LICENCIATURA EN SISTEMAS

DEPARTAMENTO DE DESARROLLO PRODUCTIVO Y TECNOLÓGICO

MATEMÁTICA 2

(Guía de estudio y trabajos prácticos)

Trabajo práctico Nº 4: Derivada - Aplicaciones

Año 2020

<u>Trabajo práctico Nº 4</u> (Derivada-Aplicaciones)

1. Hallar las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal, al gráfico de c/u de las siguientes funciones, en los puntos indicados.

   a) $f(x)=x^3-2x^2+4;$ en $x_0=2$

   b) $f(x)=x^2-x+1;$ en $x_0=2$. Grafique la curva y las rectas encontradas.

   c) $f(x)=\cos 2x-\operatorname{cotg} x+3;$ en $x_0=\dfrac{\pi}{2}$

   d) $f(x)=e^{3x}-\operatorname{sen} 2x+1;$ en $x_0=0$

   e) $x^2+3xy+y^2=5;$ en $P_0=(1;1)$

   f) $x^2-y^2=7;$ en $P_0=(4;-3)$

<u>Resolución punto e)</u>: $x^2+3xy+y^2=5;$ en $P_0=(1;1)$

Derivamos en forma implícita: $2x+3y+3xy'+2yy'=0 \Rightarrow y'=-\dfrac{2x+3y}{3x+2y} \Rightarrow y'(1;1)=-1$

<u>Recta tangente</u>: $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ <u>Recta normal</u>: $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$

$y-1=-1(x-1) \Rightarrow y_t=-x+2$ $y=-\dfrac{1}{-1}(x-1) \Rightarrow y_n=x$

<u>Respuestas</u>

a) $\begin{cases} y_t=4x-4 \\ y_n=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{9}{2}\end{cases}$ b) $\begin{cases} y_t=3x-3 \\ y_n=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{11}{3}\end{cases}$ c) $\begin{cases} y_t=x-\dfrac{\pi}{2}+2 \\ y_n=-x+\dfrac{\pi}{2}+2\end{cases}$

d) $\begin{cases} y_t=x+2 \\ y_n=-x+2\end{cases}$ e) $\begin{cases} y_t=-x+2 \\ y_n=x\end{cases}$ f) $\begin{cases} y_t=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{7}{3} \\ y_n=\dfrac{3}{4}x-6\end{cases}$

2. Indicar si existen, los puntos donde c/u de las gráficas de las siguientes funciones tienen tangente horizontal y tangente vertical.

   a) $f(x)=x^2-3x+2$ b) $f(x)=\dfrac{x}{9-x}$ c) $f(x)=\sqrt{x}$

   d) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ e) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

<u>Resolución punto d)</u>: $f(x)=\sqrt[3]{x}$

<u>Tangentes horizontales</u>

$f'(x)=\dfrac{1}{3}x^{-2/3}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $f'(x)\neq 0\ \forall x \Rightarrow$ $\boxed{\text{No hay tangentes horizontales}}$

<u>Tangentes verticales</u>

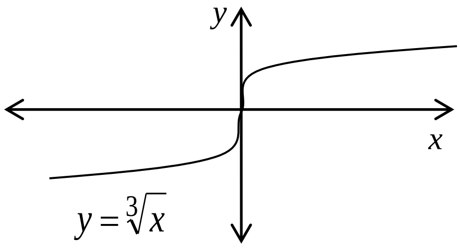
<u>Definición de tangente vertical a una curva en un punto de la misma</u>:

Siendo $f(x)$ continua en "a", la recta $x=a$ es tangente vertical al gráfico de $f(x)$ en el punto $[a\,;f(a)] \Leftrightarrow [f'(a^-)=+\infty \wedge f'(a^+)=+\infty] \veebar [f'(a^-)=-\infty \wedge f'(a^+)=-\infty]$

Si los límites no son ambos infinitos con el mismo signo, se trata de un punto cuspidal.

Como $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, analizamos la derivada en $x=0$, el único punto donde se hace infinita.

$f'(0^-)=+\infty \;\wedge\; f'(0^+)=+\infty$. Por lo tanto $\boxed{\text{la recta } x=0 \text{ es tangente vertical}}$.



La recta $x=0$ es tangente vertical
a la curva en el punto (0 ; 0).
Atraviesa a la curva.
Aunque la función no es derivable en
ese punto, tiene recta tangente.

Respuestas

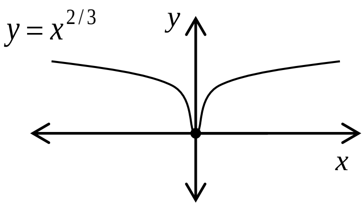
a) Tang. horiz. en : $\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{4}\right)$

b) No hay tang. horiz. ni tang. vertical.

c) No hay tang. horiz. ni tang. vertical.

d) Tang. vertical en : $(0;0)$

e) No hay tangente horizontal ni vertical. En $x=0$ hay un punto cuspidal. $f'(0^-)=-\infty \wedge f'(0^+)=+\infty$
Los infinitos tienen distinto signo.



3. Extremos relativos. Hallar, si existen, extremos relativos en las siguientes funciones, indicar si hay asíntotas. Con los datos obtenidos, realice un gráfico aproximado de la curva. (Es útil usar algún graficador como GeoGebra para corroborar lo obtenido).

a) $f(x)=x^4-4x^2-2$ b) $f(x)=x^2-12x+5$ c) $f(x)=-x^3+4x-1$

d) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+2}$ e) $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{4+x^2}}$ f) $f(x)=(x-1)^3(x-3)$

g) $f(x)=x^2-\dfrac{2}{x}$ h) $f(x)=3x^4-24x^2+4$

4. Extremos absolutos. Hallar, si existen, extremos absolutos en las siguientes funciones, indicar si hay asíntotas. Con los datos obtenidos, realice un gráfico aproximado de la curva... (Ídem pto.3) a) $f(x)=x^3-6x^2+12x$ en $(-1;3]$ b) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$ en $[-1;4]$

c) $f(x)=x^3-2x+1$ en $(0;3]$ d) $f(x)=\dfrac{3}{1-x^2}$ en $(-1;1)$

Resolución punto a): $f(x)=x^3-6x^2+12x$ en $(-1;3]$

Empezamos por derivar, $f'(x)=3x^2-12x+12$

Igualamos a cero para encontrar puntos críticos, $3x^2-12x+12=0 \Rightarrow$
$3(x-2)^2=0 \Rightarrow x=2$, es el único punto en que se anula la derivada.

Puntos críticos

a) $x=2$ (Donde $f'(x)=0$)

b) No hay. (Donde no existe $f'(x)$)

Encontramos las imágenes $f(2) = 8$ (Pto. Crítico), $f(-1) = 19$ y $f(3) = 9$ (Ext. del intervalo)

Para saber si en $x = 2$ hay un extremo relativo, podemos utilizar el criterio de la derivada segunda, o el criterio del cambio de signo de la derivada primera. En este caso la derivada segunda es fácil de encontrar (se trata de una función polinómica sencilla).

$f''(x) = 6x - 12 \Rightarrow f''(2) = 0$. Por ser 0 la derivada segunda, el criterio no permite determinar si se trata de un extremo relativo, entonces, utilizamos el otro criterio. Analizamos el signo de la derivada primera a izquierda y a derecha del punto crítico.

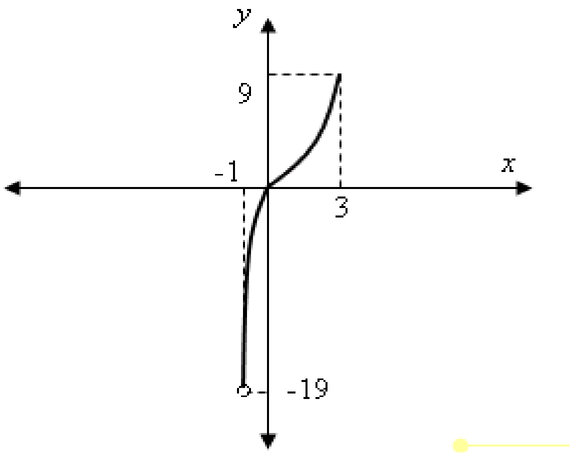
$$\begin{cases} f'(2^-) > 0 & \text{A izquierda.} \\ f'(2^+) > 0 & \text{A derecha.} \end{cases}$$

No hay cambio de signo de la derivada primera, luego no se trata de un extremo relativo, la función es creciente a izquierda y a derecha del punto.

