Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Aplicadas à Educação
Departamento de Ciências Exatas

Disciplina: Cálculo I

Professora: Juliana Aragão

Curso: LCC

Limites – Parte 1

Limites – Definição Intuitiva

Temos uma função $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, cujo domínio é $\mathbb{R} - \{1\}$, e, como não podemos calcular $f(1)$, desejamos saber como esta função se comporta quando x assume valores próximos de 1.

Limites – Definição Intuitiva

x	0	0,5	0,9	0,95	0,99	0,999
$f(x)$	1	1,5	1,9	1,95	1,99	1,999

Tabela 1a

x	2	1,5	1,1	1,05	1,01	1,001
$f(x)$	3	2,5	2,1	2,05	2,01	2,001

Tabela 1b

Observamos, das tabelas 1a e 1b, que quanto mais x se aproxima de 1 mais $f(x)$ se aproxima de 2. Representamos este comportamento dizendo que

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

Limites – Definição Informal

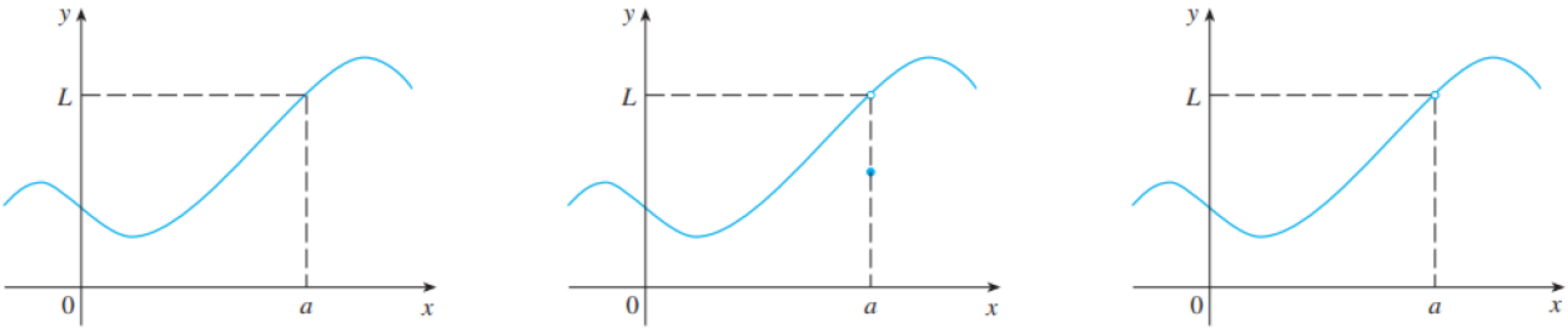
Definição 1: Seja f uma função definida em algum intervalo aberto que contenha a, exceto possivelmente no próprio a. Então escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

E dizemos "o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é igual a L" se pudermos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos de L quanto quisermos, tornando x suficientemente próximo de a (por ambos os lados de a), mas não igual a a.

Limites – Observações

- Dizer que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ não é o mesmo que dizer que $f(a) = L$. Podemos ter $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $f(a) = L$ ou $f(a) \neq L$ ou até mesmo $f(a)$ não existir.

