Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Aplicadas à Educação
Departamento de Ciências Exatas

Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral

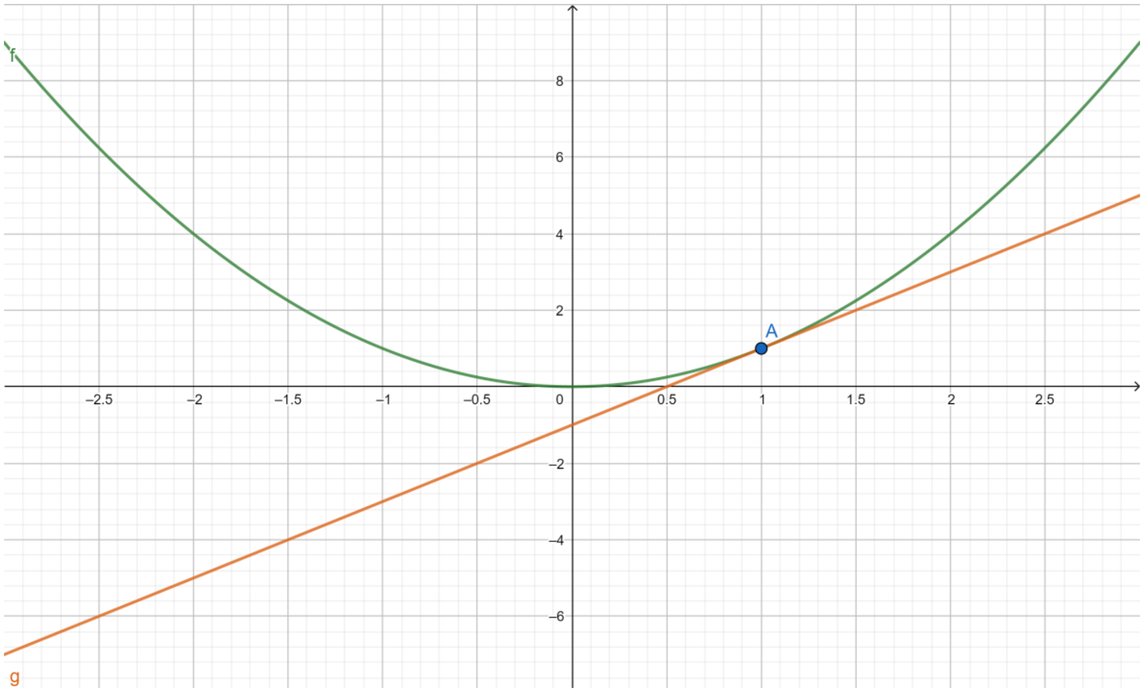
Professora: Juliana Aragão

Curso: Sistemas de Informação

Aula 5– Parte 1: Limites de Funções

Limites de Funções - Motivação

O Problema da Tangente: Encontre a equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $P(1, 1)$.