Máximo absoluto: $f(3) = 9$

Mínimo absoluto: no hay, el intervalo es semiabierto a izquierda.

Asíntotas: se trata de una función polinómica, no presenta asíntotas.



Respuestas

a) En $(3\,;9)$, máximo absoluto. No hay mínimo absoluto.

b) En $\left(1+\sqrt{2}\ ;2\sqrt{2}\right)$, mínimo relativo. En $\left(1-\sqrt{2}\ ;-2\sqrt{2}\right)$, máximo relativo. No hay extremos absolutos. En $x = 1$, hay asíntota vertical, la recta $y = x - 1$, es asíntota oblicua.

c) En $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\,; -\dfrac{4}{9}\sqrt{6}+1\right)$, mínimo relativo y absoluto. En $(3\,;22)$ máximo absoluto.

No hay asíntotas.

d) En $(0\,;3)$, mínimo absoluto y relativo. No hay máximo absoluto. En $x = \pm 1$ hay asíntotas verticales y la recta $y = 0$, es asíntota horizontal.

5. Puntos de inflexión. Analizar la concavidad y determinar, si existen, los puntos de inflexión de las siguientes funciones.

a) $f(x)=x^3$ b) $f(x)=x^4$ c) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ d) $f(x)=(x-1)^{\frac{1}{3}}+2$

Resolución punto d): $f(x)=(x-1)^{\frac{1}{3}}+2$

Buscamos los puntos donde se anula o donde no está definida la derivada segunda.

$f'(x)=\dfrac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}$, $f''(x)=-\dfrac{2}{9}(x-1)^{-\frac{5}{3}}=\dfrac{-2}{9(x-1)^{5/3}}$

$\dfrac{-2}{9(x-1)^{5/3}}=0$, absurdo, $f''(x)\neq 0\,\forall x$.

$f''(x)$ no está definida en $x=1$, luego, en $x=1$, puede haber un cambio de concavidad, además, por ser la función continua en ese punto, se puede tratar de un punto de inflexión.

Analizamos la concavidad a izquierda y a derecha del punto.

$f''(1^-)>0 \Rightarrow$ Concavidad positiva a izquierda del 0.

$f''(1^+)<0 \Rightarrow$ Concavidad negativa a derecha del 0.

$(-\infty\,;1)$ Concavidad positiva.

$(1\,;+\infty)$ Concavidad negativa

$\mathrm{P}=(1\,;2)$ es punto de inflexión

Respuestas

a) $\begin{cases}(-\infty\,;0) & \text{Concavidad negativa } (\cap)\\ (0\,;+\infty) & \text{Concavidad positiva } (\cup)\end{cases}$ En $\mathrm{P}_0=(0\,;0)$ hay un punto de inflexión.

b) $(-\infty\,;+\infty)$ Concavidad positiva. No hay puntos de inflexión.

c) $\begin{cases}\left(-\infty\,;-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) & \text{Concavidad positiva}\\ \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\,;\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) & \text{Concavidad negativa}\\ \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\,;+\infty\right) & \text{Concavidad positiva}\end{cases}$ Los puntos $\mathrm{P}_0=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\,;\dfrac{3}{4}\right)$ y $\mathrm{P}_1=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\,;\dfrac{3}{4}\right)$, son puntos de inflexión

d) $\begin{cases}(-\infty\,;1) & \text{Concavidad positiva}\\ (1\,;+\infty) & \text{Concavidad negativa}\end{cases}$ $P=(1;2)$ Punto de inflexión.

6. <u>Estudio completo de una función</u>. Dadas las siguientes funciones, se pide un estudio completo de las mismas, indicando:
   a) Dominio. Puntos de discontinuidad.
   b) Asíntotas.
   c) Paridad.
   d) Intersección con los ejes de coordenadas.
   e) Extremos relativos, intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

f) Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión.
g) Gráfico. (Utilizar algún graficador como GeoGebra a modo de corroboración).

Opción: resolver al menos 6 de los ejercicios propuestos, seleccionando al azar.

a) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3-2x^2$ b) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3$ c) $f(x)=\frac{-2x^2}{x+1}$

d) $f(x)=\frac{3}{1-x^2}$ e) $f(x)=xe^x$ f) $f(x)=x\ln x$

g) $f(x)=x+\frac{1}{x}$ h) $f(x)=\frac{4x^2}{x^2-4}$ i) $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$

j) $f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$ k) $f(x)=(x-2)^{2/3}+1$

<u>Resolución punto i)</u>: $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$

<u>Dominio. Puntos de discontinuidad</u>. La función está definida para todo $\Re$, no presenta puntos de discontinuidad por ser de la forma $a^{g(x)}$ con $g(x)$ polinómica.

<u>Asíntotas</u>.

Asíntotas verticales: no existen, la función es continua en $\Re$.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}=0 \Rightarrow$ hay asíntota horizontal en $y=0$.

Asíntotas oblicuas: $\underset{x\to\pm\infty}{lím}\ \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}=\underset{x\to\pm\infty}{lím}\ \frac{1}{xe^{x^2/2}}=0 \Rightarrow$ no hay asíntotas oblicuas.

<u>Paridad</u>. $f(x)=f(-x) \Rightarrow$ la función es par. La gráfica es simétrica con respecto al eje *y*.

<u>Intersección con los ejes de coordenadas</u>.

Intersección con *x*: $y=0$ $\quad e^{-\frac{x^2}{2}}>0\forall x \Rightarrow$ la curva no corta al eje *x*.

Intersección con *y*: $x=0$ $\quad f(0)=1 \Rightarrow$ la curva corta al eje de las ordenadas en $y=1$.

<u>Extremos relativos, intervalos de crecimiento y de decrecimiento</u>.

$f'(x)=-xe^{-\frac{x^2}{2}}$ $\quad f'(x)=0 \Rightarrow \quad -xe^{-\frac{x^2}{2}}=0 \Rightarrow x=0$ es un punto crítico de tipo 1 (donde se anula la derivada primera. La derivada está definida $\forall x$, luego, no hay puntos críticos del tipo 2.

Para saber si es máximo o mínimo utilizamos el criterio de la derivada segunda, ya que la necesitamos para la concavidad..

$f''(x)=-e^{-\frac{x^2}{2}}+(-x)e^{-\frac{x^2}{2}}(-x) \Rightarrow \quad f''(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}\left(x^2-1\right)$

$f''(0)=-1<0 \ \Rightarrow$ en $x=0,\ f(0)=1$, la función tiene un máximo relativo. Por ser el único punto donde se anula la derivada primera, es único.

En $\left(-\infty\,;0\right)$ $\quad f(x)$ es creciente.

