\ 0 & \text{Si } x = 1 \end{cases}$ en $x = 1$

g) $f(x) = \dfrac{x^3-8}{x-2}$ en $x = 2$

<u>Resolución punto c)</u>: $f(x) = sen\dfrac{\pi}{x}$ en $x = 0$

1º) No existe $f(0)$, (la función no está definida en x = 0)

2º) No existe $\lim\limits_{x\to 0} sen\dfrac{\pi}{x}$ pues cuando $x \to 0$; $\dfrac{\pi}{x} \to \pm\infty$ y el seno varía entre -1 y 1; por lo tanto no existe límite en $x = 0$. Por no tener límite se trata de una <u>discontinuidad esencial</u>.

2. Encontrar y clasificar los puntos de discontinuidad de:

a) $f(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x^2+4x+3}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3+x^2-16x-16}{x^3-16x}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x^3+3x^2+2x}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{senx}$

f) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{Si } x < 1 \\ 2 & \text{Si } x = 1 \\ 2x & \text{Si } x > 1 \end{cases}$

g) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+senx}{1-senx}}$ en $[0\,;2\pi]$

h) $f(x) = \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{1}{x}$

<u>Resolución punto c)</u>:

$$f(x) = \frac{x^3+x^2-16x-16}{x^3-16x}$$

Puntos de discontinuidad: $x^3 - 16x = 0 \Rightarrow x(x^2-16) = 0$, de donde : $x_1 = -4\,; x_2 = 0\,; x_3 = 4$

$$\lim_{x\to -4} \frac{x^3+x^2-16x-16}{x^3-16x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to -4} \frac{(x-4)(x+4)(x+1)}{x(x-4)(x+4)} = \lim_{x\to -4} \frac{x+1}{x} = \frac{3}{4}$$

Por tener límite se trata de una disc. evitable en $x_1 = -4$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x-4)(x+4)(x+1)}{x(x-4)(x+4)} = \lim_{x\to 0} \frac{x+1}{x} = \pm\infty$$
, no tiene límite. Se trata de una disc. esencial en $x_2 = 0$

$$\lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x+4)(x+1)}{x(x-4)(x+4)} = \lim_{x\to 4} \frac{x+1}{x} = \frac{5}{4}$$
Disc. evitable en $x_3 = 4$

3. Defina en el intervalo $[-3;3]$, tres funciones; $h(x)$; $f(x)$ y $g(x)$ tales que:
   a) $h(x)$ sea continua en $[-3;3]$
   b) $f(x)$ presente una disc. esencial en $x=1$ y en $x=2$
   c) $g(x)$ presente una disc. evitable en $x=-2$

4. Defina una función que presente dos discontinuidades evitables y una esencial.

5. Defina una función que presente una discontinuidad esencial con límite infinito y otra esencial sin límite infinito.

6. ¿Cómo definiría la función $f(x)=\dfrac{x^3-4x}{x^2-4}$ para que sea continua en $\Re$?

7. Grafique una función que satisfaga todas las condiciones siguientes:
   a) Su dominio es [-2 ; 2]
   b) $f(-2)=f(-1)=f(1)=f(2)=1$
   c) Es discontinua en $x=-1$ y en $x=1$.
   d) Dar su expresión.

8. La tarifa para comunicaciones de larga distancia para llamados de línea, fijada por una compañía telefónica, es un ejemplo de funciones discontinuas. La siguiente tabla indica dicha tarifa:

Kilómetros	Cantidad de pulsos por minuto
Hasta 30	3
Más de 30 hasta 55	5
Más de 55 hasta 110	7
Más de 110 hasta 170	10
Más de 170 hasta 240	15
Más de 240 hasta 320	19
Más de 320 hasta 600	23
Más de 600	36

   Se pide:
   a) Expresar el número de pulsos en función de la distancia.
   b) Representarla gráficamente y estudiar la continuidad

9. Encontrar los valores de a y de b de modo que la siguiente función sea continua en $\Re$.

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{Si } x<1 \\ ax+b & \text{Si } 1\le x<2 \\ 3x & \text{Si } x\ge 2 \end{cases}$$

10. a) Sea $f(x)=x^3-2x^2+3$ en $[-1;2]$, verifique el <u>teorema del valor intermedio</u> para $k=2$.
    b) Ídem para $f(x)=x^3-2x^2$ en $[-3;0]$, para $k=-3$.

