I Distribuciones de probabilidades de variables discretas

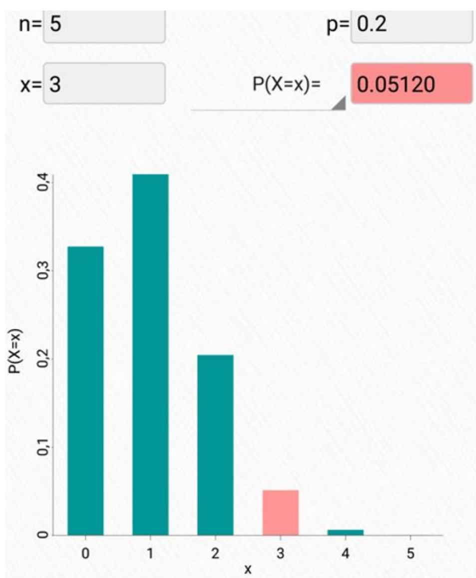
Ejemplos

La probabilidad de que el comprador de un osciloscopio haga uso del service dentro del plazo de garantía es 0,2. Para los 5 osciloscopios que cierta empresa ha vendido independientemente a 5 compradores este mes:

¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de los compradores hagan uso de la garantía?

$P(X=3)=\binom{5}{3}0{,}2^3(1-0{,}2)^{5-3}= 10*0{,}2^3(1-0{,}2)^{5-3}=0{,}0512$

$$\binom{5}{3} = \frac{5*4*3*2}{3*2*2} = 10$$



¿Cuál es la probabilidad de que 3 o más compradores hagan uso de la garantía?

$P(X\geq3)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)= 0{,}0512+0{,}0064+0{,}00032$

$P(X=4)=\binom{5}{4}0{,}2^4(1-0{,}2)^{5-4}=5*0{,}0016*0{,}8=0{,}0064$

$P(X=5)=\binom{5}{5}0{,}2^5(1-0{,}2)^{5-5}=1*0{,}00032*1=0{,}00032$

$P(X\geq3)=0{,}05792$

Los cuatro motores de un avión cuatrimotor (dos en cada ala) fallan, cada uno con probabilidad 0,04, en forma independiente, durante un trayecto de 20.000

kilómetros. El avión no entra en emergencia mientras funcionen sin fallar por lo menos dos motores:

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el avión no entre en emergencia?
2. ¿Cuál será esa probabilidad si se agrega la restricción de que, al menos debe funcionar un motor en cada ala?

Solución

Ítem A

Para responder a la pregunta "¿Cuál es la probabilidad de que el avión no entre en emergencia?", vamos a definir una variable binomial.

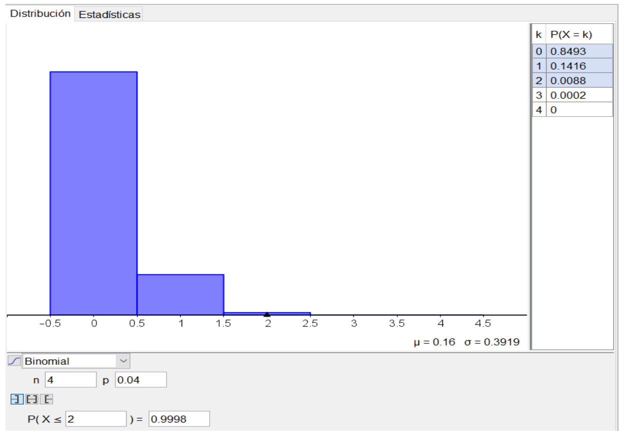
XX: número de motores que fallan de un total de cuatro motores

X∼Binomial(n=4,p=0,04)X∼Binomial(n=4,p=0,04)
Que el avión no entre en emergencia es equivalente a que la cantidad de motores que fallan sea menor o igual a dos.

P(noentreenemergencia)=P(X≤2)
P(X≤2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)
Se pueden calcular las probabilidades puntuales usando la fórmula de probabilidad puntual de una variable binomial:

P(X=0)= 0,8493

$P(X=1)=(4^1).(0,04)^1.(0,96)^3 \cong 0,1416$ $P(X=2)=(4^0).(0,04)^2.(0,96)^2 \cong 0,0088$
$P(X \leq 2) \cong 0,8493+0,1416+0,0088 \cong 0,9998$.También se puede usar GeoGebra para .calcular la probabilidad binomial:



En [Distribución Binomial: Ejercicios Resueltos (Parte 1) - PROBA FÁCIL (probafacil.com)]

Ítem B

Ahora se agrega la restricción de que para que el avión no entre en emergencia debe funcionar al menos un motor en cada ala.

Llamemos AA al suceso de que funciona al menos un motor en el ala izquierda y BB al suceso de que funciona al menos un motor en el ala derecha.
Otra vez vamos a definir una variable binomial que nos ayude a calcular la probabilidad del suceso.

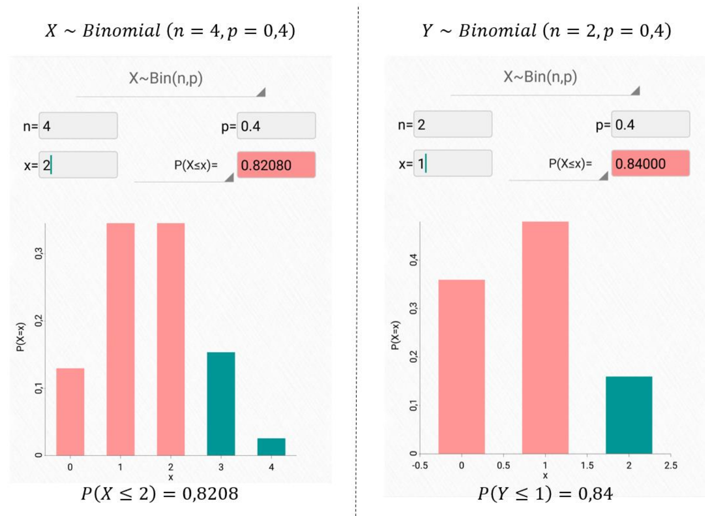
Sea YY el número de motores que funcionan bien en el ala izquierda.
La distribución de YY es:
Y∼Bi(n=2;p=0,04)Y∼Bi(n=2;p=0,04)
P(A)=P(Y≤1)=0,9984P(A)=P(Y≤1)=0,9984
Pero cómo los motores fallan con la misma probabilidad independientemente del ala del avión entonces:

P(B)=0,9984 P(B)=0,9984
Es posible expresar al suceso de que el avión no entra en emergencia cómo la intersección de A y B:

No entra en emergencia=A∩B No entra en emergencia=A∩B
Cómo los sucesos AA y BB son independientes:
$P(A \cap B)=P(A).P(B)=0{,}9984^2=0{,}9968$
Ítem a
Vamos a definir variables binomiales que nos ayuden a responder la pregunta.
Sean:XX: número de motores que fallan de un total de cuatro motores.

