Estimación de intervalos de confianza

a) **Estimación del intervalo de confianza para la media**
b) **Ejemplo ilustrativo**
c) **Estimación del intervalo de confianza para una proporción**

La estadística inferencial es el proceso de uso de los resultados derivados de las muestras para obtener conclusiones acerca de las características de una población. La estadística inferencial nos permite estimar características desconocidas como la media de la población o la proporción de la población. Existen dos tipos de estimaciones usadas para estimar los parámetros de la población: la estimación puntual y la estimación de intervalo. Una estimación puntual es el valor de un solo estadístico de muestra. Una estimación del intervalo de confianza es un rango de números, llamado intervalo, construido alrededor de la estimación puntual. El intervalo de confianza se construye de manera que la probabilidad del parámetro de la población se localice en algún lugar dentro del intervalo conocido.
Suponga que quiere estimar la media de todos los alumnos en su universidad.

La media para todos los alumnos es una media desconocida de la población, simbolizada como μ. Usted selecciona una muestra de alumnos, y encuentra que la media es de 5,8. La muestra de la media $\bar{X} = 5{,}8$ es la estimación puntual de la media poblacional μ. ¿Qué tan preciso es el 5,8? Para responder esta pregunta debe construir una estimación del intervalo de confianza.
Recuerde que la media de la muestra $\bar{X}$ es una estimación puntual de la media poblacional μ.

Sin embargo, la media de la muestra puede variar de una muestra a otra porque depende de los elementos seleccionados en la muestra. Tomando en cuenta la variabilidad de muestra a muestra, se aprenderá a desarrollar la estimación del intervalo para la media poblacional.

El intervalo construido tendrá una confianza especificada de la estimación correcta del valor del parámetro poblacional μ . En otras palabras, existe una confianza especificada de que μ se encuentre en algún lugar en el rango de números definidos por el intervalo.

En general, el *nivel de confianza* se simboliza con $(1-\alpha)\cdot 100\%$, donde α es la proporción de las colas de la distribución que están fuera del intervalo de confianza. La proporción de la cola superior e inferior de la distribución es $\alpha/2$

Estimación del intervalo de confianza para la media

(σ CONOCIDA)

Se emplea la siguiente fórmula:

$$\bar{X} - Z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Donde:

Z = valor crítico de la distribución normal estandarizada

Se llama *valor crítico* al valor de Z necesario para construir un intervalo de confianza para la distribución. El 95% de confianza corresponde a un valor α de 0,05. El valor crítico Z correspondiente al área acumulativa de 0,975 es 1,96 porque hay 0,025 en la cola superior de la distribución y el área acumulativa menor a Z = 1,96 es 0,975.
Un nivel de confianza del 95% lleva a un valor Z de 1,96.

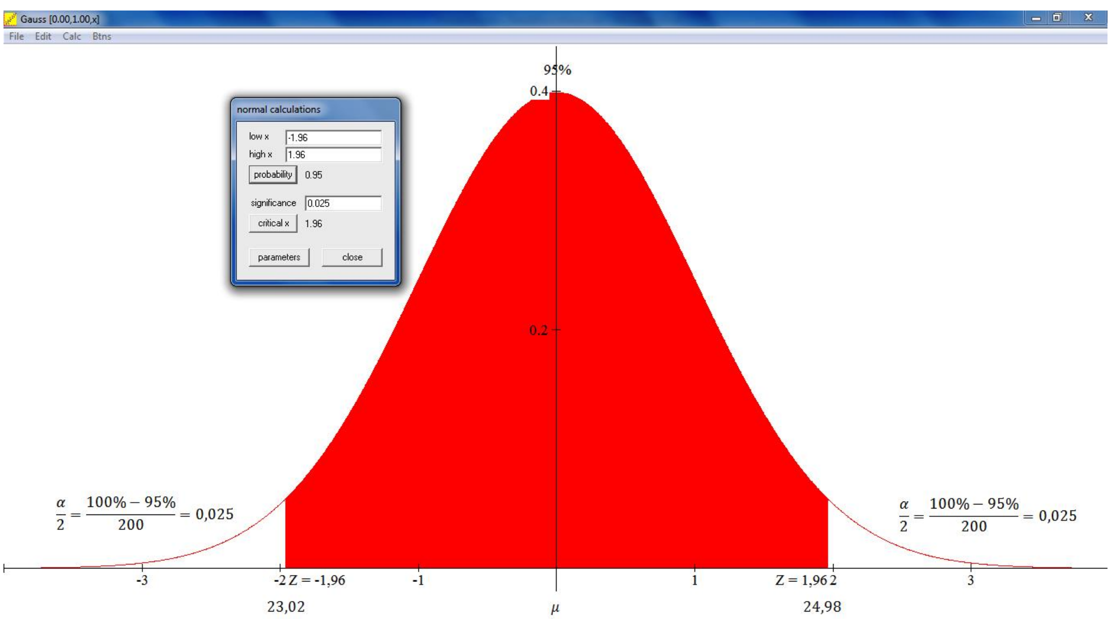
El 99% de confianza corresponde a un valor α de 0,01.

El valor de Z es aproximadamente 2,58 porque el área de la cola alta es 0,005 y el área acumulativa menor a Z = 2,58 es 0,995.

Ejemplo ilustrativo

Si $\bar{X} = 24\ ; \sigma = 3\ y\ n = 36$ construya para la media poblacional μ una estimación de intervalo de confianza del 95%

Solución:
Realizando un gráfico ilustrativo en Winstats y Paint se obtiene:



Con lectura en la tabla de la distribución normal para un área de 0,025 se obtiene Z = -1,96. Por simetría se encuentra el otro valor Z = 1,96
Remplazando valores y realizando lo cálculos se obtiene:

$$\bar{X} - Z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$24 - 1{,}96\frac{3}{\sqrt{36}} \leq \mu \leq 24 + 1{,}96\frac{3}{\sqrt{36}}$$

$$23{,}02 \leq \mu \leq 24{,}98$$

Los cálculos en Excel se muestran en la siguiente figura:

	A	B	C	D	E	F
1	$\bar{X}$	24				
2	σ	3				
3	n	36				
4	Confianza	95				
5	α	0,05	=(100-B4)/100			
6	$Z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	0,98	=INTERVALO.CONFIANZA.NORM(B5;B2;B3)			
7						
8	23,02	$\leq \mu \leq$	24,98			
9	=B1-B6		=B1+B6			

Interpretación: Existe un 95% de confianza de que la media poblacional se encuentre entre 23,02 y 24,98

ESTIMACIÓN DE INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA MEDIA

(σ DESCONOCIDA)

Así como la media poblacional μ suele ser desconocida, rara vez se conoce la desviación estándar real de la población σ. Por lo tanto, se requiere desarrollar una estimación del intervalo de confianza de μ usando sólo los estadísticos de muestra $\bar{X}$ y S.

