UNIVERSIDAD CATOLICA DE TEMUCO
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ciencias Matemáticas y Físicas

MAT 1128 -TALLER N° 3

ÁLGEBRA LINEAL

EJERCICIOS: " HORAS MIXTAS "

1) Encuentre la matriz $A = [a_{ij}]$ de 4×4 que satisfaga la condición dada:

a) $a_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{ij}$ b) $a_{ij} = 2j - i^3$ c) $a_{ij} = \frac{2}{(i+1)^j}$ d) $a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si } i < j \\ 2i - j & \text{si } i \geq j \end{cases}$

2) Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $E = [4 \quad 2]$, $F = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Calcule las matrices indicadas (si es posible):

a) $A + 2D$ b) $3D - 2A$ c) $B - C$ d) $E(AF)$ e) AB f) BD
g) $D + BC$ h) $F(DF)$ i) FE j) EF k) $DA - AD$ l) $(I_2 - D)^2$

3) Realizar los siguientes productos si es posible:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

4) Resolver la siguiente ecuación matricial $2A + 3X = \frac{1}{2}C\frac{2}{3}B$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

5) Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$. Hallar matrices B y C de 2×2 tales que $AB = AC$ pero $B \neq C$.

6) Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Encuentre A^n $(n \geq 1)$ y verifíquela por inducción matemática.

7) Calcule A^n, con $n \in \mathbb{N}$, si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8) Escriba los sistemas de ecuaciones lineales dados como una ecuación matricial de la forma $Ax = b$.

a) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 &= 4 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} -x_1 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= -2 \\ x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned}$

9) Dada la ecuación matricial $2X + A^t = (2CB + I)^t + (2A - B^{-1})$, donde A y C son simétricas.

a) Resuelva la ecuación de forma algebraica.

b) Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, encuentre la matriz X.

10) Resolver la siguiente ecuación matricial $3A + \frac{1}{2}X = (BA)^t - 2I$, donde

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

11) Resolver las siguientes ecuaciones matriciales de forma algebraica, aplicando las propiedades y operatorias de matrices necesarias.

a) $AX + B^tA = 2I$, donde A, B y X son matrices cuadradas.

b) $(AX^t + B)^t = X + B^tA$

c) $(\frac{1}{2}X^{-1}B)^{-1} - A^{-1}(A^t + 2A) = 0$, donde A es simétrica.

d) $X + BX + 2B^tA - (2A^tB)^t = I$

12) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, comprobar que $A^2 = 2A - I_3$, siendo I_3 la matriz identidad de orden 3. Usando la ecuación anterior, calcule A^4.

13) Sean $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcule $A^3 - 3B^2 + 10I_3$.

b) Use transformaciones elementales fila para determinar si la matriz B es invertible y encuentre la inversa en caso de que lo sea.

c) Calcule $(AB)^t$ y compárela con B^tA^t

14) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, se pide obtener las matrices: $(A \cdot B)^{-1}$ y $(C + A \cdot B)^{-1}$.

15) Calcular la inversa de las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

16) Calcule el o los valores de α que hacen que la siguiente matriz sea invertible:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha-1 & \alpha+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-\alpha & \alpha+2 & \alpha+7 \end{pmatrix} \quad A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 3 & \alpha-1 & 0 \\ 0 & 4 & \alpha+1 \end{pmatrix} \quad A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

17) Sea $A_x = \begin{pmatrix} 1-x & 2 & -2 \\ 2 & 1-x & -2 \\ 2 & 2 & -3-x \end{pmatrix}$

a) Determine el valor de x para que el rango de A, $\rho(A) < 3$.

b) Encuentre $(A_2)^{-1}$

18) Calcule la inversa de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & m & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ m & -1 & .m \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 1 & a & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & a \\ -1 & a & b \end{pmatrix}$$

19) Una fábrica produce dos modelos de lavadoras, A y B, en tres terminaciones: N, L y S. Produce del modelo A: 400 unidades en la terminación N, 200 unidades en la terminación L y 50 unidades en la terminación S. Produce del modelo B, 300 unidades en la terminación N, 100 unidades en la terminación L y 30 unidades en la terminación S. La terminación N lleva 25 horas de taller y 1 hora de administración. La terminación L lleva 30 horas de taller y 1/2 de administración. La terminación S lleva 33 horas de taller y 3/4 horas de administración.

a) Repreentar la información en dos matrices.

b) Hallar una matriz que exprese las horas de taller y de administración empleadas para cada uno de los modelos.

EJERCICIOS: "HORAS AUTÓNOMAS"

1) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, obtenga las siguientes matrices, si existen:

a) $3A - 2B^t$ b) $C + A \cdot B$ c) $(B^t + A)(BA)$

d) $B \cdot \frac{1}{2}C + 4A^tC$ e) $C(B^t + A)$ d) $B \cdot B^t$

2) Hallar la fila c_{2j}, y los elementos c_{34} y c_{22} para la matriz $C = AB,$ donde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

3) Determinar (si existe), $(AB)C$ y $A(BC)$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 7 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

4) Encuentre una matriz A de 2×2 distinta de cero tal que $A^2 = 0$.

5) Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ a) Calcule $A^2,\ A^3, \ldots, A^7$ b) ¿Qué es A^{2001}?, ¿Por qué?

6) Resolver la siguiente ecuación matricial, para $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$3A + \frac{1}{2}X = (BA)^t - 2I,$

7) Encuentre la inversa de las matrices dadas, si es posible.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

8) Una empresa que fabrica bicicletas produce tres modelos con distintas características en tres tamaños diferentes. La capacidad de producción (en miles) en su planta de Concepción está dado por la matriz A y la capacidad de producción en la planta de Santiago está dada por la matriz B. ¿Cuál es la capacidad de producción total en las dos plantas?

A	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3
Aro 12	6	8	10
Aro 16	9	4	5
Aro 20	10	7	3

B	Modelo 1	Modelo 2	Modelo
Aro 12	5	4	3
Aro 16	9	6	4
Aro 20	7	10	2