$X \sim Binomial(n=4,p=0,4)$

Y:Y: número de motores que fallan de un total de dos motores
$Y \sim Binomial(n=2,p=0,4)$
La probabilidad de que un avión de cuatro motores termine bien el vuelo es: $P(X\leq 2)=0,8208P(X\leq 2)=0,8208$ .La probabilidad de que un avión de dos motores termine bien el vuelo es: $P(Y\leq 1)=0,84P(Y\leq 1)=0,84$ .A continuación una comparación de las distribuciones de X y de Y:



Las distribuciones de X y de Y. en [Distribución Binomial: Ejercicios Resueltos (Parte 1) - PROBA FÁCIL (probafacil.com)]
El avión de dos motores tiene más probabilidad de terminar el vuelo exitosamente.
Ítem b :Se trata el mismo problema, pero con otra probabilidad de éxito.

Probabilidad de que el avión de cuatro motores termine bien el vuelo:

$P(X'\leq 2|n=4,p=0,2)=0,9728P(X'\leq 2|n=4,p=0,2)=0,9728$
Probabilidad de que el avión de cuatro motores termine bien el vuelo:

$P(Y'\leq 1|n=2,p=0,2)=0,96P(Y'\leq 1|n=2,p=0,2)=0,96$
En este caso tiene mejor probabilidad de terminar el vuelo exitosamente el avión de cuatro motores.

Ítem C

Que sea indiferente volar en un avión de dos o cuatro motores, es equivalente a afirmar que la probabilidad de que el vuelo sea exitoso es la misma:

$P(X\leq 2)=P(Y\leq 1)P(X\leq 2)=P(Y\leq 1)$
$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=P(Y=0)+P(Y=1)$
Cómo no conocemos la probabilidad elemental de éxito (el parámetro pp) usamos la fórmula de probabilidad puntual para obtener una ecuación de incógnita pp:
$(4^0).p^0.(1-p)^4+(4^1).p^1.(1-p)^3+(4^2).p^2.(1-p)^2(4^0).p^0.(1-p)^4+(4^1).p^1.(1-p)^3+(4^2).p^2.(1-p)^2$
$=(2^0).p^0.(1-p)^2+(2^1).p^1.(1-p)^2=(2^0).p^0.(1-p)^2+(21).p^1.(1-p)^2$
Resolviendo la ecuación se encuentran los siguientes valores posibles para pp:
$p=0 \vee p=1 \vee p=1/3$

Notemos que los valores p=0 y p=1 eran obvios. Si los motores fallan siempre (p=1)(p=1) da igual en qué tipo de avión se viaje. Si los motores no fallan nunca (p=0)(p=0), también da igual en qué tipo de avión se viaje.

Ejemplo 2
En una clínica el promedio de atención es 16 pacientes por 4 horas, encuentre la probabilidad que en 30 minutos se atiendan menos de 3 personas y que en 180 minutos se atiendan 12 pacientes.

Usamos la distribución de Poisson

$$P=(x=k)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}=\frac{e^{-\lambda}(\ \lambda)^k}{k!}$$

a.-La probabilidad que en 30 minutos se atiendan menos de 3 personas

$$\lambda=16\frac{pacientes}{4\ horas}\quad \lambda=4\frac{pacientes}{1\ hora}\quad \lambda=2\frac{pacientes}{media\ hora}$$

$$P=(x<3)=P(x=0)+P(x=1)+P(x=2)$$

$$P=(x<3)=\frac{e^{-2}(2)^0}{0!}+\frac{e^{-2}(2)^1}{1!}+\frac{e^{-2}(2)^2}{2!}$$

$$P=(x<3)=0.1353+0.2707+0.2707$$

Resultado final:

$$P=(x<3)=0.6767$$

Ejercicios

1.-Supóngase que la producción de un día de 850 piezas manufacturadas contiene 50 piezas que no cumplen con los requerimientos del cliente. Se seleccionan del lote dos piezas al azar y sin reemplazo. Sea la variable aleatoria X igual al número de piezas de la muestra que no cumplen. ¿Cuál es la función de distribución acumulada de X?

2.- Se lanza un dado equilibrado produciendo el espacio equiprobable S= {1,2,3,4,5,6} Sea X el doble del número que aparece. Encuentre la distribución f, la media μx, la varianza σx^2 y la desviación estándar σx de X.

3 .-Una muestra aleatoria con reposición de tamaño n=2 se selecciona del conjunto {1,2,3} produciendo el espacio equiprobable de 9 elementos. S={(1,1),(1,2),(1.3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)} Sea X la suma de los dos números. (a) Encuentre la distribución f de X. (b) Encuentre el valor esperado E(X).

4 .- Una caja contiene 8 termostatos de los cuales están 3 están defectuosos. Se selecciona uno de la caja y se prueba. Si este sale defectuoso se selecciona y se prueba otro, hasta que se obtiene uno no defectuoso. Encuentre el número esperado E de termostatos seleccionados.

5.- Se lanza un dado equilibrado produciendo el espacio equiprobable S= {1,2,3,4,5,6} Sea X el doble del número que aparece. Encuentre la distribución f, la media μx, la varianza σx^2 y la desviación estándar σx de X.

6.- Una muestra con reposición de tamaño n=2 se selecciona aleatoriamente de los números 1 al 5. Esto produce entonces el espacio equiprobable S conformando por todos los 25 pares de ordenados (a,b) de números del 1 al 5. Es decir, S={(1,1),(1,2),….,(1,5),(2,1),….,(5,5)} Sea X=0 si el primer número es par y X=1 de lo contrario; sea Y=1 si el segundo número es impar y Y=0 de lo contrario. (a) Encuentre las distribuciones de X y Y. (b) Encuentre la distribución conjunta de X y Y. (c) Determine si X y Y son independientes.

SOLUCIONES :

1.- La pregunta puede contestarse encontrando primero la función de densidad de probabilidad de X.

