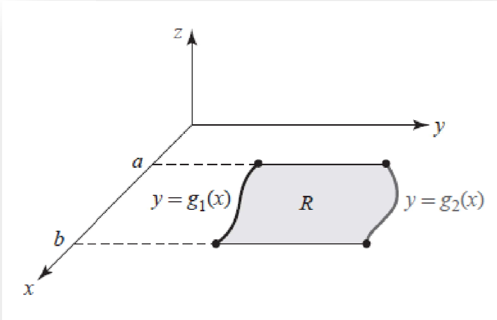
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LANÚS
DEPARTAMENTO DE DESARROLLO PRODCUTIVO Y TECNOLÓGICO
LICENCIATURA EN SISTEMA
MATEMÁTICAS III

**Compilación de problemas y ejercicios**
**Varios autores**
**Integrales múltiples**

**<u>SOBRE ÁREAS EN EL PLANO XY</u>:**

Observe la siguiente región del plano:

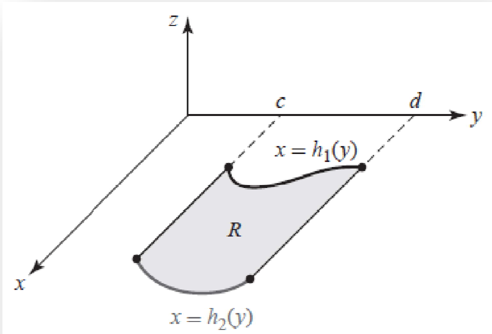



*a*) Región tipo I

Definida por
$$\boldsymbol{R: a \leq x \leq b, \quad g_1(x) \leq y \leq g_2(x)}$$

Donde, como podemos observar, las funciones frontera $g_1$ y $g_2$ son continuas. Este tipo de regiones se denominan **región tipo I**.

Mientras que en la siguiente:




*b*) Región tipo II

Definida por
$$\boldsymbol{R: c \leq y \leq d, \quad h_1(x) \leq x \leq h_2(x)}$$

Donde $h_1$ y $h_2$ son continuas, nos referimos a este tipo de regiones como **región tipo II**.

1. Para repasar, y pensando en un procedimiento similar a la derivación parcial, resuelva las siguientes integrales:

$a)\ \int dy \qquad b)\ \int \frac{1}{x(y+1)}\, dy \qquad c)\ \int \frac{y}{\sqrt{2x+3y}}\, dx \qquad d)\ \int sec^2\, 3xy\ dy$

$e)\ \int_{-1}^{3} (6xy - 5\, e^{y})\ dy \qquad f)\ \int_{1}^{3x} x^3 e^{xy}\, dy \qquad g)\ \int_{1}^{2} tan\ xy \qquad h)\ \int_{\sqrt{y}}^{y^3} (8x^3y - 4xy^2)\ dx$

$i)\ \int_{0}^{2x} \frac{xy}{x^2+y^2} dy \qquad j)\ \int_{x^3}^{x} e^{2y/x}\ dy \qquad k)\ \int_{\tan y}^{\sec y} (2x + \cos y)\ dx \qquad l)\ \int_{\sqrt{y}}^{1} y \ln x\ dx$

**Un importante resultado:**

2. **Teorema de Fubini:** Si $f$ es continua en el rectángulo

$$R = \{(x,y)\ /\ a \le x \le b,\ \ c \le y \le d\}$$

entonces, se cumple:

$$\iint_R f(x,y)\ dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\ dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\ dx\, dy$$

3. Evaluar las siguientes integrales en la región indicada:

$a)\ \iint_R y\ sen(xy)\ dA,\quad R = [1,2] \times [0,\pi] \qquad b)\ \iint_R \frac{xy^2}{x^2+1}\ dA,\quad R = [0,1] \times [-3,3]$

$c)\ \int_1^4 \int_1^2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) dy\, dx \qquad d)\ \int_1^2 \int_0^1 (x+y)^{-2}\ dx\, dy \qquad e)\ \int_0^1 \int_0^1 xy\sqrt{x^2+y^2}\ dy\, dx$

4. Evaluar la integral de $f(x,y) = x + 2y$ sobre la región acotada por las parábolas $y = 2x^2$, $y = 1 + x^2$.

5. Evaluar la integral de $f(x,y) = 2xy$ sobre la región $\frac{1}{2} \le x \le 2,\ x \le y \le x^2 + 1$.

6. Evaluar la integral de $f(x,y) = (8x + e^{y})$ sobre la región $0 \le y \le 4,\ y \le x \le 2y$.

7. Evaluar la integral de $f(x,y) = y^2$ sobre la región acotada por $y = 2x$ y $y = 5x$ y $x = 2$.

8. Evaluar la integral:

$$I = \iint_R (x-y)\ dA$$

Donde $R$ es la región sobre el eje x acotada por: $y^2 = 3x$ y $y^2 = 4 - x$.

9. Sea $R$ la región acotada por la curva $y = \sqrt{x}$ y la recta $y = x$. Sea $f(x,y) = \frac{sen\ y}{y}$. Si consideramos que $y \ne 0$ y $f(x,0) = 1$, calcule $\iint_R f(x,y)\ dA$.

10. Evalúe las siguientes integrales:

$$a)\int_{1}^{2}\int_{-x}^{x^2}(8x-10y+2)\ dy \qquad b)\int_{-1}^{1}\int_{0}^{y}(x+y)^2\ dxdy \qquad c)\int_{0}^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}}(2x-y)\ dxdy$$

$$d)\int_{0}^{\pi/4}\int_{0}^{\cos}(1+4y\ tan^2x)\ dydx \qquad e)\int_{0}^{1}\int_{0}^{x^2}\sqrt{x}\ dx\ dy \qquad f)\int_{0}^{1}\int_{0}^{v}\sqrt{1-v^2}\ du\ dv$$

11. Evaluar las siguientes integrales triples:

$$a)\int_{2}^{4}\int_{-2}^{2}\int_{-1}^{1}(x+y+z)\ dx\ dy\ dz \qquad b)\int_{1}^{3}\int_{1}^{x}\int_{2}^{xy}24\ xy\ dz\ dy\ dx$$

$$c)\int_{0}^{6}\int_{0}^{6-x}\int_{0}^{6-x-z}dy\ dz\ dx \qquad d)\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-x}\int_{0}^{\sqrt{y}}4\ x^2z^3\ dz\ dy\ dx$$

$$e)\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{y^2}\int_{0}^{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right)\ dz\ dx\ dy \qquad f)\int_{0}^{\sqrt{2}}\int_{\sqrt{y}}^{2}\int_{0}^{e^{x^2}}x\ dz\ dx\ dy$$

$$g)\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\int_{0}^{2-x^2-y^2}xy\ e^z\ dz\ dx\ dy \qquad h)\int_{0}^{4}\int_{0}^{1/2}\int_{0}^{x^2}\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\ dy\ dx\ dz$$