FUNCIONES

Definición:
Sean A y B dos conjuntos no vacíos. "Una función de A en B" es una relación definida desde el conjunto A al conjunto B, tal que cada elemento del conjunto A está relacionado con un único elemento de B.

Nota:
Una función de A en B asigna a cada elemento de A un único elemento de B.

Notación:
1) f función de A en B se denota por: $f: A \longrightarrow B$ ó $A \xrightarrow{f} B$

2) Si a través de la función f un elemento x de A está relacionado con un elemento y de B entonces se anotará $y = f(x)$ o bien $(x, y) \in f$.

Definición:
Sea f una función de A en B.
1) Si $y = f(x)$ entonces:
   y se llama “la imagen de x a través de f"
   x se llama “preimagen de y a través de f”

2) A se llama "dominio de f", denotado por $A = Dom(f)$.

3) "El recorrido de f" es el conjunto de todas las imágenes de los elementos de A a través de f, denotado por $Rec(f)$.

Observaciones:
1) $Dom(f) = \{x \in A \ / \ existe \ \ y \in B : \ \ y = f(x)\} \subseteq A$

2) $Rec(f) = \{y \in B \ / \ existe \ \ x \in A : \ \ y = f(x)\} \subseteq B$

3) Una función de puede entregar a través de su Regla de Correspondencia, como conjunto de pares ordenados o a través de una Tabla de Datos Tabulados (cuando el dominio y el recorrido son finitos).

4) Una función se puede representar a través de un Diagrama de Venn y/o en un sistema de ejes coordenados

Definición:
Una función se dice "función real (o función real valuada de variable real)" si su dominio y su recorrido son subconjuntos de los números reales.

Observación:
Las funciones reales comúnmente se definen sólo a través de su Regla de Correspondencia y con ella se determinan su dominio y su recorrido.

Ejemplos:
1) Para $f(x) = \sqrt{2 - x}$:
$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \geq 2\} = [2, +\infty) \quad , \quad Rec(f) = \mathbb{R}^+$$

2) Para $g(x) = x^2 + 1$:
$$Dom(f) = \mathbb{R} \quad , \quad Rec(f) = \{y \in \mathbb{R} \ / \ x \geq 1\} = [1, +\infty)$$

3) Para $h(x) = \sqrt{(-x^2 + 2x - 1)(x + 5)}$:
$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \leq -5\} = (-\infty, -5] \quad , \quad Rec(f) = \mathbb{R}^+$$

Definición:
Sean f y g dos funciones reales.
Se dice que "f y g son iguales" si y sólo si:
a) $Dom(f) = Dom(g)$

b) Para todo $x \in Dom(f)$: $\qquad f(x) = g(x)$

Definición:

Sea $f: A \longrightarrow B$ una función real.

1) Se dice que "f es inyectiva" o "uno a uno" si y sólo si:
   Para todo $a, b \in A$: $f(a) = f(b) \implies a = b$

2) Se dice que "f es epiyectiva" o "sobreyectiva" si y sólo si:
   Para todo $y \in A$, existe $x \in A$: $y = f(x)$

3) Se dice que "f es biyectiva" si y sólo si f es inyectiva y es epiyectiva.

4) $c \in A$ se llama "un cero de f" si y sólo si $f(c) = 0$.

5) Dada una función real f y un intervalo I subconjunto de $Dom(f)$, se dice que "f es creciente en I" si y sólo si:
   Para todo $m, n \in I$: $m < n \implies f(m) < f(n)$

6) Dada una función real f y un intervalo I subconjunto de $Dom(f)$, se dice que "f es decreciente en I" si y sólo si:
   Para todo $m, n \in I$: $m < n \implies f(m) > f(n)$

7) Dada una función real f, se dice que "f es una función par" si y sólo si:
   Para todo $x \in Dom(f)$: $f(-x) = f(x)$

8) Dada una función real f, se dice que "f es una función impar" si y sólo si:
   Para todo $x \in Dom(f)$: $f(-x) = -f(x)$

Observaciones:

Sea $f: A \longrightarrow B$ una función real, I intervalo subconjunto de A.

