

Divisibilidad

Sean a y b números enteros. Se dice que a es divisible entre b si el residuo de $a \div b$ es cero.

Ejemplos

48 es divisible entre 16, porque $48 = (16)(3) + 0$, es decir,

$$\begin{array}{r} 3 \\ 16 \overline{)48} \\ \underline{0} \end{array} \longrightarrow \text{Residuo}$$

1 512 es divisible entre 42, porque $1\,512 = (42)(36) + 0$, entonces,

$$\begin{array}{r} 36 \\ 42 \overline{)1\,512} \\ \underline{252} \\ 0 \end{array} \longrightarrow \text{Residuo}$$

385 no es divisible entre 12, porque $385 = (12)(32) + 1$, es decir, el residuo es diferente de 0

$$\begin{array}{r} 32 \\ 12 \overline{)385} \\ \underline{25} \\ 1 \end{array} \longrightarrow \text{Residuo}$$

Múltiplo. El múltiplo de un número es el que lo contiene un número exacto de veces.

Ejemplos

36 es múltiplo de 9, porque lo contiene 4 veces.

240 es múltiplo de 12, porque lo contiene 20 veces.

Los múltiplos de un número k se obtienen al multiplicar k por los números naturales.

Ejemplos

Los múltiplos de 3 son: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ... , porque $3(1) = 3$, $3(2) = 6$, $3(3) = 9$, $3(4) = 12$, $3(5) = 15$, $3(6) = 18$, ...

Los múltiplos de 5 son: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, ... , porque $5(1) = 5$, $5(2) = 10$, $5(3) = 15$, $5(4) = 20$, $5(5) = 25$, $5(6) = 30$, ...

Los múltiplos de 8 son: 8, 16, 24, 32, 40, 48, ... , porque $8(1) = 8$, $8(2) = 16$, $8(3) = 24$, $8(4) = 32$, $8(5) = 40$, $8(6) = 48$, ...

Número compuesto. Es aquel que además de ser divisible entre sí mismo y la unidad, lo es entre otro factor.

Ejemplos

12 es número compuesto, porque tiene como divisores al: 1, 2, 3, 4, 6 y 12.

28 es número compuesto, porque tiene como divisores al: 1, 2, 4, 7, 14 y 28.

Criterios de divisibilidad

Nos permiten visualizar cuándo un número es divisible entre otro sin efectuar la división. A continuación se enuncian algunos de ellos:

- **Divisibilidad entre 2.** Un número entero es divisible entre 2 si termina en 0, 2, 4, 6 u 8, los números divisibles entre 2 se llaman pares.

Ejemplo

20, 12, 114, 336, 468 son divisibles entre 2, ya que terminan en 0, 2, 4, 6 y 8, respectivamente.

- **Divisibilidad entre 3.** Un número entero es divisible entre 3, si la suma de sus dígitos es un múltiplo de 3.

Ejemplos

51 es divisible entre 3, ya que $5 + 1 = 6$ y 6 es múltiplo de 3.

486 es divisible entre 3, ya que $4 + 8 + 6 = 18$ y 18 es múltiplo de 3.

- **Divisibilidad entre 4.** Un número entero es divisible entre 4, si sus últimos 2 dígitos son 0 o un múltiplo de 4.

Ejemplos

900 es divisible entre 4, porque termina en doble 0.

628 es divisible entre 4, porque 28 es múltiplo de 4.

- **Divisibilidad entre 5.** Un número entero es divisible entre 5, si su último dígito es 0 o 5.

Ejemplo

5 215 y 340 son divisibles entre 5, ya que terminan en 5 y 0 respectivamente.

- **Divisibilidad entre 6.** Un número entero es divisible entre 6, si a su vez es divisible entre 2 y 3.

Ejemplos

216 es divisible entre 2, ya que termina en 6, y es divisible entre 3, porque la suma de sus dígitos es múltiplo de 3. Por tanto, 216 es divisible entre 6.

9 000 es divisible entre 6, ya que es divisible entre 2 y 3.

- **Divisibilidad entre 7.** Un número entero es divisible entre 7, cuando al multiplicar el último dígito por 2 y restar el producto al número que se forma con los dígitos restantes, la diferencia es 0 o un múltiplo de 7.

Ejemplos

315 es divisible entre 7, ya que $5 \times 2 = 10$ y $31 - 10 = 21$ y 21 es múltiplo de 7.

147 es divisible entre 7, porque $7 \times 2 = 14$ y $14 - 14 = 0$.