En $\left(0\,;+\infty\right)$ $\quad f(x)$ es decreciente

Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión.

$$f''(x)=0 \Rightarrow e^{-\frac{x^2}{2}}\left(x^2-1\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=1 \end{cases}$$

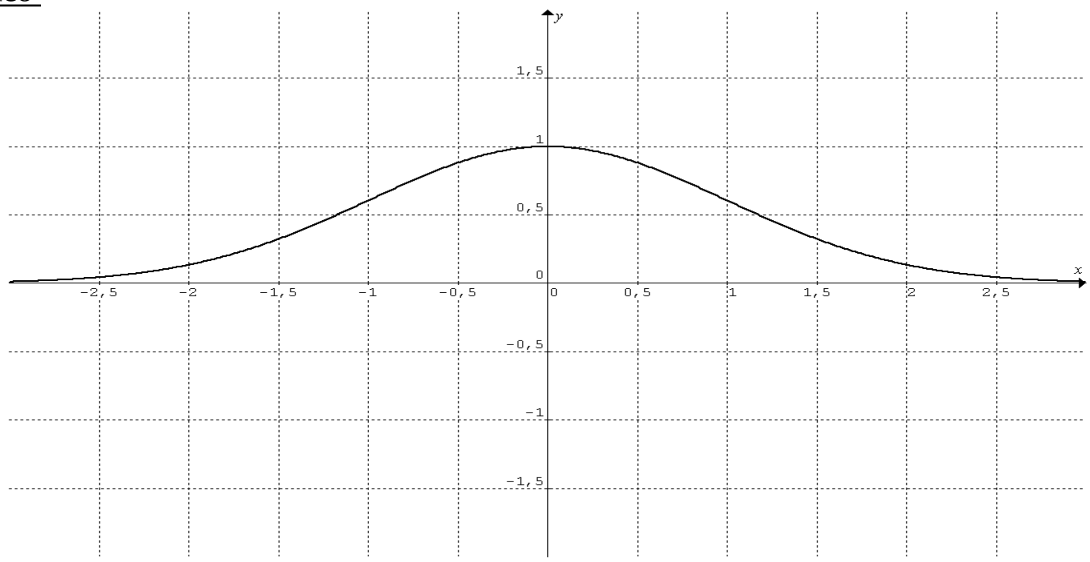
$\left(-\infty\,;-1\right)$ $f''(-2)>0$ Concavidad positiva.

$\left(-1\,;1\right)$ $f''(0)<0$ Concavidad negativa.

$\left(1\,;+\infty\right)$ $f''(2)>0$ Concavidad positiva.

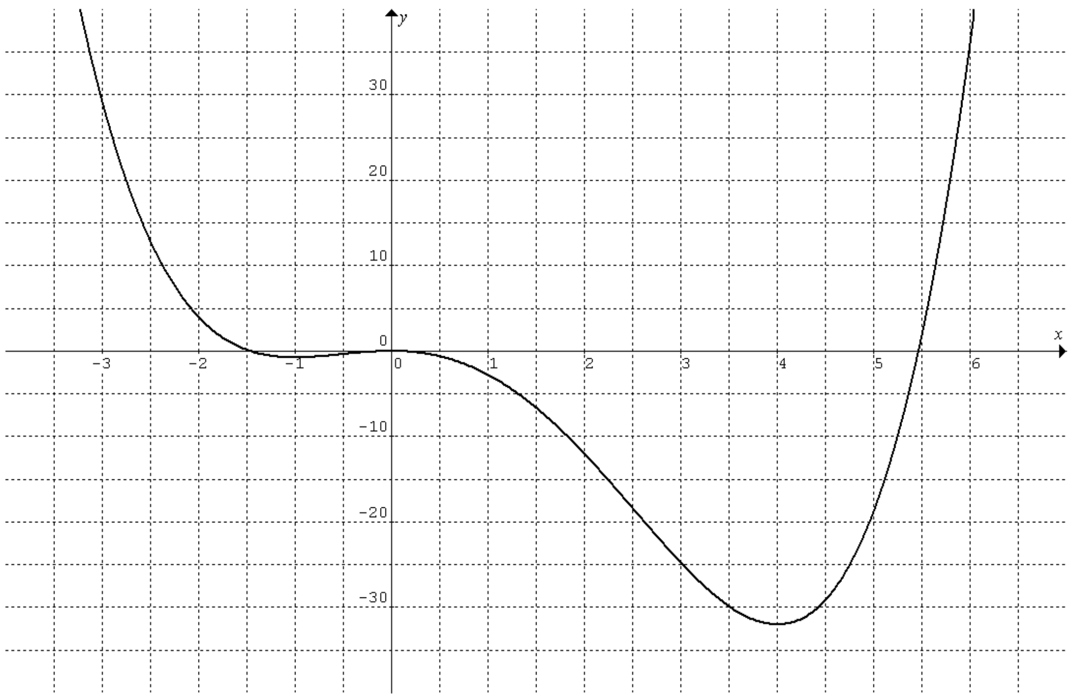
La gráfica posee dos puntos de inflexión $P_1=\left(-1\,;e^{-1/2}\right)$ y $P_2=\left(1\,;e^{-1/2}\right)$

