

Н. П. КАЛАШНИКОВ, М. А. СМОНДЫРЕВ

ОСНОВЫ ФИЗИКИ

Учебное пособие

Том 2

УДК 53

Калашников Н. П., Смондырев М. А. ОСНОВЫ ФИЗИКИ. Т. 2.
Учебное пособие. — М.: Дрофа, 2001. — 539 с. Ил. 135, табл. 22.

В учебном пособии содержатся наиболее важные сведения об основных фундаментальных законах природы, действующих в пространственно-временных масштабах, характерных для жизнедеятельности человека, и лежащих в основе новейших прогрессивных технологий. Для иллюстрации и закрепления материала включены типовые задачи с разбором решений.

Пособие написано по курсу “Физика” для студентов технических направлений и специальностей. Изучение курса создает базис для выработки умения ориентироваться в обильном потоке научно-технической информации, своевременно распознавать перспективные научные направления, оценивать возможность их практического использования и просчитывать последствия тех или иных технологических новаций. Одной из задач курса является воспитание культуры системного мышления, навыков логического мышления, привычки обдумывать результаты, строить правильные рабочие гипотезы и четко формулировать задачу. Знакомство с основами фундаментальных наук повышает общую культуру общества, защищает его от мистики и суеверий.

Рецензенты: Кафедра физики МГИУ (зам. зав., доц. к.ф.-м.н. В. П. Красин),
проф. д.ф.-м.н. В. П. Крайнов (МФТИ),
проф. д.ф.-м.н. Д. И. Казаков (ОИЯИ, МГУ)

Редактор:

Компьютерный набор и графика: М. А. Смондырев

Подписано в печать		Сдано в производство	
Формат бум.			
Усл. печ. л. 33.7	Уч.-изд. л.	Тем. план	, поз.
Тираж	Заказ		
Типография			

ISBN

©Н. П. Калашников, М. А. Смондырев, 2001
©Дрофа, 2001

Большая часть видимого нами строения мира кажется очам нашим совсем иначе, нежели как она в самом деле находится. Несмотря на сие, рассматривание видимого разнообразия мира имеет также свою пользу и ведет нас к истине.

*КРАТКОЕ РУКОВОДСТВО К ФИЗИКЕ,
для употребления в народных училищах
Российской Империи,
изданное по Высочайшему Повелению
Царствующей Императрицы
ЕКАТЕРИНЫ ВТОРОЙ
в Санкт-Петербурге, 1787 года.*

Оглавление

IV Основы волновой оптики	12
23 Волновая теория света и законы геометрической оптики	14
23.1 Принцип Гюйгенса	15
23.2 Законы отражения и преломления света	16
Закон отражения	16
Закон преломления	17
Принцип Ферма	19
24 Интерференция света	23
24.1 Интенсивность света	23
24.2 Когерентность световых волн	24
24.3 Интерференция света от двух источников	27
24.4 Способы наблюдения интерференции света	30
24.5 Интерференция света в тонких пленках	32
24.6 Полосы равной толщины. Кольца Ньютона	34
Контрольные вопросы к главам 23 и 24	36
25 Дифракция света	38
25.1 Принцип Гюйгенса-Френеля	38
25.2 Метод зон Френеля	40
25.3 Дифракция на круглом отверстии и диске	43
25.4 Дифракция Фраунгофера от щели	47
25.5 Дифракционная решетка	51
Контрольные вопросы	55
26 Влияние среды на свойства света	56
26.1 Поляризация света	56
Поляризация электромагнитной волны	57
Естественный и поляризованный свет	58
Закон Малюса	59

Поляризация при отражении и преломлении	62
26.2 Дисперсия света	65
Элементарная теория дисперсии	67
26.3 Поглощение света	70
26.4 Рассеяние света	71
Контрольные вопросы	72
 V Основы квантовой механики	 74
 27 Квантовая природа излучения	 76
27.1 Тепловое излучение	76
27.2 Законы излучения абсолютно черного тела	81
27.3 Классические результаты для теплового излучения	83
27.4 Закон излучения Планка	85
Контрольные вопросы	92
 28 Фотоны	 93
28.1 Кванты света	93
28.2 Фотоэлектрический эффект	95
28.3 Опыт Боте	100
28.4 Эффект Комптона	101
28.5 Давление света	104
Контрольные вопросы	107
 29 Волновые свойства микрочастиц	 108
29.1 Атом Бора	108
29.2 Волны материи	114
29.3 Соотношения неопределенностей	118
29.4 О границах применимости квантовой механики	122
Контрольные вопросы	124
 30 Уравнение Шредингера	 126
30.1 Волна вероятности	126
30.2 Общее уравнение Шредингера	128
30.3 Операторы, симметрия и законы сохранения	131
30.4 Стационарное уравнение Шредингера	133
30.5 Уравнение Шредингера для простейших систем	135
Свободная частица, движущаяся вдоль оси x	135

Частица в бесконечно глубокой потенциальной яме	136
Частица в трехмерной потенциальной яме	138
Одномерный осциллятор	140
Трехмерный осциллятор	140
30.6 Принцип соответствия Бора	141
30.7 Отражение и туннелирование частиц	143
Низкий бесконечный барьер	143
Высокий бесконечный барьер	145
Конечный потенциальный барьер	146
30.8 Оптическая аналогия прохождения частицы над барьером .	150
Ступенчатый потенциал	150
Прямоугольный барьер конечной ширины	152
Прохождение света через многослойную структуру . . .	155
Контрольные вопросы	157
31 Теория атома	159
31.1 Коммутирующие операторы	159
31.2 Момент количества движения	160
31.3 Атом водорода	166
31.4 Спин электрона и тонкая структура спектров	172
31.5 Векторная модель атома	179
31.6 Принцип Паули и валентность элементов	182
Эффективный заряд ядра, оценки потенциала ионизации и закон Мозли	184
Электронная конфигурация атомов	187
Контрольные вопросы	189
32 Физическая природа химической связи	190
32.1 Молекулы	190
Ионная связь	190
Ковалентная связь	192
Комбинации различных типов связи	198
32.2 Пространственное строение молекул	200
32.3 Молекулярные спектры	203
Электронные уровни энергии	203
Энергия колебательного движения ядер	204
Энергия вращательного движения молекул	205
Молекулярные спектры	206

32.4 Комбинационное рассеяние света	208
VI Основы статистической физики и термодинамики	210
33 Идеальный газ	212
33.1 Общие положения	212
Молекулярно-кинетический подход	212
Состояние системы	213
Температура	215
33.2 Уравнение Клапейрона-Менделеева	217
33.3 Кинетическая теория идеальных газов	221
33.4 Распределение энергии по степеням свободы	224
33.5 Смеси газов	228
Контрольные вопросы	230
34 Элементы термодинамики	232
34.1 Первое начало термодинамики	232
34.2 Работа идеального газа в различных процессах	235
34.3 Теплоемкость системы	238
34.4 Адиабатный процесс	242
34.5 Уравнение Ван дер Ваальса для реальных газов	245
Контрольные вопросы	253
35 Распределение молекул по скоростям и координатам	256
35.1 О закономерностях в мире хаоса	256
Функция распределения	258
Элементы теории вероятностей	259
35.2 Распределение молекул по скоростям	263
Функция распределения молекул по скоростям	265
Распределение Максвелла	267
35.3 Характерные скорости молекул	270
Наиболее вероятная скорость	270
Распределение молекул по величинам безразмерной скорости	272
Средняя арифметическая скорость	273
Среднеквадратичная скорость	274
Эксперимент по проверке распределения Максвелла	275

35.4	Распределение молекул по координатам	277
	Барометрическая формула	277
	Распределение Больцмана	280
35.5	Распределение Максвелла-Больцмана	282
	Распределение по энергиям для многоатомных молекул	283
	Средняя энергия квантового осциллятора	283
	Средняя энергия квантового ротатора	287
	Скорость химических реакций	288
	Контрольные вопросы	289
36	Явления переноса	292
36.1	Столкновения молекул	292
	Свидание в лесу, ежик в тумане и атомная бомба	298
36.2	Законы процессов переноса	302
36.3	Кинетическая теория переноса	309
	Диффузия	309
	Вязкость	311
	Теплопроводность	312
36.4	Броуновское движение	314
	Задача о блуждающем матросе	314
	Броуновское движение и диффузия	316
	Численные оценки для броуновского движения	319
	Контрольные вопросы	321
37	Второе начало термодинамики	323
37.1	Циклы и КПД тепловых машин	323
37.2	Цикл Карно	326
37.3	Двигатель внутреннего сгорания	330
37.4	Внутреннеобратимая тепловая машина	333
37.5	Второе начало термодинамики	337
37.6	Энтропия	341
37.7	Статистический смысл энтропии	345
	Контрольные вопросы	349
38	Взаимодействие излучения с веществом	351
38.1	Вывод формулы М. Планка по А. Эйнштейну	351
38.2	Квантовые генераторы	355

Прохождение излучения через вещество. Инверсная заселенность	355
Принцип работы лазера	356
Типы лазеров	360
38.3 Нелинейная оптика	365
Контрольные вопросы	366
39 Теплоемкость кристаллов. Квантовая статистика	367
39.1 Классические представления	367
39.2 Квантовая теория теплоемкости Эйнштейна	369
39.3 Теория теплоемкости твердых тел Дебая	371
Число колебаний в единице объема	372
Характеристическая температура Дебая	374
39.4 Фононы	376
39.5 Неразличимость тождественных частиц	379
39.6 Статистика Ферми-Дирака	381
39.7 Статистика Бозе-Эйнштейна	382
39.8 Макроскопические квантовые явления	384
Бозе-эйнштейновская конденсация	384
Явление сверхтекучести	388
Элементы микроскопической теории сверхтекучести	389
Сверхтекучесть конденсата	391
Сверхпроводимость	393
Контрольные вопросы	396
VII Основы теории строения вещества	397
40 Элементы физики твердого тела	399
40.1 Энергетические зоны в твердых телах	399
Применение оптической аналогии	399
Формирование энергетических зон при объединении атомов в кристаллическую решетку	400
40.2 Металлы, диэлектрики и полупроводники	406
40.3 Квантовая теория свободных электронов в металле	408
40.4 Распределение Ферми-Дирака	418
40.5 Динамика электрона в кристалле	426
40.6 Полупроводники	430

Дырки	431
Собственная проводимость полупроводников	433
Примесная проводимость полупроводников	438
Принцип работы полупроводниковых устройств	443
Контрольные вопросы	445
41 Физика атомного ядра	447
41.1 Состав атомного ядра	447
41.2 Физическая природа ядерных сил	449
41.3 Масса и дефект массы ядра	452
41.4 Модели атомного ядра	457
Модель жидкой капли	457
Оболочечная модель ядра	462
41.5 Радиоактивность	465
Закон радиоактивного превращения	465
Альфа-распад	470
Бета-распад	474
Ядерные реакции и определение возраста археологиче- ских образцов радиоуглеродным методом	477
41.6 Элементы дозиметрии	484
41.7 Атомная и термоядерная энергетика	490
Деление ядер	490
Цепная реакция. Атомные бомбы и реакторы	495
Термоядерная энергетика	503
Контрольные вопросы	507
42 Основные представления физики элементарных частиц	509
42.1 Фундаментальные взаимодействия	510
42.2 Кварки и лептоны	512
42.3 Стандартная модель	516
42.4 За пределами Стандартной теории	517
Контрольные вопросы	520
VIII Масштабы нашего мира	521
43 Свойства вещества	523
43.1 Квантовое давление частицы	523

43.2	Атомы	524
43.3	Плотность вещества	525
43.4	Тепловое расширение тел	526
43.5	Температура плавления	527
43.6	Модуль упругости	528
43.7	Теплота сгорания	528
43.8	Поверхностное натяжение и теплота кипения	529
43.9	Коэффициент теплопроводности	531
44	Масштабы небесных тел	533
44.1	Квантовое давление ансамбля частиц	533
	Нерелятивистский случай	533
	Релятивистский случай	534
44.2	Излучение черного тела	535
44.3	Звезды	535
	Белые карлики	536
	Температура в центре звезды	537
	Звезды главной последовательности	539
	Время жизни звезды	539
44.4	Планеты и астероиды	541
45	Масштабы биологического мира	543
45.1	Обитаемые планеты	543
	Высота гор	544
	Продолжительность суток	545
	Продолжительность года	545
45.2	О размерах животных	546
	Какую форму имеет змея?	546
	Какого роста жираф?	547
45.3	Организм как силовая установка	548
	Мощность организма	548
	Долго ли суждено жить?	549
	Самые маленькие животные	551
45.4	О спортивных рекордах	552
	Ходьба	552
	Бег	552
	Прыжки	553
	Полеты птиц	554

Часть IV

ОСНОВЫ ВОЛНОВОЙ ОПТИКИ

Бросая в воду камешки, смотри на круги, ими образуемые; иначе такое бросание будет пустою забавою.

Козьма Прутков. МЫСЛИ И АФОРИЗМЫ.

Глава 23

Волновая теория света и законы геометрической оптики

В конце XVII века на основе многовекового опыта и развития представлений о свете Ньютон выдвинул теорию истечения световых частиц (корпускул), которые летят прямолинейно и подчиняются законам механики. По этой теории отражение света уподоблялось отражению упругих шариков при ударе о плоскость, что приводило к известному из школьного курса закону геометрической оптики “угол падения равен углу отражения”. Закон преломления света на границе двух сред объяснялся притяжением световых частиц преломляющей средой, вследствие чего изменялась траектория их движения и скорость. Расчеты приводили к выводу, что скорость световых частиц в более плотных средах больше, чем в воздухе. Однако этот вывод Ньютона в дальнейшем был экспериментально опровергнут. Современник Ньютона Х. Гюйгенс предложил другую теорию света --- волновую. Впоследствии волновая теория получила свое обоснование как в экспериментах, так и в рамках теоретических представлений об электромагнитной природе света --- уравнениях Максвелла (см. т. I, ч. II, гл. 18) и следующих из них свойствах электромагнитных волн (см. т. I, ч. III, разд. 22.6). Она позволила объяснить и изучить такие оптические явления, как дифракция, интерференция и поляризация. Но сначала мы познакомимся в этой главе с тем, как волновая теория объясняет хорошо известные законы геометрической оптики.

23.1 Принцип Гюйгенса

Для анализа распространения света Гюйгенс использовал простой и наглядный метод, названный впоследствии принципом Гюйгенса: *Каждая точка среды, до которой доходит световое возбуждение, является в свою очередь центром вторичных волн. Поверхность, огибающая в некоторый момент времени эти вторичные волны, указывает положение фронта действительно распространяющейся волны в этот момент времени.*

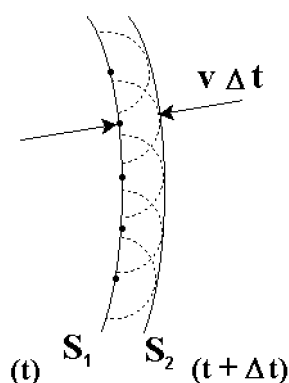


Рис. 23.1: Принцип Гюйгенса: каждая точка, до которой дошло волновое колебание, может рассматриваться как источник вторичных волн.

Напомним: волновым фронтом называется геометрическое место точек, колеблющихся в одной и той же фазе. Пусть в момент времени t фронт волны занимает положение S_1 (рис. 23.1). Каждую точку этого фронта можно рассматривать как источник вторичных волн, которые в однородной изотропной среде будут представлять собой сферы радиусом $v\Delta t$. Таким образом, в момент времени $t + \Delta t$ фронтом S_2 волны будет огибающая этих вторичных волн.

В сущности, мы уже однажды воспользовались принципом Гюйгенса, когда строили фронт ударной волны — конус Маха — для источника, движущегося со сверхзвуковой скоростью. Точно такое же построение описывает излучение электромагнитных волн (света) заряженной частицей, движущейся со сверхсветовой скоростью. В вакууме это невозможно, но в среде скорость света равна c/n . Если скорость электрона V больше скорости света в среде, то электрон излучает энергию под углом φ ($\cos \varphi = c/nV$) к направлению движения. Как и для звука, образуется черенковский конус с углом раствора θ ($\sin \theta = c/nV$). Формулы аналогичны полученным выше, только скорость звука v заменена на скорость

света c/n в данной среде. Это явление — эффект Черенкова — принесло Нобелевскую премию П. А. Черенкову за экспериментальное обнаружение и И. Е. Тамму и И. М. Франку за теоретическое объяснение. Сейчас эффект Черенкова практически используется в счетчиках элементарных частиц.

23.2 Законы отражения и преломления света

Корпускулярная теория очень просто объясняла явления геометрической оптики, описываемые в терминах распространения световых лучей. С точки зрения волновой теории, лучи — это нормали к фронту волны. Принцип Гюйгенса также позволяет объяснить законы геометрической оптики на основе волновых представлений о природе света.

Закон отражения

Если световые волны достигают границы раздела двух сред, то направление их распространения изменяется, но они остаются в той же среде, т.е. происходит *отражение* света. Закон отражения света хорошо известен: падающий луч, перпендикуляр к границе раздела двух сред в точке падения и отраженный луч лежат в одной плоскости, причем угол падения равен углу отражения.

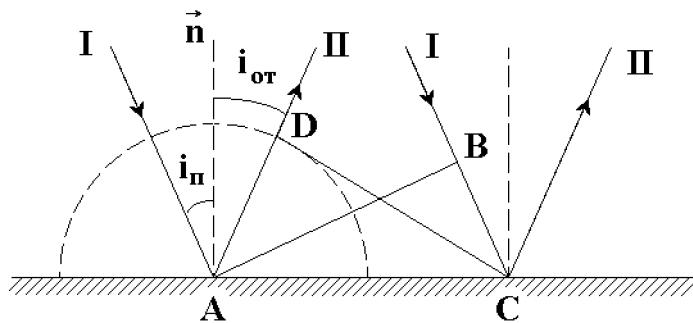


Рис. 23.2: Отражение света на границе двух сред.

Допустим, что плоская волна, распространяющаяся в изотропной среде, падает на границу раздела двух сред AC (рис. 23.2). Достаточно рассмотреть два крайних луча I в падающем пучке. Углом падения называют угол i_n между нормалью \vec{n} и падающим лучом I . Плоский фронт AB

падающей волны впервые достигнет границы раздела в точке A , которая станет источником вторичных волн. Согласно принципу Гюйгенса, из нее, как из центра, будет распространяться сферическая волна. Через время $\Delta t = BC/v$ крайний луч BC из падающего пучка I придет в точку C . К этому моменту вторичная сферическая волна, распространяющаяся из точки A , будет иметь радиус $v\Delta t = BC$ (т.е. $AD = BC$). Мы знаем теперь положение двух точек фронта отраженной волны — C и D . Чтобы не загромождать рисунок, мы не показываем вторичных волн, испущенных точками между A и C , но линия CD будет касательной (огibaющей) ко всем из них. Стало быть, CD действительно является фронтом отраженной волны. Направление ее распространения (лучи II) ортогонально фронту CD . Из равенства треугольников ABC и ADC вытекает равенство углов $\angle DAC$ и $\angle BCA$, что, в свою очередь, приводит к закону отражения $i_{\text{от}} = i_{\text{п}}$.

Закон преломления

Если световые волны достигают границы раздела двух сред и проникают в другую среду, то направление их распространения также изменяется — происходит *преломление* света. Закон преломления: падающий луч, перпендикуляр к границе раздела сред в точке падения и преломленный луч лежат в одной плоскости. причем отношение синуса угла падения к синусу угла преломления постоянно для данной пары сред и равно показателю преломления второй среды относительно первой: $n_{21} = n_2/n_1$.

Рассмотрим плоскую волну (фронт AB), которая распространяется в среде с показателем преломления n_1 вдоль направления I со скоростью $v_1 = c/n_1$. Эта волна падает на границу раздела со средой, в которой показатель преломления равен n_2 , а скорость распространения — $v_2 = c/n_2$ (рис. 23.3).

Время, затрачиваемое падающей волной для прохождения пути BC , равно $\Delta t = BC/v_1$. За это же время фронт волны, возбуждаемой точкой A во второй среде, достигнет точек полусферы с радиусом $AD = v_2\Delta t$. В соответствии с принципом Гюйгенса, положение фронта преломленной волны в этот момент времени задается плоскостью DC , а направление ее распространения — лучом III , перпендикулярным к DC . Из треугольников ABC и ADC следует

$$AC = \frac{BC}{\sin i_{\text{п}}} = \frac{AD}{\sin i_{\text{пр}}} \implies \frac{\Delta t \cdot v_1}{\sin i_{\text{п}}} = \frac{\Delta t \cdot v_2}{\sin i_{\text{пр}}}. \quad (23.1)$$

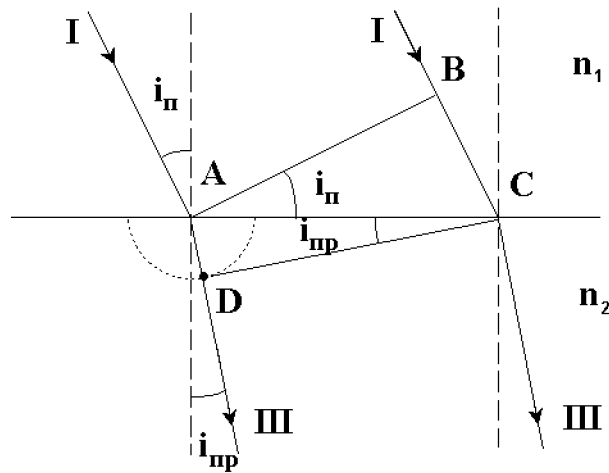


Рис. 23.3: Преломление света на границе двух сред.

Таким образом,

$$\frac{\sin i_{\text{н}}}{\sin i_{\text{пр}}} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{c}{n_1} \frac{n_2}{c} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}. \quad (23.2)$$

Для еще одной иллюстрации применения принципа Гюйгенса решим качественную задачу.

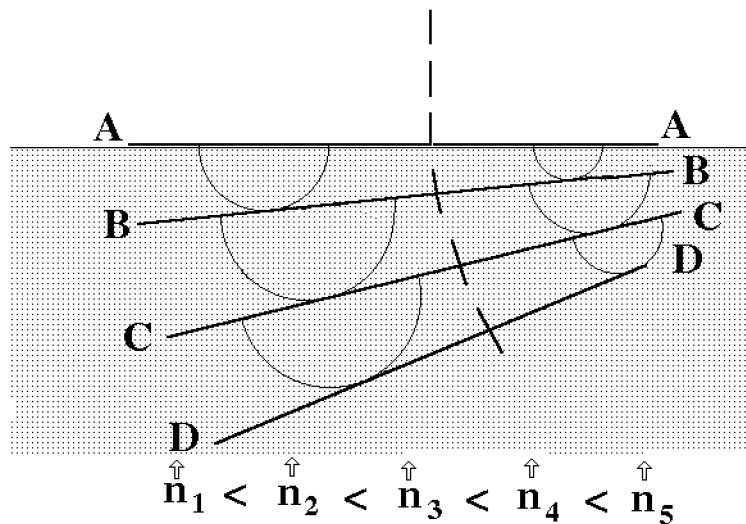


Рис. 23.4: К задаче 23.1.: движение луча света в среде, показатель которой растет слева направо.

Задача 23.1. На плоскую границу раздела двух сред падает нормально луч света. Показатель преломления среды непрерывно увеличивается от ее левого края к правому (рис. 23.4). Как будет идти луч света в среде?

Решение. Пусть фронт волны AA подошел к границе раздела сред. Точки раздела сред можно рассматривать как центры вторичных волн. Проходит какое-то время Δt_1 . Испущенные вторичные сферические волны достигают точек на расстоянии $c\Delta t_1/n$ от фронта AA . Поскольку показатель преломления среды растёт слева направо, эти расстояния убывают слева направо. Огибающая к вторичным волнам — новый фронт BB — повернется. Если теперь взять точки фронта BB за источники вторичных волн, то за время Δt_2 они породят волны, образующие фронт CC . Он еще более повернут. Его точки порождают фронт DD и т.д. Проводя нормаль к волновым фронтам в разные моменты времени, получаем путь светового луча в среде с переменным показателем преломления (штриховая линия). Видно, что луч искривляется в сторону увеличения показателя преломления. Аналогия: если притормозить левые колеса автомобиля, его повернет налево. Для света роль “тормоза” исполняет показатель преломления n . ■

Эта задача имеет отношение к явлению, наблюдающемуся на море. Когда ветер дует с берега, иногда возникает т.н. “зона молчания”: звук колокола с судна не достигает берега. Обычно говорят, что звук относится ветром. Но даже при сильном урагане скорость ветра примерно в 10 раз меньше скорости звука, так что “отнести” звук ветер никак не может. Объяснение заключается в том, что скорость встречного ветра у поверхности моря вследствие трения меньше, чем на высоте. Поэтому скорость звука у поверхности больше, и линия распространения звука загибается кверху, не попадая на берег.

Принцип Ферма

Итак, волновая оптика способна объяснить явления отражения и преломления света столь же успешно как и геометрическая оптика. В основу последней, трактующей явления на основе законов распространения лучей, положен принцип Ферма: *свет распространяется по такому пути, для прохождения которого требуется минимальное время*. Для прохождения участка пути ds свету требуется время $dt = ds/v = n ds/c$, где $v = c/n$ — скорость света в среде. Таким образом, время t , затрачиваемое светом на путь от точки 1 до точки 2 (рис. (23.5)), равно

$$t = \frac{1}{c} \int_1^2 n ds. \quad (23.3)$$

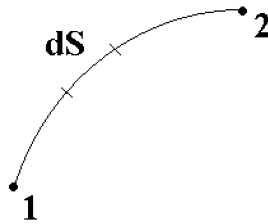


Рис. 23.5: К определению оптической длины пути.

Введем величину с размерностью длины, которая называется *оптической длиной пути*:

$$L = \int_1^2 n ds. \quad (23.4)$$

Пропорциональность t и L позволяет сформулировать принцип Ферма следующим образом: *свет распространяется по такому пути, оптическая длина которого минимальна.*

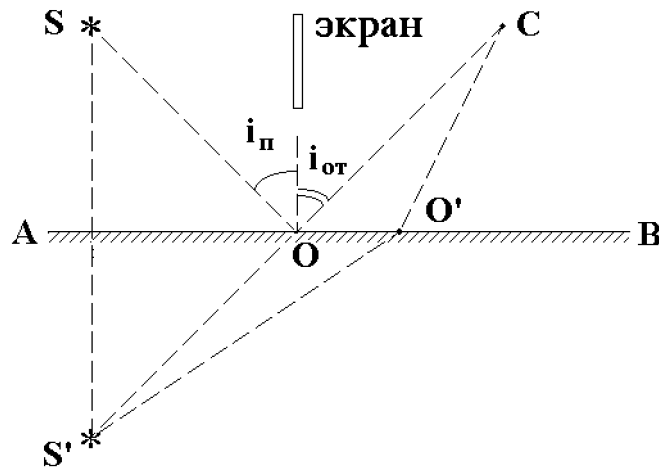


Рис. 23.6: Применение принципа Ферма к отражению света.

Рассмотрим путь света из точки S в точку C после отражения на плоскости AB (рис. 23.6). Непосредственное попадание света из S в C невозможно из-за экрана. Нам надо найти точку O , отразившись в которой луч попадет в точку C . Среда, в которой проходит луч, однородна. Поэтому минимальность оптического пути сводится к минимальности его геометрического пути. Рассмотрим зеркальное изображение S' точки S . Геометрические длины путей SOC и $S'OC$ равны. Поэтому минимальность длины SOC эквивалентна минимальности длины $S'OC$. А

минимальная геометрическая длина пути из S' в C будет соответствовать прямой, соединяющей точки S' и C . Пересечение этой прямой с плоскостью раздела сред дает положение точки O . Отсюда следует равенство углов: $i_{\text{п}} = i_{\text{от}}$, т.е. закон отражения света.

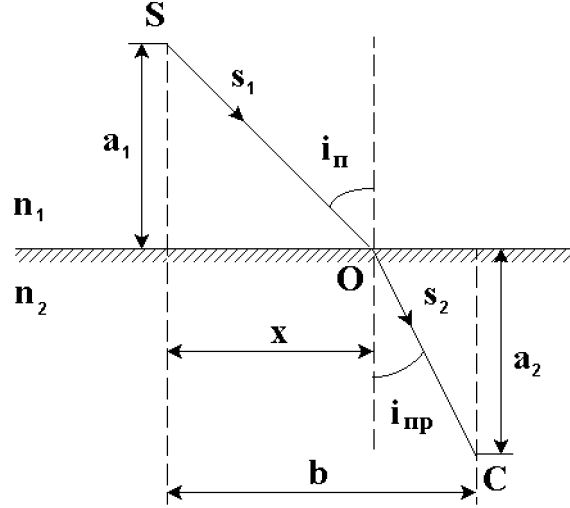


Рис. 23.7: Применение принципа Ферма к преломлению света.

Рассмотрим теперь явление преломления света (рис. 23.7). Определим положение точки O , в которой должен преломиться луч, распространяясь от S к C , чтобы оптическая длина пути L была минимальна. Выражение для L имеет вид:

$$L = n_1 s_1 + n_2 s_2 = n_1 \sqrt{a_1^2 + x^2} + n_2 \sqrt{a_2^2 + (b - x)^2} \quad (23.5)$$

Найдем величину x , соответствующую экстремуму оптической длины пути:

$$\frac{dL}{dx} = \frac{n_1 x}{\sqrt{a_1^2 + x^2}} - \frac{n_2 (b - x)}{\sqrt{a_2^2 + (b - x)^2}} = n_1 \frac{x}{s_1} - n_2 \frac{b - x}{s_2} = 0. \quad (23.6)$$

Отсюда следует:

$$n_1 \sin i_{\text{п}} - n_2 \sin i_{\text{пр}} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\sin i_{\text{п}}}{\sin i_{\text{пр}}} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (23.7)$$

Мы получили закон преломления света.

Принцип Ферма является частным случаем т.н. *принципа наименьшего действия*, имеющего приложения практически ко всем областям

физики. Всякий раз из всех возможных движений системы осуществляется то, для которого некая величина (ее называют *действием*) минимальна (точнее, имеет экстремум). В этом проявляется некая “экономность” природы, выбирающей кратчайшие пути для перехода системы из одного состояния в другое.

Глава 24

Интерференция света

Интерференция волн — это явление усиления или ослабления колебаний (пространственное перераспределение энергии светового излучения), которое происходит при наложении двух или нескольких волн. Интерференция света характеризуется регулярным чередованием в пространстве областей повышенной и пониженной интенсивности света, которое возникает в результате наложения т.н. когерентных световых пучков. Как мы убедимся, интерференция света зависит от соотношения между фазами складывающихся колебаний.

24.1 Интенсивность света

Для световых волн справедлив принцип суперпозиции — следствие линейности дифференциальных уравнений Максвелла. Так как свет имеет электромагнитную природу, то применение принципа суперпозиции означает, что результирующая напряженность электрического (магнитного) поля двух световых волн, проходящих через одну точку, равна векторной сумме напряженностей электрического (магнитного) полей каждой из волн в отдельности.

Выше мы получили, что интенсивность электромагнитной волны пропорциональна амплитуде колебаний вектора электрической напряженности:

$$I \sim E_0^2. \quad (24.1)$$

Рассмотрим две электромагнитные волны одинаковой частоты, которые накладываются друг на друга и возбуждают в некоторой точке пространства колебания одинакового направления:

$$E_1 = E_{01} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \alpha_1),$$

$$E_2 = E_{02} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \alpha_2). \quad (24.2)$$

Амплитуда результирующего колебания в данной точке определяется с помощью векторной диаграммы и равна:

$$E_0^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos(\alpha_1 - \alpha_2). \quad (24.3)$$

Если разность фаз возбуждаемых волнами колебаний остается постоянной во времени, то волны называются *когерентными*¹. Для когерентных волн косинус разности фаз имеет постоянное во времени значение (но свое для каждой точки пространства), так что интенсивность света равна:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\alpha_1 - \alpha_2). \quad (24.4)$$

Последнее слагаемое в полученном выражении носит название интерференционного члена. Таким образом, при наложении когерентных световых волн происходит перераспределение светового потока в пространстве, в результате чего в одних местах возникают максимумы, а в других — минимумы интенсивности. Если интенсивности обеих интерферирующих волн одинаковы ($I_1 = I_2$), то в максимумах $I = 4I_1$, а в минимумах $I = 0$.

Если складываются некогерентные волны, то в данную точку пространства приходят волны, разность фаз которых не постоянна, но принимает случайные значения. Поскольку среднее значение косинуса равно нулю, наблюдаемые средние интенсивности волн просто складываются, и во всех точках пространства

$$I = I_1 + I_2. \quad (24.5)$$

При равенстве интенсивностей приходящих волн получаем $I = 2I_1$. Когда мы включаем две одинаковые лампочки и, грубо говоря, помещение освещается в два раза ярче, чем одной из них, то это — проявление соотношения (24.5). Необходимым условием наблюдения интерференции волн является их когерентность.

24.2 Когерентность световых волн

Монохроматическая электромагнитная волна описывается выражением

$$E = E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \alpha), \quad (24.6)$$

¹Когерентность — согласованное протекание нескольких колебательных или волновых процессов.

где E_0 , ω , α и $k = \omega/v$ являются постоянными величинами. Однако всякая реальная световая волна образуется наложением колебаний различных частот, заключенных в конечном интервале $\Delta\omega$. Согласно формуле $k = \omega/v$ разбросу частот $\Delta\omega$ соответствует разброс значений волнового вектора k . Следует отметить, что разброс волнового вектора связан также с разбросом направлений излучения, который характеризуется величиной $\Delta\vec{k}$. Сначала обсудим *временную когерентность*, которая связана с разбросом частот $\Delta\omega$. Рассмотрим случай наложения в некоторой точке пространства двух световых волн:

$$E_{01}(t) \cos(\omega_1(t) \cdot t + \alpha_1(t)) \quad \text{и} \\ E_{02}(t) \cos(\omega_2(t) \cdot t + \alpha_2(t)).$$

Интерференционный член

$$\cos(\Delta\omega(t) \cdot t + \alpha_1(t) - \alpha_2(t))$$

при сделанных предположениях будет зависеть от времени.

Всякий оптический прибор, с помощью которого наблюдается интерференция света (фотопленка, человеческий глаз и др.), обладает определенной инертностью, которая характеризует время $t_{\text{приб}}$ регистрации прибором интерференционной картины. При этом оптический прибор регистрирует картину, усредненную по промежутку времени $t_{\text{приб}}$. Если за это время интерференционный множитель $\cos(\Delta\omega(t) \cdot t + \alpha_1(t) - \alpha_2(t))$ с равной вероятностью принимает все значения от -1 до +1, то среднее значение интерференционного слагаемого будет равно нулю. Интерференционная картина не будет видна, т.е. регистрируемая прибором интенсивность окажется равна сумме интенсивностей, создаваемых в данной точке каждой волной в отдельности. Если же за время $t_{\text{приб}}$ значение косинуса остается практически неизменным, то прибор зарегистрирует интерференцию. Таким образом, для характеристики когерентных свойств световых волн вводится *время когерентности* $t_{\text{ког}}$, которое определяется как время, за которое случайное изменение фазы волны не превышает значение порядка π : $t_{\text{ког}} \sim \pi/\Delta\omega$. При $t_{\text{приб}} \gg t_{\text{ког}}$ прибор не фиксирует интерференцию, а при $t_{\text{приб}} \ll t_{\text{ког}}$ прибор обнаружит интерференционную картину. За время когерентности $t_{\text{ког}}$ волна распространяется на расстояние $l_{\text{ког}} = ct_{\text{ког}}$, называемое *длиной когерентности*. Отсюда следует, что наблюдение интерференции света возможно лишь при оптических разностях хода, меньших длины когерентности складывае-

мых электромагнитных волн. В идеализированном случае, когда складываются монохроматические волны со строго фиксированными частотами, $\Delta\omega = 0$, а время и длина когерентности становятся бесконечно большими. Естественно, в таких условиях интерференционная картина всегда будет наблюдаться.

Изменение разности фаз колебаний может происходить не только из-за ($\Delta\omega$), но и вследствие разброса в волновых векторах $\Delta\vec{k}$. Поэтому наряду с временной когерентностью, определяемой временем когерентности, вводится понятие *пространственной когерентности*. Возникновение в некоторой точке пространства колебаний, возбуждаемых волнами с различными \vec{k} , возможно лишь в том случае, если эти волны испускаются различными участками протяженного источника света.

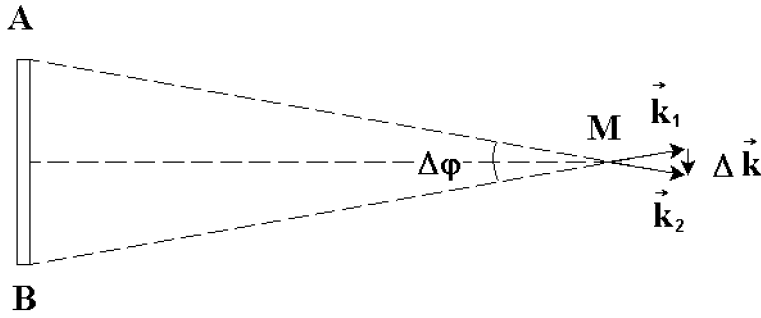


Рис. 24.1: К понятию пространственной когерентности.

Рассмотрим для определенности светящийся диск AB , который из точки M виден под углом $\Delta\varphi$ (рис. 24.1). Угол $\Delta\varphi$ характеризует разброс волновых векторов $\Delta\vec{k}$. Таким образом, в фазу электромагнитной волны

$$\alpha(t) = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \alpha_0$$

надо подставить выражения:

$$\begin{aligned} \vec{k} &= \vec{k}_0 + \Delta\vec{k}, & k_0 &= \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda_0}, \\ |\Delta\vec{k}| &= k_0 \Delta\varphi. \end{aligned} \tag{24.7}$$

Тогда

$$\alpha(t) = \omega t - \vec{k}_0 \cdot \vec{r} - k_0 \Delta\varphi \rho + \alpha_0, \tag{24.8}$$

где ρ — проекция радиус-вектора на направление вектора $\Delta\vec{k}$. Последний, как видно из рисунка, можно считать параллельным протяженному источнику, т.е. фронту волны.

Следовательно, фаза колебаний при переходе от одной точки волновой поверхности к другой изменяется беспорядочным образом. Введем расстояние $\rho_{\text{ког}}$, при смещении на которое вдоль волновой поверхности случайное изменение фазы достигает значения порядка π : $k_0 \Delta\varphi \rho_{\text{ког}} \sim \pi$, откуда

$$\rho_{\text{ког}} \sim \frac{\pi}{k_0 \Delta\varphi} \sim \frac{\lambda_0}{2\Delta\varphi}. \quad (24.9)$$

Расстояние $\rho_{\text{ког}}$ называется *длиной пространственной когерентности* или *радиусом когерентности*.

Если разрешающая способность фотопленки или человеческого глаза $l_{\text{приб}} \gg r_{\text{ког}}$, то при усреднении косинус в интерференционном члене обращается в нуль, что не позволит наблюдать интерференцию. В противоположном случае, когда $l_{\text{приб}} \ll \rho_{\text{ког}}$, наблюдается четкая интерференционная картина.

Приведем пример. Угловой размер Солнца $\Delta\varphi \sim 0.01$ рад (порядка полуградуса), а основная длина волны солнечного света $\lambda_0 \sim 0.5$ мкм. Следовательно, радиус когерентности приходящих от Солнца световых волн по порядку величины равен:

$$\rho_{\text{ког}} \sim \frac{\lambda_0}{2\Delta\varphi} = 25 \text{ мкм} = 0.025 \text{ мм}.$$

При таком малом радиусе когерентности невозможно непосредственно наблюдать интерференцию солнечных лучей, поскольку разрешающая способность человеческого глаза составляет лишь 0.1 мм. Однако в 1807 г. Т. Юнг провел первое наблюдение интерференции именно с солнечным светом. Для этого он пропускал солнечные лучи в темную комнату через маленькое отверстие, сделанное тонкой иглой. Отверстие на несколько порядков уменьшало угловой размер $\Delta\varphi$ источника света и, соответственно, увеличивало радиус когерентности.

24.3 Интерференция света от двух источников

Обычно для получения когерентных световых волн тем или иным способом разделяют на две части волну, излучаемую одним источником.

После прохождения различных оптических путей эти две части одной волны накладываются друг на друга (рис. 24.2).

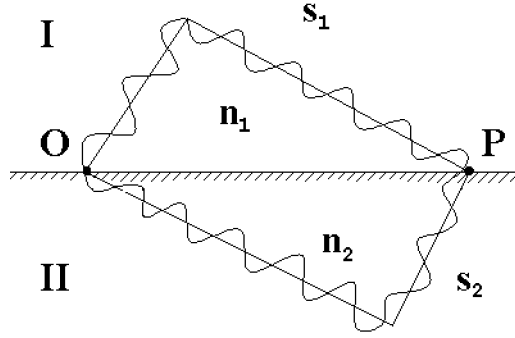


Рис. 24.2: К определению оптической разности хода.

Предположим, что разделение на две когерентные волны происходит в некоторой точке O , лежащей на границе раздела двух сред I и II. До точки P , в которой наблюдается интерференционная картина, одна волна проходит путь s_1 в среде с показателем преломления n_1 , а вторая волна — путь s_2 в среде с показателем преломления n_2 . Если начальные фазы обоих колебаний равны нулю, то в точке P волны возбуждают колебания:

$$E_{01} \cos \omega \left(t - \frac{s_1}{v_1} \right) \quad \text{и} \quad E_{02} \cos \omega \left(t - \frac{s_2}{v_2} \right), \quad (24.10)$$

где $v_1 = c/n_1$, $v_2 = c/n_2$ — фазовые скорости первой и второй волн, соответственно. Разность фаз колебаний в точке P равна:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \omega \frac{s_1}{v_1} - \omega \frac{s_2}{v_2} = \frac{\omega}{c} (n_1 s_1 - n_2 s_2) = \frac{\omega}{c} (L_1 - L_2). \quad (24.11)$$

Выражая циклическую частоту через длину волны λ_0 в вакууме, находим:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = 2\pi \frac{\Delta L}{\lambda_0}. \quad (24.12)$$

Разность $\Delta L = L_1 - L_2$ оптических длин проходимых волнами путей называется *оптической разностью хода*.

