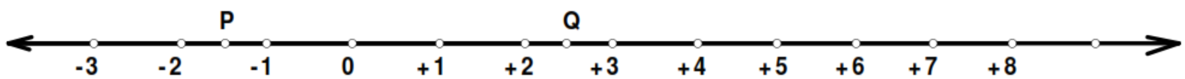
APUNTE N°1.
Sistemas de Coordenadas

Definición 1 *Sistema Unidimensional*

Si en una recta asociamos cada punto a un número real x de modo que el cero separa a los números positivos de los negativos, obtenemos un **sistema coordenado unidimensional** o **sistema coordenado lineal**. Esta asociación es posible por el axioma que señala que existe una correspondencia uno a uno entre los números reales y los puntos de una recta. El número real asociado a un punto se llama **coordenada** del punto y se anota $P(x_1)$.

Definición 2 *Distancia entre dos puntos en una recta*

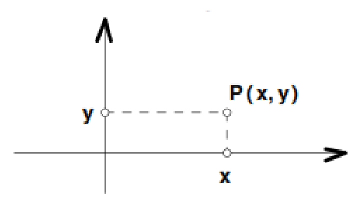
Si la coordenada de P es x_1 y la coordenada de Q es x_2, entonces la distancia entre P y Q está dada por $PQ = |x_2 - x_1|$, en valor absoluto, para asegurar una distancia positiva. Recordemos que $|x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$. Si se sabe que $x_2 > x_1$, no es necesario el valor absoluto pues $x_2 - x_1 > 0$.



Definición 3 *Sistema Bidimensional*

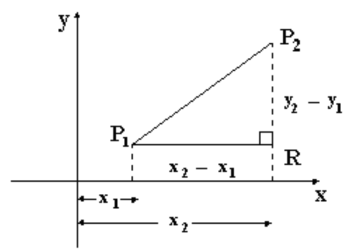
Si escogemos dos rectas perpendiculares (los Ejes) y asociamos a cada una de ellas un sistema coordenado de modo que el cero de ambas rectas coincida con el punto de intersección (el origen), obtenemos un **sistema coordenado bidimensional rectangular** o **sistema coordenado rectangular en el plano**, llamado también sistema coordenado cartesiano en honor a *Rene Descarte, filósofo y matemático (1596-1650).*

El sentido positivo de la ubicación de los números está dado por la punta de la flecha de los ejes. Ahora cada punto del plano estará asociado a un par ordenado de números reales que son sus **coordenadas**, las coordenadas del punto $P(x, y)$ son su abscisa x y su ordenada y. El Sistema cartesiano permite ubicar la posición de cada punto a través de su distancia a cada Eje. La abscisa x del punto P es el pie de la perpendicular desde P al eje X y la ordenada y es el pie de la perpendicular desde P al eje Y.



Teorema 1 *Distancia entre dos puntos en el plano coordenado*

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos cualesquiera del plano.



La fórmula que permite calcular la distancia entre los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ se obtiene aplicando el teorema de Pitágoras al $\triangle P_1P_2R$ retángulo en R, es decir,

$$\begin{array}{rcl} PQ^2 = PR^2 + RQ^2 & \Rightarrow & PQ = \sqrt{PR^2 + RQ^2} \\ PR = |x_2 - x_1| & \Rightarrow & PR^2 = |x_2 - x_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 \\ RQ = |y_2 - y_1| & \Rightarrow & RQ^2 = |y_2 - y_1|^2 = (y_2 - y_1)^2 \end{array}$$

Reemplazando en $PQ = \sqrt{PR^2 + RQ^2}$. Se tiene

$$\boxed{PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

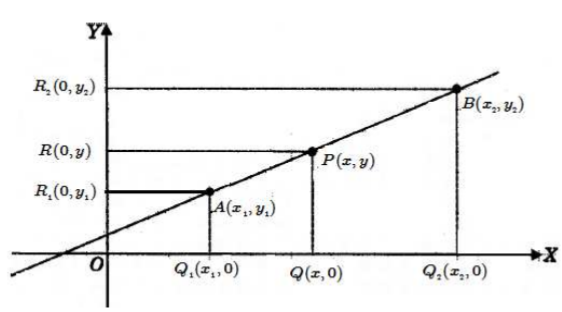
Si suponemos que un punto P_1 cambia de posición al punto P_2 se produce un cambio o variación en ambas coordenadas. La medida de los cambios en las coordenadas se llama **incremento**, así:

- $\triangle x = x_2 - x_1$ es el incremento de la variable x debido al cambio desde la posición inicial $P_1(x_1, y_1)$ a la posición final $P_2(x_2, y_2)$.
- $\triangle y = y_2 - y_1$ es el incremento de la variable y debido al cambio desde la posición inicial $P_1(x_1, y_1)$ a la posición final $P_2(x_2, y_2)$.