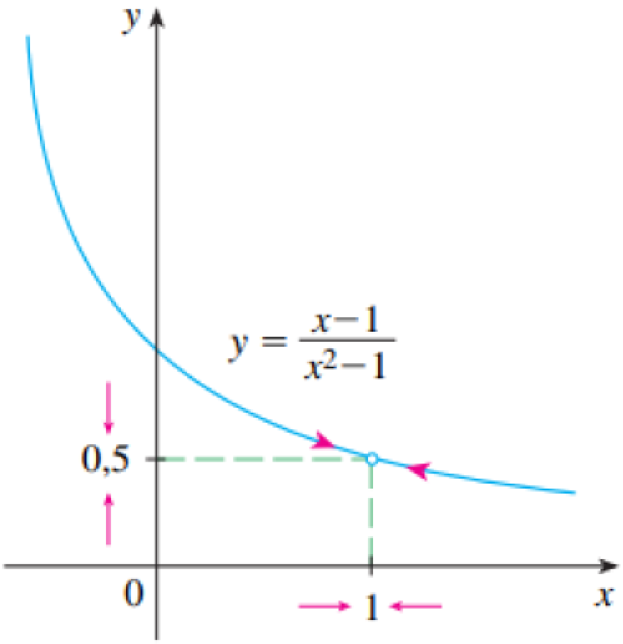


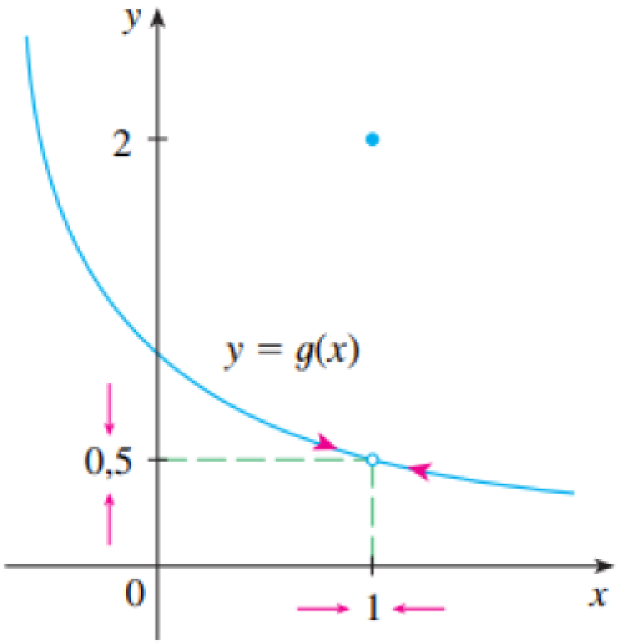
(a) (b) (c)

Limites – Observações

Exemplo 1: $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$

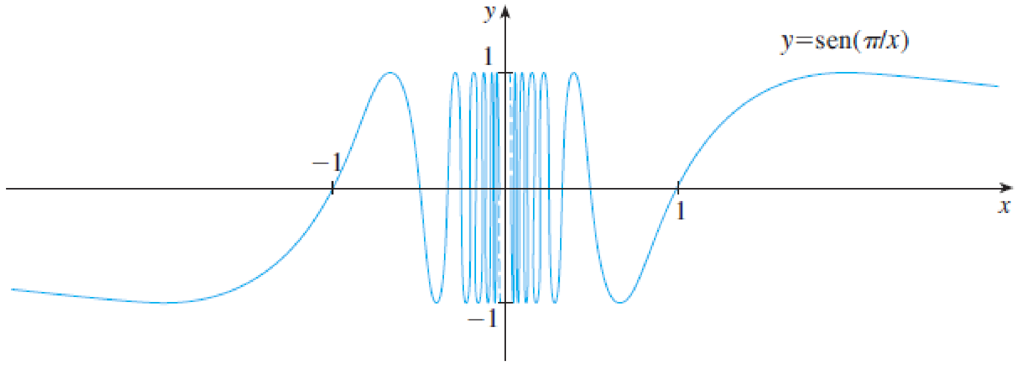
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1}, x \neq 1 \\ 0{,}5, x = 1 \end{cases}$$



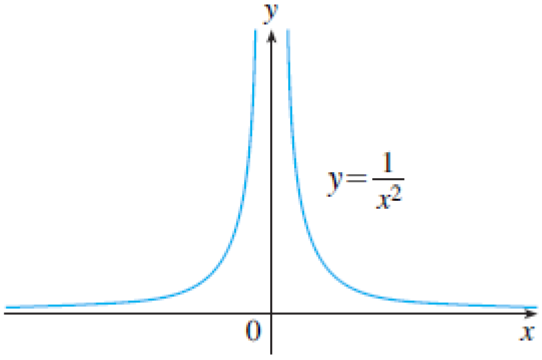


Limites – Observações

- A função $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ não tem limite quando $x \to 0$



- A função $f(x) = \frac{1}{x^2}$ não tem limite quando $x \to 0$



Limites Laterais

Para determinarmos $\lim_{x \to 1} f(x)$ da função $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, construímos duas tabelas.

x	0	0,5	0,9	0,95	0,99	0,999
$f(x)$	1	1,5	1,9	1,95	1,99	1,999

(a)

x	2	1,5	1,1	1,05	1,01	1,001
$f(x)$	3	2,5	2,1	2,05	2,01	2,001

(b)

Observamos que quanto mais x se aproxima de 1, por valores menores (a) ou maiores (b) que 1, mais $f(x)$ se aproxima de 2. Assim, dizemos, respectivamente, que

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2 \text{ e } \lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$$

Limites Laterais – Definição Informal

Definição 2: Escrevemos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \text{ (Limite Lateral à Esquerda)}$$

E dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda é igual a L se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L, para x suficientemente próximo de a, mas menores que a.

