FUNCIÓN POLINOMIAL Y RACIONAL

Definición:
Se llama "función polinomial de grado n en la variable x" a la función cuya regla de correspondencia está dada por:

$$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$.

$a_0, a_1, \dots, a_n$ se llaman "los coeficientes de la función".
a_n se llama "coeficiente principal de la función "
a_0 se llama "coeficiente constante de la función ".

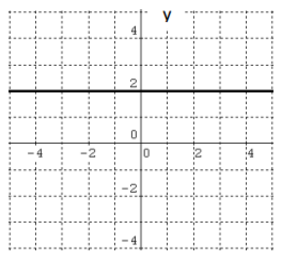
Definición:

1) Un número r es "una raíz" o "un cero de la función polinomial" si $f(r) = 0$.

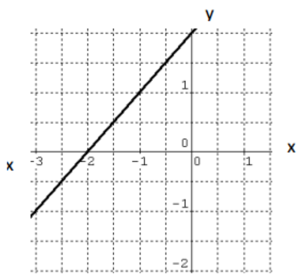
2) "El grado de un término" en una función polinomial es el exponente de x en dicho término.

3) "El grado de la función polinomial" es igual al grado del término de mayor grado.

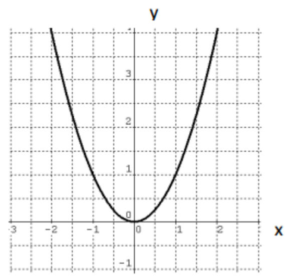
Casos especiales:
Entre las funciones polinomiales se encuentran la función constante, la función lineal y la función cuadrática.



$f(x) = a_0$
Función de grado cero
Llamada "función constante"



$f(x) = a_1 x + a_0$
Función de grado uno
llamada "función lineal"



$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
Función de grado dos
llamada "función cuadrática"

Propiedades de la Función Polinomial

Sea $y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$ una función polinomial de grado n en la variable x .

1) La gráfica de $y = f(x)$ intercepta al $eje\ y$ en $y = a_0$.

2) La gráfica de $y = f(x)$ intercepta al $eje\ x$ en los valores de x que resultan ser las raíces reales de la ecuación $f(x) = 0$.

3) La función polinomial es una función continua (es decir, su gráfica no contiene ningún corte o salto).

Raíces o ceros de una Función Polinomial

Para determinar las raíces o los ceros de una función polinomial se debe resolver la ecuación de grado n dada por:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

Para dividir un polinomio por otro de la forma $(x - c)$ se puede utilizar la división sintética.

División Sintética

"La división sintética" es un procedimiento abreviado (usando sólo los coeficientes) para realizar la división entre un polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_1 x + a_0$ de grado n y un polinomio lineal de la forma $(x - c)$.

Ejemplo:

Dividir el polinomio $p(x) = -10x + 2x^4 - 15x^2 - 3x^3 + 6$ por el polinomio $(-3 + x)$.

Solución:

1) Primero se deben ordenar ambos polinomios en orden decreciente del grado de sus términos y completar con ceros cuando alguno de los coeficientes valga cero.
   $p(x) = 2x^4 - 3x^3 - 15x^2 - 10x + 6 \qquad ; \qquad (x - 3)$

2) Luego, se ubican los coeficientes del dividendo a la izquierda sobre la línea superior de la tabla y el coeficiente c del divisor a la derecha.

2	-3	-15	-10	6	3

3) Al comenzar a dividir, el primer coeficiente del polinomio se escribe tal cual debajo de la segunda línea horizontal.

2	-3	-15	-10	6	3
2					

4) Se multiplica el número que se acaba de escribir por el divisor c y el producto se anota en la segunda fila en el espacio correspondiente al orden siguiente.

2	-3	-15	-10	6	3
	6				
2					

5) El resultado se suma con el coeficiente del polinomio que está justo arriba del número obtenido y esa suma se escribe debajo de la segunda línea horizontal.

2	-3	-15	-10	6	3
	6				
2	3				

6) Se repiten los pasos 4) y 5) hasta terminar el proceso, escribiendo debajo de la segunda línea horizontal la suma correspondiente al último orden.

2	-3	-15	-10	6	3
	6	9	-18	-84	
2	3	-6	-28	-78	

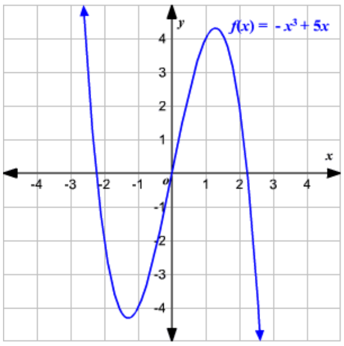
7) Se interpreta el resultado de la división: el último número obtenido es el resto de la división y los números anteriores son los coeficientes del cuociente (que es de grado $n-1$).

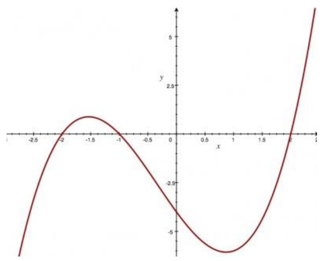
Cuociente : $q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 6x - 28$
Resto : -78

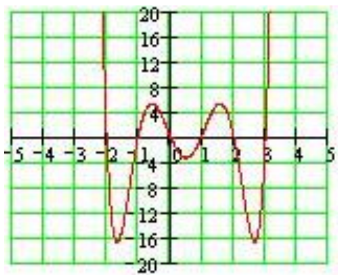
Por lo tanto, se puede escribir:

$$2x^4 - 3x^3 - 15x^2 - 10x + 6 = (x-3)(2x^3 + 3x^2 - 6x - 28) - 78$$

Ejemplos de Gráficas de Funciones Polinomiales







Función Racional

Definición:
Se denomina "Función Racional" a aquella que está definida como el cuociente entre dos funciones polinomiales, esto es:

$$R(x) = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} \qquad (\text{con } a_m \neq 0 \ , \ b_n \neq 0)$$

Al graficar una función racional $R(x)$:

1) Si $m < n$, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.
2) Si $m = n$, la recta $y = \frac{a_m}{b_n}$ es una asíntota horizontal.
3) Si $m > n$, no hay asíntotas horizontales.

Observaciones:

Características generales de una función racional $R(x)$ son:

1) El dominio de la función son todos los números reales, menos los ceros del polinomio del denominador.

2) Su gráfica es discontinua en los valores de x que corresponden a los ceros del denominador.

3) Tiene asíntotas verticales en cada cero del denominador que no lo sea del numerador.

4) Tiene asíntota horizontal si el grado del numerador es menor o igual que el grado del denominador.

5) Tiene asíntota oblicua si el grado del numerador es uno más que el grado del denominador.

Algunos ejemplos de gráficas de Funciones Racionales