- **Divisibilidad entre 8.** Un número entero es divisible entre 8, cuando sus 3 últimos dígitos de la derecha son 0 o forman un múltiplo de 8.

Ejemplos

6 000 es divisible entre 8, ya que sus últimos 3 dígitos son 0.

3 160 es divisible entre 8, porque los 3 últimos dígitos, 160, forman un múltiplo de 8.

- **Divisibilidad entre 9.** Un número entero es divisible entre 9, si la suma de sus dígitos es un múltiplo de 9.

Ejemplos

1 233 es divisible entre 9, ya que $1 + 2 + 3 + 3 = 9$, y 9 es múltiplo de 9.

6 786 es divisible entre 9, ya que $6 + 7 + 8 + 6 = 27$, y 27 es múltiplo de 9.

- **Divisibilidad entre 10.** Un número entero es divisible entre 10, si el último dígito es 0.

Ejemplos

360 es divisible entre 10, porque su último dígito es 0.

2 500 es divisible entre 10, ya que termina en 0.

- **Divisibilidad entre 11.** Un número entero es divisible entre 11, si el valor absoluto de la diferencia entre la suma de los dígitos en posición par y la suma de los dígitos en posición impar es 0 o múltiplo de 11.

Ejemplos

1 364 es divisible entre 11, ya que $|(3 + 4) - (1 + 6)| = |7 - 7| = |0| = 0$.

82 918 es divisible entre 11, porque $|(2 + 1) - (8 + 9 + 8)| = |3 - 25| = |-22| = 22$, y 22 es múltiplo de 11.

- **Divisibilidad entre 13.** Un número entero es divisible entre 13, si al multiplicar el último dígito por 9 y restar el producto al número que se forma con los dígitos restantes, la diferencia es 0 o múltiplo de 13.

Ejemplos

273 es divisible entre 13, ya que $27 - (3 \times 9) = 27 - 27 = 0$.

442 es divisible entre 13, porque $44 - (2 \times 9) = 44 - 18 = 26$, y 26 es múltiplo de 13.

- **Divisibilidad entre 17.** Un número entero es divisible entre 17, si al multiplicar el último dígito por 5 y restar el producto al número que se forma con los dígitos restantes, la diferencia es 0 o múltiplo de 17.

Ejemplos

357 es divisible entre 17, ya que $35 - (7 \times 5) = 35 - 35 = 0$.

493 es divisible entre 17, porque $49 - (3 \times 5) = 49 - 15 = 34$, y 34 es múltiplo de 17.

- **Divisibilidad entre 19.** Un número entero es divisible entre 19, si al multiplicar el último dígito por 17 y restar el producto al número que se forma con los dígitos restantes, la diferencia es 0 o múltiplo de 19.

Ejemplos

342 es divisible entre 19, ya que $34 - (2 \times 17) = 34 - 34 = 0$.

1 045 es divisible entre 19, porque $104 - (5 \times 17) = 104 - 85 = 19$, y 19 es múltiplo de 19.

EJERCICIO 20

De los siguientes números:

1. 105, 243, 73, 2 457, 3 589, ¿cuáles son divisibles entre 3?
2. 800, 112, 324, 1 426, 13 564, ¿cuáles son divisibles entre 4?
3. 105, 3 176, 8 910, 34 615, 217 583, ¿cuáles son divisibles entre 5?
4. 80, 78, 314, 768, 1 470, ¿cuáles son divisibles entre 6?
5. 175, 157, 576, 1 645, 3 528, ¿cuáles son divisibles entre 7?
6. 700, 3 128, 5 024, 9 000, 10 018, ¿cuáles son divisibles entre 8?
7. 225, 349, 1 008, 2 925, 23 619, ¿cuáles son divisibles entre 9?
8. 66, 111, 253, 935, 540, ¿cuáles son divisibles entre 11?
9. 195, 315, 540, 713, 1 105, ¿cuáles son divisibles entre 13?
10. 1 007, 1 062, 380, 719, 1 596, ¿cuáles son divisibles entre 19?

➤ Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Números primos

Un número primo sólo es divisible entre sí mismo y la unidad. El 1, por definición, no es primo.

Ejemplos

7 es número primo porque sólo es divisible entre sí mismo y la unidad.

15 no es número primo, ya que además de ser divisible entre sí mismo y la unidad, también lo es entre 3 y 5.

2 ●● Expresa 105 como el producto de sus factores primos.