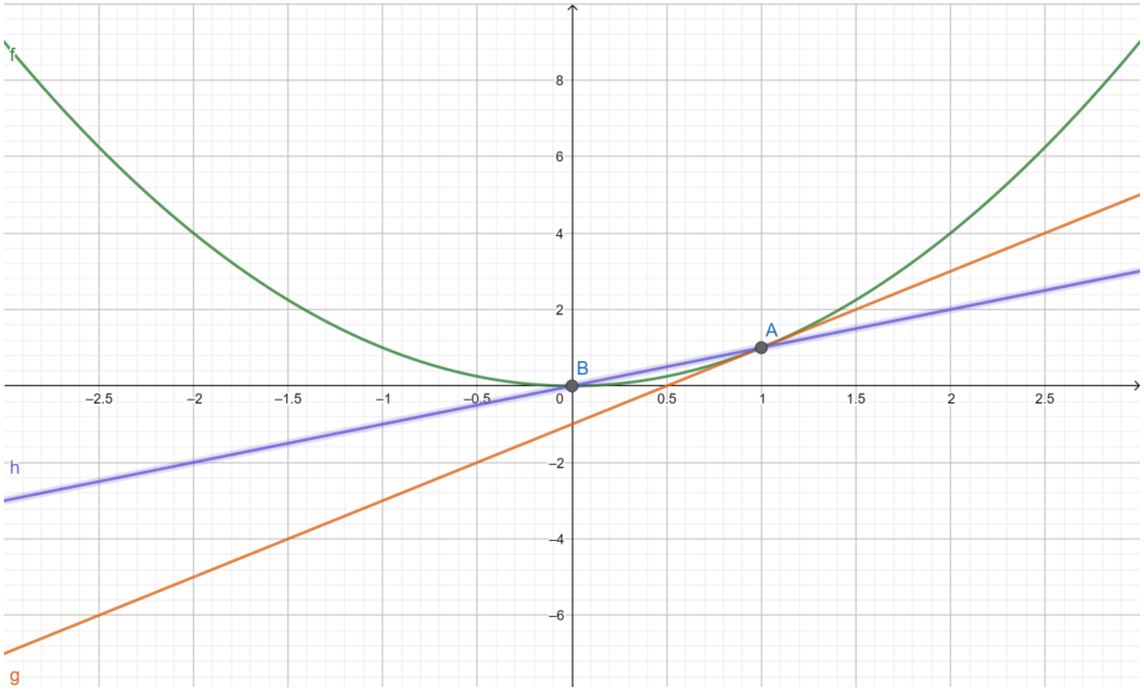


Limites de Funções - Motivação

- Uma tangente é uma reta que toca uma curva e deve ter a mesma inclinação da curva no ponto tocado.
- Uma reta pode ser descrita pela equação $y = mx + b$.
- Uma secante é uma reta que intersecta uma curva em dois pontos.
- A secante ao gráfico de $f(x) = x^2$ passando pelos pontos $P(1,1)$ e $Q(x, x^2)$ tem inclinação $m_{PQ} = \frac{x^2-1}{x-1}$.

