FUNCIÓN LINEAL

Definición:
Una función real f es una "función lineal" si su regla de correspondencia se puede reducir a una de la forma $y = f(x) = mx + b$, con $m, b \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$.

Observaciones:
1) El dominio y el recorrido de una función lineal es $\mathbb{R}$.

2) Su gráfica es una recta.

3) m se llama "pendiente de la recta".
   Si la recta pasa por los puntos $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ entonces la pendiente se puede determinar por $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

4) b se llama "ordenada en el origen" o "coeficiente de posición".
   Gráficamente es la coordenada y del punto donde la recta corta al $eje\ y$.

Propiedades:
1) Si $m > 0$ entonces la función $y = f(x)$ es creciente.

2) Si $m < 0$ entonces la función $y = f(x)$ es decreciente.

3) Si $m = 0$ entonces la función $y = f(x)$ es constante
   (su gráfica es una recta de ecuación $y = b$, paralela al $eje\ x$).

Funciones Lineales de Ingreso y Costo
1) "El Ingreso I de una empresa en un determinado período de tiempo” está dado por el monto correspondiente a las ventas de bienes o servicios en ese período.
   Por ello, el Ingreso I se puede expresar como el producto entre la cantidad vendida (x) y el precio unitario del bien o servicio (p), es decir: $I(x) = p \cdot x$.

2) "El Costo C" es la expresión cuantitativa que representa el consumo monetario de factores de la producción que se necesitan para producir un bien o para prestar un servicio.

   Se divide en dos categorías:
   a) “Costos fijos C_f”: Son los costos que se tienen independientes de la cantidad que se produzca de un artículo o un servicio que se preste (por ejemplo: alquiler del local, ciertos impuestos, etc.)

   b) “Costos variables C_v”: Son los costos que dependen de la cantidad x que se produzca del artículo o que se preste del servicio (por ejemplo: costos de materiales, de mano de obra productiva, etc.)

   Así, los costos C están dados por:
$$C(x) = C_f + C_v \cdot x$$
   (x cantidad de unidades producidas).

Ecuación de la Recta

Sea L una recta en el plano.

1) Ecuación de L que pasa por dos puntos:
   Si L pasa por los puntos $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$:
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

2) Ecuación de L que pasa por un punto y de cierta pendiente:
   Si L pasa por el punto $P = (x_1, y_1)$ y tiene pendiente m:
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

3) Ecuación de L que corta a los ejes en ciertos puntos:
   Si L corta al $eje\ x$ en $a \neq 0$ y corta al $eje\ y$ en $b \neq 0$:
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

4) Ecuación de L de cierta pendiente y que corta al $eje\ y$ en un punto:
   Si L tiene pendiente m y corta al $eje\ y$ en n:

$$y = mx + n$$

5) La ecuación general de L está dada por:

$$Ax + By + C = 0 \qquad \text{(con } A, B, C \in \mathbb{R}\text{)}$$

Definición:
Sean L_1 y L_2 dos rectas en el plano.
1) Se dice que "L_1 es paralela a L_2", denotado por $L_1 \parallel L_2$, si y sólo si $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.

2) Se dice que "L_1 es perpendicular a L_2", denotado por $L_1 \perp L_2$, si y sólo si el ángulo entre ellas es de $90°$.

Propiedades:
Sean L_1 y L_2 dos rectas en el plano, L_1 de pendiente m_1 y L_2 de pendiente m_2 .

1) $L_1 \parallel L_2$ si y sólo si $m_1 = m_2$

2) $L_1 \perp L_2$ si y sólo si $m_1 \cdot m_2 = -1$

Ejemplos:
1) La recta que pasa por los puntos $P = (-5,4)$ y $Q = (3,2)$ tiene pendiente $m = -\frac{1}{4}$.

2) La recta que pasa por los puntos $M = (4,4)$ y $N = (3,0)$ tiene pendiente $m = 4$.

3) Las rectas dadas en los ejemplos 1) y 2) son perpendiculares.

4) La recta de ecuación $y = 4x - 1$ es paralela a la recta dada en el ejemplo 2).

Ejercicios:

1) Verificar que la recta de ecuación $2x - 3y - 5 = 0$ es paralela a la recta de ecuación $6y - 4x + 2 = 0$.

2) Verificar, usando pendientes, que los puntos $A = (2,3)$, $B = (-4,-3)$ y $C = (6,-1)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

3) Determinar, en cada caso, la ecuación de la recta.
   a) Que pasa por $A = (1,6)$ y $B = (5,-2)$.
   b) Que pasa por $A = (0,4)$ y tiene pendiente $m = -3$.
   c) Su intersección con el $eje\ x$ es en 6 y con el $eje\ y$ en 2 .
   d) Que pasa por $P = (-3,4)$ y es paralela a $y = 3x - 5$.
   e) Que pasa por $M = (2,3)$ y es perpendicular a $y = -\frac{1}{3}x$.
   f) Que pasa por $N = (-2,-3)$ y es horizontal.

Intersección entre rectas

El buscar el punto de intersección entre dos rectas no paralelas significa determinar el punto que ambas tienen en común.

Luego, las coordenadas de ese punto deben satisfacer las ecuaciones de ambas rectas.

Por lo tanto, algebraicamente se debe resolver el sistema de ecuaciones lineales que se forma con las ecuaciones de ambas rectas.

Ejemplo:

El punto de intersección entre las rectas de ecuaciones $4x + 3y = 24$ y $2x - y = 7$ es $P = (\frac{9}{2}, 2)$.

Ejercicios:

Determinar el punto de intersección entre L_1 y L_2, en cada caso.

1) L_1: $y + 5 = 3x$; L_2: $2y - x = 1$
2) L_1: pasa por $(2,3)$ y $(-1,1)$
   L_2: intersecta al $eje\ x$ en 6 y al $eje\ y$ en 2
3) L_1: pasa por $(0,4)$ con $m = -3$
   L_2: pasa por $(3,5)$ y es paralela a $3x + 4y = 8$