Exemplo de regressão linear múltipla

Enunciado (Proveniente das aulas de Modelos Estatísticos, da Pós-Graduação em Análise de Dados e Gestão de Informação da Universidade dos Açores)

Pensa-se que a energia elétrica consumida mensalmente (\(consumo \)) na produção de um determinado produto químico está relacionada com a temperatura média ambiental (\(temperatura \)), o número de dias do mês (\(dias \)), a pureza média do produto (\(pureza \)) e o número de toneladas de produto produzidas (\(produção \)). Dados históricos sobre estas variáveis estão disponíveis no ficheiro consumo energia.txt.

Leitura de dados

```
setwd("C:/Users/Pedro Medeiros/Desktop/Dropbox/9999999.Pós-Graduação/07.ME/02.Exercícios")
df <- read.table("consumo_energia.txt", header = TRUE)
df
```

```
##    consumo temperatura dias pureza producao
## 1      240          25   24     91      100
## 2      236          31   21     90       95
## 3      270          45   24     88      110
## 4      274          60   25     87       88
## 5      301          65   25     91       94
## 6      316          72   26     94       99
## 7      300          80   25     87       97
## 8      296          84   25     86       96
## 9      267          75   24     88      110
## 10     276          60   25     91      105
## 11     288          50   25     90      100
## 12     261          38   23     89       98
```

Exploração inicial

Nomes de variáveis

```
names(df)
```

```
## [1] "consumo"     "temperatura" "dias"        "pureza"      "producao"
```

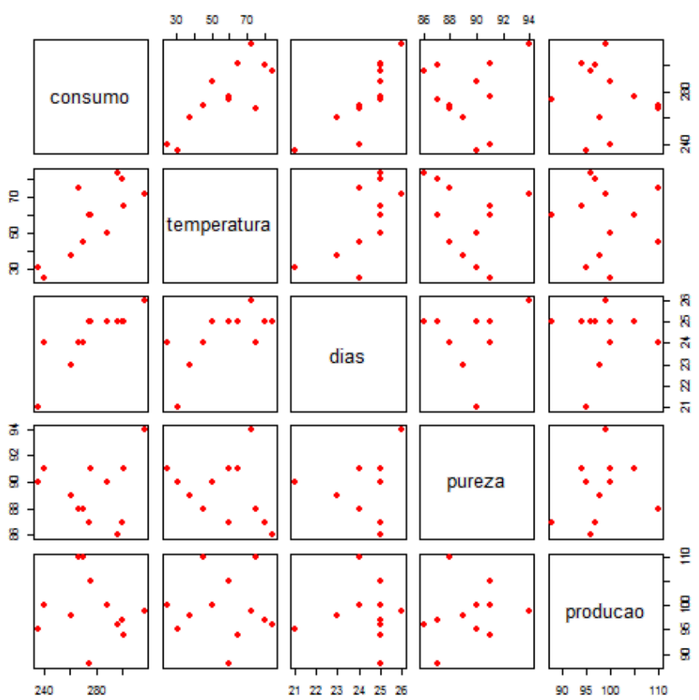
Sumário de variáveis

```
summary(df)
```

```
##     consumo     temperatura        dias         pureza
##  Min.   :236   Min.   :25.0   Min.   :21.0   Min.   :86.0
##  1st Qu.:266   1st Qu.:43.2   1st Qu.:24.0   1st Qu.:87.8
##  Median :275   Median :60.0   Median :25.0   Median :89.5
##  Mean   :277   Mean   :57.1   Mean   :24.3   Mean   :89.3
##  3rd Qu.:297   3rd Qu.:72.8   3rd Qu.:25.0   3rd Qu.:91.0
##  Max.   :316   Max.   :84.0   Max.   :26.0   Max.   :94.0
##     producao
##  Min.   : 88.0
##  1st Qu.: 95.8
##  Median : 98.5
##  Mean   : 99.3
##  3rd Qu.:101.2
##  Max.   :110.0
```

