FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARITMICA

INTRODUCCION

Las funciones exponenciales y logarítmicas pueden ser utilizadas para modelar distintas situaciones de la vida diaria. Algunas de estas situaciones son: crecimiento de bacterias en un cultivo, el crecimiento de una población de una ciudad, el tiempo que toma un objeto para llegar a cierta temperatura, etc.

Supongamos que a nivel experimental se observa que el número de bacterias de un cultivo se duplica cada día. Si hay 1000 ejemplares al inicio, podemos establecer una relación entre el tiempo transcurrido y la cantidad de bacterias en la población.

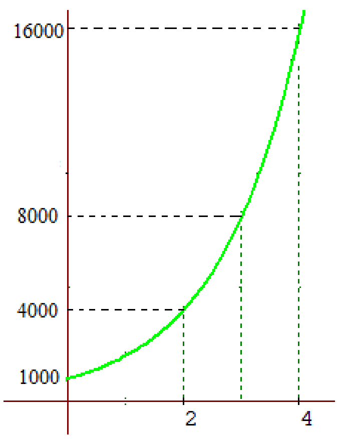
t	0	1	2	3	4
$f(t)$	1000	2000	4000	8000	16000

t es tiempo transcurrido expresado en días
$f(t)$ es la cantidad de bacterias después de t días transcurridos

La función que representa dicha situación está dada por:

$$f(t) = 1000 \cdot 2^t \quad , \quad t = 0,1,2,3,4, \dots$$

Su gráfico se muestra en la figura dada a continuación:



Una de las primeras características que podemos observar es que el crecimiento de la población de bacterias es muy rápido.

Función Exponencial

Definición:
Se llama "función exponencial de base a" a la función real definida por:

$$f_a: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad f_a(x) = a^x$$

donde a es la base de la función, $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$.

Observaciones:
Son válidas todas las propiedades de las potencias, para cualquier exponente real y base positiva.

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3) $a^{-m} = \frac{1}{a^m} = (\frac{1}{a})^m$
4) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
5) $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

Propiedades:

1) $Dom(f_a) = \mathbb{R}$.
2) $Rec(f_a) = \mathbb{R}^+$.
3) a) Si $a > 0$ entonces f_a es una función creciente.
   b) Si $a < 0$ entonces f_a es una función decreciente.
4) La gráfica de la función f_a pasa por el punto $(0,1)$.
5) El $eje\ x$ es una asíntota de la gráfica de f_a .
6) La función f_a es inyectiva en su dominio.
7) Si se restringe el conjunto de llegada en la definición dada, se obtiene que:

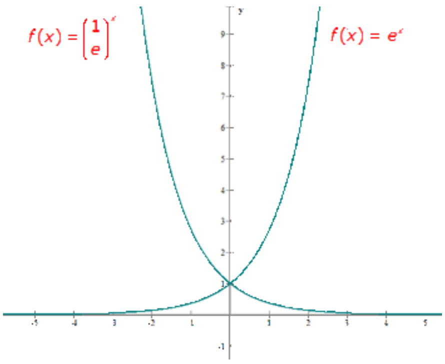
$$f_a: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \quad \text{tal que} \quad f_a(x) = a^x$$

es sobreyectiva.

8) Como la función redefinida (dada en 7)) es biyectiva, tiene inversa.
   La inversa de f_a se llama "función logarítmica en base a".

Observación:
Una de las bases empleada para la función exponencial es el número irracional $e = 2{,}71828 \ldots$

A continuación se muestra en un gráfico las gráficas de las funciones exponenciales $y = e^x$ y $y = e^{-x}$.



Ver que, como $e > 1$, la gráfica de la función $y = e^x$ posee las características de la función exponencial de base mayor que 1 .

De igual modo, como $e > 1$ entonces $e^{-1} < 1$. Luego, la función $y = e^{-x} = (e^{-1})^x$ posee las características de la función exponencial de base menor que 1 .

Nota:
Las propiedades dadas se deben utilizar para obtener las características de las funciones exponenciales cuyo argumento es distinto de x .

Ejercicio:
Obtener las características de la función $y = 3^{x-1}$ y graficarla.

Función Logarítmica

Dado que la función exponencial

$$f_a: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \quad \text{tal que} \quad f_a(x) = a^x$$

es biyectiva, tiene función inversa y es la que se define a continuación.

Definición:
Se llama "función logarítmica de base a" ($a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$), a la función definida por:

$$log_a: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad y = log_a(x) \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

a se llama "la base del logaritmo"
x se llama "el argumento"
y se llama "el valor del logaritmo".

Observaciones:
1) $log_a(x)$ es el exponente al cual hay que elevar la base a para obtener x.

2) Si $y = log_a(x)$ entonces $x = a^y = a^{log_a(x)}$.