P(x=0)= (800/850)(799/849)=0,886

P(x=1)=2(800/850)(50/849)=0,111

P(x=2)=(50/850)(49/849)=0,003

Por lo tanto, F(0)=P(x 0 ≤)=0.886 F(1)=P(x 1 ≤)=0.886+0,111=0,997

F(2)=P(x≤2)=1

2.-

Aquí X(1)=2, X(2)=4, X(3)=6, X(4)=8, X(5)=10, X(6)=12. También, cada número tiene probabilidad 1/6. Por tanto, la siguiente es la distribución f de X:

x	2	4	6	8	10	12
f(x)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

En consecuencia,

$$\mu_x = E(X) = \sum x_i f(x_i) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{6}\right) + 4\left(\frac{1}{6}\right) + 6\left(\frac{1}{6}\right) + 8\left(\frac{1}{6}\right) + 10\left(\frac{1}{6}\right) + 12\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{42}{6} = 7$$

$$E(X^2) = \sum x_i^2 f(x_i) =$$

$$= 4\left(\frac{1}{6}\right) + 16\left(\frac{1}{6}\right) + 36\left(\frac{1}{6}\right) + 64\left(\frac{1}{6}\right) + 100\left(\frac{1}{6}\right) + 144\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{354}{6} = 60.7$$

Entonces,

$$\sigma_x^2 = \mathrm{var}(X) = E(X^2) - \mu_x^2 = 60.7 - (7)^2 = 11.7$$

$$\sigma_x = \sqrt{\mathrm{var}(X)} = \sqrt{11.7} = 3.4$$

3.- (a) La variable aleatoria X asume los valores 2,3,4,5,6, es decir, Rx={2,3,4,5,6}. Se calcula la distribución f de X: (i) Un punto (1,1) tiene suma 2; donde f(2)=1/9. (ii) Dos puntos (1,2) y (2,1) tienen suma 3; de donde f(3)=2/9. (iii) Tres puntos (1,3),(2,2) y (1,3) tienen suma 4; de donde f(4)=3/9. (iv) Dos puntos, (2,3),(3,2) tienen suma 5; de donde f(5)=2/9. (v) Un punto (3,3) tiene suma 6; de donde f(6)=1/9.

Por tanto, la distribución f de X es la siguiente:

x	2	3	4	5	6
f(x)	1/9	2/9	3/9	2/9	1/9

(b) Se obtiene el valor esperado E(X) multiplicando cada valor de x por su probabilidad y tomando la suma. Por tanto, $E(X) = 2\left(\frac{1}{9}\right) + 3\left(\frac{2}{9}\right) + 4\left(\frac{3}{9}\right) + 5\left(\frac{2}{9}\right) + 6\left(\frac{1}{9}\right)$

4,-Escribiendo D para significar defectuoso y N para no defectuoso, el espacio muestral S tiene los cuatro elementos N. DN, DDN, DDDN con las posibilidades respectivas

$$\frac{5}{8}, \qquad \frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7} = \frac{15}{56}, \qquad \frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5}{56}, \qquad \frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{5} = \frac{1}{56}$$

El número X de termostatos escogidos tiene los valores

X(N)=1, X(DN)=2, X(DDN)=3, X(DDDN)=4

con las probabilidades anteriores respectivas. De donde

$$E(X) = 1\left(\frac{5}{8}\right) + 2\left(\frac{15}{56}\right) + 3\left(\frac{5}{56}\right) + 4\left(\frac{1}{56}\right) = \frac{3}{2} = 1.5$$

5.-

Aquí X(1)=2, X(2)=4, X(3)=6, X(4)=8, X(5)=10, X(6)=12. También, cada número tiene probabilidad 1/6. Por tanto, la siguiente es la distribución f de X:

x	2	4	6	8	10	12
f(x)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

En consecuencia,

$\mu_x = E(X) = \sum x_i f(x_i) =$

$$= 2\left(\frac{1}{6}\right) + 4\left(\frac{1}{6}\right) + 6\left(\frac{1}{6}\right) + 8\left(\frac{1}{6}\right) + 10\left(\frac{1}{6}\right) + 12\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{42}{6} = 7$$

$E(X^2) = \sum x_i^2 f(x_i) =$

$$= 4\left(\frac{1}{6}\right) + 16\left(\frac{1}{6}\right) + 36\left(\frac{1}{6}\right) + 64\left(\frac{1}{6}\right) + 100\left(\frac{1}{6}\right) + 144\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{354}{6} = 60.7$$

Entonces,

$\sigma_x^2 = \mathrm{var}(X) = E(X^2) - \mu_x^2 = 60.7 - (7)^2 = 11.7$

$\sigma_x = \sqrt{\mathrm{var}(X)} = \sqrt{11.7} = 3.4$

6.-

(a) Hay 10 puntos muestrales en los cuales la primera entrada es par, es decir, donde a=2 o 4 y b=1,2,3,4,5

Por tanto, P(x=0)=10/25=0.4 y entonces P(x=1)=0.6. Hay 15 puntos muestrales en los cuales la segunda entrada es impar, es decir,

a= 1,2,3,4,5 y b=1,3,5

Por consiguiente, $P(Y=1)=15/25=0.6$ y entonces $P(Y=0)=0.4$. Por esta razón las distribuciones de X y Y son las siguientes:

x	0	1
P(x)	0.4	0.6

y	0	1
P(y)	0.4	0.6

(Observe que X y Y están distribuidas idénticamente.)

(b) Para la distribución conjunta de X y Y se tiene

$P(0,0) = P(a\text{ par}, b\text{ par}) = P\{(2,2),(2,4),(4,2),(4,4)\}=4/25=0.16$

$P(0,1) = P(a\text{ par}, b\text{ impar}) = P\{(2,1),(2,3),(2,5),(4,1),(4,3),(4,5)\}=6/25=0.24$

En forma similar $P(1,0)=6/25=0.24$ y $P(1,1)=9/25=0.36$. Por lo cual, la Fig. 1 da la distribución conjunta de X y Y.

Y \ X	0	1	Suma
0	0.16	0.24	0.4
1	0.24	0.36	0.6
Suma	0.4	0.6	

7.-Supongamos que la probabilidad de tener una unidad defectuosa en una línea de ensamblaje es de 0.05. Si el conjunto de unidades terminadas constituye un conjunto de ensayos independientes: 1. ¿cuál es la probabilidad de que entre diez unidades dos se encuentren defectuosas? 2. ¿y de que a lo sumo dos se encuentren defectuosas? 3. ¿cual es la probabilidad de que por lo menos una se encuentre defectuosa?