Limites Laterais – Definição Informal

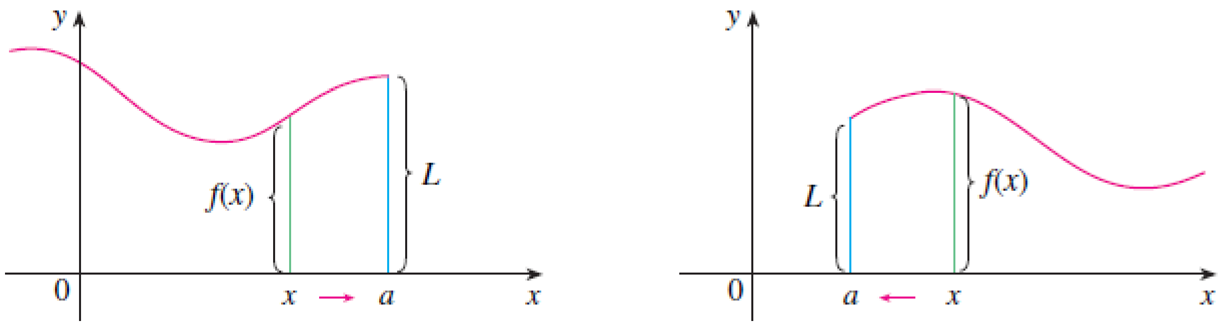
Definição 3: Escrevemos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \text{ (Limite Lateral à Direita)}$$

E dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela direita é igual a L se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L, para x suficientemente próximo de a, mas maiores que a.

Limites Laterais

- As definições de limite lateral à esquerda e limite lateral à direita diferem apenas no modo como x se aproxima de a.



(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

Teorema 1: $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, se somente se, $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$

Limites Laterais

Exemplo 2:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 3$$

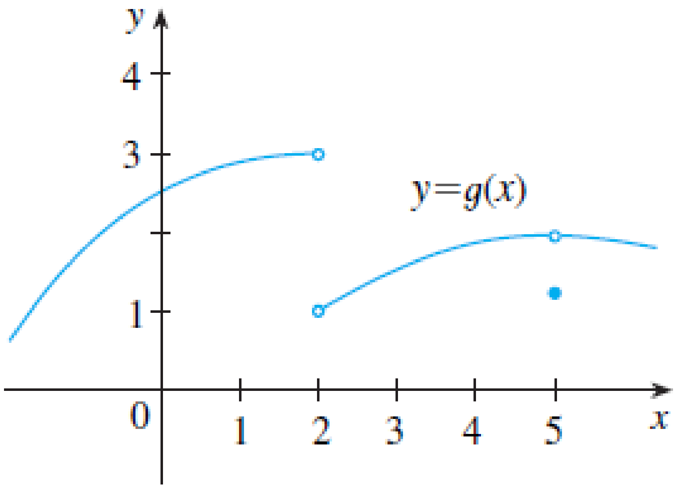
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 1$$

$\lim_{x \to 2} f(x)$ não existe

$$\lim_{x \to 5^-} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \to 5^+} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 2$$



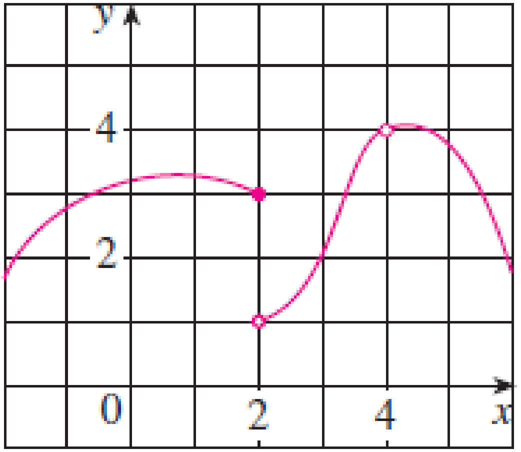
Limites Laterais

Exemplo 3: Use o gráfico dado de f para dizer o valor de cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê

a) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ b) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$

