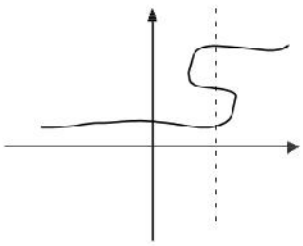
GUÍA 3
TEORÍA DE CURVAS

CURVAS.

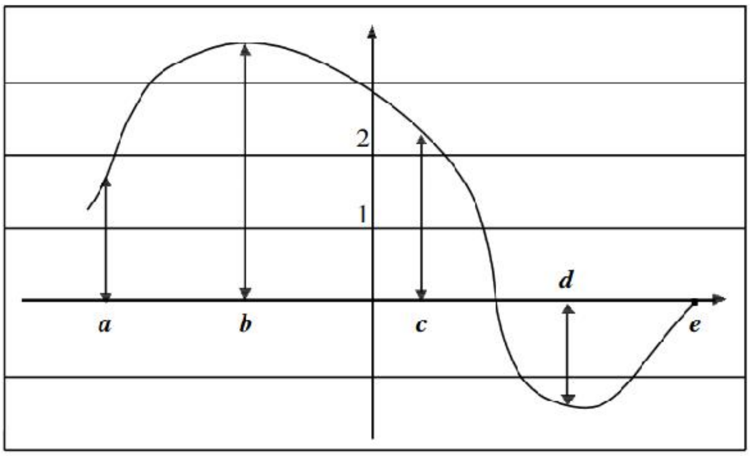
CONVENCION.

Las curvas que se van a estudiar en este libro serán sólo aquellas que tienen no más de un punto en cada vertical.

Un ejemplo de curva que no sirve aparece en la figura: en punteado hay una vertical y esa vertical corta la curva en más de un punto (la corta en tres puntos).



A continuación observe la siguiente **curva**. Sobre ella se van a realizar algunos análisis, recuerde lo que ha trabajado sobre puntos en el plano e intervalos de la recta real, ya que ello nos ayudará a "hablar sobre curvas", paso fundamental para entender conceptos más elaborados y útiles.



Conteste las preguntas haciendo referencia a los puntos señalados en el eje x, con las letras a, b, c, d y e..

Considere ahora todos los puntos del eje x para los cuales la curva "tiene altura". (No solamente los marcados con letras).

¿ En cuál la curva tiene altura mayor que 2?	¿Existe algún punto diferente de e, para el cual la altura de la curva es cero? ¿Cuál?.
¿En cuales la curva tiene altura menor que 2?	¿Existe algún punto para el cuál la curva tenga altura 6?
¿En cuales la altura es positiva?	¿En donde la curva es "más alta"?
¿En cuales la altura es negativa?	¿En donde la curva es "más baja"?
¿En cuales la altura es mayor que 1?	¿3 es mayor que todas las posibles alturas de la curva?
¿Puede decir cuál es la altura de la curva en e?	¿2 es mayor que cualquiera de las alturas de la curva?
¿La altura en a es mayor que la altura en b?	¿-1 es menor que cualquiera de las alturas de la curva?
¿La altura en a es mayor que la altura en c?	¿-2 es menor que cualquiera de las alturas de la curva?

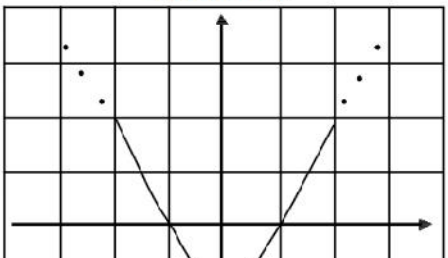
Ahora veamos unos ejemplos de curvas que utilizaremos a lo largo de la guía, para poder realizar los ejercicios, es necesario aclarar la noción de **ALTURA**.

