LOGICA PROPOSICIONAL

Matemática Discreta

UADE

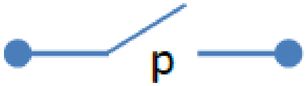
Elementos de la lógica proposicional

Esencialmente tiene dos elementos: proposiciones y conectivos (o conectores).

Una <u>proposición</u> es un enunciado declarativo para el cual tiene sentido determinar su verdad o falsedad.

Las proposiciones se simbolizan con las letras: p, q, r, ...

En un contexto más técnico una proposición puede representarse como un interruptor en un cable por donde pasa corriente eléctrica.



Proposiciones

<u>Ejemplos</u>:

a) La capital de Italia es Roma.

- Es una proposición pues hace una declaración. La simbolizamos por ejemplo, con la letra “p” y decimos que su valor de verdad es verdadero, así que escribimos: $\boxed{v(p)}=V$

Se lee: valor de verdad de p

b) $2 + 5 = 8$

- También es una proposición pues es una declaración. La simbolizamos por ejemplo con la letra “q” , pero en este caso, la declaración es falsa, así que decimos que su valor de verdad es falso, y lo escribimos : $v(q)=F$

Proposiciones

c) Mañana llueve.

- No es proposición pues no es posible saber su valor de verdad ya que se trata de la ocurrencia futura de un hecho del cual no se tiene certeza. Entonces no se simboliza.

d) ¿En qué continente está España?

- Tampoco es una es proposición, puesto que no declara nada, sino que hace una pregunta. Las preguntas no son proposiciones.

e) ¡Cierren esa puerta por favor!

- Tampoco es una proposición, puesto que no declara nada, sino que se da una orden o se exclama algo.

Proposiciones

f) $x+5=8$

- No es una proposición pues si bien hace una declaración, no podemos conocer su valor de verdad ya que depende del valor que tome la variable “x”.

g) Existe un número natural tal que $x+5=8$.

- Es una proposición pues hace una declaración y es verdadera (puesto que $x=3$ es un número natural y satisface la ecuación). De esta forma, podemos simbolizar la proposición con la letra “r” y decir que $v(r)=V$

Proposiciones

h) Madrid es la capital de España y la luna es un planeta.

- Es una proposición, pues hace dos declaraciones de las que se puede decir su valor de verdad (la primera declaración es verdadera, pero la segunda es falsa).

Cuando una proposición está formada por dos o más proposiciones simples se dice que es una proposición compuesta, y su valor de verdad dependerá tanto del valor de verdad de las proposiciones simples que la componen, como de la forma en que estén conectadas.

Una proposición compuesta se construye entonces con proposiciones simples vinculadas por operadores llamados conectivos lógicos.

Su valor de verdad dependerá entonces de los valores de las proposiciones simples que la componen y de los conectivos que las unen.

Conectivos lógicos y sus tablas de verdad

<u>Negación</u>

Si p es una proposición, la negación de p se escribe ¬p y se lee "no p" (o "no es cierto que p")

Ejemplo: "La Luna no es un planeta"

La proposición p sería "La Luna es un planeta", y la estaríamos negando. De forma que su simbolización es ¬p. Como v(p)=F entonces su negación es verdadera, o sea v(¬p)=V

En general, al negar una proposición cambia el valor de verdad, por esto, la tabla de verdad quedaría así

p	¬p
V	F
F	V

Conectivos lógicos y sus tablas de verdad

<u>Conjunción</u>

Si p y q son proposiciones, su conjunción se escribe $p \wedge q$ y se lee "p y q"

Ejemplo: "Madrid es la capital de España y la luna es un planeta."

Está formada por las proposiciones simples

p: "Madrid es la capital de España" y q: "La luna es un planeta". Por lo tanto, la simbolización de la proposición compuesta es $p \wedge q$.

Conectivos lógicos y sus tablas de verdad

Para que una conjunción sea verdadera, las dos proposiciones simples que intervienen deben ser verdaderas.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	F

La proposición: "Madrid es la capital de España y la luna es un planeta." ¿es verdadera o falsa?

p: "Madrid es la capital de España"

q: "La luna es un planeta"

$v(p)=V$, $v(q)=F$

Luego: $v(p \wedge q)=F$

Conectivos lógicos y sus tablas de verdad

En el contexto de los circuitos eléctricos la conjunción se asocia a una conexión en serie:

solo pasa corriente si pasa por ambos interruptores

es decir, funciona del mismo modo que la tabla de verdad de la conjunción

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	F

Conectivos lógicos y sus tablas de verdad

Disyunción inclusiva

Si p y q son dos proposiciones, su disyunción inclusiva se escribe pvq y se lee “p o q”.

Ejemplo: “La recepción está siendo organizada por Lorena o está siendo organizada por Paula.”

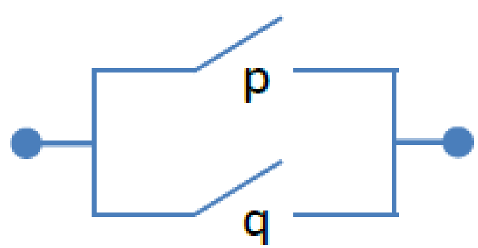
Las proposiciones simples que la componen son p: “La recepción está siendo organizada por Lorena” y q: “La recepción está siendo organizada por Paula”. La proposición dada se simboliza pvq y es verdadera en los casos en que sea cierto que la recepción sólo la organiza Lorena (pues se afirma que sucederá una cosa u otra), también si la recepción fuera organizada sólo por Paula y también si ambas organizan la recepción.

Conectivos lógicos y sus tablas de verdad

La disyunción inclusiva es falsa únicamente si las dos proposiciones simples que intervienen son falsas.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
F	V	V
V	F	V
F	F	F

En el contexto de los circuitos eléctricos la disyunción inclusiva se asocia a una conexión en paralelo:



Conectivos lógicos y sus tablas de verdad

Disyunción exclusiva

Si p y q son dos proposiciones, su disyunción exclusiva se escribe $p \veebar q$ y se lee "o bien p o bien q", "p o q, pero no ambos".

Ejemplo: "O bien el objeto es de color rojo, o bien es de color verde."

Las proposiciones simples que la componen son p:"El objeto es de color rojo" y q:"El objeto es de color verde". La proposición dada se simboliza $p \veebar q$

Conectivos lógicos y sus tablas de verdad

La disyunción exclusiva es verdadera cuando sólo una de las proposiciones simples es verdadera.

Por lo tanto, la tabla queda:

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
F	V	V
V	F	V
F	F	F

- Observación: En general, en el lenguaje coloquial cotidiano, solemos confundir las dos disyunciones, pero en lógica proposicional la diferencia está bien marcada.

Conectivos lógicos y sus tablas de verdad

<u>Condicional</u>

Si p y q son dos proposiciones, el condicional con *antecedente* p y *consecuente* q se escribe $p \rightarrow q$

y se lee "Si p, entonces q", "p es condición suficiente para q", "q es condición necesaria para p", "p sólo si q".

Ejemplo: "Si paso de grado, entonces me regalan la bicicleta."

Para entender la lógica de la tabla de verdad de un condicional es conveniente pensarlo como una promesa, en la cual: si se cumple el antecedente, debe cumplirse el consecuente para que la promesa sea cierta.

Conectivos lógicos y sus tablas de verdad

Un condicional es falso únicamente si el antecedente es verdadero y el consecuente falso.

La tabla es:

p	q	$p \to q$
V	V	V
F	V	V
V	F	F
F	F	V

Conectivos lógicos y sus tablas de verdad

<u>Bicondicional</u>

Si p y q son dos proposiciones, el bicondicional entre ellas se escribe "p↔q" y se lee "p si y sólo si q", "p es condición necesaria y suficiente para q" o "q es condición necesaria y suficiente para p"

Ejemplo: "Es necesario y suficiente que yo apruebe los dos parciales con nota mayor o igual que ocho para que yo promocione la materia."

Es p↔q, con p: "Yo apruebo los dos parciales con nota mayor o igual que ocho." y q: "Yo promociono la materia."

Conectivos lógicos y sus tablas de verdad

Un bicondicional es verdadero sólo en el caso de que las dos proposiciones simples que lo componen tengan el mismo valor de verdad.

La tabla de verdad, por lo tanto, queda de la siguiente forma:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	V

Conectivos lógicos y sus tablas de verdad

Ejercicio TP 1

4. Exprese en forma simbólica y determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

b) Si $4-2=8$ ó 6 es par, entonces $6>10$.

c) O 2 es un entero positivo o bien $\sqrt{2}$ es un número irracional.

e) 4 es un número par y 26 es divisible por 13.

b) p:4-2=8, q:6 es par, r:6>10

forma simbólica: $(p \vee q) \rightarrow r$

$v(p)=F$, $v(q)=V$, $v(r)=F$

$v((p \vee q) \rightarrow r)=F$

c) p:2 es un entero positivo, q:$\sqrt{2}$ es un número irracional

forma simbólica: $p \veebar q$

$v(p)=V$, $v(q)=V$

$v(p \veebar q)=F$

e) p:4 es un número par, q:26 es divisible por 13

forma simbólica: $p \wedge q$

$v(p)=V$, $v(q)=V$

$v(p \wedge q)=V$

Tablas de verdad

Ejercicio TP 1

5. Construya las tablas de verdad de las siguientes formas proposicionales; indique en cada caso si se trata de una tautología, una contradicción o una contingencia:

b) $p \wedge \neg p$

e) $q \rightarrow (p \vee q)$

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
V	F	F
F	V	F

Es una contradicción.

p	q	$p \vee q$	$q \rightarrow (p \vee q)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	V

Es una tautología.

Tablas de verdad

Ejercicio - mismo enunciado para: $p \to (q \wedge \neg r)$

p	q	r	¬r	q∧¬r	p→(q∧¬r)
V	V	V	F	F	F
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	V
F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	F	V
F	F	F	V	F	V

Es una contingencia.

Tablas de verdad

- Una proposición es una <u>tautología</u> si su valor de verdad es siempre verdadero, independientemente de los valores de verdad de las proposiciones simples que la compongan.
- Una proposición es una <u>contingencia</u> si su valor de verdad depende de los valores de verdad de las proposiciones simples que la compongan.
- Una proposición es una <u>contradicción</u> si su valor de verdad es siempre falso, independientemente de los valores de verdad de las proposiciones simples que la componen.

Equivalencia lógica

Una <u>equivalencia lógica</u> es un bicondicional tautológico.

Dadas dos proposiciones compuestas p y q, si el bicondicional p $\leftrightarrow$ q es tautológico, decimos que p y q son proposiciones <u>lógicamente equivalentes.</u>

En tal caso, $\boxed{\text{se anota: p} \Leftrightarrow \text{q}}$ (observar que la notación es diferente, con doble línea)

Ejemplo: Demostrar que $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$

Basta hacer la tabla de verdad del bicondicional $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ para comprobar que efectivamente es una tautología.

Equivalencia lógica

$$(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$$

p	q	¬p	p→q	¬pvq	$(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

El bicondicional es tautología; se trata por lo tanto de una equivalencia lógica.

Luego: p→q es lógicamente equivalente a ¬pvq

Leyes lógicas

Hay muchas equivalencias lógicas y algunas de ellas revisten cierta importancia.

Denominamos **leyes lógicas** a las equivalencias lógicas más conocidas (todas ellas con nombre).

El uso de las leyes lógicas permite pasar de una proposición compuesta a otra de enunciado más sencillo que resulta lógicamente equivalente a la primera.

Leyes Lógicas

Para cualesquiera proposiciones p, q, r, cualquier tautología T_0 y cualquier contradicción F_0:

1) Ley de doble contradicción: $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$

2) Leyes de De Morgan: $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

3) Leyes conmutativas: $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

4) Leyes distributivas: $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

5) Leyes asociativas: $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$

$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$

Leyes lógicas

6) Leyes idempotentes: $p \wedge p \Leftrightarrow p$

$p \vee p \Leftrightarrow p$

7) Leyes del neutro: $p \wedge T_0 \Leftrightarrow p$

$p \vee F_0 \Leftrightarrow p$

8) Leyes inversas: $p \wedge \neg p \Leftrightarrow F_0$

$p \vee \neg p \Leftrightarrow T_0$

9) Leyes de dominación: $p \vee T_0 \Leftrightarrow T_0$

$p \wedge F_0 \Leftrightarrow F_0$

10) Leyes de absorción: $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

11) Equivalencia del condicional: $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$

12) Ley del contra recíproco: $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$

Leyes lógicas

Ejercicio TP 1

10. Verifique que las siguientes formas son tautológicas, sin usar tablas de verdad. Justifique.

a) $[(p \wedge q) \rightarrow r] \leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$

$(p \wedge q) \rightarrow r \Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee r$ por equiv. del condicional

$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee r$ por ley de De Morgan

$\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee r)$ por ley asociativa

$\Leftrightarrow \neg p \vee (q \rightarrow r)$ por equiv. del condicional

$\Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$ por equiv. del condicional

Luego, $[(p \wedge q) \rightarrow r] \Leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$

Leyes lógicas

Ejercicio TP 1

12. Utilizando leyes lógicas, simplifique las siguientes proposiciones:

b) $\neg(p \wedge q) \wedge (\neg p \vee q)$

$\neg(p \wedge q) \wedge (\neg p \vee q) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$ por ley de De Morgan

$\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \wedge q)$ por ley distributiva

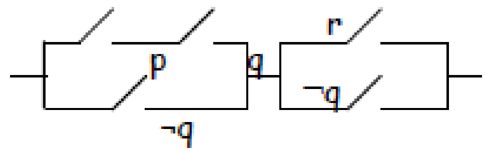
$\Leftrightarrow \neg p \vee F_0$ por ley de inverso

$\Leftrightarrow \neg p$ por ley de neutro

Leyes lógicas

Ejercicio TP 1

14. Simplifique los siguientes circuitos lógicos a través de la simplificación de las proposiciones asociadas a ellos:

b) 

$[(p \wedge q) \vee \neg q] \wedge [r \vee \neg q]$

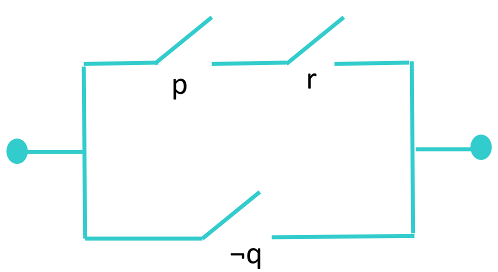
$\Leftrightarrow [(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg q)] \wedge [r \vee \neg q]$ por ley distributiva

$\Leftrightarrow [(p \vee \neg q) \wedge T_0] \wedge [r \vee \neg q]$ por ley de inverso

$\Leftrightarrow [p \vee \neg q] \wedge [r \vee \neg q]$ por ley de neutro

$\Leftrightarrow (p \wedge r) \vee \neg q$ por ley distributiva

Circuito simplificado:



Condicionales vinculados a un condicional dado

- Dado un condicional $p \rightarrow q$, se llaman (respecto de él):

Recíproco: $q \rightarrow p$

- Contra recíproco: $\neg q \rightarrow \neg p$

Contrario: $\neg p \rightarrow \neg q$

Son lógicamente equivalentes entre sí

Son lógicamente equivalentes entre sí

Condicionales vinculados a un condicional dado

8. Expprese la forma recíproca, contraria y contrarrecíproca de la siguiente proposición: "Si mañana es feriado, entonces estudio matemática"

p: "Mañana es feriado" ; q: "Mañana estudio matemática"; $p \rightarrow q$

Recíproco: $q \rightarrow p$

Si mañana estudio matemática entonces es feriado.

Contra recíproco: $\neg q \rightarrow \neg p$

Si mañana no estudio matemática entonces no es feriado.

Contrario: $\neg p \rightarrow \neg q$

Si mañana no es feriado entonces no estudio matemática.