Solución

105 se divide entre 3 y se continúa con el procedimiento.

$$\begin{array}{l} 105 \div 3 = 35 \\ 35 \div 5 = 7 \\ 7 \div 7 = 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 105 | 3 \\ \hline 35 | 5 \\ 7 | 7 \\ 1 | \end{array}$$

Por consiguiente, $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$

3 ●● Encuentra la factorización completa de 294.

Solución

294 se divide entre 2 y se continúa con el procedimiento.

$$\begin{array}{l} 294 \div 2 = 147 \\ 147 \div 3 = 49 \\ 49 \div 7 = 7 \\ 7 \div 7 = 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 294 | 2 \\ \hline 147 | 3 \\ 49 | 7 \\ 7 | 7 \\ 1 | \end{array}$$

Entonces, la factorización completa de 294 es $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$

EJERCICIO 21

Realiza la descomposición en sus factores primos de los siguientes números:

- | | | | | |
|--------|--------|----------|------------|------------|
| 1. 72 | 4. 576 | 7. 840 | 10. 2 376 | 13. 30 240 |
| 2. 96 | 5. 945 | 8. 2 310 | 11. 7 020 | 14. 16 200 |
| 3. 225 | 6. 210 | 9. 3 675 | 12. 29 400 | 15. 30 030 |

➤ Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Máximo común divisor (MCD)

Es el mayor de los divisores en común de 2 o más números.

Ejemplo

Los divisores de 18 y 24 son:

Divisores de 18: 1, 2, 3, 6, 9 y 18

Divisores de 24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24

Los divisores comunes son: 1, 2, 3 y 6, el mayor de los divisores en común es el 6

Por tanto, el máximo común divisor de 18 y 24 es 6

Para calcular el MCD de varios números se descomponen simultáneamente en sus factores primos, hasta que ya no tengan un divisor primo en común. Cuando los números sólo tienen a la unidad como común divisor, los números reciben el nombre de “primos relativos”.

EJEMPLOS

- 1 ●●● Encuentra el máximo común divisor de 48, 36 y 60.

Solución

Se descomponen simultáneamente en factores primos.

48	36	60	2
24	18	30	2
12	9	15	3
4	3	5	

4, 3 y 5, no tienen divisores primos en común, los números primos obtenidos se multiplican y el producto es el resultado.

$$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

Por consiguiente, el máximo común divisor de 48, 36 y 60 es 12.

- 2 ●●● Determina el MCD(72,180).

Solución

Se realiza la descomposición de 72 y 180, en sus factores primos.

72	180	2
36	90	2
18	45	3
6	15	3
2	5	

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$$

Por tanto, el MCD(72,180) = 36

- 3 ●●● Calcula el MCD(11,23).

Solución

Los números sólo tienen a la unidad como común divisor, lo cual quiere decir que 11 y 23 son primos relativos.

Por consiguiente, el MCD(11,23) = 1

- 4 ●●● Encuentra el máximo común divisor de 234, 390 y 546.

Solución

Se descomponen simultáneamente en factores primos.

234	390	546	2
117	195	273	3
39	65	91	13
3	5	7	

$$2 \cdot 3 \cdot 13 = 78$$

Por consiguiente, el máximo común divisor de 234, 390 y 546 es 78

EJERCICIO 22

Calcula el MCD de los siguientes números:

- | | | |
|-----------------|-------------------|------------------------|
| 1. 108 y 72 | 5. 27, 25 y 28 | 9. 308, 1 617 y 1 925 |
| 2. 270 y 900 | 6. 80, 675 y 900 | 10. 572, 4 719 y 7 865 |
| 3. 243 y 125 | 7. 216, 300 y 720 | |
| 4. 60, 72 y 150 | 8. 126, 210 y 392 | |

➤ Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Mínimo común múltiplo (mcm)

El mínimo común múltiplo es el menor de todos los múltiplos comunes de 2 o más números.

Ejemplo

Al obtener los múltiplos de 4 y 6 se tiene:

Múltiplos de 4: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, ...

Múltiplos de 6: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, ...

Los múltiplos comunes son: 12, 24, 36, 48, ...

El menor de todos los múltiplos en común es 12

Por tanto, el mínimo común múltiplo de 4 y 6 es 12

Para calcular el mcm de varios números se descomponen simultáneamente en factores primos hasta que los cocientes sean 1, si alguno de los números no es divisible entre el factor dado, se baja y se continúa hasta encontrar el factor primo que lo divida.

EJEMPLOS

Ejemplos

- 1 ●● Determina el mcm [28,42].