Gráfico

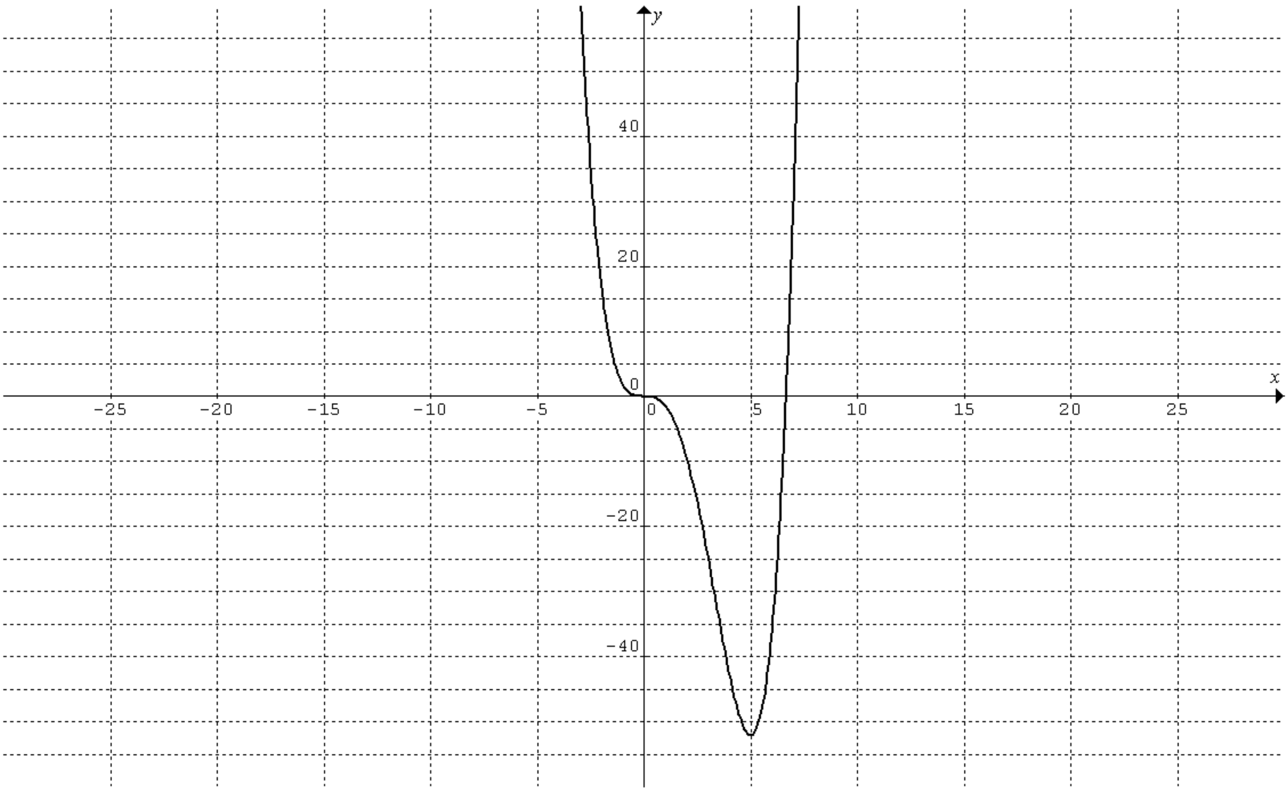


Respuestas

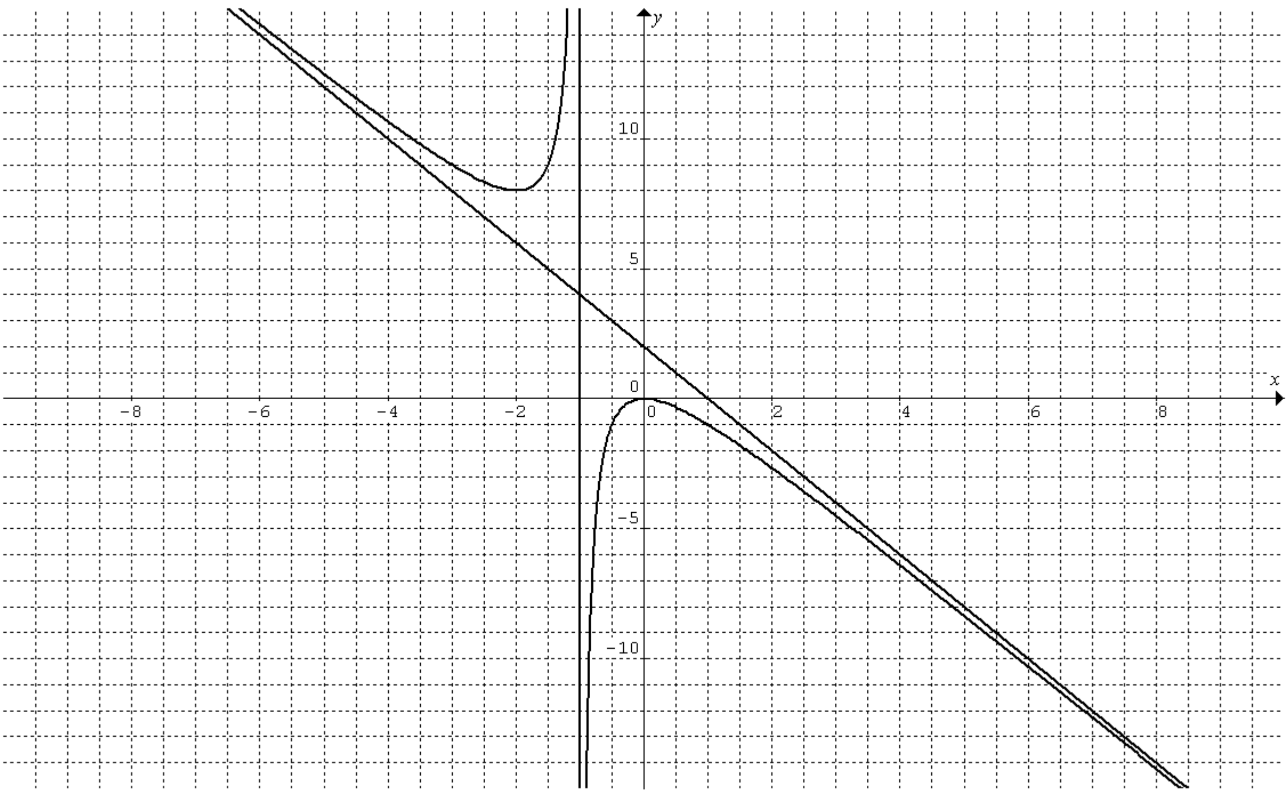
a)



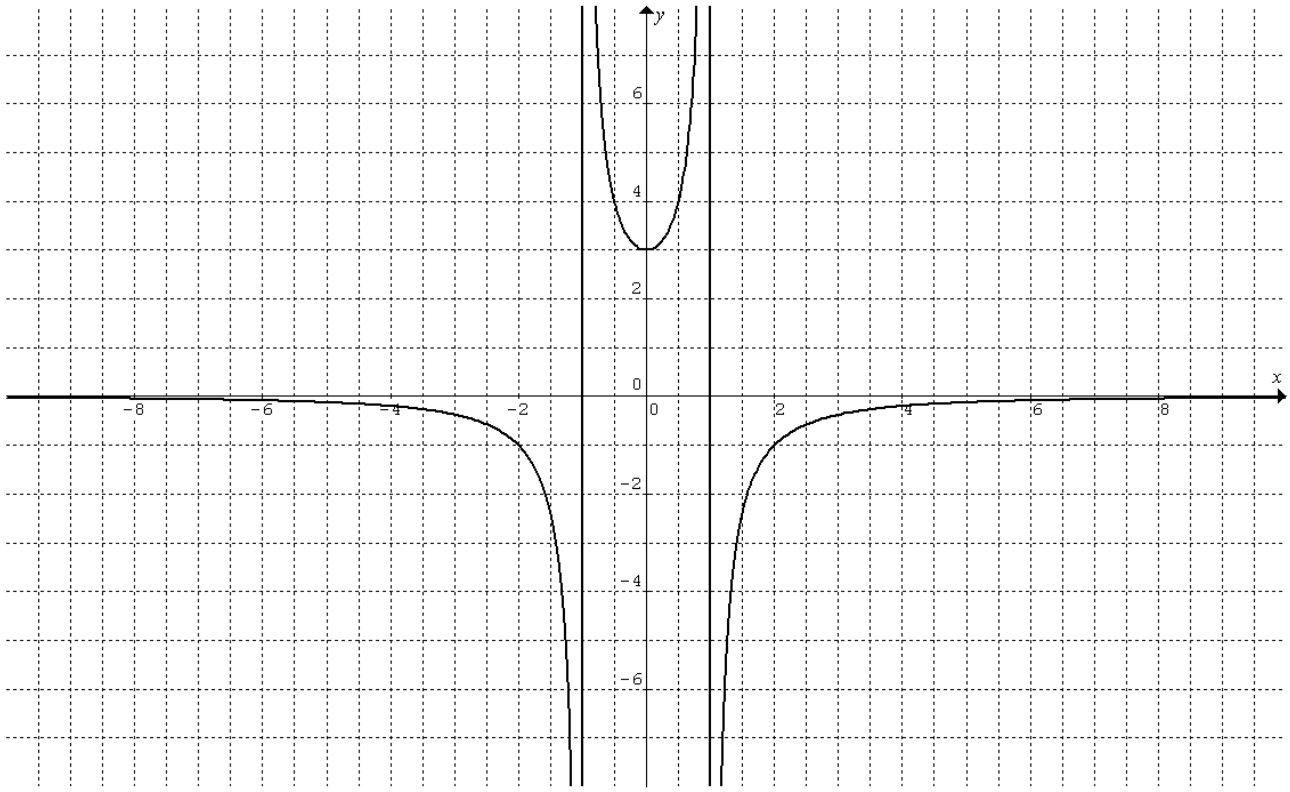
b)



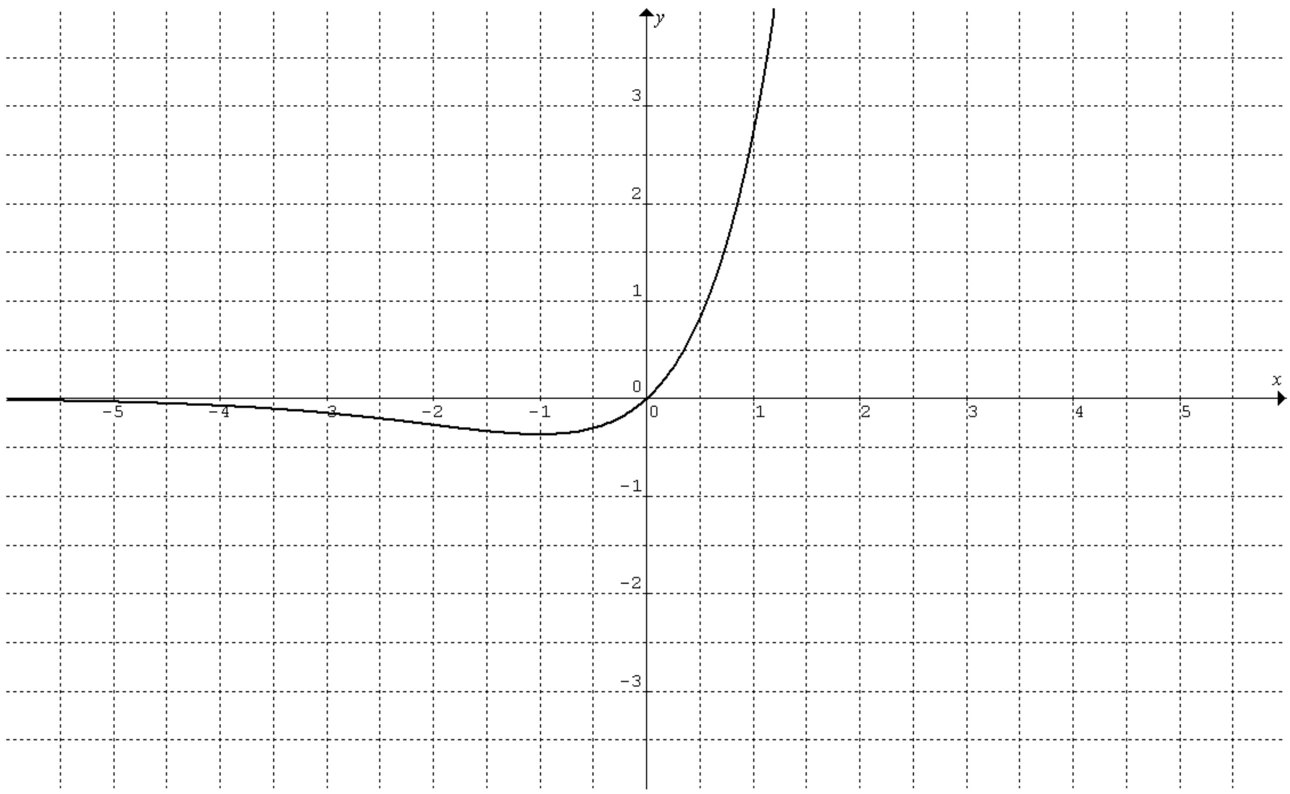
c)