Dicho concepto va a ser nuestra puerta de entrada para analizar las características de los objetos que estamos estudiando (las **curvas**), por lo que es muy importante poner en colectivo las dudas y comprensiones básicas, así como apoyar a tus compañeros y compañeras, una vez que las entiendas.

EJEMPLOS DE CURVAS.

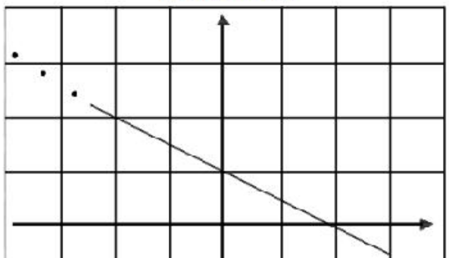
Complete de acuerdo a lo que observa en cada curva. $alt(-2)$ significa altura de la curva en $x = -2$. Cuando aparece $alt(\quad) = -2$, hay que poner en el paréntesis el x (en caso de que exista) donde la altura de la curva es -2.

EJEMPLO 1.



$alt(-2) =$	$alt(\quad) = -2$
$alt(0) =$	$alt(\quad) = -1$

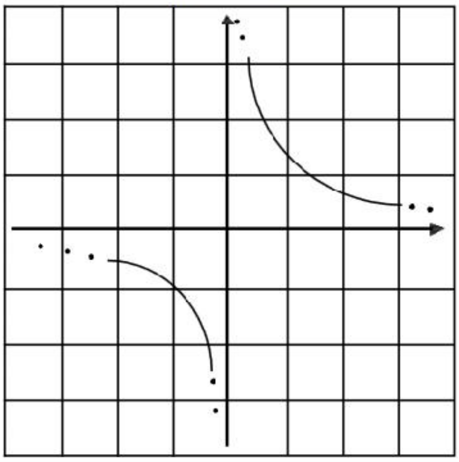
EJEMPLO 2.



$alt(-1) =$	$alt(\quad) = 0$
$alt(3) =$	$alt(\quad) = 2$

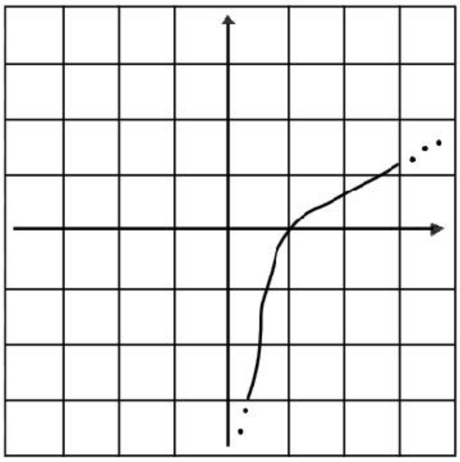
Es importante señalar, que, de aquí en adelante, los puntos suspensivos (…) al final de cada trazo, significan que la curva *se extiende en esa dirección infinitamente*.

EJEMPLO 3.



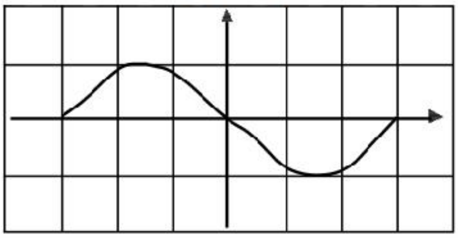
$alt(-2) =$	$alt(1) =$
$alt(0) =$	$alt(\quad) = 2$

EJEMPLO 4.



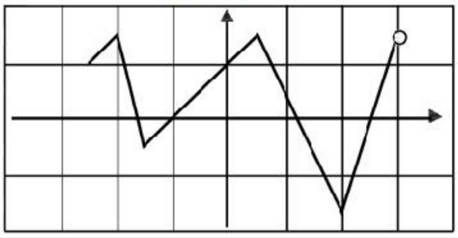
$alt(1) =$	$alt(-1) =$
$alt(\frac{1}{4}) =$	$alt(\quad) = 0$

EJEMPLO 5.