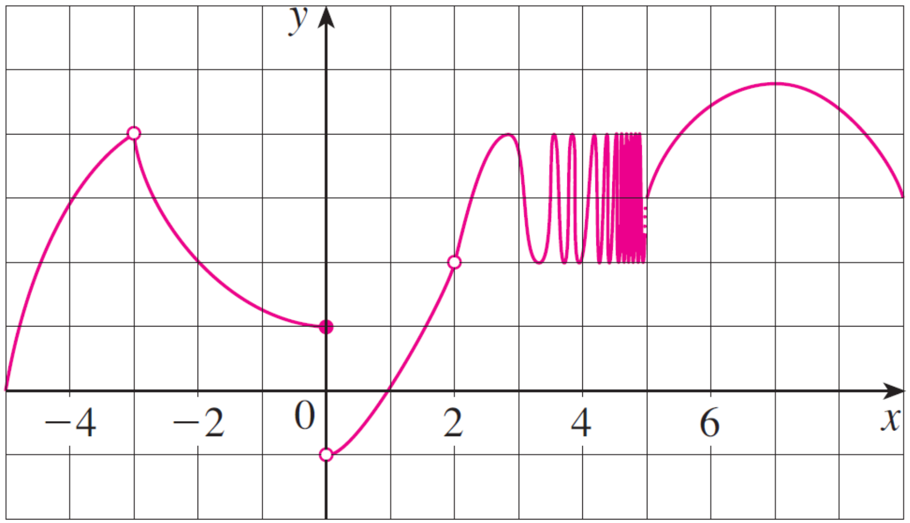
c) $\lim_{x\to 2} f(x)$ d) $f(2)$

e) $\lim_{x\to 4} f(x)$ f) $f(4)$



Limites Laterais

Exemplo 4:



a) $\lim_{x \to -3^-} f(x)$

b) $\lim_{x \to -3^+} f(x)$ c) $\lim_{x \to -3} f(x)$

d) $f(-3)$ e) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$

f) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ g) $\lim_{x \to 0} f(x)$

h) $f(0)$ i) $\lim_{x \to 2} f(x)$ j) $f(2)$ k) $\lim_{x \to 5^-} f(x)$ l) $\lim_{x \to 5^+} f(x)$

Cálculo de Limites

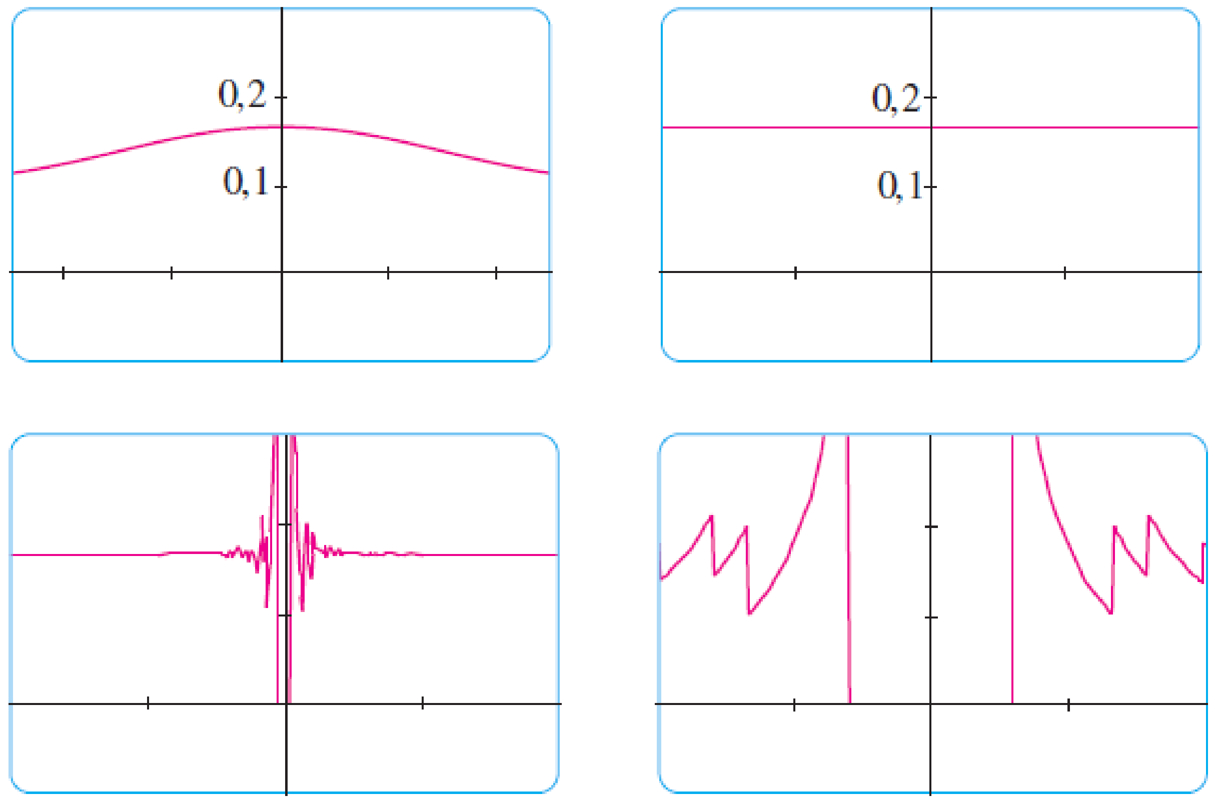
O cálculo de $\lim_{x \to a} f(x)$ através da construção de uma tabela, como foi feito anteriormente, é meramente intuitivo. Sendo assim, pode resultar em conclusões erradas, como pode ser visto a seguir.

