Trabajo práctico Nº 7 (integral definida)

1. Calcule las siguientes integrales aplicando la Regla de Barrow.

a) $\int_{-1}^{5}(x+1)dx$ b) $\int_{-1}^{-3}(x^2-7x+2)dx$ c) $\int_{1}^{4}x(\sqrt{x}-3)dx$

d) $\int_{0}^{1}xe^x dx$ e) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^2(5x)dx$ f) $\int_{0}^{5}\sqrt{25-x^2}\,dx$

Respuestas:

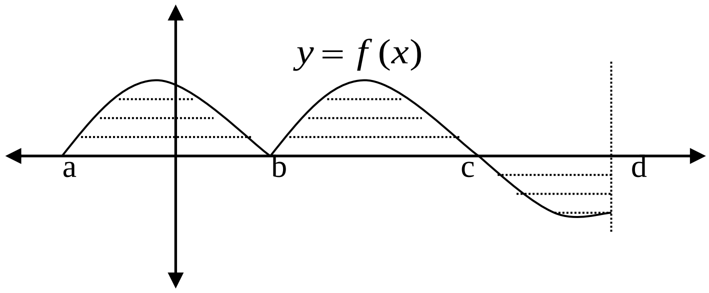
a) 18   b) $-\frac{122}{3}$ c) $-\frac{101}{10}$ d) 1   e) $\frac{\pi}{4}$ f) $\frac{25\pi}{4}$

2. Sabiendo que $\int_a^c f(x)dx = 1{,}5$ y $\int_b^c f(x)dx = -1$ calcule $\int_a^b f(x)dx$

Resp: 2,5

3. **Optativo**. Calcule el área de la figura sabiendo que $\int_b^d f(x)dx = 2$ $\int_d^c f(x)dx = 0{,}8$

$\int_a^b f(x)dx = \int_b^c f(x)dx$



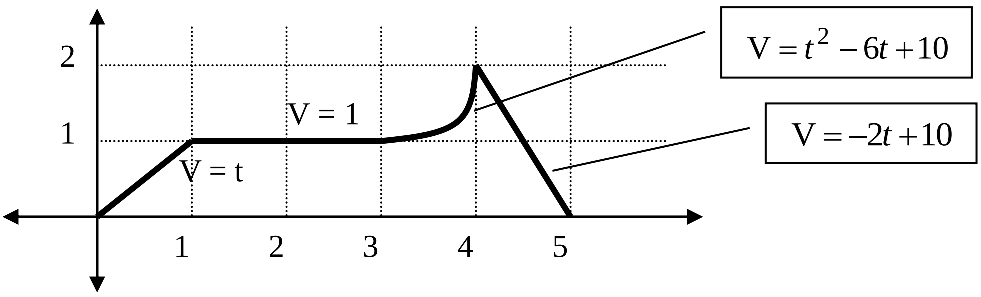
¿Cuánto vale $\int_a^d f(x)dx$

¿Por qué la diferencia?

Respuestas: 6,4 y 4,8

4. **Optativo**.
La velocidad de un móvil varía según la ecuación $V(t) = 0{,}5t$ medida en m/s. Grafique. Sabiendo que en $t = 0$, $x = 2$, ¿qué distancia recorrió el móvil entre los 3 segundos y los 8 segundos? Compare los resultados obtenidos con el área bajo la curva de la función velocidad.

5. **Optativo**.
Analice la distancia recorrida por un móvil cuya función velocidad viene dada por esta gráfica:



6. Calcule el área del recinto limitado como se indica y grafique. **Opción:** Seleccione al azar y resuelva al menos 5 de los ejercicios propuestos (en este punto)

a) La sinusoide y el eje x en un período completo.

b) $f(x) = \ln x$ y las rectas $x = 1$ y $x = e$.

c) El eje x, la curva $y = x^2 + 2$, la recta $x = 2$ y el eje de las ordenadas.

d) El eje x, la curva $y = 2\sqrt{x}$ entre $x = 4$ y $x = 9$.

e) La curva $y = x^2$, la recta $y = 4$ y el eje y.

f) La parábola $y = x^2 - 2x + 2$, su recta tangente en $x = 3$ y los ejes coordenados.