Запишем интенсивность результирующей волны в точке P в виде:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\alpha_1 - \alpha_2). \quad (24.13)$$

Когда оптическая разность хода равна целому числу длин волн в вакууме (или, что то же самое, четному числу полуволин):

$$\Delta L = \pm m \lambda_0 = \pm 2m \frac{\lambda_0}{2}, \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (24.14)$$

колебания в точке P находятся в одинаковой фазе и $\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = 1$, т.е. наблюдается *интерференционный максимум*. Если оптическая разность хода равна нечетному числу полуволн:

$$\Delta L = \pm(2m + 1)\frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (24.15)$$

то колебания, возбуждаемые в точке P обеими волнами, находятся в противофазе и $\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = -1$, т.е. наблюдается *интерференционный минимум*.

Установив общие закономерности, обратимся к конкретному примеру интерференции, когда источниками света служат две узкие параллельные щели, расположенные достаточно близко друг к другу. Пусть эти щели s_1 и s_2 находятся на расстоянии d друг от друга (рис. 24.3). Интерференция наблюдается в некоторой точке P экрана, расположенного на расстоянии l от источников света ($l \gg d, \lambda_0$). Начало отсчета на оси Ox выбрано в точке O , симметричной относительно щелей.

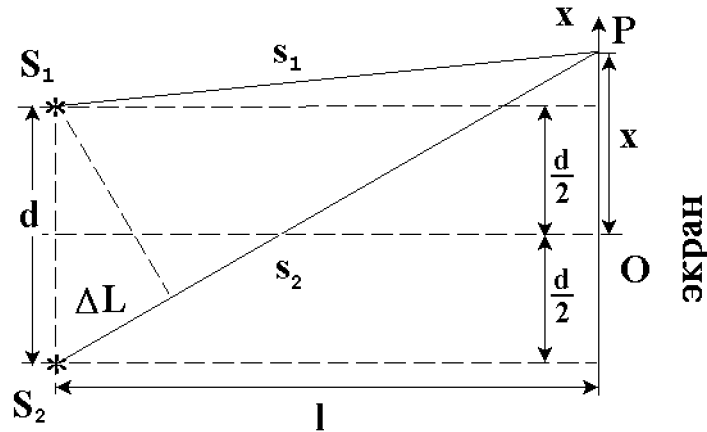


Рис. 24.3: Интерференция от двух источников света.

Интенсивность в точке P , расположенной на расстоянии x от начала отсчета, определяется оптической разностью хода ($n = 1$):

$$\Delta L = s_2 - s_1. \quad (24.16)$$

Видно, что

$$s_1^2 = l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2, \quad s_2^2 = l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2, \quad (24.17)$$

откуда

$$s_2^2 - s_1^2 = 2xd, \quad \text{или} \quad (s_2 - s_1)(s_1 + s_2) = 2xd, \quad (24.18)$$

т.е.

$$\Delta L = \frac{2xd}{s_1 + s_2}. \quad (24.19)$$

Учитывая, что $l \gg d$, запишем: $s_1 + s_2 \approx 2l$. Следовательно,

$$\Delta L = x \frac{d}{l}. \quad (24.20)$$

Учитывая (24.14), (24.15), приходим к выводу, что в точках с координатами

$$x_{max} = \pm m \lambda_0 \frac{l}{d}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (24.21)$$

будут наблюдаться максимумы, а в точках

$$x_{min} = \pm (m + \frac{1}{2}) \lambda_0 \frac{l}{d}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (24.22)$$

— интерференционные минимумы.

Расстояние между двумя соседними максимумами (или минимумами), называемое *шириной интерференционной полосы*, равно

$$\Delta x = \lambda_0 \frac{l}{d}, \quad (24.23)$$

причем Δx не зависит от порядка интерференции (величины m) и является постоянной при заданных l, d, λ_0 .

24.4 Способы наблюдения интерференции света

Для получения интерференционной картины необходимы когерентные световые пучки, для чего применяются различные искусственные приемы. До появления лазеров во всех приборах для наблюдения интерференции света когерентные пучки получали разделением и последующим сведением световых лучей, исходящих из одного и того же источника. Практически это можно осуществить с помощью экранов со щелями, зеркал и преломляющих тел (призм). Обсудим некоторые из таких способов.

Метод Юнга. Источником света служит ярко освещенная щель S , от которой свет падает на две равноудаленные щели s_1 и s_2 , параллельные щели S (рис. 24.4). Таким образом, щели s_1 и s_2 являются источниками когерентных пучков света. Интерференционная картина может наблюдаться на экране, расположенном на некотором расстоянии от щелей.

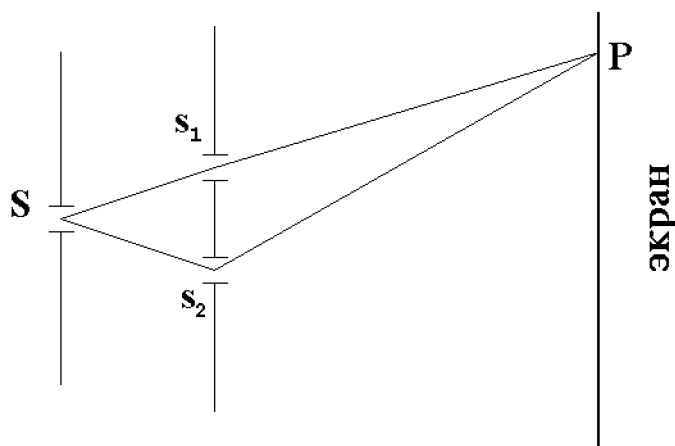


Рис. 24.4: Метод Юнга наблюдения интерференции

Зеркала Френеля. Классическим прибором, позволяющим наблюдать интерференцию света, являются зеркала Френеля (рис. 24.5). Свет, излучаемый источником S , отражается от двух зеркал, расположенных под углом, близким к 180° (угол φ достаточно мал). В результате получаются два световых пучка, которые распространяются от двух мнимых источников s_1 и s_2 , излучения которых будут когерентными, так как они являются изображениями одного и того же действительного источника S . При этом лучи, идущие от s_1 и s_2 к экрану, пройдя различные пути, складываются в интерференционную картину. (Непрозрачный экран \mathcal{E} преграждает свету непосредственный путь от источника S к экрану.)

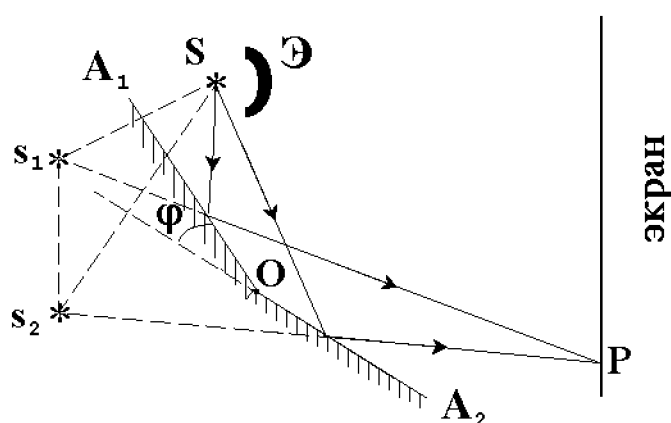


Рис. 24.5: Зеркала Френеля.

Бипризма Френеля. Бипризма Френеля (рис. 24.6) представляет собой две одинаковые призмы с малым преломляющим углом, сложенные основаниями так, что образуется общая плоская грань. Свет от источ-

ника S преломляется в обеих призмах, в результате чего за бипризмой распространяются когерентные световые волны, исходящие как бы из двух мнимых источников s_1 и s_2 . Таким образом, на экране происходит наложение когерентных световых пучков и наблюдается интерференционная картина.

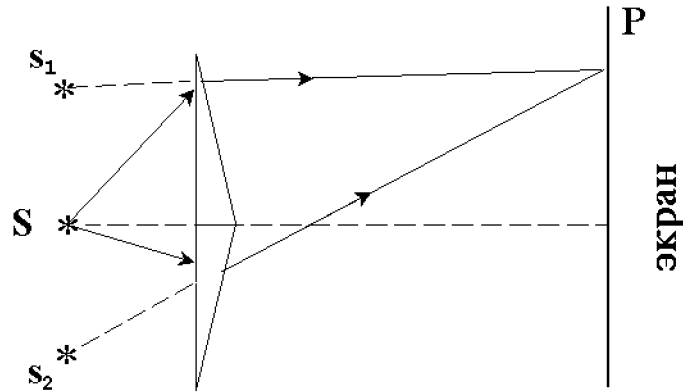


Рис. 24.6: Бипризма Френеля.

24.5 Интерференция света в тонких пленках

Радужная окраска мыльных пузырей или бензиновых пленок на воде возникает в результате интерференции солнечного света, отраженного двумя поверхностями пленки.

Пусть на плоскопараллельную прозрачную пленку с показателем преломления n и толщиной d под углом i_n падает плоская монохроматическая волна λ_0 (рис. 24.7). Интерференционная картина в отраженном свете возникает на пленке из-за сложения двух волн, отраженных от верхней и нижней поверхностей. Рассмотрим сложение волн, выходящих из точки C . Плоскую волну можно представить как пучок параллельных лучей. Один из лучей пучка (2) непосредственно попадает в точку C и отражается (2') в ней вверх под углом, равным углу падения i_n . Другой луч (1) попадает в точку C более сложным путем: сначала он преломляется в точке A и распространяется в пленке, затем отражается от нижней поверхности в точке O и, наконец, выходит, преломившись, наружу (1') в точке C под углом, равным углу падения i_n . Таким образом, в точке C пленка отбрасывает вверх два параллельных пучка света, из которых один образовался за счет отражения от нижней поверхности пленки, второй — вследствие отражения от верхней поверхности пленки. (Пучки,

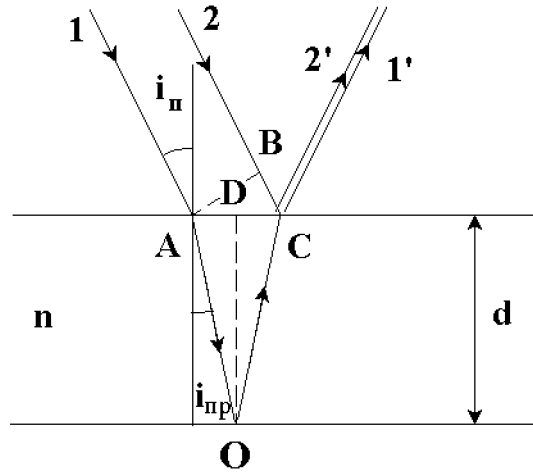


Рис. 24.7: Интерференция света в тонкой пленке.

возникающие в результате многократного отражения от поверхностей пленки не рассматриваются ввиду их малой интенсивности.)

Оптическая разность хода, приобретаемая пучками 1 и 2 до того, как они сойдутся в точке C, равна

$$\Delta L = (AO + OC) \cdot n - BC \cdot n_{\text{возд}} = (AO + OC)n - BC. \quad (24.24)$$

(Мы полагаем $n_{\text{возд}} = 1$.) Учитывая соотношения $AO = OC = OD / \cos i_{\text{пр}} = d / \cos i_{\text{пр}}$ и $\angle BAC = i_n$, а также $BC = AC \cdot \sin i_n$, $AC = 2d \operatorname{tg} i_{\text{пр}}$, находим:

$$\Delta L = 2n \cdot \frac{d}{\cos i_{\text{пр}}} - 2d \operatorname{tg} i_{\text{пр}} \cdot \sin i_n = 2d \frac{n^2 - n \sin i_n \sin i_{\text{пр}}}{n \cos i_{\text{пр}}}. \quad (24.25)$$

Используем закон преломления света:

$$n = \frac{\sin i_n}{\sin i_{\text{пр}}} \quad \text{и} \quad n \cos i_{\text{пр}} = \sqrt{n^2 - n^2 \sin^2 i_{\text{пр}}} = \sqrt{n^2 - \sin^2 i_n}. \quad (24.26)$$

Таким образом,

$$\Delta L = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i_n}. \quad (24.27)$$

Кроме оптической разности хода ΔL , следует учесть изменение фазы волны при отражении. В точке C происходит отражение от оптически более плотной среды (пленки). Поэтому фаза волны претерпевает изменение на π . Аналогичный скачок фазы происходит при отражении колебаний струны от закрепленного конца. В точке O отражение происходит от оптически менее плотной среды, так что скачка фазы не происходит.

В итоге между лучами 1 и 2 возникает дополнительная разность фаз π , которую можно учесть, если из ΔL вычесть половину длины волны в вакууме.

Следовательно, при выполнении соотношения

$$\Delta L = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i_{\text{п}}} - \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (24.28)$$

получается максимум в отраженном свете, а в случае

$$\Delta L = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i_{\text{п}}} - \frac{\lambda_0}{2} = (m + \frac{1}{2})\lambda_0, \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (24.29)$$

в отраженном свете наблюдается минимум. Таким образом, при падении солнечного света на бензиновую пленку на воде в зависимости от угла зрения и толщины пленки наблюдается радужная окраска пленки, свидетельствующая об усилении световых волн с определенными λ_0 . Следует отметить, что интерференция от тонких пленок может наблюдаться не только в отраженном, но и в проходящем свете.

Задача 24.2. На мыльную пленку ($n = 1.3$), находящуюся в воздухе, падает по нормали пучок белого света. При какой наименьшей толщине d пленки отраженный свет с длиной волны $\lambda_0 = 0.55$ мкм окажется максимально усиленным в результате интерференции?

Решение. Из условия интерференционного максимума (24.28) находим для толщины пленки выражение:

$$d = \lambda_0 \frac{2m + 1}{4n}$$

(угол падения $i_{\text{п}} = 0$). Минимальное значение d получается при $m = 0$:

$$d_{\min} = \frac{\lambda_0}{4n} = \frac{0.55}{4 \times 1.3} = 0.1 \text{ мкм.}$$

■

24.6 Полосы равной толщины. Кольца Ньютона

Рассмотрим отражение света от соприкасающихся друг с другом плоско-параллельной толстой стеклянной пластинки и плоско-выпуклой линзы с большим радиусом кривизны (рис. 24.8). Роль тонкой пленки, от поверхностей которой отражаются когерентные волны, играет воздушный

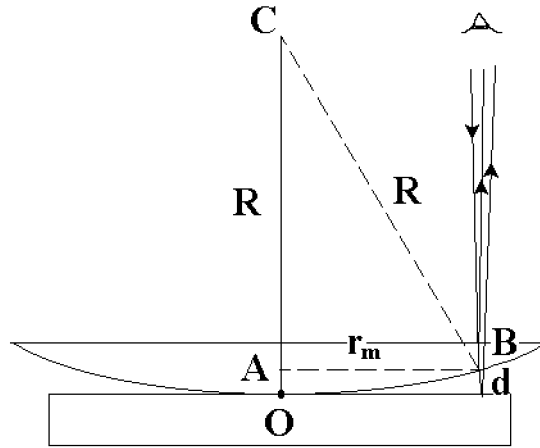


Рис. 24.8: Наблюдение колец Ньютона.

клин (зазор) между пластинкой и линзой. (Вследствие большой толщины пластинки и линзы за счет отражений от других поверхностей интерференционные картины не возникают.)

При нормальном падении света интерференционная картина имеет вид концентрических окружностей (кольца Ньютона). Каждая из таких интерференционных окружностей возникает в результате отражения от участков воздушного клина с одинаковой толщиной (вследствие чего их называют *интерференционными полосами равной толщины*). Определим радиусы колец Ньютона, получающихся при падении света по нормали к пластинке. В этом случае $\sin i_n = 0$ и оптическая разность хода равна (в зазоре $n = 1$):

$$\Delta L = 2d + \frac{\lambda_0}{2}. \quad (24.30)$$

Из треугольника CAB имеем ($R \gg d$):

$$r_m^2 = R^2 - (R - d)^2 = 2Rd - d^2 \approx 2Rd, \quad (24.31)$$

или

$$d = \frac{r_m^2}{2R}. \quad (24.32)$$

Таким образом, для светлых колец (максимумы)

$$\Delta L = \frac{r_m^2}{R} - \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0, \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (24.33)$$

Отсюда следует выражение для радиусов светлых колец:

$$r_m = \sqrt{R\lambda_0(m + \frac{1}{2})}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (24.34)$$

Радиусы темных колец Ньютона получаются равными

$$r_m = \sqrt{R\lambda_0 m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (24.35)$$

В точке касания пластинки и линзы, т.е. при $r = 0$ наблюдается минимум интенсивности, обусловленный изменением фазы колебаний на π при отражении световой волны от пластинки.

Задача 24.3. В отраженном свете с длиной волны $\lambda_0 = 546$ нм были измерены радиусы двух светлых колец, оказавшиеся равными 0.161 см и 0.284 см. Было подсчитано, что между этими кольцами расположено 19 других светлых колец. Чему равен радиус кривизны линзы R ?

Решение. Пусть меньшее измеренное кольцо Ньютона имеет порядок m , тогда порядок большего равен $m + 20$. Используем (24.34):

$$r_m = \sqrt{R\lambda_0(m + \frac{1}{2})}, \quad r_{m+20} = \sqrt{R\lambda_0(m + 20 + \frac{1}{2})}.$$

Возведем эти равенства в квадрат и разделим одно на другое:

$$\frac{r_m^2}{r_{m+20}^2} = \frac{m + 0.5}{m + 20.5}.$$

Отсюда находим порядок m меньшего из упомянутых колец Ньютона:

$$m = \frac{20.5r_m^2 - 0.5r_{m+20}^2}{r_{m+20}^2 - r_m^2} = \frac{20.5 \times 0.161^2 - 0.5 \times 0.284^2}{0.284^2 - 0.161^2} = 9,$$

и искомый радиус кривизны линзы:

$$R = \frac{r_9^2}{9.5\lambda_0} = \frac{(1.61 \cdot 10^{-3})^2}{9.5 \times 546 \cdot 10^{-9}} = 0.5 \text{ м.}$$

■

Контрольные вопросы к главам 23 и 24

1. Сформулируйте принцип Гюйгенса.

2. Объясните законы отражения и преломления света на основе принципа Гюйгенса.
3. Сформулируйте принцип Ферма.
4. Выведите законы отражения и преломления света на основе принципа Ферма.
5. Что такое интерференция световых волн?
6. Когерентные волны. Условия когерентности световых волн.
7. Укажите способы наблюдения интерференции света.
8. При помощи зеркал Френеля получили интерференционные полосы, пользуясь красным светом. Как изменится интерференционная картина, если тот же опыт провести в фиолетовом свете?
9. Чем объясняется радужная окраска мыльных пузырей?
10. Почему не возникает интерференционной картины от двух фар удаленного автомобиля?
11. Почему интерференционные полосы, хорошо различимые в тонких пленках, не наблюдаются на толстом куске стекла?

Глава 25

Дифракция света

Дифракцией называется любое отклонение при распространении волн от законов геометрической оптики. Благодаря дифракции волны могут падать в область геометрической тени: звук слышен за углом дома, а в центре тени от освещенного диска наблюдается светлое пятно. Наблюдения дифракционных явлений привели волновую оптику к окончательной победе над корпускулярной теорией. В пределе при $\lambda \rightarrow 0$ законы волновой оптики переходят в законы геометрической оптики. Следовательно, отклонения от законов геометрической оптики наиболее ярко проявляются, когда размеры препятствий (различных неоднородностей) сопоставимы или меньше длины световой волны.

Дифракция света всегда сопровождается интерференцией дифрагированных лучей. В явлении дифракции (как и в явлении интерференции) происходит перераспределение светового потока в результате суперпозиции волн. В сущности между дифракцией и интерференцией нет принципиальных различий: по историческим причинам суперпозицию конечного числа волн называют интерференцией, а суперпозицию бесконечного числа волн --- дифракцией.

25.1 Принцип Гюйгенса-Френеля

Изложенный ранее принцип Гюйгенса имеет характер геометрического правила. Согласно принципу Гюйгенса, каждую точку волнового фронта можно рассматривать как самостоятельный источник колебаний, а результат действия вторичных волн может быть найден построением поверхности, огибающей эти вторичные волны. Французский физик О. Френель дополнил этот принцип, предложив рассматривать волновое возмущение в любой точке пространства как результат *интерференции* вто-

ричных волн от фиктивных источников, на которые разбивается волновой фронт. Эти фиктивные источники когерентны и поэтому могут интерферировать в любой точке пространства, в результате чего элементарные волны могут гасить или усиливать друг друга. Способ Френеля вкладывает более глубокое физическое содержание в принцип Гюйгенса. Он также позволяет решить ряд задач, представлявших трудности в рамках первоначального принципа Гюйгенса.

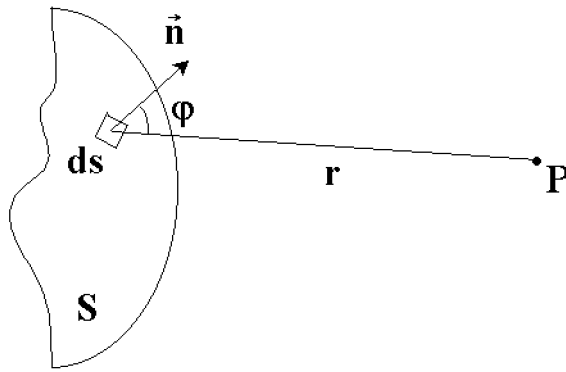


Рис. 25.1: К принципу Гюйгенса-Френеля.

Рассмотрим поверхность волнового фронта S (рис. 25.1). Каждый ее элемент служит источником вторичной сферической волны, амплитуда которой пропорциональна площади ds элемента. Для сферической волны амплитуда убывает с расстоянием r от источника, как $1/r$. Следовательно, от каждого элемента ds волновой поверхности в точку наблюдения P , приходит колебание

$$dE = K(\varphi) \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \alpha_0) ds, \quad (25.1)$$

где A_0 — амплитуда светового колебания в точке волновой поверхности, где расположен элемент ds . Величина K — коэффициент, который зависит от угла φ между нормалью \vec{n} к площадке ds и направлением от ds к точке наблюдения P . Результирующее колебание в точке P представляет суперпозицию элементарных колебаний dE , причем интеграл берется по всей волновой поверхности S :

$$E = \iint_S K(\varphi) \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \alpha_0) ds. \quad (25.2)$$

Это соотношение представляет аналитическое выражение принципа Гюйгенса-Френеля. В общем случае расчет интерференции вторичных волн

довольно сложен и громоздок, однако в ряде случаев нахождение амплитуды результирующего колебания оказывается возможным с помощью алгебраического или геометрического суммирования.

25.2 Метод зон Френеля

Принцип Гюйгенса-Френеля в рамках волновой теории света позволяет объяснить прямолинейное распространение света. Определим амплитуду световой волны в произвольной точке P , используя метод зон Френеля. Рассмотрим сначала случай падающей плоской волны (рис. 25.2).

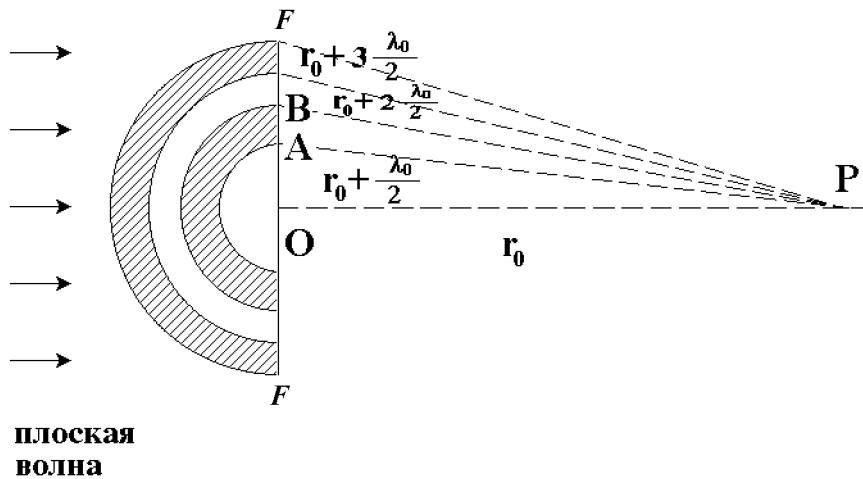


Рис. 25.2: Применение принципа Гюйгенса-Френеля к плоской волне. Зоны Френеля — мысленно выделенные области на поверхности волнового фронта F . В данном случае они представляют собой концентрические кольца. Для наглядности изображение зон Френеля развернуто на 90° : такими они выглядят из точки P .

Пусть плоский фронт волны F , распространяющейся от расположенного в бесконечности источника света, в некоторый момент времени находится на расстоянии $OP = r_0$ от точки наблюдения P . Во всех точках фронта волны, согласно принципу Гюйгенса-Френеля, возникают элементарные сферические колебания, которые распространяются по всем направлениям и через некоторое время достигают точки наблюдения P . Результирующая амплитуда колебаний в этой точке определяется векторной суммой амплитуд всех вторичных волн. Колебания всех точек волнового фронта F происходят в одной фазе. С другой стороны, все точки фронта F находятся от точки P на различных расстояниях. Для определения результирующей амплитуды всех волн Френель предложил

метод разбиения волновой поверхности на кольцевые зоны — *метод зон Френеля*.

Взяв точку P в качестве центра, построим ряд концентрических сфер, радиусы которых начинаются с r_0 и увеличиваются каждый раз на половину длины волны $\lambda_0/2$. При пересечении с плоским фронтом волны F эти сферы дадут концентрические окружности. Таким образом, на фронте волны появятся кольцевые зоны (зоны Френеля) с радиусами: ρ_1, ρ_2, ρ_3 и т.д. Определим радиусы зон Френеля: $OA = \rho_1$, $OA^2 = AP^2 - OP^2$, т.е.

$$\rho_1^2 = (r_0 + \frac{\lambda_0}{2})^2 - r_0^2 = r_0\lambda_0 + \frac{\lambda_0^2}{4} \approx r_0\lambda_0 \quad (\lambda_0 \ll r_0). \quad (25.3)$$

Аналогично находим:

$$\begin{aligned} \rho_2^2 &= (r_0 + 2\frac{\lambda_0}{2})^2 - r_0^2 = 2r_0\lambda_0 + \lambda_0^2 \approx 2r_0\lambda_0, \\ \rho_3^2 &= (r_0 + 3\frac{\lambda_0}{2})^2 - r_0^2 = 3r_0\lambda_0 + 9\frac{\lambda_0^2}{4} \approx 3r_0\lambda_0, \\ \dots &\quad \dots \\ \rho_k^2 &\approx kr_0\lambda_0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (25.4)$$

Для оценки амплитуд колебаний определим площади зон Френеля. Первая зона (круг):

$$S_1 = \pi\rho_1^2 = \pi r_0\lambda_0; \quad (25.5)$$

вторая зона (кольцо):

$$S_2 = \pi\rho_2^2 - \pi\rho_1^2 = \pi r_0\lambda_0; \quad (25.6)$$

третья и последующие зоны (кольца):

$$\begin{aligned} S_3 &= \pi\rho_3^2 - \pi\rho_2^2 = \pi r_0\lambda_0, \\ \dots &\quad \dots \\ S_k &= \pi r_0\lambda_0. \end{aligned} \quad (25.7)$$

Таким образом, площади зон Френеля примерно одинаковы.

Подчеркнем, что согласно принципу Гюйгенса-Френеля каждый элемент волновой поверхности служит источником вторичных сферических волн, *амплитуда которых пропорциональна величине поверхности*.

Колебания, возбуждаемые в точке P двумя соседними зонами, противоположны по фазе, так как разность хода соответственных лучей от

этих зон до точки наблюдения P равна $\lambda_0/2$. Поэтому при наложении эти колебания должны взаимно ослаблять друг друга. Следовательно, амплитуда A результирующего колебания может быть представлена в виде знакпеременного ряда

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots, \quad (25.8)$$

где A_1 — амплитуда колебаний в точке P , возбуждаемых действием центральной (первой) зоны Френеля, A_2 — амплитуда колебаний, возбуждаемых второй зоной и т.д.

Расстояние от m -й зоны до точки P медленно растет с номером зоны m . Угол φ между нормалью к элементам зоны и направлением в точку P также растет с m . Следовательно, амплитуда A_m колебания, возбуждаемого m -й зоной в точке P монотонно убывает с ростом m . Другими словами, амплитуды колебаний, возбуждаемых в точке P зонами Френеля, образуют монотонно убывающую последовательность:

$$A_1 > A_2 > \dots > A_{m-1} > A_m > A_{m+1} > \dots \quad (25.9)$$

Вследствие монотонного и медленного убывания A_m можно приближенно положить, что амплитуда колебаний от зоны с номером m равна среднему арифметическому от амплитуд колебаний от двух соседних зон Френеля:

$$A_m = \frac{A_{m-1} + A_{m+1}}{2}. \quad (25.10)$$

В выражении для амплитуды результирующего колебания все амплитуды от четных зон входят с одним знаком, а от нечетных — с другим. Запишем это выражение в следующем виде:

$$A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots \quad (25.11)$$

Выражения в скобках будут равны нулю, так что

$$A = \frac{A_1}{2}, \quad (25.12)$$

т.е. результирующая амплитуда, создаваемая в точке наблюдения P всей поверхностью волнового фронта, равна половине амплитуды, создаваемой одной лишь центральной (первой) зоной Френеля. Таким образом, колебания, вызываемые в точке P волновой поверхностью F , имеют такую же амплитуду, как если бы действовала только половина первой

(центральной) зоны. Следовательно, свет распространяется как бы в узком канале, сечение которого равно половине первой (центральной) зоны Френеля. Мы снова пришли к прямолинейному распространению плоской волны света.

Если же на пути волны поставить диафргаму с отверстием, оставляющим открытой только центральную (первую) зону Френеля, амплитуда в точке P будет равна A_1 , т.е. в два раза превзойдет амплитуду, создаваемую всем волновым фронтом. Соответственно, интенсивность света в точке P будет в четыре раза больше, чем при отсутствии преграды между источником света и точкой P . Удивительно, не так ли? Но чудес в природе не бывает: в других точках интенсивность света будет ослаблена, а средняя освещенность всего экрана при использовании диафргамы уменьшится, как и следовало ожидать.

Возможность деления волнового фронта на зоны Френеля подтверждена экспериментально. Колебания от четных и нечетных зон Френеля находятся в противофазе и, следовательно, взаимно ослабляют друг друга. Если поставить на пути световой волны пластинку, которая перекрывала бы все четные или нечетные зоны, то интенсивность света в точке P резко возрастет. Такая пластинка, называемая зонной, действует подобно собирающей линзе. Подчеркнем еще раз: зоны Френеля — это мысленно выделенные участки поверхности волнового фронта, положение которых зависит от выбранной точки наблюдения P . При другой точке наблюдения расположение зон Френеля будет иным. Метод зон Френеля — удобный способ решения задач о дифракции волн на тех или иных препятствиях.

Различают два вида дифракции. Если источник света S и точка наблюдения P находятся далеко от препятствия, лучи, падающие на препятствие и идущие в точку P , образуют практически параллельные пучки. В таком случае говорят о *дифракции в параллельных лучах* или *дифракции Фраунгофера*. Если же рассматривается дифракционная картина на конечном расстоянии от препятствия, вызвавшего дифракцию, то говорят о *дифракции сферических волн* или *дифракции Френеля*.

25.3 Дифракция на круглом отверстии и диске

Дифракционные явления можно наблюдать при прохождении света через малое отверстие или вблизи экрана (диска). Плоская световая волна па-

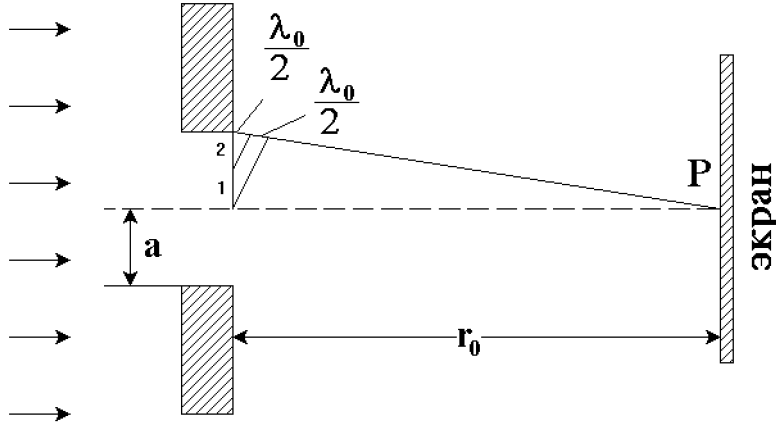


Рис. 25.3: Дифракция света на круглом отверстии.

дает на малое круглое отверстие радиусом a (рис. 25.3). Плоский фронт, совпадающий с отверстием, можно рассматривать как совокупность фиктивных источников, испускающих когерентные волны, которые в точке наблюдения P будут интерферировать. Разобьем площадь отверстия на ряд кольцевых зон Френеля, для чего из точки P проведем ряд сфер с радиусами: $r_1 = r_0 + \lambda_0/2$; $r_2 = r_0 + 2\lambda_0/2$ и т.д. Если число зон, которые укладываются в отверстии, четно, то в точке P будет темное пятно. Действительно, результирующая амплитуда колебаний при $2, 4, \dots, 2m$ зонах равна:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) - \frac{A_3}{2} \approx \frac{A_1}{2} - \frac{A_3}{2} = \frac{A_1}{2} - \frac{A_3}{2}, \\
 A &= \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) - \frac{A_5}{2} = \frac{A_1}{2} - \frac{A_5}{2}, \\
 \dots & \dots \\
 A &= \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots + \\
 &+ \left(\frac{A_{2m-1}}{2} - A_{2m} + \frac{A_{2m+1}}{2} \right) - \frac{A_{2m+1}}{2} = \frac{A_1}{2} - \frac{A_{2m+1}}{2}. \quad (25.13)
 \end{aligned}$$

При небольших отверстиях (небольших m) амплитуды мало отличаются друг от друга и $A \approx 0$. При нечетном числе зон ($m = 1, 3, \dots, 2m + 1$) аналогичные рассуждения приводят к выражению

$$A = \frac{A_1}{2} + \frac{A_{2m+1}}{2} \approx A_1, \quad (25.14)$$

т.е. в точке наблюдения будет светлое пятно. Число зон Френеля, расположенных в отверстии, зависит от расстояния r_0 и длины волны λ_0 :

$$\rho_k^2 = kr_0\lambda_0 = a^2, \quad (25.15)$$

откуда:

$$k = \frac{a^2}{r_0\lambda_0}. \quad (25.16)$$

Таким образом, при данном радиусе отверстия a и длине волны падающего света λ_0 число зон k является функцией расстояния r_0 между отверстием и точкой наблюдения.

Расчет амплитуды результирующих колебаний, пришедших в другие точки экрана, более сложен. Из соображений симметрии следует, что интерференционная картина на экране вокруг центрального светлого (или темного) пятна (в зависимости от четности k) должна иметь вид чередующихся светлых и темных колец с центрами в точке P . Интенсивность максимумов должна убывать при удалении от точки P .

Если источник света расположен перед отверстием на расстоянии r до него, то расчет зон Френеля слегка усложняется: зоны проводятся не на плоском, а на сферическом фронте. Приведем без вывода выражение для радиуса зон Френеля в этом случае:

$$\rho_k^2 = k\lambda_0 \frac{rr_0}{r + r_0}. \quad (25.17)$$

При $r \rightarrow \infty$ мы получаем случай плоской волны (25.4).

Поместим теперь между падающей плоской волной и точкой наблюдения P непрозрачный диск радиусом a (рис. 25.4). Если диск закроет k первых зон Френеля, то амплитуда в точке P будет равна

$$\begin{aligned} A &= A_{k+1} - A_{k+2} + A_{k+3} - \dots = \\ &= \frac{A_{k+1}}{2} + \left(\frac{A_{k+1}}{2} - A_{k+2} + \frac{A_{k+3}}{2} \right) + \dots \end{aligned} \quad (25.18)$$

Выражения в скобках можно положить равными нулю, т.е.

$$A = \frac{A_{k+1}}{2}. \quad (25.19)$$

Таким образом, за небольшим ($A_{k+1} \approx A_1$) непрозрачным диском в центре экрана будет светлое пятно. Для точки P' , смещенной относительно

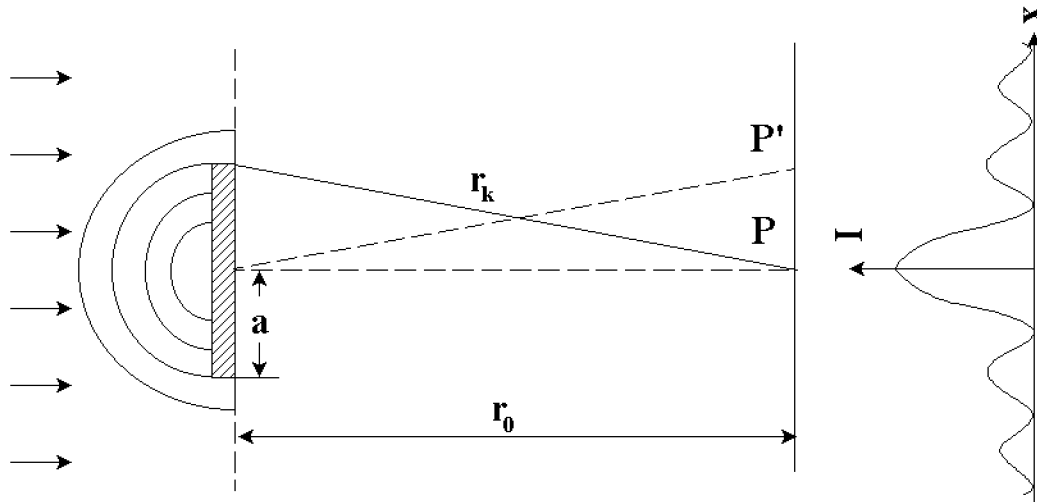


Рис. 25.4: Дифракция света на непрозрачном диске. Справа показана освещенность экрана. Светлое пятно в центре (максимальное значение I) сменяется чередующимися минимумами и максимумами, образующими светлые и темные кольца.

точки P в любом радиальном направлении, диск будет перекрывать часть $(k+1)$ -й зоны Френеля, одновременно откроется часть зоны k . Это вызовет уменьшение интенсивности. При некотором положении точки P' интенсивность достигает минимума. Следовательно, в случае непрозрачного круглого диска дифракционная картина имеет вид светлого центрального пятна и чередующихся темных и светлых концентрических колец (см. рис. 25.4). Светлое пятно в центре геометрической тени было предсказано С. Пуассоном в 1818 г. и выдвинуто в качестве опровержения волновой теории света. Однако Д. Араго произвел соответствующий опыт и показал, что выводы Пуассона соответствуют действительности и лишь подтверждают волновую теорию и ее предсказания, вытекающие из метода зон Френеля.

Задача 25.4. На диафрагму с круглым отверстием диаметром $d = 4$ мм падает по нормали плоская волна света ($\lambda_0 = 0.5$ мкм). Точка наблюдения находится на расстоянии $b = 1$ м на оси отверстия. Сколько зон Френеля укладывается в отверстии? Светлое или темное пятно получится в центре дифракционной картины?

Решение. Используем (25.16) при $a = d/2$ и $r_0 = b$:

$$k = \frac{d^2}{4b\lambda_0} = \frac{(4 \cdot 10^{-3})^2}{4 \times 1 \times 0.5 \cdot 10^{-6}} = 8.$$

В центре картины будет темное пятно. ■

Задача 25.5. Точечный источник света ($\lambda_0 = 0.5$ мкм) расположен на расстоянии $l = 1$ м на оси диафрагмы с отверстием радиусом $a = 1$ мм. За отверстием помещают экран. При каком расстоянии от отверстия до экрана для центра дифракционной картины будут открыты $k = 3$ зоны Френеля? Как изменится освещенность в центре, если убрать диафрагму.

Решение. Используем формулу (25.17):

$$a^2 = k\lambda_0 \frac{lr_0}{l + r_0}.$$

Отсюда находим:

$$r_0 = \frac{la^2}{k\lambda_0 l - a^2} = \frac{1 \times (10^{-3})^2}{3 \times 0.5 \cdot 10^{-6} \times 1 - (10^{-3})^2} = 2 \text{ м.}$$

В центре дифракционной картины будет светлое пятно, а амплитуда колебаний там равна $A \approx A_1$. Если диафрагму убрать, то амплитуда станет равной $A_1/2$, т.е. освещенность уменьшится в четыре раза. ■

25.4 Дифракция Фраунгофера от щели

Пусть на бесконечно длинную щель падает плоская световая волна. В соответствии с принципом Гюйгенса-Френеля освещенную щель можно рассматривать как множество точечных когерентных источников света. Поместим за щелью экран, расстояние до которого достаточно велико по сравнению с шириной щели. Это условие означает, что в данную точку P экрана попадет параллельный пучок лучей, отклонившийся на угол φ (рис. 25.5). Разность хода $AC = \Delta$ крайних лучей из этого пучка определяется из треугольника ABC ($\angle ABC = \varphi$):

$$\Delta = a \sin \varphi, \quad (25.20)$$

где $a = AB$ — ширина щели. Если при наблюдении из точки P в щели помещается четное число зон Френеля ($\Delta = 2k\lambda_0/2$), то их вклады взаимно погасятся и в точке P будет наблюдаться минимум интенсивности света. Таким образом, уравнение

$$\sin \varphi_{\min, k} = k \frac{\lambda_0}{a}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (25.21)$$

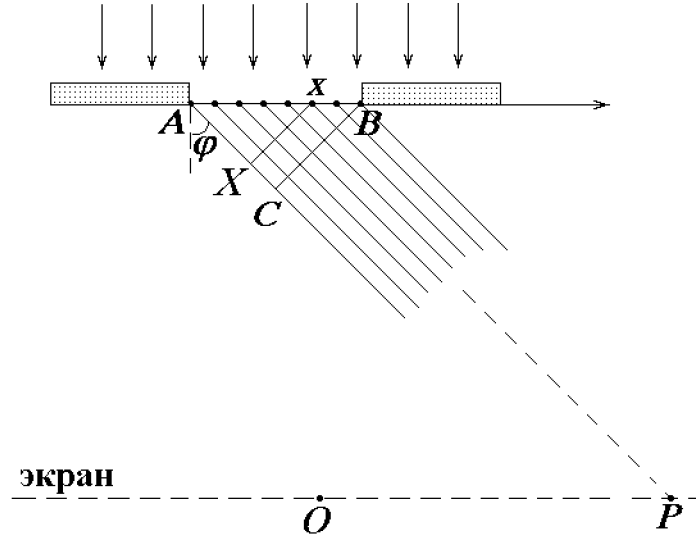


Рис. 25.5: Дифракция Фраунгофера от щели.