$alt(\frac{1}{2}) =$	$alt(\quad) = \frac{1}{2}$
$alt(\quad) = 2$	$alt(\quad) = \frac{1}{2}$

EJEMPLO 6.

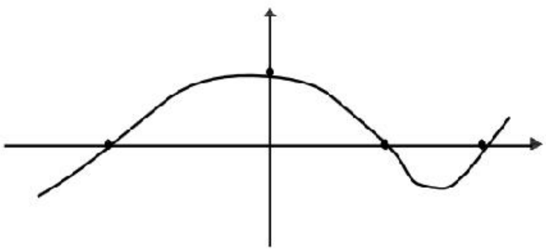


$alt(-1.5) =$	$alt(3.5) =$
$alt(0) =$	$alt(\quad) = 3$

Nuestro primer concepto: **Los puntos de corte de la curva con los ejes**.

PUNTOS de CORTE con los EJES.

Los puntos "gruesos" que aparecen sobre la curva y los ejes de la figura reciben el nombre de puntos de corte de la curva con los ejes.

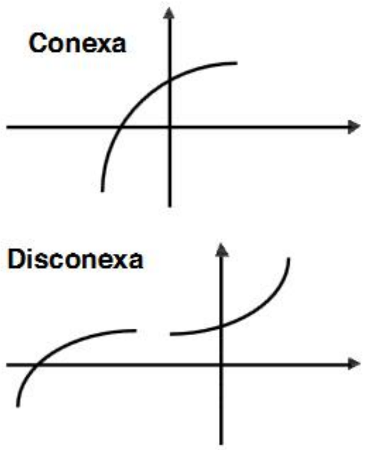


Tomando en cuenta las curvas ejemplo de las páginas anteriores, complete:

Ejemplos	Puntos de corte con el eje x.	Puntos de corte con el eje y.
1		
2		
3		
4		
5		
6		

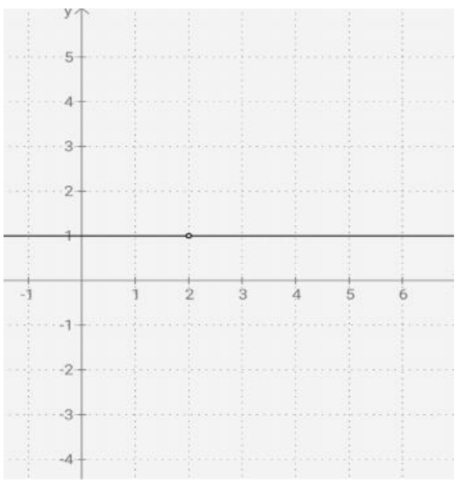
Podemos definir a las curvas dependiendo de su conexidad:

CONEXAS o DISCONEXAS.



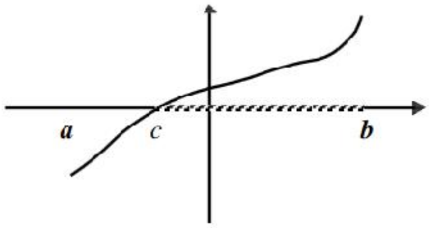
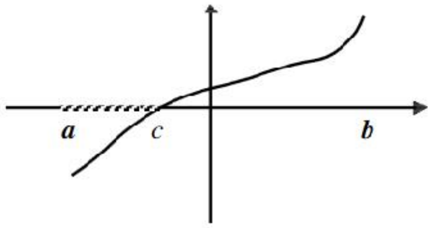
Ejemplos	Conexa o disconexa.
1	
2	
3	
4	
5	
6	

El concepto de **conexidad** se basa en la “posibilidad” de trazar continuamente la curva. A continuación mostramos un ejemplo no muy evidente:



La curva anterior, tiene un “agujero” en donde x toma el valor 2 ¿Puedes verlo?
¿Es esta curva conexa?