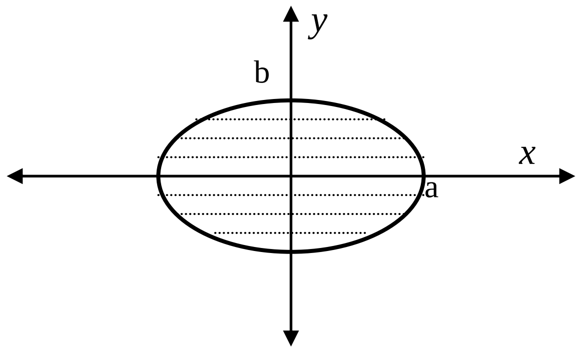
g) La curva $y = \sqrt{2x - 1}$, su recta tangente en $x = 3$ y los ejes coordenados.

h) La parábola $y = x^2 - 4x + 3$ y las rectas $x = 0$ $\quad y = 0$ $\quad y = -x + 7$.

i) Área de la elipse definida por: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

j) La curva $y = \dfrac{1}{1 - x^2}$, el eje x entre $x = 0$ y $x = \dfrac{1}{2}$

Solución punto i):



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$A = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = 4\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{arcsen}\dfrac{x}{a} \right)$ (Integral que sacamos de la tabla)

Nos queda: $A = 4\dfrac{b}{a} \cdot \dfrac{1}{2}\left.\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{arcsen}\dfrac{x}{a} \right)\right|_0^a = 2\dfrac{b}{a}\left(a^2 \dfrac{\pi}{2} - 0 \right) \Rightarrow A = ab\pi$

Si los semiejes son iguales $a = b = r$, nos queda el área de un círculo: $A = \pi . r^2$

Respuestas:

a) 4	b) 1	c) $\dfrac{20}{3}$	d) $\dfrac{76}{3}$	e) $\dfrac{16}{3}$
f) $\dfrac{23}{8}$	g) $\dfrac{13}{30}\sqrt{5}$	h) $\dfrac{52}{3}$	i) $A = ab\pi$	j) $\dfrac{\ln 3}{2}$

7. Calcule las siguientes áreas y grafique:

a) Área limitada por $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2$.

b) Área limitada por $f(x) = -x^2 + 8$ y $g(x) = x - 4$.

c) Área limitada por $f(x) = x^3 - x \;\; y \;\; g(x) = x^2$.

d) Área limitada por $f(x) = x^2 + 2x - 1 \;\; y \;\; g(x) = -x + 1$.

e) Área limitada por $f(x) = x^2 - 2x - 2 \;\; y \;\; g(x) = x + 2$.

f) **Optativo**. Área limitada por $y^2 = 2x \;\; y \;\; x^2 = 2y$.

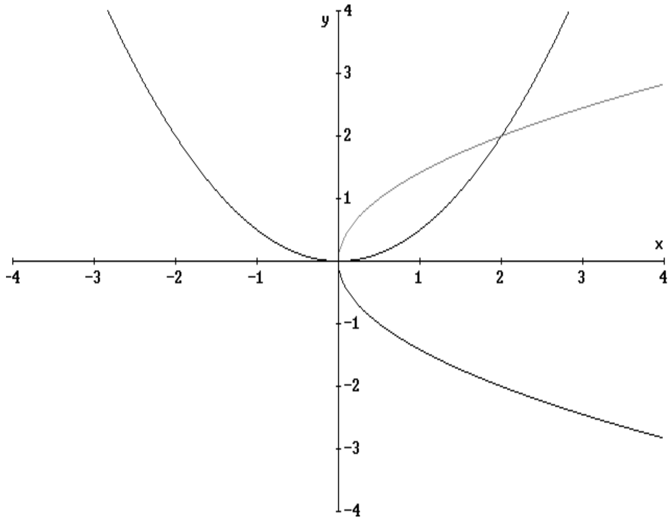
g) **Optativo**. Área limitada por las parábolas de eje horizontal $y^2 = 8(x+2) \;\; e \;\; y^2 = 32(8-x)$.

h) Área limitada por $f(x) = \dfrac{3}{x} \;\; y \;\; g(x) = -2x + 7$

Solución punto f): $y^2 = 2x \;\; y \;\; x^2 = 2y$ de la primera $y = \pm\sqrt{2x}$, de la segunda $y = \dfrac{x^2}{2}$.