дает нам угол $\varphi_{\min,k}$ — направление на минимум с номером k .

Если разность хода крайних лучей равна нечетному числу полуволн ($\Delta = (2k + 1)\lambda_0/2$), то при наблюдении из точки P в щели помещается нечетное число зон Френеля. Каждая зона гасит соседнюю, а оставшаяся последняя посылает свет в направлении $\varphi_{\max,k}$ и образует максимум. Поэтому условие максимумов имеет вид:

$$\sin \varphi_{\max,k} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_0}{a}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (25.22)$$

Выражения (25.21) и (25.22) имеют приближенный характер, поскольку мы применили метод зон Френеля для бесконечно удаленных точек наблюдения, рассматривая дифракцию в параллельных лучах.

Что же касается центральной точки O экрана, то в нее попадает пучок неотклоненных лучей, ортогональных щели. Все они имеют одинаковую фазу, то есть должны усиливать друг друга. Поэтому в условии минимумов (25.21) исключено значение $k = 0$, соответствующее точке O . Это же значение исключено из условия максимумов (25.22): если угол $\varphi_{\max,0} = \arcsin(\lambda_0/2a)$ тоже соответствует максимуму, то непонятно, что будет наблюдаться между ним и центральным максимумом $\varphi_{\max,c} = 0$, так как между ними, как следует из (25.22), вроде бы не должно быть минимумов интенсивности, потому что $\varphi_{\min,1} = \arcsin(\lambda_0/a) > \varphi_{\max,0}$.

После этих качественных соображений изучим дифракционную картину более подробно и получим выражения, позволяющие сравнить интенсивности света в максимумах различных порядков. Результирующее

колебание в некоторой точке P экрана представляет собой суперпозицию колебаний, распространяющихся от всей поверхности щели. В случае дифракции Фраунгофера расстояние от экрана до решетки можно считать приблизительно постоянным при малых углах φ . Коэффициент $K(\varphi)$ в общей формуле (25.2) также можно считать постоянным, если мы ограничимся рассмотрением не слишком больших углов дифракции φ . Обозначим A_0 сумму амплитуд колебаний, возбуждаемых щелью в центральной точке O экрана. Тогда амплитуда колебания, возбуждаемого элементом щели длиной dx , будет равна

$$dA = \frac{A_0}{a} dx. \quad (25.23)$$

Такой же будет амплитуда колебаний, возбуждаемых этим же элементом в любой другой точке P . Однако, если этот элемент находится в точке с координатой x (начало координат мы поместим в крайнюю точку A щели), то вторичная волна, дошедшая от него до точки P , будет опережать по фазе колебание, дошедшее в P от точки A . Разность фаз между рассматриваемыми колебаниями образуется на пути $AX = x \sin \varphi$. Если начальную фазу колебания, возбуждаемого в точке P элементарной площадкой, расположенной в точке A , положить равной нулю, то начальная фаза колебания, возбуждаемого площадкой с координатой x , будет равна

$$\alpha_{0,x} = k \cdot AX = kx \cdot \sin \varphi, \quad (25.24)$$

где $k = 2\pi/\lambda_0$ — волновое число световой волны. Таким образом, учитывая (25.23) и (25.24), находим колебание, возбуждаемое в точке P элементом щели с координатой x :

$$dE_\varphi = \frac{A_0}{a} \cos(\omega t + kx \sin \varphi) dx. \quad (25.25)$$

Проинтегрируем это соотношение по всей ширине щели ($0 \leq x \leq a$) и получим результирующее колебание, возбуждаемое в точке P :

$$\begin{aligned} E_\varphi &= \frac{A_0}{a} \int_0^a \cos(\omega t + kx \sin \varphi) dx = \\ &= \frac{A_0}{a} \cdot \frac{1}{k \sin \varphi} \sin(\omega t + kx \sin \varphi) \Big|_0^a = \\ &= \frac{A_0}{a} \cdot \frac{\sin(\omega t + ka \sin \varphi) - \sin \omega t}{k \sin \varphi} = \end{aligned}$$

$$= A_0 \frac{\sin\left(\frac{ka}{2} \sin \varphi\right)}{\frac{ka}{2} \sin \varphi} \cos \left(\omega t + \frac{ka}{2} \sin \varphi \right). \quad (25.26)$$

Таким образом, амплитуда результирующего колебания имеет вид:

$$A_\varphi = A_0 \left| \frac{\sin \left(\frac{ka}{2} \sin \varphi \right)}{\frac{ka}{2} \sin \varphi} \right| = A_0 \left| \frac{\sin \left(\frac{\pi a}{\lambda_0} \sin \varphi \right)}{\frac{\pi a}{\lambda_0} \sin \varphi} \right|. \quad (25.27)$$

Для точки O' , лежащей против центра щели, угол $\varphi = 0$ и $A_\varphi = A_0$. Этот результат следует, как мы видели, и из физических рассуждений. Получим положение других максимумов. Для этого представим результирующую амплитуду в виде:

$$A = A_0 \left| \frac{\sin \psi}{\psi} \right|, \quad \psi = \pi \frac{a}{\lambda_0} \sin \varphi. \quad (25.28)$$

Амплитуда имеет максимум при выполнении условия:

$$\frac{d}{d\psi} \frac{\sin \psi}{\psi} = 0 = \frac{\cos \psi}{\psi} - \frac{\sin \psi}{\psi^2}, \quad (25.29)$$

или

$$\operatorname{tg} \psi = \psi. \quad (25.30)$$

Очевидное решение $\psi = 0$ соответствует центральному максимуму. Следующий за ним корень уравнения (25.30), которое может быть решено только численно, равен $\psi = \pm 4.49341$. Отсюда находим условие первого максимума:

$$\sin \varphi = \pm \frac{4.49341}{\pi} \frac{\lambda_0}{a} = \pm 1.43 \frac{\lambda_0}{a}. \quad (25.31)$$

Из приближенного выражения (25.22) при $k = 1$ следует коэффициент 1.5 вместо правильного 1.43, что всего на 5% больше. Для других максимумов согласие с приближенной формулой становится еще лучше. “Подозрительная” же точка $\sin \varphi = \lambda_0/2a$ вообще не соответствует экстремуму амплитуды (25.27).

При φ , удовлетворяющих условию $a \sin \varphi = \pm k \lambda_0$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) амплитуда A_φ равна нулю. Это условие определяет положение минимумов, как и было получено выше.

Интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды. Следовательно,

$$I_\varphi = I_0 \frac{\sin^2 \psi}{\psi^2}, \quad \psi = \pi \frac{a}{\lambda_0} \sin \varphi. \quad (25.32)$$

где I_0 — интенсивность в середине дифракционной картины, I_φ — интенсивность в точке P , положение которой определяется углом φ . Подставляя сюда $\psi = 4.49341$, находим интенсивность I_1 в первом максимуме: $I_1 = 0.047 I_0$. Иначе, интенсивность в первом максимуме почти в 20 раз меньше, чем в центральном. Интенсивность в других максимумах будет еще меньшей.

Таким образом, центральный максимум дает главное изображение щели. В качестве меры его ширины можно принять расстояние между минимумами слева и справа от него. Используя условие первых минимумов $\sin \varphi = \pm \lambda_0/a$ и учитывая, что при малых углах $\sin \varphi \sim \varphi$, получаем что минимумы видны под углами $\varphi_\pm = \pm \lambda_0/a$. Поэтому угловой размер центрального минимума равен

$$\Delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_- = \frac{2\lambda_0}{a}. \quad (25.33)$$

Аналогичные формулы для отверстий другой формы отличаются лишь числовым коэффициентом. Отсюда следует общий вывод для любых оптических приборов. Если с помощью оптического прибора (микроскоп, подзорная труба и т.п.) пытаются разглядеть два предмета, угловое расстояние между которыми равно $\Delta\varphi$, то это удастся сделать, если

$$\Delta\varphi > \frac{\lambda_0}{a}. \quad (25.34)$$

Под a здесь надо понимать линейный размер отверстия прибора — его объектива. Иначе изображения предметов (их центральные максимумы) попадут в одно место и предметы будет невозможно различить. Для повышения разрешающей способности прибора надо либо увеличить диаметр a объектива, либо использовать возможно более короткие волны. Последнее реализуется в электронных микроскопах.

25.5 Дифракционная решетка

Широкое распространение в научном эксперименте и технике получили дифракционные решетки, которые представляют собой множество парал-

лельных, расположенных на равных расстояниях одинаковых щелей, разделенных равными по ширине непрозрачными промежутками. Дифракционные решетки изготавливаются с помощью делительной машины, наносящей штрихи (царапины) на стекло или другом прозрачном материале. Там, где проведена царапина, материал становится непрозрачным, а промежутки между ними остаются прозрачными и фактически играют роль щелей.

Рассмотрим сначала дифракцию света от решетки на примере двух щелей. (При увеличении числа щелей дифракционные максимумы становятся лишь более узкими, более яркими и отчетливыми.)

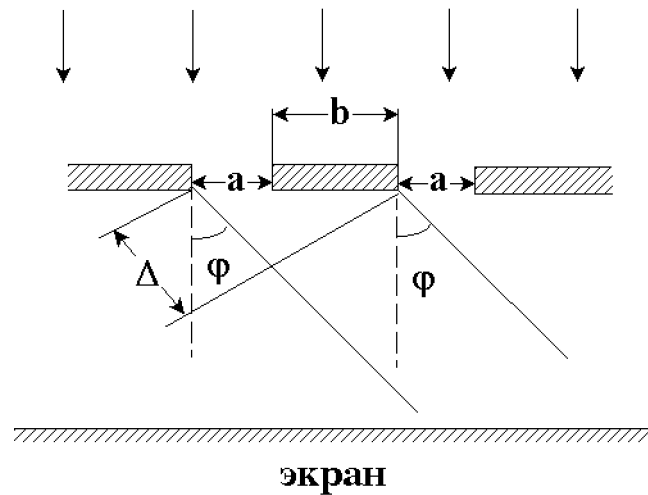


Рис. 25.6: Дифракция на двух щелях.

Пусть a — ширина щели, а b — ширина непрозрачного промежутка (рис. 25.6). Расстояние между серединами соседних щелей называется периодом решетки:

$$d = a + b. \quad (25.35)$$

Разность хода двух крайних лучей равна

$$\Delta = d \sin \varphi. \quad (25.36)$$

Если разность хода равна нечетному числу полуволин:

$$\Delta = (2k + 1) \frac{\lambda_0}{2} \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad (25.37)$$

то свет, посылаемый двумя щелями, будет взаимно гаситься. Условие минимумов имеет вид:

$$d \sin \varphi = (2k + 1) \frac{\lambda_0}{2}. \quad (25.38)$$

Эти минимумы называются дополнительными. Если разность хода равна четному числу полуволн:

$$\Delta = 2k \frac{\lambda_0}{2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (25.39)$$

то свет, посылаемый каждой щелью, будет взаимно усиливать друг друга. Условие максимумов будет иметь вид:

$$d \sin \varphi = 2k \frac{\lambda_0}{2} = k \lambda_0. \quad (25.40)$$

Эти максимумы называются главными.

Кроме того, в тех направлениях, в которых ни одна из щелей не распространяет свет, он не будет распространяться и при двух щелях, т.е. прежние (главные) минимумы будут наблюдаться в направлениях, определяемых условием:

$$a \sin \varphi = \pm k \lambda \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (25.41)$$

Если дифракционная решетка состоит из N щелей (современные решетки, применяемые в приборах для спектрального анализа, имеют до 200000 штрихов и период $d \approx 0.8$ мкм, т.е. порядка 12000 штрихов на 1 см), то условием главных минимумов является условие

$$a \sin \varphi = \pm k \lambda_0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (25.42)$$

условием главных максимумов — соотношение

$$d \sin \varphi = \pm k \lambda_0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (25.43)$$

а условие дополнительных минимумов имеет вид:

$$\begin{aligned} d \sin \varphi &= \pm k' \frac{\lambda_0}{N}, \\ k' &= 1, 2, \dots, N-1, N+1, \dots, 2N-1, 2N+1, \dots \end{aligned} \quad (25.44)$$

Здесь k' может принимать все целочисленные значения, кроме $0, N, 2N, \dots$. Следовательно, в случае N щелей между двумя главными максимумами располагается $(N-1)$ дополнительных минимумов, разделенных вторичными максимумами, создающими относительно слабый фон.

Положение главных максимумов зависит от длины волны λ_0 . Поэтому при пропускании через решетку белого света все максимумы, кроме центрального, разлагаются в спектр, фиолетовый конец которого обращен к

центру дифракционной картины, а красный — наружу. Таким образом, дифракционная решетка представляет собой спектральный прибор. Заметим, что в то время как спектральная призма сильнее всего отклоняет фиолетовые лучи, дифракционная решетка, наоборот, сильнее отклоняет красные лучи.

Важной характеристикой всякого спектрального прибора является *разрешающая способность*. Разрешающей способностью спектрального прибора называют безразмерную величину

$$R = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda}, \quad (25.45)$$

где $\Delta\lambda$ — минимальная разность длин волн двух спектральных линий, при которой эти линии воспринимаются отдельно. Определим разрешающую способность дифракционной решетки. Положение середины k -го максимума для длины волны $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$ определяется условием

$$d \sin \varphi_{max} = k(\lambda_0 + \Delta\lambda). \quad (25.46)$$

Края k -го максимума (т.е. ближайшие дополнительные минимумы) для длины волны λ_0 расположены под углами, удовлетворяющими соотношению:

$$d \sin \varphi_{min} = \left(k \pm \frac{1}{N}\right) \lambda_0. \quad (25.47)$$

Два близких максимума воспринимаются отдельно в том случае, если середина одного максимума совпадает с краем другого (критерий Рэлея).

Таким образом, середина максимума для длины волны $(\lambda_0 + \Delta\lambda)$ совпадает с краем максимума для длины волны λ_0 в том случае, если

$$k(\lambda_0 + \Delta\lambda) = \left(k + \frac{1}{N}\right) \lambda_0. \quad (25.48)$$

Отсюда находим

$$k \cdot \Delta\lambda = \frac{\lambda_0}{N}. \quad (25.49)$$

Следовательно, разрешающая способность дифракционной решетки $R = \lambda_0/\Delta\lambda = kN$ пропорциональна порядку спектра k и числу щелей N .

Контрольные вопросы

1. Обсудите сходство и различие между интерференцией и дифракцией.
2. Почему частицы размером 0.3 мкм неразличимы в микроскоп?
3. Мы слышим звуки, доносящиеся из-за угла, но не видим их источника. Объясните это различие в распространении звуковых и световых волн.
4. Объясните метод зон Френеля.
5. При каких условиях в центре тени от круглого диска наблюдается светлое пятно? А при каких условиях в центре дифракционной картины от круглого отверстия наблюдается темное пятно?
6. Что такое дифракционная решетка?
7. При изготовлении перламутровых пуговиц на их поверхность наносится мельчайшая штриховка. Почему после такой обработки пуговица имеет радужную окраску?

Глава 26

Влияние среды на свойства света

В этой главе мы рассмотрим некоторые эффекты, возникающие при распространении света в среде. Первый из них – *поляризация* – означает поперечную анизотропию световых волн, то есть различие свойств света в разных направлениях, перпендикулярных световому лучу. Далее мы рассматриваем *дисперсию* световых волн в среде, когда скорость распространения света зависит от его частоты (длины волны). Наконец, мы коротко остановимся на *поглощении* и *рассеянии* света в среде.

26.1 Поляризация света

Следствием теории Максвелла является поперечность электромагнитных (световых) волн: векторы напряженности электрического и магнитного полей волны взаимно перпендикулярны и колеблются перпендикулярно вектору скорости \vec{v} распространения волны (т.е. перпендикулярно световому лучу). Явление поляризации света служит надежным обоснованием поперечности световой волны. При рассмотрении поляризации обычно все рассуждения связаны с плоскостью колебаний вектора напряженности электрического поля \vec{E} , т.к. химическое, физиологическое и другие виды воздействия света на вещество обусловлены главным образом электрическими колебаниями. Однако при этом следует помнить об обязательном существовании перпендикулярного ему вектора напряженности магнитного поля \vec{H} .

Поляризация электромагнитной волны

Записывая решение для электрического поля плоской электромагнитной волны:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0), \quad (26.1)$$

мы предполагали, что амплитуда колебаний не зависит от времени. В этом случае вектор электрического поля всегда и во всех точках колеблется в одной плоскости. Плоскость, в которой происходят колебания светового вектора \vec{E} , называется *плоскостью колебаний*, а волна — *линейно поляризованной*. Выбирая ось x вдоль направления распространения волны, а ось y — вдоль векторной амплитуды \vec{E}_0 , мы записываем (26.1) в виде:

$$\vec{E}_y(\vec{r}, t) = \vec{j} E_{0,y} \cos(\omega t - kx + \varphi_{0,y}). \quad (26.2)$$

Однако существует и вторая линейно поляризованная волна, имеющая ту же частоту и распространяющаяся в том же направлении:

$$\vec{E}_z(\vec{r}, t) = \vec{k} E_{0,z} \cos(\omega t - kx + \varphi_{0,z}). \quad (26.3)$$

Электрические колебания в этой волне направлены вдоль оси z , так что волны (26.2) и (26.3) линейно независимы. Обе они являются решением одного и того же волнового уравнения, так что их суперпозиция также является решением того же уравнения. Сложив эти волны, мы найдем общее выражение для монохроматической волны с данной частотой ω , распространяющейся вдоль оси x . Математически эта процедура ничем не отличается от сложения взаимно ортогональных колебаний. Если зафиксировать какую-то точку x и следить за изменением вектора электрического поля в ней, то конец вектора будет описывать эллиптическую, в общем случае, траекторию в плоскости, параллельной yOz . Вращение \vec{E} происходит с частотой волны ω . При равенстве амплитуд $E_{0,y}$ и $E_{0,z}$ эллипс превращается в окружность. Тогда говорят о *круговой поляризации* волны. В соответствие с двумя возможными направлениями вращения вектора $\vec{E}(\vec{r}, t)$ возможны право- и лево-поляризованные волны. Любую другую волну можно представить как линейную комбинацию двух линейно поляризованных волн, или как линейную комбинацию двух волн с круговой поляризацией. Иными словами, электромагнитные волны имеют как бы две внутренние степени свободы.

Естественный и поляризованный свет

В свете, испускаемом обычными источниками, имеются колебания, совершающиеся в различных направлениях, перпендикулярных к лучу. Равномерное расположение векторов \vec{E} обусловлено большим числом атомарных излучателей. Такой свет называется *естественным*, или *неполяризованным*. В таких световых волнах, исходящих из различных элементарных излучателей, векторы имеют различные ориентации колебаний, причем все ориентации равновероятны. Если под влиянием внешних воздействий на свет или внутренних особенностей источника света (лазер) появляется предпочтительное, наиболее вероятное направление колебаний, то такой свет называется *частично поляризованным*. *Неполяризованный (естественный) свет* может испускаться лишь огромным числом элементарных излучателей. Электромагнитная волна от отдельного элементарного излучателя (атома, молекулы) всегда поляризована. С помощью спектральных устройств из пучка естественного света можно выделить луч, в котором колебания вектора \vec{E} будут происходить в одном определенном направлении в плоскости, перпендикулярной лучу, т.е. луч будет *линейно поляризованным*.

На рисунках направление колебаний электрического поля линейно поляризованной волны изображается следующим образом. Если вектор \vec{E} колеблется в плоскости чертежа, то на направление вектора скорости \vec{v} наносится ряд вертикальных черточек (рис. 26.1,А), а если в плоскости, перпендикулярной чертежу, — ряд точек (рис. 26.1,В). Естественный луч условно обозначается чередующимися черточками, которым соответствует, например, компонента E_y вектора напряженности электрического поля, и точками, соответствующими другой компоненте E_z (рис. 26.1,С).

Существуют приборы (поляризаторы), пропускающие только колебания, происходящие параллельно некоторой плоскости, называемой *плоскостью поляризации* прибора, и полностью задерживающие ортогональные колебания. Если пропустить через такой прибор пучок света, то на выходе он будет линейно поляризованным. При вращении прибора вокруг направления луча интенсивность выходящего света будет изменяться от I_{max} до I_{min} . *Степенью поляризации* света называют величину:

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}. \quad (26.4)$$

Если падающий пучок света линейно поляризован, то при положении прибора, когда его плоскость поляризации ортогональна плоскости коле-

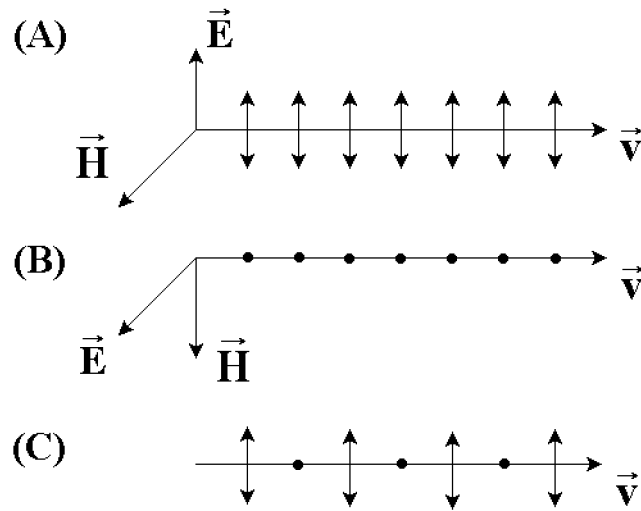


Рис. 26.1: Условные обозначения для поляризации волны.

баний волны, свет через прибор не пройдет, то есть $I_{min} = 0$. В соответствии с уравнением (26.4), степень поляризации такого света $P = 1$. Для частично поляризованного света $I_{min} \neq 0$ и $P < 1$. Для естественного света, где волны разных поляризаций смешаны в равной степени и все направления эквивалентны, интенсивность выходящего света не изменяется при вращении поляризатора, так что $I_{max} = I_{min}$ и $P = 0$. Такой же результат получится для света, поляризованного по кругу. Тут важно подчеркнуть, что степень поляризации света введена для характеристики хаотичности в направлении колебаний различных смешанных в нем волн. При круговой же поляризации хаотичности нет, колебания происходят упорядоченно. Поэтому понятие степени поляризации к таким волнам просто не применяется.

Закон Малюса

В качестве поляризаторов могут быть использованы среды, анизотропные в отношении колебаний вектора \vec{E} , например, природные кристаллы турмалина. Монокристалл турмалина поглощает колебания вектора \vec{E} в одном направлении настолько сильно, что сквозь пластинку толщиной порядка 1 мм проходит только линейно поляризованный луч. Кристаллы йодистого хинина еще сильнее поглощают одну из поляризаций: кристаллическая пленка толщиной в десятую долю миллиметра практически полностью отделяет один из линейно поляризованных лучей.

Пусть естественный свет распространяется перпендикулярно плоскости рисунка 26.2. Амплитуду колебаний \vec{A} , совершающихся в плоскости, образующей с плоскостью поляризатора угол φ , можно разложить на два колебания с амплитудами $A_{\parallel} = A \cos \varphi$ и $A_{\perp} = A \sin \varphi$.

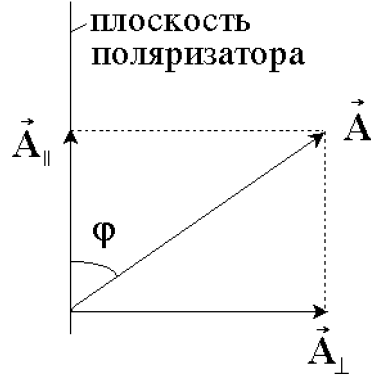


Рис. 26.2: Разложение направления колебаний в волне, падающей на поляризатор.

Первое колебание с амплитудой A_{\parallel} пройдет через прибор (поляризатор), второе — с амплитудой A_{\perp} — будет задержано (поглощено). Интенсивность прошедшей волны пропорциональна квадрату амплитуды $A_{\parallel}^2 = A^2 \cos^2 \varphi$. Падающая волна является смесью волн с различными φ . Усредняя по углам, получаем для интенсивности света на выходе из поляризатора:

$$I_{\text{прош}} = I_0 \langle \cos^2 \varphi \rangle, \quad (26.5)$$

где I_0 — интенсивность падающего на поляризатор света. В естественном свете все значения угла φ равновероятны: $\langle \cos^2 \varphi \rangle = 1/2$, так что интенсивность света, прошедшего через поляризатор, будет равна $I_0/2$. При вращении поляризатора вокруг направления луча естественного света интенсивность прошедшего света остается неизменной, но изменяется лишь ориентация плоскости колебаний света, выходящего из прибора.

Рассмотрим теперь падение линейно поляризованного света с интенсивностью I_0 на тот же поляризатор (рис. 26.3). Сквозь прибор пройдет составляющая колебаний с амплитудой $A_{\parallel} = A_0 \cos \varphi$, где φ — угол между плоскостью колебаний вектора \vec{E} и плоскостью поляризатора. Следовательно, интенсивность прошедшего света I определяется выражением

$$I = I_0 \cos^2 \varphi, \quad (26.6)$$

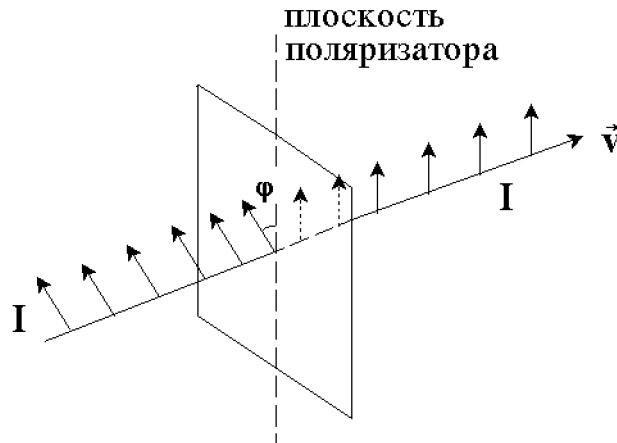


Рис. 26.3: Прохождение линейно поляризованной волны через поляризатор.

которое носит название закона Малюса.

Поляризационные приборы по своему целевому назначению делятся на *поляризаторы* и *анализаторы*. Поляризаторы служат для получения поляризованного света. С помощью анализатора можно убедиться, что падающий свет поляризован, и выяснить направление поляризации. Принципиальных различий в конструкционном отношении между поляризатором и анализатором не существует.

Поставим на пути естественного света два поляризатора, плоскости которых образуют угол φ . Из первого поляризатора выйдет линейно поляризованный свет, интенсивность которого I_1 составит половину интенсивности падающего естественного света $I_{\text{ест}}$. Согласно закону Малюса из второго поляризатора (который играет роль анализатора) выйдет свет с интенсивностью $I_2 = I_1 \cos^2 \varphi$. Таким образом, интенсивность света, прошедшего через два поляризатора, равна

$$I_2 = \frac{I_{\text{ест}}}{2} \cos^2 \varphi. \quad (26.7)$$

Если угол $\varphi = 0$ (плоскости поляризации поляризатора и анализатора параллельны), то $I_2 = I_{\text{ест}}/2$; если $\varphi = \pi/2$ (анализатор и поляризатор скрещены), то $I_2 = 0$.

Задача 26.6. В частично поляризованном свете амплитуда колебаний, соответствующая максимальной интенсивности света при прохождении через поляризатор, в $n = 2$ раза больше амплитуды, соответствующей минимальной интенсивности. Какова степень поляризации света?

Решение. Поскольку интенсивности пропорциональны квадратам амплитуд, имеем: $I_{max} = n^2 I_{min}$. Отсюда степень поляризации света равна:

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = 0.6.$$

■

Задача 26.7. На пути света со степенью поляризации $P = 0.6$ поставили анализатор так, что интенсивность прошедшего света стала максимальной. Во сколько раз уменьшится интенсивность, если анализатор повернуть на угол $\alpha = 30^\circ$?

Решение. В падающем луче по условию (см. предыдущую задачу) $I_{max} = 4I_{min}$. При повороте анализатора на угол α будут пропущены колебания, параллельные плоскости поляризации прибора. Поэтому интенсивность прошедших колебаний, прежде бывших параллельными плоскости поляризации, составит $I_1 = I_{max} \cos^2 \alpha$, а интенсивность прошедших колебаний, до поворота задерживавшихся анализатором, равна $I_2 = I_{min} \sin^2 \varphi = I_{max} \sin^2 \alpha / 4$. Суммарная интенсивность прошедших колебаний равна сумме

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 = I_{max} \left(\cos^2 \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{4} \right) = I_{max} \left(1 - \frac{3}{4} \sin^2 \alpha \right) = \\ &= I_{max} \left(1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \right) = \frac{13}{16} I_{max}. \end{aligned} \quad (26.8)$$

Ответ: интенсивность уменьшится при повороте анализатора в $16/13 = 1.23$ раза. ■

Поляризация при отражении и преломлении

Получить поляризованный свет из естественного можно еще одним способом — отражением. Опыт показывает, что отраженный и преломленный лучи всегда частично поляризованы. Когда свет падает на неметаллическую поверхность, то в отраженном луче преобладают колебания, перпендикулярные плоскости падения (точки на рис. 26.4), а в преломленном луче — колебания, параллельные плоскости падения (стрелки на рис. 26.4). Степень поляризации зависит от угла падения лучей и коэффициента преломления отражающей среды. Исследуя это явление,

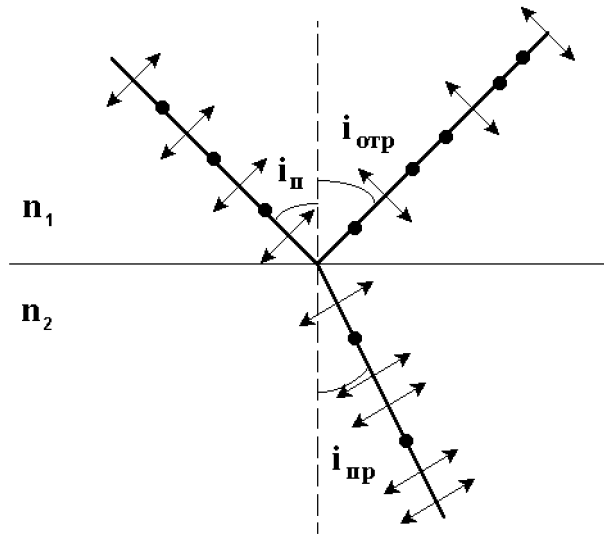


Рис. 26.4: Поляризация света при отражении и преломлении.

Брюстер установил, что при определенном значении угла падения $i_{\text{п}}$, удовлетворяющем условию

$$\operatorname{tg} i_{\text{Бр}} = n_{21} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (26.9)$$

отраженный свет линейно поляризован. Это соотношение носит название *закона Брюстера*. При $i_{\text{п}} = i_{\text{Бр}}$ отражается только та компонента вектора напряженности электрического поля, которая параллельна поверхности диэлектрика (перпендикулярна плоскости падения). Соответственно, преломленный луч частично поляризован.

Попробуем объяснить линейную поляризацию отраженного света. При падении света под углом Брюстера отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны. Действительно, при $i_{\text{п}} = i_{\text{Бр}}$ находим из закона преломления:

$$\frac{\sin i_{\text{Бр}}}{\sin i_{\text{пр}}} = n_{21} = \frac{\sin i_{\text{Бр}}}{\cos i_{\text{Бр}}}. \quad (26.10)$$

Получаем отсюда:

$$\cos i_{\text{Бр}} = \sin i_{\text{пр}}. \quad (26.11)$$

Таким образом, $i_{\text{Бр}} + i_{\text{пр}} = \pi/2$. Следует отметить, что на опыте закон Брюстера не выполняется вполне строго и неприменим в случае отражения света от поверхности проводников (металлов).

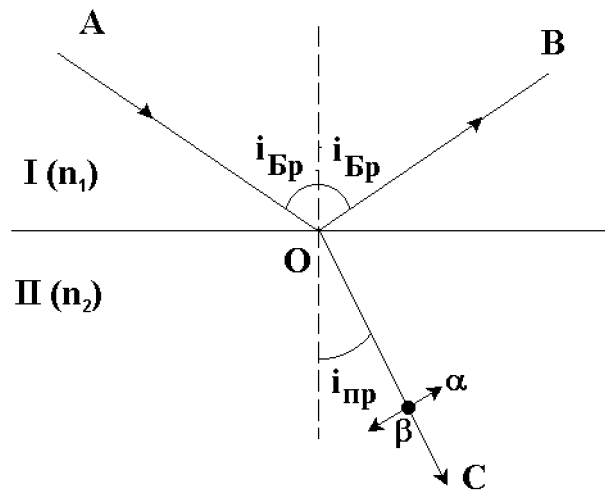


Рис. 26.5: К доказательству линейной поляризации отраженного луча, падающего под углом Брюстера.

Плоскость колебаний совпадает с направлением вектора напряженности электрического поля \vec{E} , т.е. для второй среды (n_2) оно перпендикулярно и лучу OC . Разложим это колебание на два взаимно перпендикулярных направления (рис. 26.5): колебание α , происходящее в плоскости падения (показано стрелкой) и колебание β , происходящее перпендикулярно плоскости падения (показано точкой). В случае падения под углом Брюстера $i_{\text{п}} = i_{\text{Бр}}$ отраженный луч OB перпендикулярен преломленному лучу OC . Следовательно, OB параллельно α . Из электромагнитной теории Максвелла известно, что колеблющийся электрический заряд не излучает электромагнитных волн вдоль направления своего движения. Поэтому колеблющийся в диэлектрике излучатель типа α вдоль направления OB не излучает. Таким образом, по направлению отраженного луча OB распространяется свет, посылаемый только излучателем типа β , направление колебаний которого перпендикулярно плоскости падения.

Задача 26.8. На какой угловой высоте φ над горизонтом должно находиться Солнце, чтобы солнечный свет, отраженный от поверхности воды, был полностью поляризован?

Решение. Угол падения света связан с высотой Солнца над горизонтом соотношением $i_{\text{пад}} = \pi/2 - \varphi$. По условию задачи угол падения равен углу Брюстера, так что $\text{tg } i_{\text{пад}} = \text{ctg } \varphi = n$. Показатель преломления воды $n = 1.33$. Отсюда находим: $\varphi = 37^\circ$. ■

Задача 26.9. Угол Брюстера при падении света из воздуха на кристалл каменной соли равен $i_{\text{Бр}} = 57^\circ$. Определить скорость света v в этом кристалле.

Решение. Поскольку показатель преломления воздуха равен единице, показатель преломления каменной соли n совпадает с относительным показателем преломления n_{12} этих двух сред. Имеем поэтому: $v = c/n = c/\text{tg}57^\circ = 0.65c = 1.95 \cdot 10^8$ м/с. ■

26.2 Дисперсия света

Дисперсией света называется зависимость показателя преломления n вещества от длины волны света в вакууме λ_0 :

$$n = n(\lambda_0), \quad (26.12)$$

или, что то же самое, зависимость фазовой скорости световых волн от частоты:

$$v = \frac{c}{n(\omega)}. \quad (26.13)$$

Дисперсией вещества называется производная n по λ_0 :

$$D = \frac{dn}{d\lambda_0}. \quad (26.14)$$

Для всех прозрачных бесцветных веществ в видимой части спектра с уменьшением длины волны показатель преломления увеличивается, т.е. дисперсия вещества отрицательна: $D < 0$. Такая дисперсия называется нормальной. Если вещество поглощает часть лучей, то в области поглощения дисперсия $D = dn/d\lambda_0$ обнаруживает аномалию — при некоторых длинах волн она оказывается положительной.

Изучением нормальной дисперсии занимался И. Ньютон. Разложение белого света в спектр при прохождении сквозь призму является следствием дисперсии света. При прохождении пучка белого света через стеклянную призму на экране возникает разноцветный спектр (рис. 26.6). Наибольшую длину волны и наименьший показатель преломления имеет красный свет, поэтому красные лучи отклоняются призмой меньше других. Рядом с ними будут лучи оранжевого, потом желтого, зеленого, голубого, синего и, наконец, фиолетового света. Произошло разложение

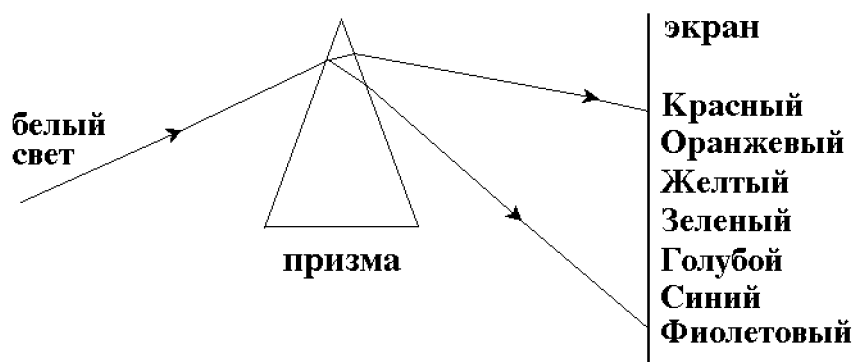


Рис. 26.6: При прохождении белого света через призму вследствие различия значения показателя преломления стекла для разных длин волн пучок разлагается на монохроматические составляющие — на экране возникает спектр.

падающего на призму сложного белого света на монохроматические составляющие.

Ярким примером дисперсии является радуга. Радуга наблюдается,

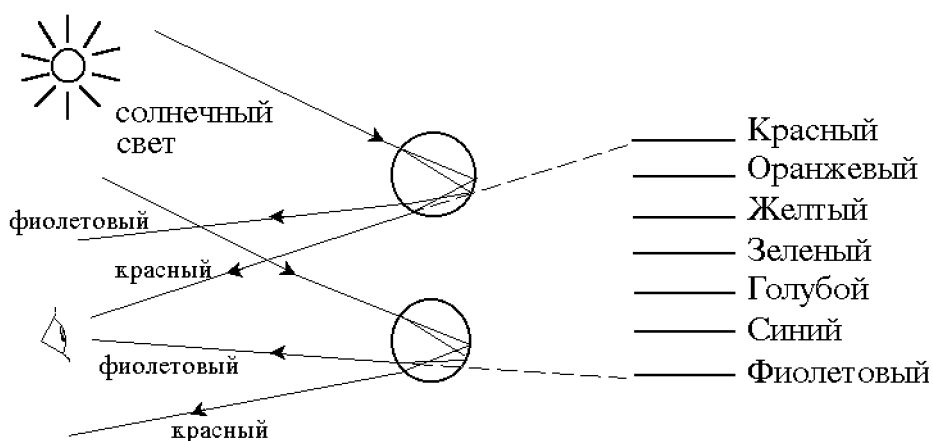


Рис. 26.7: Возникновение радуги.

если солнце находится за спиной наблюдателя. Красные и фиолетовые лучи преломляются сферическими капельками воды и отражаются от их внутренней поверхности. Красные лучи преломляются меньше и попадают в глаз наблюдателя от капелек, находящихся на большей высоте. Поэтому верхняя полоса радуги всегда оказывается красной (рис. 26.7).

Используя законы отражения и преломления света, можно рассчитать ход световых лучей при полном отражении и дисперсии в дождевых каплях. Оказывается, что лучи рассеиваются с наибольшей интенсивностью в направлении, образующем угол около 42° с направлением солнечных

лучей (рис. 26.8). Геометрическое место таких точек представляет собой окружность с центром в точке O . Часть ее скрыта от наблюдателя P под горизонтом, дуга над горизонтом и есть видимая радуга. Возможно также двойное отражение лучей в дождевых каплях, приводящих к радуге второго порядка, яркость которой, естественно, меньше яркости основной радуги. Для нее теория дает угол 51° , т.е. радуга второго порядка лежит вне основной. В ней порядок цветов заменен на обратный: внешняя дуга окрашена в фиолетовый цвет, а нижняя — в красный. Радуги третьего и высших порядков наблюдаются редко.

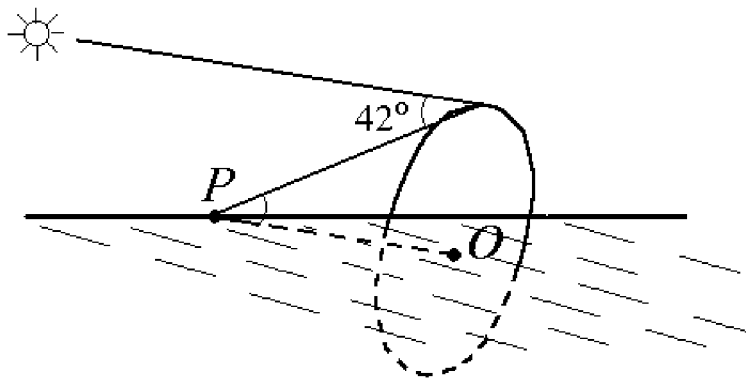


Рис. 26.8: Расположение радуги.

Элементарная теория дисперсии

Зависимость показателя преломления вещества от длины электромагнитной волны объясняется на основе теории вынужденных колебаний. Строго говоря, движение электронов в атоме подчиняется законам квантовой механики. Однако для качественного понимания оптических явлений можно ограничиться представлением об электронах, связанных в атоме упругой силой. При отклонении от равновесного положения такие электроны начинают колебаться, постепенно теряя энергию на излучение электромагнитных волн или передавая свою энергию узлам решетки и нагревая вещество. В результате этого колебания будут затухающими.