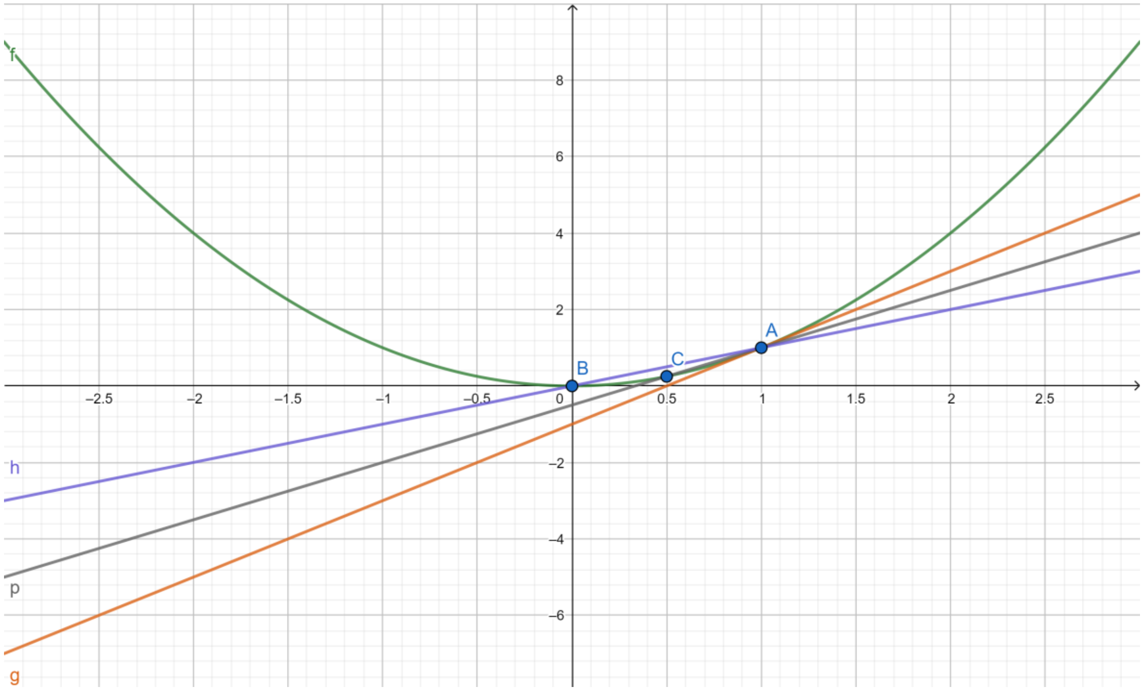
Limites de Funções - Motivação

- Para $Q(0,0)$ tem-se $m_{PQ} = 1$



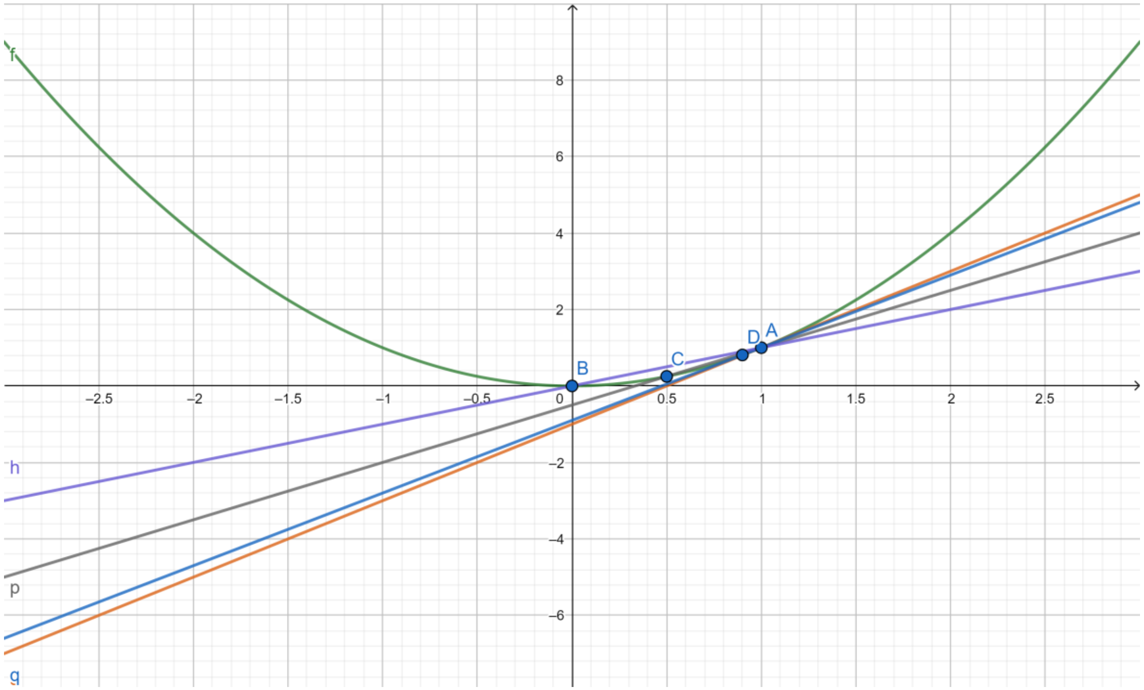
Limites de Funções - Motivação

- Para $Q(0.5{,}0.25)$ tem-se $m_{PQ} = 1.5$



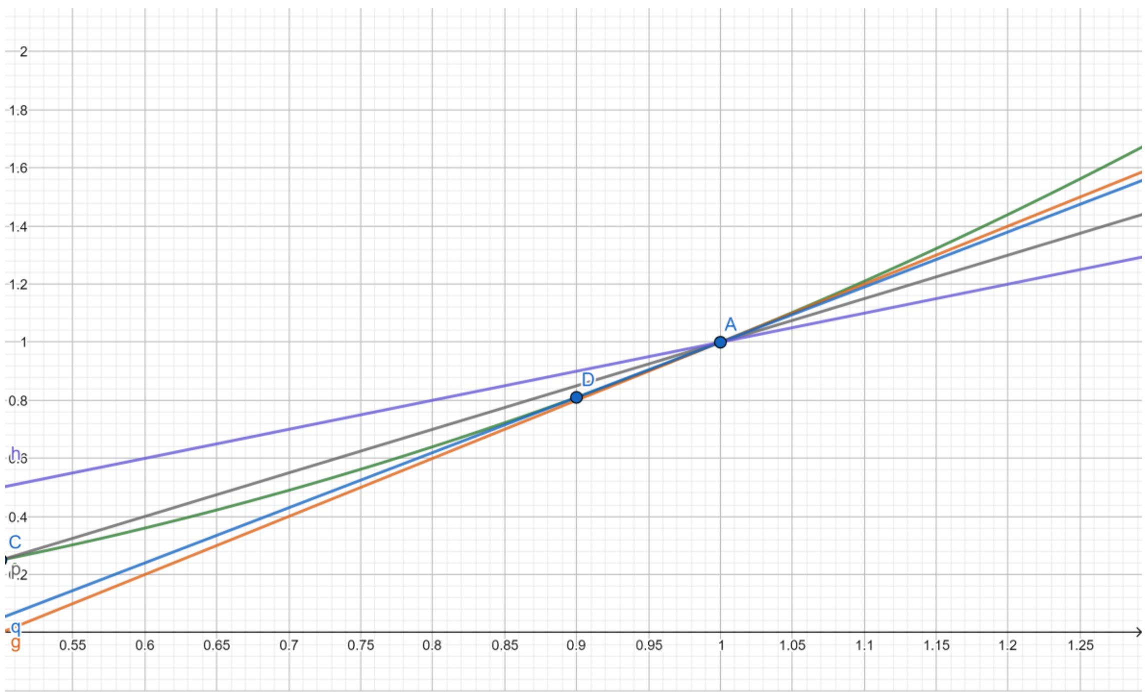
Limites de Funções - Motivação

- Para $Q(0.9{,}0.81)$ tem-se $m_{PQ} = 1.9$



Limites de Funções - Motivação

- Para $Q(0.9,0.81)$ tem-se $m_{PQ} = 1.9$



Limites de Funções - Motivação

- Observa-se que quanto mais o ponto Q se aproxima do ponto P mais a reta secante por P e Q se aproxima da tangente por P.
- Ou seja, quanto mais o ponto Q se aproxima do ponto P mais a inclinação da reta secante por P e Q se aproxima da inclinação da tangente por P.
- De maneira mais formal escrevemos isso como:

$$m_{PQ} \to m \text{ quando } Q \to P$$

Ou ainda, dizemos que o limite de m_{PQ} quando $Q \to P$ é m, e escrevemos

$$\lim_{Q \to P} m_{PQ} = m$$

Limites de Funções - Motivação

O Problema da Velocidade Instantânea: Suponha que uma bola seja solta a partir do ponto de observação no alto da Torre CN, em Toronto, 450 m acima do solo. Se a distância percorrida após t segundos for chamada $s(t)$ e medida em metros, então a Lei de Galileu pode ser expressa pela equação $s(t) = 4{,}9 \cdot t^2$. Encontre a velocidade da bola após 5 segundos.