Cálculo de Limites

Exemplo 5: $\lim_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$

t	$\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
$\pm1{,}0$	0,16228
$\pm0{,}5$	0,16553
$\pm0{,}1$	0,16662
$\pm0{,}05$	0,16666
$\pm0{,}01$	0,16667

t	$\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
$\pm0{,}0005$	0,16800
$\pm0{,}0001$	0,20000
$\pm0{,}00005$	0,00000
$\pm0{,}00001$	0,00000



Cálculo de Limites – Propriedades

Supondo que c seja uma constante e que os limites $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existam. Então:

1. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} \mathrm{g}(x)$
2. $\lim\limits_{x\to a}[cf(x)] = c \lim\limits_{x\to a}[f(x)]$
3. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} \mathrm{g}(x)$
4. $\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} \mathrm{g}(x)}$, desde que $\lim\limits_{x\to a} \mathrm{g}(x) \neq 0$
5. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n, n \in \mathbb{R}$, desde que $\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n$ exista

Cálculo de Limites – Propriedades

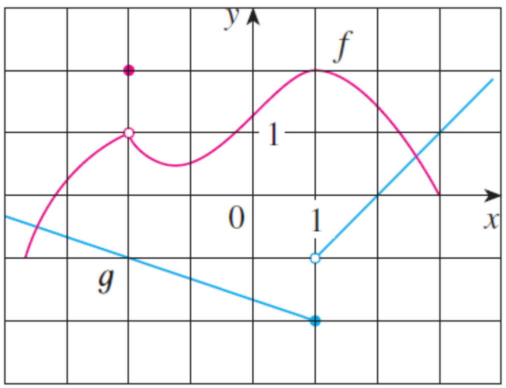
Exemplo 6: Usando as propriedades de limites e o gráfico a seguir, calcule o valor dos limites.

a. $\lim_{x \to -2} [f(x) + 5g(x)] \approx 1{,}4$

b. $\lim_{x \to 1} [f(x) \cdot g(x)]$ *não existe*

c. $\lim_{x \to 2} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$ *não existe*