8.- El gerente de un restaurante que sólo da servicio mediante reservas sabe, por experiencia, que el 20% de las personas que reservan una mesa no asistirán. Si el restaurante acepta 25 reservas pero sólo dispone de 20 mesas, ¿cuál es la probabilidad de que a todas las personas que asistan al restaurante se les asigne una mesa?

9-. Una empresa electrónica observa que el número de componentes que fallan antes de cumplir 100 horas de funcionamiento es una variable aleatoria de Poisson. Si el número promedio de estos fallos es ocho, 1. ¿cuál es la probabilidad de que falle un componente en 25 horas? 2. ¿y de que fallen no más de dos componentes en 50 horas? 3. ¿cuál es la probabilidad de que fallen por lo menos diez en 125 horas?

10.- Se ha encontrado que el número de fallas de transistores en computador electrónico en cualquier período de una hora puede considerarse como una variable aleatoria que tiene una distribución de Poisson con parámetro **0.1** (Es decir, en promedio hay una falla de un transistor cada 10 horas). Se inicia un proceso que necesita **20 horas** de tiempo de cómputo.

a) Encuentra la probabilidad de que el proceso anterior pueda ser completado exitosamente sin una falla. (Se supone que la máquina llega a ser inoperante sólo si fallan 3 ó más transistores).

b) Lo mismo que en a) excepto que la máquina llega a ser inoperante si fallan 2 ó mas transistores.

11.- Sean λ y η las variables aleatorias que cuentan el número de veces que sale 1 y 6, respectivamente, en 5 lanzamientos de un dado. ¿Son λ y η independientes?.

12.-Cada muestra de aire tiene 10% de posibilidades de contener una molécula rara particular. Suponga que las muestras son independientes con respecto a la presencia de la
molécula rara. Encuentre la probabilidad de que en las siguientes 18 muestras, exactamente 2 contengan la molécula rara.

13. - Un avión de alto rendimiento contienen tres computadoras idénticas. Se utiliza únicamente una para operar el avión; las dos restantes son repuestos que pueden activarse en caso de que el sistema primario falle. Durante una hora de operación la probabilidad de que una falle en la computadora primaria(o de cualquiera de los sistemas de repuesto activados) es 0,0005. Suponiendo que cada hora representa un ensayo independiente, (a) ¿Cuál es el tiempo promedio para que fallen las tres computadoras? (b) ¿Cuál es la probabilidad de que las tres computadoras fallen en un vuelo de 5 horas?

14.-La duración en horas de una máquina (tiempo útil antes de la primera falla) sigue una distribución exponencial de promedio de 1600 horas .Si se pone en funcionamiento la máquina , ¿ Cuál es la probabilidad de que dure más de 4000 horas? .

15.- La contaminación constituye un problema en la fabricación de discos de almacenamiento óptico. El número de partículas de contaminación que ocurre en un disco óptico tiene una distribución de Poisson y el número promedio de partículas por centímetro cuadrado de superficie del disco es 0.1. El área de un disco bajo estudio es 100 centímetros cuadrados. (a) Encuentre la probabilidad de que ocurran 12 partículas en el área del disco bajo estudio. (b) La probabilidad de que ocurran cero partículas en el área del disco bajo estudio (c) Determine la probabilidad de que 12 o menos partículas ocurran en el área del disco bajo estudio

16.- El tiempo de reparación de unas máquinas de escribir tiene una distribución aproximadamente exponencial, con media 22 minutos. 1. Hallar la probabilidad de que el tiempo de reparación sea menor que diez minutos. 2. El costo de reparación es de 2000 pts. por cada media hora o fracción. ¿Cuál es la probabilidad de que una reparación cueste 4000 pts.? 3. Para efectuar una programación, ¿cuanto tiempo se debe asignar a cada reparación para que la probabilidad de que cualquier tiempo de reparación mayor que el tiempo asignado sea solo de 0.1?

17.- En un proceso de fabricación de tornillos se sabe que el 2% son defectuosos. Los empaquetamos en cajas de 50 tornillos. Calcula la probabilidad de que en una caja haya este número de tornillos defectuosos: a) Ninguno. b) Uno. c) Más de dos. ¿Cuántos tornillos defectuosos habrá, por término medio, en cada caja?

18.- Los mensajes que llegan a una computadora utilizada como servidor lo hacen de acuerdo con una distribución de Poisson con una tasa promedio de 0.1 mensajes por minuto. a) ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen como mucho 2 mensajes en una hora? b) Determinar el intervalo de tiempo necesario para que la probabilidad de que no llegue ningún mensaje durante ese lapso de tiempo sea 0.8.

19.- Un operador elige al azar entre “n” chips de una caja. La probabilidad de que sea defectuoso es 0,2. a) Si n = 7, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 3 chips sean defectuosos? b) Si n = 50, ¿cuál es la probabilidad de tener entre 9 y 12 chips defectuosos? c) ¿Cuántos chips hay en la caja si la varianza es 32?

20 .- Una empresa electrónica observa que el número de componentes que fallan antes de cumplir 100 horas de funcionamiento es una variable aleatoria de Poisson. Si el número promedio de estos fallos es ocho: a)¿cuál es la probabilidad de que falle un componente en 25 horas? b)¿y de que fallen no más de dos componentes en 50 horas? c)¿cuál es la probabilidad de que fallen por lo menos diez en 125 horas?

21.- En una heladería los clinetes ingresan en un promedio de 10 por cada hora ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen al menos 5 clientes?

22.- Con la finalidad de revisar el pulido de un lente , se estipula que si el lente presente 3 o más manchas es defectuoso .La tasa media de defectuoso es de de 2 defectos por cm2 .Determinar la probabilidad que un lente de 4 cm2 al ser revisado n se catalogue como defectuoso

SOLUCIONES

7.- Sea X i una variable aleatoria que representa el estado de una unidad terminada en la línea de ensamblaje en el momento i, siendo Xi= 1 si la unidad es defectuosa y Xi =0 en caso contrario. La variable X sigue una distribución Bernoulli con parámetro p=0.05, de acuerdo con el dato inicial del problema. Además, nótese que un conjunto de unidades terminadas constituye un conjunto de ensayos independientes, por lo que el número de unidades defectuosas de un total de n unidades terminadas (X 1………. X n), esto sigue una distribución binomial de parámetros n y p=0,05. Hechas estas consideraciones iniciales, procedemos a resolver el problema: 1. Procedamos a calcular:

1. Procedamos a calcular:

$$P(\eta_{10,0'05} = 2) = \binom{10}{2} * 0'05^{2} * (1-0,05)^{8} = 0,0476$$

2. Se tiene que:

$$P(\eta_{10,0'05} \leq 2) = \binom{10}{i} * 0'05^{i} * (1-0,05)^{10-i} = 0,9984$$

3. Por último:

$$P(\eta_{10,0'005} \geq 1) = 1 - P(\eta_{10,0'05} = 0) = 1 - \binom{10}{0} * 0,05^{0} * (1-0,05)^{10-0} = 1 - 0,5987 = 0,4013$$

8.- Representemos por la variable aleatoria
X la decisión de asistir (X = 0) o no (X = 1) finalmente al restaurante por parte de una persona que ha hecho una reserva. Esta variable sigue una distribución de Bernoulli de parámetro p = 0,2, de acuerdo con el enunciado del ejercicio. Suponiendo que las distintas reservas son independientes entre sí, se tiene que, de un total de n reservas (δ 1…. δ n), el número de ellas que acuden finalmente al restaurante es una variable aleatoria Yn =∑ = n i 1 1 δ , con distribución binomial de parámetros n y p=0,2. En el caso particular del problema, n=25. Entonces, para aquellas personas que asistan al restaurante de las 25 que han hecho la reserva puedan disponer de una mesa, debe ocurrir que acudan 20 o menos. Así se tiene

$$P(X \leq 20) = \sum_{i=0}^{20} \binom{25}{i} * 0,2^{i} * (1-0,2)^{25-i} = 0,5799$$

que:

9.- Las variables λ y η siguen una distribución binomial de parámetros n=5 y p=1/6. Veamos mediante un contraejemplo, que λ y η no son independientes. Por un lado se tiene que:

1. Considerando que se cumplen ciertas condiciones de regularidad, podemos asumir que una variable η que mide el número de componentes que fallan antes de cumplir 25 horas de funcionamiento sigue una distribución de Poisson con parámetro $\lambda_{\eta} = E[\eta] = 8{=}4 = 2$.

Por lo tanto, la probabilidad deseada es la siguiente:

$$P = (\eta = 1) = \frac{2^1}{1!} * e^{-2} = 0{,}27067$$

2. Análogamente, definimos una variable aleatoria U con distribución de Poisson de parámetro $\lambda_U = 8{=}2 = 4$, que mide el número de componentes que fallan antes de cumplir las 50 horas de funcionamiento. Se tiene entonces que:

$$P(U \le 2) = \sum_{i=0}^{2} \frac{4^i}{i!} * e^{-4} = 0{,}2381$$

3. De la misma forma, definiendo una variable aleatoria V con distribución de Poisson de parámetro $\lambda_V = 10$, se obtiene:

$$P(V \ge 10) = 1 - P(V < 10) = 1 - \sum_{i=0}^{10} \frac{10^i}{i!} * e^{-10} = 0{,}41696$$

10.-

$$P = (\lambda = 0, \eta = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^5,$$

pero

$$P(\lambda = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^5 = P(\eta = 0)$$

$$P = (\lambda = 0, \eta = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^5 \ne P(\lambda = 0) * P(\eta = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^{10},$$

concluyéndose así que las variables no son independientes.

11.-
Si X=número de muestras de aire que contiene la molécula rara en la siguientes 18 muestras analizadas. Entonces X es una variable aleatoria binomial con p=0,1 y n=18. P(x=2)=0.281

13.-
X asigna el número de horas hasta que los tres sistemas fallen, y sea que X1, X2 y X3 asignen el número de horas de operación antes de una falla de la primera, la segunda y la tercera computadoras usadas, respectivamente. Entonces, X=X1+X2+X3. Además, se supone que las horas comprenden ensayos independientes con la probabilidad con la probabilidad constante de falla p=0.0005 y n=3. En consecuencia,

E(X)= p para cada computadora 1h/0.0005 =2000 horas significa que hay un promedio de no funcionamiento cada 2000 horas por computadora; las tres son independientes por lo tanto
P(X1UX2UX3)=P(X1)+P(X2)+P(X3)=2000+2000+2000=6000

¿Cuál es la probabilidad de que las tres computadoras fallen en un vuelo de 5 horas? La probabilidad pedida es P(x≤5)y es P(x≤5)=P(x=3)+P(x=4)+P(x=5)= $1{,}249 \cdot 10^{-10}$

14- El modelo de función exponencial es

$$f(x) = P(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Su función de distribución acumulada es:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$$

Donde e representa el número e.

El valor esperado y la varianza de una variable aleatoria X con distribución exponencial son:

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}, \qquad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

En nuestro ejemplo sea X duración en horas ,X=4000,y E(x)=1600 implica λ =1/1600,

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$P(X \leq 4000) = 1 - e^{-\frac{4000}{1600}} = 0.018$$

$$P(X > 4000) = 1 - 0.018 = 0.082$$

15.-
Sea que x denote el número de partículas en el área de un disco bajo estudio.
Puesto que el número promedio de partículas es 0.1 partículas por cm^2 .
E(x)=100 cm^2 x0.1 partículas/ cm^2 = 10 partículas
Aplico una distribución de Poisson

(a) $P(x=12) = \dfrac{e^{-10} 10^{12}}{12!} = 0.095$

(b) La probabilidad de que ocurran cero partículas en el área del disco bajo estudio es

$P(x=0) = e^{-10} = 4.54 \times 10^{-5}$

(c) Determine la probabilidad de que 12 o menos partículas ocurran en el área del disco bajo estudio. La probabilidad es

$$P(X \leq 12) = P(x=0) + P(x=1) + \ldots + P(x=12) = \sum_{i=0}^{12} \frac{e^{-10} 10^i}{i!}$$

16.- Definamos una variable aleatoria x que representa el tiempo de reparación (en minutos) de las máquinas y sigue una distribución exponencial de parámetro λ =1/22

1). La probabilidad de que un tiempo de reparación sea menor que diez minutos es:

$$P\,(x \prec 10) = \int_0^{10} \frac{1}{22} \cdot e^{-x/22}\, \theta x = -e^{-x/22} \Big|_0^{10} = 1 - e^{-5/11}$$

2). De acuerdo con el enunciado, para un tiempo de reparación dado, el costo de reparación se obtendrá a partir del número total de fracciones de media hora y el conjunto de minutos restantes, inferiores a 30. (Todos, este ultimo inclusive, se cobran a 2000 pesetas). Teniendo esto en cuenta, se observa que una reparación costara 4000 pesetas siempre que su duración sea superior a 30 minutos e inferior o igual a 60 minutos (y así cada fracción de la segunda media hora se cobrará como una media hora entera). Así:

$$P\,(30 \prec x \leq 60) = \int_{30}^{60} \frac{1}{22} \cdot e^{-x/22}\, \theta x = -e^{-30/11} + e^{-15/11}$$

3). Representamos por t ($t > 0$) el tiempo asignado a una reparación (en minutos). Debe verificarse:

$P\,(x > t) = 0{,}1;$

es decir:

$$\int_t^{\infty} \frac{1}{22} \cdot e^{-x/22}\, \theta x = -e^{-x/22} \Big|_t^{\infty} = e^{-t/22} = 0{,}1$$

y esto se cumple para $t = -22 * \ln 0{,}1 = 50{,}\ 657 \cong 51$ minutos.