Ahora, consideremos las alturas y sus signos:

PARTE POSITIVA	**PARTE NEGATIVA**
Parte del eje x donde las alturas de la curva son positivas. (Donde la curva está por **encima** del eje x)	Parte del eje x donde las alturas de la curva son negativas. (Donde la curva está por **debajo** del eje x)
	
$(c,b]$	$[a,c)$

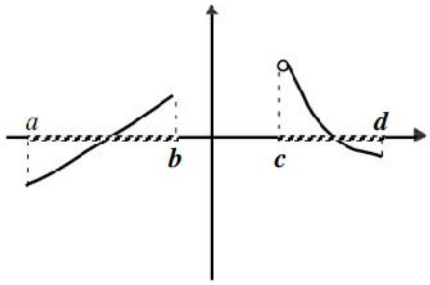
Ejemplos	Parte positiva.	Parte negativa.
1	$(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$	$(-1,1)$
2		
3		
4		
5		
6		

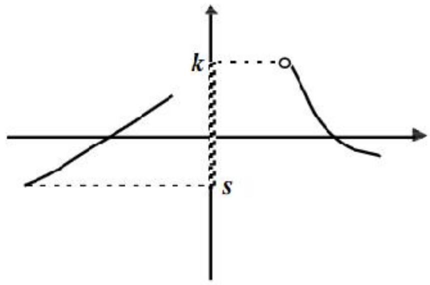
Nota: Para determinar la parte positiva primero se ubican el o los trozos de curva que están por encima del eje x y luego se determinan sobre cual o cuales intervalos del eje x están esos trozos.

Algo similar hacemos al determinar la parte negativa…

Si consideramos como una totalidad (unión) los intervalos donde la curva es positiva (parte positiva), donde la curva es negativa (parte negativa), y los puntos de corte con el eje x, obtendremos la totalidad de los intervalos donde la curva “existe”.

DOMINIO y RANGO.

DOMINIO

Parte del eje x desde donde mirando verticalmente, hacia arriba o hacia abajo, se ve la curva.
$[a,b]\cup(c,d]$
Proyección de la curva sobre el eje x.

RANGO

Parte del eje y desde donde mirando horizontalmente, hacia la derecha o hacia la izquierda, se ve la curva.
$[s,k)$
Proyección de la curva sobre el eje y.

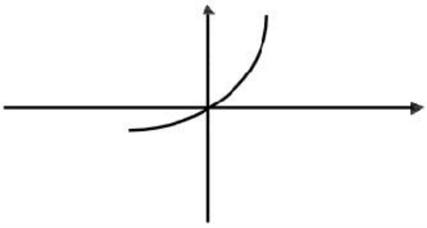
Ejemplos	Dominio	Rango
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Nota: Para ayudarse a reconocer el **dominio**, puede tratar de imaginarse un muñeco que va caminando por el eje x y mira hacia arriba y hacia abajo. Si en un punto no ve curva, ese punto no está sobre el dominio. Si ve curva desde el punto, el punto pertenece al dominio. Para el **rango** ponga a caminar el muñeco por el eje y y que mire a la izquierda y a la derecha. Si desde el punto ve curva es que está parado sobre un punto del rango, si no ve es que el punto no pertenece al rango.

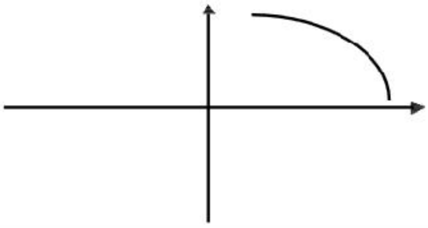
En varios libros, en vez de rango, se emplea la palabra ***imagen***.

PARTES CRECIENTES y DECRECIENTES.

