UNIVERSIDAD NACIONAL DE LANÚS
DEPARTAMENTO DE DESARROLLO PRODUCTIVO Y TECNOLÓGICO
LICENCIATURA EN SISTEMAS
LICENCIATURA EN TECNOLOGÍAS FERROVIARIAS
MATEMÁTICAS III

Guía práctica
Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$
Producto Escalar

1. Preguntas conceptuales (para quienes vieron los videos):
   a. ¿Cuál es el producto escalar de los vectores $a = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $b = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$?
   b. ¿Cómo se expresa $|a|$ en términos del producto escalar?
   c. ¿Cómo expresarías el ángulo entre *a* y *b* usando el producto escalar?

2. Atención a estos dos conceptos:

La proyección de un vector $\vec{u}$ sobre otro vector $\vec{v}$ se expresa así[1]:

$$proy_{\vec{v}}\vec{u} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right)\vec{v}$$

El componente escalar de $\vec{u}$ en la dirección de $\vec{v}$ es el escalar:

$$|\vec{u}|cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|} = \vec{u}\cdot\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

---

   a. Para los siguientes pares de vectores, hallar i) **El ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$** ; ii) **El componente escalar de $\vec{u}$ en la dirección de $\vec{v}$** ; iii) **El vector proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.**

      P1. $\vec{v} = 2i - 4j + \sqrt{5}k$; $\vec{u} = -2i + 4j - \sqrt{5}k$
      P2. $\vec{v} = \frac{3}{5}i + \frac{4}{5}k$; $\vec{u} = 5i + 12j$
      P3. $\vec{v} = -i + j$; $\sqrt{2}i + \sqrt{3}j + 2k$
      P4. $\vec{v} = \langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \rangle$; $\vec{u} = \langle \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \rangle$

3. Otro concepto importante:

Los cosenos directores de un vector $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ se hallan según las fórmulas:

$$cos\alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|} \quad cos\beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|} \quad cos\gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|}$$

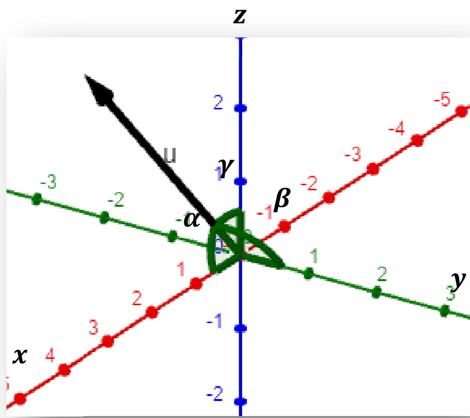
Los cosenos directores cumplen con la siguiente propiedad:

$$(cos\alpha)^2 + (cos\beta)^2 + (cos\gamma)^2 = 1$$

Gráficamente, los cosenos directores están relacionados de esta manera a los ejes coordenados:

---

[1] Recuerda el ejercicio de la clase virtual donde demostramos que $|\vec{v}|^2 = \vec{v}\cdot\vec{v}$.



---

4. Los vectores unitarios se construyen a partir de los *cosenos directores*. Demuestre que si $\vec{v} = ai + bj + ck$ es un vector unitario, sus cosenos directores son a, b y c.
5. Halle un valor para c tal que $\langle c, 2, -1 \rangle$ y $\langle 2,3,c \rangle$ sean perpendiculares.
6. Halle un vector unitario que sea ortogonal tanto a $\vec{a} = i + j + k$ como a $\vec{b} = -2j + k$.
7. Halle los cosenos directores y ángulos directores de:
   a. $\vec{a} = \langle 1,2,3 \rangle$
   b. $\vec{a} = \langle 3, -4, 5 \rangle$
   c. $\vec{a} = 2i + 2j - k$
8. Calcule los productos escalares entre los vectores unitarios sobre los ejes coordenados considerando todas las posibles combinaciones, usando esos resultados, calcule:
   a. $(2i - j) \cdot (3i + k)$
   b. $j \cdot (2i - 3j + 2k)$
9. Encuentre un vector unitario tal que todos sus ángulos directores sean iguales.
10. Halle el valor de c para que el ángulo entre $\vec{a} = \langle 1, c \rangle$ y $\vec{b} = \langle 1,2 \rangle$ sea de $45°$.
11. Otro concepto importante:

Una aplicación a la física del producto escalar. Para calcular *el trabajo* ***W*** realizado por una fuerza $\vec{\boldsymbol{F}}$, para mover un objeto físico a la largo de *una distancia d* (entendida como el módulo del vector desplazamiento que va de un punto *P* a otro *Q*, usaremos la siguiente fórmula:

$$W = \left(|\vec{F}| \cos\theta\right) |\overrightarrow{PQ}|$$

Componente de $\vec{F}$ a lo largo de $\vec{W}$

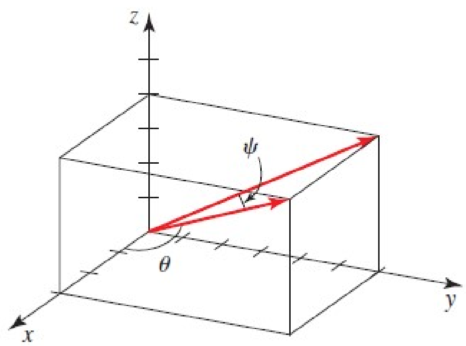
Distancia recorrida

---

12. Hallar, en cada caso, el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ al mover una partícula del punto *P* al punto *Q*:

    a. $\vec{F} = 2i + 3j - k$; $P(-1, -2, 2)$ $\vec{Q} = (2,1,5)$
    b. $\vec{F} = \langle 1,4,5 \rangle$; $P(2,3,1)$ $Q(-1,2,4)$

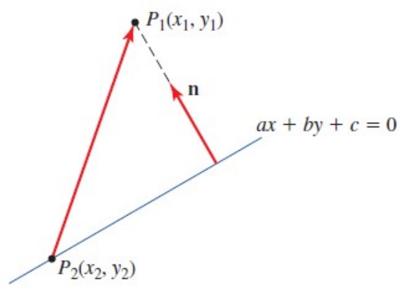
13. En la siguiente figura, halle los ángulos θ y ψ:



14. Dos preguntas:
    a. Demuestre que el vector $n = \langle a, b \rangle$ es ortogonal a la recta $ax + by + c = 0$.
    b. Usar el resultado de la parte **a.** para demostrar que **la distancia de un punto** $P_1(x_1, y_1)$ **a la recta** $ax + by + c = 0$, es:

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Una ayuda:



Sea un punto $P_2(x_2, y_2)$ de la recta, considerar la proyección escalar de $\overrightarrow{P_1P_2}$ sobre $\boldsymbol{n}$.

Prof. Luis Enrique Millán Arteaga
Buenos Aires, 18/04/2021