<u>Resolución punto a)</u>:

$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ es continua en el intervalo $[-1;2]$
$f(-1) = 0,\ f(2) = 3$, $k = 2$ pertenece al intervalo $(0;3)$

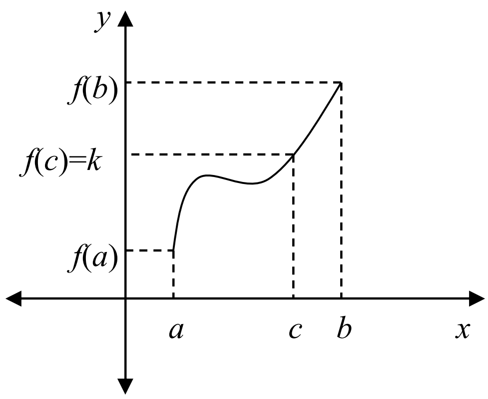
Se cumplen las hipótesis del teorema, luego $\exists c \in (-1;2)/f(c) = k = 2$
$x^3 - 2x^2 + 3 = 2 \Rightarrow x^3 - 2x^2 + 1 = 0$. Por Gauss, una de las raíces es 1 y aplicando Ruffini queda:
$(x-1)(x^2 - x - 1) = 0$. Las otras dos raíces son: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (El nº de oro) y $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, como los tres valores están dentro del intervalo (-1 ; 2), c toma los tres valores.

$$c_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},\quad c_2 = 1,\quad c_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

11. a) Sea $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ en $[0;3]$, verifique el <u>teorema de Bolzano</u>.
b) Ídem para $f(x) = x^4 - 2x^2 - 5$ en $[0;2]$

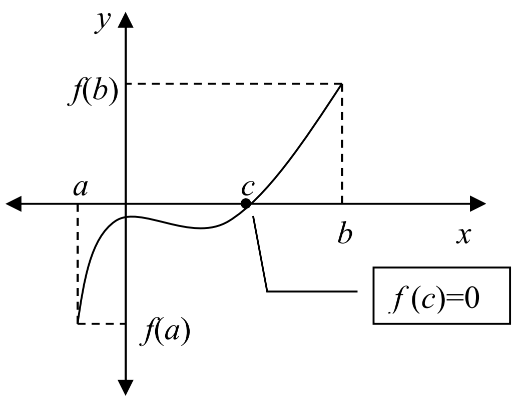
<u>Teorema del valor intermedio</u>.

$$f(x)\ \text{continua en}\ [a;b] \Rightarrow \forall k / f(a) < k < f(b) \vee f(b) < k < f(a),\ \exists c \in (a;b)/ f(c) = k$$



<u>Teorema de Bolzano</u>.

$$f(x)\ \text{continua en}\ [a;b] \wedge f(a).f(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in (a;b)/ f(c) = 0$$



Respuestas

1. a) Cont. en $x = 0$
   b) Discont. esencial en $x = 0$
   c) Discont. esencial en $x = 0$
   d) Discont. evitable en $x = 0$
   e) Discont. esencial en $x = 3$
   f) Discont. evitable en $x = 1$
   g) Discont. evitable en $x = 2$

2. a) Disc. evitable en $x = 2$; esencial en $x = -3$
   b) Disc. esencial en $x = -1$; evitable en $x = -3$
   c) Disc. esencial en $x = 0$; evitable en $x = \pm 4$
   d) Disc. esencial en $x = -2$; $x = -1$; $x = 0$
   e) Disc. esencial en $x = k\pi$, con $k \in Z$
   f) Disc. esencial en $x = 1$
   g) Disc. esencial en $x = \frac{\pi}{2}$
   h) Disc. esencial en $x = 0$

9. $a = 4$; $b = -2$