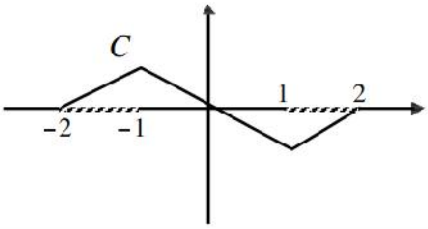
CURVA CRECIENTE



CURVA DECRECIENTE

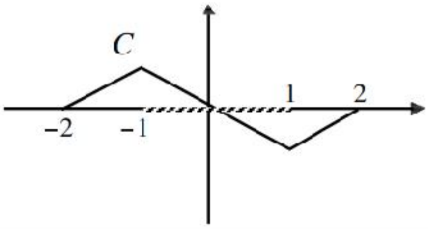


PARTES CRECIENTES



C crece en $(-2,-1)$ y $(1,2)$

PARTES DECRECIENTES

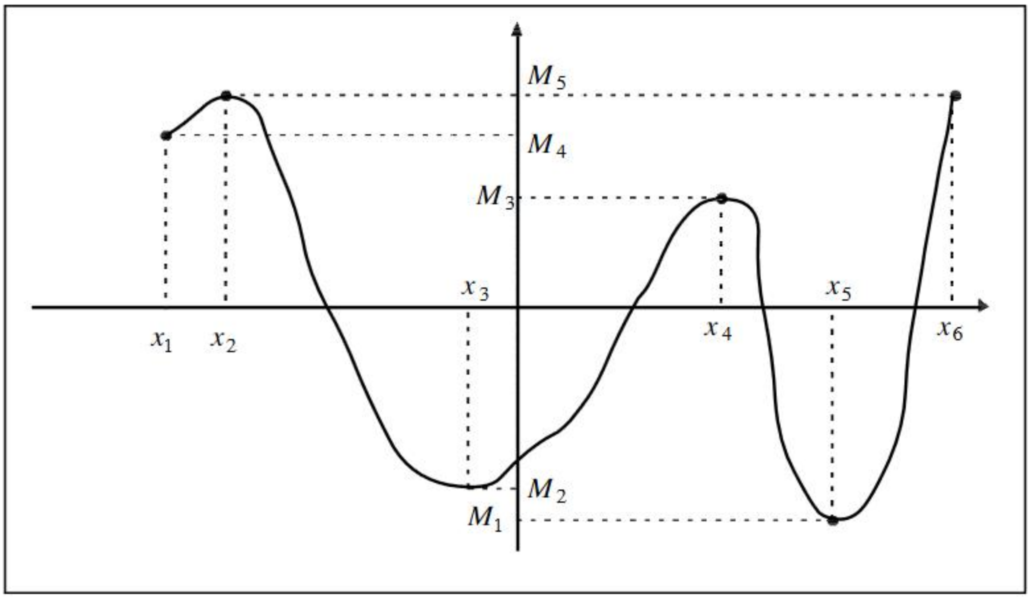


C decrece en $(-1,1)$

Ejemplos	Crece en	Decrece en
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Nota: Al desplazar un punto de izquierda a derecha sobre el eje x, si la curva "sube" se dice que la curva es creciente en esa parte del eje x. Si la curva "baja" se dice que es decreciente (en esa parte del eje x).

MAXIMOS y MINIMOS.



Definimos aquí:
Máximo absoluto o global: La mayor altura alcanzada por la curva.
Mínimo absoluto o global: La menor altura alcanzada por la curva.
Máximo relativo o local: La mayor altura alcanzada en un intervalo abierto del dominio.
Mínimo relativo o local: La menor altura alcanzada en un intervalo abierto del dominio.

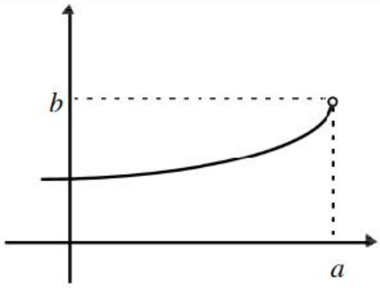
Complete en base a las curvas de la página de ejemplos.