17.-

x es B (50; 0,02)

a) $P\,[x = 0] = 0{,}9850 = 0{,}364$

b) $P\,[x = 1] = 50 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}9849 = 0{,}372$

c) $P\,[x > 2] = 1 - P\,[x \leq 2] = 1 - (P\,[x = 0] + P\,[x = 1] + P\,[x = 2]) =$

$= 1 - (0{,}364 + 0{,}372 + 0{,}186) = 1 - 0{,}922 = 0{,}078$

Por término medio, habrá $\mu = 50 \cdot 0{,}02 = 1$ tornillo defectuoso en cada caja.

18

Sea X= mensajes por minuto con P=0.1 =Entonces el número de mensajes por hora será de

P=6

a) $P(x \le 2) = f(0) + f(1) + f(2) = 0.0025 + 0.0149 + 0.0446 = 0.062$

b) $P(X = 0) = 0.8$

$$\frac{e^{-\lambda} * \lambda^0}{0!} = 0.8 \longrightarrow e^{-\lambda} = 0.8 \longrightarrow \ell n * e^{-\lambda} = \ell n * 0.8$$

$$\ell n * e^{-\lambda} = \ell n * 0.8 \longrightarrow -\lambda * \ell n * e = \ell n 0 \longrightarrow \lambda = 0.2231$$

$$\left.\begin{array}{l} 0.1 \text{ mensaje} \longrightarrow 1 \text{ minuto} \\ 0.2231 \text{ mensajes} \longrightarrow x \end{array}\right\} \quad x = \frac{0.2231}{0.1} = 2.231 \text{ minutos.}$$

19.-

$$1 \text{ chip} \begin{cases} \longrightarrow P(\text{defectuoso}) = 0{,}2 = p \\ \longrightarrow P(\text{no defectuoso}) = 0{,}8 = q \end{cases}$$

a) $n = 7$
X= chips defectuosos → Bi (7, 0,2)

$P(X \ge 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \le 2) = 1 - [\rho(0) + \rho(1) + \rho(2)] =$

$= 1 - [\binom{7}{0} * 0{,}2^0 * 0{,}8^7 + \binom{7}{1} * 0{,}2^1 * 0{,}8^6 + \binom{7}{2} * 0{,}2^2 * 0{,}8^5] = 1 - 0{,}852 =$ <u>0,148</u>

b) $n = 50$
X→ Bi (500, 0,2)-------------------------→ N (10, 2,828)

$$\mu = n * p = 50 * 0{,}2 = 10$$

$$\sigma = \sqrt{n * p * q} = 2.828$$

$P(9 \le X \le 12) = P((9-10)/2{,}828 \le z \le (12-10)/2{,}828) = P(-0{,}35 \le z \le 0{,}707) =$

$= P(z \le 0{,}707) - P(z \le -0{,}35) = 0{,}7580 - (1 - 0{,}6368) =$ <u>0,3948</u>

c) n = ¿?
Var (x) = 32--------------------→ n*p*q = 32 ; n*0,2*0,8 = 32

<u>N = 200 chips</u>

20.-

Sea la variable aleatoria ζ, con distribución de Poisson de parámetro $\lambda_{\zeta} = E[\zeta] = 8$, que determina el número de componentes que fallan antes de cumplir 100 horas de funcionamiento.

a) Considerando que se cumplen ciertas condiciones de regularidad, podemos asumir que una variable η que mide el número de componentes que fallan antes de cumplir 25 horas de funcionamiento sigue una distribución de Poisson con parámetro $\lambda_{\eta} = E[\eta] = \frac{8}{4} = 2$. Por lo tanto, la probabilidad deseada es la siguiente:

$$P(\eta - 1) = \frac{2^1}{1!} \times e^{-2} = 0.27067$$

b) Análogamente, definimos una variable aleatoria U con distribución de Poisson de parámetro $\lambda_U = \frac{8}{2} = 4$, que mide el número de componentes que fallan antes de cumplir las 50 horas de funcionamiento. Se tiene entonces que:

$$P(U \leq 2) = \sum_{i=0}^{2} \frac{4^i}{i!} \times e^{-4} = 0.2381$$

21 .-

Usamos la distribución de Poisson

$$\boldsymbol{P = (x = k) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda}(\ \lambda)^k}{k!}}$$

Definimos la variable aleatoria x , un promedio de 10 clientes x hora
μ=10c/hxh=10 clientes

$$\boldsymbol{P(x \geq 5) = 1 - p(x \geq 4)} =$$

$$\boldsymbol{1 - [P(x = 0) + P(x = 1)} + P(x = 2) + P(x = 3) + P(x = 4)]$$

$$1 - \left[\frac{e^{-10}(10)^0}{0!} + \frac{e^{-10}(10)^1}{1!} \frac{e^{-10}(10)^2}{2!} + \frac{e^{-10}(10)^3}{3!} + \frac{e^{-10}(10)^4}{4!}\right]$$

$$1 - 0.0293 = 0.9707$$

22.-
Definamos la variable aleatoria X:cantidad de defectos que aparecen en el lente , la tasa media es λ= $2\,\frac{defectos}{cm^2}$
Un lente de 4 cm^2 por lo tanto E(x)= λ.4=8 defectos
Para que no se registre como defectuoso debe tener al menos tres defectos :

$$P = (x = k) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda}(\lambda)^k}{k!}$$

$$\frac{e^{-8}(8)^0}{0!} + \frac{e^{-8}(8)^1}{1!}\frac{e^{-8}(8)^2}{2!} = 0.0138$$

II Variables continuas

1. Sea ***X*** una variable aleatoria continua con función de densidad ***f(x)*** dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ x & 0 \le x \le 1 \\ 1 & demas \;\; valores \end{cases}$$

Determine y grafica **la f(x)** y ***Fdx***

2.- Sea ***X*** una variable aleatoria continua con función de densidad ***fdp*** dada por

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 \le x \le 1 \\ 1 & demas \;\; valores \end{cases}$$

Determine y grafica **la f(x)** y ***Fdx***

3.- Se efectúa el experimento de lanzar un dardo a un blanco tomando luego de cada tiro el del segmento entre el punto de anclaje del dardo y el centro del blanco.

a) El experimento aleatorio y su características

b) Indicar el tipo de variable aleatoria

c) ¿ Es posible hacer puntería en un punto ?