При прохождении через вещество электромагнитная волна воздействует на каждый электрон с силой Лоренца:

$$\vec{F} = -e\vec{E} - e[\vec{v}, \vec{B}] = -e\vec{E} - e\mu_0[\vec{v}, \vec{H}], \quad (26.15)$$

где \vec{v} — скорость колеблющегося электрона. В электромагнитной волне

отношение напряженностей магнитного и электрического полей равно

$$\frac{H}{E} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}. \quad (26.16)$$

Поэтому нетрудно оценить отношение электрической и магнитной сил, действующих на электрон:

$$\frac{F_{\text{эл}}}{F_{\text{м}}} = \frac{eE}{e\mu_0 v H} = \frac{1}{v \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{v}. \quad (26.17)$$

Электроны в веществе движутся со скоростями, много меньшими скорости света в вакууме: $v/c < 10^{-2}$. Таким образом, можно считать, что прохождение через вещество электромагнитной волны на каждый электрон действует только электрическая сила:

$$F = -eE_0 \cos(\omega t + \alpha), \quad (26.18)$$

где E_0 — амплитуда напряженности электрического поля в световой волне, α — фаза, определяемая положением рассматриваемого электрона. Для упрощения вычислений пренебрежем затуханием и запишем уравнение движения электрона в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{e}{m} E_0 \cos(\omega t + \alpha), \quad (26.19)$$

где ω_0 — собственная частота колебаний электрона в атоме. Решение такого дифференциального неоднородного уравнения мы уже рассматривали:

$$x(t) = \frac{(-e/m) E_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t + \alpha) = \frac{(-e/m)}{\omega_0^2 - \omega^2} E(t). \quad (26.20)$$

Следовательно, смещение электрона из положения равновесия пропорционально напряженности электрического поля. Смещениями ядер из положения равновесия можно пренебречь, так как массы ядер велики по сравнению с массой электрона.

Атом со смещенным электроном приобретает дипольный момент $p(t) = -ex(t)$. Если в единице объема находится N атомов, которые поляризуются, то дипольный момент единицы объема (поляризация среды) равен $P(t) = Np(t)$, то есть

$$P(t) = E(t) \frac{e^2}{m} \cdot \frac{N}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (26.21)$$

В реальных средах возможны разные типы колебаний различных групп электронов (мы будем обозначать их индексом k). У этих колебаний могут быть разные заряды e_k , массы m_k и собственные частоты ω_{0k} , а число N_k атомов, участвующих в данном типе колебаний, пропорционально полному числу N_0 атомов в единице объема: $N_k = f_k N_0$. Безразмерный коэффициент f_k обычно называют *силой осциллятора*, подчеркивая, что его величина указывает на долю участия данных колебаний в явлении дисперсии. Все эти колебания дают вклад в поляризуемость среды, так что (26.21) заменится на сумму

$$P(t) = E(t) N_0 \sum_k \frac{e_k^2}{m_k} \cdot \frac{f_k}{\omega_{0k}^2 - \omega^2}. \quad (26.22)$$

С другой стороны $\vec{P}(t) = \kappa \varepsilon_0 \vec{E}(t)$, где κ — диэлектрическая восприимчивость вещества, которая связана с диэлектрической проницаемостью ε соотношением $\varepsilon = n^2 = 1 + \kappa$. В результате получаем выражение для квадрата показателя преломления вещества:

$$n^2 = 1 + \frac{N_0}{\varepsilon_0} \sum_k \frac{e_k^2}{m_k} \cdot \frac{f_k}{\omega_{0k}^2 - \omega^2}. \quad (26.23)$$

Вблизи каждой из собственных частот ω_{0k} показатель преломления $n = n(\omega)$ терпит разрыв. Такое поведение обусловлено тем, что мы пренебрегли затуханием. Аналогично, как мы видели выше, пренебрежение затуханием приводит к бесконечному росту амплитуды вынужденных колебаний при резонансе. Учет затухания избавляет нас от бесконечностей, и функция $\varepsilon = n^2$ имеет вид, изображенный на рис. 26.9.

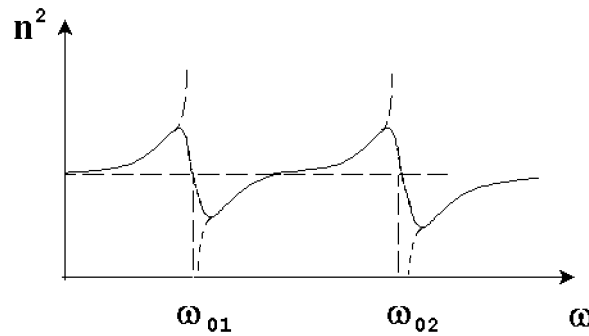


Рис. 26.9: Зависимость диэлектрической проницаемости $\varepsilon = n^2$ от частоты электромагнитной волны.

Учитывая связь частоты ω с длиной электромагнитной волны в вакууме λ_0 ($\lambda_0 = 2\pi c/\omega$ или $\omega = 2\pi c/\lambda_0$), можно получить зависимость показателя преломления вещества n от длины волны:

$$n^2 = 1 + \sum_k \frac{a_k \lambda_0^2}{\lambda_0^2 - \lambda_k^2}, \quad (26.24)$$

где $\lambda_k = 2\pi c/\omega_{0k}$ — длина волны, соответствующая собственной частоте колебаний k -го электрона в веществе, а a_k — постоянные коэффициенты. На рис. 26.10 изображена зависимость $n^2 = n^2(\lambda_0)$ в области одного из резонансов. Участки 1-2 и 3-4 соответствуют нормальной дисперсии. На участке 2-3 дисперсия аномальна: $(dn/d\lambda_0 > 0)$. В области аномальной дисперсии частота внешнего электромагнитного поля равна собственной частоте колебаний электронов среды, т.е. возникает резонанс. Именно, в этой области наблюдается существенное поглощение электромагнитной волны. Коэффициент поглощения света веществом (см. следующий раздел) показан пунктирной линией.

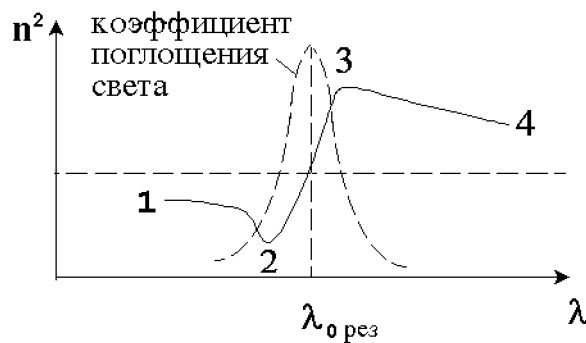


Рис. 26.10: Зависимость показателя преломления (сплошная кривая) и коэффициента поглощения света веществом (пунктирная кривая) от длины волны λ_0 вблизи одного из резонансов.

26.3 Поглощение света

Световая волна несет поток энергии электромагнитного поля. При прохождении света через вещество происходит потеря энергии из-за превращения ее в различные формы внутренней энергии вещества или энергию вторичного излучения, которое может отличаться от первичного спектральным составом и направлением распространения. Поглощение света может приводить к нагреванию вещества или возбуждению атомов и молекул, к фотохимическим процессам и т.п. Свободные электроны в ме-

таллах поглощают всю энергию световой волны, так что металлы практически непрозрачны для света. Тонкие слои металла могут быть, однако, прозрачными для электромагнитного излучения других длин волн.

Если световая волна с интенсивностью в данной точке $I(x)$ проходит через слой толщиной dx , то ее интенсивность уменьшается на величину, пропорциональную толщине слоя:

$$dI = -I(x)\kappa dx, \quad (26.25)$$

где κ — т.н. *коэффициент поглощения*, зависящий от свойств поглощающего вещества. Решаем полученное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dI}{I} = -\kappa dx \quad \Rightarrow \quad \int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\kappa \int_0^l dx. \quad (26.26)$$

В результате получаем:

$$I = I_0 e^{-\kappa l}, \quad (26.27)$$

где I_0 — падающий световой поток, l — толщина поглощающего слоя вещества. Это соотношение называется законом Бугера-Ламберта. Он справедлив для монохроматического света. Соотношение (26.27) можно записать в виде:

$$I = I_0 e^{-l/l_0}, \quad (26.28)$$

где $l_0 = 1/\kappa$. Отсюда вытекает физический смысл κ : коэффициент поглощения обратен толщине слоя вещества, при прохождении которого интенсивность света уменьшается в $e \approx 2.72$ раза. Этот закон носит приближенный характер. В частности, он не учитывает зависимость показателя поглощения от длины волны.

26.4 Рассеяние света

Мы наблюдаем красное Солнце на закате и голубое небо в ясный день. Эти явления можно объяснить рассеянием света на молекулах атмосферы. Переменное электрическое поле световой волны возбуждает в облучаемой молекуле воздуха вынужденные колебания, вследствие чего молекула приобретает изменяющийся во времени электрический дипольный

момент и становится источником собственного излучения, частота которого равна частоте облучающего диполь света. Колеблющиеся электроны возбуждают вторичные волны, распространяющиеся по всем направлениям, а частота рассеянного света равна частоте света в первичном пучке.

В теории излучения на основе уравнений Максвелла показывается, что мощность вторичного излучения пропорциональна квадрату ускорения заряженной частицы. Если электроны под действием световой волны колеблются по закону $x(t) = x_0 \cos(\omega t + \alpha)$, то их ускорение $\ddot{x}(t)$ пропорционально квадрату частоты ω . Соответственно, мощность вторичного излучения пропорциональна четвертой степени частоты. Поэтому и интенсивность рассеянного света пропорциональна частоте в четвертой степени или обратно пропорциональна четвертой степени длины световой волны:

$$I_{\text{расс}} \sim \omega^4 \sim \frac{1}{\lambda_0^4}. \quad (26.29)$$

Это соотношение называется *законом Рэлея*. Следовательно, красный и оранжевый свет рассеиваются гораздо слабее, чем голубой и фиолетовый, и поэтому небо в ясный день выглядит голубым. На закате солнечные лучи проходят максимальный слой атмосферы. Значительная часть голубого излучения рассеивается и не попадает в глаз наблюдателя. Поэтому прошедший луч, достигающий поверхности Земли, лишается голубой и фиолетовой составляющих и поэтому кажется красноватым.

Следует отметить, что закон Рэлея имеет место только в случае, когда рассеивающие объекты оказываются меньше длины световой волны. Это условие выполняется для молекул кислорода и азота, имеющих размеры около 0.2 нм. Но облака содержат капельки воды и кристаллы льда, размеры которых значительно превышают длину волны. Такие частицы рассеивают свет почти равномерно на всех частотах, поэтому облака кажутся белыми.

Контрольные вопросы

1. Что такое линейно поляризованная электромагнитная волна и волна с круговой поляризацией?
2. Чем отличаются естественный свет и поляризованный?
3. Сформулируйте закон Малюса.

4. Что такое закон Брюстера?
5. Что такое дисперсия света?
6. Нарисуйте кривую зависимости показателя преломления вещества от частоты электромагнитной волны и объясните качественно ее ход.
7. Можно ли в полдень 22 июня увидеть радугу в Москве? Широта Москвы — 55.7° , наклон экватора к эклиптике — 23.5° .
8. По какому закону происходит изменение интенсивности светового пучка при прохождении через слой вещества?
9. Сформулируйте закон Рэлея для рассеяния света. Объясните на его основе, почему небо кажется голубым?
10. Какого цвета было бы небо при отсутствии атмосферы?
11. Почему солнце в зените кажется желтым, а на закате — красным? Почему красный цвет выбран на транспорте как сигнал опасности?

Часть V

Основы квантовой механики

Быть может, эти электроны —
Миры, где пять материков,
Искусства, знания, войны, троны
И память сорока веков.
Еще, быть может, каждый атом —
Вселенная, где сто планет;
Там все, что здесь, в объеме сжатом,
Но также то, чего здесь нет. . . .

В. Брюсов. МИР ЭЛЕКТРОНА.
М.: Худ. лит., 1974.

Глава 27

Квантовая природа излучения

Два века борьбы корпускулярной и волновой теорий света завершились победой последней. Уравнения Максвелла стали венцом теоретической физики XIX века. На горизонте науки виднелись лишь два темных пятнышка --- проблемы с тепловым излучением и результат опыта Майкельсона. Казалось, что еще немного, и физики останутся без работы: законы природы представлялись в основном понятыми. К счастью, так не случилось. Из одного пятнышка выросла квантовая теория, из другого --- теория относительности. С теорией относительности мы познакомились в первой части курса. Настало время приоткрыть двери в квантовый мир.

27.1 Тепловое излучение

Тепловое излучение — это электромагнитное излучение, испускаемое нагретым телом. Характеристики теплового излучения зависят от температуры тела, так как оно возникает вследствие хаотического теплового излучения молекул и атомов среды. Все прочие виды электромагнитного излучения существуют за счет других, не тепловых форм энергии. Тепловое излучение — единственный вид излучения, которое может находиться в термодинамическом равновесии с излучающими телами.

Предположим, что нагретое тело помещено в полость с идеально отражающими стенками, которые поддерживаются при некоторой постоянной температуре T . Если в полости нет никакой среды (газа), то обмен энергией между оболочкой и телом происходит только за счет теплового излучения. С течением времени температура тела станет равной температуре оболочки, и наступит динамическое равновесие — в единицу времени тело будет поглощать столько же энергии, сколько и излучать. До-

пустим, что равновесие между телом и излучением нарушено и тело излучает энергии больше, чем поглощает. Тогда внутренняя энергия тела начнет убывать, что приведет к уменьшению излучаемой телом энергии. Температура тела будет понижаться до тех пор, пока количество излучаемой телом энергии не станет равным количеству поглощаемой энергии. Если равновесие нарушится в другую сторону, т.е. тело излучает меньше энергии, чем поглощает, то температура тела будет возрастать до тех пор, пока снова не установится равновесие. Таким образом, нарушение равновесия между телом и тепловым излучением вызывает процессы, направленные в сторону восстановления равновесия. Все другие виды излучения неравновесны.

Представим теперь то же самое тело, помещенное внутри другой оболочки, отличающейся размерами, формой или материалом, из которого она сделана. Будем поддерживать ту же самую температуру оболочки. В системе пойдут аналогичные процессы установления равновесия, в результате которых тело внутри оболочки нагреется до той же самой температуры T . Для тела внутри оболочки ничего не изменилось: оно находится при той же самой температуре, что и прежде, и, следовательно, будет излучать ту же самую энергию. Так как тело находится в равновесии с излучением внутри оболочки, мы приходим к выводу, что характеристики этого излучения не зависят от свойств оболочки, но лишь от ее температуры. Это “стандартное” излучение называется *излучением черного тела*. Его можно охарактеризовать плотностью энергии $u(T)$ — количеством энергии излучения, приходящемся на единицу объема.

Тепловое излучение состоит из электромагнитных волн разных частот. Полная плотность энергии складывается из плотностей энергий этих волн. Для более детальной характеристики излучения вводят дифференциальную величину — т.н. *спектральную плотность излучения* $u(\omega, T)$. По определению $u(\omega, T)$ — это энергия излучения в единице объема, приходящаяся на единичный интервал частот. Иными словами, если обозначить через du_ω энергию излучения в единице объема, приходящуюся на волны с частотами от ω до $\omega + d\omega$, то $du_\omega = u(\omega, T) d\omega$. В СИ спектральная плотность энергии измеряется в Дж · с/м³. Плотность энергии $u(T)$ есть сумма спектральных плотностей энергии по всем возможным частотам: $u(T) = \int_0^\infty u(\omega, T) d\omega$.

Итак, в полости существует стандартное излучение с плотностью энергии $u(T)$. Рассмотрим теперь тело, находящееся с ним в равновесии.

Энергия, испускаемая в единицу времени единицей поверхности излучающего тела по всем направлениям, называется *энергетической светимостью* R . В СИ единицей энергетической светимости является Вт/м². Энергетическая светимость зависит от температуры тела. Тепловое излучение состоит из волн различных частот. Для характеристики теплового излучения важно также знать, в каком диапазоне частот излучается энергия. Поэтому вводят дифференциальную характеристику $r_\omega = r(\omega, T)$, называемую *испускательной способностью* тела. По определению r_ω — это количество энергии, испускаемое телом в единицу времени единицей поверхности в единичном интервале частот. Чтобы получить энергетическую светимость тела, надо проинтегрировать испускательную способность по всем частотам: $R = \int_0^\infty r_\omega d\omega$. В СИ единицей испускательной способности является Дж/м².

Нагретое тело не только испускает энергию, но и поглощает ее. Энергия, излучаемая всей поверхностью тела в единицу времени называется *потоксом излучения* Φ .

Поглощательная способность тела a_ω характеризуется отношением потока излучения, поглощенного телом в некотором малом интервале частот, к потоку падающего на тело излучения в том же интервале частот. Это — безразмерная величина, не превышающая единицы. Тело, способное поглощать при любой температуре все падающие на него излучения всех частот, называется *абсолютно черным*, для него $a_\omega \equiv 1$. Абсолютно черных тел в природе не бывает, это — очередная физическая абстракция.

Будем поочередно помещать в нашу полость различные тела. Все они находятся в одинаковых условиях, в окружении того же самого излучения. Обозначим $f(\omega, T)$ энергию, падающую в единицу времени на единицу поверхности тела в единичном интервале частот. Тело поглотит долю энергии $a_\omega f(\omega, T)$. В состоянии равновесия эта энергия должна быть равна испущенной телом энергии:

$$r_\omega = a_\omega f(\omega, T). \quad (27.1)$$

Различные тела в полости имеют разную поглощательную способность, следовательно, у них будет и разная испускательная способность, так что отношение r_ω/a_ω не зависит от конкретного тела, помещенного в полость:

$$\frac{r_\omega}{a_\omega} = f(\omega, T). \quad (27.2)$$

С другой стороны, испускательная способность тела не зависит от полости, в которую оно помещено, но лишь от свойств тела. Таким образом, функция $f(\omega, T)$ есть универсальная функция частоты и температуры, не зависящая ни от полости, ни от тела в ней. Соотношение (27.2) называется *законом Кирхгофа*. Для абсолютно черного тела $a_\omega = 1$, откуда следует физическая интерпретация универсальной функции $f(\omega, T)$ в законе Кирхгофа: она представляет собой испускательную способность абсолютно черного тела.

Установим теперь связь между испускательной способностью черного тела $f(\omega, T)$ и спектральной плотностью $u(\omega, T)$ “стандартного” излучения в полости (выше мы называли его излучением черного тела). Сравнивая размерности этих величин, видим, что отношение f/u имеет размерность скорости. Единственная величина размерности скорости, которая ассоциируется с электромагнитными волнами — это скорость света. Поэтому искомое соотношение должно иметь вид: $f(\omega, T) \sim c u(\omega, T)$. Найдем коэффициент пропорциональности в этой формуле. В качестве модели черного тела возьмем замкнутую полость с небольшим отверстием s (рис. 27.1). Луч света, падающий внутрь этой полости через отверстие s , претерпевает многократное отражение. При каждом отражении стенки полости поглощают часть энергии. Поэтому интенсивность луча света, выходящего из отверстия во много раз меньше интенсивности входящего луча. Чем больше отношение площади полости к площади отверстия, тем ближе такое тело к абсолютно черному. Поэтому отверстие в полости излучает как абстрактное черное тело.

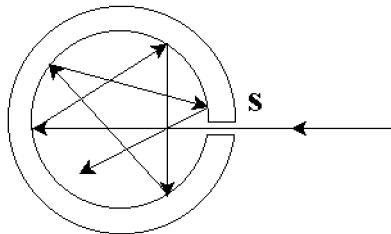


Рис. 27.1: Полость с небольшим отверстием представляет собой реализацию черного тела.

С другой стороны, внутри полости существует равновесное тепловое излучение со спектральной плотностью u . Подсчитаем энергию dW_θ , выходящую из отверстия площадью s в направлении, заданном углом

θ . Во-первых, в данном направлении за время Δt может выйти только энергия, содержащаяся в наклонном цилиндре с площадью основания s и длиной образующей $c\Delta t$ (рис. 27.2,a). Объем такого цилиндра равен $dV = c\Delta t s \cos \theta$. Содержащаяся в нем энергия теплового излучения равна $dW = u(T) dV = cu(T)\Delta t s \cos \theta$. Но не вся она распространяется под углом θ . Тепловое излучение распространяется по всем направлениям с равной вероятностью (рис. 27.2,b). Поэтому в телесный угол $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ попадет только часть энергии (мы обозначим эту долю как dW_θ), пропорциональная величине $d\Omega$. Так как полный телесный угол равен 4π , имеем:

$$dW_\theta = dW \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{cu(T)}{2} \Delta t s \sin \theta \cos \theta d\theta. \quad (27.3)$$

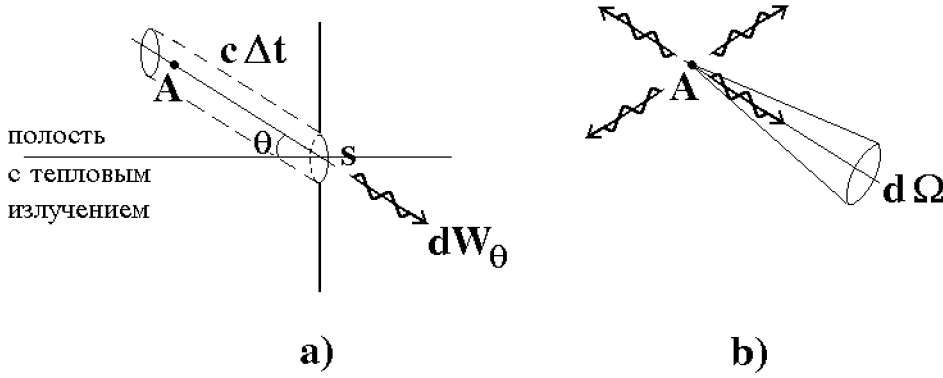


Рис. 27.2: Тепловое излучение из отверстия в полости.

Теперь осталось проинтегрировать по углам θ , чтобы получить полную энергию ΔW , выходящую из отверстия полости. Обращаем внимание: излучение падает на отверстие только из левого полупространства, так что угол θ может меняться в пределах от нуля до $\pi/2$:

$$\begin{aligned} \Delta W &= \frac{cu(T)}{2} \Delta t s \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{cu(T)}{2} \Delta t s \left. \frac{\sin^2 \theta}{2} \right|_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{cu(T)}{4} \Delta t s. \end{aligned} \quad (27.4)$$

Разделив ΔW на время Δt и площадь отверстия s , получим энергетическую светимость черного тела:

$$R^* = \frac{c}{4} u(T). \quad (27.5)$$

Здесь звездочка обозначает, что данная энергетическая светимость относится к черному телу. Аналогичное соотношение выполняется для дифференциальных характеристик излучения черного тела:

$$r_{\omega}^* = f(\omega, T) = \frac{c}{4} u(\omega, T). \quad (27.6)$$

Таким образом, универсальная функция в законе Кирхгофа, представляющая собой испускательную способность черного тела, с точностью до множителя $c/4$ совпадает также со спектральной плотностью равновесного теплового излучения.

До сих пор мы относили дифференциальные характеристики теплового излучения к единичному интервалу частоты. Можно определить аналогичные характеристики, отнесенные к единичному интервалу длин волн. Так, черное тело испускает в интервале частот $d\omega$ энергию $r_{\omega}d\omega$. Эту же энергию можно записать как $r_{\lambda}d\lambda$. Интервалу частот $d\omega$ соответствует интервал длин волн $d\lambda$. Учитывая соотношения $\omega = 2\pi c/\lambda$, находим:

$$d\omega = -\frac{2\pi c}{\lambda^2}d\lambda, \quad (27.7)$$

где знак минус указывает на то, что с возрастанием частоты ω длина волны λ убывает. Поэтому в дальнейшем знак минус будем опускать. Таким образом

$$r_{\omega}d\omega = r_{\omega} \frac{2\pi c}{\lambda^2}d\lambda = r_{\lambda}d\lambda, \quad (27.8)$$

или

$$r_{\lambda} = r_{\omega} \frac{2\pi c}{\lambda^2} = r_{\omega} \frac{\omega^2}{2\pi c}. \quad (27.9)$$

Аналогичным образом можно записать выражения для спектральной плотности энергии.

27.2 Законы излучения абсолютно черного тела

Изучение распределения энергии в спектре теплового излучения абсолютно черного тела при различных температурах привело к экспериментальному установлению следующих закономерностей:

- спектр излучения абсолютно черного тела является сплошным, т.е. в спектре представлен непрерывный ряд различных длин волн;

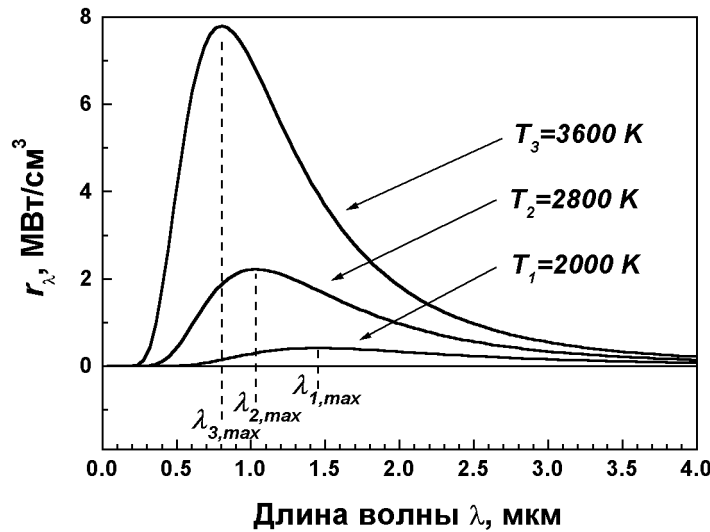


Рис. 27.3: Испускательная способность r_λ черного тела при разных температурах.

- распределение энергии в спектре излучения зависит от длины волны. С увеличением длины волны спектральная плотность энергетической светимости r_λ увеличивается, достигает отчетливо выраженного максимума при некоторой длине волны λ_{max} , а затем уменьшается;
- с повышением температуры максимум излучения смещается в сторону более коротких волн (рис. 27.3).

Если нагревать твердое тело, то оно вначале краснеет, а с повышением температуры свечение тела становится все более белым. Это свидетельствует о том, что максимум интенсивности теплового излучения по мере повышения температуры тела смещается к фиолетовому концу спектра, т.е. к его коротковолновой части. Длина волны λ_m в спектре излучения абсолютно черного тела, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, определяется *законом смещения Вина*:

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T}, \quad (27.10)$$

где постоянная Вина $b = 2.90 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$.

Австрийский физик Й. Стефан, анализирувавший экспериментальные данные, и Л. Больцман, исходящий из общих термодинамических соображений, установили зависимость энергетической светимости черного

тела от температуры. Согласно закону Стефана-Больцмана,

$$R^* = \int_0^{\infty} r_{\omega} d\omega = \sigma T^4, \quad (27.11)$$

т.е. энергетическая светимость абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени его термодинамической температуры. Коэффициент пропорциональности — т.н. *постоянная Стефана-Больцмана* $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-4}$.

27.3 Классические результаты для теплового излучения

Несмотря на детальное изучение характеристик теплового излучения, вид функции $f(\omega, T)$ [или $u(\omega, T)$] долгое время оставался для физиков загадкой.

Попытка строгого теоретического вывода зависимости $f(\omega, T)$ принадлежит английским ученым Дж. Рэлею и Дж. Джинсу. Воспроизведем их аргументы. Пусть полость представляет собой прямоугольный ящик с линейными размерами L_x, L_y, L_z вдоль соответствующей координатной оси. Рассмотрим стоячие электромагнитные волны вдоль оси x . Эти колебания эквивалентны колебаниям на струне. Их длины волн (частоты) должны удовлетворять соотношению: $L_x = n\lambda/2$, откуда для проекции волнового вектора находим $k_x = \pi n/L_x$. Число n нумерует разные типы волн, существующие на струне длины L_x . Поэтому число типов стоячих волн с проекциями волнового вектора в интервале от k_x до $k_x + dk_x$ равно:

$$dn_x = dk_x \frac{L_x}{2\pi}. \quad (27.12)$$

Мы уменьшили результат в два раза, потому что стоячие волны с волновыми числами k_x и $-k_x$ — это одно и то же колебание (направления распространения для стоячих волн не существует).

Аналогичные формулы можно записать для стоячих электромагнитных волн вдоль осей y и z :

$$dn_y = dk_y \frac{L_y}{2\pi}, \quad dn_z = dk_z \frac{L_z}{2\pi}, \quad (27.13)$$

Перемножая эти уравнения, находим полное число типов колебаний в прямоугольной полости, волновые векторы которых лежат в интервале

от \vec{k} до $\vec{k} + d\vec{k}$:

$$dN = 2 dn_x dn_y dn_z = 2 dk_x dk_y dk_z \frac{L_x L_y L_z}{(2\pi)^3}. \quad (27.14)$$

Здесь мы увеличили результат в два раза, чтобы учесть поперечность электромагнитных волн: при данной длине волны колебания могут осуществляться в двух взаимно ортогональных направлениях.

Используя сферические координаты, можем записать:

$$dk_x dk_y dk_z = 4\pi k^2 dk. \quad (27.15)$$

Учитывая $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$, получаем отсюда:

$$dk_x dk_y dk_z = \frac{4\pi}{c^3} \omega^2 d\omega = \frac{32\pi^4}{\lambda^4} d\lambda. \quad (27.16)$$

Произведение $V = L_x L_y L_z$ есть объем полости. Находим тогда для числа типов колебаний, приходящихся на единичный объем:

$$\frac{dN}{V} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega = \frac{8\pi}{\lambda^4} d\lambda. \quad (27.17)$$

Далее Рэлей и Джинс применили классическую теорему о равномерном распределении энергии по степеням свободы: на каждую степень свободы в классической статистической системе приходится энергия $k_B T/2$ (здесь k_B — постоянная Больцмана). У гармонического осциллятора средняя кинетическая энергия равна средней потенциальной, и поэтому его средняя энергия равна $k_B T$. В электромагнитной волне колеблются векторы напряженностей электрического и магнитного поля, которые дают одинаковый вклад в средний поток энергии. Поэтому для спектральной плотности энергии излучения Рэлей и Джинс нашли выражение:

$$\begin{aligned} u(\omega, T) &= k_B T \frac{dN}{V d\omega} = k_B T \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}, \\ u(\lambda, T) &= k_B T \frac{dN}{V d\lambda} = k_B T \frac{8\pi}{\lambda^4}. \end{aligned} \quad (27.18)$$

Соответственно, для испускательной способности черного тела получаются выражения:

$$\begin{aligned} r_\omega &= \frac{c}{4} u(\omega, T) = k_B T \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2}, \\ r_\lambda &= \frac{c}{4} u(\lambda, T) = k_B T \frac{2\pi c}{\lambda^4}. \end{aligned} \quad (27.19)$$

Для длинных волн формула Рэля-Джинса дает хорошее совпадение с экспериментальными данными, но при коротких длинах волн, т.е. в области больших частот, расчетные значения спектральной плотности r_ω перестают совпадать с экспериментом (кривая уходит на бесконечность). Кроме того, энергетическая светимость черного тела также получается бесконечной:

$$R^* \stackrel{?}{=} \int_0^\infty r_\omega d\omega = \frac{kT}{4\pi^2 c^2} \int_0^\infty \omega^2 d\omega \rightarrow \infty. \quad (27.20)$$

Создавшееся положение было названо “ультрафиолетовой катастрофой”. Таким образом, классическая физика оказалась не в состоянии объяснить важные экспериментальные данные.

27.4 Закон излучения Планка

М. Планк указал выход из создавшегося положения, выдвинув гипотезу, что электромагнитная энергия испускается и поглощается не непрерывно, а отдельными порциями (квантами) $\varepsilon = \hbar\omega$. Коэффициент пропорциональности в соотношении между энергией ε и частотой света ω имеет в СИ размерность Дж · с и называется теперь *постоянной Планка* \hbar (впоследствии установили ее численное значение: $\hbar \approx 1.055 \cdot 10^{-34}$ Дж · с). В соответствии с этим приходится принять, что энергия любой колебательной системы, излучающей электромагнитные волны, может принимать лишь дискретный набор значений $\varepsilon_n = n\hbar\omega$, кратных собственной частоте колебаний.

Исходя из гипотезы о квантовании энергии колебаний, Планк получил аналитическое выражение для испускательной способности черного тела. Для излучения в состоянии равновесия по-прежнему применяется распределение Больцмана. Вероятность P_n того, что энергия колебания с частотой ω равна $\varepsilon_n = n\hbar\omega$, определяется формулой:

$$P_n = C e^{-n\hbar\omega/k_B T}. \quad (27.21)$$

Сумма всех вероятностей равна единице, откуда мы находим нормировочный коэффициент C :

$$C = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\hbar\omega/k_B T)}. \quad (27.22)$$

Средняя энергия колебания с частотой ω равна:

$$\langle \varepsilon \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n P_n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n \hbar \omega \exp(-n \hbar \omega / k_B T)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n \hbar \omega / k_B T)}. \quad (27.23)$$

Метод расчета таких сумм основан на выражении для геометрической прогрессии и формулы, получаемой из нее дифференцированием:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} q^n &= \frac{1}{1-q}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} n q^n &= \frac{q}{(1-q)^2}, \\ \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n q^n}{\sum_{n=0}^{\infty} q^n} &= \frac{q}{1-q} = \frac{1}{1/q - 1}. \end{aligned} \quad (27.24)$$

Подставляя сюда $q = \exp(-\hbar \omega / k_B T)$, находим выражение для средней энергии колебания:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\hbar \omega}{\exp(\hbar \omega / k_B T) - 1}. \quad (27.25)$$

При высоких температурах (малых частотах $\hbar \omega \ll k_B T$), экспоненту в знаменателе можно разложить:

$$e^{\hbar \omega / k_B T} \approx 1 + \frac{\hbar \omega}{k_B T},$$

откуда получаем классическое выражение:

$$\langle \varepsilon \rangle \approx k_B T.$$

Умножая теперь число колебаний в единице объема на среднюю энергию колебания, получаем формулу Планка для спектральной плотности энергии теплового излучения:

$$u(\omega, T) = \langle \varepsilon \rangle \frac{dN}{V d\omega} = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{\exp(\hbar \omega / k_B T) - 1}. \quad (27.26)$$

При малых частотах (больших длинах волн) отсюда следует формула Рэлея-Джинса. Для испускательной способности находим теперь выражение:

$$r_\omega = \frac{c}{4} u(\omega, T) = \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^2 c^2} \cdot \frac{1}{\exp(\hbar \omega / k_B T) - 1}. \quad (27.27)$$

Для спектральной плотности и испускательной способности в единичном интервале длин волн имеем:

$$\begin{aligned} u(\lambda, T) &= \langle \varepsilon \rangle \frac{dN}{V d\lambda} = \frac{16\pi^2 \hbar c}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp(2\pi \hbar c / \lambda k_B T) - 1}, \\ r_\lambda &= \frac{c}{4} u(\lambda, T) = \frac{4\pi^2 \hbar c^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp(2\pi \hbar c / \lambda k_B T) - 1}. \end{aligned} \quad (27.28)$$

Напомним: здесь c — скорость света в вакууме, \hbar — постоянная Планка, λ — длина волны, ω — круговая частота, k_B — постоянная Больцмана.

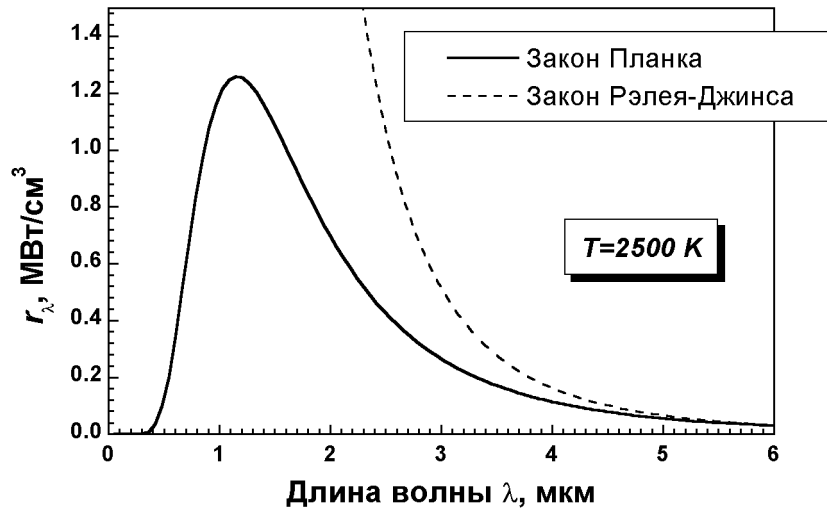


Рис. 27.4: Сравнение испускательной способности r_λ черного тела при $T = 2500$ К согласно закону Планка и эксперименту (сплошная линия) и закону Рэлея-Джинса (пунктирная линия).

Оказалось, что формула Планка точно согласуется с экспериментальными данными во всем интервале длин волн, в то время как закон Рэлея-Джинса, как уже говорилось, соответствует данным опыта только при больших длинах волн (рис. 27.4). Более того, из закона Планка непосредственно получается закон Стефана-Больцмана:

$$R^* = \int_0^\infty r_\omega d\omega = \frac{\hbar}{4\pi^2 c^2} \int_0^\infty \frac{\omega^3 d\omega}{\exp(\hbar \omega / k_B T) - 1}. \quad (27.29)$$

Введем безразмерную переменную интегрирования $x = \hbar\omega/k_B T$: $d\omega = dx k_B T/\hbar$. В результате этого получаем:

$$R^* = T^4 \frac{k_B^4}{4\pi^2 c^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \sigma T^4. \quad (27.30)$$

Используя выражение для интеграла

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15},$$

находим аналитическое выражение для постоянной Стефана-Больцмана:

$$\sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60 c^2 \hbar^3} = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}. \quad (27.31)$$

Численное ее значение согласуется с приведенными экспериментальными данными.

Из формулы Планка следует также закон смещения Вина. Если продифференцировать формулу Планка (27.28) для r_λ по λ и приравнять к нулю производную, то можно найти положение максимума. Действительно,

$$\frac{dr_\lambda}{d\lambda} = \frac{4\pi^2 c^2 \hbar}{\lambda^6 \left(e^{\frac{2\pi\hbar c}{k_B T}} - 1 \right)} \left(\frac{\frac{2\pi\hbar c}{k_B T \lambda} e^{\frac{2\pi\hbar c}{k_B T \lambda}}}{e^{\frac{2\pi\hbar c}{k_B T \lambda}} - 1} - 5 \right). \quad (27.32)$$

Введя безразмерную переменную $y = 2\pi\hbar c/k_B T \lambda$ и приравняв нулю производную $dr_\lambda/d\lambda$, получим уравнение:

$$5 - y = 5e^{-y}. \quad (27.33)$$

Корень этого уравнения $y_{\max} = 4.965$ позволяет получить закон смещения Вина:

$$b = T\lambda_{\max} = \frac{2\pi\hbar c}{4.965 k_B} = 2.898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}. \quad (27.34)$$

Таким образом, формула Планка не только хорошо согласуется с экспериментальными данными, но и содержит в себе все частные законы теплового излучения, а также позволяет вычислить постоянные в экспериментальных законах теплового излучения.

Мы искали максимум распределения r_λ по длинам волн. Но излучение черного тела можно характеризовать также и распределением r_ω по частотам. Найдем для сравнения максимум этого распределения. Для этого надо продифференцировать (27.27):

$$\frac{dr_\omega}{d\omega} = \frac{\hbar\omega^2}{4\pi c^2 \left(e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1\right)} \left(3 - \frac{\hbar\omega}{k_B T} \frac{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}}}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}\right). \quad (27.35)$$

Вводя безразмерную переменную $z = \hbar\omega/k_B T$, получаем уравнение для точки максимума распределения r_ω :

$$3 - z = 3e^{-z}, \quad (27.36)$$

которое имеет корень $z_{\max} = 2.821$. Отсюда следует, что максимум интенсивности r_ω приходится на частоту

$$\omega_{\max} = 2.821 \frac{k_B T}{\hbar}. \quad (27.37)$$

Этой частоте соответствует длина волны

$$\lambda(\omega_{\max}) = \frac{2\pi c}{\omega_{\max}} = \frac{2\pi \hbar c}{2.821 k_B T}, \quad (27.38)$$

что не совпадает, естественно, с выражением для λ_{\max} . Из (27.34) и (27.38) следует:

$$\frac{\lambda(\omega_{\max})}{\lambda_{\max}} = \frac{4.965}{2.821} = 1.760. \quad (27.39)$$

Задача 27.10. Принимая, что Солнце излучает как черное тело, вычислить его энергетическую светимость и температуру поверхности. Солнечный диск виден с Земли под углом $\theta = 32' = 9.3 \cdot 10^{-3}$ рад. Поток солнечной энергии на земной орбите (т.н. солнечная постоянная) равен $C = 1.4$ кВт/м².

Решение. Пусть радиус Солнца равен r_\odot , а расстояние до Земли есть l_\oplus . Их отношение связано с угловым диаметром Солнца:

$$\frac{r_\odot}{l_\oplus} = \sin \frac{\theta}{2} \approx \frac{\theta}{2}. \quad (27.40)$$

Если энергетическая светимость Солнца есть R_{\odot} , то полная энергия, излучаемая Солнцем в единицу времени, равна произведению R_{\odot} на площадь поверхности Солнца:

$$W = R_{\odot} \cdot 4\pi r_{\odot}^2. \quad (27.41)$$

Эта энергия достигает орбиты Земли, где она распределяется по большей площади $4\pi l_{\oplus}^2$. Отсюда находим солнечную постоянную:

$$C = \frac{W}{4\pi l_{\oplus}^2} = R_{\odot} \cdot \frac{r_{\odot}^2}{l_{\oplus}^2} \approx R_{\odot} \frac{\theta^2}{4}. \quad (27.42)$$

В итоге получаем:

$$R_{\odot} = \frac{4C}{\theta^2} = \frac{4 \times 1.4 \cdot 10^3}{(9.3 \cdot 10^{-3})^2} = 64.7 \text{ МВт/м}^2. \quad (27.43)$$

По формуле Стефана-Больцмана находим температуру верхних слоев Солнца:

$$T_{\odot} = \left(\frac{R_{\odot}}{\sigma} \right)^{1/4} = \left(\frac{64.7 \cdot 10^6}{5.67 \cdot 10^{-8}} \right)^{1/4} \approx 5800 \text{ К.} \quad (27.44)$$

■

Задача 27.11. В пророчестве Исайи (Ис. 30, 26) сказано:

“И свет луны будет, как свет солнца, а свет солнца будет светлее всемерно, как свет семи дней, в тот день, когда Господь обвяжет рану народа Своего и исцелит нанесенные ему язвы.”