Notación:
1) En el caso particular en que la base de la función logarítmica sea $a = 10$, la función se denota por $y = \log(x)$ y se llama “logaritmo vulgar” o “de Briggs” (Henry Brigg, 1560-1631).

2) Si la base de la función logarítmica sea $a = e = 2{,}71828\ldots$, la función se denota por $y = \ln(x)$ y se llama “logaritmo natural” o “de Napier” (John Napier, 1550-1617).

Propiedades:
1) $Dom(log_a) = \mathbb{R}^+$

2) $Rec(log_a) = \mathbb{R}$

3) a) Si $a > 0$ entonces log_a es una función creciente.
   b) Si $a < 0$ entonces log_a es una función decreciente.

4) La gráfica de la función log_a pasa por el punto $(1{,}01)$.

5) El $eje\ y$ es una asíntota de la gráfica de log_a .

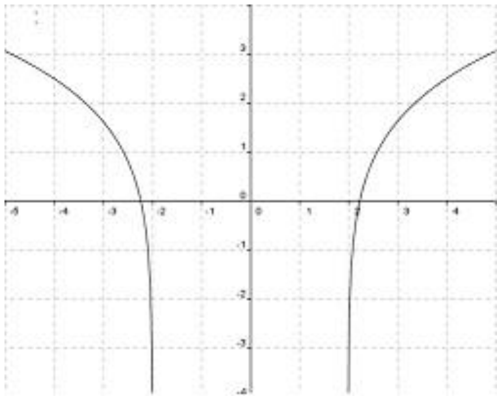
6) Como la función log_a es la función inversa de f_a , se tiene que debe ser biyectiva.

Nota:
Las propiedades dadas se deben utilizar para obtener las características de las funciones logarítmicas cuyo argumento es distinto de x .

Ejemplo:
Obtener las características de la función dada y graficarla.

$$y = f(x) = \ln\,(x^2 - 4)$$

Solución:
1) Como la función logarítmica está definida para los números reales positivos, se concluye que $x^2 - 4 > 0$.
   Luego: al resolver la inecuación dada antes, se obtiene que:
   $$Dom(f) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)\ .$$
2) Intersección con el $eje\ x$ en: $x = \sqrt{5}$; $x = -\sqrt{5}$.
3) La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -2)$.
4) La función es creciente en el intervalo $(2, +\infty)$.
5) Observar que la función dada es par (luego, su gráfica es simétrica con respecto al $eje\ y$.
6) Gráfica de la función dada:



Propiedades:

Para todo $a > 0$, $a \neq 1$, se cumplen:

1) $log_a(1) = 0$

2) $log_a(a) = 1$

3) $log_a(a^n) = n$

4) $log_a(x \cdot y) = log_a(x) + log_a(y)$

5) $log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a(x) - log_a(y)$

6) $log_a(x^n) = n \cdot log_a(x)$

7) $log_a(\sqrt[n]{x^m}) = \frac{m}{n} \cdot log_a(x)$

8) $log_a(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \cdot log_a(x)$

9) $a^{log_a(x)} = x$, para $x \in \mathbb{R}^+$

Observaciones:

1) No existe una fórmula para obtener el logaritmo de una suma o de una diferencia.

2) $\left(log_a(x)\right) \cdot \left(log_a(x)\right) = \left(log_a(x)\right)^2$

   $log_a(x \cdot x) = log_a(x^2)$

   Luego: $\left(log_a(x)\right)^2 \neq log_a(x^2)$

Teorema del Cambio de Base

Sean a y b números reales positivos no nulos.

Luego:

$$log_a(x) = \frac{log_b(x)}{log_b(a)}$$

Observación:

Para a y b números reales positivos no nulos, se cumple:

$$log_a(b) = \frac{1}{log_b(a)}$$

Ejemplos:

1) $log_{\frac{1}{5}}(625) = -4$

2) $\ln(1000) = \frac{3}{\log(e)}$

3) $log_3(5) \cdot log_5(8) \cdot log_8(17) \cdot log_{17}(9) = 2$

Ecuaciones Exponenciales y Logarítmicas

Definición:

1) Se llama "ecuación exponencial en la variable x" a una ecuación en que la variable es o forma parte del exponente de una potencia.

2) Se llama "ecuación logarítmica en la variable x" a una ecuación en que la variable es o forma parte del argumento de una expresión logarítmica.

Observación:

Para determinar el conjunto solución de una ecuación exponencial o logarítmica se utilizan las propiedades dadas de las potencias y de los logaritmos.

Ejemplos:

1) La ecuación $2^{3x+1} = 8$ tiene por solución a $x = \frac{2}{3}$.

2) La ecuación $3^{x-1} = 7$ tiene por solución a $x = log_3(7) + 1$.

3) La ecuación $\log(3x+1) = 2$ tiene por solución a $x = 33$.

4) La ecuación $\ln(2x-1) = 2$ tiene por solución a $x = \frac{e^2+1}{2}$.