Se emplea la siguiente fórmula:

$$\bar{X} - t_{n-1}\frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{n-1}\,\frac{S}{\sqrt{n}}$$

Donde t_{n-1} es el valor crítico de la distribución t con n-1 grados de libertad para un área de $\alpha/2$ en la cola superior

La distribución t supone que la población está distribuida normalmente. Esta suposición es particularmente importante para $n < 30$. Pero cuando la población es finita y el tamaño de la muestra constituye más del 5% de la población, se debe usar el factor finito de corrección para modificar las desviaciones estándar. Por lo tanto si cumple:

$$\frac{n}{N} \cdot 100\% > 5\%$$

Se aplica la ecuación

$$\bar{X} - t_{n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{n-1}\,\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

Siendo N el tamaño de la población y n el tamaño de la muestra

Antes de seguir continuando es necesario estudiar la distribución *t de Student*, por lo que a continuación se presenta una breve explicación de esta distribución.
Al comenzar el siglo XX, un especialista en Estadística de la Guinness Breweries en Irlanda llamado William S. Gosset deseaba hacer inferencias acerca de la media cuando la σ fuera desconocida. Como a los empleados de Guinness no se les permitía publicar el trabajo de investigación bajo sus propios nombres, Gosset adoptó el seudónimo de "Student". La distribución que desarrolló se conoce como la distribución t de Student.
Si la variable aleatoria X se distribuye normalmente, entonces el siguiente estadístico tiene una distribución t con n - 1 grados de libertad.

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

Esta expresión tiene la misma forma que el estadístico Z en la ecuación para la distribución muestral de la media con la excepción de que S se usa para estimar la σ desconocida.
Entre las principales propiedades de la distribución t se tiene:

En apariencia, la distribución t es muy similar a la distribución normal estandarizada. Ambas distribuciones tienen forma de campana. Sin embargo, la distribución t tiene mayor área en los extremos y menor en el centro, a diferencia de la distribución normal.

Puesto que el valor de σ es desconocido, y se emplea S para estimarlo, los valores t son más variables que los valores Z.
Los grados de libertad n - 1 están directamente relacionados con el tamaño de la muestra n. A medida que el tamaño de la muestra y los grados de libertad se incrementan, S se vuelve una mejor estimación de σ y la distribución t gradualmente se acerca a la distribución normal estandarizada hasta que ambas son virtualmente idénticas.

Con una muestra de 120 o más, S estima σ con la suficiente precisión como para que haya poca diferencia entre las distribuciones t y Z. Por esta razón, la mayoría de los especialistas en estadística usan Z en lugar de t cuando el tamaño de la muestra es igual o mayor de 30.

Como se estableció anteriormente, la distribución t supone que la variable aleatoria X se distribuye normalmente. En la práctica, sin embargo, mientras el tamaño de la muestra sea lo suficientemente grande y la población no sea muy sesgada, la distribución t servirá para estimar la media poblacional cuando σ sea desconocida.

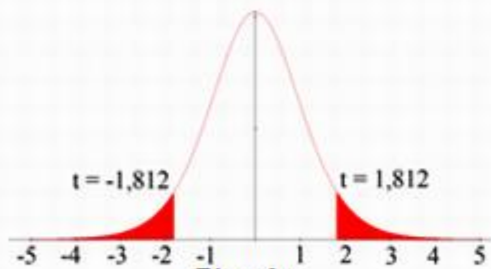
Los grados de libertad de esta distribución se calculan con la siguiente fórmula

$$n - 1$$

Donde n = tamaño de la muestra

Ejemplo: Imagínese una clase con 40 sillas vacías, cada uno elige un asiento de los que están vacíos. Naturalmente el primer alumno podrá elegir de entre 40 sillas, el segundo de entre 39, y así el número irá disminuyendo hasta que llegue el último alumno. En este punto no hay otra elección (grado de libertad) y aquel último estudiante simplemente se sentará en la silla que queda. De este modo, los 40 alumnos tienen 39 o n-1 grados de libertad.
Para leer en la tabla de la distribución t se procede de la siguiente manera:

TABLA N° 4
DISTRIBUCIÓN t DE STUDENT



Ejemplos:
Para n-1 = 10 grados de libertad
$$P(t > 1,812) = 0,05$$
$$P(t < -1,812) = 0,05$$

α / n-1	0,25	0,2	0,15	0,1	**0,05**	0,025	0,01	0,005	0,0005
1	1,0000	1,3764	1,9626	3,0777	6,3138	12,7062	31,8205	63,6567	636,6192
2	0,8165	1,0607	1,3862	1,8856	2,9200	4,3027	6,9646	9,9248	31,5991
3	0,7649	0,9785	1,2498	1,6377	2,3534	3,1824	4,5407	5,8409	12,9240
4	0,7407	0,9410	1,1896	1,5332	2,1318	2,7764	3,7469	4,6041	8,6103
5	0,7267	0,9195	1,1558	1,4759	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321	6,8688
6	0,7176	0,9057	1,1342	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074	5,9588
7	0,7111	0,8960	1,1192	1,4149	1,8946	2,3646	2,9980	3,4995	5,4079
8	0,7064	0,8889	1,1081	1,3968	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554	5,0413
9	0,7027	0,8834	1,0997	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	4,7809
10	0,6998	0,8791	1,0931	1,3722	**1,8125**	2,2281	2,7638	3,1693	4,5869
11	0,6974	0,8755	1,0877	1,3634	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058	4,4370

Usted encontrará los valores críticos de t para los grados de libertad adecuados en la tabla para la distribución t. Las columnas de la tabla representan el área de la cola superior de la distribución t. Cada fila representa el valor t determinado para cada grado de libertad específico. Por ejemplo, con 10 grados de libertad, si se quiere un nivel de confianza del 90%, se encuentra el valor t apropiado como se muestra en la tabla. El nivel de confianza del 90% significa que el 5% de los valores (un área de 0,05) se encuentran en cada extremo de la distribución. Buscando en la columna para un área de la cola superior y en la fila correspondiente a 10 grados de libertad, se obtiene un valor crítico para t de 1.812. Puesto que t es una distribución simétrica con una media 0, si el valor de la cola superior es +1.812, el valor para el área de la cola inferior (0,05 inferior) sería -1.812. Un valor t de -1.812 significa que la probabilidad de que t sea menor a -1.812, es 0,05, o 5% (vea la figura).

Ejemplos ilustrativos:

1) Determinar el valor crítico de t con lectura en la tabla, Excel y Winstats en cada una de las siguientes condiciones para $1-\alpha = 0,95$; $n = 13$

Solución:

Con lectura en la tabla

$$Si\ 1-\alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 1-0{,}95 = 0{,}05$$

Para leer en la tabla se necesita calcular el área de una cola, la cual es:

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{0{,}05}{2} = 0{,}025$$

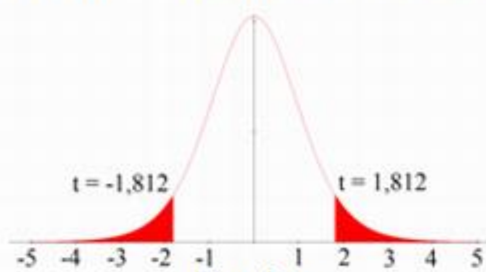
O también el área de una cola se calcula de la siguiente manera:

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{1-(1-\alpha)}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{1-0{,}95}{2} = 0{,}025$$