5.- Una variable aleatoria Y tiene la siguiente función de distribución

$$F\ (y)\ = P\ (Y<=y) = \begin{cases} 0 \text{ para } y<2 \\ 1/8 \text{ para } 2<=y<2{,}5 \\ 3/16 \text{ para } 2{,}5<=y<4 \\ 1/2 \text{ para } 4<=y<5{,}5 \\ 5/8 \text{ para } 5.5<=y<6 \\ 11/16 \text{ para } 6<=y<7 \\ 1 \text{ para los demás} \end{cases}$$

¿Es Y una variable aleatoria continua o discreta? ¿Por qué ?
¿ Que valores de y son probabilidades positivas asignadas?
Encuentre la función de probabilidad para Y
¿Cuál es la mediana de Y ?

6.- Dada f(x)= cX^2 , 0>=X<=2 y f(x)=0 en cualquier otro caso.

a) Hallar el valor de c para que f8x9 sea una función de densidad válida.

b) Determine P(1<=X<=2)

c) Determine P(1<X<2)

7. El tiempo de vida útil medido en horas de un dispositivo es una variable aleatoria continua aleatoria **X** que tiene una ***fdp*** dada por:

$$fdp \begin{cases} \frac{k}{e^{5x}} & \text{si } 0 \leq x \leq 1200 \\ 0 & \text{los otros casos} \end{cases}$$

a) Encuentra el valor de K.
b) Cuál es la probabilidad de que el dispositivo dure más de ***100*** horas?
c) Encuentra la ***F(x)*** Grafícala.
d) Calcula mediante ***F(x)*** la probabilidad de que el dispositivo se rompa antes de las ***10*** horas de uso.

8.-Un proveedor de querosene tiene un tanque de 1500 litros que se llena al comenzar cada semana .Su demanda semanal muestra un comportamiento de frecuencia relativa que aumenta de manera continua hasta 1000 litros y luego se nivela entre 1000 y 1500 litros .Si x denota la demanda semanal en miles de litros , la frecuencia relativa de demanda puede ser modelada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{otros valores} \\ 1 & 1 < X <= 1.5 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Halar f(x)
Hallar P(0<=X<=.5)
Hallar P(.5<=X<=1.2)

9.-El tiempo necesario para que estudiantes completen un examen de una hora est{a modelado por una variable aleatoria con una función de densidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{demas valores} \end{cases}$$

a) Hallar c
b) Hallar F(x)
c) Graficar f(x) y F(x)
d) Hallar F(-1),F(0) y F(1)
e) Encontrar la probabilidad que un estudiante seleccionado al azar termine en menos de media hora
f) Dado que un estudiante particular necesita al menos 15 minutos para completar el examen , encuentre la probabilidad de que requiera al menos 30 minutos para terminar

10.- El tiempo que transcurre, en horas, entre dos infracciones de tránsito sucesivas en una esquina con semáforo es una variable aleatoria que tiene una ***Fda*** dada por:

$$fdp \begin{cases} \frac{k}{e^{8x}} & \text{si } 0 \leq x \leq 20 \\ 0 & \text{los otros casos} \end{cases}$$

a) Encuentra la ***fdp*** de ***X***. Grafícala.
b) Calcula la probabilidad de que entre dos infracciones transcurran al menos ***10*** horas.

11.-Una variable aleatoria tiene una ***fdp*** dada por:

$$fdp \begin{cases} \frac{k}{x^3} & \text{si } 1 \leq x \leq 120 \\ 0 & \text{los otros casos} \end{cases}$$

Si fuera posible hallar el valor de k

12.-Una variable aleatoria tiene una ***fdp*** dada por:

$$fdp \begin{cases} \frac{k}{x^3} & \text{si } 1 \leq x \leq 120 \\ 0 & \text{los otros casos} \end{cases}$$

a) Halla el valor de k
b) Encuentra la probabilidad de que ***X*** tome un valor menor o igual que ***40***.
c) Encuentra la probabilidad de que ***X*** tome un valor mayor o igual que ***110*** y menor o igual a 100.

13. Sea X una variable aleatoria continua que tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x) \begin{cases} c \cdot x^2 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

Hallar:
a) El valor de c para que f(x) sea una función de densidad.
b) Obtener la función de distribución.
c) Calcular: $P(1 \leq X \leq 2)$.
d) Calcular la esperanza y la varianza de X.
13.- Si X es la cantidad diaria vendida de un producto y la ganancia del vendedor es 5 unidades monetarias por cada unidad de producto vendida si $X \leq 1$, y 8 unidades monetarias si $X > 1$, encontrar la ganancia esperada del vendedor para cualquier día especificado.
14.- Sea X una variable aleatoria continua que mide el avance entre dos automóviles consecutivos elegidos al azar en segundos, su función de distribución del tiempo de avance presenta la forma:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{x^4} & x > 1 \\ 0 & x \leq 1 \end{cases}$$

a) Determinar el valor de k para que f(x) sea una función de densidad legítima.
b) Obtener la función de distribución acumulada.
c) Calcular: $P(X > 2)$ y $P(2 < . X < . 3)$.
d) Obtener el valor medio y la desviación estándar del avance.
15.-. Sea X la duración, en minutos, de una conversación telefónica de larga distancia. Se supone que la función de densidad de probabilidad de X está determinada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}e^{-x/10} & \text{x} > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Verificar que dicha función de densidad de probabilidad corresponde a una variable aleatoria continua.
b) En el supuesto que la función f(x) describe adecuadamente el comportamiento de la variable aleatoria X, calcule la probabilidad de que una llamada seleccionada aleatoriamente dure cuando mucho 7 minutos. Calcule también que dure al menos 7 minutos y obtenga la probabilidad de que dure exactamente 7 minutos.