Оценить температуру окружающей среды в этот день.

Решение. Поток солнечного излучения, падающий на Землю, компенсируется энергией, излучаемой Землей. Из условия задачи следует, что в указанный день поток энергии в восемь раз превысит нынешний поток солнечного излучения. В состоянии теплового равновесия во столько же раз должен увеличиться поток тепловой энергии с Земли. Из закона Стефана-Больцмана следует, что температура на Земле должна возрасти в $8^{1/4} \approx 1.68$ раз. Если нынешняя средняя температура составляет $17^{\circ}\text{C} = 290 \text{ К}$, то при увеличении потока энергии в 8 раз она составит $T = 1.68 \times 290 = 487 \text{ К} = 214^{\circ}\text{C}$. Жарко будет! ■

Задача 27.12. Исходя из данных задачи 27.10. найти длину волны, на которую приходится максимум энергии солнечного излучения.

Решение. Выше была найдена температура верхних слоев Солнца. По закону смещения Вина получаем:

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T} = \frac{2.90 \cdot 10^{-3}}{5800} = 500 \text{ нм.} \quad \blacksquare$$

Задача 27.13. Были приведены численные решения уравнений (27.33) и (27.36), полученные на компьютере. Найти их приближенные решения.

Решение. Уравнения, о которых идет речь, можно записать в виде

$$N - z = Ne^{-z}. \quad (27.45)$$

Если бы правая часть равнялась нулю, корнем (27.45) было бы значение $z = N$. При данном корне правая часть на самом деле отлична от нуля и равна Ne^{-N} . Если эта величина мала, то действительно $z \approx N$. В нашем случае это действительно так: $3e^{-3} = 0.149$ и $5e^{-5} = 0.034$. Поэтому будем искать решение в виде $z = N - \varepsilon$, где ε — малое число. Подставляя это представление в (27.45), приходим к уравнению для ε :

$$\varepsilon = Ne^{-N}e^{\varepsilon}. \quad (27.46)$$

Поскольку ε мало, можно разложить экспоненту в правой части (27.46): $e^{\varepsilon} \approx 1 + \varepsilon$. Тогда уравнение (27.46) примет вид

$$\varepsilon \approx Ne^{-N}(1 + \varepsilon), \quad (27.47)$$

и его решение очевидно:

$$\varepsilon \approx \frac{Ne^{-N}}{1 - Ne^{-N}} \approx Ne^{-N} + (Ne^{-N})^2. \quad (27.48)$$

Мы отбросили при этом члены порядка $(Ne^{-N})^3$. Возвращаясь к переменной z , получаем:

$$z \approx N - Ne^{-N} - (Ne^{-N})^2, \quad (27.49)$$

причем погрешность этого решения имеет порядок отброшенных при его получении членов. При $N = 3$ уравнение (27.49) дает $z \approx 2.828$ с погрешностью $(3e^{-3})^3 = 0.003$, т.е. в третьем десятичном знаке; при $N = 5$ получаем $z \approx 4.96518$ с погрешностью в пятом знаке, т.к. $(5e^{-5})^3 = 4 \cdot 10^{-5}$.
 \blacksquare

Контрольные вопросы

1. Что такое тепловое излучение?
2. Что такое черное тело?
3. Дайте определение спектральной плотности излучения $u(\omega, T)$. Какова размерность этой характеристики?
4. Дайте определение испускательной способности r_ω тела. Какова размерность этой характеристики?
5. Дайте определение испускательной способности r_λ тела. Какова размерность этой характеристики? Объясните разницу с r_ω .
6. Перечислите найденные на опыте законы излучения черного тела.
7. Сформулируйте закон смещения Вина и закон Стефана-Больцмана.
8. Закон Рэлея-Джинса. Объясните трудности, возникшие при объяснении законов теплового излучения в рамках классической теории.
9. Гипотеза Планка о квантовании энергии излучения. Постоянная Планка.
10. Закон Планка для спектральной плотности излучения и испускательной способности черного тела.
11. Если заглянуть в отверстие полости, стенки которой поддерживаются при определенной температуре, никакие внутренние детали (шероховатости стенок, их конфигурация и т.п.) не будут различимы. Почему?

Глава 28

ФОТОНЫ

В физике всегда так бывает: скажешь ‘‘А’’ в одном месте --- приходится говорить ‘‘Б’’ в другом, даже если не очень хочется. Планк сделал свое сообщение 14 декабря 1900 года, так что XX век начался с рождения теории квантов. Основная идея Планка: всякий резонатор, излучающий волны с частотой ω , может испускать лучистую энергию лишь порциями, кратными минимальному ‘‘кванту энергии’’ $\hbar\omega$. Но физики и предположить тогда не могли, что успешное разрешение проблем с тепловым излучением приведет к ломке многих казавшихся незыблемыми представлений. И первой ‘‘пострадала’’ электродинамика Фарадея–Максвелла, эта ‘‘священная корова’’ классической физики, ее наивысшее достижение.

28.1 Кванты света

Благодаря Планку в физику вошла новая фундаментальная константа — \hbar . Часто встречается также величина $h = 2\pi\hbar$, фигурирующая в формуле для энергии кванта, когда используется не циклическая частота ω , а частота $\nu = \omega/(2\pi)$: $\varepsilon = h\nu = \hbar\omega$. Современные численные значения постоянных h и \hbar приведены ниже:

$$h = 6.626\,075\,5 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}, \quad \hbar = 1.054\,572\,66 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}. \quad (28.1)$$

Постоянная Планка имеет размерность момента количества движения L . В обычной жизни встречаются гораздо большие значения L . Приведем пример медленного вращения легкого тела:

$$\begin{aligned} m &= 1 \text{ г}, \quad \omega = 0.01 \text{ с}^{-1}, \quad R = 1 \text{ мм} \implies \\ L &\approx m\omega R = 10^{-8} \text{ Дж} \cdot \text{с} \gg \hbar. \end{aligned}$$

Пример показывает, почему в обычной жизни не наблюдается квантовая дискретность: по той же причине, по какой лестница с чрезвычайно низкими ступеньками будет восприниматься как гладкий спуск. Отсюда — способ формального перехода от квантовых результатов к классическим: надо во всех ответах устремить h к нулю. При этом восстановится классическая непрерывность. Этот чисто математический прием с физической точки зрения означает, что квантовые эффекты важны для процессов, в которых h не может считаться малой величиной.

Планк назвал h элементарным квантом действия. Он не питал иллюзий насчет встающих проблем. Ведь со времен Ньютона и Лейбница, открывших дифференциальное исчисление, вся физика основывалась на непрерывности причинных соотношений. Планк отмечал поэтому, что константа h

“либо фиктивная величина, и тогда весь вывод закона излучения представлял собой всего лишь пустую игру в формулы, либо же h означает собой нечто совершенно новое и неслыханное, что должно произвести переворот в нашем физическом мышлении.”

В 1905 г. А. Эйнштейн еще больше разошелся с классической физикой, предположив, что энергия не только испускается порциями, но и далее продолжает существовать в виде индивидуальных квантов (позднее, в 1926 г., их удачно назвали *фотонами*):

“Мы должны предположить, что однородный свет состоит из зерен энергии световых квантов (*Lichtquanten*), т.е. небольших порций энергии, несущихся в пустом пространстве со скоростью света.”

По Эйнштейну, энергия и импульс световых квантов связаны с соответствующими волновыми характеристиками соотношениями:

$$E = h\nu = \hbar\omega, \quad p = \hbar k = \frac{h}{\lambda}. \quad (28.2)$$

Полезно представить себе классические источники этих формул. В теории относительности, как известно, меняется соотношение между энергией частицы и ее импульсом: вместо хорошо знакомой формулы $E = p^2/2m$ имеем

$$E = c\sqrt{m^2c^2 + p^2}. \quad (28.3)$$

Здесь c — скорость света ($c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с), т.е. скорость любых фотонов. С такой предельной скоростью могут двигаться лишь частицы нулевой массы. Полагая в (28.3) $m = 0$, получаем для фотонов связь между энергией и импульсом:

$$E = pc. \quad (28.4)$$

Если теперь применить к (28.4) соотношение Планка $E = h\nu$, то получим для импульса фотона

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda},$$

поскольку $\lambda = c/\nu$. На основе формул (28.2) были объяснены законы фотоэффекта (см. следующий раздел).

И все-таки новые представления были весьма непривычными. Ситуация обсуждалась в 1911 г. на конгрессе с участием всех крупнейших физиков мира. Планк говорил:

“Когда думаешь о полном опытном подтверждении, которое получила электродинамика Максвелла при исследовании даже самых сложных явлений интерференции, когда думаешь о необычайных трудностях, с которыми придется столкнуться всем теориям при объяснении электрических и магнитных явлений, если они откажутся от этой электродинамики, инстинктивно испытываешь неприязнь к попыткам поколебать ее фундамент. По этой причине мы и далее оставим в стороне гипотезу “световых квантов”, тем более, что эта гипотеза находится еще в зародышевом состоянии. Будем считать, что все явления, происходящие в пустоте, в точности соответствуют уравнениям Максвелла и не имеют никакого отношения к константе h .”

Итог дискуссии выразил А. Зоммерфельд:

“Я думаю, что гипотезу квантов испускания, как и начальную гипотезу квантов энергии, нужно рассматривать скорее как форму объяснения, а не как физическую реальность.”

Итак, к 1911 г. гипотеза квантов вызывала инстинктивное ее неприятие. Но вопрос был решен экспериментаторами.

28.2 Фотоэлектрический эффект

Одним из явлений, подтверждающих гипотезу фотонов, является фотоэлектрический эффект. Явление вырывания электронов из поверхности

твердых и жидких тел под действием света носит название внешнего фотоэффекта. Основное влияние на характер протекания фотоэффекта оказывают электрические свойства облучаемого материала (проводник, полупроводник, диэлектрик), а также энергия фотонов, так как для каждого материала существует минимальное значение энергии фотонов, при которой фотоэффект прекращается.

Впервые явление фотоэффекта было замечено Г. Герцем в 1887 г. Сущность явления состоит в том, что при освещении ультрафиолетовыми лучами металлическое тело теряет электроны. Первые количественные исследования фотоэлектрического эффекта принадлежат русскому физику А. Г. Столетову, который установил основные законы фотоэффекта. Позже установка Столетова была усовершенствована Ф. Э. А. Ленардом (Нобелевская премия в 1905 г. за исследование катодных лучей) и другими исследователями (рис. 28.1).

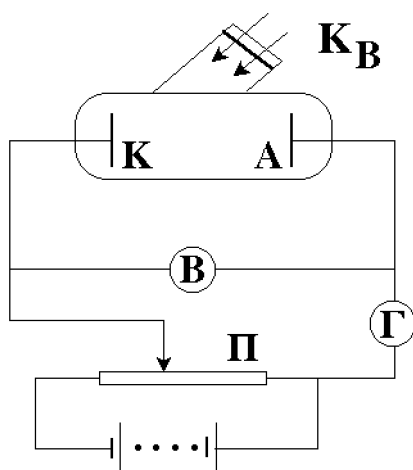


Рис. 28.1: Схема опытов по изучению фотоэффекта.

Свет, проникающий через кварцевое окно K_B (кварц пропускает ультрафиолетовые лучи), освещает катод K , изготовленный из исследуемого материала. Электроны, испущенные вследствие фотоэффекта, перемещаются под действием электрического поля к аноду A . В цепи возникает фототок, измеряемый гальванометром Γ . С помощью потенциометра Π можно изменять напряжение между катодом и анодом. Исследования привели к установлению основных законов фотоэффекта:

1. Испускаемые под действием света заряды имеют отрицательный знак.

2. Величина испускаемого телом заряда пропорциональна поглощенной им световой энергии.
3. Наибольшее действие оказывают ультрафиолетовые лучи. Максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов не зависит от интенсивности падающего света, а определяется при прочих равных условиях лишь частотой падающего монохроматического света и растет с увеличением частоты.
4. Фотоэффект протекает безынерционно, т.е. фототок появляется мгновенно ($\Delta t \leq 10^{-9}$ с) — одновременно с освещением катода.

Проанализируем вольт-амперную характеристику (т.е. зависимость фототока I от напряжения между электродами U), которая получается в результате фотоэлектрического эффекта. Из кривой на рис. 28.2 видно, что при некотором не очень большом напряжении фототок достигает

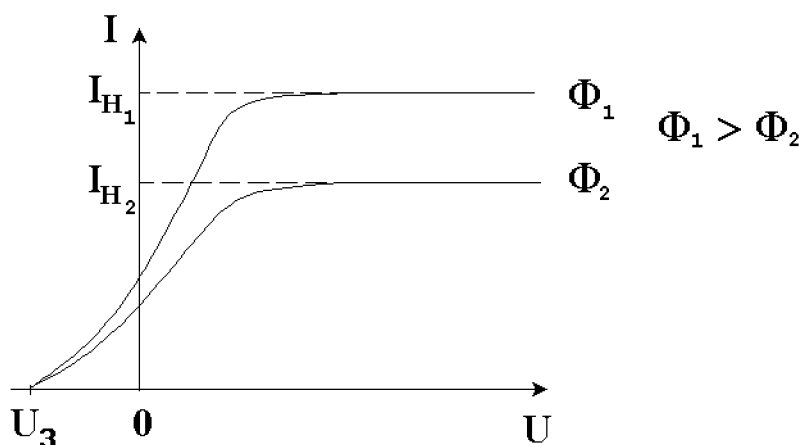


Рис. 28.2: Вольт-амперная характеристика для фототока.

насыщения — все электроны, испущенные катодом, попадают на анод. Следовательно, сила тока насыщения I_n определяется количеством электронов, испускаемых катодом в единицу времени под действием света. Поэтому сила фототока насыщения I_n прямо пропорциональна световому потоку

$$I_n = k \cdot \Phi, \quad (28.5)$$

где k — коэффициент пропорциональности, характеризующий чувствительность данной поверхности к свету (его размерность $[k] = \text{А/Вт}$).

Полный ход кривой показывает, что электроны вылетают из катода с различными по величине скоростями. Часть электронов, отвечающая силе тока при $U = 0$, обладает достаточными скоростями, чтобы долететь до анода “самостоятельно”, без помощи ускоряющего поля. Для обращения фототока в нуль, необходимо приложить некоторое задерживающее напряжение U_3 . По величине тормозящей разности потенциалов, при которой фототок обращается в нуль, можно определить скорость самых быстрых электронов:

$$\frac{1}{2}mv_{max}^2 = eU_3, \quad (28.6)$$

где m, e, v_{max} — масса, заряд и максимальная скорость электронов. Экспериментально было установлено, что максимальная скорость фотоэлектронов не зависит от интенсивности света, а зависит только от частоты. Прямая пропорциональная зависимость U_3 от ω на рис. 28.3 указывает, что увеличение частоты приводит к возрастанию максимальной скорости фотоэлектронов. Эта *экспериментальная* зависимость не укладывается

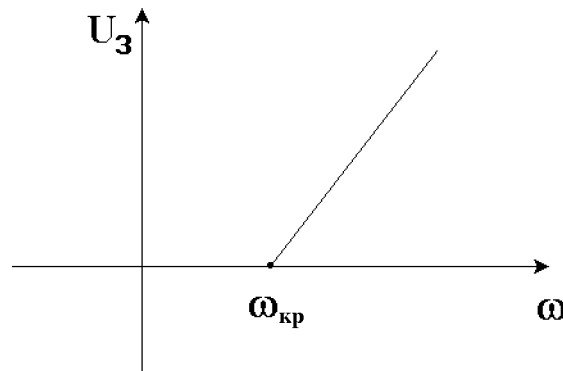


Рис. 28.3: Зависимость задерживающего напряжения от частоты.

ется в рамки классической электродинамики, так как скорость фотоэлектронов по классическим понятиям должна возрастать с интенсивностью электромагнитной волны.

В 1905 г. А. Эйнштейн показал, что все закономерности фотоэффекта легко объясняются, если предположить, что свет распространяется и поглощается такими же порциями (квантами) $\hbar\omega$, какими он, по предположению Планка, испускается. Взаимодействуя с электроном вещества, фотон может обмениваться с ним энергией и импульсом. Фотоэффект

возникает при неупругом столкновении фотона с электроном. При таком столкновении фотон поглощается, а его энергия передается электрону. Таким образом, электрон приобретает кинетическую энергию не постепенно, а сразу — в результате единичного акта столкновения. Этим и объясняется безынерционность фотоэффекта.

Энергия, полученная электроном, доставляется ему в виде кванта $\hbar\omega$. Часть этой энергии электрон тратит на то, чтобы вырваться из металла. Для каждого материала имеется своя *работа выхода* A — наименьшая энергия, которую необходимо сообщить электрону, чтобы удалить его из вещества в вакуум. Остаток энергии $\hbar\omega - A$ тратится на кинетическую энергию $T = mv^2/2$ электрона. Кинетическая энергия максимальна, если электрон образуется вблизи поверхности вещества и не тратит энергию на случайные столкновения в веществе. В этом случае будет выполняться соотношение А. Эйнштейна:

$$\hbar\omega = \frac{mv_{max}^2}{2} + A. \quad (28.7)$$

Нобелевская премия по физике за 1921 г. была присуждена А. Эйнштейну за его “важные физико-математические исследования и *особенно за открытие законов фотоэлектрического эффекта*”. Знаменитая теория относительности даже не упомянута в приведенной формулировке. Уравнение Эйнштейна позволяет объяснить законы фотоэффекта. Действительно, из соотношения Эйнштейна непосредственно следует, что максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона линейно возрастает с увеличением частоты подающего излучения и не зависит от его интенсивности. Так как с уменьшением частоты падающего света кинетическая энергия фотоэлектронов уменьшается (для данного вещества катода $A_{вых}$ постоянна), то при некоторой достаточно малой частоте $\omega = \omega_{кр}$ кинетическая энергия фотоэлектронов станет равной нулю и фотоэффект прекратится. Согласно Эйнштейну

$$\omega_{кр} = \frac{A_{вых}}{\hbar} \quad (28.8)$$

представляет “красную границу” фотоэффекта для данного вещества. Она зависит лишь от работы выхода электронов, т.е. от химической природы вещества и состояния его поверхности.

Используя выражение для красной границы, перепишем уравнение Эйнштейна в виде:

$$eU_3 = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \hbar(\omega - \omega_{кр}), \quad (28.9)$$

которое объясняет экспериментальную линейную зависимость (см. рис. 28.3) задерживающего потенциала от частоты падающего электромагнитного излучения.

Таким образом, согласно А. Эйнштейну, свет с частотой ω не только испускается, как это предполагал М. Планк, но и распространяется в пространстве, и *поглощается* веществом отдельными порциями (квантами), энергия которых $\varepsilon = \hbar\omega$.

В 1914 г. были проведены модифицированные опыты по фотоэффекту: γ -лучи направлялись на металлическую пыль, помещенную в конденсаторе. Фотоэффект практически мгновенен: при соударении пылинки с фотонами из нее выбиваются электроны, пылинка приобретает заряд и начинает двигаться в поле конденсатора. Движение пылинок наблюдалось сразу после включения источника γ -излучения. Если бы γ -излучение было классической электромагнитной волной, то волне потребовалось бы несколько секунд, чтобы раскачать электроны и вырвать их из пылинки. Отсутствие такого запаздывания воочию продемонстрировало корпускулярную природу фотоэффекта.

Задача 28.14. На поверхность лития падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 310$ нм. Чтобы прекратить эмиссию электронов, нужно приложить задерживающую разность потенциалов U_3 не менее 1.7 В. Определить работу выхода A .

Решение. Энергия фотона равна $E_{\text{ф}} = \hbar\omega = hc/\lambda$. Кинетическая энергия равна минимальному запирающему потенциалу eU_3 . Отсюда находим работу выхода:

$$\begin{aligned} A &= E_{\text{ф}} - U_3 = \frac{hc}{\lambda} - eU_3 = \\ &= \frac{6.626 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8}{310 \cdot 10^{-9}} - 1.6 \cdot 10^{-19} \times 1.7 = 3.7 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 2.3 \text{ эВ}. \end{aligned}$$

В дальнейшем мы обсудим подробнее уже упоминавшуюся внесистемную единицу энергии — электронвольт ($1 \text{ эВ} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$). ■

28.3 Опыт Боте

Существование фотонов получило непосредственное подтверждение в опыте В. Боте. Тонкая металлическая фольга F помещалась между двумя симметрично расположенными счетчиками C_1 и C_2 (рис. 28.4). Фольга

освещалась слабым пучком рентгеновских лучей R , под действием которых сама становилась источником рентгеновских лучей (это явление называется рентгеновской флуоресценцией). Вследствие малой интенсив-

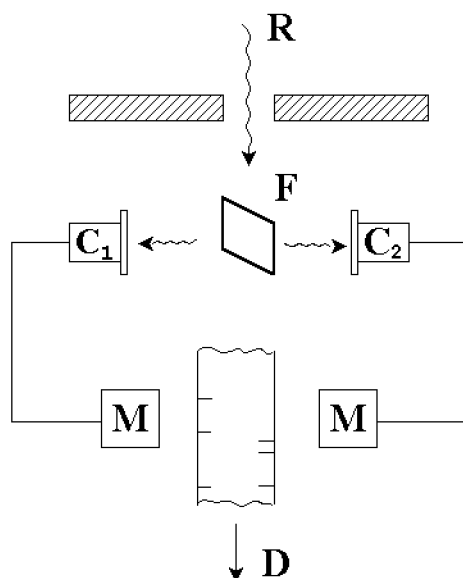


Рис. 28.4: Схема опыта Боте.

ности первичного пучка число квантов, испускаемых фольгой, было невелико. Попадание рентгеновских лучей в каждый из счетчиков вызывает немедленное срабатывание (меньше чем через 10^{-3} с) и приводит в действие специальный механизм M , который делает отметку на движущейся ленте D . Если бы излучаемая энергия распространялась равномерно во все стороны, как это следует из волновых представлений, оба счетчика C_1 и C_2 должны были бы срабатывать одновременно и отметки на ленте приходились бы симметрично одна против другой. В действительности же наблюдалась совершенно беспорядочное расположение отметок. Это можно объяснить лишь тем, что из фольги F в отдельных актах излучения испускаются световые кванты, летящие то в одну, то в другую сторону. Таким образом, было экспериментально доказано существование особых световых частиц — фотонов, обладающих энергией и импульсом.

28.4 Эффект Комптона

Наиболее ярко и полно корпускулярные свойства света проявляются в эффекте Комптона. Американский физик А. Комптон, исследуя рассеяние монохроматических рентгеновских лучей веществами с не очень боль-

шими атомными номерами (например бор или графит), обнаружил, что в составе рассеянного излучения наряду с излучением первоначальной длины волны λ наблюдается также излучение более длинных волн λ' . С точки зрения волновой оптики это выглядело так же странно, как если бы человек в синем свитере, посмотрев в зеркало, увидел себя одетым в красное. Но именно в подобном “покраснении” суть наблюдавшегося эффекта, который получил простое объяснение в рамках концепции фотонов: из-за закона сохранения часть фотонного импульса передается электрону, энергия фотона уменьшается и, следовательно, уменьшается его частота: фотон “краснеет”.

Опыты показали, что разность $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ не зависит от длины волны λ падающего излучения и природы рассеивающего вещества, а определяется только углом рассеяния θ между направлениями рассеянного излучения и первичного пучка:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{4\pi\hbar}{mc} \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (28.10)$$

где λ' — длина волны рассеянного излучения, m — масса покоя электрона, \hbar — постоянная Планка, c — скорость света в вакууме.

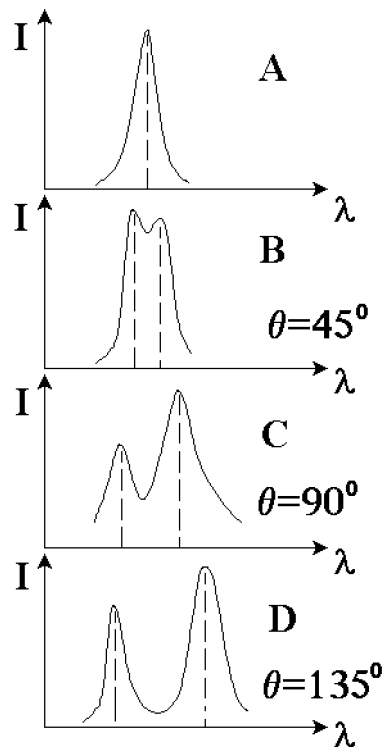


Рис. 28.5: Экспериментальные кривые эффекта Комптона.

На рис. 28.5 представлены результаты измерений на графите при различных углах рассеяния для $\lambda = 0.0712605$ нм. Кривая A характеризует первичное излучение. Кривые B, C и D показывают зависимость интенсивности рассеянного излучения при различных углах рассеяния. Первоначальная одиночная линия становится в результате рассеяния двойной. Уширение обоих компонентов рассеянного излучения обусловлено движением электронов и атомов, на которых происходит рассеяние. В легких веществах, с которыми производились опыты Комптона, энергия связи электрона с атомом мала по сравнению с энергией, передаваемой ему рентгеновским квантом при столкновении, т.е. в легких атомах энергией связи электрона внутри атома можно пренебречь и считать все электроны свободными.

Рассмотрим столкновение фотона со свободным электроном, применяя законы сохранения энергии и импульса как для соударения упругих шаров (рис. 28.6). Фотон с энергией $\hbar\omega$ и импульсом $\hbar\vec{k}$ ($k = \omega/c$) падает на первоначально покоящийся свободный электрон ($\vec{p}_e = 0$). Энергия электрона до столкновения равна mc^2 (m — масса покоя электрона). После столкновения электрон в результате отдачи будет обладать импульсом

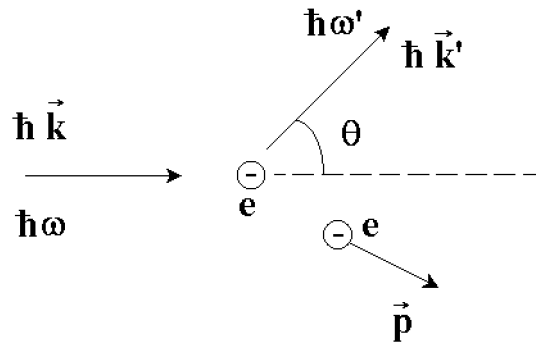


Рис. 28.6: Эффект Комптона как упругое столкновение фотона с электроном.

\vec{p} и энергией $c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$. Энергия и импульс фотона после рассеяния изменятся и станут равными $\hbar\omega'$ и $\vec{p}' = \hbar\vec{k}'$. Запишем законы сохранения энергии и импульса:

$$\begin{aligned} \hbar\omega + mc^2 &= \hbar\omega' + c\sqrt{p^2 + m^2c^2}, \\ \hbar\vec{k} &= \hbar\vec{k}' + \vec{p}. \end{aligned} \quad (28.11)$$

Учитывая, что $k = \omega/c$, перепишем закон сохранения энергии в виде:

$$\sqrt{p^2 + m^2c^2} = \hbar(k - k') + mc, \quad (28.12)$$

или

$$p^2 = \hbar(k^2 + k'^2 - 2kk') + 2\hbar mc(k - k'). \quad (28.13)$$

Уравнение закона сохранения импульса после возведения в квадрат дает:

$$\begin{aligned} p^2 &= \hbar^2(\vec{k} - \vec{k}')^2 = \hbar^2(k^2 + k'^2 - 2\vec{k} \cdot \vec{k}') = \\ &= \hbar^2(k^2 + k'^2 - 2kk' \cos \theta). \end{aligned} \quad (28.14)$$

Приравнивая правые части полученных соотношений, находим:

$$mc(k - k') = \hbar kk'(1 - \cos \theta), \quad (28.15)$$

т.е.

$$\frac{2\pi}{k'} - \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\hbar}{mc}(1 - \cos \theta). \quad (28.16)$$

Длина волны фотона связана с волновым числом ($2\pi/k = \lambda$), поэтому

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_C(1 - \cos \theta) = 2\lambda_C \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (28.17)$$

где величина $\lambda_C = 2\pi\hbar/mc = h/mc$ называется *комптоновской длиной волны* частицы с массой m (в данном случае — электрона). Величину $\lambda_C = \hbar/mc$ также называют комптоновской длиной волны электрона, так что мы будем их различать по обозначениям.

Наличие в составе рассеянного излучения несмещенной линии (излучения с первоначальной длиной волны) можно объяснить следующим образом. Мы рассмотрели рассеяние фотона на свободном электроне. Однако фотон может обмениваться энергией и импульсом с атомом в целом. Так как масса атома велика по сравнению с массой электрона, то атому передается ничтожно малая доля энергии фотона. Поэтому в этом случае длина волны λ' рассеянного излучения практически не будет отличаться от длины волны λ падающего излучения.

28.5 Давление света

При падении электромагнитных волн на какую-нибудь поверхность они оказывают давление. Давление света может быть объяснено как с электромагнитной точки зрения, так и в рамках квантовой теории.

Пусть на поверхность металла падает нормально электромагнитная волна. Под действием электрического поля \vec{E} электроны начинают двигаться параллельно поверхности. При этом со стороны магнитного поля \vec{H} световой волны на каждый электрон, движущийся со скоростью v , действует сила Лоренца $F_{\text{л}} = -evB$, направленная внутрь металла, перпендикулярно к его поверхности. Таким образом, световая волна должна производить давление на поверхность металла.

В рамках квантовой фотонной теории световое давление обусловлено тем, что каждый фотон не только несет энергию $\hbar\omega$, но и обладает импульсом $p = \hbar\omega/c$. Каждый поглощенный фотон передает поверхности свой импульс:

$$\Delta p_1 = p - 0 = \frac{\hbar\omega}{c}, \quad (28.18)$$

а каждый отраженный — удвоенный импульс:

$$\Delta p_2 = p - (-p) = 2\frac{\hbar\omega}{c}. \quad (28.19)$$

Пусть на поверхность прозрачного тела падает по нормали поток фотонов $N_{\text{ф}}$ ($N_{\text{ф}}$ — число фотонов, падающих на единичную площадку в единицу времени). Если поверхность тела имеет коэффициент отражения ρ , то в единицу времени $\rho N_{\text{ф}}$ фотонов отразится от нее, а $(1 - \rho)N_{\text{ф}}$ фотонов поглотится поверхностью. Импульс, получаемый единицей площади поверхности тела за единицу времени, равен:

$$\frac{\Delta p}{\Delta s \Delta t} = \Delta p_1(1 - \rho)N_{\text{ф}} + \Delta p_2\rho N_{\text{ф}} = \frac{\hbar\omega}{c}(1 - \rho)N_{\text{ф}} + 2\frac{\hbar\omega}{c}\rho N_{\text{ф}}. \quad (28.20)$$

Согласно второму закону Ньютона, $\Delta p/\Delta t$ есть сила, а величина $F/\Delta s$ — давление. Таким образом, световое давление равно:

$$P = \frac{\Delta p}{\Delta s \Delta t} = \frac{\hbar\omega}{c}N_{\text{ф}}(1 + \rho). \quad (28.21)$$

Величина, равная произведению энергии фотона $\hbar\omega$ на число фотонов $N_{\text{ф}}$, падающих на единицу площади тела в единицу времени, есть плотность потока световой энергии (энергетическая освещенность) $E_{\text{ф}}$. Эту же величину можно получить, умножая среднюю плотность энергии $\langle w \rangle$ в волне на скорость света:

$$E_{\text{ф}} = \hbar\omega N_{\text{ф}} = c\langle w \rangle. \quad (28.22)$$

Поэтому

$$P = \frac{E_{\text{ф}}}{c}(1 + \rho) = w(1 + \rho). \quad (28.23)$$

Эту формулу при $\rho = 0$ и $\rho = 1$ мы уже обсуждали (Ч. IV, раздел 27.6.4), когда говорили о давлении световых волн.

Задача 28.15. Определить давление P солнечного света на зачерненную пластинку, расположенную перпендикулярно солнечным лучам и находящуюся вне земной атмосферы вблизи Земли.

Решение. В задаче 27.10. использовалось значение солнечной постоянной: $C = 1.4 \text{ кВт/м}^2$. По определению этой величины C совпадает с энергетической освещенностью $E_{\text{ф}}$. Зачерненная пластинка поглощает излучение, т.е. $\rho = 0$. Поэтому давление равно:

$$P = \frac{C}{c} = \frac{1.4 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8} = 4.7 \cdot 10^{-6} \text{ Па} = 4.7 \text{ мкПа}. \quad \blacksquare$$

Давление света играет огромную роль в ориентации кометных хвостов относительно Солнца. Пылевидные частицы и молекулы газов, имеющиеся в кометах, испытывают световое давление со стороны солнечных лучей, в результате которого и образуются своеобразные формы кометных хвостов, ориентированных в противоположную сторону от Солнца. (В настоящее время предполагается, что явление образования хвостов комет частично определяется “протонным” ветром, исходящим от Солнца.)

Таким образом, и электромагнитная (волновая), и фотонная (квантовая) теории с одинаковым успехом решают вопрос о механизме и закономерностях светового давления.

Подведем итоги:

- В явлениях распространения и отражения света (дифракция и интерференция) он ведет себя как волна с такими типично волновыми характеристиками, как частота ν и длина волны λ . Это — хорошо установленный факт.
- В явлениях испускания и передачи энергии свет ведет себя как частица, характеризующаяся энергией E и импульсом p . Это также можно считать хорошо установленным фактом.

- Через постоянную Планка корпускулярные характеристики численно связаны с волновыми. Поэтому приходится признать за фотоном двойственную природу. Пока в нашем курсе это необычное свойство — корпускулярно-волновой дуализм — установлено только для света.

Контрольные вопросы

1. Изложите гипотезу Эйнштейна о фотонах.
2. Какова связь между волновыми характеристиками света (частота, длина волны) и корпускулярными характеристиками фотона (энергия, импульс)?
3. Энергия фотона 1 в два раза превосходит энергию фотона 2. Что можно сказать о соотношении между их импульсами?
4. Покажите, что энергия E фотона, выраженная в электронвольтах ($1 \text{ эВ} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$), связана с его длиной волны λ , выраженной в нм, соотношением $E = \frac{1240}{\lambda}$. Чему равна энергия фотона ультрафиолетового излучения с $\lambda = 100 \text{ нм}$? Тот же вопрос для инфракрасного излучения с $\lambda = 10 \text{ мкм}$.
5. Сформулируйте основные законы фотоэффекта.
6. Сформулируйте соотношение Эйнштейна для фотоэффекта.
7. Что такое “красная граница” фотоэффекта?
8. Зависит ли энергия фотоэлектрона от интенсивности падающего на электрод света?
9. * Что такое эффект Комптона? Почему эффект Комптона не наблюдается для света в видимом диапазоне?
10. * В каком направлении по отношению к направлению движения падающего фотона рассеется комптоновский электрон при условии, что его кинетическая энергия имеет максимально возможное значение? В каком направлении будет при этом двигаться рассеянный фотон?
11. Давление света на черную поверхность в два раза меньше, чем на белую. Почему?

Глава 29

Волновые свойства микрочастиц

Идеи квантовой физики всякий раз радикально ломали устоявшиеся представления об устройстве мира. Мы уже видели, как на новом уровне в волновую теорию проникли казалось давно отброшенные наукой корпускулы --- фотоны, кванты света. В этой главе мы познакомимся с тем, как волны вторглись и заняли почетнейшее место в той области физики, которая давным-давно была хорошо обжита частицами. В определенном смысле квантовая физика совершила даже более революционный переворот в наших знаниях, чем теория относительности.

29.1 Атом Бора

Вернемся в 1911 год. К этому времени дискретность микромира проявилась и в другом месте — в атомных спектрах. Оказалось, что атомы поглощают и испускают свет только определенной длины волны, причем спектральные линии группировались в так называемые серии (рис. 29.1).

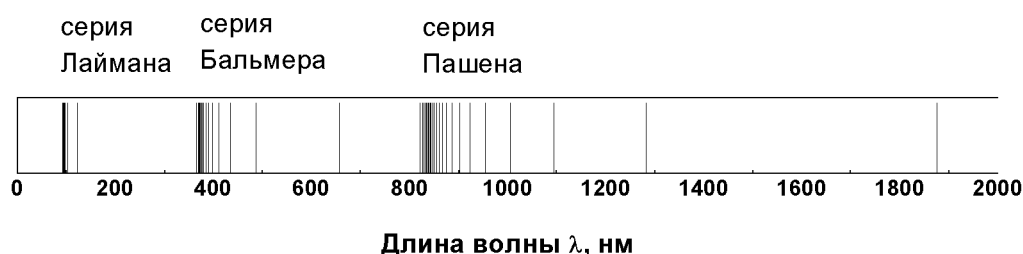


Рис. 29.1: Длины волн, излучаемые атомом водорода. Спектр состоит из серий (показаны три первые) — последовательностей линий, сгущающихся к некоторому (своему для каждой серии) предельному минимальному значению $\lambda_{n,\min}$. Серия Бальмера лежит в видимом диапазоне света.

Для спектра водорода, простейшего из атомов, была установлена (не выведена, а угадана!) несложная формула:

$$\frac{1}{\lambda} = Ry \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right), \quad Ry \approx 1.097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}. \quad (29.1)$$

Здесь λ — длина волны излучения атома водорода, n и $k > n$ — целые числа, а Ry — т.н. постоянная Ридберга. Оказалось, что серия Лаймана описывается при значениях $n = 1, k \geq 2$, серия Бальмера — при $n = 2, k \geq 3$, и серия Пашена — при $n = 3, k \geq 4$. Предельные минимальные значения для длин волн получаются при $k \rightarrow \infty$: $\lambda_{n,\min} = 91.16n^2 \text{ нм}$.

Кроме того, из свойств газов давно было известно, что размеры атомов приблизительно равны 10^{-10} м . Теория должна объяснить спектр и размеры атомов и потому должна включить в себя какой-то параметр, позволяющий построить величину размерности длины (постоянных e и m для этого недостаточно). Такого параметра в классической теории не было. Им могла бы стать постоянная Ридберга, но ее происхождение было темно и загадочно.

Опыты Э. Резерфорда 1911 г. по отклонению α -частиц при падении на металлическую фольгу показали наличие внутри атома положительного заряда, сконцентрированного в области диаметром не более 10^{-14} м . Возникла планетарная модель водорода: протон с электроном на орбите. Физики любят единые модели, а здесь так красиво в малом повторялось большое, в атоме — Солнечная система.

Проблема состояла в том, что электрон должен упасть на ядро. Почему планеты не падают на Солнце? Важны начальные условия (положение и скорость), а дальше происходит вращение по стационарной орбите. Но электрон заряжен и при ускорении должен испускать электромагнитное излучение, то есть стационарное вращение невозможно. Быстро потеряв свою энергию, он все-таки упадет на ядро примерно за $5 \cdot 10^{-11} \text{ с}$. Свет за это время проходит около 1.5 см (получается, что мы видим лишь “мертвые” атомы, но это не так!) Резерфорд понимал проблему, но сознательно сконцентрировался на изучении ядра, полагая, что вопрос об устойчивости будет решен при исследовании поведения атомных электронов. Это суждено было сделать в 1913 г. Нильсу Бору, предложившему новую теорию атома.

Постулаты Бора (с небольшими комментариями):

- В атоме существуют стационарные орбиты, находясь на которых электрон не излучает.

“Насильственное” введение дискретности: разрешены не все орбиты. Типичное для физики “заметание проблемы под ковер”: если чему-то не находится объяснений, принимают это как данность и изучают следствия в надежде, что когда-нибудь поймут и причину.

- При переходе с одной стационарной орбиты на другую электрон излучает (поглощает) квант света с частотой $\nu = \Delta E/h$ (ΔE — разность энергий электрона на орбитах).

Постулат, отражающий сохранение энергии и соотношения Планка-Эйнштейна.

- Динамика электрона на стационарной орбите определяется уравнениями классической теории.

Неизбежное следствие: т.к. остальные орбиты для электрона запрещены, переход осуществляется скачком; о пути и энергии электрона между орбитами говорить не имеет смысла: законы механики там не применимы.

- Круговые стационарные орбиты определяются условием квантования момента количества движения (n — целое число):

$$L = n\hbar.$$

Постоянная Планка \hbar имеет размерность момента количества движения и вместе с зарядом электрона e и его массой m позволяет образовать параметр размерности длины. Это приводит к возможности вычислить размеры атома.

Применение постулатов Бора:

Классическая механика: пусть электрон вращается по орбите радиусом R со скоростью v вокруг ядра с зарядом Ze . Тогда

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R^2}, \quad \text{откуда} \quad v = \frac{e\sqrt{Z}}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m R}}.$$

Поэтому его энергия и момент количества движения выражаются через радиус орбиты как

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R} = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 R},$$

$$L = mvR = e\sqrt{\frac{ZmR}{4\pi\epsilon_0}}.$$

Если к последнему выражению применить условие квантования Бора $L = n\hbar$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), то получатся следующие результаты для характеристик водородоподобного атома:

- Разрешены орбиты с радиусами

$$R_n = a_B \frac{n^2}{Z}, \quad a_B = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2}.$$

Величина a_B называется радиусом Бора ($a_B \approx 5.29 \cdot 10^{-11}$ м). Смысл числа n — номер разрешенной орбиты. Радиус Бора — радиус нижней орбиты ($n = 1$) в атоме водорода ($Z = 1$). При $\hbar \rightarrow 0$ получаем, что радиус Бора стремится к нулю: падение электрона на ядро, как в классике!

- Энергия электрона на стационарной орбите

$$E_n = -\frac{Z^2 e^2}{8\pi\epsilon_0 a_B n^2} = -\frac{Z^2 m e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2 n^2} = -13.6 \text{ эВ} \cdot \frac{Z^2}{n^2}. \quad (29.2)$$

Формула (29.2) определяет разрешенные значения энергии в атоме водорода, или, как говорят, энергетические уровни. Отрицательные E соответствуют связанным состояниям с движением в ограниченной области пространства (аналог в классической физике — движение планет по эллипсам в отличие от гиперболических траекторий, уходящих на бесконечность).