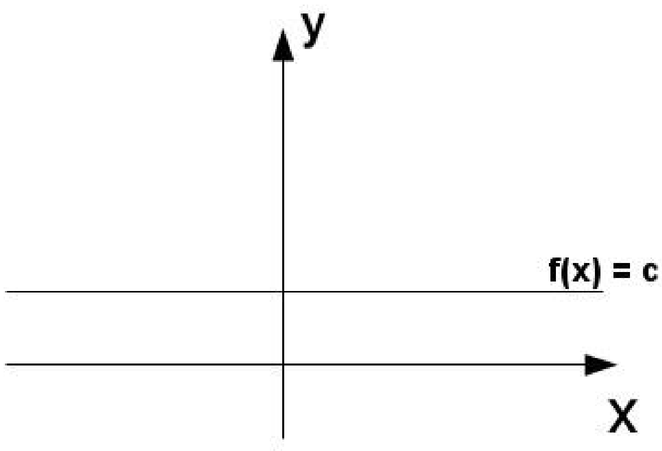
d. $\lim_{x \to 1} [f(x)]^2 = 4$

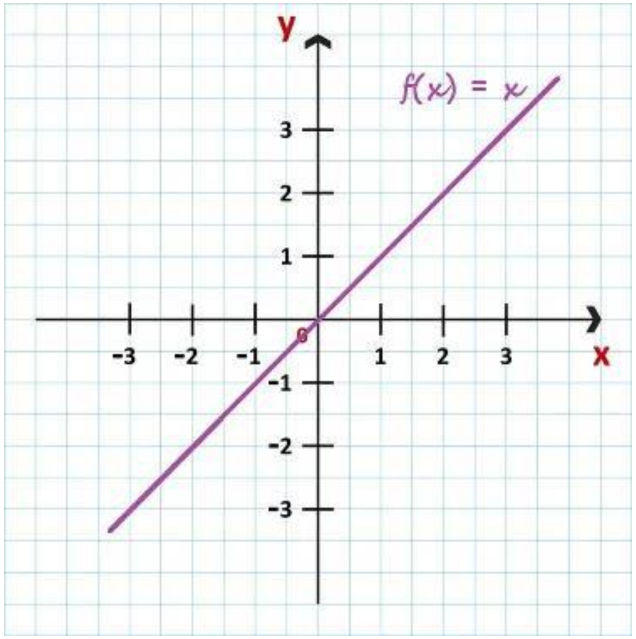


Cálculo de Limites – Propriedades

6. $\lim_{x \to a} c = c$

7. $\lim_{x \to a} x = a$





Cálculo de Limites – Propriedades

Exemplo 7: Calcule o valor dos limites a seguir justificando cada passagem com as propriedades vistas anteriormente.

a) $\lim_{x\to 5}(2x^2 - 3x + 4) = \lim_{x\to 5}(2x^2) - \lim_{x\to 5}(3x) + \lim_{x\to 5}(4) =$ (Prop. 1)

$= 2\lim_{x\to 5}(x^2) - 3\lim_{x\to 5}(x) + 4 =$ (Prop. 2 e 6)

$= 2\left(\lim_{x\to 5} x\right)^2 - 3\cdot 5 + 4 =$ (Prop. 5 e 7)

$= 2(5)^2 - 3\cdot 5 + 4 = 39$ (Prop. 5)

Cálculo de Limites – Propriedades

b) $$\lim_{x\to -2}\left(\frac{x^3+2x^2-1}{5-3x}\right) = \frac{\lim_{x\to -2}(x^3+2x^2-1)}{\lim_{x\to -2}(5-3x)}$$ (Prop. 4)

$$= \frac{\lim_{x\to -2}(x^3)+\lim_{x\to -2}(2x^2)-\lim_{x\to -2}(1)}{\lim_{x\to -2}(5)-\lim_{x\to -2}(3x)}$$ (Prop. 1)

$$= \frac{\lim_{x\to -2}(x^3)+2\lim_{x\to -2}(x^2)-1}{5-3\lim_{x\to -2}(x)}$$ (Prop. 2 e 6)

$$= \frac{\left(\lim_{x\to -2}(x)\right)^3+2\left(\lim_{x\to -2}(x)\right)^2-1}{5-3\lim_{x\to -2}(x)}$$ (Prop. 5)

$$= \frac{(-2)^3+2(-2)^2-1}{5-3(-2)} = \frac{-1}{11}$$ (Prop. 7)

Cálculo de Limites – Propriedades

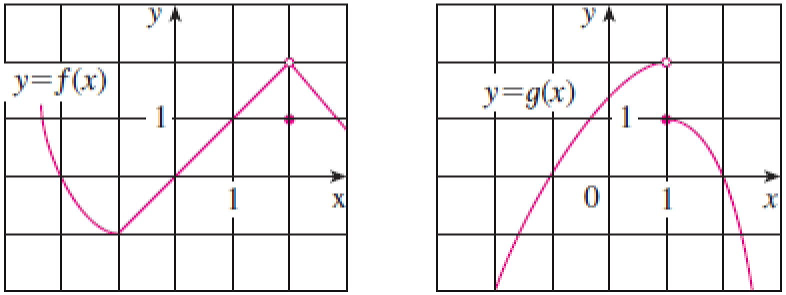
Teorema 2: Se f for uma função polinomial ou racional e a estiver no domínio de f então:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Teorema 3: Se $f(x) = g(x)$ quando $x \neq a$, então $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$, desde que o limite exista.