Ejemplos	Max.Abs	Alcanzado en	Max.Rels	Alcanzados en
1				
2				
3				
4				
5				
6				

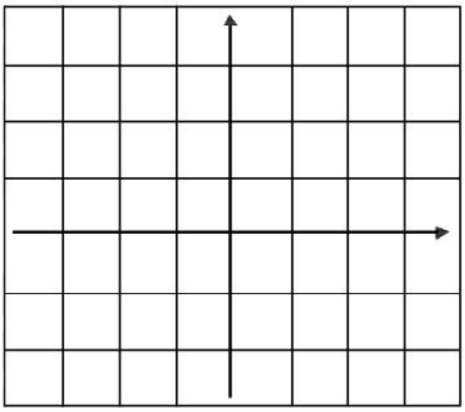
Ejemplos	Min.Abs	Alcanzado en	Min.Rel	Alcanzados en
1				
2				
3				
4				
5				
6				

Punto delicado.

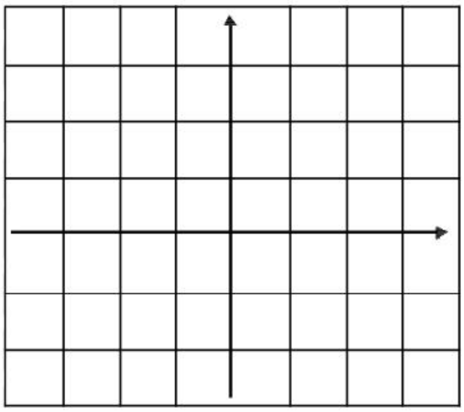
Comprender que en un abierto puede no haber máximo (o mínimo).

	¿Porqué b no puede ser el máximo de la curva? ¿Porqué la curva del gráfico no tiene máximo?

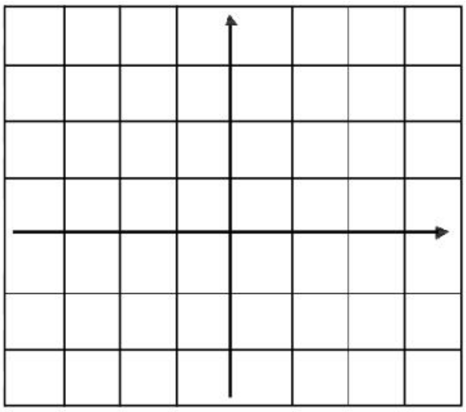
A continuación, dibuja una curva que cumpla con las condiciones dadas:



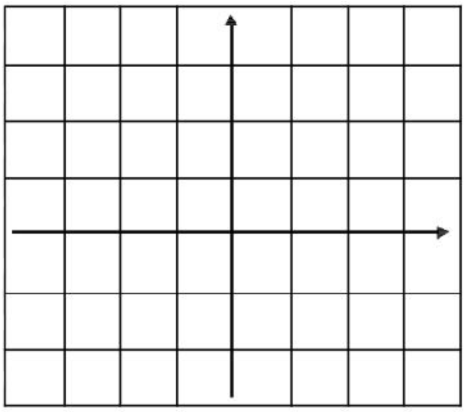
Dominio $= [0,3]$, *creciente*



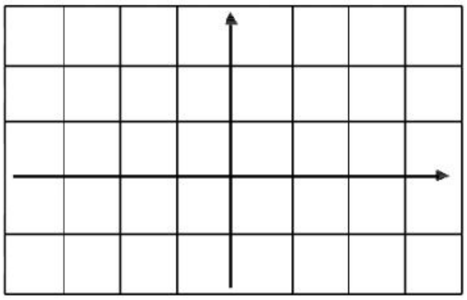
Dominio $= [0,3]$, *creciente*, *máximo* 2