Teorema 2 *División de un segmento en una razón dada*

Si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ son los extremos de un segmento $\bar{AB}$, las coordenadas (x, y) de un punto P que lo divide en una razón dada $r = \frac{AP}{PB}$, con $r \neq -1$ son:

$$P(x, y) = P\left(\frac{x_1 + rx_2}{1 + r}, \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}\right)$$



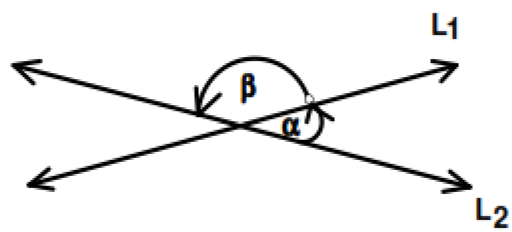
Teorema 3 *Coordenadas del punto medio de un segmento.*

Si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ son los extremos de un segmento $\bar{AB}$, las coordenadas (x, y) de un punto medio P son:

$$P(x,y) = P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Definición 4 *Pendiente de una recta*

Si dos rectas se intersectan, pero no son perpendiculares, determinan dos pares de ángulos opuestos por el vértice, uno es agudo y el otro obtuso

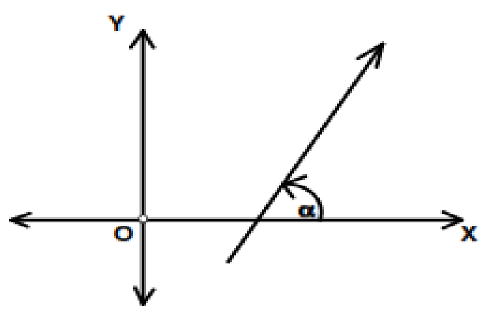


Definición 5

Se llama ángulo de dos recta "dirigidas" al formado por los dos lados que se alejan del vértice. Si las rectas son paralelas el ángulo comprendido entre ellas es de 0° o de 180°.

Definición 6 *Ángulo de inclinación*

Se llama ángulo de inclinación de una recta al formado por la parte positiva del Eje X y la recta, considerada ésta dirigida hacia arriba. Luego $0 \leq \alpha \leq 180°$.



Definición 7 *Pendiente*

Se llama pendiente o coeficiente angular de una recta a la **tangente** o **coeficiente angular de una recta** a la tangente de su ángulo de inclinación. Recordar que la pendiente se denota con la letra m, luego $m = \tan(\alpha)$.

1. De las definiciones se deduce que puede tomar todos los valores reales.
2. Si el ángulo es agudo, $m > 0$. Si el ángulo es obtuso $m < 0$.
3. Si una recta es perpendicular al Eje X o paralela al Eje Y su ángulo de inclinación mide 90° como $m = \tan(90°)$ no está definida, entonces la pendiente de una recta paralela al Eje Y no existe. Por lo tanto podemos establecer que toda recta perpendicular al eje X no tiene pendiente.

Teorema 4

Si P_1 y P_2 son dos puntos diferentes cualesquiera de una recta, la pendiente de la recta es:

$$\boxed{m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}} \text{ con } x_1 = x_2$$

1. El orden en que se tomen las coordenadas en $m = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$, $x_1 \neq x_2$ no tiene importancia, ya que $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.
2. La pendiente del segmento $\overline{P_1P_2}$ es la misma que la pendiente de $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ pues $\overline{P_1P_2} \subset \overleftrightarrow{P_1P_2}$

Teorema 5 *Ángulo de dos rectas*

Un ángulo especificado θ formado por dos rectas está dado por la fórmula $\tan(\theta) = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$ con $m_1 \cdot m_2 \neq -1$ en donde m_1 es la pendiente inicial y m_2 la pendiente final correspondiente al ángulo θ.

Corolario 1

La condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean paralelas es que sus pendientes sean iguales.

Corolario 2

La condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean perpendiculares entre sí, es que el producto de sus pendientes sea igual a -1.