Con esto encontramos primero las abscisas de los puntos de intersección

$$\frac{x^2}{2} = \pm\sqrt{2x} \Rightarrow \frac{x^4}{4} = 2x \Rightarrow \frac{x^4}{4} - 2x = 0 \Rightarrow x_1 = 0\,;\, x_2 = 2$$



Teniendo en cuenta que la curva que está por "encima" es $y = \sqrt{2x}$

$$A = \int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{2x^3} - \frac{x^3}{6} \right]_0^2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{3} \Rightarrow \quad A = \frac{4}{3}$$

Respuestas:

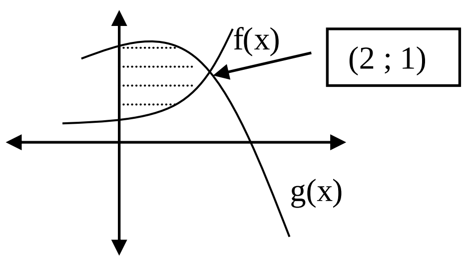
a) $\dfrac{1}{3}$	b) $\dfrac{343}{6}$	c) 1,0833	d) 11,682
e) $\dfrac{125}{6}$	f) $\dfrac{4}{3}$	g) $\dfrac{320}{3}$	h) 3,37

8. Dada $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{2} - 3\right)$ calcule el área de la región encerrada por la curva dada, el eje x y las rectas $x = 7$ y $x = 9$. Grafique. **Resp**: 0,5232

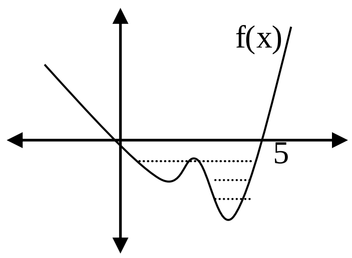
9. Calcule el área limitada por $y = 2^{x}$, $y = 2^{-x}$ y $x = 4$. Grafique. **Resp:** 20,2878

10. Exprese mediante integrales el área de las regiones sombreadas.

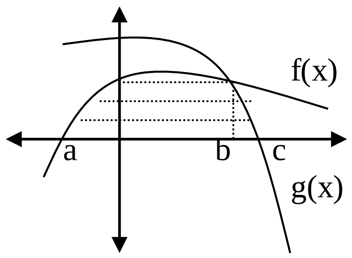
a)



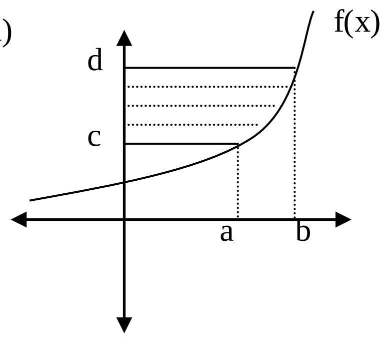
b)



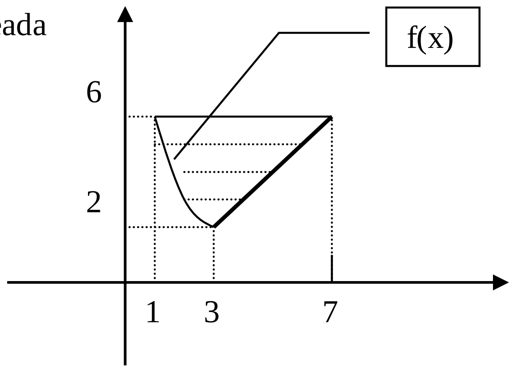
c)



d)