16.-Una báscula de tipo digital para vehículos de alto tonelaje da pesos cuya magnitud viene expresada en toneladas. ¿Cuál es la probabilidad de que en una pesada el valor real difiera del dado por la báscula en más de 200 Kg?
Solución
Debido a la magnitud de los pesos que se colocan en la báscula un error de 1000 Kg. no se considera importante, por lo que el digito de las unidades aumenta su valor en una unidad cuando la carga ha aumentado en 1000 Kg.; o dicho de otra manera, la báscula no diferencia entre una carga de 57,1 toneladas y otra cuyo peso sea 57,5 toneladas. No tenemos pues, ninguna información acerca del peso real entre cada nueva tonelada y la siguiente, por lo que al ser máxima la incertidumbre, la distribución apropiada es uniforme:

$$f(\text{x}) = \frac{1}{1000}; \quad 0 \lhd x \lhd 1000$$

La probabilidad de que el error cometido en una pesada sea superior a 200 Kg. será:

$$P(X \succ 200) = \int_{200}^{1000} \frac{1}{1000} dx = 0{,}8$$

Soluciones
10.- El tiempo que transcurre, en horas, entre dos infracciones de tránsito sucesivas en una esquina con semáforo es una variable aleatoria que tiene una ***función de distribución*** dada por:

$$\boldsymbol{f} \begin{cases} \frac{k}{e^{8x}} & \text{si } 0 \le x \le 20 \\ 0 & \text{los otros casos} \end{cases}$$

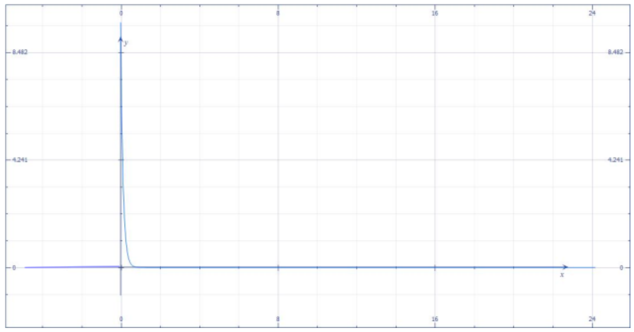
a) Encuentra el valor de K ***y*** Grafícala.

$$k\int_0^{20} \boldsymbol{e}^{(-8)x} dx = 1$$

$$\text{K } \left(-\frac{1}{8e^{8x}}\right)_0^{20} = 1$$

$$\text{K } \left(-\frac{1}{8e^{160}} + \frac{1}{8}\right) = \text{k}(0.125)1 \quad \text{K} = \frac{1}{0{,}125} = 8$$

$$\boldsymbol{f} \begin{cases} \frac{8}{e^{8x}} & \text{si } 0 \le x \le 20 \\ 0 & \text{los otros casos} \end{cases}$$



b) Calcula la probabilidad de que entre dos infracciones transcurran al menos ***10*** horas.

$$-\frac{1}{8e^{8x}}+C$$

11.-Una variable aleatoria tiene una ***fdp*** dada por:

fdp $\begin{cases} \frac{k}{x^3} & \text{si } 0 \le x \le 120 \\ 0 & \text{los otros casos} \end{cases}$

d) Halla el valor de c

$\int_0^{120} \frac{k}{x^3}\,dx=1$

$k\int_0^{120} \frac{1}{x^3}\,dx = k\int_0^{120} x^{-3}\,dx = k\,\frac{x^{-2}}{-2}\Big|_0^{120} = k\left(\frac{120^{-2}}{-2}-\frac{1}{0}\right)$=*no existe la posibilidad de armar una función de densidad*

$k\left(\frac{120^{-2}}{-2}-\frac{0^{-2}}{-2}\right) = k\left(\frac{120^{-2}}{-2}-\frac{1}{-2*0^2}\right) = k\left(\frac{120^{-2}}{-2}-\frac{1}{0}\right)$ =da infinito por que $\frac{1}{0}$ es infinito

Hacemos la siguiente corrección
12.-Una variable aleatoria tiene una ***fdp*** dada por:

fdp $\begin{cases} \frac{k}{x^3} & \text{si } 1 \le x \le 120 \\ 0 & \text{los otros casos} \end{cases}$

e) Halla el valor de k

$\int_1^{120} \frac{k}{x^3}\,dx=1$debo invertir limites por ser función decreciente

$k\int_{120}^{1}\frac{1}{x^3}$ dx= $k\int_{120}^{1}x^{-3}$ dx=$k\,\frac{x^{-2}}{-2}\Big|_{120}^{1}$=$k(\frac{1}{-2}$-$\frac{120^{-2}}{-2*1})$≈-0,5

-0,5k=1 K=1/-0,5=-2

Encuentra la probabilidad de que ***X*** tome un valor menor o igual que ***40***.

$-2\int_{40}^{1}\frac{1}{x^3}$=$-2\frac{x^{-2}}{-2}\Big|_{40}^{1}$= 1^{-2}-40^{-2}==0.99

Encuentra la probabilidad de que ***X*** tome un valor mayor o igual que ***110*** y menor o igual a 100.

$2\int_{100}^{110}\frac{1}{x^3}$=$-2\frac{x^{-2}}{-2}\Big|_{110}^{100}$= 100^{-2}-110^{-2}+= $1.7355371900826\cdot 10^{-5}$

13.-Sea X una variable aleatoria continua que tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x)\begin{cases} c\cdot x^2 & 0\leq x\leq 2\\ 0 & \text{en otros casos}\end{cases}$$

Hallar:
a) El valor de c para que f(x) sea una función de densidad.
b) Obtener la función de distribución.
c) Calcular: P(1 ≤ X ≤ 2).

$c\int_{0}^{2}\ x^2$dx = 1

$\frac{cx^3}{3}\Big|_{0}^{2}$=1 $\frac{c8}{3}$-0=1 C=$\frac{3}{8}$

Función de densidad Fd(x)= $\frac{3}{8}\frac{x^3}{3}$

función de distribución

$$f(x)\begin{cases} 3/8\,x^2 & 0\leq x\leq 2\\ 0 & \text{en otros casos}\end{cases}$$

.

$c\int_{1}^{2}\ x^2$dx = 1

$\frac{\cancel{3}x^3}{8*\cancel{3}}\Big|_{1}^{2}$=1 $\frac{2^3}{8}$-$\frac{1}{8}$=$\frac{7}{8}$=0.875