При решении задач о поведении электрона в атоме обычно возникает квадрат электрического заряда электрона в комбинации с диэлектрической проницаемостью вакуума. Для выполнения численных расчетов удобно выразить эту комбинацию через так называемую постоянную тонкой структуры, обычно обозначаемую греческой буквой *альфа*:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137.036}. \quad (29.3)$$

Приведем для справки формулу для энергии (29.2), выраженной через постоянную тонкой структуры:

$$E_n = -\alpha^2 m c^2 \frac{Z^2}{2n^2}. \quad (29.4)$$

Из-за множителя α^2 характерные для атома энергии на четыре порядка меньше энергии покоя электрона. Это — проявление нерелятивизма атомной физики.

Задача 29.16. Определить скорость электрона на n -й орбите атома Бора.

Решение. Радиус n -й орбиты определяется формулой $R_n = a_B n^2$, где a_B — радиус Бора. Скорость электрона v можно выразить через момент количества движения $L = n\hbar$:

$$v_n = \frac{n\hbar}{mR_n} = \frac{\hbar}{ma_B n}.$$

Выражение для радиуса Бора можно упростить, используя введенную постоянную тонкой структуры:

$$a_B = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar c}{e^2} \frac{\hbar}{mc} = \frac{1}{\alpha} \frac{\hbar}{mc}. \quad (29.5)$$

Подставляя это выражение в полученную выше формулу для скорости электрона, получаем для n -й орбиты:

$$v_n = \frac{\alpha c}{n}.$$

Отсюда вытекает, что на низшей орбите скорость электрона приблизительно в 137 раз меньше скорости света, т.е. атом — действительно нерелятивистская система. На n -й орбите скорости электрона в n раз меньше, чем на первой. Численный пример: на второй орбите скорость равна $v_2 = (2.998 \cdot 10^8)/(2 \cdot 137.036) = 1.094$ Мм/с. ■

При переходе с уровня k на уровень n ($k > n$) излишек энергии $E_k - E_n$ перейдет в энергию фотона $h\nu_{nk}$. Поэтому для спектра излучаемых частот получаем соотношение (ср. (29.1)):

$$\begin{aligned} \nu_{nk} &= \frac{1}{h} (E_k - E_n) = cRyZ^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right), \\ Ry &= \frac{me^4}{8c\epsilon_0^2\hbar^3} = 1.097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}. \end{aligned} \quad (29.6)$$

Таким образом, теория Бора позволила также вычислить постоянную Ридберга. Стало понятно и существование спектральных серий, и предельные значения $\lambda_{n,\min}$ (рис. 29.2).

Экспериментальное подтверждение гипотеза Бора нашла в опытах Франка-Герца: бомбардировка паров ртути электронами в вакуумной

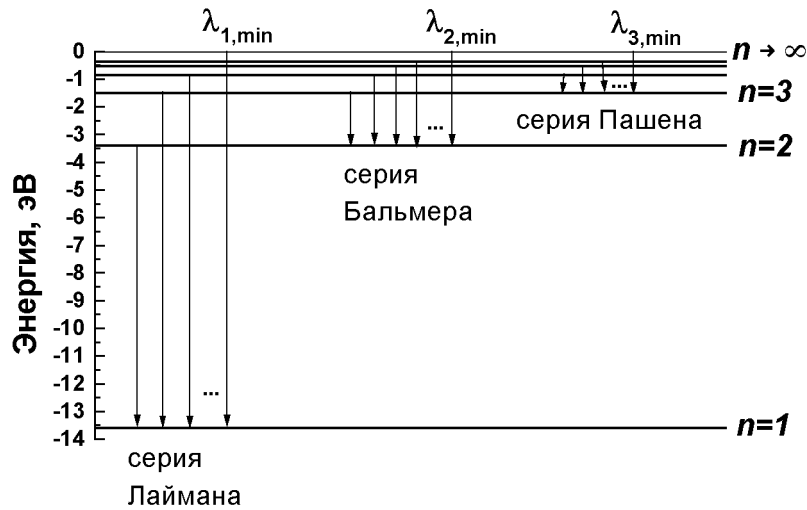


Рис. 29.2: Схема энергетических уровней в атоме Бора. Переходы электрона с высшего на низший уровень сопровождаются испусканием фотона, уносящего энергию, равную разности энергий уровней.

трубке и измерение зависимости тока на коллекторе от ускоряющей разности потенциалов. Чередование максимумов на равном расстоянии друг от друга доказало дискретность изменения энергии атома.

Задача 29.17. При переходе с третьего уровня на второй (головная линия серии Бальмера) водородоподобный ион атома некоего элемента испускает фотон с энергией $W = 7.5$ эВ. Какой это элемент?

Решение. Энергия электрона, находящегося на n -й орбите вокруг ядра с зарядом Ze , равна

$$E_n = -13.6 \text{ эВ} \cdot \frac{Z^2}{n^2}.$$

При переходе с уровня $n = 3$ на уровень $n = 2$ выделяется энергия

$$W = E_3 - E_2 = 13.6 \text{ эВ} \cdot Z^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right) = 13.6 \text{ эВ} \cdot \frac{5}{36} Z^2,$$

откуда

$$Z = \sqrt{\frac{36 \cdot 7.5}{5 \cdot 13.6}} = 1.99.$$

Атомный номер элемента — целое число, так что мы получили $Z = 2$, что соответствует гелию. ■

Еще до появления теории Бора был изучен спектр водородного атома и эмпирически установлена формула (29.1). Но при наблюдении спектра

Солнца были замечены линии, казалось бы нарушающие эту формулу, т.к. они соответствовали полуцелым значениям n и k . После появления теории Бора стало ясно, что квантовые числа n и k все-таки должны быть целыми, а кажущиеся полуцелые значения можно объяснить по-другому. Действительно, из формулы (29.6) для частот, испускаемых водородоподобным атомом, следует, что

$$\nu_{nk} = cRy \left(\frac{1}{(n/2)^2} - \frac{1}{(k/2)^2} \right) = cRy(2^2) \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right),$$

то есть наблюдавшиеся линии принадлежат иону элемента с $Z = 2$. Как известно, этот элемент носит “солнечное” имя — гелий.

29.2 Волны материи

Итак, снова дискретность, таинственные целые числа. В классической физике они появлялись в явлениях интерференции (номера максимумов и минимумов) и в стоячих волнах (число узлов на закрепленных струнах). Луи де Бройль в 1923 г. выдвинул фундаментальную гипотезу: *корпускулярно-волновой дуализм* (с которым мы встретились на примере фотона) *на самом деле присущ всем микрочастицам*. Фотону мы были вынуждены приписать импульс $p = h/\lambda$. Долгое время уделялось внимание только его волновым свойствам, а в XX веке восстановили в правах и корпускулярные. С электроном получилось наоборот: лишь де Бройль разглядел в нем колебания с длиной волны λ . Условие квантования Бора $pR = n\hbar$ получило простую интерпретацию. Оно стало условием того, чтобы на длине стационарной орбиты уложилось целое число длин волн: $2\pi R = n\lambda$ (аналогия с обоями: если по периметру комнаты укладывается целое число периодов рисунка на обоях, то при дальнейшем обклеивании рисунок воспроизводится на тех же местах — своего рода стационарность). Отсюда вытекает соотношение $\lambda = h/p$. Сравнивая с выражением (28.2), видим, что получилась общая формула для фотонов и электронов (и любых других частиц).

Гипотеза де Бройля подтверждена экспериментами Дэвиссона и Джермера (отражение от кристаллических плоскостей) и Томсона (дифракция на фольге). Красив и поучителен опыт В. А. Фабриканта (1949 г.) — дифракция одиночных электронов, доказывающая, что волновые свойства присущи не коллективу электронов, но каждому в отдельности. И в то же время электрон — частица с зарядом и массой.

Вопрос, долго волновавший физиков: что такое микрочастица? Волна или корпускула? Здесь налицо некорректная постановка вопроса, подразумевающая альтернативу. Надо “или” заменить на “и”: электрон *и* волна, *и* частица. Если задать этот вопрос природе с помощью прибора, то получим ответ, соответствующий прибору: для волнового прибора (например, дифракционная решетка) ответ будет “волна”, для корпускулярного (скажем, счетчик) — “частица”. Неоднозначность ответа отражает двойственность природы частиц или, точнее, узость нашего альтернативного мышления, допускающего лишь одну из этих возможностей. Это — новые для нас объекты, квантовые русалки и кентавры микромира, которых невозможно разделить на людей и животных. В этом смысле микрообъект — ни волна, ни частица и ни их симбиоз. Это — новое качество, которое мы количественно отражаем в формуле де Бройля

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad (29.7)$$

связывающей волновые и корпускулярные проявления свойств единого объекта. В экспериментах с ускоренными частицами их длина волны де Бройля играет ту же роль, что и длина волны видимого света, определяющая разрешающую силу микроскопа. Ускорители — своеобразные микроскопы микромира, и с их помощью исследуются законы природы на малых расстояниях. Так, на ускорителе в Серпухове длина волны протонов составляет примерно 10^{-17} м, что в 10 млн раз меньше размеров атомов.

При решении задач, связанных с длиной волны де Бройля, надо с осторожностью применять общую формулу $\lambda = h/p$. Необходимо ясно понимать, какое выражение для импульса следует использовать. Например, в задаче может быть задана скорость частицы v . Если эта скорость много меньше скорости света $c = 2.998 \cdot 10^8$ м/с, то можно применить классическое соотношение $p = mv$. (На практике считают, что $v \ll c$, если отношение $v/c \leq 0.3$, т.е. $v^2/c^2 \leq 0.1$.) Если же это не так, то следует применить *релятивистское* соотношение между импульсом частицы и ее скоростью:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

В задаче может быть задана не скорость частицы, а ее кинетическая энергия E_k . Критерием применимости классических формул является малость кинетической энергии по сравнению с энергией покоя частицы

$E_0 = mc^2$. Если условие $E_k \ll mc^2$ выполняется (что, как нетрудно видеть, эквивалентно условию $v \ll c$), то для нахождения импульса можно воспользоваться формулами классической механики

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}, \quad \text{откуда} \quad p = \sqrt{2mE_k}.$$

Если же кинетическая энергия частицы не мала по сравнению с энергией покоя (тем более, превышает ее), то следует использовать релятивистские формулы. В теории относительности выводится общее соотношение между полной энергией частицы E и ее импульсом, которое уже встречалось выше (28.3):

$$E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}, \quad \text{откуда} \quad p = \frac{1}{c} \sqrt{(E - mc^2)(E + mc^2)}. \quad (29.8)$$

Кинетическая энергия E_k равна разности между полной энергией и энергией покоя: $E_k = E - mc^2$, так что для импульса получаем

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{E_k(E_k + 2mc^2)}.$$

Наконец, удобно переписать это выражение так, чтобы под знаком квадратного корня стояли безразмерные величины:

$$p = mc \sqrt{\frac{E_k}{mc^2} \left(\frac{E_k}{mc^2} + 2 \right)}. \quad (29.9)$$

Нетрудно убедиться, что при $E_k \ll mc^2$ формула (29.9) действительно переходит в классическое выражение $p = \sqrt{2mE_k}$. Традиционные единицы энергии (Дж) оказываются неудобными в микромире. Поэтому физики предпочитают пользоваться несистемными единицами — электронвольтом (эВ) и его производными (1 кэВ = 10^3 эВ, 1 МэВ = 10^6 эВ, 1 ГэВ = 10^9 эВ и т.п.).

Электронвольт — это энергия, приобретаемая электроном при прохождении разности потенциалов 1 В: $E = eV$. Так как заряд электрона равен $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ Кл, то $1 \text{ эВ} = 1.602 \cdot 10^{-19}$ Дж. Поскольку у нас появилась энергия покоя, приведем ее численные значения для электрона и протона вместе с массами этих частиц. Заодно укажем численные значения постоянной Планка, выраженной в эВ · с:

$$h = 4.136 \cdot 10^{-15} \text{ эВ} \cdot \text{с},$$

$$\begin{aligned}
\hbar &= 6.582 \cdot 10^{-16} \text{ эВ} \cdot \text{с}, \\
m_e &= 9.109 \cdot 10^{-31} \text{ кг}, \\
m_e c^2 &= 8.187 \cdot 10^{-14} \text{ Дж} = 0.511 \text{ МэВ}, \\
m_p &= 1.673 \cdot 10^{-27} \text{ кг}, \\
m_p c^2 &= 1.503 \cdot 10^{-10} \text{ Дж} = 938.3 \text{ МэВ}.
\end{aligned} \tag{29.10}$$

Наконец, встречаются обратные задачи, когда задана длина волны де Бройля λ и требуется найти скорость или энергию частицы. Встает вопрос, как по величине λ сразу определить, какими формулами следует пользоваться. Представим себе, что мы применяем для нахождения скорости классическую формулу $p = mv$ и, следовательно, получаем $v = h/m\lambda$. Критерием справедливости этого результата является малость v по сравнению с c :

$$\frac{h}{m\lambda} \ll c, \text{ откуда } \lambda \gg \frac{h}{mc}.$$

Комбинации $\lambda_C = h/mc$ и $\lambda_C = \hbar/mc$ называются комптоновской длиной волны частицы. По своему физическому смыслу это — характерное расстояние, определяющее область, где уже неприменима нерелятивистская квантовая механика. Приведем численные значения этого важного параметра для электрона и протона:

$$\begin{aligned}
\lambda_C^{(e)} &= \frac{h}{m_e c} = 2.426 \cdot 10^{-12} \text{ м}, & \lambda_C^{(e)} &= \frac{\hbar}{m_e c} = 3.861 \cdot 10^{-13} \text{ м}, \\
\lambda_C^{(p)} &= \frac{h}{m_p c} = 1.321 \cdot 10^{-15} \text{ м}, & \lambda_C^{(p)} &= \frac{\hbar}{m_p c} = 2.103 \cdot 10^{-16} \text{ м}.
\end{aligned} \tag{29.11}$$

Видно, что чем легче частица, тем больше ее комптоновская длина волны, то есть тем раньше проявятся релятивистские эффекты. Для электрона комптоновская длина волны много меньше характерной длины, определяющей размеры атома. Это значит, что к атому применима нерелятивистская квантовая механика. Ядра, состоящие из протонов и нейтронов, имеют размеры порядка 10^{-14} м, что много больше комптоновской длины волны протона. Следовательно, к ним также применима эта теория.

Задача 29.18. Определить скорость частицы, у которой длина волны де Бройля в 10 раз меньше комптоновской длины волны λ_C .

Решение. По условию

$$\frac{h}{mc} = 10 \frac{h}{p},$$

откуда находим для импульса частицы

$$p = 10mc.$$

Так как длина волны де Бройля меньше комптоновской длины волны частицы, то мы не можем воспользоваться нерелятивистским соотношением $p = mv$, которое приведет к несуразному ответу $v = 10c$ (как известно, ничто не может двигаться быстрее света). Здесь необходимо применить релятивистскую формулу связи импульса со скоростью:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Отсюда вытекает уравнение

$$\frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 10,$$

решение которого дает

$$v = \frac{10}{\sqrt{101}}c = 0.995c,$$

то есть скорость частицы всего на 0.5% меньше скорости света. ■

29.3 Соотношения неопределенностей

Само наличие у частицы волновых свойств накладывает определенные ограничения на возможность корпускулярного описания ее поведения. Для классической частицы всегда можно указать ее точное положение и импульс. Для квантового объекта имеем иную ситуацию.

Представим цуг волн пространственной протяженностью Δx — образ локализованного электрона, положение которого известно с точностью Δx . Длину волны электрона можно определить, подсчитав число периодов на отрезке: $N = \Delta x/\lambda$. Какова точность определения λ ? Ясно, что для слегка отличающейся длины волны мы получим то же самое значение N . Неопределенность $\Delta\lambda$ в длине волны ведет к неопределенности $\Delta N = \Delta x(\Delta\lambda/\lambda^2)$ в числе узлов, причем измерению доступны лишь $\Delta N \geq 1$. Так как $p = h/\lambda$ и $\Delta p = h\Delta\lambda/\lambda^2$, то отсюда немедленно следует знаменитое соотношение неопределенностей (В. Гейзенберг, 1927 г.):

$$\Delta x \Delta p \geq h.$$

Точности ради надо заметить, что 1) величина p в данном случае означает проекцию импульса на ось x и что 2) приведенное рассуждение имеет скорее качественный, нежели количественный характер, поскольку мы не дали строгой математической формулировки, что понимается под неопределенностью измерения. Чаще всего соотношение неопределенностей используется в виде

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar. \quad (29.12)$$

Аналогичные соотношения справедливы для проекций положения и импульса частицы на другие координатные оси:

$$\Delta y \Delta p_y \geq \hbar, \quad \Delta z \Delta p_z \geq \hbar.$$

Представим теперь, что мы стоим на месте и мимо проходит электронная волна. Наблюдая за ней в течение времени Δt , хотим найти ее частоту ν . Насчитав $N = \Delta t \nu$ колебаний, определяем частоту с точностью $\Delta \nu = \Delta N / \Delta t \geq 1 / \Delta t$, откуда имеем $\Delta t \Delta \nu \geq 1$ или $(E = h\nu)$

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar.$$

По тем же причинам соотношение неопределенностей Гейзенберга для энергии системы чаще используется в виде

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar. \quad (29.13)$$

Поговорим о физическом смысле этих соотношений. Здесь снова проявляется дополнительность макроскопических приборов. Но приборы совсем не виноваты: ограничения носят принципиальный, а не технический характер. Сам микрообъект не может быть в состоянии, когда определенные значения одновременно имеют какая-то из его координат и проекция импульса на ту же ось.

Смысл второго соотношения: если микрообъект живет конечное время, то его энергия не имеет точного значения, она как-бы размыта. Естественная ширина спектральных линий — прямое следствие формул Гейзенберга. На стационарной орбите электрон живет неограниченно долго и энергия E определена точно. В этом — физический смысл понятия стационарного состояния. Если неопределенность в энергии электрона превышает расщепление между энергиями соседних состояний $\Delta E \geq (E_1 - E_2)$, то нельзя точно сказать, на каком уровне находится электрон. Иными словами, на короткое время порядка $\Delta t \approx \hbar / (E_1 - E_2)$ электрон может

перескочить с уровня 1 на уровень 2, не излучая фотона, и затем вернуться назад. Это — т.н. *виртуальный* процесс, который в принципе не наблюдается и, следовательно, не нарушает закона сохранения энергии.

Похожие соотношения существуют и для других пар т.н. сопряженных динамических переменных. Так, при вращении частицы вокруг некоторой оси по орбите радиусом R неопределенность ее угловой координаты $\Delta\phi$ влечет за собой неопределенность ее положения на орбите $\Delta x = R \Delta\phi$. Из соотношений (29.12) следует, что неопределенность импульса частицы удовлетворяет неравенству $\Delta p \geq \hbar/(R \Delta\phi)$. Учитывая связь момента количества движения L с импульсом ($L = Rp$), получаем $\Delta L = R \Delta p$, откуда следует соотношение неопределенностей

$$\Delta L \Delta\phi \geq \hbar. \quad (29.14)$$

Некоторые следствия соотношения неопределенностей:

- Отсутствие траекторий: для нерелятивистской частицы $p = mv$ и

$$\Delta x \Delta v \geq \frac{\hbar}{m}.$$

Для массивных объектов правая часть исчезающе мала, что позволяет одновременно измерить скорость и положение объекта (область справедливости классической механики). В атоме же Бора импульс электрона $p = \hbar/a$, и неопределенность положения оказывается порядка размеров орбиты!

- Невозможность достижения минимума потенциальной энергии. Пример: осциллятор (тело на пружине):

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}.$$

Основное состояние в классической механике: $p = 0, x = 0$. Поэтому величина неопределенностей — порядка самих импульса и координат:

$$p \approx \frac{\hbar}{2x} \rightarrow E = \frac{\hbar^2}{8mx^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}.$$

Минимум достигается в точке $x = \sqrt{\hbar/2m\omega}$ и равен

$$E = \frac{\hbar\omega}{2}.$$

В принципе мы не можем претендовать на точный ответ, хотя в данном случае (то же — для атома водорода) он действительно точен. Мы получили так называемые *нулевые колебания*: квантовый осциллятор, в отличие от классического, не может оставаться в покое: это противоречит соотношению неопределенностей Гейзенберга. Точные расчеты показывают, что формулу Планка для уровней энергии осциллятора надо было бы писать в виде

$$E = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (29.15)$$

При решении задач на применение соотношения неопределенностей следует иметь в виду, что в основном состоянии в классической физике электрон покоится в точке, соответствующей минимуму потенциальной энергии. Соотношения неопределенностей не позволяют ему это делать в квантовой теории, так что электрон должен иметь некоторый разброс импульсов. Поэтому неопределенность импульса (его отклонение от классического значения 0) и сам импульс по порядку величины совпадают ($p \sim \Delta p$). Неопределенность координаты электрона, замкнутого в объеме V , равна по порядку величины линейному размеру этого объема ($\Delta x \sim \sqrt[3]{V}$).

Задача 29.19. Электрон с кинетической энергией $E_k = 15$ эВ находится на металлической пылинке диаметром $d = 1$ мкм. Оценить относительную неточность δv , с которой может быть определена скорость электрона.

Решение. По условию $\Delta x \approx d/2$ и $\Delta p \approx 2\hbar/d$. Энергия электрона много меньше его энергии покоя, так что можно применять нерелятивистские соотношения $E_k = m_e v^2/2$, $p = \sqrt{2E_k/m_e}$, $\Delta p = m_e \Delta v$, откуда $\Delta v \approx 2\hbar/(m_e d)$. Для относительной неопределенности скорости электрона получаем

$$\delta v = \frac{\Delta v}{v} \approx \frac{2\hbar}{d\sqrt{2m_e E_k}} = \frac{\hbar}{m_e c d} \sqrt{\frac{2m_e c^2}{E_k}} = \frac{\lambda_C^{(e)}}{d} \sqrt{\frac{2m_e c^2}{E_k}}.$$

В этом выражении выделены безразмерные множители — отношение комптоновской длины волны электрона к диаметру пылинки и отношение энергии покоя электрона к его кинетической энергии. Подставляем численные значения:

$$\delta v = \frac{3.861 \cdot 10^{-13}}{1 \cdot 10^{-6}} \sqrt{\frac{2 \times 0.511 \cdot 10^6}{15}} \approx 10^{-4}. \quad \blacksquare$$

Задача 29.20. Среднее время жизни атома в возбужденном состоянии $\tau = 10^{-8}$ с. При переходе в основное состояние излучается фотон с длиной волны $\lambda = 0.5$ мкм (зеленый цвет). Определить энергию кванта, ширину и относительную ширину спектральной линии.

Решение. Энергия кванта равна

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{4.136 \cdot 10^{-15} \times 3 \cdot 10^8}{0.5 \cdot 10^{-6}} \text{ эВ} = 2.48 \text{ эВ}.$$

Неопределенность в энергии определяется по соотношению ($\Delta t \sim \tau$):

$$\Delta E = \frac{\hbar}{\tau} = \frac{6.582 \cdot 10^{-16}}{10^{-8}} \text{ эВ} = 6.58 \cdot 10^{-8} \text{ эВ}.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{\Delta E}{E} = 2.65 \cdot 10^{-8},$$

$$\Delta \lambda = 2.65 \cdot 10^{-8} \times 0.5 \text{ мкм} = 1.33 \cdot 10^{-8} \text{ мкм}. \quad \blacksquare$$

29.4 О границах применимости квантовой механики

Собственно, мы еще с квантовой механикой даже не познакомились, но лишь подошли к ее порогу. Тем не менее, уже сейчас можно дать оценку области, в которой заведомо не будут справедливы выводимые нами соотношения. Если подходить к микромиру со стороны области применимости классической физики, то никаких проблем не возникает. В самом деле, квантовые соотношения вовсе не отменяют классических законов, но уточняют их. В макромире с большими значениями энергий и моментов количества движения квантовая дискретность просто будет незаметна, так что спокойно можно применять и квантовые, и классические законы. Разница между получаемыми с их помощью количественными результатами будет ничтожно мала, но классические законы проще. В этом смысле мы говорим об области, где справедливы законы классической физики.

Иное дело, когда мы станем продвигаться вглубь микромира. В принципе ясно, что где-то откажут и законы квантовой механики, и ученым придется придумать какую-то новую теорию. В этом курсе мы будем заниматься нерелятивистской квантовой механикой, изучающей микроректы, движущиеся со скоростями, гораздо меньшими скорости света

с. Мы встретимся и с релятивистскими объектами (фотонами и др.), но будем оговаривать такие случаи особо.

Определим теперь область справедливости нерелятивистской квантовой механики. Представим себе микрочастицу с массой m . Квантовая неопределенность ΔE ее энергии должна быть много меньше энергии покоя mc^2 (в противном случае квантовые эффекты с необходимостью будут релятивистскими, что потребует обобщения теории). Из соотношения неопределенностей (29.13) и условия применимости нерелятивистских уравнений $\Delta E \ll mc^2$ следует ограничение на интервалы времени: $\Delta t \gg \hbar/mc^2$. Характерное время $t_c = \hbar/mc^2$ является, таким образом, водоразделом между релятивистской и нерелятивистской квантовыми теориями. За это время частица может пройти расстояние не больше $ct_c = \hbar/mc$. Величина \hbar/mc — характерное расстояние, на котором проходит граница между нерелятивистской и релятивистской теориями. Для электрона оно равно $3.86 \cdot 10^{-13}$ м, а для протона — $2.1 \cdot 10^{-16}$ м. Соответствующие промежутки времени равны $t_c = 1.3 \cdot 10^{-21}$ с для электрона и $t_c = 7 \cdot 10^{-25}$ с для протона.

На рис. 29.3 по оси x в логарифмическом масштабе отложены расстояния, а по оси y — скорости. Отмечены области применимости основных физических теорий (ОТО — общая теория относительности, СТО — специальная теория относительности, КТП — квантовая теория поля, она же — релятивистская квантовая теория, она же — теория элементарных частиц). Штриховкой показаны области применимости теорий, изучавшихся нами. Правая граница заштрихованной области КМ не означает, что квантовую механику нельзя применять там, где мы привыкли пользоваться классической. Просто это делать нецелесообразно.

Обратим внимание, что рисунок ограничен с обеих сторон. Большой взрыв, в котором родилась наша Вселенная, произошел 15-20 млрд лет тому назад. За это время свет преодолел путь порядка 10^{26} м, что и определяет максимальные возможные расстояния в этом мире. На расстояниях порядка 10^{-35} м необходимо учитывать силы гравитации, квантовая теория которых пока не создана. Только очень смелые теоретики решаются серьезно обсуждать, что происходит на столь малых расстояниях. Поэтому данная область на рисунке не показана.

Подведем итоги этой главы. Мы пришли к противоречивой картине микромира. В атоме Бора использовались законы движения по классической траектории, которые в результате оказались несправедливыми.



Рис. 29.3: Диаграмма расстояние-скорость делает наглядными области применимости физических теорий: классической механики, специальной теории относительности (СТО), квантовой механики (КМ), общей теории относительности (ОТО) и квантовой теории поля (КТП). Границы между различными теориями размыты, так как они не отрицают друг друга, но развивают и дополняют. Так, КТП, занимающаяся свойствами элементарных частиц, родилась при соединении КМ и СТО, а ОТО (она же теория гравитации) — при распространении СТО и классической механики на область больших расстояний. Точка показывает электрон в атоме, свойства которого, как видно, попадают в сферу действия квантовой механики.

Расчет радиуса орбиты и импульса электрона противоречит волновым идеям де Бройля, из которых мы и выводили эти характеристики. Наконец, совершенно непонятно, что же колеблется в пространстве при движении электрона?

Контрольные вопросы

1. Что такое спектральные серии?
2. Сформулируйте постулаты Бора.
3. Какие значения могут принимать радиусы электронных орбит в атоме водорода в теории Бора?
4. Какие значения может принимать скорость электрона, находящегося в поле ядра с зарядом $+Ze$? На основании полученного результата покажите, что в природе не могут существовать ядра с $Z \geq 137$.

5. Какие значения может принимать энергия электрона в атоме водорода в теории Бора?
6. Как теория Бора объясняет спектральные серии?
7. В чем сущность гипотезы де Бройля?
8. Какова длина волны де Бройля у электрона с кинетической энергией, равной его энергии покоя?
9. Сформулируйте соотношения неопределенностей Гейзенберга.
10. Вообразите мир, в котором постоянная Планка имеет значение $\hbar = 2000 \text{ Дж} \cdot \text{с}$. Живя в этом мире, Вы назначаете свидание, которое может состояться, если Вы и Ваш партнер окажетесь в одном месте — скажем, на расстоянии порядка $\Delta x \sim 1 \text{ м}$ друг от друга. Будет ли у вас возможность спокойно пообщаться на свидании?

Глава 30

Уравнение Шредингера

Вот мы и подошли к настоящей квантовой механике. Все, что было до сих пор --- это интуитивные полуклассические представления, позволившие инкорпорировать в классическую физику идеи физики квантовой. Но этот уровень знаний недостаточен для расчетов, количественных предсказаний многих явлений. Требуется стройная система, теория движения (или распространения) микрочастиц с дуальными (волна-корпускула) свойствами.

30.1 Волна вероятности

Предыдущая глава закончилась констатацией, что мы пока не установили, что именно колеблется при движении электрона. В истории физики такое уже случалось. Когда-то при выводе уравнений электродинамики Максвелл тоже не знал, что представляют собой описываемые ими колебания и волны, но уравнения оказались верны. Поэтому отложим пока вопрос о физической природе волн де Бройля и просто введем некую “электронную” волну, т.е. функцию $\Psi(t, \vec{r})$. О ней мы знаем пока только одно: волновая функция должна описывать результаты опытов, доказывающих волновые свойства электронов (дифракцию и т.п.).

Представим мысленно эксперимент В. А. Фабриканта, в котором электроны поочередно направлялись на кристалл, играющий роль дифракционной решетки. За кристаллом помещена фотопластинка, на которой в конце концов возникают типичные дифракционные кольца. Из классической физики известно, какие математические средства описывают такую картину: обычное сложение интерферирующих волн, интенсивности которых пропорциональны $|\Psi(t, \vec{r})|^2$.

Правда, в отличие от обычной волны электрон не делится на части:

при прохождении электронов через кристалл каждый из них попадает в какую-то одну точку на фотопластинке, вызывая почернение именно здесь и нигде больше. В этом проявляются свойства электрона как частицы. Несмотря на одинаковые начальные условия электроны, как показал опыт, попадают в разные точки. О данном конкретном электроне заранее неизвестно, в какую именно точку на пластинке он попадет. В этом проявляются его волновые свойства. Дифракционная картина возникает, когда через кристалл пройдет достаточно много таких электронов. Интенсивность почернения пластинки в данной точке пропорциональна числу попавших туда частиц, то есть вероятности попадания.

В классической же физике почернение пластинки определяется интенсивностью волны, то есть квадратом модуля волновой функции. Выходит, что $|\Psi(t, \vec{r})|^2$ пропорционален вероятности обнаружить электрон в точке \vec{r} в момент времени t . Волна де Бройля — это волна вероятности! Отдельный акт взаимодействия электрона с кристаллом остается отдельным актом (электрон-частица), но результат его можно предсказать только вероятностно, статистически (электрон-волна). В этом — смысл корпускулярно-волнового дуализма. Квантовая механика создана в 1925-27 гг. В. Гейзенбергом и Э. Шредингером; вероятностная интерпретация волновой функции дана чуть позже в работах М. Борна и школы Н. Бора.

Итак, вероятность найти электрон в точке \vec{r} должна быть пропорциональна $|\Psi(t, \vec{r})|^2$. Но вероятность обнаружить электрон точно в данном месте исчезающе мала; имеет смысл говорить лишь о его попадании в малый объем dV , окружающий эту точку. Ясно, что вероятность dW обнаружить там электрон пропорциональна величине объема. Поэтому для вероятности имеем

$$dW = |\Psi(t, \vec{r})|^2 dV. \quad (30.1)$$

Иными словами, $|\Psi(t, \vec{r})|^2$ — *плотность вероятности* найти частицу в точке с координатой \vec{r} . Вероятность $W(v)$ найти частицу в каком-то конечном объеме v вычисляется с помощью сложения вероятностей, т.е. интегрированием

$$W(v) = \int_v |\Psi(t, \vec{r})|^2 dV. \quad (30.2)$$

Интегрирование в (30.2) ведется по объему v (в случае одномерного движения — по отрезку). Полная вероятность найти частицу хоть где-нибудь в пространстве должна быть равна единице. Отсюда — так на-

зываемое условие нормировки волновой функции: такой же интеграл по всему пространству равен единице, т.е.

$$\int |\Psi(t, \vec{r})|^2 dV = 1. \quad (30.3)$$

Замечание: выполнение этого условия возможно для тех задач, в которых классическая частица движется в ограниченной области пространства (финитное движение). Для других движений условие нормировки усложняется.

Наблюдаемые физические величины должны описываться действительными числами и функциями. Соответственно, мы представляли классические волны (звуковые, электромагнитные) в виде $\xi = A_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0)$. Можно было бы воспользоваться математическим формализмом комплексных чисел, основываясь на формуле Эйлера:

$$e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi,$$

где $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица. Тогда ту же волну можно было бы представить в виде действительной части выражения:

$$\xi = \operatorname{Re} \Xi, \quad \Xi = A \exp[-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})], \quad A = A_0 e^{-i\varphi_0}. \quad (30.4)$$

Начальная фаза здесь включена в комплексную амплитуду A . В применении к классическим волнам оба формализма эквивалентны, так как в конечном итоге берется только действительная часть волны. В отличие от классических волн, волна вероятности комплексна. Физические наблюдаемые выражаются через квадрат модуля волновой функции, так что и в квантовой механике они будут описываться действительными числами. Но комплексность волновой функции имеет глубокую связь с законом сохранения электрического заряда, так что применение комплексных чисел и функций в квантовой механике — не прихоть, а необходимость. Поверхность постоянной фазы в волне Ξ (30.4) распространяется вдоль волнового вектора \vec{k} , фазовая скорость волны по-прежнему равна $v = \omega/k$, так что переход к комплексным волнам не меняет привычных нам соотношений.

30.2 Общее уравнение Шредингера

Волновая функция является главным объектом изучения в квантовой механике. Говоря о каком-то состоянии в классической физике, мы подразумевали, что в момент времени $t = 0$ частица имела некие положение и

скорость (импульс), а дальнейшая ее судьба predetermined уравнениями движения Ньютона.

Состояние в квантовой механике имеет иной смысл: в момент времени $t = 0$ задана волновая функция, изменение которой регулируется пока не известным нам уравнением (Шредингера). В этом смысле теперь понимается *причинность*: в классике — точные предсказания положений и скоростей, в квантовой механике — предсказания состояний (волновых функций). Уравнения новой физики (в данном случае — уравнение Шредингера) никогда не выводятся логически из прежних принципов (иначе это будет не новая теория, а следствие старой). Но квантовомеханическое уравнение должно иметь некие классические корни, поскольку классическая механика хороша в области своей применимости. Далее мы приведем не вывод, но наводящие соображения.

Свободной частице соответствует волна де Бройля, которую мы записываем в виде классической плоской волны:

$$\Psi(t, \vec{r}) = C e^{-i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{r}} = C e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p} \cdot \vec{r})}, \quad (30.5)$$

где модуль волнового вектора \vec{k} связан с длиной волны соотношением $k = 2\pi/\lambda$, а C — амплитуда. Мы использовали уже известную связь энергии и импульса частицы с частотой и длиной волны де Бройля. Искомое уравнение для волновой функции не должно содержать E и \vec{p} , так как это — характеристики конкретного состояния частицы. Попробуем найти операции над волновой функцией свободной частицы, позволяющие исключить параметры E и \vec{p} . Имеем для производной по времени

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, \vec{r}) = E \Psi(t, \vec{r}) \quad (30.6)$$

и по пространственной координате x

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \Psi(t, \vec{r}) = p_x \Psi(t, \vec{r}). \quad (30.7)$$

Такие же уравнения возникнут при дифференцировании по y и z . Повторяя дифференцирование по координатам, получаем:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(t, \vec{r}) = p_x^2 \Psi(t, \vec{r}). \quad (30.8)$$

Складывая (30.8) с аналогичными уравнениями для вторых производных по y и z , приходим к соотношению:

$$-\hbar^2 \Delta \Psi(t, \vec{r}) = \vec{p}^2 \Psi(t, \vec{r}), \quad (30.9)$$

где знаком Δ обозначен оператор Лапласа:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

В этом месте возникает различие между релятивистским и нерелятивистским случаями. Квантовая механика — *нерелятивистская теория*, в которой $E = \vec{p}^2/2m$. Это классическое соотношение позволяет связать дифференцирование по времени в (30.6) с дифференцированием по пространственным координатам в (30.9) и тем самым исключить из уравнения зависимость от энергии и импульса частицы:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, \vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(t, \vec{r}). \quad (30.10)$$

Это уравнение вполне бы нас устроило, но написано оно пока только для свободной частицы. Легко понять, как должно выглядеть уравнение для системы с постоянным значением U_0 потенциальной энергии. Полная энергия равна сумме

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U_0,$$

так что получаем

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, \vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(t, \vec{r}) + U_0 \Psi(t, \vec{r}). \quad (30.11)$$

В случае частицы, находящейся в произвольном потенциальном поле вблизи точки \vec{r} потенциальную энергию можно считать постоянной величиной $U(\vec{r})$, так что искомое обобщение почти с очевидностью следует из уравнения (30.11) :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, \vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(t, \vec{r}) + U(\vec{r}) \Psi(t, \vec{r}). \quad (30.12)$$

Это и есть основное уравнение квантовой механики — знаменитое уравнение Шредингера. Подчеркнем еще раз, что вывести его строго невозможно, но можно угадать, исходя из наводящих соображений. Соответствие уравнения и его следствий физической реальности проверяется экспериментально. Подчеркнем некоторые свойства (30.12):

- Уравнение Шредингера по сути есть аналог классического соотношения между полной энергией E частицы и ее кинетической энергией $\vec{p}^2/2m$. Для свободной частицы они совпадают. При наличии потенциального поля это соотношение принимает вид $E = \vec{p}^2/2m + U(\vec{r})$.

Мы уже знаем, что полной энергии соответствует производная по t , компонентам импульса — производные по x , y , z , а кинетической энергии — вторые производные по пространственным координатам, поскольку импульс входит в нее во второй степени. Классической потенциальной энергии, как мы видим, в квантовой механике соответствует обычное произведение $U(\vec{r})$ на волновую функцию.

Заметим, что уравнение Шредингера линейно по искомой волновой функции. Отсюда сразу же вытекает, что

- если $\Psi(t, \vec{r})$ — решение уравнения (30.12), то $A\Psi(t, \vec{r})$ — также его решение при любой константе A . Следовательно, подбором постоянной A можно добиться выполнения условия нормировки (30.3);
- если $\Psi_1(t, \vec{r})$ и $\Psi_2(t, \vec{r})$ — решения уравнения Шредингера, то линейная комбинация $A_1\Psi_1(t, \vec{r}) + A_2\Psi_2(t, \vec{r})$ — также его решение (принцип суперпозиции, т.е. основа явления интерференции).

30.3 Операторы, симметрия и законы сохранения

Итак, состояние электрона описывается теперь волновой функцией $\Psi(t, \vec{r})$. Но куда подевались координаты, импульс и прочие величины, известные из классической теории? От классических представлений придется отказаться. Взамен у нас появились так называемые операторы, т.е. некие операции, совершаемые над $\Psi(t, \vec{r})$. Из уравнения Шредингера видно, что оно воспроизводит связь $E = T + U$ полной энергии E с кинетической T и потенциальной U , но классические величины заменены на операторы, действующие на волновую функцию Ψ . Будем обозначать оператор тем же символом, что и классическую величину, снабжая его для отличия шляпкой. Тогда уравнение Шредингера (30.12) можно записать в операторной форме, в которой отчетливо видна его связь с энергетическими соотношениями классической физики:

$$\hat{E}\Psi = \hat{T}\Psi + \hat{U}\Psi,$$

где введены операторы

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \hat{\vec{p}} = -i\hbar \vec{\nabla}, \quad \hat{T} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta. \quad (30.13)$$

Здесь $\vec{\nabla}$ — оператор градиента с компонентами:

$$\vec{\nabla} = \{\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z\},$$

квадрат которого дает оператор Лапласа Δ . Оператор координаты $\hat{\vec{r}}$ сводится к простому умножению Ψ на вектор \vec{r} ; то же справедливо для любой функции \vec{r} (в частности, для потенциальной энергии).

Мы пришли к правилу квантования, т.е. к способу перехода от известной классической системы к соответствующей ей квантовой.

Правило 1 *Классическим динамическим переменным (\vec{r}, \vec{p}) в квантовой механике соответствуют операторы $\hat{\vec{r}}$ — умножение на вектор \vec{r} и $\hat{\vec{p}} = -i\hbar\vec{\nabla}$ — дифференцирование по координатам ($\hat{p}_x = -i\hbar\partial/\partial x, \hat{p}_y = -i\hbar\partial/\partial y, \hat{p}_z = -i\hbar\partial/\partial z$).*

При этом энергии частицы $E = \vec{p}^2/2m + U(\vec{r})$ в потенциальном поле соответствует оператор

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(\vec{r}). \quad (30.14)$$

В этих обозначениях уравнение Шредингера (30.12) имеет вид:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, \vec{r}) = \hat{H} \Psi(t, \vec{r}). \quad (30.15)$$

Оператор полной энергии \hat{H} называется *гамильтонианом* (аналог функции Гамильтона в теоретической механике).

Очень важно! В классической механике законы сохранения связаны с симметрией системы: энергия — с трансляцией (сдвигом) времени $t \rightarrow t + \Delta t$, импульс — с трансляцией пространства $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \Delta \vec{r}$ и момент количества движения — с поворотами в пространстве (трансляцией углов $\varphi \rightarrow \varphi + \Delta \varphi$).