Exercícios

1. Os gráficos de f e g são dados. Use-os para calcular cada limite. Caso não exista, explique por quê.



(a) $\lim_{x \to 2} [f(x) + g(x)]$

(b) $\lim_{x \to 1} [f(x) + g(x)]$

(c) $\lim_{x \to 0} [f(x)g(x)]$

(d) $\lim_{x \to -1} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

(e) $\lim_{x \to 2} [x^3 f(x)]$

(f) $\lim_{x \to 1} \sqrt{3 + f(x)}$

Exercícios

2. 3–9 Calcule o limite justificando cada passagem com as Propriedades dos Limites que forem usadas.

3. $\lim_{x \to -2} (3x^4 + 2x^2 - x + 1)$

4. $\lim_{x \to -1} (x^4 - 3x)(x^2 + 5x + 3)$

5. $\lim_{t \to -2} \dfrac{t^4 - 2}{2t^2 - 3t + 2}$

6. $\lim_{u \to -2} \sqrt{u^4 + 3u + 6}$

7. $\lim_{x \to 8} (1 + \sqrt[3]{x})(2 - 6x^2 + x^3)$

8. $\lim_{t \to 2} \left(\dfrac{t^2 - 2}{t^3 - 3t + 5} \right)^2$

9. $\lim_{x \to 2} \sqrt{\dfrac{2x^2 + 1}{3x - 2}}$

Exercícios

3. 11–32 Calcule o limite, se existir.

11. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

12. $\lim_{x \to -4} \dfrac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 3x - 4}$

13. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x + 6}{x - 2}$

14. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$

15. $\lim_{t \to -3} \dfrac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3}$

16. $\lim_{x \to -1} \dfrac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x - 3}$

17. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(-5 + h)^2 - 25}{h}$

18. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(2 + h)^3 - 8}{h}$

19. $\lim_{x \to -2} \dfrac{x + 2}{x^3 + 8}$

20. $\lim_{t \to 1} \dfrac{t^4 - 1}{t^3 - 1}$

21. $\lim_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{9 + h} - 3}{h}$

22. $\lim_{u \to 2} \dfrac{\sqrt{4u + 1} - 3}{u - 2}$

23. $\lim_{x \to -4} \dfrac{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{x}}{4 + x}$

24. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^4 - 1}$

25. $\lim_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + t} - \sqrt{1 - t}}{t}$

26. $\lim_{t \to 0} \left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t^2 + t} \right)$

27. $\lim_{x \to 16} \dfrac{4 - \sqrt{x}}{16x - x^2}$

28. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(3 + h)^{-1} - 3^{-1}}{h}$

29. $\lim_{t \to 0} \left(\dfrac{1}{t\sqrt{1 + t}} - \dfrac{1}{t} \right)$

30. $\lim_{x \to -4} \dfrac{\sqrt{x^2 + 9} - 5}{x + 4}$

31. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(x + h)^3 - x^3}{h}$

32. $\lim_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{(x + h)^2} - \dfrac{1}{x^2}}{h}$

Exercícios

4. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x < 1 \\ (x-2)^2 & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

(a) Encontre $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x)$.
(b) $\lim_{x\to 1} f(x)$ existe?
(c) Esboce o gráfico de f.

5. Seja

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 1 \\ 3 & \text{se } x = 1 \\ 2 - x^2 & \text{se } 1 < x \leqslant 2 \\ x - 3 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

(a) Determine as quantidades a seguir, se existirem.
(i) $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$ (ii) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ (iii) $g(1)$
(iv) $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$ (v) $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$ (vi) $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$
(b) Esboce o gráfico de g.

Exercícios

6. Se $\lim_{x \to 1} \dfrac{f(x) - 8}{x - 1} = 10$, encontre $\lim_{x \to 1} f(x)$.

7. Se $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = 5$, encontre os seguintes limites.

(a) $\lim_{x \to 0} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$

8. Calcule $\lim_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{6 - x} - 2}{\sqrt{3 - x} - 1}$