11. Sabiendo que el área de la región sombreada vale 10, calcule $\int_1^3 f(x)dx$.



Resp: A=10

12. **Rectificación de arcos.**

La rectificación de arcos resulta una de las aplicaciones de las integrales. Basta con utilizar la siguiente fórmula para poder hallar la longitud de una curva entre dos puntos a y b considerados

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\, dx$$

a) Calcule la longitud del segmento de recta $y = x$, entre $x = 0$ y $x = 1$. Grafique, verifique el resultado geométricamente.
b) Calcule la longitud de una circunferencia de radio R.

c) Calcule la longitud del arco correspondiente a la parábola $y = x^2$ desde el origen hasta el punto $x = 4$.

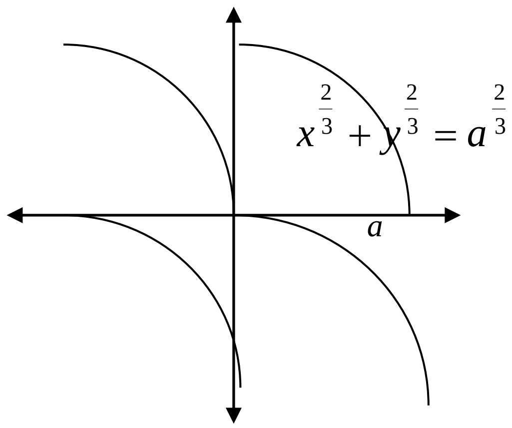
d) Calcule la longitud del arco correspondiente al gráfico de $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ entre los puntos (0 ; 0) y (4 ; 8).

e) **Optativo**. Calcule la longitud del arco correspondiente al gráfico de $9y^2 = \left(x^2 + 2\right)^3$ desde el origen hasta $x = 2$.

f) **Optativo**. Calcule la longitud total de la astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Solución punto f): $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

$$L = 4\int_0^a \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$$



$$y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y' = -\frac{\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}$$

$$(y')^2 = \frac{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow (y')^2 = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} - 1$$

Reemplazando en la integral queda:

$$L = 4\int_0^a \sqrt{\frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}\,dx \Rightarrow L = 4\int_0^a \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}\,dx \Rightarrow L = 4a^{\frac{1}{3}}\left[\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right]_0^a \Rightarrow L = 6a$$

Respuestas:

c) 16,8186 d) 9,0734 e) $\frac{14}{3}$ f) $L = 6a$

13. **Área de superficies de revolución.**

Al igual que en el caso anterior, mediante la fórmula que se muestra a continuación, es posible aplicar integrales al cálculo de áreas de superficies de revolución

$$A = 2\pi . \int_a^b f(x).\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$$

a) Calcule el área de una esfera de radio R.

b) Calcule el área de la superficie de revolución generada en la rotación alrededor del eje x de $y^2 = 12x$ entre $x = 0$ y $x = 3$.

c) Ídem si $y = 3x$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

d) **Optativo.** Ídem alrededor del eje y.

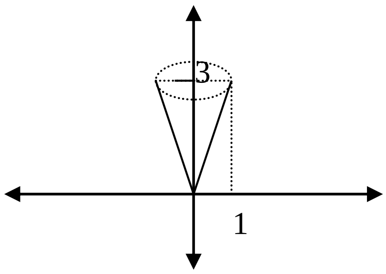
e) **Optativo.** Área alrededor del eje y de $x = y^3$ entre $y = 0$ e $y = 1$.

f) Área alrededor del eje x de $y = 2\sqrt{x}$ entre $x = 0$ y $x = 4$.

g) Área de la elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ alrededor del eje x.

h) **Optativo.** Área de la astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ al girar alrededor de uno de los ejes.