Трансляцию какой-то обобщенной координаты q производит оператор дифференцирования по этой координате. Например, для бесконечно малой трансляции $q \rightarrow q + \Delta q$ имеем по определению производной

$$\Psi(q + \Delta q) \approx \Psi(q) + \Delta q \frac{\partial}{\partial q} \Psi(q).$$

Поэтому не случайно в квантовой механике полной энергии соответствует $\partial/\partial t$, а импульсу — градиент $\vec{\nabla}$. Аналогично: оператор проекции момента количества движения на какую-то ось z пропорционален оператору

дифференцирования $\partial/\partial\varphi$ по углу поворота вокруг этой оси:

$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\varphi}. \quad (30.16)$$

30.4 Стационарное уравнение Шредингера

В теории операторов важную роль играют так называемые *собственные состояния* операторов. Это такие состояния, которые при действии данного оператора меняются тривиальным образом: умножаются на некоторое число. Это число называется *собственным значением* данного оператора, соответствующим данному собственному состоянию. Чтобы найти собственные состояния и собственные значения какого-то оператора \hat{A} надо решить уравнение

$$\hat{A}\Psi_n(t, \vec{r}) = A_n\Psi_n(t, \vec{r}),$$

где индекс n отличает одно решение от другого. Набор величин A_n , то есть набор собственных значений оператора \hat{A} , определяет его свойства.

Пример: операция поворота вокруг некоторой оси z . Роль состояний играют здесь обычные радиус-векторы. Очевидно, что при повороте все векторы меняются, кроме параллельных оси. Это и есть собственные векторы оператора поворота вокруг оси z , причем соответствующее собственное значение равно единице. Аналогичны выводы для поворота вокруг осей x и y . Произвольный поворот можно получить комбинацией этих трех поворотов. Соответственно, любой радиус-вектор можно представить как линейную комбинацию трех собственных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Ситуация с другими операторами по сути ничем не отличается от описанной: зная набор собственных состояний $\Psi_n(t, \vec{r})$, любое другое состояние $\Psi(t, \vec{r})$ можно получить с помощью линейной комбинации, т.е. с помощью принципа суперпозиции:

$$\Psi(t, \vec{r}) = \sum_n C_n \Psi_n(t, \vec{r}). \quad (30.17)$$

Связь математики с физикой реализуется в следующем правиле:

Правило 2 Измерение некой физической величины A всегда дает лишь одно из собственных значений A_n соответствующего ей оператора \hat{A} . Вероятность получить при измерении именно значение A_n определяется состоянием системы (а именно, квадратом модуля $|C_n|^2$ соответствующего коэффициента в разложении (30.17)).

Следствие: в собственном состоянии $\Psi_m(t, \vec{r})$ измерение A с вероятностью 100% даст значение A_m (так как в разложении (30.17) отличен от нуля лишь коэффициент $C_m = 1$).

Поскольку среди всех физических величин особую роль играет энергия, найдем уравнение для собственных состояний Ψ_E оператора полной энергии. Уравнение, согласно сказанному, имеет вид:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_E(t, \vec{r}) = E \Psi_E(t, \vec{r}),$$

откуда следует решение

$$\Psi_E(t, \vec{r}) = e^{-\frac{i}{\hbar} E t} \psi(\vec{r}). \quad (30.18)$$

Мы получили общий вид состояния, в котором энергия имеет определенное значение. Такие состояния называются *стационарными*. Естественно, пока невозможно сказать, чему равна энергия стационарного состояния, поскольку мы еще не указали рассматриваемую физическую систему. В уравнении (30.18) стоит некая функция $\psi(\vec{r})$, не зависящая уже от времени. Она называется волновой функцией стационарного состояния. Зависимость стационарных состояний от времени особенно проста — как для свободной частицы. Отсюда следует, что

$$|\Psi_E(t, \vec{r})|^2 = |\psi(\vec{r})|^2,$$

т.е. в стационарном состоянии плотность вероятности не зависит от времени. В этом смысле и следует понимать название “стационарное”. Подставляя решение (30.18) в общее уравнение Шредингера (30.12), получим т.н. *стационарное уравнение Шредингера*, т.е. уравнение для $\psi(\vec{r})$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}) + U(\vec{r}) \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}). \quad (30.19)$$

Подчеркнем: это — уравнение для состояний с *определенной энергией* E . В операторных обозначениях оно имеет вид $\hat{H} \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r})$, то есть представляет собой уравнение для собственных состояний гамильтониана. Задавая тот или иной вид потенциальной энергии, мы конкретизируем систему и получаем стационарное уравнение Шредингера, решения которого и описывают квантовые свойства системы.

Не следует думать, что система может быть только в стационарном состоянии. Возьмем характерный пример: пусть $\psi_1(\vec{r})$ и $\psi_2(\vec{r})$ — два неких стационарных состояния какой-то системы с разными энергиями E_1

и E_2 . Предположим, что в начальный момент времени волновая функция системы является симметричной суперпозицией этих состояний:

$$\Psi(0, \vec{r}) = \psi_1(\vec{r}) + \psi_2(\vec{r}).$$

Вопрос: что будет с системой в произвольный момент t ?

Зная, что справедлив принцип суперпозиции и что зависимость собственных состояний от времени определяется соотношениями типа (30.18), можно сразу же написать волновую функцию:

$$\Psi(t, \vec{r}) = e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} \psi_1(\vec{r}) + e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t} \psi_2(\vec{r}). \quad (30.20)$$

Плотность вероятности такого состояния зависит от времени! Введем обозначения для средней энергии $E = (E_1 + E_2)/2$ и частоты перехода $\omega = (E_1 - E_2)/\hbar$. Тогда $E_1 = E + \hbar\omega/2$, $E_2 = E - \hbar\omega/2$, и легко получаем вместо (30.20):

$$\begin{aligned} \Psi(t, \vec{r}) &= e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \left[e^{-i\frac{\omega t}{2}} \psi_1(\vec{r}) + e^{i\frac{\omega t}{2}} \psi_2(\vec{r}) \right] = \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \left[(\psi_1 + \psi_2) \cos \frac{\omega t}{2} - i(\psi_1 - \psi_2) \sin \frac{\omega t}{2} \right]. \end{aligned} \quad (30.21)$$

Видно, что в момент $t = 0$ система находится в симметричном состоянии, к моменту времени $t = \pi/\omega$ она перейдет в антисимметричное состояние, а в момент $t = 2\pi/\omega$ — снова вернется в симметричное состояние. Следовательно, система осциллирует между симметричным и антисимметричным состояниями с круговой частотой ω . Здесь усматривается аналогия с классической физикой: в рассмотренной ранее системе связанных осцилляторов (см. Ч. 4, раздел 24.4.3) возникают похожие собственные колебания (нормальные моды) и биения.

30.5 Уравнение Шредингера для простейших систем

Свободная частица, движущаяся вдоль оси x

Потенциальная энергия равна нулю ($U(x) = 0$), и производные по y и z в операторе Лапласа исчезают. Уравнение (30.19) принимает вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) = E \psi(x).$$

Введем волновой вектор k : $E = \hbar^2 k^2 / 2m$, и перепишем уравнение в виде

$$\psi''(x) + k^2 \psi(x) = 0. \quad (30.22)$$

Существует, как известно, два линейно независимых решения (30.22), так что общее решение есть суперпозиция волн: стоячих

$$A \sin(kx) + B \cos(kx)$$

или бегущих

$$Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

(первый член — волна направо, второй — налево; постоянные A и B произвольны). Аналогия: такие же решения описывают колебания свободной струны. Поскольку возможны волны с произвольной частотой, то струна не звучит (т.е. энергия частицы не квантуется). Для частицы, движущейся в произвольном направлении вдоль волнового вектора \vec{k} , справедливы те же решения при замене $kx \rightarrow \vec{k}\vec{r}$.

При решении большинства задач квантовой механики следует обратить внимание, что волновая функция должна быть непрерывной — вероятность пребывания частицы не может меняться скачком от точки к точке. Если потенциал конечен, то из уравнения Шредингера следует, что первая производная также непрерывна.

Частица в бесконечно глубокой потенциальной яме

Потенциал в этой задаче имеет вид:

$$U(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x \leq l, \\ +\infty, & \text{если } x > l \text{ или } x < 0. \end{cases} \quad (30.23)$$

Такая система соответствует частице, движущейся вдоль прямой линии и отскакивающей от абсолютно отражающих препятствий в точках $x = 0$ и $x = l$. В область бесконечного потенциала частица проникнуть не может, следовательно $\psi(x) = 0$ за пределами отрезка $[0, l]$. Внутри ямы $U(x) = 0$, и стационарное уравнение Шредингера имеет тот же вид, как и для свободной частицы. Получатся те же решения в виде суперпозиции стоячих (или бегущих) волн, но в отличие от предыдущего случая добавятся граничные условия. Именно, в точках $x = 0$ и $x = l$ волновая функция должна обращаться в нуль (поскольку она непрерывна и равна нулю вне ямы). В классической механике точно такие граничные условия имеет уравнение для закрепленной струны.

Общее решение $\psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx)$. Используем сначала первое граничное условие:

$$\psi(0) = B = 0.$$

Мы получили, что решение уравнения Шредингера должно иметь вид $\psi(x) = A \sin(kx)$. Если продолжить нашу аналогию, то можно сказать, что на струне, закрепленной в одной точке, бегущих волн не бывает: отражение от неподвижной точки обязательно порождает стоячую волну. Однако на длину волны никаких ограничений не накладывается: такая струна также не звучит.

Теперь наложим второе из граничных условий:

$$\psi(l) = A \sin(kl) = 0.$$

Здесь есть два типа решений. При $A = 0$ получаем $\psi(x) \equiv 0$, что означает отсутствие частицы в яме (вероятность найти ее всюду равна нулю). Поэтому нас интересует второе решение, когда $\sin(kl) = 0$. Это возможно лишь при некоторых значениях волнового вектора: $k_n = \pi n/l$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Так как энергия частицы связана с волновым вектором, то

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ml^2}. \quad (30.24)$$

Мы получили квантование энергии, то есть наша “струна”, закрепленная с обеих сторон, зазвучала, так как появились выделенные частоты.

Подставляя найденные разрешенные значения волнового вектора в выражение для волновой функции, получаем ее в виде:

$$\psi_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \text{ или } x > l, \\ \sqrt{\frac{2}{l}} \sin(\pi n \frac{x}{l}), & \text{если } x \in [0, l]. \end{cases} \quad (30.25)$$

Смысл квантового числа n : оно на единицу больше числа нулей волновой функции. Значение постоянной $A = \sqrt{2/l}$ определено из условия нормировки (см. задачи в последнем разделе этой главы).

Откуда же берется дискретность уровней энергии, характерная и для атома? Сравним со свободной частицей: уравнения те же, но с иными граничными условиями! Здесь возможны две постановки задачи. В первом случае исследуется состояние, которому в *классике* соответствовало бы *инфинитное движение* (задача рассеяния). Обычно в таких случаях решения возможны при *любых* значениях энергии E (как говорят, спектр *непрерывен*). Во втором случае исследуется состояние, которому в **классике** соответствует **финитное движение** в ограниченной области пространства (задача на связанные состояния). Требование конечности волновой функции во всем пространстве ведет к **квантованию энергии**.

Подчеркнем: в этом случае стационарное уравнение имеет физически приемлемые решения не всегда, а лишь при некоторых значениях E . Как следствие возникает **дискретный** спектр энергии системы.

Задача 30.21. Определить разность соседних уровней энергии ΔE для частицы в бесконечной потенциальной яме при больших значениях n . Полученный результат использовать для оценки разности соседних уровней молекул азота при комнатной температуре $T = 300$ К в сосуде. Принять массу молекулы $m = 2.3 \cdot 10^{-26}$ кг, а линейный размер сосуда $l = 0.1$ м. Сравнить результат с кинетической энергией поступательного движения молекул азота.

Решение. Используя выражение (30.24) для уровней энергии частицы в потенциальной яме, находим разность энергий соседних уровней

$$\Delta E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ml^2} [(n+1)^2 - n^2] = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ml^2} (2n+1) \approx \frac{\hbar^2 \pi^2}{ml^2} n$$

при больших значениях n . Кинетическая энергия поступательного движения молекул азота равна $E = 3k_B T/2 \approx 6,21 \cdot 10^{-21}$ Дж. Приравнявая E и выражение для энергии уровней частицы в яме, находим, что такая энергия соответствует квантовым числам порядка

$$n = \frac{l}{\pi \hbar} \sqrt{3mk_B T} \approx 5 \cdot 10^9.$$

Уже само по себе это число говорит, что мы находимся в области крайне высоких возбуждений, то есть в области справедливости классических законов. Разность соседних уровней получаем, подставляя в формулу для ΔE найденное выражение для квантового числа n :

$$\Delta E = \frac{\pi \hbar}{l} \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} \approx 2.4 \cdot 10^{-30} \text{ Дж.}$$

В электронвольтах те же характеристики имеют значения $E \approx 0.039$ эВ, $\Delta E \approx 1.5 \cdot 10^{-11}$ эВ. Относительная разность уровней ничтожно мала: $\Delta E/E \approx 4 \cdot 10^{-10}$, и потому в классической физике квантовой дискретностью пренебрегают. ■

Частица в трехмерной потенциальной яме

Это — обобщение предыдущей задачи. Частица может двигаться в кубическом объеме с длиной ребра l . Нетрудно убедиться, что общее решение для волновой функции представимо в виде произведения одномерных

волновых функций, полученных в предыдущей задаче:

$$\psi_{n_1 n_2 n_3}(x, y, z) = \left(\frac{2}{l}\right)^{\frac{3}{2}} \sin(\pi n_1 \frac{x}{l}) \sin(\pi n_2 \frac{y}{l}) \sin(\pi n_3 \frac{z}{l}). \quad (30.26)$$

Такая волновая функция соответствует очевидному факту, что движения вдоль трех осей не зависят друг от друга и каждое описывается прежними одномерными волновыми функциями. Энергия, как легко догадаться, будет равна сумме энергий движения по осям x, y, z :

$$E_{n_1 n_2 n_3} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ml^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2). \quad (30.27)$$

Состояние системы теперь определяется тремя квантовыми числами n_1, n_2 и n_3 , принимающими, как и прежде, целые значения. Здесь мы впервые сталкиваемся с важным понятием *вырождения* энергетических уровней, т.е. с ситуацией, когда разные состояния системы имеют ту же энергию. В самом деле, минимальная энергия системы достигается при минимальных значениях всех квантовых чисел, т.е. при $n_1 = n_2 = n_3 = 1$. Эта энергия равна

$$E_0 = \frac{3 \hbar^2 \pi^2}{2 ml^2}$$

и ей соответствует одна волновая функция ψ_{111} . Говорят, что основное состояние не вырождено (невырожденность состояния с минимальной энергией — общее правило). Первое возбужденное состояние получается, когда *одно* из квантовых чисел равно 2, а остальные по-прежнему равны единице; энергия его

$$E_1 = 3 \frac{\hbar^2 \pi^2}{ml^2}.$$

Но такую энергию имеют теперь три состояния с волновыми функциями $\psi_{112}, \psi_{121}, \psi_{211}$ (квантовое число, равное 2, можно выбрать тремя способами). Говорят, что кратность вырождения первого возбужденного уровня равна 3. Естественно, в другой системе может быть совершенно иная кратность вырождения (или отсутствие такового). Последующие состояния частицы в потенциальной яме с бесконечными стенками также вырождены. Ясно, что вырождение уровней связано с симметрией системы, с равноправием всех осей. Если бы размеры ямы были разными (l_1, l_2, l_3) по всем трем направлениям, то для энергии мы бы получили вместо (30.27)

$$E_{n_1 n_2 n_3} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{n_1^2}{l_1^2} + \frac{n_2^2}{l_2^2} + \frac{n_3^2}{l_3^2} \right)$$

и вырождение могло бы иметь место лишь при определенных соотношениях между длиной, шириной и высотой потенциального ящика.

Одномерный осциллятор

В классической физике система представляет собой тело, прикрепленное к пружине и колеблющееся с круговой частотой ω . Потенциальная энергия такой системы описывается выражением $U(x) = m\omega^2 x^2/2$, так что уравнение Шредингера записывается в виде:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \psi(x) = E \psi(x).$$

Отсюда можно найти решение для волновой функции основного состояния:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right).$$

Подставляя ее в уравнение Шредингера, легко убедиться, что энергия основного состояния равна $E_0 = \hbar\omega/2$. Мы не выписываем волновые функции возбужденных состояний осциллятора, но выражение для разрешенных значений энергии имеет вид:

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь воспроизводится формула Планка и нулевые колебания $E_0 = \hbar\omega/2$, полученные ранее из соотношения неопределенностей.

Трехмерный осциллятор

Эта задача является обобщением предыдущей. Как и для трехмерной потенциальной ямы с бесконечно высокими стенками, волновая функция представляется в виде произведения волновых функций одномерных осцилляторов, колеблющихся независимо вдоль осей x, y, z . Так, волновая функция основного состояния имеет вид:

$$\psi(\vec{r}) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m\omega \vec{r}^2}{2\hbar}\right),$$

а уровни энергии трехмерного осциллятора описываются формулой

$$E_{n_1 n_2 n_3} = \hbar\omega\left(n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2}\right), \quad n_i = 0, 1, 2, \dots \quad (30.28)$$

В отличие от одномерного осциллятора состояние определяется значением трех квантовых чисел n_1, n_2, n_3 . Легко понять, что все возбужденные состояния должны быть вырожденными.

30.6 Принцип соответствия Бора

Н. Бор на заре квантовой механики поставил вопрос о ее соотношении с классической. Обычные в нашем мире значения энергии велики по сравнению с характерной энергией основного состояния и расщеплением уровней: с высокой лестницы не различаем ступенек. Более научно: *при больших квантовых числах* (высоколежащих уровнях) должны воспроизводиться *классические результаты*. Покажем это на примере атома водорода.

В главе 1 в разделе об атоме Бора было получено классическое выражение для скорости электрона на орбите радиусом R :

$$v = e \sqrt{\frac{Z}{4\pi\epsilon_0 m R}}.$$

Отсюда легко получить классическую частоту вращения электрона:

$$\nu_{cl} = \frac{v}{2\pi R} = \frac{e}{2\pi R} \sqrt{\frac{Z}{4\pi\epsilon_0 m R}}.$$

Кроме того, было найдено классическое выражение для энергии электрона на орбите:

$$E = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 R},$$

позволяющее выразить радиус орбиты через энергию электрона:

$$R = \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 |E|}.$$

Подставляя это выражение в формулу для классической частоты вращения ν_{cl} , получаем

$$\nu_{cl} = \frac{4\epsilon_0}{Ze^2} \sqrt{\frac{2|E|^3}{m}}. \quad (30.29)$$

Именно на этой частоте ожидается излучение электрона в классической теории.

Кроме того, в том же разделе было выведено выражение для энергии уровня с номером n :

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{8(\varepsilon_0hn)^2}.$$

При $n \gg 1$ получаем отсюда квантовую частоту перехода ν_q между соседними уровнями:

$$\nu_q = \frac{E_n - E_{n-1}}{h} = \frac{mZ^2e^4}{8(\varepsilon_0h)^2} \left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} \right) \approx \frac{mZ^2e^4}{8(\varepsilon_0h)^2} \frac{2}{n^3}.$$

Выражая квантовое число n через энергию уровня, находим

$$n = \frac{Ze^2}{2\varepsilon_0h} \sqrt{\frac{m}{2|E_n|}}.$$

Подставляя это выражение в формулу для квантовой частоты перехода между соседними высоколежащими уровнями, приходим к окончательному результату

$$\nu_q = \frac{4\varepsilon_0}{Ze^2} \sqrt{\frac{2|E_n|^3}{m}}. \quad (30.30)$$

На этой частоте должен излучать сильно возбужденный атом Бора. Сравнивая классическую частоту (30.29) с квантовой (30.30), убеждаемся, что при той же энергии электрона они совпадают. Это свойственно не только водородоподобному атому. Аналогичный результат получается для бесконечной потенциальной ямы, этот же вывод можно сделать и для прочих систем. Следовательно, соблюдается принцип Бора, и классическая механика действительно является предельным случаем квантовой.

Задача 30.22. Используя формулы и данные задачи 30.21., продемонстрировать справедливость принципа соответствия Бора для молекул азота в сосуде.

Решение. При переходе молекул между уровнями с разностью энергий ΔE излучается квант света с энергией $h\nu = \Delta E$, откуда находим

$$\nu = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}.$$

Кроме того, классическая скорость молекул азота равна $v = \sqrt{3k_B T/m}$ и они пролетают сосуд от стенки до стенки и обратно за время $\tau = 2l/v$

(период классического движения). Обратная величина есть классическая частота

$$\nu_{cl} = \frac{v}{2l} = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}.$$

Именно на этой частоте классическая физика предсказывает электромагнитное излучение. Принцип соответствия Бора заключается в том, что совпадают обе частоты, квантовая (при переходах между высоковозбужденными состояниями) и классическая. То же самое справедливо, как мы видели, для атома Бора. Если подставить численные значения, то для частоты излучения в данной задаче получится величина $\nu \approx 3.7$ кГц, что соответствует длине волны $\lambda = c/\nu \approx 80$ км — сверхдлинные радиоволны. ■

30.7 Отражение и туннелирование частиц

До сих пор мы имели дело с задачами на связанные состояния. Рассмотрим теперь примеры инфинитного движения частиц, когда они могут уходить на бесконечно большие расстояния. В простейшем случае движения вдоль одной из координатных осей задача рассеяния частиц сводится к задаче взаимодействия частицы с неким потенциальным барьером. Мы рассмотрим несколько типов барьеров простой прямоугольной формы, чтобы усвоить характерные особенности этого типа квантовых явлений.

Низкий бесконечный барьер

Потенциальная энергия имеет вид:

$$U(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \quad (\text{область 1}), \\ U, & \text{при } x > 0 \quad (\text{область 2}). \end{cases} \quad (30.31)$$

Слово "низкий" означает, что высота барьера U меньше энергии частицы E (рис. 30.1). Решим уравнение Шредингера отдельно для каждой из областей. В области 1 потенциал равен нулю и мы имеем то же общее решение для свободной частицы:

$$\psi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}, \quad E = \frac{\hbar^2 k_1^2}{2m},$$

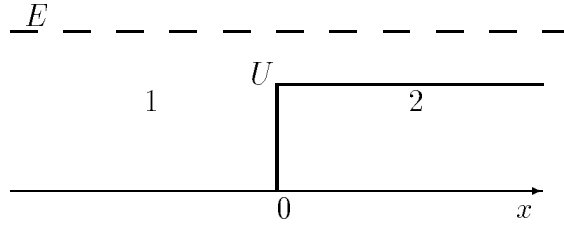


Рис. 30.1: Низкий потенциальный барьер. пунктиром показана энергия налетающей слева частицы, цифрами — номера областей с различной потенциальной энергией

где A и B — амплитуды падающей и отраженной волны, соответственно. В области 2 уравнение Шредингера имеет вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x) + U\psi(x) = E\psi(x).$$

В этой области меняется кинетическая энергия (и импульс) частицы, и мы должны ввести другой волновой вектор (обозначим его k_2 в отличие от прежнего k_1):

$$E - U = \frac{\hbar^2 k_2^2}{2m}.$$

Тогда очевидно, что решение уравнения Шредингера в области 2 будет иметь тот же вид, что и для области 1 с заменой k_1 на k_2 . Однако из физических соображений ясно, что в области 2 не может быть волны, распространяющейся справа налево (в бесконечно удаленной точке ей не от чего отражаться). Поэтому волновая функция в этой области соответствует прямой волне:

$$\psi_2(x) = C e^{ik_2 x}.$$

По сути дела, здесь мы снова использовали некое граничное условие, хотя и иное, нежели для задачи о связанном состоянии. Нам осталось определить только амплитуды A , B , C .

Для этого мы должны вспомнить, что $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ — значения одной волновой функции в разных пространственных областях. Эта волновая функция должна быть непрерывна вместе со своей первой производной по переменной x . Непрерывность функции в точке $x = 0$ означает, что должно выполняться условие

$$\psi_1(0) = \psi_2(0), \quad \text{откуда} \quad A + B = C.$$

Непрерывность первой производной волновой функции означает выполнение равенства

$$\psi_1'(0) = \psi_2'(0), \quad \text{откуда} \quad k_1(A - B) = k_2 C.$$

Решение двух полученных уравнений дает

$$C = A \frac{2k_1}{k_1 + k_2}, \quad B = A \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}.$$

Амплитуда падающей волны остается не определенной: ясно, что она зависит от интенсивности потока частиц. Важны не сами амплитуды, а отношение R квадратов их модулей, т.е. интенсивностей отраженной и падающей волн:

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2. \quad (30.32)$$

Величина R называется *коэффициентом отражения* частицы от низкого барьера. По физическому смыслу это — вероятность отражения частицы от барьера. Соответственно, величина $D = 1 - R = 4k_1k_2/(k_1 + k_2)^2$, называемая *коэффициентом прохождения*, определяет вероятность проникновения частицы в правую область. Удивительно, что частица имеет шанс отразиться от низкого барьера и повернуть назад. В классической физике частица всегда ($R = 0$) проникает за барьер, если ей хватает на это энергии. Например, с точки зрения классической физики электрон с энергией 10 эВ, влетевший в конденсатор с тормозящим полем 5 В безусловно преодолеет торможение и продолжит свой путь с уменьшенной энергией 5 эВ. В квантовой же теории не равна нулю вероятность того, что электрон отразится от поля конденсатора и повернет назад. Коэффициент отражения можно измерить, направляя поток частиц на барьер и измеряя долю отраженных от него частиц.

Высокий бесконечный барьер

Потенциальная энергия имеет тот же вид, но энергия частицы меньше высоты барьера: $E < U$ (рис. 30.2). Решение в области 1 остается прежним: суперпозиция прямой и отраженной волн. В области же 2 из-за обратного соотношения между энергией частицы и высотой барьера волновой вектор становится мнимым:

$$k_2 = i\kappa, \quad \text{где } \kappa = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U - E)}.$$

При подстановке мнимого волнового вектора $k_2 = i\kappa$ в выражение (30.32) для коэффициента отражения R получаем, что $R = 1$. Как и в классике, частица с энергией, меньшей высоты бесконечного барьера, наверняка

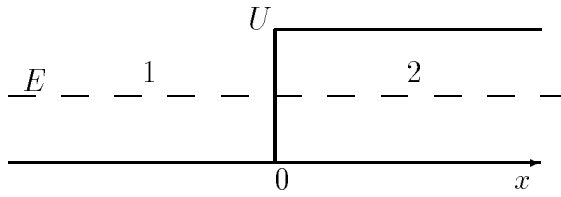


Рис. 30.2: Высокий потенциальный барьер

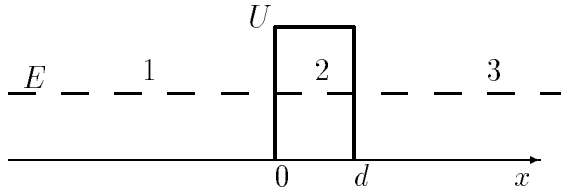


Рис. 30.3: Конечный потенциальный барьер

отразится от него. Правда, в классической физике частица вовсе не может проникнуть под барьер. Наше же решение уравнения Шредингера для области 2 в случае высокого барьера становится равным

$$\psi_2(x) = Ce^{-\kappa x}.$$

Это уже не совсем волна, а экспоненциально затухающая функция. Как и в случае низкого барьера, отброшено нефизическое решение — экспоненциально растущая функция вида $e^{\kappa x}$. Под глубиной проникновения частицы под барьер d принято понимать расстояние, на котором интенсивность потока (вероятность) ослабевает в e раз. Из выражения для $\psi_2(x)$ следует, что $d = 1/(2\kappa)$.

Конечный потенциальный барьер

Потенциальная энергия имеет вид:

$$U(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 & (\text{область 1}), \\ U, & \text{при } 0 \leq x \leq d & (\text{область 2}), \\ 0, & \text{при } x > d & (\text{область 3}). \end{cases} \quad (30.33)$$

Ясно, что происходит при $E > U$: с некой вероятностью частица может отразиться от барьера. Наиболее интересен случай $E < U$ (рис. 30.3). Мы видели, что интенсивность (квадрат модуля амплитуды) волны убывает под барьером и на расстоянии d становится меньше в $\exp(-2d\kappa)$ раз. Но в этой точке барьер кончается, так что волна выйдет на свободу с уменьшенной амплитудой. Отношение интенсивностей выходящей и падающей волн называется *коэффициентом прозрачности* D (он же равен

вероятности прохождения через барьер). Из наших рассуждений следует приближенное выражение для него:

$$D \approx \exp(-2\kappa d) = \exp \left[-\frac{2}{\hbar} d \sqrt{2m(U - E)} \right]. \quad (30.34)$$

Получая D , мы опустили некие множители перед экспонентой, что по физическому смыслу означает пренебрежение процессами, когда частица, прежде чем выйти из-под барьера, испытает многократное отражение от его стенок. При высоком и широком барьере ($D \ll 1$) вклад таких процессов невелик и сделанное приближение оправдано.

Проникновение частицы сквозь конечный потенциальный барьер возможно в квантовой механике, но категорически запрещено классической. В самом деле, формально вектор $\hbar\kappa$ играет роль импульса (мнимого), так что кинетическая энергия $T = -\hbar^2\kappa^2/2m$ становится отрицательной. Дело спасают соотношения неопределенностей. Модуль (мнимой) скорости частицы имеет порядок $v \approx \hbar\kappa/m$, так что время туннелирования $\Delta t \approx dm/\hbar\kappa$. Неопределенность в “кинетической” энергии $\Delta T \approx \hbar/2\Delta t \approx \hbar^2\kappa/2dm$. Из полученных результатов для коэффициента прозрачности видно, что эффект туннелирования заметен, если $\kappa d < 1$. Но тогда

$$\Delta T > \frac{\hbar^2\kappa^2}{2m} = U - E.$$

Получается, что неопределенность в кинетической энергии частицы под барьером больше самого значения кинетической энергии. Поэтому нельзя утверждать, что под барьером кинетическая энергия отрицательна. Скорее, она “размыта” настолько, что частица может как бы перепрыгнуть не слишком большой барьер. В случае же высокого и широкого барьера “размытость” кинетической энергии должна быть очень велика, что возможно лишь на очень короткое время, за которое частица не успевает проскочить за барьер. Поэтому в этом случае коэффициент прозрачности становится экспоненциально малым. По-другому: туннелирование заметно при ширине барьера порядка длины волны де Бройля.

Барьер произвольной формы можно представить в виде последовательности прямоугольных барьеров; теорема об умножении вероятностей ведет к появлению суммы (интеграла) в экспоненте, так что вместо (30.34) имеем

$$D \approx \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{2m(U(x) - E)} \right]. \quad (30.35)$$

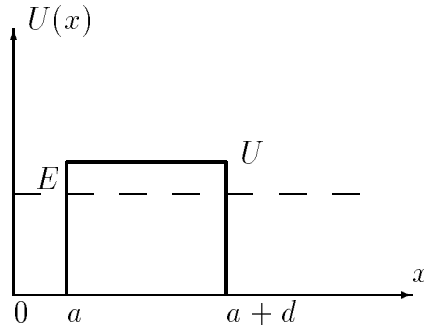


Рис. 30.4: Частица в потенциальной яме, образованной непроницаемым препятствием и конечным барьером

Интеграл берется между точками поворота ($U(x_{1(2)}) = E$), в которых классическая частица должна изменить направление движения.

Задача 30.23. Электрон находится в одномерной потенциальной яме шириной $a = 10^{-10}$ м (рис. 30.4) и имеет энергию $E = 1.5$ эВ. С одной стороны ямы потенциальная энергия $U(x)$ бесконечна, а с другой стороны выйти из ямы электрону мешает потенциальный барьер высотой $U = 2$ эВ и шириной $d = 3 \cdot 10^{-10}$ м. Оценить время жизни τ электрона в яме.

Решение. Скорость электрона в яме $v = \sqrt{2E/m}$ и за промежуток времени t он подойдет к барьеру $vt/2a$ раз. При каждом подходе вероятность туннелирования равна D , так что вероятность туннелирования W_t за время t равна

$$W_t \approx D \frac{vt}{2a} = t \frac{D}{a} \sqrt{\frac{E}{2m}}.$$

Вероятность W_t увеличивается с ростом промежутка времени t . При некотором значении $t = \tau$ вероятность туннелирования станет равной единице и электрон вырвется из ямы. Отсюда получаем для времени жизни электрона в яме оценку:

$$\tau \approx \frac{a}{D} \sqrt{\frac{2m}{E}} \approx \frac{a}{c} \sqrt{\frac{2mc^2}{E}} \exp \left[\frac{2d}{\hbar} \sqrt{2m(U - E)} \right].$$

Теперь остается подставить численные данные. Для упрощения вычислений имеет смысл отдельно рассчитать коэффициент прозрачности и предэкспоненциальный множитель. Имеем:

$$\tau = \frac{a}{cD} \sqrt{\frac{2mc^2}{E}} = \frac{10^{-10}}{3 \cdot 10^8 \times D} \sqrt{\frac{2 \times 0.511 \cdot 10^6}{1.5}} \approx \frac{0.275 \cdot 10^{-15} \text{ с}}{D}.$$

Теперь осталось рассчитать коэффициент прозрачности:

$$\begin{aligned} D &\approx \exp \left[-\frac{4\pi d}{\lambda_C} \sqrt{\frac{2(U-E)}{mc^2}} \right] = \\ &= \exp \left[-\frac{4\pi \times 3 \cdot 10^{-10}}{2.426 \cdot 10^{-13}} \sqrt{\frac{2 \times (2 - 1.5)}{0.511 \cdot 10^6}} \right] \approx 0.114. \end{aligned}$$

Получаем окончательно:

$$\tau \approx \frac{0.275 \cdot 10^{-15}}{0.114} \approx 2.4 \cdot 10^{-15} \text{ с} = 2.4 \text{ фс}.$$

Даже по масштабам микромира это время мало: прежде чем электрон просочится сквозь барьер свет успеет пройти расстояние всего лишь в 0.7 мкм. ■

Прозрачность барьера сильно зависит от энергии частицы в яме и от ширины и высоты барьера. Например, при увеличении ширины барьера в два раза новый коэффициент прозрачности будет равен, как легко догадаться, квадрату старого. Для электрона тогда получится значение $D = 0.0013$ и его время жизни в яме увеличится до $\tau = 21$ фс. Это и объясняет отсутствие туннелирования в обычном мире с его высокими и широкими потенциальными барьерами.

Задача 30.24. Решить предыдущую задачу, если вместо электрона в ту же яму помещен протон.

Решение. Чтобы не решать аналогичную задачу с самого начала, можно воспользоваться результатами предыдущей. Протон массивнее электрона в $n = 1836$ раз. В коэффициент прозрачности масса частицы входит под квадратным корнем в показателе экспоненты. При изменении массы в n раз в показателе экспоненты появится множитель \sqrt{n} и новый коэффициент прозрачности будет равен старому, возведенному в степень $\sqrt{n} = \sqrt{1836} \approx 42.85$. Используя данные предыдущей задачи, получаем

$$D \approx (0.114)^{42.85} = 3.9 \cdot 10^{-41}.$$

Предэкспоненциальный множитель также умножится на \sqrt{n} и время жизни протона в потенциальной яме будет равно

$$\tau \approx \frac{42.85 \times 0.275 \cdot 10^{-15}}{D} \approx 3 \cdot 10^{26} \text{ с} \approx 10^{19} \text{ лет}.$$

Получилась столь огромная величина, что протон будет жить в яме вечно: время существования Вселенной “всего” 15 млрд лет. ■

Эти две задачи демонстрируют сильную зависимость проницаемости барьера от массы частицы.

30.8 Оптическая аналогия прохождения частицы над барьером

В этом разделе мы покажем, что прохождение квантовой частицы через низкий потенциальный барьер аналогично отражению света на границе двух полубесконечных сред. Далее, прохождение частицы через потенциальный барьер конечной ширины может быть описано как множественное отражение классических волн, и в результате опять-таки мы придем к известным результатам оптики. Целью данного раздела является демонстрация тесной связи различных областей физики.

Ступенчатый потенциал

Этот потенциал мы снова изобразим на рис. 30.5.

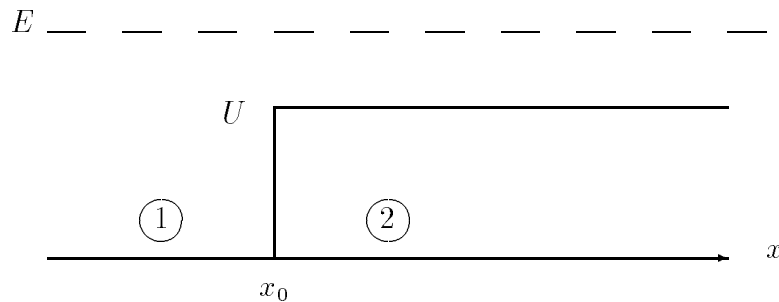


Рис. 30.5: Прохождение частицы над ступенчатым барьером эквивалентно нормальному падению света из вакуума (1) на полубесконечную среду (2) с показателем преломления $n = 1/\sqrt{1 - U/E}$.

Установление аналогии между квантовой механикой и светом означает, что мы хотим найти такие замены квантовомеханических характеристик движения частицы на характеристики света, чтобы формулы квантовой механики перешли в соответствующие формулы для распространения света. Процедура замены будет изображена в формулах двойными стрелками, причем слева будут стоять квантовомеханические величины, а справа — оптические. От этих формул следует отличать равен-

ства, где по обе стороны стоят величины, относящиеся либо к частице, либо к световой волне.

Распространение квантовой частицы описывается в терминах ее волнового вектора $k = \sqrt{2mT}/\hbar = \sqrt{2m(E - U)}/\hbar$, где T — кинетическая энергия частицы. Здесь и далее мы выписываем для частицы формулы, относящиеся к области барьера; соотношения для частицы вне барьера получаются при $U = 0$. Скорость частицы дается соотношением:

$$v = \frac{\hbar k}{m}. \quad (30.36)$$

Введем прежде всего показатель преломления n среды 2, соответствующей области барьера: его естественно определить, как отношение скоростей частицы в областях 1 и 2:

$$\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E - U}} = \frac{1}{\sqrt{1 - U/E}} \longleftrightarrow n. \quad (30.37)$$

При $U = 0$ получаем $n = 1$ — показатель преломления вакуума.

Волновой вектор световой волны связан с круговой частотой соотношением $k = \omega n/c$. Мы предположим также, что волновой вектор частицы перейдет при искомой замене в волновой вектор света, т.е.

$$k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E - U)} \longleftrightarrow \frac{n\omega}{c}. \quad (30.38)$$

Из соотношения $\omega = kc/n$ для среды без дисперсии следует групповая скорость света $d\omega/dk = c/n$, в которую при искомой замене должна перейти скорость частицы v . Тогда уравнение (30.36) дает:

$$\frac{\hbar k}{m} \longleftrightarrow \frac{c}{n}. \quad (30.39)$$

Разделив уравнение (30.38) на (30.39), находим еще одну замену:

$$m \longleftrightarrow \frac{\hbar\omega}{c^2} n^2. \quad (30.40)$$

Конечно, “масса”, стоящая здесь в правой части, ничего общего не имеет с массой фотона, которая равна нулю. Можно назвать ее “эффективной массой фотона в среде”, и в вакууме, при $n = 1$, она равна $\hbar\omega/c^2$. Эта величина соответствует известной релятивистской связи масса-энергия, и она возникает при изучении влияния гравитационного поля на распространение световых лучей.

Как бы то ни было, но суть в том, что указанные замены, как мы увидим, переводят формулы квантовой механики в формулы оптики.

Рассматривая прохождение частицы над низким потенциальным барьером (см. ступенчатый потенциал на рис. 30.5), мы уже вывели коэффициент прохождения, который здесь обозначим D_s :

$$D_s = \frac{4k_1k_2}{(k_1 + k_2)^2} = \frac{4(k_1/k_2)}{(1 + k_1/k_2)^2},$$

$$k_1 = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}, \quad k_2 = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E - U)}, \quad (30.41)$$

Коэффициент отражения $R_s = 1 - D_s$ (30.32) переписываем в виде:

$$R_s = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 = \left(\frac{k_1/k_2 - 1}{k_1/k_2 + 1} \right)^2. \quad (30.42)$$

Применяя вышеуказанные замены, сводящиеся в данном случае к замене $k_1/k_2 \rightarrow n$, мы записываем соответствующие коэффициенты прохождения и отражения для света, падающего перпендикулярно из вакуума на среду с показателем преломления n :

$$D_s = \frac{4n}{(n + 1)^2}, \quad R_s = \left(\frac{n - 1}{n + 1} \right)^2. \quad (30.43)$$

В оптике точно такие формулы называются формулами Френеля для относительной интенсивности отраженного и преломленного света при угле падения 90° . Мы еще раз убедились, что физика (или природа) — едина, и квантовая механика имеет глубокие корни не только в классической механике, но и в волновой оптике.

Прямоугольный барьер конечной ширины

Потенциальный барьер показан на рис. 30.6. Решение задачи можно выполнить стандартным образом, записывая суперпозицию плоских волн для каждой из трех областей 1, 2 и 3 и сшивая затем решения, чтобы найти амплитуды волн. Однако мы заменим такой рутинный способ на классическое рассмотрение прохождения волн, что позволит выявить физический смысл получающегося результата.

Заметим прежде всего, что конечный барьер можно рассматривать как наложение двух ступенчатых барьеров, расположенных в точках $x = x_0$ и $x = x_0 + d$. Это замечание дает возможность использовать ранее полученные формулы.

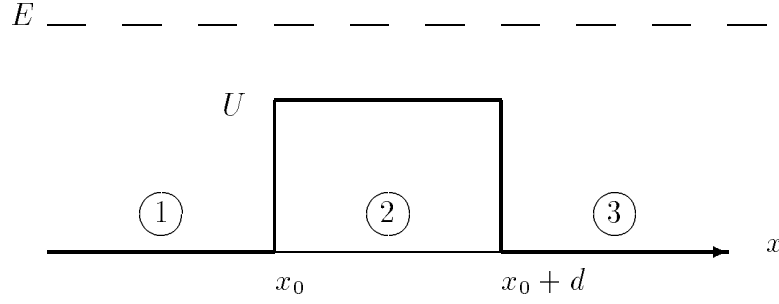


Рис. 30.6: Прохождение частицы над конечным прямоугольным барьером. Процесс эквивалентен многократным отражениям от барьера, показанного на рис. 30.5.