$$v_{media} = \frac{s_f - s_0}{t_f - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Limites de Funções - Motivação

Intervalo de tempo	Velocidade média(m/s)
$5 \leq t \leq 6\ (\Delta t = 1)$	53,9
$5 \leq t \leq 5{,}1\ (\Delta t = 0{,}1)$	49,49
$5 \leq t \leq 5{,}05\ (\Delta t = 0{,}05)$	49,245
$5 \leq t \leq 5{,}01(\Delta t = 0{,}01)$	49,049
$5 \leq t \leq 5{,}001(\Delta t = 0{,}001)$	49,0049

- Observa-se que quanto mais Δt se aproxima de 0 mais a velocidade média se aproxima da velocidade instantânea.
- De maneira mais formal escrevemos isso como:

$$\lim_{\Delta t \to 0} v_{média} = v_{instantânea}$$

Limites de Funções - Motivação

Desejamos saber como se comporta a função $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ quando x assume valores próximos de 1.

x	0	0,5	0,9	0,95	0,99	0,999
$f(x)$	1	1,5	1,9	1,95	1,99	1,999

x	2	1,5	1,1	1,05	1,01	1,001
$f(x)$	3	2,5	2,1	2,05	2,01	2,001

- Observa-se que quanto mais x se aproxima de 1 mais $f(x)$ se aproxima de 2.
- De maneira mais formal escrevemos isso como:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