Calculando los grados de libertad se tiene:

$$n-1 = 13-1 = 12$$

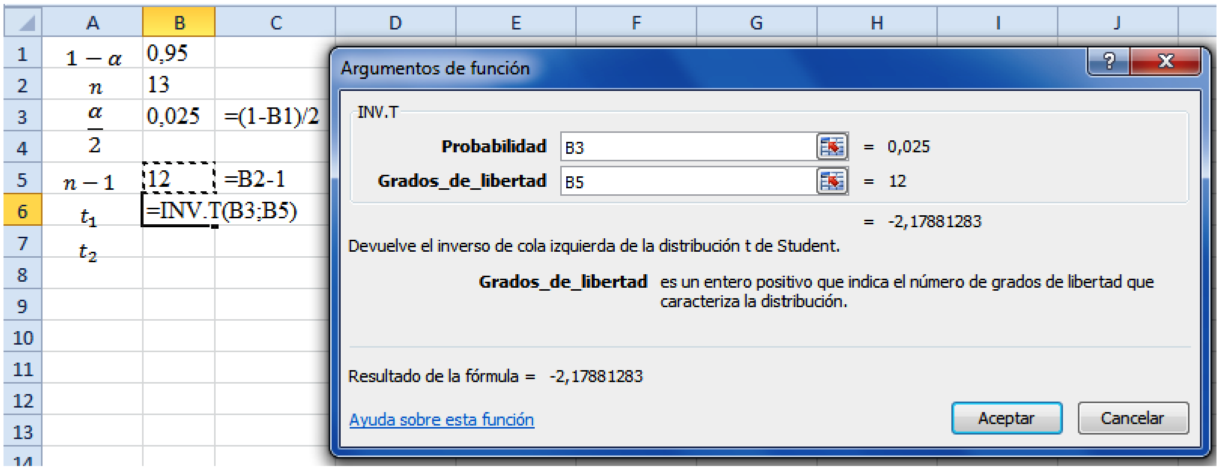
TABLA N° 4
DISTRIBUCIÓN t DE STUDENT



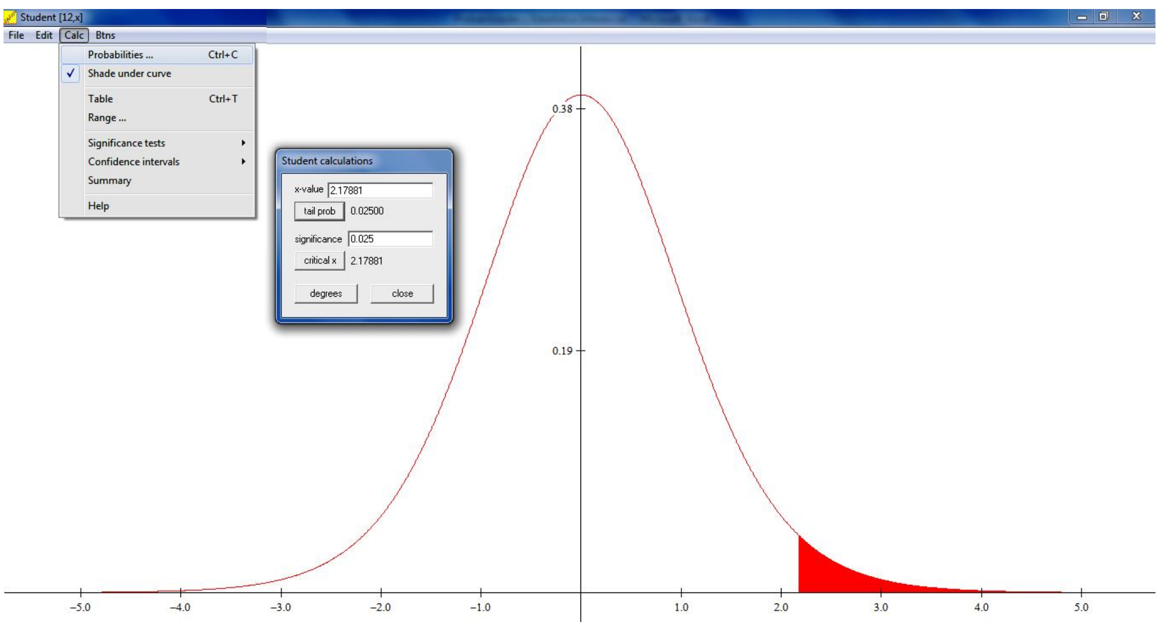
Ejemplos:
Para n-1 = 10 grados de libertad
$P(t > 1{,}812) = 0{,}05$
$P(t < -1{,}812) = 0{,}05$

α / n-1	0,25	0,2	0,15	0,1	0,05	**0,025**	0,01	0,005	0,0005
1	1,0000	1,3764	1,9626	3,0777	6,3138	12,7062	31,8205	63,6567	636,6192
2	0,8165	1,0607	1,3862	1,8856	2,9200	4,3027	6,9646	9,9248	31,5991
3	0,7649	0,9785	1,2498	1,6377	2,3534	3,1824	4,5407	5,8409	12,9240
4	0,7407	0,9410	1,1896	1,5332	2,1318	2,7764	3,7469	4,6041	8,6103
5	0,7267	0,9195	1,1558	1,4759	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321	6,8688
6	0,7176	0,9057	1,1342	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074	5,9588
7	0,7111	0,8960	1,1192	1,4149	1,8946	2,3646	2,9980	3,4995	5,4079
8	0,7064	0,8889	1,1081	1,3968	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554	5,0413
9	0,7027	0,8834	1,0997	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	4,7809
10	0,6998	0,8791	1,0931	1,3722	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	4,5869
11	0,6974	0,8755	1,0877	1,3634	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058	4,4370
12	0,6955	0,8726	1,0832	1,3562	1,7823	**2,1788**	2,6810	3,0545	4,3178
13	0,6938	0,8702	1,0795	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123	4,2208

En la tabla con 12 grados de libertad y 0,025 de área se obtiene un valor de t =2,1788, y por simetría es igual también a t = -2,1788
Los cálculos en Excel se muestran en la siguiente figura:



El gráfico en Winstats se muestra en la siguiente figura:



2) Un fabricante de papel para computadora tiene un proceso de producción que opera continuamente a lo largo del turno. Se espera que el papel tenga una media de longitud de 11 pulgadas. De 500 hojas se selecciona una muestra de 29 hojas con una media de longitud del papel de 10,998 pulgadas y una desviación estándar de 0,02 pulgadas. Calcular la estimación del intervalo de confianza del 99%

Solución:

Los datos del problema son:

$$\mu = 11$$
$$N = 500$$
$$n = 29$$
$$\bar{X} = 10{,}998$$
$$S = 0{,}02$$
$$Confianza = 99\%$$

Como en los datos aparece el tamaño de la población, se debe verificar si el tamaño de la nuestra es mayor que el 5% para emplear la fórmula con el factor finito de corrección. Se remplaza valores en la siguiente fórmula:

$$\frac{n}{N} \cdot 100\% > 5\%$$

$$\frac{29}{500} \cdot 100\% = 5{,}8\%$$

Por lo tanto se debe utilizar la fórmula con el factor finito de corrección.
Calculando la proporción de la cola superior e inferior de la distribución se obtiene:

$$Nivel\ de\ confianza = (1 - \alpha) \cdot 100\%$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{100\% - Nivel\ de\ confianza}{200}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{100\% - 99\%}{200} = 0{,}005$$

Calculando los grados de libertad se obtiene:

$$n - 1 = 29 - 1 = 28$$

Con lectura en la tabla para un área de 0,005 y 28 grados de libertad se obtiene $t = \pm 2{,}7633$

