FUNCIÓN CUADRATICA

Definición:
Una función real f es una "función cuadrática" si su regla de correspondencia se puede reducir a una de la forma:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $\quad a \neq 0$.

Propiedad:
1) La gráfica de una función cuadrática es una parábola.
   Si $a > 0$ entonces la parábola de abre hacia arriba.
   Si $a < 0$ entonces la parábola de abre hacia abajo.

2) El vértice de la parábola está dado por el punto:

$$V = (-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)) = (-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$$

Ejemplos:
1) Para $y = x^2 + 3x - 1$, el vértice es $V = (-\frac{3}{2}, -\frac{13}{4})$.

2) Para $y = -x^2 + x - 1$, el vértice es $V = (\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$.

Definición:
Se llama "eje de simetría" a la recta perpendicular en el punto medio del segmento que une dos puntos de la parábola de igual ordenada.

Propiedad:
La ecuación del eje de simetría está dada por: $\quad x = -\frac{b}{2a}$
(pasa por el vértice y es perpendicular al $eje\ x$).

Ejemplos:
En cada caso, el eje de simetría de la gráfica de la función es:

1) Para $y = x^2 + 3x - 1$: $x = -\frac{3}{2}$.

2) Para $y = -x^2 + x - 1$: $x = \frac{1}{2}$.

Propiedades:

1) El dominio de una función cuadrática es $Dom(f) = D_f = \mathbb{R}$.

2) El recorrido de una función cuadrática es:

$Rec(f) = R_f = [\frac{4ac-b^2}{4a}, +\infty)$, si $a > 0$

$Rec(f) = R_f = (-\infty, \frac{4ac-b^2}{4a}]$, si $a < 0$

Observación:
Otra forma de determinar el recorrido de una función cuadrática es:

$$Rec(f) = R_f = \{y \in \mathbb{R} \ / \ b^2 - 4a(c - y) \geq 0\}$$

Ejemplos:

1) Para $y = x^2 + 3x - 1$: $Rec(f) = [-\frac{13}{4}, +\infty)$.

2) Para $y = -x^2 + x - 1$: $Rec(f) = (-\infty, -\frac{3}{4}]$

Propiedades:
Sea $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ una función cuadrática.

1) La gráfica intersecta al $eje\ y$ en $y = c$
(se obtiene reemplazando x por 0).

2) Si $\triangle = b^2 - 4ac > 0$, tiene dos ceros reales distintos.
Si $\triangle = b^2 - 4ac = 0$, tiene dos ceros reales iguales.
Si $\triangle = b^2 - 4ac < 0$, tiene dos ceros complejos conjugados.

Observación:
Los ceros de una función cuadrática son aquellos valores de x tales que $f(x) = 0$, es decir, tales que $ax^2 + bx + c = 0$.
Para obtener los valores de x utilizamos factorización o la fórmula que permite resolver la ecuación cuadrática, dada por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Definición:
Dada la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, su "forma normal" está dada por:

$$y = a(x - h)^2 + k$$

donde el vértice de su gráfica es $V = (h, k)$.

Ejemplo:
La forma normal de $y = -x^2 - 6x$ está dada por:

$$y = (-1)(x + 3)^2 + 9$$

Además, se obtiene que el vértice de su gráfica es: $V = (-3,9)$.

Observaciones:
1) La función cuadrática no es inyectiva.

2) Si la función cuadrática se define de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ entonces no es sobreyectiva.

3) Se puede restringir el dominio y el recorrido de la función dada para obtener otra función que sea inyectiva y sobreyectiva (y, de ese modo, tenga función inversa).

Ejemplo:
Consideremos la función cuadrática:

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } y = f(x) = -x^2 + x - 1 \quad .$$

1) En este caso, el vértice de la gráfica es $V = (\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$.

2) $Dom(f) = \mathbb{R}$; $Rec(f) = (-\infty, -\frac{3}{4}]$

Como $Rec(f)$ es distinto al conjunto de llegada $\mathbb{R}$ entonces la función no es sobreyectiva.
Tampoco es inyectiva (mostrar que dos números reales distintos tienen la misma imagen a través de f).

3) Si se redefine la función f (para obtener una distinta) por:
$g: \mathbb{R} \longrightarrow (-\infty, -\frac{3}{4}]$ tal que $y = g(x) = -x^2 + x - 1$
entonces esta nueva función g no es inyectiva pero si es sobreyectiva.

4) Si se redefine la función g (para obtener una distinta) por:
$h: [\frac{1}{2}, +\infty) \longrightarrow (-\infty, -\frac{3}{4}]$ tal que $y = h(x) = -x^2 + x - 1$
entonces esta nueva función h es inyectiva y es sobreyectiva.
Luego, al ser biyectiva, tiene función inversa.

5) La función inversa de h (que corresponde a la función f original restringida dos veces), está dada por:
$h^{-1}: (-\infty, -\frac{3}{4}] \longrightarrow [\frac{1}{2}, +\infty)$ tal que $h^{-1}(y) = \frac{1+\sqrt{-3-4y}}{2}$

6) La función h también se puede escribir como sigue:
${f_R}^{-1}: (-\infty, -\frac{3}{4}] \longrightarrow [\frac{1}{2}, +\infty)$ tal que ${f_R}^{-1}(x) = \frac{1+\sqrt{-3-4x}}{2}$
(y corresponde a la inversa de la función $f -$ restringida).

Ejercicios:
Determinar las características de las funciones dadas y realizar las restricciones adecuadas para obtener una función que tiene inversa (obtener esa inversa en cada caso).

1) $y = 3x^2 - 2x + 4$
2) $y - 2x^2 + 20x - 43$
3) $y = 3x^2 + 2x + 1$
4) $y = 6x^2 + 7x - 24$