<u>Solución punto d)</u>:



Consideramos $x = f(y) \Rightarrow x = \frac{1}{3}y$

$\begin{cases} Si\ x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ Si\ x = 1 \Rightarrow y = 3 \end{cases}$ Estos son los límites de integración.

$$A = 2\pi\int_0^3 f(y)\sqrt{1+f'(y)^2}\,dy = 2\pi\int_0^3 \frac{1}{3}y\sqrt{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2}\,dy$$

$$A = \frac{2}{9}\pi\sqrt{10}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^3 \Rightarrow A = \pi\sqrt{10}$$

<u>Respuestas</u>:

a) $4\pi R^2$ b) $24\pi(2\sqrt{2}-1)$ c) $3\pi\sqrt{10}$ d) $\pi\sqrt{10}$

e) $\frac{\pi}{27}(10\sqrt{10}-1)$ f) $\frac{8}{3}\pi(5\sqrt{5}-1)$ g) $8\pi\left(\frac{4}{9}\sqrt{3}\pi+1\right)$ h) $\frac{12}{5}\pi a^2$.

14. **Optativo. <u>Volumen de sólidos de revolución.</u>** $V = \pi . \int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx$

a) Calcule el volumen de una esfera.
b) Calcule el volumen engendrado por un arco de sinusoide al girar alrededor del eje x.
c) Calcule el volumen engendrado por $y = 4 - x^2$ al girar alrededor del eje x.
d) Ídem para la astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

e) Ídem para $y = \frac{1}{x}$ entre $x = 1$ y $x = 3$.

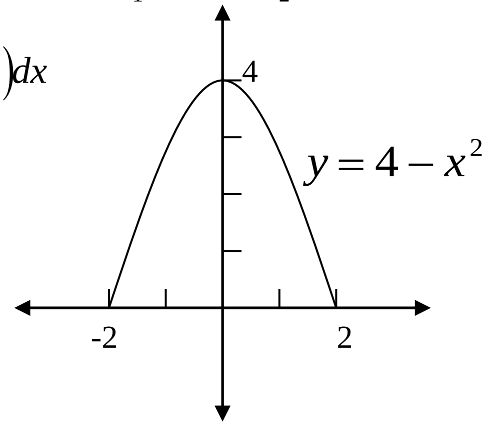
Solución punto c): $y = 4 - x^2$

Determinamos los límites de integración: $4 - x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2 \quad x_2 = 2$

$$V = \pi \int_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right)^2 dx = \pi \int_{-2}^{2} \left(16 - 8x^2 + x^4\right) dx$$

$$V = \pi \left[16x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \right]_{-2}^{2}$$

$$V = \frac{512}{15}\pi$$



Respuestas:

a) $\frac{4}{3}\pi R^3$ b) $\frac{1}{2}\pi^2$ c) $\frac{512}{15}\pi$ d) $\frac{32}{105}\pi a^3$ e) $\frac{2}{3}\pi$

15. **Integrales impropias**

a) Calcule: $\int_{1}^{+\infty} e^{-x} dx$. Interprete geométricamente el resultado.

b) Calcule: $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x} dx$. Interprete geométricamente el resultado.

c) Calcule: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + x^2} dx$. Interprete geométricamente el resultado.

d) Calcule: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$. Interprete geométricamente el resultado.

Solución punto d): $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$

Como el integrando es una función continua, la integral impropia se resuelve haciendo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int_{-\infty}^{a} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx + \int_{a}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx.$$

Ahora resolvemos la integral: $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int \frac{e^x}{1+\left(e^x\right)^2}\,dx =$

Con la sustitución $t = e^x$, nos queda $= \int \frac{e^x}{1+t^2}\,\frac{dt}{e^x} = \int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \operatorname{arctg} e^x + c$

Elegimos $a = 0$ y tenemos: $\left[\operatorname{arctg} e^x\right]_{-\infty}^{0} + \left[\operatorname{arctg} e^x\right]_{0}^{+\infty} =$

$$\left[\operatorname{arctg} 1 - \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} e^x\right] + \left[\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} e^x - \operatorname{arctg} 1\right] = \left[\frac{\pi}{4} - 0\right] + \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi}{2}$$

Nota: $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} e^x = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{e^x} = \operatorname{arctg} 0 = 0$

Respuestas

a) $\frac{1}{e}$ b) $+\infty$ c) π d) $\frac{\pi}{2}$