Remplazando valores y realizando lo cálculos se obtiene:

$$\bar{X} - t_{n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

$$10{,}998 - 2{,}7633\frac{0{,}02}{\sqrt{29}}\sqrt{\frac{500-29}{500-1}} \leq \mu \leq 10{,}998 + 2{,}7633\frac{0{,}02}{\sqrt{29}}\sqrt{\frac{500-29}{500-1}}$$

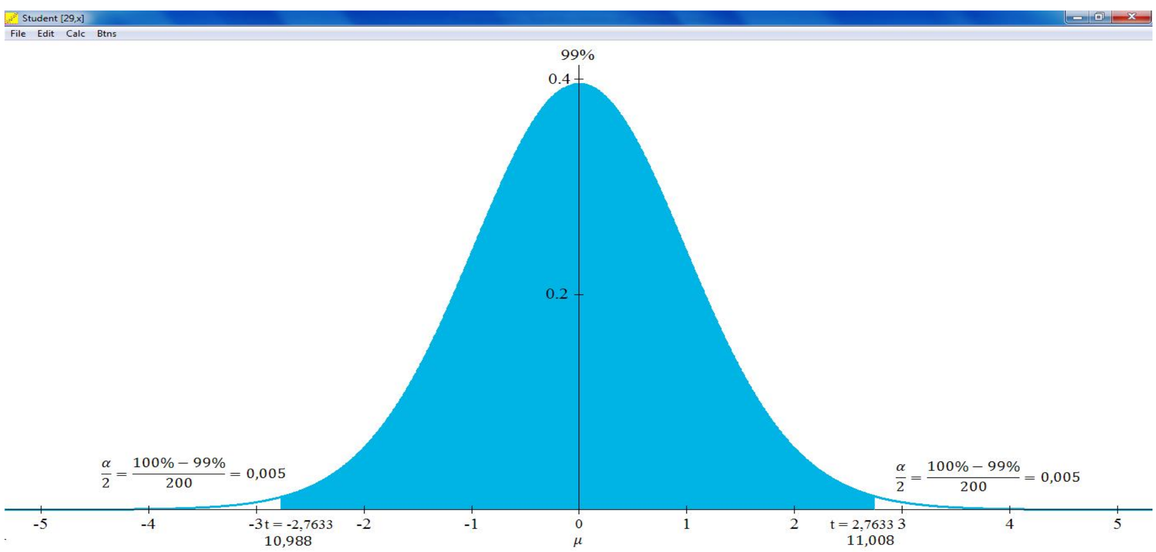
$$10{,}988 \leq \mu \leq 11{,}008$$

Los cálculos en Excel se muestran en la siguiente figura:

	A	B	C	D	E	F
1	μ	11				
2	N	500				
3	n	29				
4	$\bar{X}$	10,998				
5	S	0,02				
6	Confianza	99				
7	$\frac{n}{N}\cdot 100 > 5\%$	5,8	=(B3/B2)*100			
8						
9	α	0,01	=(100-B6)/100			
10	$t_{n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}$	0,0103	=INTERVALO.CONFIANZA.T(B9;B5;B3)			
11						
12						
13	$\bar{X}-t_{n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \leq \mu \leq \bar{X}+t_{n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$					
14						
15	10,988	$\leq \mu \leq$	11,008			
16	=B4-B10*RCUAD((B2-B3)/(B2-1))		=B4+B10*RCUAD((B2-B3)/(B2-1))			

Interpretación: Existe un 99% de confianza de que la media poblacional se encuentra entre 10,998 y 11,008

El gráfico elaborado en Winstats y Paint se muestra en la siguiente figura:



Estimación del intervalo de confianza para una proporción

Sirve para calcular la estimación de la proporción de elementos en una población que tiene ciertas características de interés. ´

La proporción desconocida de la población, se representa con la letra griega π. La estimación puntual para π es la proporción de la muestra, $p = \frac{X}{n}$, donde n es el tamaño de la muestra y X es el número de elementos en la muestra que tienen la característica de interés. La siguiente ecuación define la estimación del intervalo de confianza para la proporción de la población.

$$p - Z\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq \pi \leq p + Z\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Donde:

$$p = proporción\ de\ la\ muestra = \frac{X}{n} = \frac{número\ de\ elementos\ con\ característica\ de\ interés}{tamaño\ de\ la\ muestra}$$

$\pi = proporción\ de\ la\ población$
$Z = valor\ crítico\ para\ la\ distribución\ normal\ estandarizada$
$n = tamaño\ de\ la\ muestra$

Cuando la población es finita (N) y el tamaño de la muestra (n) constituye más del 5% de la población, se debe usar el factor finito de corrección. Por lo tanto si cumple:

$$\frac{n}{N} \cdot 100\% > 5\%$$

Se aplica la ecuación

$$p - Z\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \leq \pi \leq p + Z\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

Ejemplo ilustrativo
En un almacén se está haciendo una auditoria para las facturas defectuosas. De 500 facturas de venta se escoge una muestra de 30, de las cuales 5 contienen errores. Construir una estimación del intervalo de confianza del 95%.
Solución:
Los datos del problema son:

$N = 500$
$n = 30$
$X = 5$

$$Confianza = 95\%$$

Como en los datos aparece el tamaño de la población, se debe verificar si el tamaño de la nuestra es mayor que el 5% para emplear la fórmula con el factor finito de corrección. Se remplaza valores en la siguiente fórmula:

$$\frac{30}{500} \cdot 100\% = 6\%$$

Por lo tanto se debe utilizar la fórmula con el factor finito de corrección.

Calculando la proporción de la cola superior e inferior de la distribución se obtiene:

$$Nivel\ de\ confianza = (1-\alpha) \cdot 100\%$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{100\% - Nivel\ de\ confianza}{200}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{100\% - 95\%}{200} = 0{,}025$$

Con lectura en la tabla de la distribución normal para un área de 0,025 se obtiene Z = -1,96, y por simetría Z =1,96

Calculando la proporción de la muestra se obtiene:

$$p = \frac{X}{n} = \frac{5}{30} = 0{,}167$$

Calculando el intervalo de confianza se obtiene:

$$p - Z\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \leq \pi \leq p + Z\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

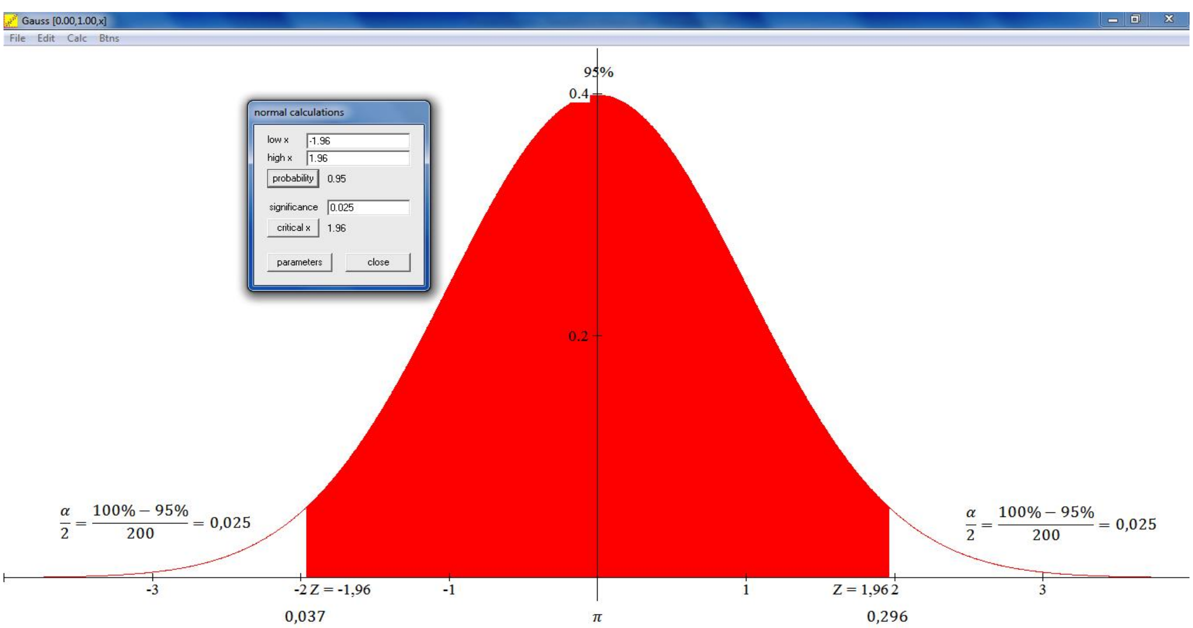
$$0{,}167 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}167(1-0{,}167)}{30}}\sqrt{\frac{500-30}{500-1}} \leq \pi \leq 0{,}167 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}167(1-0{,}167)}{30}}\sqrt{\frac{500-30}{500-1}}$$

$$0{,}037 \leq \pi \leq 0{,}296$$

Los cálculos en Excel se muestran en la siguiente figura:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	N	500						
2	n	30						
3	X	5						
4	Confianza	95						
5	$\frac{n}{N}\cdot 100\% > 5\%$	6						
6								
7	$\frac{\alpha}{2}$	0,025						
8								
9	Z	-1,96	=INV.NORM.ESTAND(B7)					
10	Z	1,96	=B9*-1					
11	$p=\frac{X}{n}$	0,167	=B3/B2					
12								
13	$p - Z\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \le \pi \le p + Z\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$							
14								
15		0,037	$\le \mu \le$	0,296				
16	=B11-B10*RCUAD(B11*(1-B11)/B2)*RCUAD((B1-B2)/(B1-1))			=B11+B10*RCUAD(B11*(1-B11)/B2)*RCUAD((B1-B2)/(B1-1))				

El gráfico elaborado en Winstats y Paint se muestra en la siguiente figura:



Sobre un trabajo echo por **Mario Orlando Suárez Ibujes** mgsmariosuarez@gmail.comv
Un buen tutorial ara utilizarlo con complementos de excell
https://www.youtube.com/watch?v=MWIluLSrYXs
Otra buena referencia es https://es.wikipedia.org/wiki/Distribuci%C3%B3n_t_de_Student

Estimador

Un estadístico (esto es, una función de la muestra) usado para estimar un parámetro desconocido de la población. Por ejemplo, si se desea conocer el precio medio de un artículo (el parámetro desconocido) se recogerán observaciones del precio de dicho artículo en diversos establecimientos (la muestra) y la media aritmética de las observaciones puede utilizarse como estimador del precio medio.

Para cada parámetro pueden existir varios estimadores diferentes. En general, escogeremos el estimador que posea mejores propiedades que los restantes, como insesgadez, eficiencia, convergencia y robustez (consistencia).

El valor de un estimador proporciona lo que se denomina en estadística una estimación puntual del valor del parámetro en estudio. En general, se suele preferir realizar una estimación mediante un intervalo, esto es, obtener un intervalo [a,b] dentro del cual se espera esté el valor real del parámetro con un cierto nivel de confianza. Utilizar un intervalo resulta más informativo, al proporcionar información sobre el posible error de estimación, asociado con la amplitud de dicho intervalo. El nivel de confianza es la probabilidad de que a priori el verdadero valor del parámetro quede contenido en el intervalo.En la práctica, los intervalos de estimadores con distribuciones simétricas suelen indicarse dando el valor del estimador puntual utilizado como centro del intervalo y un valor que debe sumarse y restarse para obtener el límite superior e inferior; por ejemplo:

$$[3,5-2,03\,;\,3,5+2,03]=[1,47\,;\,5,53]$$

Propiedades del estimador

Sesgo

Se denomina sesgo de un estimador a la diferencia entre la esperanza (o valor esperado) del estimador y el verdadero valor del parámetro a estimar. Es deseable que un estimador sea insesgado o centrado, es decir, que su sesgo sea nulo por ser su esperanza igual al parámetro que se desea estimar.
Por ejemplo, si se desea estimar la media de una población, la media aritmética de la muestra es un estimador insesgado de la misma, ya que su esperanza (valor esperado) es igual a la media de la población.
En efecto, si una muestra

$X=(X_1,X_2,\ldots,X_n)^t$ procede de una población de media μ, quiere decir que:

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

$$E[\bar{X}]=E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right]==\frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E[X_i]==\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu=\frac{1}{n}n\mu=\mu$$

Eficiencia

Diremos que un estimador es más *eficiente* o más *preciso* que otro estimador, si la varianza del primero es menor que la del segundo $\mathbf{Var}(\hat{\theta}_1) < \mathbf{Var}(\hat{\theta}_2)$

La **eficiencia** de los estimadores está limitada por las características de la distribución de probabilidad de la de la que proceden. El teorema de Cramér-Rao determina que la

$$\mathbf{var}\left(\hat{\theta}\right) \geq \frac{1}{\mathbf{E}\left[\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(X;\theta)\right]^2\right]}$$

Donde $f(X;\theta)$ es la función de densidad de probabilidad de la muestra $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)^t$ en función del parámetro .

Si un estimador insesgado alcanza esta cota mínima, entonces se dice que el estimador es de **mínima varianza** dentro de los estimadores insesgados, pudiendo existir estimadores sesgados con varianza menor.

Consistencia

$$E[\hat{\theta}] \to \theta \text{ si } n \to \infty$$

$$Var(\hat{\theta}) \to 0 \text{ si } n \to \infty$$

Robustez

El estimador será un estimador **robusto** del parámetro si la ruptura de los supuestos de partida en los que se basa la estimación (normalmente, atribuir a la población un determinado tipo de función de distribución que, en realidad, no es la correcta), **no altera de manera significativa** los resultados que éste proporciona.

Suficiencia

Se dice que un estimador es suficiente cuando resume toda la información relevante contenida en la muestra, de forma que ningún otro estimador pueda proporcionar información adicional sobre el parámetro desconocido de lapoblación. Por ejemplo, la media muestral sería un estimador suficiente de la media poblacional, mientras que la moda no lo sería.

Invariancia

Se dice que un estimador es invariante cuando el estimador de la función del parámetro coincide con la función del estimador del parámetro

$$[f(\theta)]^* = f(\theta^*).$$

Ejemplo.- Si para estimar la varianza poblacional utilizamos la varianza muestral, entonces para estimar la desviación típica poblacional será razonable utilizar la desviación típica muestral.

OTRAS DISTRIBUCIONES

El estadístico ji-cuadrado (o chi cuadrado)

Nota de Fernando Quevedo Ricardi

http://www.medwave.cl/link.cgi/Medwave/Series/MBE04/5266

El estadístico ji-cuadrado (o chi cuadrado), que tiene distribución de probabilidad del mismo nombre, sirve para someter a prueba hipótesis referidas a distribuciones de frecuencias. En términos generales, esta prueba contrasta frecuencias observadas con las frecuencias esperadas de acuerdo con la hipótesis nula. En este artículo se describe el uso del estadístico ji-cuadrado para probar la asociación entre dos variables utilizando una situación hipotética y datos simulados. Luego se describe su uso para evaluar cuán buena puede resultar una distribución teórica, cuando pretende representar la distribución real de los datos de una muestra determinada. A esto se le llama evaluar la bondad de un ajuste. Probar la bondad de un ajuste es ver en qué medida se ajustan los datos observados a una distribución teórica o esperada. Para esto, se utiliza una segunda situación hipotética y datos simulados.

Del mismo modo que los estadísticos “z”, con su distribución normal y “t”, con su distribución t de Student, nos han servido para someter a prueba hipótesis que involucran a promedios y porcentajes, el estadístico ji-cuadrado (o chi cuadrado), que tiene distribución de probabilidad del mismo nombre, nos servirá para someter a prueba hipótesis referidas a distribuciones de frecuencias.

En primer lugar usaremos el estadístico ji-cuadrado para probar la asociación entre dos variables, y luego lo usaremos para evaluar en qué medida se ajusta la distribución de frecuencias obtenidas con los datos de una muestra, a una distribución teórica o esperada.

En términos generales, esta prueba contrasta frecuencias observadas con las frecuencias esperadas de acuerdo con la hipótesis nula. Al igual que en el caso de las pruebas anteriormente presentadas, ilustraremos con ejemplos.

Ji- cuadrado como prueba de asociación

Supongamos que un investigador está interesado en evaluar la asociación entre uso de cinturón de seguridad en vehículos particulares y el nivel socioeconómico del conductor del vehículo. Con este objeto se toma una muestra de conductores a quienes se clasifica en una tabla de asociación, encontrando los siguientes resultados:

Uso de cinturón	Nivel socioeconómico bajo	Nivel socioeconómico medio	Nivel socioeconómico alto	TOTAL
SI	8	15	28	51
NO	13	16	14	43
TOTAL	21	31	42	94

Tabla I. Tabla de asociación, valores observados.

¿Permiten estos datos afirmar que el uso del cinturón de seguridad depende del nivel socioeconómico? Usaremos un nivel de significación alfa=0,05.

Los pasos del análisis estadístico en este caso son los siguientes:

1. En primer lugar se debe plantear las hipótesis que someteremos a prueba
H0: "El uso de cinturón de seguridad es independiente del nivel socioeconómico".
H1: "El uso de cinturón de seguridad depende del nivel socioeconómico".
En esta prueba estadística siempre la hipótesis nula plantea que las variables analizadas son independientes.
2. En segundo lugar, obtener (calcular) las frecuencias esperadas
Estas son las frecuencias que debieran darse si las variables fueran independientes, es decir, si fuera cierta la hipótesis nula.
Las frecuencias esperadas se obtendrán de la distribución de frecuencias del total de los casos, 51 personas de un total de 94 usan el cinturón y 43 de 94 no lo usan. Esa misma proporción se debería dar al interior de los tres grupos de nivel socioeconómico, de manera que el cálculo responde al siguiente razonamiento: si de 94 personas 51 usan cinturón; de 21 personas, ¿cuántas debieran usarlo?
La respuesta a esta pregunta se obtiene aplicando la "regla de tres" y es 11,4. Este procedimiento debe repetirse con todas las frecuencias del interior de la tabla.
El detalle de los cálculos es el siguiente:
Nivel bajo: (21x51/94)=11,4-(21x43/94)=9,6
Nivel medio: (31x51/94)=16,8-(31x43/94)=14,2
Nivel alto: (42x51/94)=22,8-(42x43/94)=19,2
Estas son las frecuencias que debieran presentarse si la hipótesis nula fuera verdadera y, por consiguiente, las variables fueran independientes.
Estos valores los anotamos en una tabla con las mismas celdas que la anterior; así tendremos una tabla con los valores observados y una tabla con los valores esperados, que anotaremos en cursiva, para identificarlos bien.

Uso de cinturón	Nivel bajo	Nivel medio	Nivel alto	TOTAL
SI	*11,4*	*16,8*	*22,8*	51
NO	*9,6*	*14,2*	*19,2*	43
TOTAL	21	31	42	94

Tabla II. Tabla de asociación, valores esperados.
3. En tercer lugar se debe calcular el estadístico de prueba
En este caso, el estadístico de prueba es Ji-cuadrado que, como dijimos al comienzo, compara las frecuencias que entregan los datos de la muestra (frecuencias observadas) con las frecuencias esperadas, y tiene la siguiente fórmula cálculo:

$$\chi^2 = \sum \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

donde o_i representa a cada frecuencia observada y e_i representa a cada frecuencia esperada.
De este modo el valor del estadístico de prueba para este problema será:

$$\chi^2 = \sum \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} =$$

$$\frac{(8-11{,}4)^2}{11{,}4} + \frac{(13-9{,}6)^2}{9{,}6} + \frac{(15-16{,}8)^2}{16{,}8} + \frac{(16-14{,}2)^2}{14{,}2} + \frac{(28-22{,}8)^2}{22{,}8} + \frac{(14-19{,}2)^2}{19{,}2} = 5{,}23$$

Entonces $\chi^2 = 5{,}23$ Este es el valor de nuestro estadístico de prueba que ahora, siguiendo el procedimiento de problemas anteriores (paso 4), debemos comparar con un valor de la tabla de probabilidades para ji-cuadrado ($\mathbf{x}^2$). Esta tabla es muy parecida a la tabla *t de student*, pero tiene sólo valores positivos porque ji-cuadrado sólo da resultados positivos. Véase gráfico 1, que muestra la forma de la curva, con valores desde 0 hasta infinito.

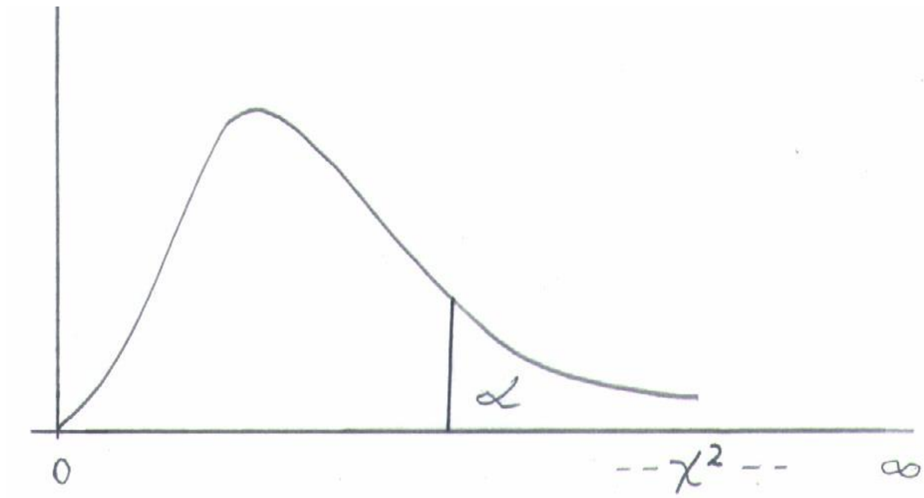


Gráfico 1.

Dado que el estadístico ji cuadrado sólo toma valores positivos, la zona de rechazo de la hipótesis nula siempre estará del lado derecho de la curva.

Uso de tabla ji-cuadrado

La tabla de ji-cuadrado tiene en la primera columna los grados de libertad y en la primera fila la probabilidad asociada a valores mayores a un determinado valor del estadístico (véase gráfico de la tabla III).

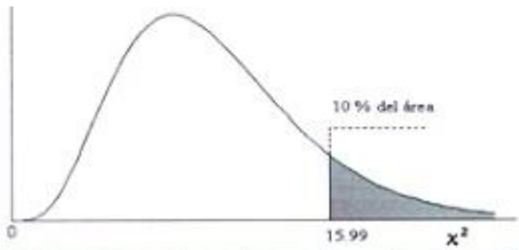
Los grados de libertad dependen del número de celdas que tiene la tabla de asociación donde están los datos del problema y su fórmula de cálculo es muy sencilla:

Grados de libertad (gl)=(nº de filas–1)x(nº de columnas–1)

Así, en nuestro ejemplo, en que hay 2 filas y 3 columnas, los grados de libertad serán:

gl=(2-1)x(3-1)=2

Nótese que no se consideran la fila ni la columna de los totales.



Ejemplo:
Para $\phi = 10$ grados de libertad

$P[\chi^2 > 15.99] = 0.10$

Grados de libertad

alfa

α / ϕ	0.995	0.99	0.975	0.95	0.9	0.75	0.5	0.25	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	α / ϕ
1	3.93E-05	1.57E-04	9.82E-04	3.93E-03	1.58E-02	0.102	0.455	1.323	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	1
2	1.00E-02	2.01E-02	5.06E-02	0.103	0.211	0.575	1.386	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60	2
3	7.17E-02	0.115	0.216	0.352	0.584	1.213	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84	3
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	1.923	3.36	5.39	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86	4
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	2.67	4.35	6.63	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75	5
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.20	3.45	5.35	7.84	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55	6
7	0.989	1.239	1.690	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.02	14.07	16.01	18.48	20.3	7
8	1.344	1.647	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.22	13.36	15.51	17.53	20.1	22.0	8
9	1.735	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.39	14.68	16.92	19.02	21.7	23.6	9
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.55	15.99	18.31	20.5	23.2	25.2	10
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.34	13.70	17.28	19.68	21.9	24.7	26.8	11
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.34	14.85	18.55	21.0	23.3	26.2	28.3	12
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.34	15.98	19.81	22.4	24.7	27.7	29.8	13
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.17	13.34	17.12	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	14
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.04	14.34	18.25	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	15
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.91	15.34	19.37	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	16
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	12.79	16.34	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	17
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	13.68	17.34	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	18
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	14.56	18.34	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	19
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	15.45	19.34	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	20
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	16.34	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	21
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	17.24	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	22
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	18.14	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	23
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	19.04	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	24
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	19.94	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	25
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3	26
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	27
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0	28
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3	29
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7	30
40	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	33.7	39.3	45.6	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8	40
50	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	42.9	49.3	56.3	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5	50
60	35.5	37.5	40.5	43.2	46.5	52.3	59.3	67.0	74.4	79.1	83.3	88.4	92.0	60
70	43.3	45.4	48.8	51.7	55.3	61.7	69.3	77.6	85.5	90.5	95.0	100.4	104.2	70
80	51.2	53.5	57.2	60.4	64.3	71.1	79.3	88.1	96.6	101.9	106.6	112.3	116.3	80
90	59.2	61.8	65.6	69.1	73.3	80.6	89.3	98.6	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3	90
100	67.3	70.1	74.2	77.9	82.4	90.1	99.3	109.1	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2	100
Z_α	-2.58	-2.33	-1.96	-1.64	-1.28	-0.674	0.000	0.674	1.282	1.645	1.96	2.33	2.58	Z_α

Tabla III. Tabla de ji-cuadrado.
Al comienzo elegimos un nivel de significación alfa=0,05. Entonces un valor de tabla para $\mathbf{x}^2$ asociado a 2 grados de libertad y alfa 0,05 es 5,99.
Por lo tanto, como en el gráfico 2 vemos que 5,23 se encuentra a la izquierda de 5,99, la probabilidad asociada a valores superiores a 5,23 es mayor que alfa (0,05).

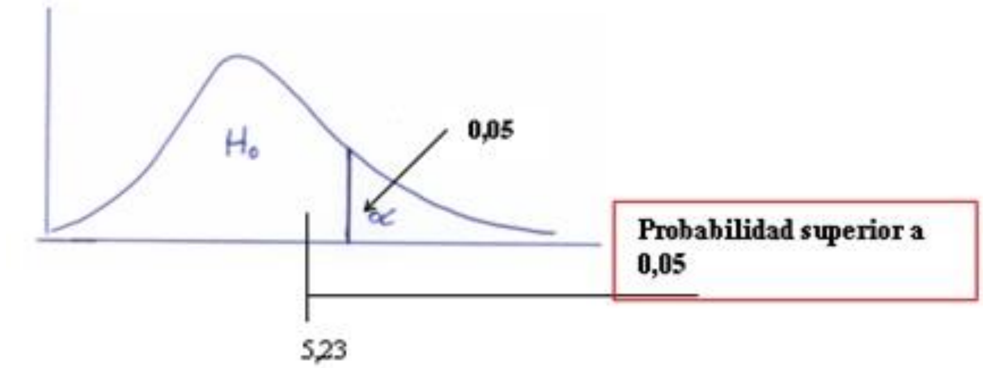


Gráfico 2.
Según esto, debemos aceptar la hipótesis nula que plantea que las variables "uso de cinturón de seguridad" y "nivel socioeconómico" son independientes. Limitación: como norma general, se exige que el 80% de las celdas en una tabla de asociación tengan valores esperados mayores de 5.
Ji-cuadrado como prueba de bondad de ajuste
También se puede usar el estadístico ji-cuadrado para evaluar cuán buena puede resultar una distribución teórica, cuando pretende representar la distribución real de los datos de una muestra determinada. A esto se le llama **evaluar la bondad de un ajuste**. Probar la bondad de un ajuste es ver en qué medida se ajustan los datos observados a una distribución teórica o esperada.
Tomemos como ejemplo la distribución esperada para los individuos de una población que son clasificados según grupo sanguíneo. Según estudios realizados en población, se espera que dicha distribución, en porcentajes, sea la siguiente:

Grupo	Frecuencia esperada
AB	2,0%
A	30,5%
B	9,3%
0	58,2%

Tabla IV. Ejemplo de distribución esperada.
En una muestra de 150 dadores de sangre se encontró la siguiente distribución:

Grupo	Frecuencia observada
AB	4
A	48
B	15
0	83

Tabla V. Ejemplo de distribución observada.
1. Las hipótesis del problema son:
H0: los datos se ajustan a la distribución teórica.
H1: los datos no se ajustan a la distribución teórica.
2. Siguiendo el esquema general de solución propuesto para las pruebas de hipótesis, ahora corresponde elegir un nivel de significación
Elegimos entonces alfa=0,01. El estadístico de prueba será ji-cuadrado, cuya fórmula es:

$$\chi^2 = \sum \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

Debemos calcular las frecuencias esperadas en nuestro grupo. Si aplicamos los porcentajes esperados a la muestra de 150 casos podemos obtener las siguientes frecuencias esperadas (ei):

Grupo	Frec. oi	Frec. ei

AB	4	3,00
A	48	45,75
B	15	13,95
0	83	87,30
Total	150	150,00

Tabla VI. Ejemplo de frecuencias esperadas.
Los grados de libertad de esta tabla se obtienen restando 1 al número de filas, en este caso: gl=4-1=3
Recordemos que la fila del total no se considera para los grados de libertad.
Si ya tenemos las frecuencias observadas y esperadas, podemos proceder a evaluar la diferencia entre ellas utilizando el estadístico ji-cuadrado. Si la diferencia entre frecuencias observadas y esperadas es grande, significará que la hipótesis nula es falsa, o sea, esta distribución no se ajusta a la distribución teórica y si, en cambio, resulta que la diferencia entre frecuencias observadas y esperadas no es muy grande, significará que la hipótesis nula es verdadera; por lo tanto, la distribución en la muestra se ajusta a la distribución teórica y diremos que no hay significación estadística.
El valor del estadístico de prueba (**x**^{2}) es una medida de la diferencia entre frecuencias observadas y esperadas; por lo tanto, mientras mayor resulte , más fácil será rechazar la hipótesis nula.

3. Se calcula el estadístico de prueba con los datos del ejemplo

$$\chi^2 = \sum \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = \frac{(4-3)^2}{3} + \frac{(48-45{,}75)^2}{45{,}75} + \frac{(15-13{,}95)^2}{13{,}95} + \frac{(83-87{,}3)^2}{87{,}3} = 0{,}73$$

$$\chi^2 = 0{,}73$$

4. Se compara este valor con el valor de ji-cuadrado de la tabla

El valor de ji-cuadrado lo buscaremos con alfa=0,01 y 3 grados de libertad. Según tabla, ese valor es 11,34.
Al comparar el valor del estadístico de prueba (0,73) con el valor de tabla (11,34), vemos que 0,73 se encuentra a la izquierda de 11,34 desplazado hacia el centro de la curva y que, por lo tanto, la probabilidad de valores mayores a él es muy superior al nivel de significación alfa=0,01.

5. Conclusión

Dado que la probabilidad de $\chi^2 \geq 0{,}73$ es mayor que alfa, se acepta la hipótesis nula. Esto significa que los datos observados se ajustan a la distribución teórica, por lo tanto las diferencias observadas no son estadísticamente significativas.

6. Gráfico

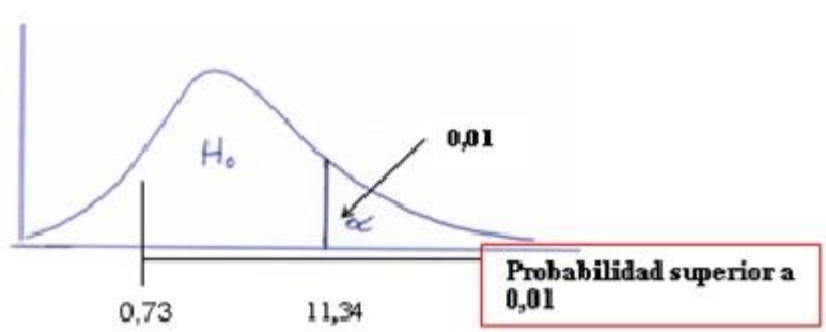


Gráfico 3. Prueba de bondad de ajuste.

Distribución de Weibull,

Modelos de Tasas de Fallas Proporcionales (PHM) y su Aplicación al Mantenimiento Preventivo

Este trabajo recoge aspectos teóricos para ayudar en la interpretación de las señales que emanan del programa de mantenimiento basado en condición. Además, de la información sobre la mezcla de consideraciones económicas, junto con la estimación del riesgo de fallas de los equipos.

En el enfoque clásico, el riesgo de fallo de un elemento es determinado por referencia a su edad o de uso solamente. Se reconoce que el control de estado de los equipos, tales como el seguimiento de las vibraciones, temperatura, humedad, la contaminación, la habilidad de los operadores y análisis espectrográfico de las muestras de aceite (conocidos como covariables), también proporcionan una gran cantidad de información que puede hacer la evaluación de riesgo, más fiable. Así, para una mejor estimación de las características de fiabilidad, el uso de modelos de regresión, se sugiere a causa de la posibilidad de incluir las covariables. Elaboración de modelos de riesgos proporcionales (PHM), es un procedimiento de análisis de regresión multivariable que fue introducido por primera vez por Cox, D.R. ("Regression models and life tables", Journal of Royal Statistical Society, B, Vol. 34, 1972, pp. 187-220.). Las primeras aplicaciones del procedimiento PHM fueron principalmente en el campo de la medicina. Los intentos de utilizar el procedimiento para estimar la fiabilidad de las aeronaves, motores marinos y motores de locomotoras aparecieron por primera vez en la literatura abierta por Jardine, A.K.S. and Anderson, M., en 1985.

El PHM es un complemento para el conjunto de herramientas de uso en el análisis de la fiabilidad y ofrece algunas características particulares ventajosa (Kumar y Klefsjo, 1994). El supuesto básico en el modelo PHM es que la tasa de falla es el producto de una tasa de falla basal ("baseline") dependiendo solamente de la edad del sistema ($\lambda_0(t)$) y una función $\psi(\gamma, z)$ dependiendo de los valores de las variables concomitantes, esto es:

$$\lambda(t, z) = \lambda_0(t)\psi(\gamma, z)$$

donde γ representa el vector de coeficientes de regresión. En aplicaciones de ingeniería, usualmente al menos alguna de las variables concomitantes es un proceso estocástico dependiente del tiempo. Usualmente la función riesgo baseline es modelada por la distribución de Weibull, es decir: $\lambda_0(t) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}$, donde β es el parámetro de forma, y η es el parámetro de escala o vida característica de la distribución. La función que incorpora las variables covariantes esta dada por:

$$\psi(\gamma, z) = \exp\left(\sum_i \gamma_i z_i\right)$$

La información que se obtendrá de las tareas de monitoreo de condición, y analizadas por el procedimiento PHM, puede dar un buen uso al proceso de decisión basado en el mantenimiento por condición. Makis y Jardine proporcionan un enfoque de la teoría de control que incorpora la evaluación de riesgos PHM con la consideración de costes, a optimizar las decisiones de reemplazo. En este procedimiento, el nivel de deterioro determinado por el procedimiento PHM es discretizada y la transición de un nivel a otro se modela como un proceso semi-Markov. Las inspecciones se realizan en intervalos de tiempo fijos. La decisión es tomada en cada inspección, ya sea sustituir de inmediato, o seguir funcionando durante otros intervalos de inspección.

El presente trabajo recoge aspectos teóricos relacionados con el papel potencial de elaboración de modelos de riesgos proporcionales (PHM) para ayudar en la interpretación de las señales que emanan del programa de mantenimiento basado en condición, tales como el análisis de aceite. Además, de la información sobre la mezcla de consideraciones económicas, junto con la estimación del riesgo de fallas de los equipos obtenidos a partir de un enfoque PHM.