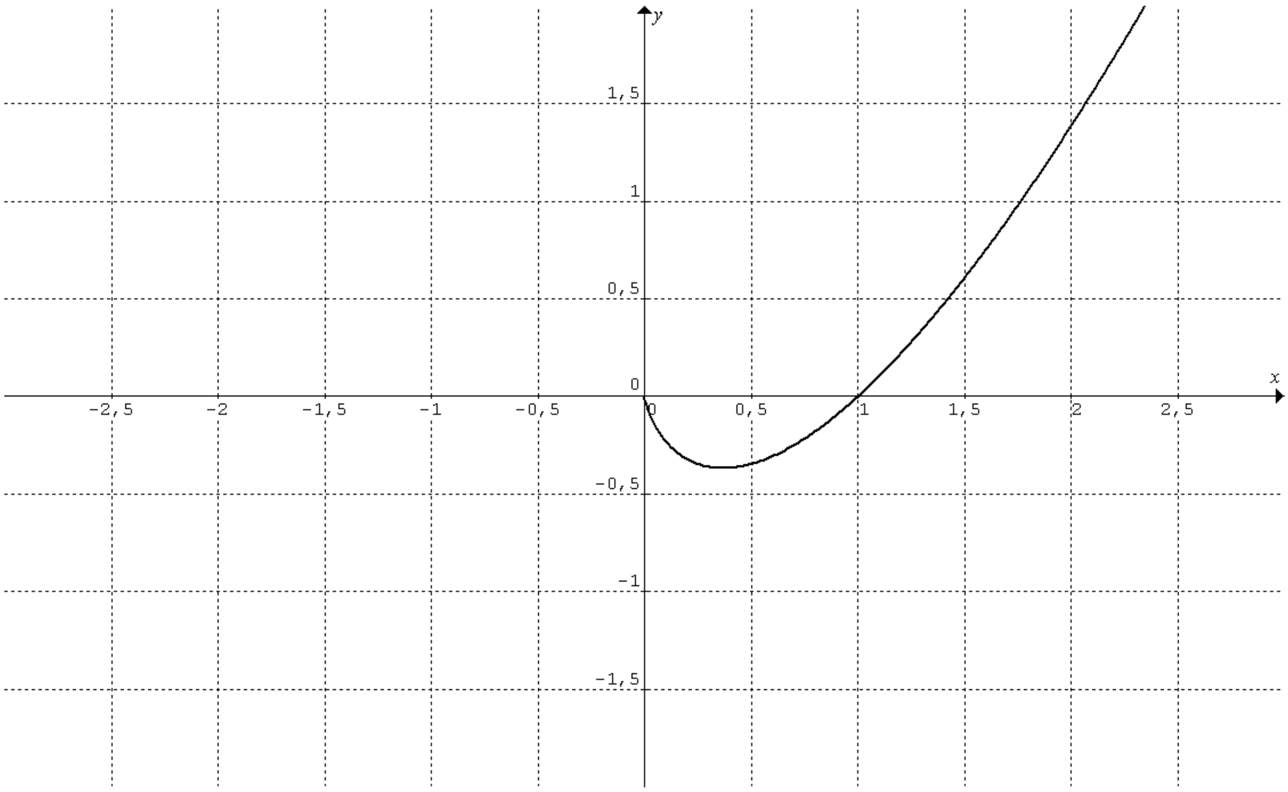
d)



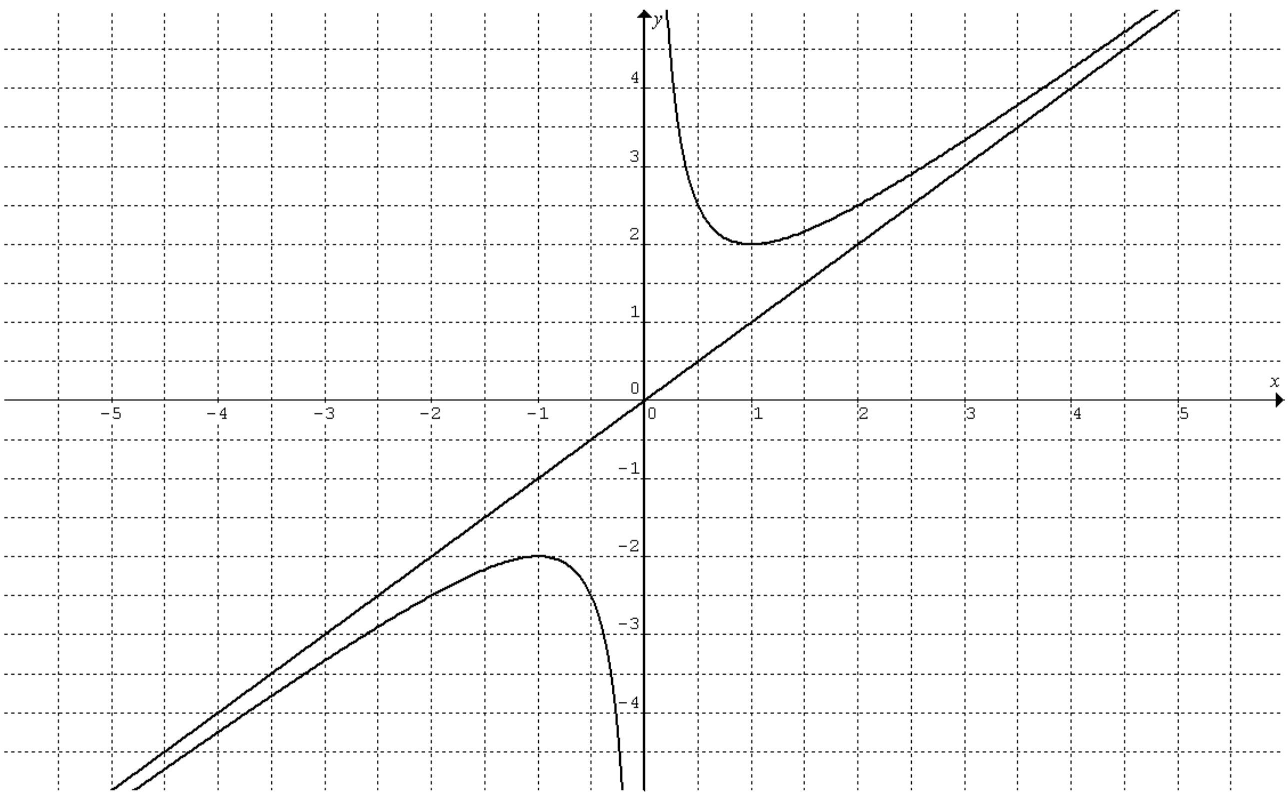
e)