Limites de Funções – Definição Informal

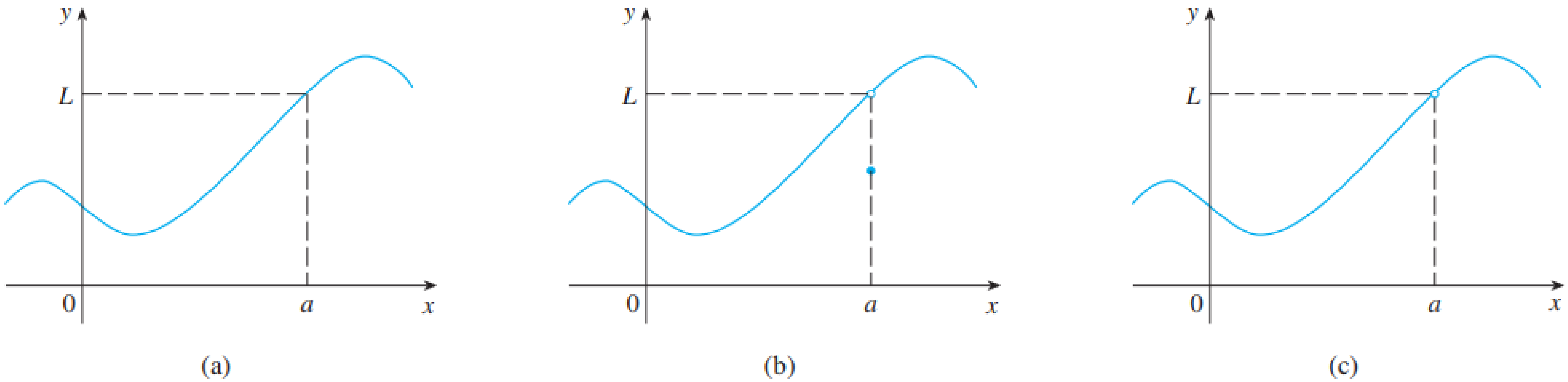
Suponha que seja definido quando está próximo ao número a (Isso significa que f é definido em algum intervalo aberto que contenha a, exceto possivelmente no próprio a). Então escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

e dizemos “o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é igual a L” se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto quisermos), tornando x suficientemente próximo de a (por ambos os lados de a), mas não igual a a.

Limites de Funções – Definição Informal

Observação 1: f deve estar definido em algum intervalo aberto que contenha a, mas não necessariamente no próprio a. Nos três casos a seguir temos $\lim_{x \to a} f(x) = L$



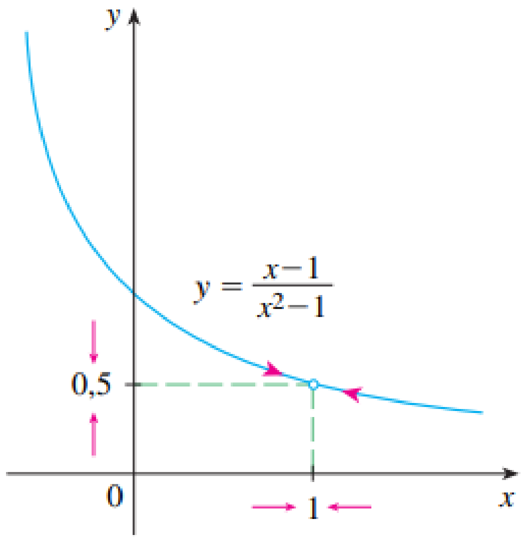
Limites de Funções - Exemplos

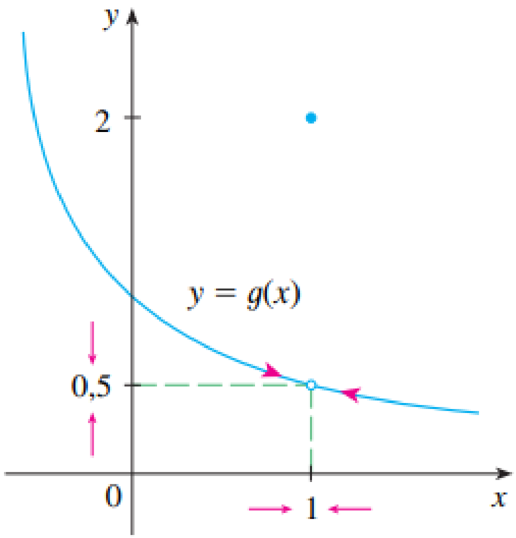
$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 0,5$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1}, x \neq 1 \\ 2, x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 0,5$$