Solución

Se descomponen ambos números en factores primos

28	42	2	
14	21	2	
7	21	3	
7	7	7	
1	1		

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$$

Por consiguiente, el mcm [28,42] es 84

- 2 ●● Determina el mcm [25,30,150].

Solución

Se descomponen los números en factores primos

25	30	150	2
25	15	75	3
25	5	25	5
5	1	5	5
1	1	1	

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 150$$

Por tanto, el mcm [25,30,150] es 150

3 ●●● Calcula el mínimo común múltiplo de 36, 48 y 60.

Solución

Se descomponen simultáneamente en factores primos y los números primos que resultan se multiplican.

36	48	60	2	
18	24	30	2	
9	12	15	2	
9	6	15	2	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 720$
9	3	15	3	
3	1	5	3	
1	1	5	5	
1	1	1		

Entonces el mcm de 36, 48 y 60 es 720

EJERCICIO 23

Calcula el mcm de los siguientes números:

- 108 y 72
- 18 y 45
- 27 y 16
- 36, 20 y 90
- 45, 54 y 60
- 28, 35 y 63
- 20, 30 y 50
- 720, 600 y 540
- 220, 275 y 1 925
- 605, 1 925 y 2 695

➤ Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

- 1 ●●● En una reunión de academia del área de matemáticas se repartieron 18 bocadillos, 24 vasos con refresco y 12 rebanadas de pastel, ¿cuántos profesores asistieron a la reunión y qué cantidad de bocadillos, vasos con refresco y rebanadas de pastel recibió cada uno?

Solución

Se calcula el máximo común divisor de 18, 24 y 12

18	24	12	2	
9	12	6	3	
3	4	2		

$$\text{MCD}(18, 24, 12) = 2 \cdot 3 = 6$$

Por consiguiente, a la reunión de academia asistieron 6 profesores y a cada uno le tocó 3 bocadillos, 4 vasos con refresco y 2 rebanadas de pastel.

- 2 ●●● Tres escuelas deciden hacer una colecta de dinero entre sus alumnos para donar a varias instituciones de beneficencia. Si la primera junta 120 mil, la segunda 280 mil y la tercera 360 mil pesos, ¿cuál es la mayor cantidad que recibirá cada institución de tal manera que sea la misma y cuántas instituciones podrán ser beneficiadas?

Solución

Se calcula el máximo común divisor de 120, 280 y 360

120	280	360	2
60	140	180	2
30	70	90	2
15	35	45	5
3	7	9	

$$\text{MCD}(120, 280, 360) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 40$$

Cada institución recibirá 40 mil pesos y el número de instituciones beneficiadas será la suma de los residuos $3 + 7 + 9 = 19$.

Por tanto, 19 son las instituciones beneficiadas y cada una recibirá \$40 000.

- 3 ●● Al hacer el corte del día en un restaurante, el administrador hace 3 rollos de billetes de la misma denominación, en el primero hay \$1 350, en el segundo \$1 700 y en el tercero \$3 550, ¿cuántos billetes hay en cada rollo y de qué denominación son?

Solución

Se calcula el máximo común divisor de 1 350, 1 700 y 3 550

1 350	1 700	3 550	2
675	850	1 775	5
135	170	355	5
27	34	71	

$$\text{MCD}(1\,350, 1\,700, 3\,550) = 2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$$

La denominación de cada billete es de \$50, en el primer rollo hay 27 billetes, en el segundo 34 y en el tercero 71.

- 4 ●● Una persona viaja a la Ciudad de México cada 12 días, otra lo hace cada 20 días y una tercera cada 6 días. Si hoy han coincidido en estar las 3 en la ciudad, ¿dentro de cuántos días, como mínimo, volverán a coincidir?

Solución

Se calcula el mínimo común múltiplo de 12, 20 y 6

12	20	6	2
6	10	3	2
3	5	3	3
1	5	1	5
1	1	1	

El mínimo común múltiplo es: $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.

Por tanto, el mínimo de días que transcurrirán para que las 3 personas coincidan en la Ciudad de México es de 60 días.

- 5 ●● Un médico receta a un paciente tomar una pastilla cada 6 horas y un jarabe cada 8 horas. Si al iniciar el tratamiento toma la pastilla y el jarabe a la misma hora, ¿después de cuántas horas volverá a tomar ambos medicamentos al mismo tiempo?

Solución

Se calcula el mínimo común múltiplo de 6 y 8

6	8	2
3	4	2
3	2	2
3	1	3
1	1	

El mínimo común múltiplo es $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$.

Entonces transcurrirán 24 horas para que el paciente tome los medicamentos juntos.