Scatters combinados

```
pairs(df, col = 2, pch = 19)
```

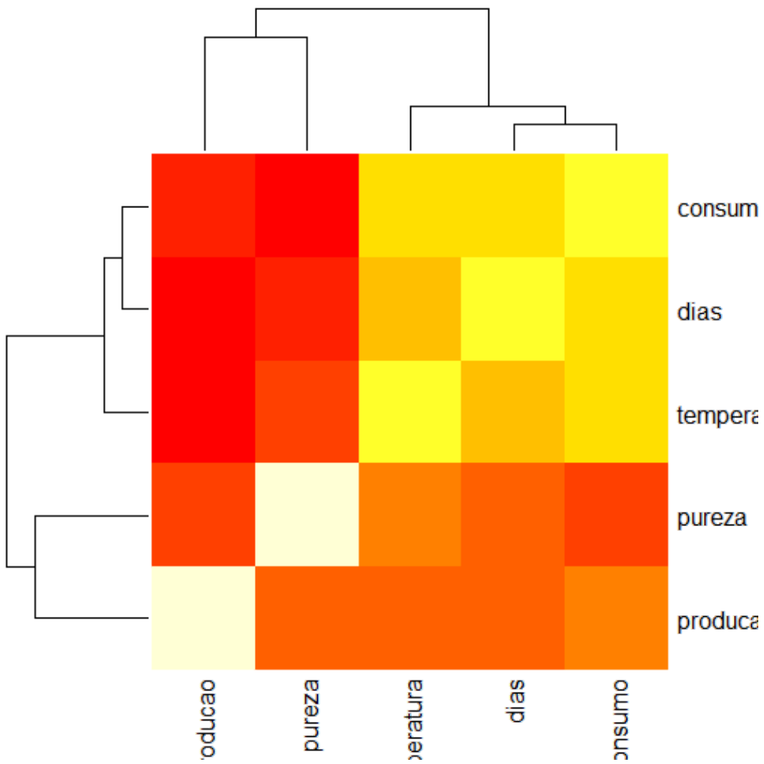


O gráfico permite fazer as seguintes observações:

- Parece existir relação entre consumo e temperatura;

- Parece existir relação entre consumo e número de dias; ### heatmap

```
heatmap(abs(cor(df)))
```




```
cor(df)
```

```
##             consumo temperatura     dias   pureza producao
## consumo     1.00000     0.80254  0.82696  0.09285 -0.13266
## temperatura 0.80254     1.00000  0.66046 -0.28757 -0.02356
## dias        0.82696     0.66046  1.00000  0.11274 -0.02533
## pureza      0.09285    -0.28757  0.11274  1.00000  0.07891
## producao   -0.13266    -0.02356 -0.02533  0.07891  1.00000
```

O heatmap anterior confirma a maior relação entre as três variáveis.

Regressão linear múltipla

3.1 Estime o modelo de regressão linear múltipla.

```
lm1 <- lm(consumo ~ temperatura + dias + pureza + producao, data = df)
```

O modelo anterior considera que todas as variáveis têm influência no consumo.

3.2 Teste a significância global do modelo de regressão.

Existem indícios para rejeitar a hipótese nula do teste F, de que todos os parâmetros são nulos, o que indica que a relação pode ser explicada por uma regressão linear.

```
summary(lm1)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = consumo ~ temperatura + dias + pureza + producao,
##     data = df)
##
## Residuals:
##    Min     1Q Median     3Q    Max
## -14.10  -9.78   1.77   6.80  13.02
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -123.131    157.256   -0.78     0.46
## temperatura    0.757      0.279    2.71     0.03 *
## dias           7.519      4.010    1.87     0.10
## pureza         2.483      1.809    1.37     0.21
## producao      -0.481      0.555   -0.87     0.41
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 11.8 on 7 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.852,  Adjusted R-squared:  0.768
## F-statistic: 10.1 on 4 and 7 DF,  p-value: 0.00496
```

3.3. Identifique os parâmetros que diferem de zero.

Apenas existem indícios para rejeitar a hipótese de parâmetro nulo para a variável temperatura, para um nível de significância de 5% (β_{1})
As restantes variáveis não parecem ter efeito sobre o consumo.

```
summary(lm1)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = consumo ~ temperatura + dias + pureza + producao,
##     data = df)
##
## Residuals:
##    Min     1Q Median     3Q    Max
## -14.10  -9.78   1.77   6.80  13.02
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -123.131    157.256   -0.78     0.46
## temperatura    0.757      0.279    2.71     0.03 *
## dias           7.519      4.010    1.87     0.10
## pureza         2.483      1.809    1.37     0.21
## producao      -0.481      0.555   -0.87     0.41
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 11.8 on 7 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.852,  Adjusted R-squared:  0.768
## F-statistic: 10.1 on 4 and 7 DF,  p-value: 0.00496
```

3.4. Interprete as estimativas dos parâmetros estatisticamente significativos.

O único parâmetros estatisticamente significativo é a temperatura.
Interpretação: Um aumento de 1 grau na temperatura média conduz a um aumento de 0.752 unidades de consumo eléctrico.

3.5. Indique a variação total da energia consumida mensalmente que é explicada pelo modelo de regressão.

A variação total de energia explicada pelo modelo é de 0.852.

3.6. Determine os ICs a 95% para os parâmetros do modelo.

```
confint(lm1)
```

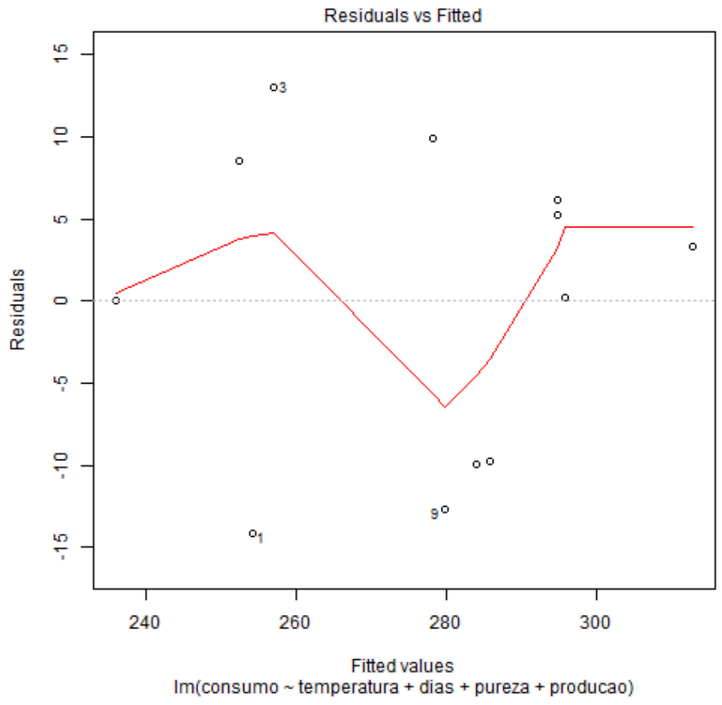
```
##                 2.5 %   97.5 %
## (Intercept) -494.98273 248.7202
## temperatura    0.09735   1.4172
## dias          -1.96365  17.0012
## pureza        -1.79544   6.7616
## producao      -1.79391   0.8316
```

3.7 Proceda à análise de resíduos por forma a validar os pressupostos do modelo.

Distribuição dos resíduos

A variação dos resíduos aparenta diminuir para os valores mais altos. No entanto existem poucos dados.

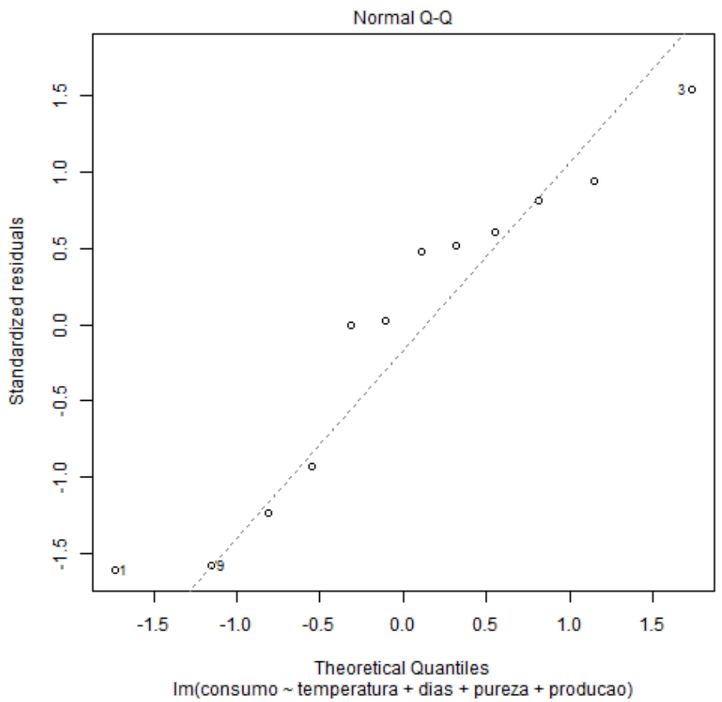
```
plot(lm1, which = 1)
```



Normalidade dos resíduos

O teste de Shapiro não indicia a rejeição da hipótese nula, de normalidade dos resíduos.
O gráfico qqplot apresenta alguns desvios.

```
plot(lm1, which = 2)
```



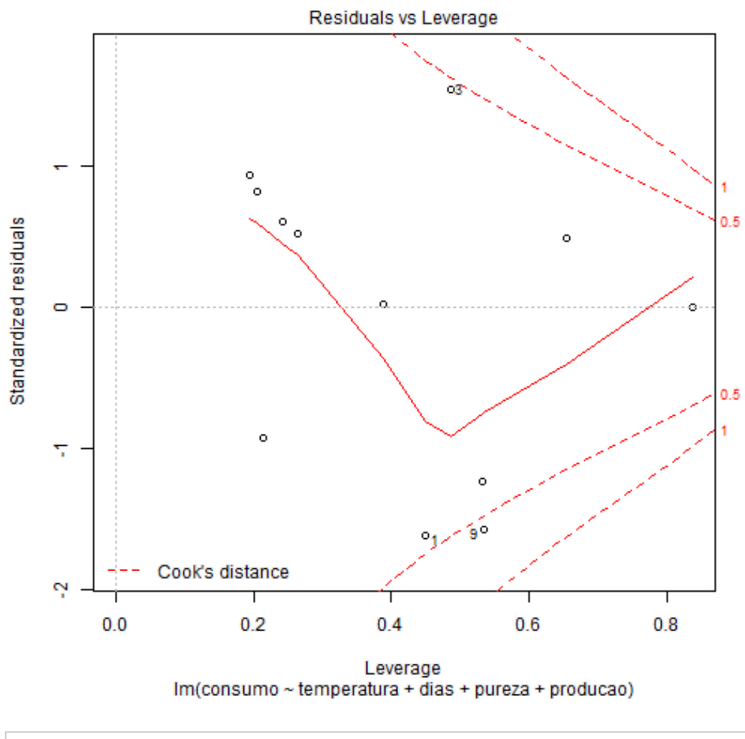

```
shapiro.test(lm1$residuals)
```

```
##
##  Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  lm1$residuals
## W = 0.915, p-value = 0.2469
```

Deteção de valores alvanca e significativos

A observação 9 tem distância de Cook superior a 0.5. Existe uma observação com hat value próximo do valor do máximo (hat_thresh).

```
plot(lm1, which = 5)
```




```
hat_thresh <- 2 * ((dim(df)[2]))/dim(df)[1]
which(hatvalues(lm1) > hat_thresh)
```

```
## 2
## 2
```

Outliers

Não foi detetado nenhum outlier

```
which(rstudent(lm1) > 2)
```

```
## named integer(0)
```

Multicolinearidade

Não foram detetados valores superiores a 5, que indiciem associação muito forte entre variáveis explicativas.

```
library(car)
```

```
## Warning: package 'car' was built under R version 3.0.3
```

```
vif(lm1)
```

```
## temperatura        dias      pureza    producao
##       2.323       2.161       1.335       1.009
```

3.8. Determine uma estimativa para o consumo médio de energia quando a temperatura média ambiental é 75ºF, o número de dias do mês é 24, a pureza média do produto é 90 e o número de toneladas de produto produzido é 98. Obtenha um IC a 95% para o valor

Interval = “confidence”, porque quero estimar o consumo médio da população e não o consumo da população (interval = “predict”).

```
predict(lm1, list(temperatura = 75, dias = 24, pureza = 90, producao = 98),
    interval = "conf")
```

```
##     fit   lwr   upr
## 1 290.4 272.5 308.4
```

Determinação de modelos mais simples, com representatividade semelhante

Filtragem automática pelos métodos “stepwise”, “backward” e “forward” e comparação de resultados.

Método *Stepwise*

O método indica que a variável producao poderá ser retirada do modelo sem perda de qualidade.

```
step(lm1, direction = "both")
```

```
## Start:  AIC=62.74
## consumo ~ temperatura + dias + pureza + producao
##
##               Df Sum of Sq  RSS  AIC
## - producao     1       104 1077 62.0
## <none>                      972 62.7
## - pureza       1       262 1234 63.6
## - dias         1       488 1461 65.6
## - temperatura  1      1023 1995 69.4
##
## Step:  AIC=61.96
## consumo ~ temperatura + dias + pureza
##
##               Df Sum of Sq  RSS  AIC
## <none>                     1077 62.0
## - pureza       1       235 1312 62.3
## + producao     1       104  972 62.7
## - dias         1       512 1589 64.6
## - temperatura  1      1001 2078 67.9
```

```
##
## Call:
## lm(formula = consumo ~ temperatura + dias + pureza, data = df)
##
## Coefficients:
## (Intercept)  temperatura         dias       pureza
##    -162.135        0.749        7.691        2.343
```

Método *backward*

As conclusões são semelhantes ao método *stepwise*

```
step(lm1, direction = "backward")
```

```
## Start:  AIC=62.74
## consumo ~ temperatura + dias + pureza + producao
##
##               Df Sum of Sq  RSS  AIC
## - producao     1       104 1077 62.0
## <none>                      972 62.7
## - pureza       1       262 1234 63.6
## - dias         1       488 1461 65.6
## - temperatura  1      1023 1995 69.4
##
## Step:  AIC=61.96
## consumo ~ temperatura + dias + pureza
##
##               Df Sum of Sq  RSS  AIC
## <none>                     1077 62.0
## - pureza       1       235 1312 62.3
## - dias         1       512 1589 64.6
## - temperatura  1      1001 2078 67.9
```

```
##
## Call:
## lm(formula = consumo ~ temperatura + dias + pureza, data = df)
##
## Coefficients:
## (Intercept)  temperatura         dias       pureza
##    -162.135        0.749        7.691        2.343
```

Método *forward*

O método *forward* indica que se devem manter todas as variáveis.

```
step(lm1, direction = "forward")
```

```
## Start:  AIC=62.74
## consumo ~ temperatura + dias + pureza + producao
```

```
##
## Call:
## lm(formula = consumo ~ temperatura + dias + pureza + producao,
##     data = df)
##
## Coefficients:
## (Intercept)  temperatura         dias       pureza     producao
##    -123.131        0.757        7.519        2.483       -0.481
```

Teste F para comparar a qualidade dos modelos com e sem a variável produção.

Criação de modelo atualizado, sem a variável produção.
Os parâmetros das variáveis \(dias \) e \(pureza \) continuam a não ter significado estatístico, pelo que se considera que deveriam ser retiradas da análise num caso real.

```
lm2 <- update(lm1, ~. - producao)
summary(lm2)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = consumo ~ temperatura + dias + pureza, data = df)
##
## Residuals:
##    Min     1Q Median     3Q    Max
## -17.81  -6.77   3.26   7.98   9.53
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -162.135    148.315   -1.09    0.306
## temperatura    0.749      0.275    2.73    0.026 *
## dias           7.691      3.942    1.95    0.087 .
## pureza         2.343      1.774    1.32    0.223
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 11.6 on 8 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.836,  Adjusted R-squared:  0.775
## F-statistic: 13.6 on 3 and 8 DF,  p-value: 0.00165
```

A comparação dos modelos indica que não existem indícios para rejeitar a hipótese nula de igualdade de qualidade dos modelos.
Os modelos são semelhantes escolhendo-se, portanto, o modelo mais simples, pelo princípio da parcimónia.

```
anova(lm2, lm1)
```

```
## Analysis of Variance Table
##
## Model 1: consumo ~ temperatura + dias + pureza
## Model 2: consumo ~ temperatura + dias + pureza + producao
##   Res.Df  RSS Df Sum of Sq    F Pr(>F)
## 1      8 1077
## 2      7  972  1       104 0.75   0.41
```

Teste F, retirando todas as variáveis, com exceção de temperatura

O teste ainda permite concluir que existem evidências para considerar os modelos equivalentes, apesar da redução do valor de \(R^2 \).

```
lm3 <- update(lm1, ~. - producao - pureza - dias)
summary(lm3)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = consumo ~ temperatura, data = df)
##
## Residuals:
##    Min     1Q Median     3Q    Max
## -28.20  -6.60  -2.14   7.83  23.84
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  219.380     14.265   15.38  2.8e-08 ***
## temperatura    1.011      0.238    4.25   0.0017 **
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 15.3 on 10 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.644,  Adjusted R-squared:  0.608
## F-statistic: 18.1 on 1 and 10 DF,  p-value: 0.00168
```

```
anova(lm3, lm1)
```

```
## Analysis of Variance Table
##
## Model 1: consumo ~ temperatura
## Model 2: consumo ~ temperatura + dias + pureza + producao
##   Res.Df  RSS Df Sum of Sq    F Pr(>F)
## 1     10 2340
## 2      7  972  3      1367 3.28  0.089 .
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```