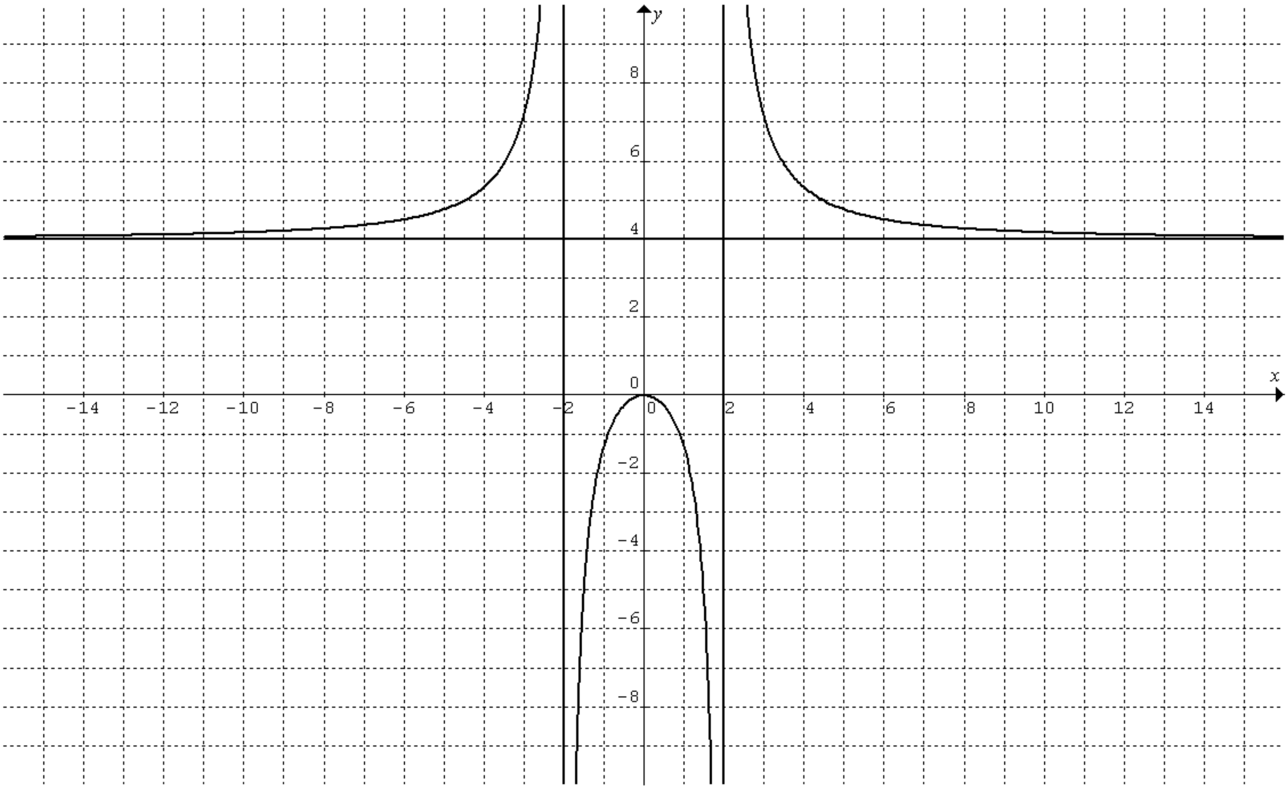
f)


y
1,5
1
0,5
0
x
-2,5
-2
-1,5
-1
-0,5
0
0,5
1
1,5
2
2,5
-0,5
-1
-1,5

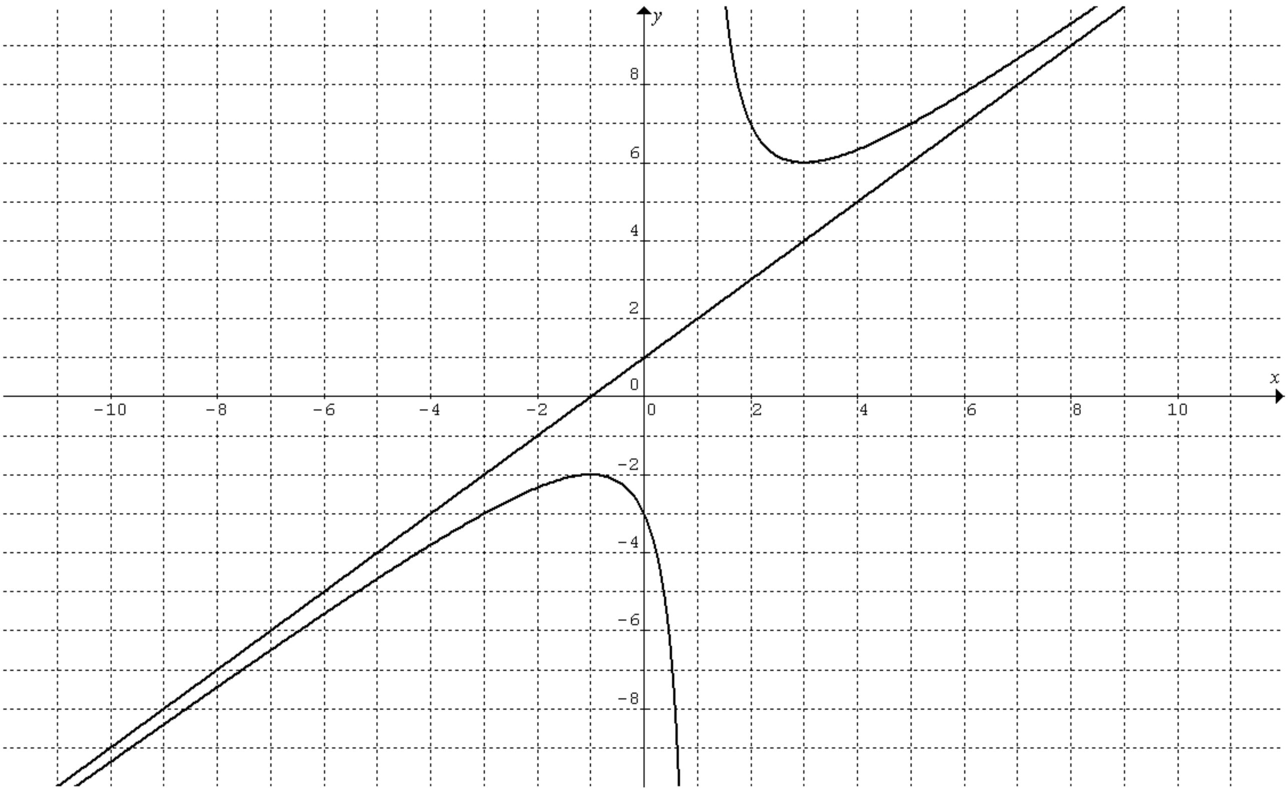
g)


y
4
3
2
1
0
x
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
-1
-2
-3
-4

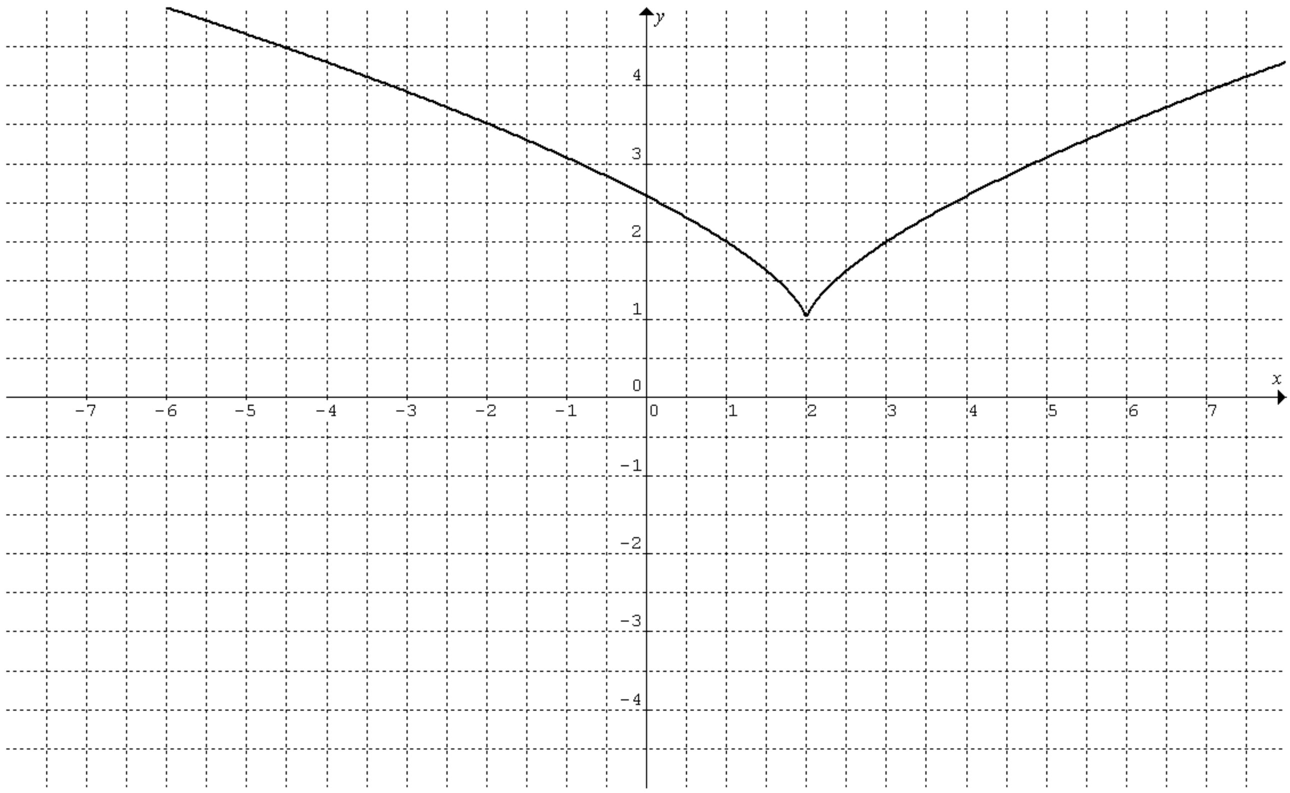
h)


y
x
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-14
-12
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
12
14

j)


y
x
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10

k)



7. Resuelva los siguientes problemas.

   a) Un fabricante posee láminas metálicas rectangulares de 30cm por 50cm. Si corta un cuadrado en cada una de las esquinas de la lámina, dobla las 4 solapas que le quedan y suelda las aristas de las 4 esquinas, obtiene una caja sin tapa. ¿Qué medidas deben tener los cuadrados a recortar, si pretende que la caja tenga el máximo volumen posible?

   b) i) Se quieren construir envases cilíndricos sin tapa, de $500cm^3$ de volumen. Si se considera despreciable el espesor del material a utilizar, ¿cuál debe ser el radio de la base para que la cantidad de material a utilizar sea mínima?
   ii) Analice el mismo problema si los envases son de $1000cm^3$ y con tapa. ¿Qué productos en el mercado responden a estas medidas?

   c) Una ventana tiene la forma de un rectángulo con un semicírculo encima cuyo diámetro es igual a la base del rectángulo. Si el perímetro total de la ventana es 2m, hallar las dimensiones para que su área sea máxima.

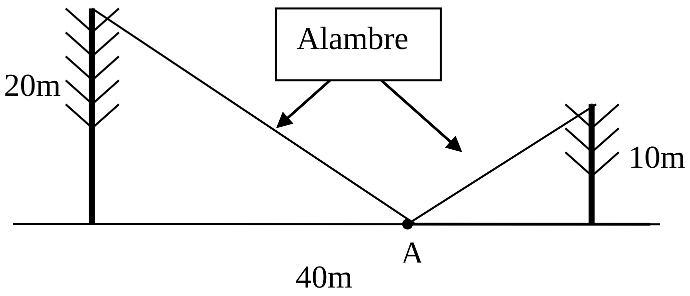
   d) ¿Cuándo es máxima el área de un triángulo isósceles de perímetro 12?

   e) ¿Cuál es el cilindro recto de mayor volumen que puede inscribirse en un cono recto de radio 6 y altura 24?

   f) Se quiere alambrar, con 200m de alambre, un campo rectangular adyacente a un muro. Hallar el de mayor área.

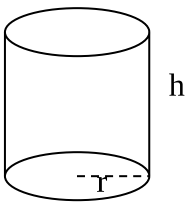
   g) Divida el número 23 en dos sumandos tales que su producto sea máximo.

h) Dos antenas se encuentran en un terreno, afianzadas mediante alambres, sujetos en un mismo punto entre ambas (ver figura). ¿Dónde debe colocarse el punto A para minimizar la cantidad de alambre a emplear? **Optativo**

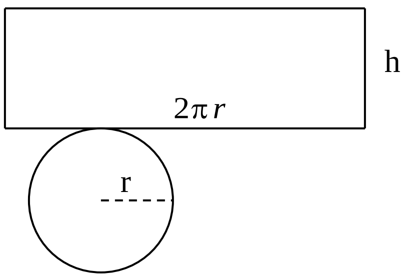


Las antenas miden respectivamente 20m y 10m.
La distancia entre ambas es de 40m.

<u>Resolución punto bi)</u>:



El volumen de un cilindro es $V = \pi r^2 h$, como el volumen buscado es 500cm^3, nos queda: $\pi r^2 h = 500$, de donde: $h = \dfrac{500}{\pi r^2}$ I



La superficie a emplear será: $S = \pi r^2 + 2\pi r h$

En esta fórmula para calcular la superficie intervienen dos Variables. Si reemplazamos por I nos queda:

$S = \pi r^2 + \dfrac{1000}{r} \quad r > 0$ Tenemos que encontrar para qué valor de r se hace mínima la superficie. Derivamos: $S'(r) = 2\pi r - \dfrac{1000}{r^2}$

$2\pi r - \dfrac{1000}{r^2} = 0 \Rightarrow 2\pi r^3 - 1000 = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{1000}{2\pi}} \cong 5{,}42$ Punto crítico. Por las condiciones geométricas del problema, en este punto, la superficie debe ser mínima. De todas formas se puede analizar el cambio de signo de la derivada a izquierda y a derecha del punto.

$$\begin{cases} S'(5) = 10\pi - \dfrac{1000}{25} \cong -8{,}58 < 0 & \text{La curva pasa de ser decreciente a ser creciente, por lo tanto} \\ S'(6) = 12\pi - \dfrac{1000}{36} \cong 9{,}52 > 0 & \text{en el punto crítico hay un mínimo relativo, además es absoluto.} \end{cases}$$

Si reemplazamos para encontrar h nos queda $h = \sqrt[3]{\dfrac{1000}{2\pi}} \cong 5{,}42$, para estos valores se emplea la menor cantidad de material. Nótese que la altura es igual al radio, el diámetro de la base debe ser el doble de la altura.

<u>Respuestas</u>

a) El lado del cuadrado debe medir $\left(\frac{40}{3}-\frac{5}{3}\sqrt{19}\right)\text{cm} \cong 6{,}07\,\text{cm}$ y el volumen máximo es $V \cong 4104{,}4\text{cm}^3$

b) i) $r = \sqrt[3]{\frac{1000}{2\pi}} \cong 5{,}42 \quad h \cong 5{,}42$ ii) $r = \sqrt[3]{\frac{1000}{2\pi}} \cong 5{,}42 \quad h \cong 10{,}84$ (Nótese que la altura es igual al diámetro)

c) $\text{Base del rectángulo} = \frac{4}{\pi+4} \quad \text{Altura} = \frac{2}{\pi+4}$

d) Cuando el triángulo es equilátero, o sea $L = 4$

e) El radio del cilindro debe ser: $r = 4$ y la altura: $h = 8$.

f) $x = 50\text{m} \quad y = 100\text{m}$ g) $a = ¿?$ $b = ¿?$

h) El punto A debe estar colocado a $\frac{80}{3} \cong 26{,}67\text{m}$ del poste de 20m de altura.

8. **<u>Miscelánea.</u>**
Opción: resolver al menos 6 de los ejercicios propuestos, seleccionando al azar.

a) la tangente a la curva sinusoide en el punto de abscisa $x = \pi/2$ tiene en común con la curva:
i) Sólo un punto ii) Ningún punto iii) Dos puntos iv) Infinitos puntos

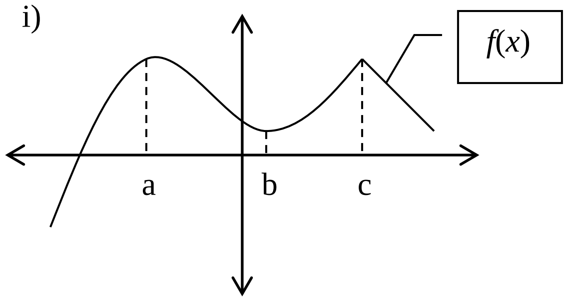
b) En el intervalo $[0\,;\pi/4]$, las imágenes de la función $f(x) = \text{sen}\,x + \cos x$ resultan:

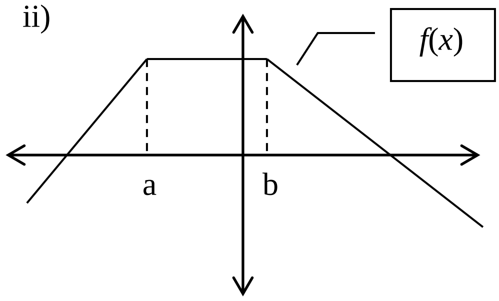
i) Crecientes de 1 a $\sqrt{2}$ ii) Crecientes de 0 a $\frac{\sqrt{2}}{2}$

iii) Constantes iv) Decrecientes de 1 a $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) Si $f(x)$ es una función derivable $\Rightarrow$ el cociente incremental $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ da por resultado:
i) La pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$.
ii) La recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$.
iii) La pendiente de una recta secante a $f(x)$ que pasa por $a\,;\,f(a)$.
iv) Otra opción distinta a las anteriores.

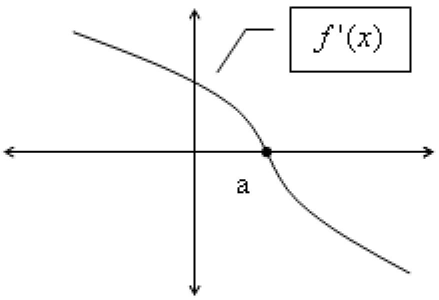
d) A partir de los gráficos de $f(x)$ bosquejar el gráfico de $f'(x)$.

i)


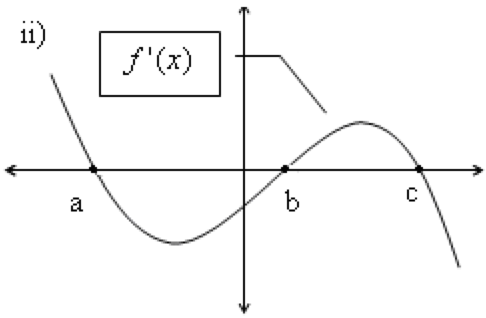
ii)


e) A partir de los gráficos de $f'(x)$ bosquejar el gráfico de $f(x)$.

i)



ii)



f) Trace la gráfica de una función que cumpla:

$f(-2) = 0 \qquad f(4) = 0$

$f'(3) = 0 \qquad f''(1) = 0 \qquad f''(2) = 0$

$f''(x) < 0$ Si $x < 1; x > 2$

$f''(x) > 0$ Si $1 < x < 2$

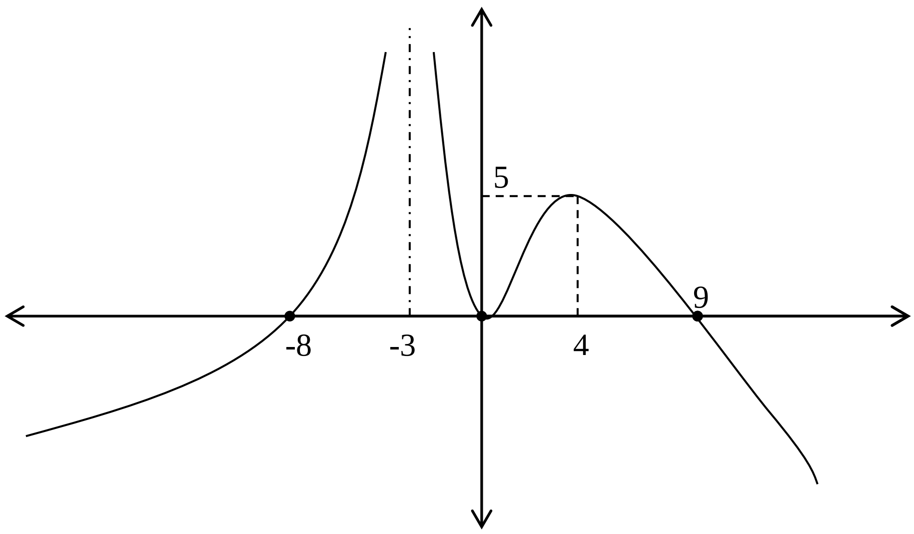
g) Trace la gráfica de una función que cumpla:

$f(-5) = 0 \qquad f(0) = 4 \qquad f(1{,}75) = 0 \qquad f'(0) = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

h) Describa con la menor cantidad posible de datos la siguiente función.



i) Estudiar la función $f(x) = (x^2 - 4)^{2/3}$

j) Calcular el área del mayor rectángulo que puede ser inscripto bajo la curva $y = e^{-x^2}$ en los cuadrantes I y II.

Rta: Base $= \sqrt{2}$ Altura $= \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ Área $= \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}}$

k) Considere el gráfico de $f(x)=1+\sqrt{32-2x^2}$ (¿de qué curva se trata?) y el punto $P=(3;1)$, determine el dominio de $f(x)$ y halle analíticamente el punto del gráfico de $f(x)$ que está a la máxima distancia de P.

Rta: $D_f=[-4;4]$ $P=\left(-3;1+\sqrt{14}\right)$

l) Dada $f(x)=\frac{1}{8}x^2+C$ y $g(x)=\ln x$: ¿cuánto debe valer C para que las curvas tengan un solo punto en común?

Rta:

ll) Dada $f(x)=x-3\,(x-5)^{2/3}$, hallar todos los valores de $k\in\boldsymbol{R}$ para los cuales la ecuación $f(x)=k$ tiene exactamente 3 soluciones.

Rta:

m) Sea $f(x)=3\ln\left(\frac{5}{x}\right)$ con $0<x\leq 5$. Entre todos los triángulos de vértices en $(0\,;0);(x\,;0);\,(x\,;f(x))$. Encuentre el de área máxima.

Rta: triángulo de vértices:

n) Demuestre que la ecuación $x^2=8\ln x$ tiene una única solución en el intervalo $(0\,;e]$.

o) Calcule k para que la ecuación $4+(x-2)e^{-x}=k$ tenga exactamente dos soluciones.

Rta:

p) En un sencillo juego de video unos aviones vuelan de izquierda a derecha siguiendo la trayectoria de $y=1+\dfrac{1}{x}$, $x>0$. Pueden disparar proyectiles en la dirección de la tangente a la curva. Si hay un objetivo en el punto $P=(4;0)$, ¿dónde se debe hacer el disparo para acertar el blanco?

Rta:

$P=\left(\sqrt{5}-1\;;\;\frac{5+\sqrt{5}}{4}\right)$