EJERCICIO 24

Resuelve las siguientes aplicaciones:

1. Tres cajas contienen, cada una, 12 kilogramos de carne de res, 18 de carne de cerdo y 24 de carne de pollo. La carne de cada caja está contenida en bolsas del mismo tamaño y con la máxima cantidad de carne posible, ¿cuánto pesa cada bolsa y cuántas hay por caja?
2. Gerardo fabrica un anuncio luminoso con focos de color rojo, amarillo y verde, de tal manera que los focos rojos enciendan cada 10 segundos, los amarillos cada 6 y los verdes cada 15, si al probar el anuncio encienden todos los focos a la vez, ¿después de cuántos segundos volverán a encender juntos?
3. Un ebanista quiere cortar en cuadros lo más grande posible una plancha de madera de 300 cm de largo y 80 cm de ancho, ¿cuál debe ser la longitud de los lados de cada cuadro?
4. Un ciclista da una vuelta a una pista en 6 minutos, mientras que otro tarda 4 minutos. Si ambos inician sus recorridos juntos, ¿después de qué tiempo volverán a encontrarse y cuántas vueltas habrán dado cada uno?
5. Una llave vierte 4 litros de agua por minuto, otra 3 y una tercera, 8. ¿Cuál es la cantidad menor de litros que puede tener un pozo para que se llene en un número exacto de minutos por cualquiera de las 3 llaves?
6. Tres rollos de tela de 30, 48 y 72 metros de largo se quieren cortar para hacer banderas con pedazos iguales y de mayor longitud, ¿cuál será el largo de cada pedazo?
7. Un parque de diversiones quiere construir balsas con 3 troncos de palmera, los cuales miden 15, 9 y 6 metros, ¿cuánto deben medir los pedazos de tronco si tienen que ser del mismo tamaño?, ¿cuántos pedazos de troncos saldrán?
8. El abuelo Eduardo da dinero a 3 de sus hijos para que lo repartan a los nietos de manera equitativa. A su hijo Rubén le da \$5 000, a su hijo Anselmo le da \$6 000, mientras que a Horacio sólo \$3 000, ¿cuál es la mayor cantidad de dinero que podrán darle a sus hijos y cuántos nietos tiene Eduardo?
9. Fabián tiene un reloj que da una señal cada 18 minutos, otro que da una señal cada 12 minutos y un tercero cada 42 minutos. A las 11 de la mañana los 3 relojes han coincidido en dar la señal, ¿cuántos minutos como mínimo han de pasar para que vuelvan a coincidir?, ¿a qué hora volverán a dar la señal otra vez juntos?
10. Daniel y Omar tienen 60 canicas azules, 45 verdes y 90 amarillas; quieren hacer costalitos iguales con el número mayor de canicas sin que sobren, ¿cuántos costalitos pueden hacer y cuántas canicas tendrá cada uno?
11. Ricardo tiene en su papelería los lapiceros en bolsas. En la caja "A" tiene bolsitas de 30 lapiceros cada una y no sobran, en la caja "B" tiene bolsitas de 25 lapiceros cada una y tampoco sobran. El número de lapiceros que hay en la caja "A" es igual al que hay en la caja "B", ¿cuántos lapiceros como mínimo hay en cada caja?
12. Rosa tiene cubos de color lila de 8 cm de arista y de color rojo de 6 cm de arista. Ella quiere apilar los cubos en 2 columnas, una de cubos de color lila y otra de color rojo, desea conseguir que ambas columnas tengan la misma altura, ¿cuántos cubos, como mínimo, tiene que apilar de cada color?
13. Tres amigos pasean en bicicleta por un camino que rodea a un lago, para dar una vuelta completa, uno de ellos tarda 10 minutos, otro tarda 15 y el tercero, 18 minutos. Parten juntos y acuerdan interrumpir el paseo la primera vez que los 3 pasen simultáneamente por el punto de partida, ¿cuánto tiempo duró el paseo?, ¿cuántas vueltas dio cada uno?
14. En 1994 se realizaron elecciones para presidente y para jefe de gobierno, el periodo presidencial es de 6 años y el de jefe de gobierno de 4. ¿En qué año volverán a coincidir las elecciones?
15. El piso de una habitación tiene 425 cm de largo por 275 cm de ancho, si se desea poner el menor número de mosaicos cuadrados de mármol, ¿cuáles serán las dimensiones máximas de cada mosaico?, ¿cuántos mosaicos se necesitan?

➤ Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente