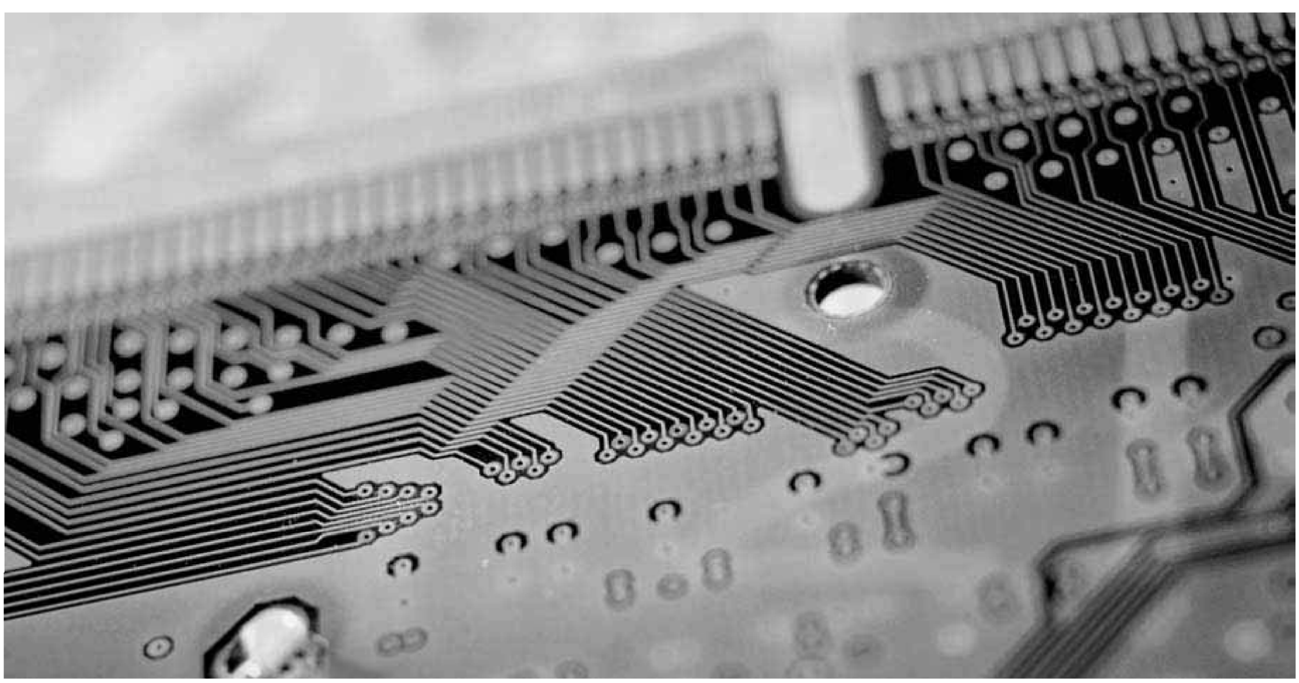
4

ÁLGEBRA DE BOOLE Y SIMPLIFICACIÓN LÓGICA

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Aplicar las leyes y reglas básicas del álgebra de Boole.
- Aplicar los teoremas de DeMorgan a las expresiones booleanas.
- Describir redes de puertas mediante expresiones booleanas.



- Evaluar las expresiones booleanas.
- Simplificar expresiones mediante las leyes y reglas del álgebra booleana.
- Convertir cualquier expresión booleana en una suma de productos.
- Convertir cualquier expresión booleana en un producto de sumas.
- Utilizar el mapa de Karnaugh para simplificar expresiones booleanas.
- Utilizar el mapa de Karnaugh para simplificar tablas de verdad.
- Utilizar condiciones “indiferentes” para simplificar funciones lógicas.
- Aplicar el álgebra de Boole, los mapas de Karnaugh y el lenguaje VHDL a los sistemas digitales.

PALABRAS CLAVE

- Variable
- Complemento
- Término suma
- Término producto
- Suma de productos
- Producto de sumas
- Mapa de Karnaugh
- Indiferente
- VHDL

INTRODUCCIÓN

En 1854, George Boole publicó una obra titulada *Investigación de las leyes del pensamiento, sobre las que se basan las teorías matemáticas de la lógica y la probabilidad*. En esta publicación se formuló la idea de un “álgebra lógica”, que se conoce hoy en día como álgebra de Boole. El álgebra de Boole es una forma adecuada y sistemática de expresar y analizar las operaciones de los circuitos lógicos. Claude Shannon fue el primero en aplicar la obra de Boole al análisis y diseño de circuitos. En 1938, Shannon escribió su tesis doctoral en el MIT (*Massachussets Institute of Technology*) titulada *Análisis simbólico de los circuitos de conmutación y relés*.

Este capítulo se ocupa de las leyes, reglas y teoremas del álgebra booleana y sus aplicaciones a los circuitos digitales. Aprenderá a definir un circuito mediante una expresión booleana y a determinar su funcionamiento. También se tratará la simplificación de los circuitos lógicos utilizando el álgebra booleana y los mapas de Karnaugh.

También se presenta el lenguaje de descripción hardware VHDL para la programación de dispositivos lógicos.

APLICACIÓN A LOS SISTEMAS DIGITALES

Esta aplicación a los sistemas digitales ilustra los conceptos que serán explicados a lo largo del capítulo. El funcionamiento del display de 7 segmentos del sistema de control y recuento de pastillas del Capítulo 1 es un buen método para ilustrar la aplicación del álgebra de Boole y de los mapas de Karnaugh, de modo que se obtenga la más sencilla implementación en el diseño de circuitos lógicos. Por tanto, en está aplicación a los sistemas digitales, nos centraremos en la lógica del convertidor BCD-7 segmentos que gobierna los dos displays del sistema indicados en la Figura 1.58.

4.1 OPERACIONES Y EXPRESIONES BOOLEANAS

El álgebra de Boole son las matemáticas de los sistemas digitales. Es indispensable tener unos conocimientos básicos del álgebra booleana para estudiar y analizar los circuitos lógicos. En el capítulo anterior, se han presentado las operaciones y expresiones booleanas para las puertas NOT, AND, OR, NAND y NOR.

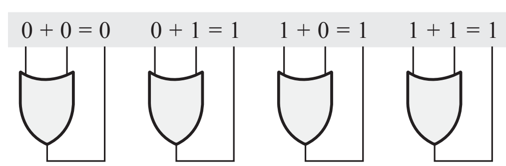
Al finalizar esta sección, el lector deberá ser capaz de:

■ Definir *variable*. ■ Definir *literal*. ■ Identificar un término suma. ■ Evaluar un término suma. ■ Identificar un término producto. ■ Evaluar un término producto. ■ Explicar la adición booleana. ■ Explicar la multiplicación booleana.

Los términos *variable, complemento* y *literal* son términos utilizados en el álgebra booleana. Una ***variable*** es un símbolo (normalmente una letra mayúscula en cursiva) que se utiliza para representar magnitudes lógicas. Cualquier variable puede tener un valor de 0 o de 1. El **complemento** es el inverso de la variable y se indica mediante una barra encima de la misma. Por ejemplo, el complemento de la variable A es $\overline{A}$. Si $A = 1$, entonces $\overline{A} = 0$. Si $A = 0$, entonces $\overline{A} = 1$. El complemento de la variable A se lee "no A" o "A barra". En ocasiones, se emplea un apóstrofe en lugar de la barra para indicar el complemento de una variable; por ejemplo B' indica el complemento de B. En este libro, sólo se utiliza la barra. Un **literal** es una variable o el complemento de una variable.

Suma booleana

Como hemos visto en el Capítulo 3, la **suma booleana** es equivalente a la operación OR y a continuación se muestran sus reglas básicas junto con su relación con la puerta OR:



En el álgebra de Boole, un ***término suma*** es una suma de literales. En los circuitos lógicos, un término suma se obtiene mediante una operación OR, sin que exista ninguna operación AND en la expresión. Algunos ejemplos de términos suma son $A + B$, $A + \overline{B}$, $A + B + \overline{C}$ y $A + B + C + \overline{D}$.

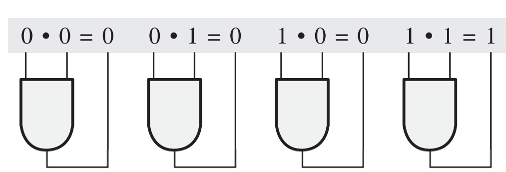
▲ *La puerta OR es un sumador booleano.*

Un término suma es igual a 1 cuando uno o más de los literales del término es 1. Un término suma es igual a 0 sólo si cada uno de los literales son iguales a 0.

Multiplicación booleana

▲ *La puerta AND es un multiplicador booleano.*

En el Capítulo 3 vimos también que la **multiplicación booleana** es equivalente a la operación AND y sus reglas básicas junto con sus relaciones con la puerta AND se ilustran a continuación:



NOTAS INFORMÁTICAS

En un microprocesador, la unidad aritmético lógica (ALU) realiza las operaciones aritméticas y lógicas booleanas sobre los datos digitales mediante instrucciones de programa. Las operaciones lógicas son equivalentes a las operaciones de las puertas básicas con las que ya estamos familiarizados, aunque se trabaja con ocho bits como mínimo a la vez. Ejemplos de instrucciones lógicas booleanas son AND, OR, NOT y XOR, que se denominan *mnemónicos*. Un programa en lenguaje ensamblador utiliza estos mnemónicos para especificar una operación. Y otro programa denominado *ensamblador* traduce los mnemónicos a un código binario que puede entender el microprocesador.

En el álgebra de Boole, un ***término producto*** es un producto de literales. En los circuitos lógicos, un término suma se obtiene mediante una operación AND, sin que existe ninguna operación OR en la expresión. Algunos ejemplos de términos suma son AB, $A\overline{B}$, ABC y $A\overline{B}C\overline{D}$.

Un término producto es igual a 1 sólo si cada uno de los literales del término es 1. Un término producto es igual a 0 cuando uno o más de los literales son iguales a 0.

EJEMPLO 4.1

Determinar los valores de *A, B, C* y *D* que hacen que el término suma $A+\overline{B}+C+\overline{D}$ sea igual a cero.

Solución Para que el término suma sea 0, cada uno de los literales del término debe ser igual a 0. Por tanto, $A = \mathbf{0}$, $B = 1$ (para que $\overline{B} = 0$) y $D = \mathbf{1}$) para que $\overline{D} = 0$).

$$A+\overline{B}+C+\overline{D} = 0+\overline{1}+0+\overline{1} = 0+0+0+0 = 0$$

Problema relacionado* Determinar los valores de A y B de modo que el término suma $\overline{A}+B$ sea igual a 0.

* Las respuestas se encuentran al final del capítulo.

EJEMPLO 4.2

Determinar los valores de *A, B, C* y *D* que hacen que el término producto $A\overline{B}C\overline{D}$ sea igual a 1.

Solución Para que el término producto sea 1, cada uno de los literales del término debe ser igual a 1. Por tanto, $A = \mathbf{1}$, $B = \mathbf{0}$ (para que $\overline{B} = 1$), $C = \mathbf{1}$ y $D = \mathbf{0}$ (para que $\overline{D} = 1$).

$$A\overline{B}C\overline{D} = 1\cdot\overline{0}\cdot 1\cdot\overline{0} = 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$

Problema relacionado Determinar los valores de A y B de modo que el término suma $\overline{A}\overline{B}$ sea igual a 1.

REVISIÓN DE LA SECCIÓN 4.1

Las respuestas se encuentran al final del capítulo

1. Si $A = 0$, ¿cuánto vale $\overline{A}$?
2. Determinar los valores de A, B y C que hacen que el término suma $\overline{A}+\overline{B}+C$ sea igual a 0.
3. Determinar los valores de A, B y C que hacen que el término producto $A\overline{B}C$ sea igual a 1.

4.2 LEYES Y REGLAS DEL ÁLGEBRA DE BOOLE

Al igual que en otras áreas de las matemáticas, existen en el álgebra de Boole una serie de reglas y leyes bien determinadas que tienen que seguirse para aplicarla correctamente. Las más importantes son las que se presentan en esta sección.

Al finalizar esta sección, el lector deberá ser capaz de:

■ Aplicar las leyes conmutativas de la adición y multiplicación. ■ Aplicar las leyes asociativas de la adición y multiplicación. ■ Aplicar la ley distributiva. ■ Aplicar las doce reglas básicas del álgebra de Boole.

Leyes del álgebra de Boole

Las leyes básicas del álgebra de Boole (las **leyes conmutativas** de la suma y la multiplicación, y las **leyes asociativas** de la suma y la multiplicación y la **ley distributiva**) son las mismas que las del álgebra ordinaria. Cada una de las leyes se ilustra con dos o tres variables, pero el número de variables no está limitado a esta cantidad.

Leyes conmutativas La *ley conmutativa de la suma* para dos variables se escribe como sigue:

Ecuación 4.1

$$A + B = B + A$$

Esta ley establece que el orden en que se aplica a las variables la operación OR es indiferente. Recuerde que cuando se aplica a los circuitos lógicos, la suma y la operación OR es lo mismo. La Figura 4.1 ilustra la ley conmutativa aplicada a una puerta OR, en la que se puede ver que es indistinto a qué entrada asignemos cada una de las variables. (El símbolo ≡ significa "equivalente a".)

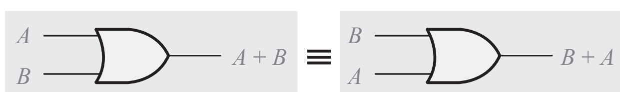


FIGURA 4.1 Aplicación de la ley conmutativa de la suma.

La *ley conmutativa de la multiplicación* para dos variables es

Ecuación 4.2

$$AB = BA$$

Esta ley establece que el orden en que se aplica a las variables la operación AND es indiferente. La Figura 4.2 ilustra esta ley tal y como se aplica a la puerta AND.

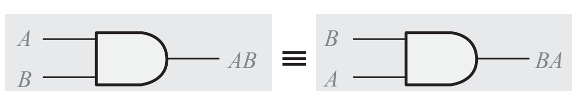


FIGURA 4.2 Aplicación de la ley conmutativa de la multiplicación.

Leyes asociativas La *ley asociativa de la suma* para tres variables se escribe como sigue:

Ecuación 4.3

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

Esta ley establece que cuando se aplica la operación OR a más de dos variables, el resultado es el mismo independientemente de la forma en que se agrupen las variables. La Figura 4.3 ilustra esta ley aplicada a puertas OR de dos entradas.

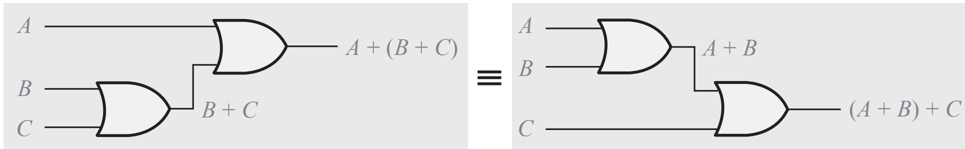


FIGURA 4.3 Aplicación de la ley asociativa de la suma.

La *ley asociativa de la multiplicación* para tres variables se escribe del siguiente modo:

Ecuación 4.4

$$A(BC) = (AB)C$$

Esta ley establece que cuando se aplica la operación AND a más de dos variables, el resultado es el mismo independientemente de la forma en que se agrupen las variables. La Figura 4.4 ilustra esta ley aplicada a puertas AND de dos entradas.

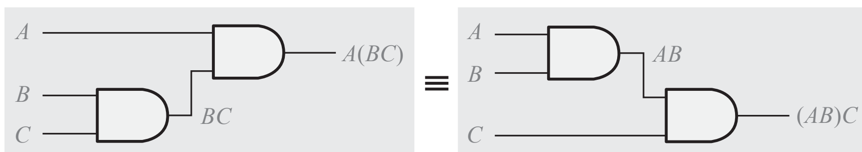


FIGURA 4.4 Aplicación de la ley asociativa de la multiplicación.

Ley distributiva La *ley distributiva* para tres variables se escribe como sigue:

Ecuación 4.5

$$A(B + C) = AB + AC$$

Esta ley establece que aplicar la operación OR a dos o más variables y luego aplicar la operación AND al resultado de esa operación y a otra variable aislada, es equivalente a aplicar la operación AND a la variable aislada con cada uno de los sumandos y luego realizar la operación OR con los productos resultantes. La ley distributiva expresa también el proceso de *sacar factor común* en el que la variable común A se saca como factor de los productos parciales, como por ejemplo, $AB + AC = A(B + C)$. La Figura 4.5 ilustra la ley distributiva mediante su implementación de puertas.

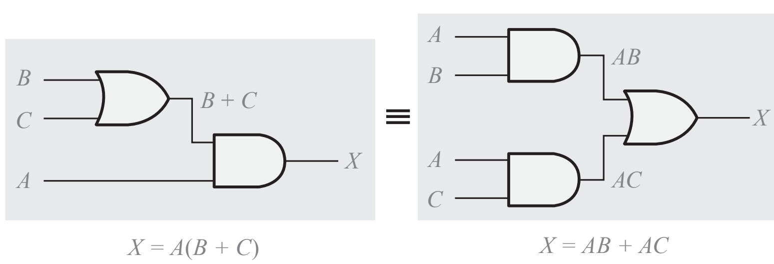


FIGURA 4.5 Aplicación de la ley distributiva.

Reglas del álgebra booleana

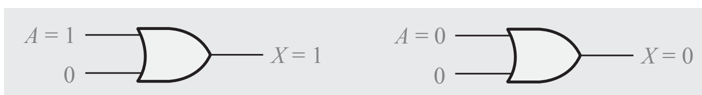
La Tabla 4.1 enumera las doce reglas básicas, muy útiles, para la manipulación y simplificación de **expresiones booleanas**. Las nueve primeras reglas las veremos en términos de su aplicación a las puertas lógicas. Las reglas 10 a 12 se obtendrán a partir de las reglas más sencillas y de las leyes anteriormente explicadas.

1. $A + 0 = A$	**7.** $A \cdot A = A$
2. $A + 1 = 1$	**8.** $A \cdot \overline{A} = 0$
3. $A \cdot 0 = 0$	**9.** $\overline{\overline{A}} = A$
4. $A \cdot 1 = A$	**10.** $A + AB = A$
5. $A + A = A$	**11.** $A + \overline{A}B = A + B$
6. $A + \overline{A} = 1$	**12.** $(A + B)(A + C) = A + BC$

A, *B* o *C* pueden representar una sola variable o una combinación de variables.

TABLA 4.1 Reglas básicas del Álgebra de Boole.

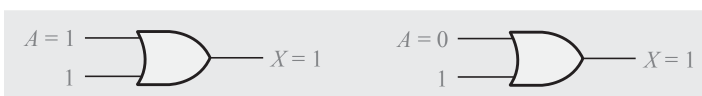
Regla 1. $A + 0 = A$ Si aplicamos la operación OR a una variable cualquiera y a 0, el resultado es siempre igual a la variable. Si A es 1, la salida es igual a 1 y, por tanto, igual a A. Si A es 0, la salida es 0 e igualmente idéntica a A. Esta ley se ilustra en la Figura 4.6 en la que la entrada inferior está siempre a 0.



$X = A + 0 = A$

FIGURA 4.6

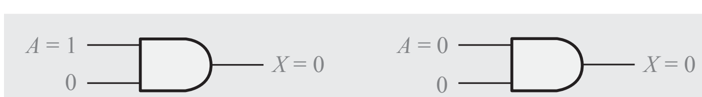
Regla 2. $A + 1 = 1$ Si se aplica la operación OR a una variable y a 1, el resultado es siempre igual a 1. Un 1 en una entrada de una puerta OR produce siempre un 1 en la salida, independientemente del valor de la otra entrada. Esta regla se ilustra en la Figura 4.7, en la que la entrada inferior está siempre a 1.



$X = A + 1 = 1$

FIGURA 4.7

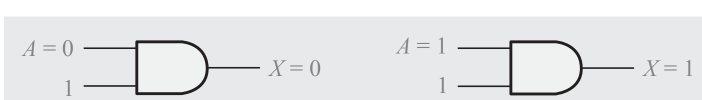
Regla 3. $A \cdot 0 = 0$ Si se aplica la operación AND a una variable y a 0, el resultado es siempre igual a 0. Siempre que una de las entradas de una puerta AND sea 0, la salida siempre es 0, independientemente del valor de la otra entrada. Esta regla se ilustra en la Figura 4.8, en la que la entrada inferior está siempre a 0.



$X = A \bullet 0 = 0$

FIGURA 4.8

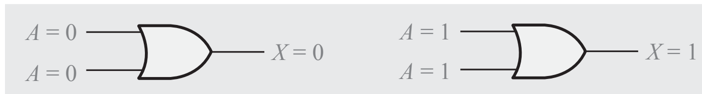
Regla 4. $A \cdot 1 = A$ Si se aplica la operación AND a una variable y a 1, el resultado es siempre igual a la variable. Si la variable A es 0, la salida de la puerta AND será siempre 0, mientras que si A es 1, la salida será 1, dado que las dos entradas son 1. Esta regla se ilustra en la Figura 4.9, en la que la entrada inferior está siempre a 1.



$X = A \bullet 1 = A$

FIGURA 4.9

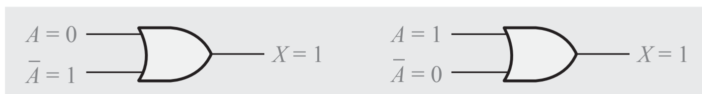
Regla 5. $\boldsymbol{A + A = A}$ Si se aplica la operación OR a una variable consigo misma, el resultado es siempre igual a la variable. Si A es 0, entonces 0 + 0 = 0, mientras que si A es 1, 1 + 1 =1. Esto se muestra en la Figura 4.10, en la que se aplica la misma variable a ambas entradas.



$X = A + A = A$

FIGURA 4.10

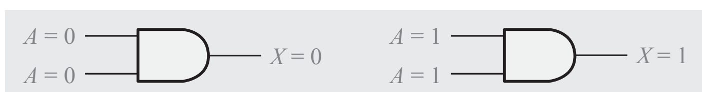
Regla 6. $\boldsymbol{A + \overline{A} = 1}$ Si se aplica la operación OR a una variable y a su complemento, el resultado es siempre igual a 1. Si A es 0, entonces $0 + \overline{0} = 0 + 1 = 1$. Si A es 1, entonces $1 + \overline{1} = 1 + 0 = 1$. En la Figura 4.11 podemos ver una puerta OR en la que sus entradas son una variable y su complemento.



$X = A + \overline{A} = 1$

FIGURA 4.11

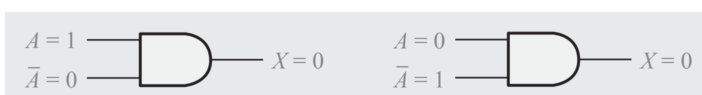
Regla 7. $\boldsymbol{A \cdot A = A}$ Si se aplica la operación AND a una variable consigo misma, el resultado siempre es igual a la variable. Si A = 0, entonces $0 \cdot 0 = 0$, y si $A = 1$, entonces $1 \cdot 1 = 1$. Esta regla se ilustra en la Figura 4.12.



$X = A \bullet A = A$

FIGURA 4.12

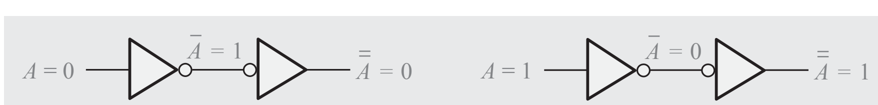
Regla 8. $\boldsymbol{A \cdot \overline{A} = 0}$ Si se aplica la operación AND a una variable y a su complemento, el resultado es siempre igual a 0. Esta regla se basa en que siempre A o $\overline{A}$ será 0, y además en que cuando se aplica un 0 a una de las entradas de una puerta AND, la salida siempre es 0. Esta regla se ilustra en la Figura 4.13.



$X = A \bullet \overline{A} = 0$

FIGURA 4.13

Regla 9. $\boldsymbol{\overline{\overline{A}} = A}$ El complemento del complemento de una variable es siempre la propia variable. El complemento de la variable A es $\overline{A}$ y el complemento de $\overline{A}$ será de nuevo A, que es la variable original. Esta regla se muestra en la Figura 4.14 mediante el uso de dos inversores.



$\overline{\overline{A}} = A$

FIGURA 4.14

Regla 10. $\boldsymbol{A + AB = A}$ Esta regla se puede obtener aplicando la ley distributiva y las reglas 2 y 4, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} A + AB &= A(1+B) && \text{Sacar factor común (ley distributiva)} \\ &= A \cdot 1 && \text{Regla 2: } (1+B)=1 \\ &= A && \text{Regla 4: } A \cdot 1 = A \end{aligned}$$

La demostración se muestra en la Tabla 4.2, la cual incluye la tabla de verdad y la simplificación del circuito lógico resultante.

A	B	AB	$A + AB$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

igual

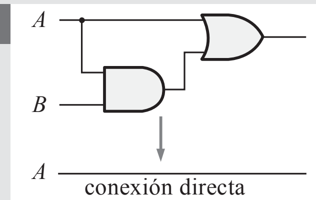


TABLA 4.2 Regla 10: $A + AB = A$.

Regla 11. $\boldsymbol{A + \overline{A}B = A + B}$ Esta regla puede demostrarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} A + \overline{A}B &= (A + AB) + \overline{A}B && \text{Regla 10: } A = A + AB \\ &= (AA + AB) + \overline{A}B && \text{Regla 7: } A = AA \\ &= AA + AB + A\overline{A} + \overline{A}B && \text{Regla 8: sumar } A\overline{A} = 0 \\ &= (A + \overline{A})(A + B) && \text{Sacar factor común} \\ &= 1 \cdot (A + B) && \text{Regla 6: } A + \overline{A} = 1 \\ &= A + B && \text{Regla 4: eliminar el 1} \end{aligned}$$

La demostración se muestra en la Tabla 4.3, la cual incluye la tabla de verdad y la simplificación del circuito lógico resultante.

A	B	$\overline{A}B$	$A + \overline{A}B$	$A + B$
0	0	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	1	0	1	1

igual

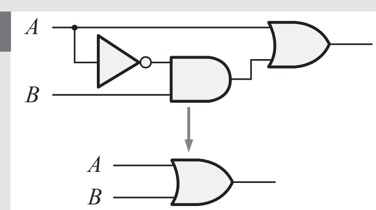


TABLA 4.3 Regla 11: $A + \overline{A}B = A + B$.

Regla 12. $\boldsymbol{(A + B)(A + C) = A + BC}$ Esta regla puede demostrarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} (A+B)(A+C) &= AA + AC + AB + BC && \text{Ley distributiva} \\ &= A + AC + AB + BC && \text{Regla 7: } AA = A \\ &= A(1+C) + AB + BC && \text{Sacar factor común (ley distributiva)} \end{aligned}$$

$= A \cdot 1 + AB + BC$ Regla 2: $1 + C = 1$

$= A(1 + B) + BC$ Sacar factor común (ley distributiva)

$= A \cdot 1 + BC$ Regla 2: $1 + B = 1$

$= A + BC$ Regla 4: $A \cdot 1 = A$

La demostración se muestra en la Tabla 4.4, la cual incluye la tabla de verdad y la simplificación del circuito lógico resultante.

A	B	C	$A+B$	$A+C$	$(A+B)(A+C)$	BC	$A+BC$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

igual

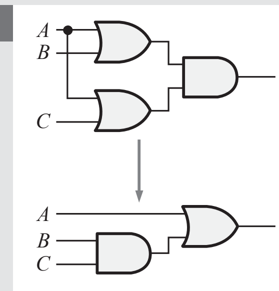


TABLA 4.4 Regla 12: $(A + B)(A + C) = A + BC$.

REVISIÓN DE LA SECCIÓN 4.2

1. Aplicar la ley asociativa de la adición a la expresión $A+(B+C+D)$.
2. Aplicar la ley distributiva a la expresión $A(B+C+D)$.

4.3 TEOREMAS DE DeMORGAN

DeMorgan, matemático que conoció a Boole, propuso dos teoremas que constituyen una parte muy importante del álgebra de Boole. En términos prácticos, los teoremas de DeMorgan proporcionan una verificación matemática de la equivalencia entre las puertas NAND y negativa-OR, y las puertas NOR y negativa-AND, que se han tratado en el Capítulo 3.

Al finalizar esta sección, el lector deberá ser capaz de:

■ Enunciar los teoremas de DeMorgan. ■ Relacionar los teoremas de DeMorgan con la equivalencia entre las puertas NAND y negativa-OR, y entre las puertas NOR y negativa-AND. ■ Aplicar los teoremas de DeMorgan para simplificar las expresiones booleanas.

El primer teorema de DeMorgan se enuncia de la siguiente forma:

El complemento de un producto de variables es igual a la suma de los complementos de las variables.

O dicho de otra manera

El complemento de dos o más variables a las que se aplica la operación AND es equivalente a aplicar la operación OR a los complementos de cada variable.

La fórmula para expresar este teorema para dos variables es:

Ecuación 4.6 $$\overline{XY} = \overline{X} + \overline{Y}$$

El segundo teorema de DeMorgan se enuncia como sigue:

El complemento de una suma de variables es igual al producto de los complementos de las variables.

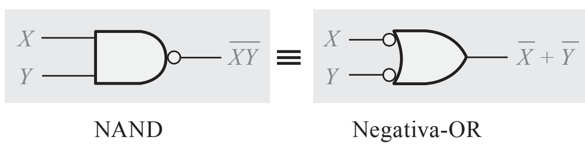
O dicho de otra manera,

El complemento de dos o más variables a las que se aplica la operación OR es equivalente a aplicar la operación AND a los complementos de cada variable.

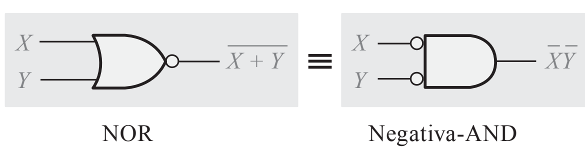
La fórmula para expresar este teorema es:

Ecuación 4.7 $$\overline{X+Y} = \overline{X}\,\overline{Y}$$

Las puertas equivalentes y tablas de verdad correspondientes a las Ecuaciones 4.6 y 4.7 se muestran en la Figura 4.15.



Entradas		Salida	
X	Y	$\overline{XY}$	$\overline{X}+\overline{Y}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0



Entradas		Salida	
X	Y	$\overline{X+Y}$	$\overline{X}\,\overline{Y}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

FIGURA 4.15 Equivalencias de las puertas lógicas y tablas de verdad que ilustran los teoremas de DeMorgan. Observe la igualdad entre las dos columnas de salida de cada tabla. Esto demuestra que las puertas equivalentes realizan la misma función lógica.

Como se ha comentado, los teoremas de DeMorgan se aplican también a expresiones en las que existen más de dos variables. Los siguientes ejemplos ilustran la aplicación de los teoremas de DeMorgan a expresiones de 3 y 4 variables.

EJEMPLO 4.3

Aplicar los teoremas de DeMorgan a las expresiones $\overline{XYZ}$ y $\overline{X+Y+Z}$.

$$\overline{XYZ} = \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$$

$$\overline{X+Y+Z} = \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$$

Problema relacionado Aplicar los teoremas de DeMorgan a la expresión $\overline{\overline{X}+\overline{Y}+\overline{\overline{Z}}}$. .

EJEMPLO 4.4

Aplicar los teoremas de DeMorgan a las expresiones $\overline{WXYZ}$ y $\overline{W+X+Y+Z}$.

$$\overline{WXYZ} = \overline{W}+\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}$$
$$\overline{W+X+Y+Z} = \overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$$

Problema relacionado Aplicar los teoremas de DeMorgan a la expresión $\overline{\overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}}$

Como se ha establecido en las Ecuaciones 4.6 y 4.7 que enuncian los teoremas de DeMorgan, cada variable puede representar una combinación de otras variables. Por ejemplo, X puede ser igual al término $AB + C$, e Y puede ser igual a $A + BC$. De esta forma, si aplicamos el teorema de DeMorgan para dos variables expresado según $\overline{XY} = \overline{X}+\overline{Y}$ a la expresión $\overline{(AB+C)(A+BC)}$ obtenemos el siguiente resultado:

$$\overline{(AB+C)(A+BC)} = (\overline{AB+C}) + (\overline{A+BC})$$

Observe que el resultado anterior tiene dos términos $\overline{AB+C}$ y $\overline{A+BC}$, a los que podemos aplicar individualmente otra vez el teorema de DeMorgan $\overline{X+Y} = \overline{X}\,\overline{Y}$ del siguiente modo:

$$(\overline{AB+C}) + (\overline{A+BC}) = (\overline{AB})\overline{C} + \overline{A}(\overline{BC})$$

De esta manera obtenemos otros dos términos en la expresión a los que de nuevo podemos aplicar el teorema de DeMorgan. Estos términos son $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. Una última aplicación del teorema de DeMorgan nos proporciona el siguiente resultado:

$$(\overline{AB})\overline{C} + \overline{A}(\overline{BC}) = (\overline{A}+\overline{B})\overline{C} + \overline{A}(\overline{B}+\overline{C})$$

Aunque este resultado puede simplificarse aún más utilizando las leyes y reglas de Boole, los teoremas de DeMorgan ya no se pueden aplicar más.

Aplicación de los teoremas de DeMorgan

El siguiente procedimiento ilustra la aplicación de los teoremas de DeMorgan y del álgebra de Boole a la expresión:

$$\overline{\overline{A+B\overline{\overline{C}}}+D(\overline{E+\overline{\overline{F}}})}$$

Paso 1. Identificamos los términos a los que se pueden aplicar los teorema de DeMorgan y consideramos cada término como una única variable, por lo que establecemos $\overline{A+B\overline{\overline{C}}} = X$ y $D(\overline{E+\overline{\overline{F}}}) = Y$.

Paso 2. Dado que $\overline{X+Y} = \overline{X}\,\overline{Y}$.

$$\overline{(\overline{A+B\overline{\overline{C}}}) + (\overline{D(E+\overline{\overline{F}})})} = (\overline{\overline{A+B\overline{\overline{C}}}})(\overline{D(\overline{E+\overline{\overline{F}}})})$$

Paso 3. Utilizamos la regla 9 $(\overline{\overline{A}} = A)$ para eliminar la bara doble sobre el término de la izquierda (esto no es parte del teorema de DeMorgan).

$$(\overline{\overline{A+B\overline{\overline{C}}}})(\overline{D(\overline{E+\overline{\overline{F}}})}) = (A+B\overline{C})(\overline{D(\overline{E+\overline{\overline{F}}})})$$

Paso 4. Aplicando el teorema de DeMorgan al segundo término:

$$(A+B\overline{C})(\overline{D(\overline{E+\overline{F}})}) = (A+B\overline{C})(\overline{D}+(\overline{\overline{E+\overline{F}}}))$$

Paso 5. Empleamos la regla 9 ($\overline{\overline{A}} = A$) para cancelar las barras dobles sobre la parte $E+\overline{F}$ del término.

$$(A+B\overline{C})(\overline{D}+(\overline{\overline{E+\overline{F}}})) = (A+B\overline{C})(\overline{D}+E+\overline{F})$$

Los siguientes tres ejemplos ilustrarán detalladamente cómo emplear los teoremas de DeMorgan.

EJEMPLO 4.5

Aplicar los teoremas de DeMorgan a cada una de las siguientes expresiones:

(a) $\overline{(A+B+C)D}$ **(b)** $\overline{ABC+DEF}$ **(c)** $\overline{A\overline{B}+\overline{C}D+EF}$

Solución **(a)** Sea $A + B + C = X$ y $D = Y$. La expresión $\overline{(A+B+C)D}$ es de la forma $\overline{XY} = \overline{X}+\overline{Y}$ y se puede escribir como sigue:

$$\overline{(A+B+C)D} = \overline{A+B+C}+\overline{D}$$

A continuación, aplicamos el teorema de DeMorgan al término $\overline{A+B+C}$

$$\overline{A+B+C}+\overline{D} = \overline{A}\overline{B}\overline{C}+\overline{D}$$

(b) Sea $ABC = X$ y $DEF = Y$. La expresión $\overline{ABC+DEF}$ es de la forma $\overline{X+Y} = \overline{X}\overline{Y}$ y podemos reescribirla de la forma:

$$\overline{ABC+DEF} = (\overline{ABC})(\overline{DEF})$$

A continuación, aplicamos el teorema de DeMorgan a cada uno de los términos $\overline{ABC}$ y $\overline{DEF}$.

$$(\overline{ABC})(\overline{DEF}) = (\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})(\overline{D}+\overline{E}+\overline{F})$$

(c) Sean $A\overline{B} = X, \overline{C}D = Y$ y $EF = Z$. La expresión $\overline{A\overline{B}+\overline{C}D+EF}$ es de la forma $\overline{X+Y+Z} = \overline{X}\overline{Y}\,\overline{Z}$ y se puede reescribir como:

$$\overline{A\overline{B}+\overline{C}D+EF} = (\overline{A\overline{B}})(\overline{\overline{C}D})(\overline{EF})$$

A continuación, aplicamos el teorema de DeMorgan a cada uno de los términos $\overline{A\overline{B}}$, $\overline{\overline{C}D}$ y $\overline{EF}$.

$$(\overline{A\overline{B}})(\overline{\overline{C}D})(\overline{EF}) = (\overline{A}+B)(C+\overline{D})(\overline{E}+\overline{F})$$

Problema relacionado Aplicar los teoremas de DeMorgan a la expresión $\overline{\overline{ABC}+D+E}$.

EJEMPLO 4.6

Aplicar los teoremas de DeMorgan a cada una de las siguientes expresiones:

(a) $\overline{(\overline{A+B})+\overline{C}}$ **(b)** $\overline{(\overline{A}+B)+CD}$ **(c)** $\overline{(A+B)\overline{C}\overline{D}+E+\overline{F}}$

Solución

(a) $\overline{(\overline{A+B})+\overline{C}} = (\overline{\overline{A+B}})\overline{\overline{C}} = (A+B)C$

(b) $\overline{(\overline{A}+B)+CD} = (\overline{\overline{A}+B})\overline{CD} = (\overline{\overline{A}}\overline{B})(\overline{C}+\overline{D}) = A\overline{B}(\overline{C}+\overline{D})$

(c) $\overline{(A+B)\overline{C}\overline{D}+E+\overline{F}} = ((\overline{(A+B)\overline{C}\overline{D}})(\overline{E+\overline{F}}) = (\overline{A}\overline{B}+C+D)\overline{E}F$

Problema relacionado Aplicar los teoremas de DeMorgan a la expresión $\overline{\overline{A}B(C+\overline{D})+E}$.

EJEMPLO 4.7

La expresión booleana de una puerta OR-exclusiva es $A\overline{B}+\overline{A}B$. Tomando esto como punto de partida, desarrollar una expresión para una puerta NOR-exclusiva, utilizando los teoremas de DeMorgan y aquellas leyes o reglas que puedan aplicarse.

Solución En primer lugar se complementa la expresión OR-exclusiva y luego se aplican los teorema de DeMorgan del siguiente modo:

$$\overline{A\overline{B}+\overline{A}B} = (\overline{A\overline{B}})(\overline{\overline{A}B}) = (\overline{A}+\overline{\overline{B}})(\overline{\overline{A}}+\overline{B}) = (\overline{A}+B)(A+\overline{B})$$

A continuación se aplica la ley distributiva y la regla 8 $(A \cdot \overline{A} = 0)$.

$$(\overline{A}+B)(A+\overline{B}) = \overline{A}A+\overline{A}\overline{B}+AB+B\overline{B} = \overline{A}\overline{B}+AB$$

La expresión resultante para una puerta XNOR es $\overline{A}\overline{B}+AB$. Observe que esta expresión es igual a 1 siempre que ambas variables sean 0 o 1.

Problema relacionado A partir de la expresión para una puerta NAND de 4 entradas, utilizar los teoremas de DeMorgan para desarrollar una expresión para una puerta negativa-OR de 4 entradas.

REVISIÓN DE LA SECCIÓN 4.3

1. Aplicar los teoremas de DeMorgan a las siguientes expresiones:

(a) $\overline{ABC}+(\overline{\overline{D}+E})$ **(b)** $\overline{(A+B)C}$ **(c)** $\overline{A+B+C}+\overline{\overline{D}E}$

4.4 ANÁLISIS BOOLEANO DE LOS CIRCUITOS LÓGICOS

El álgebra de Boole proporciona una manera concisa de expresar el funcionamiento de un circuito lógico formado por una combinación de puertas lógicas, de tal forma que la salida puede determinarse por la combinación de los valores de entrada.

Al finalizar esta sección, el lector deberá ser capaz de:

■ Determinar las expresiones booleanas de una combinación de puertas. ■ Evaluar el funcionamiento lógico de un circuito a partir de su expresión booleana. ■ Construir una tabla de verdad

Expresión booleana de un circuito lógico

▲ *Un circuito lógico se puede describir mediante una ecuación booleana.*

Para obtener la expresión booleana de un determinado circuito lógico, la manera de proceder consiste en comenzar con las entradas situadas más a la izquierda e ir avanzando hasta las líneas de salida, escribiendo la expresión para cada puerta. Para el circuito ejemplo de la Figura 4.16, su expresión booleana se determina de la siguiente manera:

1. La expresión de la puerta AND situada más a la izquierda cuyas entradas son C y D es CD.
2. La salida de la puerta AND situada más a la izquierda es una de las entradas de la puerta OR y B es su otra entrada. Por tanto, la expresión para la puerta OR es $B+CD$.
3. La salida de la puerta OR es una de las entradas de la puerta AND situada más a la derecha, siendo A su otra entrada. Por tanto, la expresión de esta puerta AND será $A(B+CD)$, que es la expresión final de salida del circuito completo.

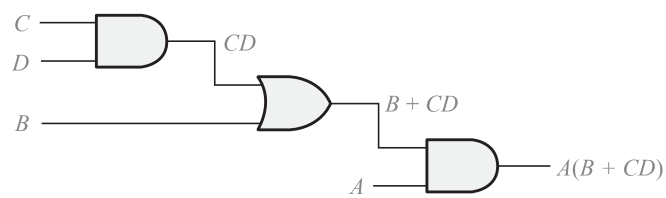


FIGURA 4.16 Circuito lógico que muestra el desarrollo de la expresión booleana para la salida.

Construcción de una tabla de verdad para un circuito lógico

▲ *Un circuito lógico puede describirse mediante una tabla de verdad.*

Una vez que se ha determinado la expresión booleana de un circuito dado, puede desarrollarse una tabla de verdad que represente la salida del circuito lógico para todos los valores posibles de las variables de entrada. El procedimiento requiere que se evalúe la expresión booleana para todas las posibles combinaciones de valores de las variables de entrada. En el caso del circuito de la Figura 4.16, existen cuatro variables de entrada (A, B, C y D) y, por tanto, hay dieciséis ($2^4 = 16$) posibles combinaciones de valores.

Evaluación de la expresión. Para evaluar la expresión $A(B + CD)$, en primer lugar hallamos los valores de las variables que hacen que la expresión sea igual a 1, utilizando las reglas de la suma y la multiplicación booleanas. En este caso, la expresión es igual a 1 sólo si $A = 1$ y $B + CD = 1$, ya que:

$$A(B + CD) = 1 \cdot 1 = 1$$

Ahora hay que determinar cuándo el término $B + CD$ es igual a 1. El término $B + CD = 1$ si $B = 1$ o $C = 1$ o si ambas variables son igual a 1, ya que:

$$B + CD = 1 + 0 = 1$$

$$B + CD = 0 + 1 = 1$$

$$B + CD = 1 + 1 = 1$$

El término $CD = 1$ sólo si $C = 1$ y $D = 1$.

Resumiendo, la expresión $A\,(B + CD) = 1$ cuando $A = 1$ y $B = 1$, independientemente de los valores de C y D, o cuando $A = 1$ y $C = 1$ o cuando $A = 1$ y $C = 1$ y $D = 1$, independientemente del valor de B. La expresión $A\,(B + CD) = 0$ para todas las restantes combinaciones de valores de las variables.

Representación de los resultados en una tabla de verdad. El primer paso consiste en enumerar las dieciséis combinaciones de unos y ceros de las variables de entrada en una secuencia binaria, como muestra la Tabla 4.5. A continuación, se pone un 1 en la columna de salida para las combinaciones de variables de entrada que se han determinado en la evaluación de la expresión. Finalmente, se escribe un 0 en la columna de salida para el resto de las combinaciones de las variables de entrada. Estos resultados se muestran en la Tabla 4.5.

Entradas				Salida
A	*B*	*C*	*D*	$A(B + CD)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

TABLA 4.5 Tabla de verdad del circuito lógico de la Figura 4.16.

REVISIÓN DE LA SECCIÓN 4.4

1. Reemplazar las puertas AND por puertas OR y la puerta OR por una puerta AND en la Figura 4.16, y determinar la expresión booleana de salida.
2. Elaborar la tabla de verdad del circuito de la cuestión 1.

4.5 SIMPLIFICACIÓN MEDIANTE EL ÁLGEBRA DE BOOLE

Muchas veces, a la hora de aplicar el álgebra booleana, hay que reducir una expresión a su forma más simple o cambiarla a una forma más conveniente para conseguir una implementación más eficiente. El método que se va a tratar en esta sección utiliza las reglas, leyes y teoremas del álgebra de Boole para manipular y simplificar una expresión. Este método requiere un profundo conocimiento del álgebra booleana y una considerable experiencia en su aplicación, por no mencionar también un poquito de ingenio y destreza.

Al finalizar esta sección, el lector deberá ser capaz de:

- Aplicar las leyes, reglas y teoremas del álgebra de Boole para simplificar cualquier expresión.

Una expresión booleana simplificada emplea el menor número posible de puertas en la implementación de una determinada expresión. Los Ejemplos 4.8 hasta 4.11 ilustran la simplificación booleana.

EJEMPLO 4.8

Simplificar la siguiente expresión utilizando técnicas del álgebra de Boole:

$$AB + A(B + C) + B(B + C)$$

Solución El método que se sigue no es necesariamente el único método posible.

Paso 1. Aplicar la ley distributiva al segundo y tercer término del siguiente modo:

$$AB + AB + AC + BB + BC$$

Paso 2. Aplicar la regla 7 ($BB = B$) al cuarto término.

$$AB + AB + AC + B + BC$$

Paso 3. Aplicar la regla 5 ($AB + AB = AB$) a los dos primeros términos.

$$AB + AC + B + BC$$

Paso 4. Aplicar la regla 10 ($B + BC = B$) a los dos últimos términos.

$$AB + AC + B$$

Paso 5. Aplicar la regla 10 ($AB + B = B$) al primero y tercer término.

$$B + AC$$

En este punto, la expresión ya no puede seguir simplificándose. Según vaya adquiriendo experiencia en la aplicación del álgebra de Boole, podrá combinar muchos de los pasos individuales.

Problema relacionado Simplificar la expresión booleana $A\overline{B} + A(\overline{B+C}) + B(\overline{B+C})$.

▲ *La simplificación consiste en implementar una función con el menor número de puertas posible.*

La Figura 4.17 muestra cómo el proceso de simplificación del Ejemplo 4.8 ha reducido significativamente el número de puertas lógicas necesarias para implementar la expresión. En la parte (a) se puede ver que son necesarias cinco puertas para implementar dicha expresión en su forma original, mientras que sólo se requieren dos para hacerlo una vez simplificada, como se muestra en la parte (b). Es importante resaltar que estos dos circuitos de puertas son equivalentes, es decir, para cualquier combinación de valores en las entradas A, B y C, obtenemos siempre la misma salida en ambos circuitos.

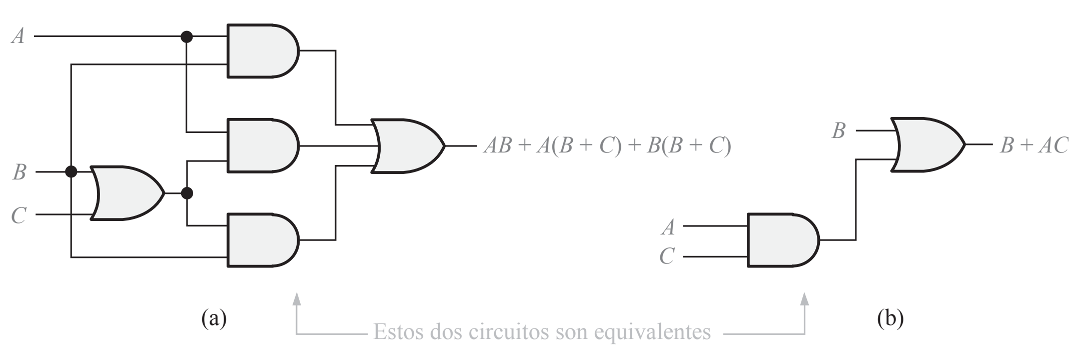


FIGURA 4.17 Circuitos de puertas para el Ejemplo 4.8.

EJEMPLO 4.9

Simplificar la siguiente expresión booleana:

$$[A\overline{B}(C+BD)+\overline{A}\overline{B}]C$$

Tenga en cuenta que los corchetes y paréntesis significan lo mismo: el término en su interior se multiplica (AND) por el término exterior.

Solución **Paso 1.** Aplicar la ley distributiva a los términos entre corchetes.

$$(A\overline{B}C+A\overline{B}BD+\overline{A}\overline{B})C$$

Paso 2. Aplicar la regla 8 ($\overline{B}B=0$) al segundo término entre paréntesis.

$$(A\overline{B}C+A\cdot 0\cdot D+\overline{A}\overline{B})C$$

Paso 3. Aplicar la regla 3 ($A \cdot 0 \cdot D = 0$) al segundo término contenido dentro de los paréntesis.

$$(A\overline{B}C+0+\overline{A}\overline{B})C$$

Paso 4. Aplicar la regla 1 (quitar el 0) dentro del paréntesis

$$(A\overline{B}C+\overline{A}\overline{B})C$$

Paso 5. Aplicar la ley distributiva.

$$A\overline{B}CC+\overline{A}\overline{B}C$$

Paso 6. Aplicar la regla 7 ($CC=C$) al primer término.

$$A\overline{B}C+\overline{A}\overline{B}C$$

Paso 7. Sacar $\overline{B}C$ factor común.

$$\overline{B}C(A+\overline{A})$$

Paso 8. Aplicar la regla 6 ($A+\overline{A}=1$).

$$\overline{B}C\cdot 1$$

Paso 9. Aplicar la regla 4 (quitar el 1).

$$\overline{B}C$$

Problema relacionado Simplificar la expresión booleana $[AB(C+\overline{BD})+\overline{AB}]CD$.

EJEMPLO 4.10

Simplificar la siguiente expresión booleana:

$$\overline{A}BC+A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}\overline{B}\overline{C}+A\overline{B}C+ABC$$

Solución **Paso 1.** Sacar factor común BC del primer y último término.

$$BC(\overline{A}+A)+A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}\overline{B}\overline{C}+A\overline{B}C$$

Paso 2. Aplicar la regla 6 $(A+\overline{A}=1)$ al término entre paréntesis y sacar factor común $A\overline{B}$ del segundo y último término.

$$BC\cdot 1+A\overline{B}(\overline{C}+C)+\overline{A}\overline{B}\overline{C}$$

Paso 3. Aplicar la regla número 4 (quitar el 1) al primer término y la regla 6 $(\overline{C}+C=1)$ al término entre paréntesis.

$$BC+A\overline{B}\cdot 1+\overline{A}\overline{B}\overline{C}$$

Paso 4. Aplicar la regla 4 (quitar el 1) al segundo término.

$$BC+A\overline{B}+\overline{A}\overline{B}\overline{C}$$

Paso 5. Sacar $\overline{B}$ factor común al segundo y tercer término.

$$BC+\overline{B}(A+\overline{A}\overline{C})$$

Paso 6. Aplicar la regla 11 $(A+\overline{A}\overline{C}=A+\overline{C})$ al término entre paréntesis.

$$BC+\overline{B}(A+\overline{C})$$

Paso 7. Utilizar las leyes distributiva y conmutativa para obtener la siguiente expresión.

$$BC+A\overline{B}+\overline{B}\overline{C}$$

Problema relacionado Simplificar la expresión booleana $AB\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C+\overline{A}BC+\overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

EJEMPLO 4.11

Simplificar la siguiente expresión booleana:

$$\overline{AB+AC}+\overline{A}\overline{B}C$$

Solución

Paso 1. Aplicar el teorema de DeMorgan al primer término.

$$(\overline{AB})(\overline{AC})+\overline{A}\overline{B}C$$

Paso 2. Aplicar el teorema de DeMorgan a cada uno de los términos entre paréntesis.

$$(\overline{A}+\overline{B})(\overline{A}+\overline{C})+\overline{A}\overline{B}C$$

Paso 3. Aplicar la ley distributiva a los dos términos entre paréntesis.

$$\overline{A}\overline{A}+\overline{A}\overline{C}+\overline{A}\overline{B}+\overline{B}\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$$

Paso 4. Aplicar la regla número 7 $(\overline{A}\overline{A}=\overline{A})$ al primer término y la regla 10 $[\overline{A}\overline{B}+\overline{A}\overline{B}C=\overline{A}\overline{B}(1+C)=\overline{A}\overline{B}]$ a los términos tercero y último.

$$\overline{A}+\overline{A}\overline{C}+\overline{A}\overline{B}+\overline{B}\overline{C}$$

Paso 5. Aplicar la regla 10, $\overline{A}+\overline{A}\overline{C}=\overline{A}(1+\overline{C})=\overline{A}$, a los términos primero y segundo.

$$\overline{A}+\overline{A}\overline{B}+\overline{B}\overline{C}$$

Paso 6. Aplicar la regla 10 $[\overline{A}+\overline{A}\overline{B}=\overline{A}(1+\overline{B})=\overline{A}]$ a los términos primero y segundo.

$$\overline{A}+\overline{B}\overline{C}$$

Problema relacionado Simplificar la expresión booleana $\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

REVISIÓN DE LA SECCIÓN 4.5

1. Simplificar, si es posible, las siguientes expresiones booleanas:
   (a) $A+AB+A\overline{B}C$ **(b)** $(\overline{A}+B)C+ABC$ **(c)** $A\overline{B}C(BD+CDE)+A\overline{C}$
2. Implementar con las puertas lógicas apropiadas cada expresión de la cuestión anterior. Después, implementar la expresión simplificada y comparar el número de puertas empleado en cada caso.

4.6 FORMAS ESTÁNDAR DE LAS EXPRESIONES BOOLEANAS

Todas las expresiones booleanas, independientemente de su forma, pueden convertirse en cualquiera de las dos formas estándar: suma de productos o producto de sumas. La estandarización posibilita que la evaluación, simplificación e implementación de las expresiones booleanas sea mucho más sistemática y sencilla.

Al finalizar esta sección, el lector deberá ser capaz de:

■ Identificar una expresión en forma de suma de productos. ■ Determinar el dominio de una expresión booleana. ■ Convertir cualquier suma de productos a su forma estándar. ■ Evaluar una expresión en forma de suma de productos según los valores binarios. ■ Identificar una expresión en forma de producto de sumas. ■ Convertir cualquier producto de sumas a su forma estándar. ■ Evaluar una expresión en forma de producto de sumas según los valores binarios. ■ Convertir expresiones de una a otra forma estándar.

Suma de productos

▲ *Una suma de productos puede implementarse con una puerta OR y dos o más puertas AND.*

En la Sección 4.1, se ha definido el término producto como un término que es el producto (multiplicación booleana) de literales (variables o sus complementos). Cuando dos o más productos se suman mediante la adición booleana, la expresión resultante se denomina ***suma de productos*** (SOP, *Sum Of Products*). Algunos ejemplos son:

$$AB+ABC$$
$$ABC+CDE+\overline{B}C\overline{D}$$
$$\overline{A}B+\overline{A}B\overline{C}+AC$$

Una suma de productos puede contener también términos de una única variable como en $A+\overline{A}\overline{B}C+BC\overline{D}$. Si volvemos a los ejemplos de simplificación de la sección anterior, puede observarse que cada término de la expresión resultante era o un producto aislado o una suma de productos. En una expresión con formato de suma de productos, una barra no puede extenderse sobre más de una variable; sin embargo, más de una variable puede tener una barra encima. Por ejemplo, una suma de productos puede contener el término $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ pero no el término $\overline{ABC}$.

Dominio de una expresión booleana. El **dominio** de una expresión booleana es el conjunto de variables contenido en la expresión bien en su forma complementada o no complementada. Por ejemplo, el dominio de la expresión $\overline{A}B + A\overline{B}C$ es el conjunto de variables A, B, C y el dominio de la expresión $AB\overline{C} + C\overline{D}E + \overline{B}C\overline{D}$ es el conjunto de variables A, B, C, D, E.

Implementación AND/OR de una suma de productos. La implementación de una suma de productos simplemente requiere aplicar la operación OR a las salidas de dos o más puertas AND. Una operación AND da lugar a un producto, y la adición de dos o más productos se realiza mediante puertas OR. Por tanto, una expresión suma de productos puede implementarse mediante un circuito lógico AND-OR en el que las salidas de las puertas AND, cuyo número es igual al de productos que contenga la expresión, son las entradas de una puerta OR, como se muestra en la Figura 4.18 para la expresión $AB + BCD + AC$. La salida X de la puerta OR es igual a la suma de productos.

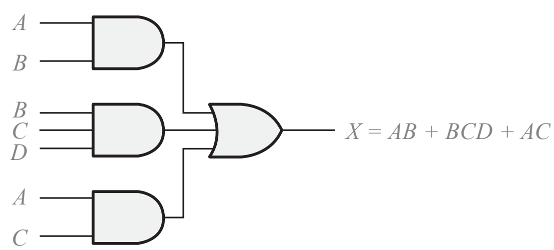


FIGURA 4.18 Implementación de la suma de productos $AB + BCD + AC$.

Implementación NAND/NAND de una suma de productos. Se pueden emplear puertas NAND para implementar una expresión suma de productos. Utilizando sólo puertas NAND se puede obtener una función AND/OR, como se ilustra en la Figura 4.19. El primer nivel de puertas NAND alimenta las entradas de una puerta NAND que actúa como una puerta negativa-OR. Las inversiones de la puerta NAND y las puertas negativa-OR se cancelan y dan como resultado un circuito AND/OR.

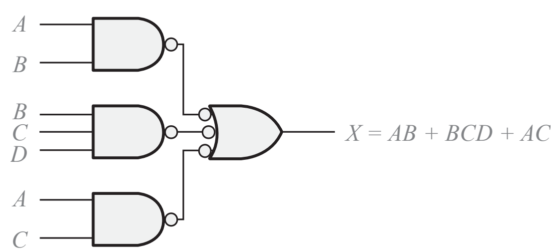


FIGURA 4.19 Esta implementación NAND/NAND es equivalente a la implementación AND/OR de la Figura 4.18.

Conversión de una expresión general a formato suma de productos

Cualquier expresión lógica puede ser transformada a una expresión suma de productos aplicando el álgebra de Boole. Por ejemplo, la expresión $A(B+CD)$ puede convertirse en una suma de productos aplicando la ley distributiva:

$$A(B + CD) = AB + ACD$$

EJEMPLO 4.12

Convertir cada una de las siguientes expersiones booleanas a su forma suma de productos:

(a) $AB + B(CD + EF)$ **(b)** $(A + B)(B + C + D)$ **(c)** $\overline{(\overline{A+B})+C}$

Solución

(a) $AB + B(CD + EF) = AB + BCD + BEF$

(b) $(A + B)(B + C + D) = AB + AC + AD + BB + BC + BD$

(c) $\overline{(\overline{A+B})+C} = (\overline{\overline{A+B}})\overline{C} = (A+B)\overline{C} = A\overline{C} + B\overline{C}$

Problema relacionado Convertir $\overline{A}B\overline{C} + (A+\overline{B})(B+\overline{C}+A\overline{B})$ a la forma suma de productos.

Forma estándar de la suma de productos

Hasta ahora, hemos estado viendo sumas de productos en las que algunos de los términos no contenían todas las variables del dominio de la expresión. Por ejemplo, la expresión $\overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}D + \overline{A}B\overline{C}D$ tiene un dominio formado por las variables A, B, C y D. Sin embargo, el conjunto completo de variables del dominio no está representado en los dos primeros términos de la expresión; es decir, faltan D o $\overline{D}$ en el primer término y C o $\overline{C}$ en el segundo.

Una *suma de productos estándar* es aquella en la que *todas* las variables del dominio aparecen en cada uno de los términos de la expresión. Por ejemplo, $A\overline{B}CD + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + AB\overline{C}\overline{D}$ es una expresión suma de productos estándar. La expresión suma de productos estándar es importante en la construcción de tablas de verdad, lo que se estudiará en la Sección 4.7 y en el método de simplificación de los mapas de Karnaugh, que se aborda en la Sección 4.8. Cualquier expresión suma de productos no estándar (que denominaremos simplemente suma de productos) puede convertirse al formato estándar utilizando el álgebra de Boole.

Conversión de una suma de productos a su forma estándar. Cada término producto de una suma de productos que no contenga todas las variables del dominio puede ampliase a su forma estándar de manera que incluya todas las variables del dominio y sus complementos. Como se muestra en los siguientes pasos, una suma de productos no estándar se convierte a su forma estándar utilizando la regla 6 $(A + \overline{A} = 1)$ de la Tabla 4.1: la suma de una variable y su complemento es igual a 1.

Paso 1. Multiplicar cada término producto no estándar por un término formado por la suma de la variable que falta y su complemento. Con esto se obtienen dos términos producto. Como se sabe, se puede multiplicar por 1 cualquier expresión sin que se altere su valor.

Paso 2. Repetir el paso 1 hasta que todos los términos de la expresión contengan todas las variables o sus complementos del dominio. Al convertir cada producto a su forma estándar, el número de términos producto se duplica por cada variable que falta, como muestra el Ejemplo 4.13.

EJEMPLO 4.13

Convertir la siguiente expresión booleana al formato suma de productos estándar:

$$A\overline{B}C + \overline{A}\overline{B} + AB\overline{C}D$$

Solución El dominio de esta suma de productos es A, B, C, D. Considerando cada término por separado, se comprueba que al primer término, $A\overline{B}C$, le falta la variable D o $\overline{D}$, por lo que multiplicamos dicho término por $D + \overline{D}$ como sigue:

$$A\bar{B}C = A\bar{B}C(D+\bar{D}) = A\bar{B}CD + A\bar{B}C\bar{D}$$

En este caso se obtienen dos productos estándar.

En el segundo término $\bar{A}\bar{B}$ faltan las variables C o $\bar{C}$ y D o $\bar{D}$, por lo que lo multiplicamos por $C+\bar{C}$

$$\bar{A}\bar{B} = \bar{A}\bar{B}(C+\bar{C}) = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C}$$

Los dos términos que hemos obtenido carecen de la variable D o $\bar{D}$, por lo que multiplicamos ambos términos por $D+\bar{D}$

$$\begin{aligned}\bar{A}\bar{B} &= \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C} = \bar{A}\bar{B}C(D+\bar{D}) + \bar{A}\bar{B}\bar{C}(D+\bar{D}) \\ &= \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\end{aligned}$$

En este caso, el resultado con cuatro productos estándar.

El tercer término, $AB\bar{C}D$, ya está en forma estándar. La suma de productos estándar completa que obtenemos finalmente es:

$$A\bar{B}C + \bar{A}\bar{B} + AB\bar{C}D = A\bar{B}CD + A\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + AB\bar{C}D$$

Problema relacionado Convertir la expresión $W\bar{X}Y + \bar{X}Y\bar{Z} + WX\bar{Y}$ a su forma de suma de productos estándar.

Representación binaria de un término producto estándar. Un término producto estándar es igual a 1 sólo para una combinación de los valores de las variables. Por ejemplo, el término producto $A\bar{B}C\bar{D}$ es igual a 1 cuando A = 1, B =0, C =1, D = 0, como se muestra a continuación y es igual a 0 para todas las restantes combinaciones de valores de las variables.

$$A\bar{B}C\bar{D} = 1\cdot\bar{0}\cdot1\cdot\bar{0} = 1\cdot1\cdot1\cdot1 = 1$$

En este caso, el término producto tiene un valor binario de 1010 (diez en decimal).

Recuerde que un término producto se implementa mediante una puerta AND cuya salida es 1 si y sólo si cada una de sus entradas está a 1. Para generar el complemento de las variables cuando es necesario se utilizan inversores.

Una expresión suma de productos es igual a 1 si y sólo si uno o más de los términos productos que forman la expresión es igual a 1.

EJEMPLO 4.14

Determinar los valores binarios para los que la siguiente suma de productos estándar sea igual a 1:

$$ABCD + A\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$$

Solución El término $ABCD$ es igual a 1 cuando A = 1, B = 1, C = 1 y D =1.

$$ABCD = 1\cdot1\cdot1\cdot1 = 1$$

El término $A\bar{B}\bar{C}D$ es igual a 1 cuando A = 1, B = 0, C = 0 y D =1.

$$A\overline{B}\overline{C}D = 1 \cdot \overline{0} \cdot \overline{0} \cdot 1 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

El término $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$ es igual a 1 cuando $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ y $D = 0$.

$$\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} = \overline{0} \cdot \overline{0} \cdot \overline{0} \cdot \overline{0} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

La suma de productos es igual a 1 sólo cuando cualquiera de los tres términos o todos son igual a 1.

Problema relacionado Determinar los valores binarios para los que la siguiente expresión suma de productos es igual a 1:

$$\overline{X}YZ + X\overline{Y}Z + XY\overline{Z} + \overline{X}Y\overline{Z} + XYZ$$

¿Es una suma de productos estándar?

Producto de sumas

En la Sección 4.1 se ha definido el término suma como un término formado por la suma (adición booleana) de literales (variables o sus complementos). Cuando dos o más términos suma se multiplican, la expresión resultante es un ***producto de sumas*** (POS, *Product Of Sums*). Algunos ejemplos son:

$$(\overline{A} + B)(A + \overline{B} + C)$$

$$(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})(C + \overline{D} + E)(\overline{B} + C + D)$$

$$(A + B)(A + \overline{B} + C)(\overline{A} + C)$$

Un producto de sumas puede contener términos con una única variable como en $\overline{A}(A + \overline{B} + C)(\overline{B} + \overline{C} + D)$. En una expresión producto de sumas, una barra no puede extenderse nunca sobre más de una variable, aunque más de una variable puede tener una barra encima. Por ejemplo, un producto de sumas puede contener el término $\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$ pero no el $\overline{A + B + C}$.

Implementación de un producto de sumas. La implementación de un producto de sumas requiere simplemente la aplicación de la operación AND a las salidas de dos o más puertas OR. Un sumando se origina mediante la operación OR y el producto de varios términos suma se realiza por medio de la operación AND. Por tanto, un producto de sumas puede implementarse a partir de puertas lógicas OR (cuyo número será igual al de sumandos de la expresión) cuyas salidas se conectan a las entradas de una puerta AND, como muestra la Figura 4.20 para la expresión $(A + B)(B + C + D)(A + C)$. La salida X de la puerta AND es igual al producto de sumas.

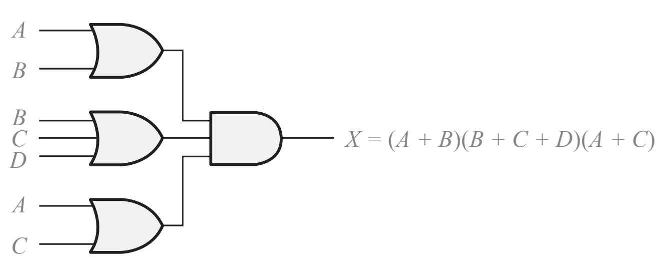


FIGURA 4.20 Implementación del producto de sumas $(A + B)(B + C + D)(A + C)$.

Forma estándar del producto de sumas

Hasta ahora, se han tratado expresiones producto de sumas en las que algunos de los términos no contenían todas las variables del dominio de la expresión. Por ejemplo, la expresión:

$$(A+\overline{B}+C)(A+B+\overline{D})(A+\overline{B}+\overline{C}+D)$$

tiene un dominio formado por las variables A, B, C y D. Observe que el conjunto completo de variables del dominio no está representado en los dos primeros términos de la expresión; es decir, faltan D o $\overline{D}$ en el primer término y C o $\overline{C}$ en el segundo término.

Un producto de sumas estándar es aquel en el que *todas* las variables del dominio o sus complementos aparecen en cada uno de los términos de la expresión. Por ejemplo,

$$(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D})(A+\overline{B}+C+D)(A+B+\overline{C}+D)$$

es un producto de sumas estándar. Cualquier producto de sumas no estándar (que denominaremos simplemente producto de sumas) puede convertirse a su forma estándar mediante el álgebra de Boole.

Conversión de un producto de sumas a su forma estándar. Cada término suma de una expresión producto de sumas que no contenga todas las variables del dominio puede extenderse para obtener su formato estándar incluyendo todas las variables del dominio y sus complementos. Como se establece en los pasos siguientes, un producto de sumas no estándar se convierte a su formato estándar utilizando la regla booleana número 8 ($A\cdot\overline{A}=0$) de la Tabla 4.1 que establece que una variable multiplicada por su complemento es igual a 0.

Paso 1. Añadir a cada término suma no estándar un término formado por la variable que falta y su complemento. Esto da lugar a la aparición de dos términos suma. Como ya sabemos, se puede sumar 0 a cualquier cosa sin que se altere su valor.

Paso 2. Aplicar la regla 12 de la Tabla 4.1: $A+BC=(A+B)(A+C)$.

Paso 3. Repetir el paso 1 hasta que todos los términos suma resultantes contengan todas las variables del dominio en su forma complementada o no complementada.

EJEMPLO 4.15

Convertir la siguiente expresión booleana a formato producto de sumas:

$$(A+\overline{B}+C)(\overline{B}+C+\overline{D})(A+\overline{B}+\overline{C}+D)$$

Solución El dominio de este producto de sumas es A, B, C, D. Vamos a considerar término por término. En el primero $A+\overline{B}+C$, falta la variable D o $\overline{D}$, por lo que añadimos $D\overline{D}$ y aplicamos la regla 12 del siguiente modo:

$$A+\overline{B}+C=A+\overline{B}+C+D\overline{D}=(A+\overline{B}+C+D)(A+\overline{B}+C+\overline{D})$$

En el segundo término, $\overline{B}+C+\overline{D}$ falta la variable A o $\overline{A}$, por lo que añadimos $A\overline{A}$ y aplicamos la regla 12 como sigue:

$$\overline{B}+C+\overline{D}=\overline{B}+C+\overline{D}+A\overline{A}=(A+\overline{B}+C+\overline{D})(\overline{A}+\overline{B}+C+\overline{D})$$

El tercer término, $A+\overline{B}+\overline{C}+D$, ya está en formato estándar. El producto de sumas estándar de la expresión original es:

$$(A+\overline{B}+C)(\overline{B}+C+\overline{D})(A+\overline{B}+\overline{C}+D)=$$

$$(A+\overline{B}+C+D)(A+\overline{B}+C+\overline{D})(A+\overline{B}+C+\overline{D})(\overline{A}+\overline{B}+C+\overline{D})(A+\overline{B}+\overline{C}+D)$$

Problema relacionado Convertir la expresión $(A+\overline{B})(B+C)$ a su forma producto de sumas estándar.

Representación binaria de un término suma estándar. Un término suma estándar es igual a 0 sólo para una combinación de los valores de las variables. Por ejemplo, el término suma $A+\overline{B}+C+\overline{D}$ es igual a 1 cuando $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$ y $D = 1$, como se muestra a continuación y es igual a 1 para todas las restantes combinaciones de valores de las variables.

$$A+\overline{B}+C+\overline{D}=0+\overline{1}+0+\overline{1}=0+0+0+0=0$$

En este caso, el término suma tiene un valor binario de 0101 (cinco en decimal). Recuerde que un término suma se implementa mediante una puerta OR cuya salida es 0 sólo si cada una de sus entradas está a 0. Para generar el complemento de las variables cuando es necesario se utilizan inversores.

Una expresión producto de sumas es igual a 0 si y sólo si uno o más de los términos suma que forman la expresión es igual a 0.

EJEMPLO 4.16

Determinar los valores binarios de las variables para los que la expresión producto de sumas estándar siguiente es igual a 0:

$$(A+B+C+D)(A+\overline{B}+\overline{C}+D)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D})$$

Solución El término $A + B + C + D$ es igual a 0 cuando $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ y $D = 0$.

$$A + B + C + D = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

El término $A+\overline{B}+\overline{C}+D$ es igual a 0 cuando $A = 0$, $B = 1$, $C = 1$ y $D = 0$:

$$A+\overline{B}+\overline{C}+D=0+\overline{1}+\overline{1}+0=0+0+0+0=0$$

El término $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}$ es igual a 0 cuando $A = 1$, $B = 1$, $C = 1$ y $D = 1$.

$$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}=\overline{1}+\overline{1}+\overline{1}+\overline{1}=0+0+0+0=0$$

La expresión producto de sumas es igual a 0 cuando cualquiera de los tres términos suma es igual a 0.

Problema relacionado Determinar los valores binarios para los que la siguiente expresión producto de sumas es igual a 0:

$$(X+\overline{Y}+Z)(\overline{X}+Y+Z)(X+Y+\overline{Z})(\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z})(X+\overline{Y}+\overline{Z})$$

¿Es un producto de sumas estándar?

Conversión de una suma de productos estándar en un producto de sumas estándar

Los valores binarios de los términos producto en una suma de productos estándar dada no aparecen en su producto de sumas estándar equivalente. Asimismo, los valores binarios que no están representados en una suma de productos sí aparecen en el producto de sumas equivalente. Por tanto, para pasar de la suma de productos estándar al producto de sumas estándar hay que realizar los siguientes pasos:

Paso 1. Evaluar cada término producto de la expresión suma de productos. Es decir, determinar los números binarios que representan estos términos.

Paso 2. Determinar todos los números binarios no incluidos al realizar la evaluación del paso 1.

Paso 3. Escribir los términos suma equivalente para cada valor binario del paso 2 y expresarlos en forma producto de sumas.

Utilizando un procedimiento similar, se puede pasar de un producto de sumas a una suma de productos.

EJEMPLO 4.17

Convertir la siguiente suma de productos en su expresión equivalente como producto de sumas:

$$\overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C + ABC$$

Solución El resultado de la evaluación es la siguiente

$$000 + 010 + 011 + 101 + 111$$

Puesto que son tres las variables que conforman el dominio de esta expresión, existe un total de ocho (2^3) posibles combinaciones. La suma de productos contiene cinco de estas combinaciones, luego la expresión producto de sumas debe contener las otras tres que son 001, 100 y 110. Recuerde que estos son los valores binarios que hacen que cada término suma sea igual a cero. La expresión producto de sumas equivalente es la siguiente:

$$(A+B+\overline{C})(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+\overline{B}+C)$$

Problema relacionado Sustituyendo los valores binarios en cada término, verificar que las expresiones suma de productos y producto de sumas de este ejemplo son equivalentes.

REVISIÓN DE LA SECCIÓN 4.6

1. Determinar si cada una de las expresiones siguientes es una suma de productos o un producto de sumas. Indicar si se trata de una forma estándar.
   (a) $AB + \overline{A}BD + \overline{A}C\overline{D}$
   (b) $(A+\overline{B}+C)(A+B+\overline{C})$
   (c) $\overline{A}BC + AB\overline{C}$
   (d) $A(A+\overline{C})(A+B)$
2. Convertir las sumas de productos de la cuestión 1 a la forma estándar.
3. Convertir los productos de sumas de la cuestión 1 a la forma estándar.

4.7 EXPRESIONES BOOLEANAS Y TABLAS DE VERDAD

Todas las expresiones booleanas pueden convertirse fácilmente en tablas de verdad utilizando los valores binarios de cada término de la expresión. La tabla de verdad es una forma muy común, en un formato muy conciso, de expresar el funcionamiento lógico de un circuito. Además, las expresiones suma de productos y producto de sumas pueden determinarse mediante las tablas de verdad. Las tablas de verdad pueden encontrarse en las hojas de especificaciones y en otros textos relativos al funcionamiento de los circuitos y sistemas digitales.

Al finalizar esta sección, el lector deberá ser capaz de:

■ Pasar una expresión suma de productos estándar a su tabla de verdad. ■ Pasar un producto de sumas estándar a su tabla de verdad. ■ Obtener una expresión estándar a partir de su tabla de verdad. ■ Interpretar correctamente los datos de una tabla de verdad.

Conversión de una suma de productos a tabla de verdad

Como se ha establecido en la Sección 4.6, una suma de productos es igual a 1 sólo si y sólo si al menos uno de los productos es igual a 1. Una tabla de verdad es sencillamente la lista de las posibles combinaciones de valores de las variables de entrada y sus correspondientes valores de salida (1 o 0). Para una expresión cuyo dominio es de dos variables, existen cuatro combinaciones distintas de estas variables ($2^2 = 4$). Para una expresión cuyo dominio tiene tres variables, existen ocho ($2^3 = 8$) combinaciones posibles de dichas variables. Para una expresión con un dominio de cuatro variables, existen dieciséis combinaciones diferentes de dichas variables ($2^4 = 16$), etc.

El primer paso para construir una tabla de verdad consiste en enumerar todas las posibles combinaciones de los valores de las variables de la expresión. A continuación, hay que pasar la suma de productos a su formato estándar, si no lo está ya. Por último, se escribe un 1 en la columna de salida (X) para cada valor binario que hace que la suma de productos estándar sea 1, y se escribe un 0 para los restantes valores. Este procedimiento se ilustra en el Ejemplo 4.18.

EJEMPLO 4.18

Desarrollar una tabla de verdad para la expresión suma de productos estándar $\overline{A}\overline{B}C + A\overline{B}\overline{C} + ABC$.

Solución Existen tres variables en el dominio, por lo que hay ocho posibles combinaciones de valores binarios de las variables, como se muestra en las tres columnas

Entradas			Salida	
A	***B***	***C***	***X***	**Término producto**
0	0	0	0	
0	0	1	1	$\overline{A}\overline{B}C$
0	1	0	0	
0	1	1	0	
1	0	0	1	$A\overline{B}\overline{C}$
1	0	1	0	
1	1	0	0	
1	1	1	1	ABC

TABLA 4.6

de la izquierda de la Tabla 4.6. Los valores binarios que hacen que los términos producto de la expresión sean igual a 1 son $\overline{A}\overline{B}C: 001$; $A\overline{B}\overline{C}: 100$ y ABC: 111. Para cada uno de estos valores binarios, se escribe un 1 en la columna de salida, como se indica en la tabla. Para cada una de las restantes combinaciones, se escribe un 0 en la columna de salida.

Problema relacionado Crear una tabla de verdad para la expresión suma de productos estándar $\overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}C$.

Conversión de un producto de sumas a tabla de verdad

Recuerde que un producto de sumas es igual a 0 sólo si y sólo si al menos uno de los términos suma es igual a 0. Para construir la tabla de verdad de un producto de sumas, basta con enumerar todas las posibles combinaciones de valores binarios de las variables del mismo modo que se hace para una suma de productos. A continuación, hay que pasar el producto de sumas a su formato estándar, si no lo está ya. Por último, se escribe un 0 en la columna de salida (X) para cada valor binario que hace que la suma de productos estándar sea 0, y se escribe un 1 para los restantes valores binarios. Este procedimiento se ilustra en el Ejemplo 4.19.

EJEMPLO 4.19

Desarrollar una tabla de verdad para la expresión producto de sumas estándar siguiente:

$$(A+B+C)(A+\overline{B}+C)(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)$$

Solución Existen tres variables en el dominio, por lo que hay ocho posibles combinaciones de valores binarios de las variables, como se muestra en las tres columnas de la izquierda de la Tabla 4.7. Los valores binarios que hacen que los términos suma de la expresión sean igual a 0 son $A + B + C$: 000; $A+\overline{B}+C: 010$; $A+\overline{B}+\overline{C}: 011$; $\overline{A}+B+\overline{C}: 101$ y $\overline{A}+\overline{B}+C: 110$. .Para cada uno de estos valores binarios, se escribe un 0 en la columna de salida, como se indica en la tabla. Para cada una de las restantes combinaciones, se escribe un 1 en la columna de salida.

Entradas			Salida	
A	*B*	*C*	*X*	Término suma
0	0	0	0	$(A+B+C)$
0	0	1	1	
0	1	0	0	$(A+\overline{B}+C)$
0	1	1	0	$(A+\overline{B}+\overline{C})$
1	0	0	1	
1	0	1	0	$(\overline{A}+B+\overline{C})$
1	1	0	0	$(\overline{A}+\overline{B}+C)$
1	1	1	1	

TABLA 4.7

Observe que la tabla de verdad de este ejemplo es la misma que la del Ejemplo 4.18. Esto significa que la suma de productos del ejemplo anterior y el producto de sumas de este ejemplo son equivalentes.

Problema relacionado Crear una tabla de verdad para la expresión producto de sumas estándar: $(A+\overline{B}+C)(A+B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$

Determinación de las expresiones estándar a partir de una tabla de verdad

Para determinar la expresión de la suma de productos estándar representada por una tabla de verdad se enumeran todos los valores de las variables de entrada para los que la salida es 1. Cada valor binario se convierte en el correspondientes término producto, reemplazando cada 1 por la variable y cada 0 por la variable complementada. Por ejemplo, el valor binario 1010 se transforma en un término producto de la manera siguiente:

$$1010 \rightarrow A\overline{B}C\overline{D}$$

Si sustituimos podemos comprobar que el término producto es 1:

$$A\overline{B}C\overline{D} = 1 \cdot \overline{0} \cdot 1 \cdot \overline{0} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

Para determinar el producto de sumas estándar representado por una tabla de verdad se enumeran todos los valores binarios para los que la salida es 0. A continuación, se convierte cada valor binario en el correspondiente término suma, reemplazando cada 1 por la variable complementada y cada 0 por la variable. Por ejemplo, el número binario 1001 se pasa a término suma de la manera siguiente:

$$1001 \rightarrow \overline{A}+B+C+\overline{D}$$

Si sustituimos podemos comprobar que el término suma es 0:

$$\overline{A}+B+C+\overline{D} = \overline{1}+0+0+\overline{1} = 0+0+0+0 = 0$$

EJEMPLO 4.20

A partir de la tabla de verdad de la Tabla 4.8, determinar la expresión suma de productos estándar y la expresión producto de sumas estándar equivalente.

Entradas			Salida
A	***B***	***C***	***X***
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

TABLA 4.8

Solución En la columna de salida hay cuatro 1s y los correspondientes valores binarios son 011, 100, 110 y 111. Convertir estos valores binarios a términos producto como sigue:

$$011 \rightarrow \overline{A}BC$$
$$100 \rightarrow A\overline{B}\overline{C}$$
$$110 \rightarrow AB\overline{C}$$
$$111 \rightarrow ABC$$

La expresión suma de productos estándar resultante para la salida X es:

$$X = \overline{A}BC + A\overline{B}\overline{C} + AB\overline{C} + ABC$$

Para el producto de sumas, la salida es 0 para los valores binarios 000, 001, 010 y 101. Estos valores binarios se convierten en términos suma como sigue:

$$000 \rightarrow A+B+C$$
$$001 \rightarrow A+B+\overline{C}$$
$$010 \rightarrow A+\overline{B}+C$$
$$101 \rightarrow A+B+\overline{C}$$

La expresión producto de sumas estándar resultantes para la salida X es:

$$X = (A+B+C)(A+B+\overline{C})(A+\overline{B}+C)(A+B+\overline{C})$$

Problema relacionado Sustituyendo los valores binarios, demostrar que las expresiones suma de productos y productos de sumas obtenidas en este ejemplo son equivalentes; es decir, para cualquier número binario que se elija ambas deben ser 1 o 0, dependiendo del valor binario.

REVISIÓN DE LA SECCIÓN 4.7

1. Si una determinada expresión booleana tiene un dominio de cinco variables, ¿cuántos valores binarios tendrá su tabla de verdad?
2. En una determinada tabla de verdad, la salida es 1 para el valor binario 0110. Convertir este valor binario en el correspondiente término producto usando las variables W, X, Y y Z.
3. En una determinada tabla de verdad, la salida es 0 para el valor binario 1100. convertir este valor binario en el correspondiente término suma usando las variables W, X, Y y Z.

4.8 MAPAS DE KARNAUGH

Un mapa de Karnaugh proporciona un método sistemático de simplificación de expresiones booleanas y, si se aplica adecuadamente, genera las expresiones suma de productos y producto de sumas más simples posibles, conocidas como expresiones mínimas. Como hemos visto, la efectividad de la simplificación algebraica depende de nuestra familiaridad con las leyes, reglas y teoremas del álgebra de Boole y de nuestra habilidad para aplicarlas. Por otro lado, el mapa de Karnaugh es básicamente una "receta" para la simplificación