Dominio $= [0,3]$, *creciente*, *mínimo* 2



Dominio $= R$, *creciente*

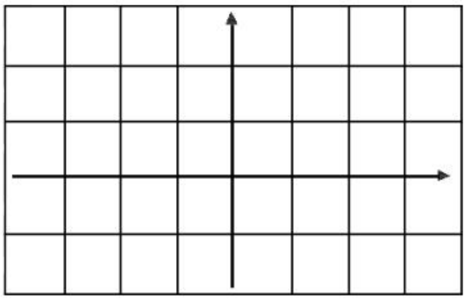


$Dominio = [-1, 2]$, *conexa*

Tiene dos puntos de corte con el eje x

Máximo absoluto alcanzado solo en 0

Mínimo absoluto alcanzado solo en -1

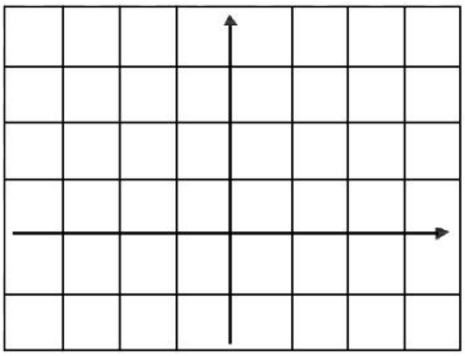


$Dominio = (-1, 2)$, *conexa*

negativa

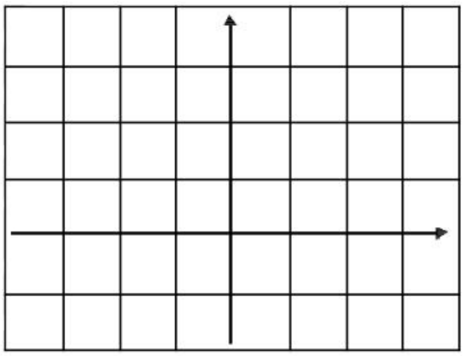
creciente en $(-1,1)$

decreciente en $(1,2)$



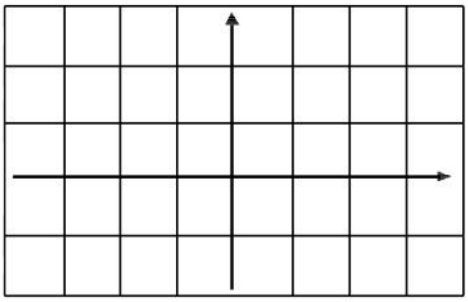
$Rango = [-1,3]$, *decreciente*

Mínimo alcanzado en 2



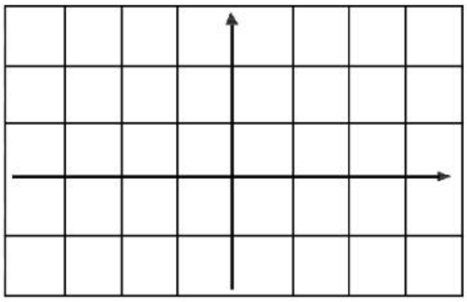
$Rango = [-1,3)$, *decreciente*

$Dominio = (-2,2]$



$Dominio = [0,\infty)$, *disconexa*,

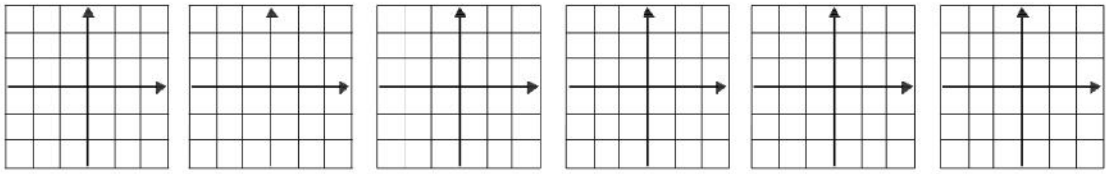
creciente, *acotada inferiormente por* -2