1) Decir que <u>f es inyectiva</u> significa que cada elemento del recorrido de f es imagen de un único elemento del dominio de f .

2) Decir que <u>f es epiyectiva</u> significa que todo elemento de B es imagen de algún elemento de A a través de f .

3) Sean $m, n \in I$ tal que $m < n$.
Si f es creciente en I entonces $\frac{f(n)-f(m)}{n-m} > 0$.

4) Sean $m, n \in I$ tal que $m < n$.
Si f es creciente en I entonces $\frac{f(n)-f(m)}{n-m} < 0$.

5) La gráfica de una función par es simétrica con respecto al $eje\ y$.

6) La gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen del sistema de coordenadas.

Ejemplos:

1) Dada la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3x + 1$:
   a) f es una función inyectiva
   b) $c = -\frac{1}{3}$ es un cero de f
   c) f es creciente en $\mathbb{R}$
   d) f no es par ni impar

2) Dada la función $g: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \frac{1}{x}$:
   a) g es una función inyectiva
   b) No tiene ceros
   c) g es decreciente en $\mathbb{R}^+$
   d) g es una función impar

3) Dada la función $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) = x^2$:
   a) h no es una función inyectiva
   b) $c = 0$ es un cero de h
   c) h es decreciente en $\mathbb{R}^-$ y es creciente en $\mathbb{R}^+$
   d) h es una función par

4) Dada la función $t: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $t(x) = x^3$:
   a) t es una función inyectiva
   b) $c = 0$ es un cero de t
   c) t es creciente en $\mathbb{R}$
   d) t es una función impar

Operatoria con funciones

Definición:
Sean f y g dos funciones reales.

1) "La adición de f y g" se define por:
   $\forall\, x \in Dom(f) \cap Dom(g): \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$

2) "La sustracción de f y g" se define por:
   $\forall\, x \in Dom(f) \cap Dom(g): \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x)$

3) "El producto de f y g" se define por:
   $\forall\, x \in Dom(f) \cap Dom(g): \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

4) "El cuociente de f y g" se define por:
   $\forall\, x \in Dom(f) \cap Dom(g), g(x) \neq 0: \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

5) "La composición de f y g" se define por:
   $\forall\, x \in Dom(f)$ tal que $f(x) \in Dom(g)$: $\quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$

Ejemplos:
Dadas las funciones $f(x) = x^2 + 2x \quad , \quad g(x) = x - 2$:

1) $(f + g)(x) = x^2 + 3x - 2$

2) $(f - g)(x) = x^2 + x + 2$

3) $(f \cdot g)(x) = x^3 - 4x$

4) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2+2x}{x-2}$

5) $(g \circ f)(x) = x^2 + 2x - 2$

6) $(f \circ g)(x) = x^2 - 2x$

Definición:

Sea $f: A \longrightarrow B$ una función real inyectiva.

"La inversa de f", denotada por f^{-1}, se define por:

$f^{-1}: B \longrightarrow A$ tal que $f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y$

Observación:

Si $f: A \longrightarrow B$ es una función real sólo inyectiva entonces la función inversa de f también existe y está dada por:

$f^{-1}: Rec(f) \longrightarrow A$ tal que $f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y$

Definición:

Sea f una función real.

" f es función periódica de periodo k" si y sólo si k es el menor número real positivo tal que:

Para todo $x \in Dom(f)$: $\quad f(x + k) = f(x)$

Definición:

Sea f una función real.

1) Se dice que "f es acotada superiormente" si y sólo si:
   existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq M$, para todo $x \in Dom(f)$

2) Se dice que "f es acotada inferiormente" si y sólo si:
   existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq f(x)$, para todo $x \in Dom(f)$

3) Se dice que "f es acotada" si y sólo si f es acotada superiormente e inferiormente.

Observación:

"f es acotada" si y sólo si:

existe $N \in \mathbb{R}^+$ tal que $|\, f(x) \,| \leq N$, para todo $x \in Dom(f)$

Ejemplo:

La función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ es acotada.