



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Aplicadas à Educação
Departamento de Ciências Exatas

Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral

Professora: Juliana Aragão

Curso: Sistemas de Informação

Aula 5– Parte 2: Limites Laterais

Limites Laterais

Desejamos saber como se comporta a função $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ quando x assume valores próximos de 1.

x	0	0,5	0,9	0,95	0,99	0,999
$f(x)$	1	1,5	1,9	1,95	1,99	1,999

(a)

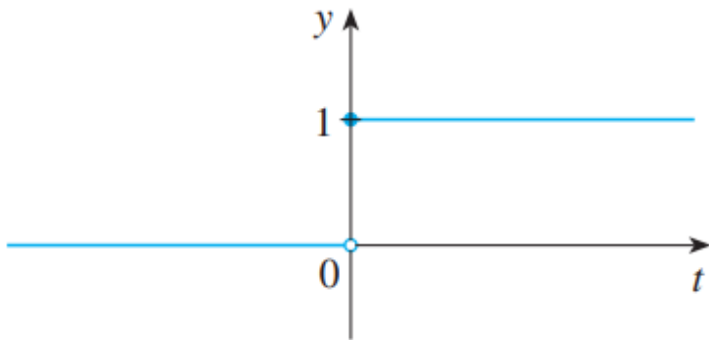
x	2	1,5	1,1	1,05	1,01	1,001
$f(x)$	3	2,5	2,1	2,05	2,01	2,001

(b)

- Observa-se, da tabela (a), que quanto mais x se aproxima de 1, por valores menores que 1, ou seja, pela esquerda, mais $f(x)$ se aproxima de 2, então dizemos que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$.
- Analogamente, da tabela (b), quanto mais x se aproxima de 1, por valores maiores que 1, ou seja, pela direita, mais $f(x)$ se aproxima de 2, então dizemos que $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$.

Limites Laterais

A função $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ não tem limite quando $x \rightarrow 0$



- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0.$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1.$

Limites Laterais

Definição 1: Escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

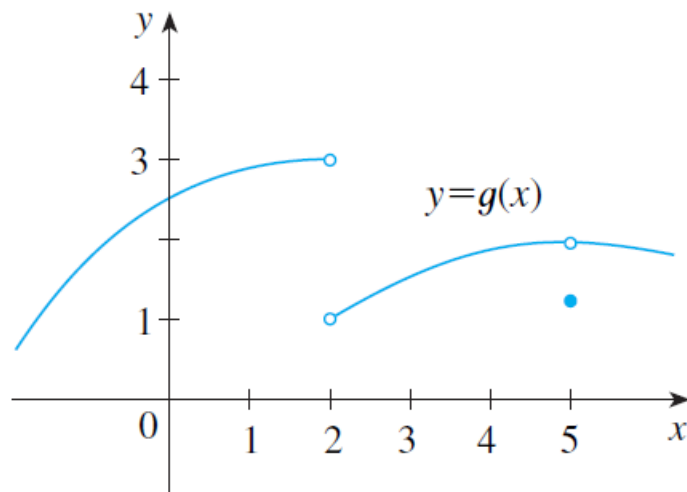
e dizemos que o limite à esquerda de $f(x)$ quando x tende a a [ou o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda] é igual a L se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L , para x suficientemente próximo de a e x menor que a .

Definição 2: Escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

e dizemos que o limite à direita de $f(x)$ quando x tende a a [ou o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela direita] é igual a L se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L , para x suficientemente próximo de a e x maior que a .

Limites Laterais



Exemplo 1:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$$

$f(2)$ não está definido

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 2$$

$$f(5) = 1,4$$

Limites Laterais

Teorema 1:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ se, e somente se, } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \text{ e } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

Limites Laterais

Exemplo 2: Use o gráfico dado de f para dizer o valor de cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique o porquê.

(a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

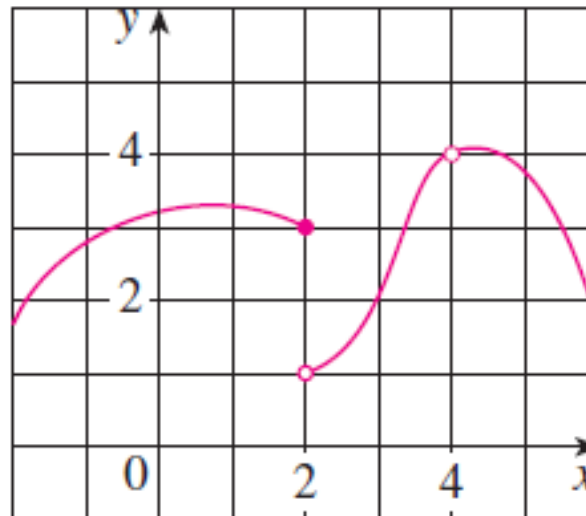
(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

(d) $f(2)$

(e) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

(f) $f(4)$



Limites Laterais

Exemplo 3: Use o gráfico dado de f para dizer o valor de cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique o porquê.

(a) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

(c) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

(d) $f(3)$

(e) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