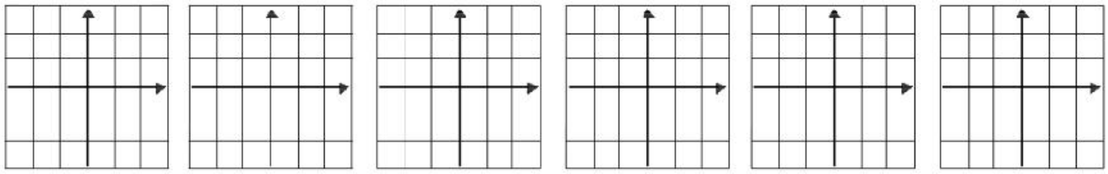
$Rango = [-1,3]$, *decreciente*

Nota importante:

Si una curva tiene por nombre la letra f, su altura en a se denotará con $f(a)$. Ejemplos:
$g(3)$ denota la altura de g en 3.
La expresión simbólica $f(x) > 0$ significa que la altura de la curva f en x es positiva.

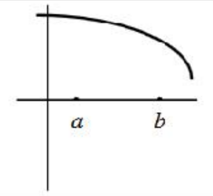
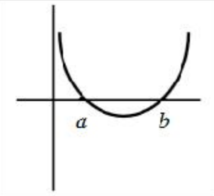
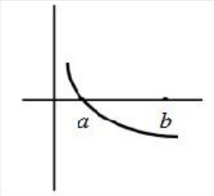
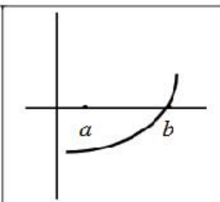
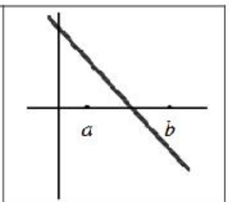


$f(-2)=-2$ $f(1)=1$ $f(2)=2$	$f(-2)=-2$ $f(1)=1$ $f(2)=1$	$f(-2)=1$ $f(1)=1$ $f(2)=1$	$f(-2)=1$ $f(1)=-2$ $f(2)=1$	$f(-2)=1$ $f(1)=2$ $f(2)=1$	$f(-1)=2$ $f(2)=0$ $f(0)=-1$



$f(-1)=1$ $f(0)=0$ $f(1)=1$	$f(-1)=-1$ $f(0)=0$ $f(1)=-1$	$f(-2)=2$ $f(0)=0$ $f(2)=2$	$f(-1)=0$ $f(0)=1$ $f(1)=0$	$f(-1)=0$ $f(0)=-1$ $f(1)=0$	$f(-1)<0$ $f(0)=0$ $f(1)<0$

Para cada expresión simbólica, si la expresión se cumple para la curva del comienzo de la columna escriba sí en el recuadrito adyacente. En caso contrario escriba no. (Se supone que todas las curvas de esta página tienen por nombre f).

				
$f(a)>f(b)$	$f(a)>f(b)$	$f(a)>f(b)$	$f(a)>f(b)$	$f(a)>f(b)$
$f(a)<f(b)$	$f(a)<f(b)$	$f(a)<f(b)$	$f(a)<f(b)$	$f(a)<f(b)$
$f(a)\leq f(b)$	$f(a)\leq f(b)$	$f(a)\leq f(b)$	$f(a)\leq f(b)$	$f(a)\leq f(b)$
$f(a)\geq f(b)$	$f(a)\geq f(b)$	$f(a)\geq f(b)$	$f(a)\geq f(b)$	$f(a)\geq f(b)$
$f(a)=f(b)$	$f(a)=f(b)$	$f(a)=f(b)$	$f(a)=f(b)$	$f(a)=f(b)$

Preparado por el profesor
Luis Enrique Millán

Las imágenes en su mayoría
Alson, Pedro. 2007. *Métodos de Graficación* Editorial Auna. Caracas