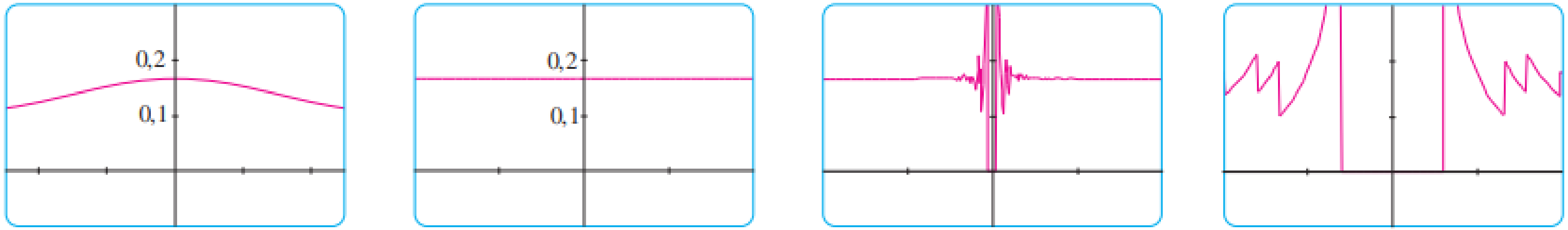
Limites de Funções - Exemplos

t	$\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
$\pm 1{,}0$	0,16228
$\pm 0{,}5$	0,16553
$\pm 0{,}1$	0,16662
$\pm 0{,}05$	0,16666
$\pm 0{,}01$	0,16667

t	$\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
$\pm 0{,}0005$	0,16800
$\pm 0{,}0001$	0,20000
$\pm 0{,}00005$	0,00000
$\pm 0{,}00001$	0,00000

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{t^2}$$

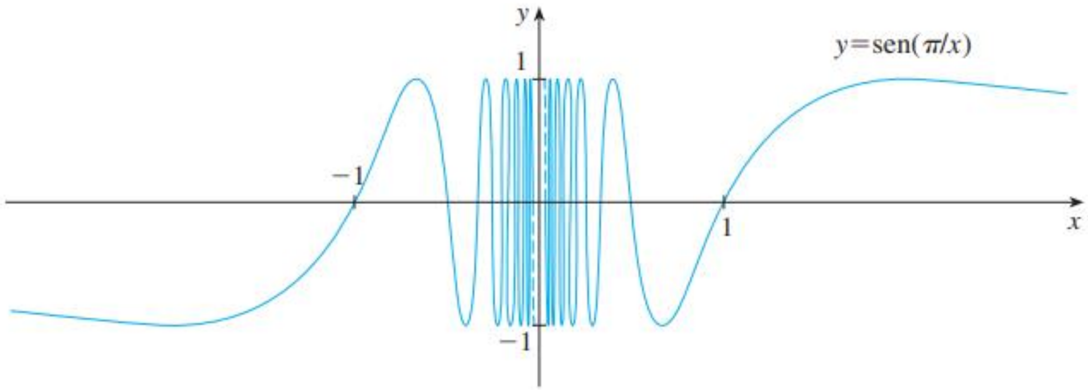
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{6}$$

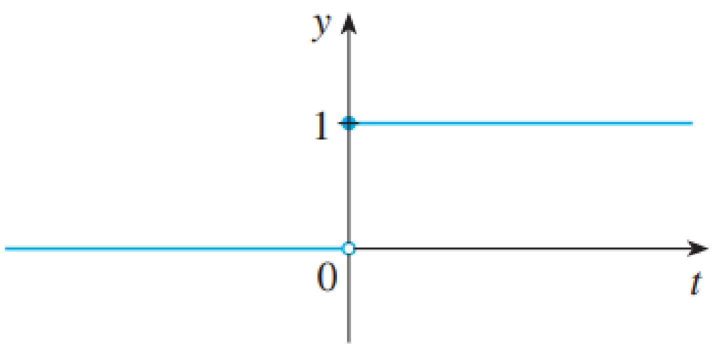


(a) $[-5, 5]$ por $[-0{,}1; 0{,}3]$ (b) $[-0{,}1; 0{,}1]$ por $[-0{,}1; 0{,}3]$ (c) $[-10^{-6}, 10^{-6}]$ por $[-0{,}1; 0{,}3]$ (d) $[-10^{-7}, 10^{-7}]$ por $[-0{,}1; 0{,}3]$

Limites de Funções - Exemplos

A função $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ não tem limite quando $x \to 0$





A função $f(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1, x \geq 0 \end{cases}$ não tem limite quando $x \to 0$