Пусть квантовая волна с амплитудой, равной единице, движется слева направо и проникает в область над барьером в точке x_0 . Вследствие частичного отражения ее амплитуда уменьшается и становится равной $\sqrt{D_s}$, где D_s — коэффициент прозрачности ступенчатого барьера. Далее она распространяется до точки $x = x_0 + d$, приобретая на пути сдвиг фазы $\Delta\phi = id(k_2 - k_1)$ по сравнению с фазой свободной частицы в этой же точке. Здесь она волна снова встречается со ступенчатым барьером, и в результате ее амплитуда вновь уменьшается на множитель $\sqrt{D_s}$. В результате волна выйдет за барьер с амплитудой

$$A^{(0)} = D_s \exp[id(k_2 - k_1)]. \quad (30.44)$$

Но мы учли только часть волны, выходящей наружу. Пришедшая в точку $x = x_0 + d$ волна частично отражается от нее (дополнительный множитель $\sqrt{R_s}$ в амплитуде), идет назад в точку $x = x_0$, снова отражается там (множитель $\sqrt{R_s}$), возвращается назад в точку $x = x_0 + d$, где и выходит наружу. Полный пройденный этой частью волны путь равен $3d$, что дает сдвиг фазы $\Delta\phi = id(3k_2 - k_1)$. В результате эта часть волны выйдет за барьер с амплитудой

$$A^{(2)} = D_s R_s \exp[id(3k_2 - k_1)]. \quad (30.45)$$

Аналогичным образом происходят процессы с $2n$ отражениями внутри барьера, и каждый из них приводит к волне с амплитудой

$$A^{(2n)} = D_s R_s^n \exp[(2n + 1)idk_2 - idk_1]. \quad (30.46)$$

Амплитуда A_r результирующей волны получается суммированием выражения (30.46) по всем n от нуля до бесконечности:

$$A_r = \sum_{n \geq 0} A^{(2n)} = D_s e^{-id(k_1 - k_2)} \sum_{n \geq 0} (R_s e^{2idk_2})^n = \frac{D_s e^{-id(k_1 - k_2)}}{1 - R_s e^{2idk_2}}. \quad (30.47)$$

Модуль амплитуды A_r прошедшей над барьером волны даст нам коэффициент прохождения D_r :

$$\begin{aligned} D_r &= \frac{D_s^2}{(1 - R_s e^{2idk_2})(1 - R_s e^{-2idk_2})} = \frac{(1 - R_s)^2}{1 + R_s^2 - 2R_s \cos 2dk_2} = \\ &= \frac{(1 - R_s)^2}{(1 - R_s)^2 + 4R_s \sin^2 dk_2}. \end{aligned} \quad (30.48)$$

Подставляя сюда квантовомеханическое выражение (30.42) для R_s , получаем:

$$D_r = \frac{4k_1^2 k_2^2}{4k_1^2 k_2^2 + (k_1^2 - k_2^2)^2 \sin^2(dk_2)}. \quad (30.49)$$

Стандартное решение уравнения Шредингера дает в точности такой же результат. Переходя к оптике, заменяем R_s на выражение (30.43) и k_2 — на $\omega n/c$. Получаем тогда коэффициент прозрачности образца конечной толщины d при нормальном падении света с частотой ω :

$$D_r = \left[1 + \left(\frac{n^2 - 1}{2n} \right)^2 \sin^2 \left(d \frac{\omega}{c} n \right) \right]^{-1}. \quad (30.50)$$

Это выражение также в точности воспроизводит результат волновой оптики.

Подобным образом можно рассмотреть отраженную от барьера волну, но результат нам уже известен: коэффициент отражения от конечного барьера можно вычислить по формуле $R_r = 1 - D_r$.

Изучая формулы (30.49) и (30.50), мы обнаруживаем “окна прозрачности” при некоторых значениях частоты падающего света, когда $D_r = 1$, $R_s = 0$, т.е. нет никакой отраженной волны. Это случается при $dk_2 = \pi m$, $m = 1, 2, 3, \dots$, т.е. когда четное число полуволен (или целое число волн) света в *среде* укладывается в двойной ширине барьера: $2d = m\lambda_2$. В обратном случае, когда двойная ширина барьера равна нечетному числу полуволен ($2d = (2m + 1)\lambda_2/2$), мы приходим к минимальному значению коэффициента прозрачности:

$$(D_r)_{\min} = \frac{4k_1^2 k_2^2}{(k_1^2 + k_2^2)^2} = \frac{4n^2}{(n^2 + 1)^2}. \quad (30.51)$$

В случае $E < U_0$ мы имеем дело с туннелированием — частица “движется” внутри барьера с “мнимым” волновым вектором

$$k_2 = i\kappa_2, \quad \kappa_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U - E)}. \quad (30.52)$$

В этом случае тригонометрическая функция перейдет в гиперболическую ($\sin(dk_2)/k_2 = \text{sh}(d\kappa_2)/\kappa_2$), и из уравнения (30.49) следует выражение для коэффициента прохождения:

$$D_r = \frac{4k_1^2 \kappa_2^2}{4k_1^2 \kappa_2^2 + (k_1^2 + \kappa_2^2)^2 \text{sh}^2(d\kappa_2)} \quad (30.53)$$

Если, как это обычно бывает, аргумент $d\kappa_2 \gg 1$, то доминирует член с гиперболическим синусом, причем $\text{sh}^2(d\kappa_2) \approx \exp(-2d\kappa_2)$. Пренебрегая также предэкспоненциальными множителями, получаем уже знакомое выражение (30.34):

$$D_r \approx \exp\left(-\frac{2d}{\hbar} \sqrt{2m(U - E)}\right). \quad (30.54)$$

Прохождение света через многослойную структуру

В этом разделе мы рассмотрим прохождение частицы над потенциальным барьером, составленным из N прямоугольных конечных барьеров шириной d , причем межбарьерное расстояние всюду одинаково и равно b (рис. 30.7).

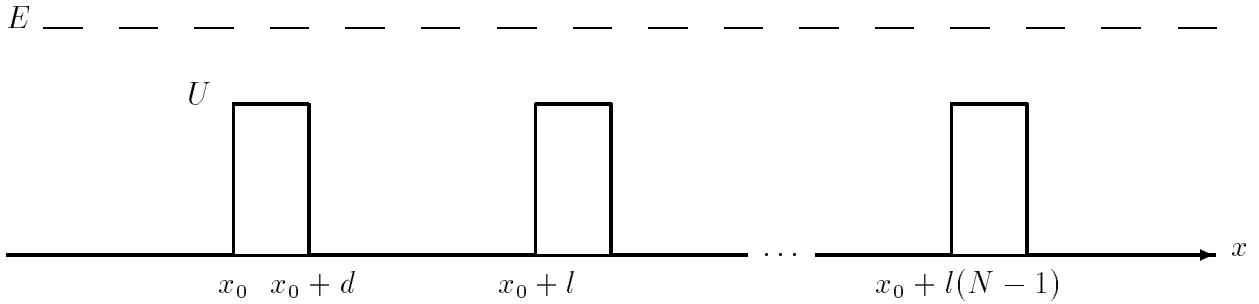


Рис. 30.7: Многослойная структура с периодом $l = d + b$, образованная N прямоугольными потенциальными барьерами шириной d и межбарьерным расстоянием b .

В принципе решение задачи о нахождении коэффициента прохождения $D^{(N)}$ через такой барьер может быть решена описанными выше способами. Сейчас нам важно только понять основной физический результат, так что ниже следующие формулы приводятся без вывода и только для справки. Выражение для коэффициента прохождения имеет вид:

$$D^{(N)} = \left[1 + \left(\frac{1}{D_r} - 1 \right) \frac{\sin[h] Nkl}{\sin[h] kl} \right]^{-1}, \quad (30.55)$$

где D_r — коэффициент прохождения через одиночный прямоугольный барьер, вычисленный выше (при $N = 1$ получаем из (30.55) $D^{(1)} = D_r$). Величина k называется *квазиволновым вектором* (для отличия от волновых векторов частицы k_1 и k_2 мы набираем ее прямым шрифтом).

В случае света мы используем для D_r результат (30.50). Связь квазиволнового вектора с частотой падающего света и показателем преломления дается тогда выражением:

$$kl = \begin{cases} \arccos S, & \text{если } |S| \leq 1, \\ \ln(|S| + \sqrt{S^2 - 1}), & \text{если } |S| \geq 1, \end{cases} \quad (30.56)$$

где

$$S = \cos\left(d\frac{\omega}{c}n\right) \cos\left(b\frac{\omega}{c}\right) - \frac{n^2 + 1}{2n} \sin\left(d\frac{\omega}{c}n\right) \sin\left(b\frac{\omega}{c}\right) \quad (30.57)$$

Наконец, входящие в (30.55) функции определены как

$$\sin[h]x = \begin{cases} \sin x, & \text{если } |S| \leq 1, \\ \operatorname{sh} x, & \text{если } |S| \geq 1. \end{cases} \quad (30.58)$$

Ясно, что для частот, при которых абсолютно прозрачен прямоугольный барьер ($D_r = 1$), будет прозрачен и наш составной барьер ($D^{(N)} = 1$ в этом случае, как следует и из формулы (30.55)). В дополнение появятся и новые окна прозрачности. Здесь ситуация очень похожа на случай с дифракционной решеткой (см. Ч. IV, раздел 30.5). Численное решение показано на рис. 30.8, где для конкретности мы положили $n = 1.52, b = 0.9d$. Левый рисунок представляет собой коэффициент прохождения для одного, двух и четырех барьеров, правый — для десяти барьеров. Последний случай, когда число барьеров велико ($N \gg 1$) представляет для нас особый интерес. Тенденции, обнаруживающиеся для $N = 10$, в пределе $N \rightarrow \infty$ станут только отчетливее. А именно: с ростом N некоторые минимумы становятся глубже и шире, и в пределе значение коэффициента прохождения в них стремится к нулю. Наоборот, амплитуда колебаний $D^{(N)}$ при других частотах становится меньше и коэффициент прохождения стремится к единице. Физическое объяснение этого явления заключается в том, что выполнении определенных условий отраженные от концов прямоугольных барьеров волны взаимно компенсируют, гасят друг друга.

Подчеркнем еще раз: для предельного случая периодической структуры ($N \rightarrow \infty$) зависимость коэффициента прохождения $D^{(\infty)}$ от частоты падающего света такова, что

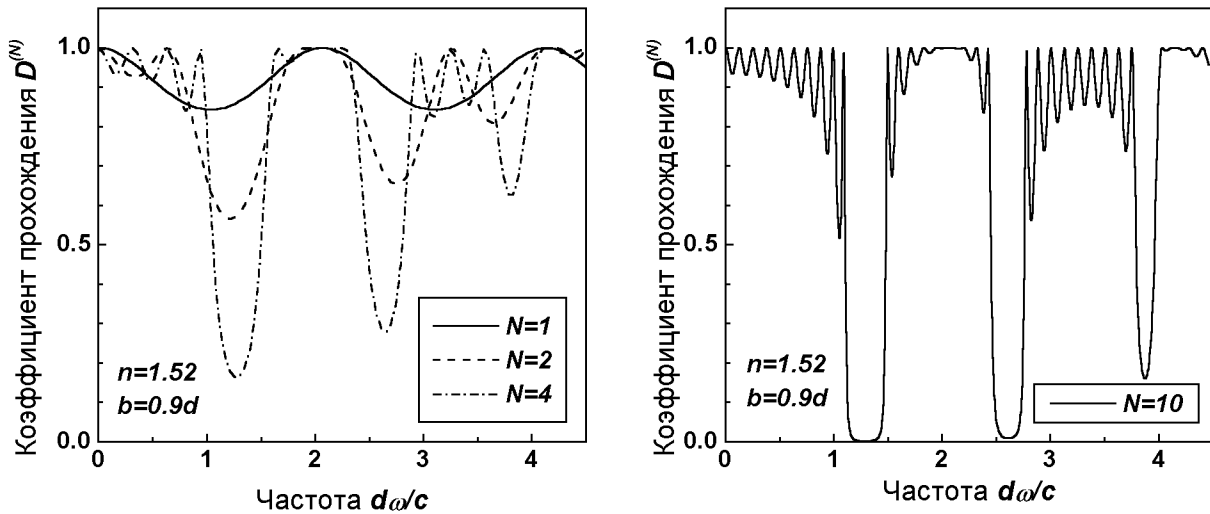


Рис. 30.8: Коэффициент прохождения в зависимости от частоты падающего света для малого (слева) и большого (справа) числа барьеров. Видна тенденция формирования при $N \rightarrow \infty$ широких минимумов (т.н. запрещенных зон, непрозрачных для света или частицы) и максимумов с $D \rightarrow 1$ (т.н. разрешенных, абсолютно прозрачных зон).

- имеются целые полосы частот, в которых $D^{(\infty)} = 0$; для таких частот составной барьер непрозрачен, свет этих частот полностью отражается от структуры.
- для других же частот, наоборот, $D^{(N)} = 1$, т.е. для них барьер полностью прозрачен, не происходит никакого отражения, свет свободно распространяется в такой структуре (на этом явлении основано создание т.н. просветленных объективов).

Аналогичное явление происходит и для квантовомеханической частицы, распространяющейся в периодическом потенциальном поле. При некоторых значениях энергии частицы бесконечная периодическая последовательность потенциальных барьеров становится для нее совершенно непрозрачной, даже если энергия частицы превышает высоту барьера. При других энергиях, наоборот, периодическая потенциальная структура становится для частицы абсолютно прозрачной. Так возникают запрещенные и разрешенные энергетические зоны в кристалле, и мы с ними в свое время познакомимся поближе.

Контрольные вопросы

1. В чем заключается вероятностная интерпретация волновой функции?

2. Что такое условие нормировки волновой функции и в чем его физический смысл?
3. Запишите общее уравнение Шредингера. Какому соотношению классической физики оно соответствует?
4. Как действует на волновую функцию оператор импульса \hat{p} ?
5. Как действует на волновую функцию оператор координаты \hat{r} и любая функция этого оператора $f(\hat{r})$?
6. Что такое гамильтониан системы?
7. Запишите стационарное уравнение Шредингера.
8. При решении стационарного уравнения Шредингера для некоторой системы получается ряд значений энергии: E_1, E_2, E_3, \dots . Может ли экспериментатор получить какое-то иное значение при измерении энергии этой системы?
9. Что такое вырождение энергетических уровней?
10. Дайте наглядное объяснение, почему квантуется энергия частицы, находящейся в бесконечно глубокой потенциальной яме.
11. Что такое нулевые колебания квантового осциллятора? Почему их существование неизбежно?
12. * Сформулируйте принцип соответствия Н. Бора.
13. В бесконечно глубокой потенциальной яме расстояние между высоколежащими уровнями возрастает с ростом номера уровня n (см. (30.24)). В то же время, казалось бы, принцип соответствия Бора требует, чтобы уровни сгущались к классическому значению $h\nu_{cl}$. Покажите, что принцип соответствия справедлив и для этой системы.
14. Пусть частица налетает на потенциальный барьер, причем ее энергия больше высоты барьера: $E > U$. Можно ли по результату такого процесса обнаружить разницу между предсказаниями классической и квантовой теорий?
15. Что такое эффект туннелирования? Почему он не наблюдается в нашей повседневной жизни?
16. Металлическая шайба массой $m = 10$ г скользит по гладкой поверхности со скоростью $v_0 = 1$ м/с. На ее пути стоит небольшая горка с гладкими склонами. Высота горки $H = 5.5$ см, ее ширина $d = 10$ см. Как известно из курса механики, начальная скорость шайбы позволяет ей подняться лишь на высоту $H_0 = v^2/2g = 1/(2 \times 9.8) = 5.1 \cdot 10^{-2}$ м = 5.1 см. Квантовая же механика утверждает, что в принципе шайба может оказаться по другую сторону горки. Оценить вероятность такого события.
17. Квантовая механика дает только вероятностное описание движения частиц, говорить об их положении, скорости и т.п. смысла не имеет. Как Вы думаете, как тогда эта теория может широко использоваться при проектировании, например, устройств, использующих квантовые свойства систем?

Глава 31

Теория атома

Раз уж мы получили в руки такое мощное оружие, как уравнение Шредингера, то естественно вернуться к атому, начав с простейшего -- атома водорода. Надо же убедиться, что квантовая механика приведет к тем же результатам, что и полуклассическая теория атома по Бору. К тому же есть надежда, что новая теория подарит нам неожиданные открытия. Жаль только, что изучение способов решения уравнения Шредингера не входит в рамки настоящего курса. Но не беда: мы постараемся обойтись без излишней математики, угадывая свойства решений на основе интуиции, выработанной при изучении классической физики. Следует только помнить, что читателя никто обманывать не собирается: все "угаданное" может быть получено из уравнения Шредингера точными математическими расчетами.

31.1 Коммутирующие операторы

В предыдущей главе мы установили, что классические динамические переменные заменяются в квантовой механике на операторы, действующие на волновую функцию. Результатами измерения некой величины A всегда будут собственные значения соответствующего оператора: $\hat{A}\psi_n = A_n\psi_n$. Если система находится в каком-нибудь собственном состоянии ψ_n оператора A , то измерение наверняка дает собственное значение A_n . Если же система находится в каком-то другом состоянии, то измерение A с определенной вероятностью дает какое-то из собственных значений, причем эта вероятность зависит от волновой функции состояния и, разумеется, от измеряемой величины A .

Пусть система находится в состоянии с определенным значением величины A . Это значит, что ее волновая функция является собственной

функцией оператора \hat{A} . Может ли другая величина B также иметь определенное значение? Иначе, может ли состояние быть собственным сразу и для оператора \hat{A} , и для \hat{B} ?

Правило 3 Два оператора \hat{A} и \hat{B} имеют общий набор собственных состояний тогда и только тогда, когда они коммутируют:

$$\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}.$$

Иначе: если результат последовательного действия двух операторов не зависит от порядка, то соответствующие величины могут одновременно иметь определенные значения. Рассмотрим пример:

$$\begin{aligned}\hat{p}_x \hat{x} \Psi &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} x \Psi = -i\hbar (\Psi + x \Psi'), \\ \hat{x} \hat{p}_x \Psi &= -i\hbar x \frac{\partial}{\partial x} \Psi = -i\hbar x \Psi',\end{aligned}$$

то есть для любой функции Ψ

$$(\hat{p}_x \hat{x} - \hat{x} \hat{p}_x) \Psi = -i\hbar \Psi,$$

или просто

$$\hat{p}_x \hat{x} - \hat{x} \hat{p}_x = -i\hbar.$$

Поскольку эти операторы не коммутируют, то координата и проекция импульса на ту же ось не измеримы одновременно. Этот вывод и есть истинный источник соотношения неопределенностей Гейзенберга, физический смысл которых разобран выше.

Особое значение имеет свойство коммутации операторов с гамильтонианом, т.е. с оператором полной энергии \hat{H} . Если какой-то оператор \hat{A} коммутирует с \hat{H} , то существует общее собственное состояние, которое стационарно по определению. В стационарном же состоянии система пребывает неограниченно долго. Это означает одновременно и сохранение величины A . Таким образом, утверждение о сохранении некой величины эквивалентно тому, что она может иметь определенное значение вместе с энергией, т.е. соответствующий ей оператор коммутирует с гамильтонианом.

31.2 Момент количества движения

В классической механике момент количества движения (его также называют моментом импульса или угловым моментом) выражается в виде

векторного произведения радиус-вектора на импульс: $\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]$. То же соотношение верно для операторов квантовой механики:

$$\hat{\vec{L}} = [\hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}] = -i\hbar[\vec{r} \times \vec{\nabla}]$$

или по компонентам

$$\hat{L}_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad (31.1)$$

и аналогично для других компонент. В главе 2 обсуждалось, почему оператор проекции момента количества движения на какую-то ось связан с производной по углу поворота вокруг этой оси (см. уравнение (2.14)). В сферических координатах поворот вокруг оси z эквивалентен сдвигу по азимутальному углу φ , и потому оператор (31.1) имеет особенно простой вид:

$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (31.2)$$

Выражения для других компонент \hat{L}_x и \hat{L}_y в сферических координатах довольно сложны, и мы выпишем здесь лишь оператор квадрата момента количества движения:

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right). \quad (31.3)$$

Выражение (31.3) также достаточно сложно, и мы его практически использовать не будем. Но даже только глядя на него, уже можно сделать важные выводы.

- В оператор \hat{L}^2 входит не сам угол φ , а лишь производная по нему. Это означает, что \hat{L}^2 коммутирует с оператором \hat{L}_z .
- Так как ось z ничем не выделена, то оператор квадрата момента импульса коммутирует и с операторами проекции момента импульса на любую другую ось (в частности, с \hat{L}_x и \hat{L}_y).
- Из не выписанных здесь выражений для \hat{L}_x и \hat{L}_y следует, что операторы $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ не коммутируют между собой.

Вместо формального математического доказательства последнего утверждения укажем источник этого свойства. Напомним, что $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ являются операторами поворота системы вокруг осей x, y, z , соответственно.

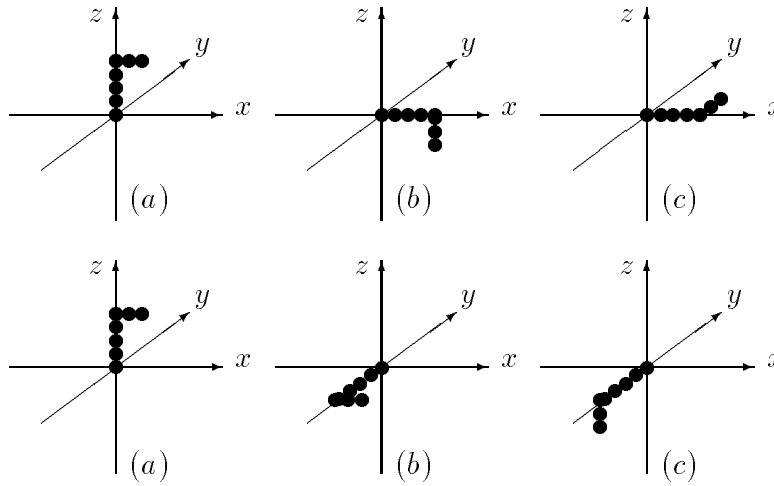


Рис. 31.1: В верхнем ряду Γ -образная фигура (a) сначала поворачивается на 90° вокруг оси y (b), затем — вокруг оси x (c). В нижнем ряду выбрана обратная последовательность тех же поворотов. Конечный результат (c) получился другим.

Но результат двух таких поворотов зависит от их последовательности (рис. 31.1).

- Из сказанного вытекает важное следствие: одновременно измеримы лишь квадрат момента импульса и одна из его проекций (в качестве таковой обычно выбирают \hat{L}_z). Это значит, что вектор \vec{L} в квантовой механике не имеет определенного направления и его нельзя считать классическим вектором с тремя определенными компонентами.

Квантовый момент количества движения можно условно представить себе как вектор фиксированной длины (определенное значение квадрата момента импульса), направленный под фиксированным углом к оси z (определенное значение проекции), но прецессирующий вокруг этой оси (другие компоненты не определены). Это — не более чем механическая аналогия, но она верно отражает существенные свойства момента импульса в квантовой механике.

Найдем теперь собственные функции и значения оператора \hat{L}_z . Имеем уравнение:

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi(\varphi) = \lambda \Phi(\varphi),$$

откуда

$$\Phi(\varphi) = A e^{i\lambda\varphi/\hbar}.$$

При повороте на угол 2π система возвращается в первоначальное состояние. Чтобы волновая функция $\Phi(\varphi)$ не изменилась, необходимо выполнение условия $\lambda = \hbar m$, где m — целое (не обязательно положительное) число. Константа A определяется условием нормировки: интеграл от $|\Phi(\varphi)|^2 = |A|^2$ по углу φ , изменяющемуся от 0 до 2π , должен быть равен единице, откуда $A = 1/\sqrt{2\pi}$.

Таким образом, мы приходим к квантованию проекции момента импульса, которая может принимать лишь целые значения в единицах постоянной Планка ($\hbar m$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Число m называют *магнитным квантовым числом*. Собственная волновая функция \hat{L}_z , соответствующая данному значению m , имеет вид

$$\Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}. \quad (31.4)$$

- По сути дела, волновая функция (31.4) описывает плоскую волну, бегущую по окружности. Роль координаты играет угол φ , роль волнового вектора — магнитное квантовое число m . Но значения переменной φ ограничены пределами 0 и 2π . Наша “круговая” волна как-бы заключена в потенциальную яму и совершает финитное движение. Отсюда — квантование проекции момента импульса, в соответствии с установленными выше законами квантовой механики.

Найдем теперь правила квантования квадрата момента импульса. Решение соответствующего уравнения на собственные функции оператора \hat{L}^2 достаточно сложно, и мы заменим его не очень строгими, но простыми соображениями. Пусть в какой-то системе максимальная величина магнитного квантового числа m равна целому неотрицательному числу l . Тогда минимальное значение m , очевидно, равно $-l$, так что m пробегает $2l + 1$ возможное значение:

$$m = -l, -l + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, l - 1, l.$$

В классическом случае максимально возможная проекция момента импульса совпадает с модулем вектора \vec{L} . Но не следует ожидать, что оператор \hat{L}^2 будет иметь собственные значения $\hbar^2 l^2$. Мы уже знаем, что даже при максимальной величине проекции момент импульса не параллелен оси z (иначе были бы известны все три компоненты момента). Стало быть, собственные значения оператора \hat{L}^2 должны быть больше $\hbar^2 l^2$. Чему же они равны?

Если в пространстве нет выделенного направления, то любое значение m равновероятно, и среднее значение квадрата проекции момента на ось z равно

$$\begin{aligned}\langle \hat{L}_z^2 \rangle &= \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^l \hbar^2 m^2 = \frac{2\hbar^2}{2l+1} \sum_{m=1}^l m^2 = \\ &= \frac{2\hbar^2}{2l+1} \frac{l(l+1)(2l+1)}{6} = \hbar^2 \frac{l(l+1)}{3}.\end{aligned}$$

При выводе использовалась известная формула для суммы квадратов целых чисел. Заметим, что все три координатные оси равноправны, следовательно тот же результат справедлив для средних значений квадратов остальных операторов проекции момента импульса:

$$\langle \hat{L}_x^2 \rangle = \langle \hat{L}_y^2 \rangle = \langle \hat{L}_z^2 \rangle = \hbar^2 \frac{l(l+1)}{3}.$$

Но их сумма дает квадрат оператора момента импульса, среднее значение которого равно, таким образом,

$$\langle \hat{\vec{L}}^2 \rangle = \hbar^2 l(l+1). \quad (31.5)$$

Именно этой формулой описываются собственные значения оператора квадрата момента импульса, так что условно можно считать, что длина вектора \vec{L} в квантовой механике равна $\hbar\sqrt{l(l+1)}$. Целое неотрицательное квантовое число l называют *азимутальным квантовым числом*.

Для сравнения получим тем же способом классический ответ. Если l — максимальное значение m для классического вектора, то m пробегает непрерывный ряд значений от $-l$ до l с равной вероятностью $dm/2l$. Разница в том, что из-за непрерывности сумма заменяется на интеграл и мы получаем:

$$\langle L_z^2 \rangle = \int_{-l}^l \frac{dm}{2l} (\hbar^2 m^2) = \frac{\hbar^2}{2l} \int_{-l}^l dm m^2 = \hbar^2 \frac{l^2}{3},$$

и аналогичные выражения для двух других средних. Складывая их, приходим к обычному результату классической физики:

$$\langle \vec{L}^2 \rangle = \hbar^2 l^2.$$

При больших значениях l оба результата совпадают (опять — принцип соответствия Бора).

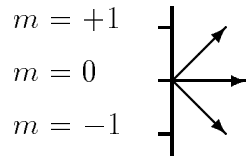


Рис. 31.2: Возможные положения вектора момента импульса при $l=1$. Длина вектора равна $\sqrt{2}$, а его проекция на выделенную ось может принимать только значения 0 и ± 1 (в единицах \hbar).

Главный итог этого раздела — знакомство с правилами квантования момента импульса: собственное значение квадрата момента импульса определяется величиной азимутального квантового числа l , а проекция момента импульса — величиной магнитного квантового числа m , которое может принимать любое из значений $0, \pm 1, \dots, \pm l$. Если все-таки пытаться представить себе квантовый вектор момента количества движения как обычный вектор, то можно сказать, что при данной длине этого вектора он составляет с выделенной осью лишь строго определенные углы (рис. 31.2). Подчеркнем еще раз, что эта картинка — всего лишь попытка изобразить *квантовые* свойства в *классических* образах.

Задача 31.25. Показать, что согласно квантовой механике направление момента импульса \vec{L} не может совпадать с выделенным в пространстве направлением и что в пределе больших азимутальных чисел $l \gg 1$ восстанавливаются классические свойства.

Решение. Поскольку модуль вектора момента импульса принимает значения $\hbar\sqrt{l(l+1)}$, а его проекция на выделенное направление равна $\hbar m$, $m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$, то можно ввести угол θ между направлением момента импульса и выделенной осью, так что $\cos \theta$ будет принимать лишь определенные значения

$$\cos \theta = \frac{m}{\sqrt{l(l+1)}}.$$

Отсюда следует, что минимальное значение угла θ определяется максимальным значением его косинуса, достигаемым при $m = l$:

$$\cos \theta_{\min} = \sqrt{\frac{l}{l+1}}.$$

Видно, что при любом конечном значении l угол не равен нулю. Например, для p -состояний $l = 1$ и $\cos \theta_{\min} = 1/\sqrt{2}$, то есть $\theta_{\min} = 45^\circ$, а для

f -состояний с $l = 3$ имеем $\cos \theta_{\min} = \sqrt{3}/2$ и $\theta_{\min} = 30^\circ$. Видно, что с ростом l минимальный угол между моментом импульса и осью уменьшается и в пределе $l \rightarrow \infty$ получаем $\theta_{\min} = 0$. Это и есть классическое свойство момента импульса: способность быть в точности параллельным любому выделенному направлению. ■

31.3 Атом водорода

Стационарное уравнение Шредингера для водородоподобного атома (один электрон около ядра с зарядом Ze) имеет вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{r}) - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}).$$

Это уравнение удобно записать в сферических координатах:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hat{L}^2}{2mr^2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right] \psi(r, \theta, \varphi) = E\psi(r, \theta, \varphi). \quad (31.6)$$

Разумеется, мы не станем решать это уравнение, но просто внимательно на него посмотрим.

Заметим, что та часть уравнения (31.6), которая зависит от углов, входит только в составе оператора квадрата момента импульса (31.3). Довольно ясен физический смысл этого члена. Представим себе, что в поле центральных сил по орбите радиусом r движется классическая частица с импульсом \vec{p} . Ее момент количества движения равен $L = |\vec{r} \times \vec{p}| = r \cdot p_\perp$, где p_\perp — проекция импульса на направление, ортогональное радиус-вектору \vec{r} . Обозначим $T_\perp = p_\perp^2/2m$ кинетическую энергию “ортогонального” движения. Ее можно выразить через квадрат момента количества движения:

$$T_\perp = \frac{L^2}{2mr^2}.$$

Этот член добавляется к потенциальной энергии кулоновского притяжения к ядру и его можно интерпретировать как потенциальную энергию в поле центробежных сил. Действительно, если T_\perp — потенциальная энергия, то ее производная по r должна дать соответствующие силы:

$$F = -\frac{d}{dr} \frac{L^2}{2mr^2} = \frac{L^2}{mr^3} = \frac{p_\perp^2}{mr} = \frac{mv_\perp^2}{r}.$$

В конечном выражении легко узнать известную из классической механики формулу для центробежной силы. Квантовая механика, как это и должно быть, воспроизводит на новом уровне результаты классической: теперь момент импульса стал оператором, но вошел на прежних правах в выражение для оператора полной энергии (гамильтониана).

Любой оператор коммутирует сам с собой, и так как оператор квадрата момента (31.3) вообще не зависит от радиальной переменной r , то \hat{L}^2 коммутирует с гамильтонианом из уравнения Шредингера (31.6). Кроме того, оператор проекции момента импульса \hat{L}_z коммутирует с \hat{L}^2 и, стало быть, с гамильтонианом. Следовательно, выполняются классические законы сохранения квадрата и одной проекции момента импульса. Эти законы сохранения справедливы для любого центрально-симметричного поля: специфика кулоновского взаимодействия пока нами не использовалась. Поэтому проекция и квадрат момента могут быть определены одновременно с энергией и волновая функция стационарного состояния будет зависеть от квантовых чисел l и m . Однако в уравнении Шредингера (31.6) гамильтониан вовсе не зависит от оператора проекции момента импульса. Это значит, что энергия состояния не будет зависеть от магнитного квантового числа m . Иными словами, в любом центрально-симметричном поле имеется вырождение по m , кратность которого равна $2l + 1$. Мы уже знаем, что источником вырождения должна служить та или иная симметрия. В классической физике движение частицы в центрально-симметричном поле всегда происходит по орбите, лежащей в одной плоскости. Но сама эта плоскость может быть произвольной в зависимости от начального положения и скорости частицы. Ясно, что значение полной энергии частицы не зависит при этом от ориентации плоскости орбиты в пространстве. Это и есть искомая симметрия, приводящая к вырождению по магнитному квантовому числу.

В кулоновском поле (равно как и в гравитационном) имеется еще одно специфическое вырождение, приводящее к тому, что энергия системы не зависит и от квантового числа l . Вспомним опять классическую физику. В кулоновском поле финитное движение частицы совершается только по эллипсу. Возьмем в качестве аналогии искусственный спутник. Поместим его на каком-то расстоянии от Земли (т.е. зададим потенциальную энергию) и придадим ему какую-то скорость (зададим кинетическую энергию). Таким образом, мы задали полную энергию спутника. Но определена ли его орбита? Разумеется, нет! При той же полной энер-

гии направление скорости влияет на форму орбиты — от прямой линии (вертикальное падение) при нулевом моменте импульса до максимально возможного при данной полной энергии. Нулевой момент соответствует чисто радиальным колебаниям сквозь центр притяжения, когда вовсе нет кругового движения и эллипс вырождается в прямую линию (для спутника такое колебание невозможно, но микрочастицы — иное дело). Максимально возможный момент импульса достигается в обратном случае чисто круговой орбиты, когда совсем нет радиального движения. Важно, что его величина зависит от полной энергии спутника.

Итак, классическая физика подсказывает нам следующие свойства решений уравнения Шредингера:

- Энергия электрона не должна зависеть от квантовых чисел l, m .
- Квантовое число l должно пробегать ряд целых значений от нулевого до максимального.
- Максимальное значение l должно зависеть от энергии электрона.

Вооружившись знанием классической механики, мы можем смело приступать к изучению квантовой. Теперь станут понятны свойства решений уравнения Шредингера для атома водорода. Его решениями являются волновые функции, нумеруемые тремя квантовыми числами: n, l, m . Про l и m уже много говорилось, а n — знакомое нам по атому Бора главное квантовое число, принимающее целые положительные значения. Разным наборам чисел n, l, m отвечают разные волновые функции, вид которых нам сейчас не важен.

Задача 31.26. Волновая функция основного состояния электрона в атоме водорода имеет вид

$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_B^3}} e^{-r/a_B}.$$

Найти вероятности W_1 и W_2 обнаружить электрон внутри сфер радиусами a_B и $2a_B$.

Решение. Вероятность обнаружить электрон в элементе объема $d\vec{r}$ равна $dW = |\psi(r)|^2 d\vec{r}$. Так как волновая функция основного состояния не зависит от направления радиус-вектора \vec{r} , а лишь от его величины r , то можно написать выражение для вероятности dW_r обнаружить электрон в шаровом слое радиусом r и толщиной dr . Объем этого слоя равен $4\pi r^2 dr$

(площадь поверхности, умноженная на толщину). Именно им надо заменить элемент объема $d\vec{r}$ в dW , чтобы получить dW_r :

$$dW_r = 4\pi r^2 |\psi(r)|^2 dr.$$

Теперь надо проинтегрировать вероятность dW_r по всем значениям r от 0 до R , получив вероятность $W(R)$ найти электрон внутри сферы радиусом R :

$$W(R) = \int_0^R dW_r = \frac{4}{a_B^3} \int_0^R dr r^2 e^{-2r/a_B}.$$

Интеграл берется точно, и в результате получаем:

$$W(R) = 1 - e^{-2R/a_B} \left[1 + 2\frac{R}{a_B} + 2\left(\frac{R}{a_B}\right)^2 \right], \quad (31.7)$$

откуда находим: $W_1 = W(a_B) = 1 - 5/e^2 \approx 0.323$, $W_2 = W(2a_B) = 1 - 13/e^4 \approx 0.762$.

Разность $W_2 - W_1 \approx 0.439$ дает вероятность найти электрон *между* сферами с радиусами a_B и $2a_B$. Видно, что численно эта вероятность имеет тот же порядок величины, что и вероятность W_1 . Зато вероятность обнаружить электрон *за пределами* сферы радиусом $2a_B$ заметно существенно меньше: она равна, как нетрудно догадаться, $1 - W_2 \approx 0.238$. Иными словами, с вероятностью более 76% электрон в основном состоянии пребывает на расстоянии не более двух радиусов Бора. ■

Задача 31.27. Найти электростатический потенциал, создаваемый атомом водорода в основном состоянии.

Решение. Возьмем любую точку на расстоянии R от ядра. Электростатический потенциал в ней создается, во-первых, положительным зарядом e ядра и, во-вторых, той частью заряда электрона, которая находится внутри сферы радиусом R . Хорошо известно, что сферически симметричное распределение заряда не создает поля во внутренних областях. Поэтому часть электронного облачка, находящаяся дальше выбранной точки, не внесет вклада в потенциал. Поскольку в уравнении (31.7) вычислена вероятность $W(R)$ нахождения электрона внутри сферы радиусом R , то отрицательный заряд внутри этой сферы равен

$-eW(R)$. Поэтому потенциал в точке R , создаваемый эффективным зарядом $q(R) = e(1 - W(R))$, имеет вид:

$$\varphi(R) = \frac{q(R)}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R} e^{-2R/a_B} \left[1 + 2\frac{R}{a_B} + 2\left(\frac{R}{a_B}\right)^2 \right], \quad (31.8)$$

На больших расстояниях потенциал (31.8) убывает экспоненциально, то есть гораздо быстрее обычного кулоновского потенциала точечного заряда. Это — так называемый эффект экранировки: отрицательный заряд электрона компенсирует положительный заряд ядра. При $R \rightarrow 0$ потенциал (31.8) переходит в обычный кулоновский потенциал: мы проникли внутрь электронного облачка, где оно уже не экранирует заряд ядра. ■

Для энергии из уравнения Шредингера получается в точности такая же формула, что и из теории Бора:

$$E_n = -\frac{me^4 Z^2}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2 n^2}. \quad (31.9)$$

Как видно, энергия действительно не зависит от квантовых чисел l, m . При этом, как следует из свойств решений уравнения (31.6), азимутальное квантовое число l принимает целые значения от 0 до $n - 1$. И это свойство, угаданное нами на основе классической физики, воспроизвелось в квантовой механике.

- Удивительно, как квантовая механика, низвергнувшая столько классических представлений, дает аналогичные результаты там, где в дело вступают свойства симметрии системы. Отсюда вывод: симметрия играет более важную роль, чем конкретные физические законы. Когда нибудь будут открыты новые законы, которые обобщат и квантовую механику, и все теории, которые ныне находятся на переднем крае науки. Но свойства симметрии системы проявят себя так или иначе.

Отличие квантовой механики от теории Бора — более богатая структура уровней: состояние определяется тремя квантовыми числами, как и в трехмерном потенциальном ящике. Кстати, это не случайно. Три квантовых числа в потенциальной яме и в атоме водорода — отражение трехмерности нашего пространства. Подсчитаем кратность вырождения, то есть число различных состояний с той же энергией (главным квантовым

числом n). При данном n число l пробегает значения от 0 до $n - 1$ и каждому из них соответствует $2l + 1$ значение m . Поэтому кратность вырождения N равна

$$N = \sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = n^2. \quad (31.10)$$

При $n = 1$ имеем $N = 1$, то есть основной уровень не вырожден. При $n = 2$ кратность вырождения равна 4: уровень с $l = 0$ и три уровня с $l = 1$ и различными проекциями момента импульса $m = -1, 0, +1$. При $n = 3$ кратность вырождения $N = 9$: один уровень с $l = 0$, три уровня с $l = 1$ и пять уровней (по числу проекций) с $l = 2$. Для классификации уровней энергии по значению квантового числа l применяют условные обозначения, позаимствованные из спектроскопии, где они появились еще до создания теории атома:

$$\begin{array}{cccccccc} l = & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ \text{символ} & s & p & d & f & g & h & \dots \end{array}$$

Главное квантовое число ставится впереди символа. Примеры возможных состояний:

$$1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 3d, 4s, 4p, 4d, 4f \text{ etc.}$$

При переходе электрона с уровня на уровень излучается фотон, уносящий собственный угловой момент, равный \hbar . Следовательно, разрешены только переходы с изменением l на единицу: возникает *правило отбора* $\Delta l = \pm 1$. Это значит, что в атоме водорода допустимы переходы $np \rightarrow 1s$, $ns \rightarrow 2p$, etc, приводящие к тем же спектральным сериям, что и теория Бора. Более богатая структура уровней не проявляется пока в большем разнообразии атомных спектров из-за вырождения.

Говоря о вырождении уровней, мы имели в виду водородоподобный атом. В более сложных атомах или в присутствии внешних электромагнитных полей вырождение, как говорят, снимается и появляется зависимость энергии от чисел l, m . Любая не кулоновская центрально-симметричная поправка к потенциальной энергии приведет к зависимости уровней энергии от l (наблюдается в щелочных металлах). В классической физике такая поправка к обычному закону притяжения (например, планеты к Солнцу) превращает эллиптические орбиты в незамкнутые кривые. Обращаясь по таким орбитам, планета как-бы движется по обычному эллипсу, который дополнительно вращается как целое, прецессирует в той же плоскости. Подобный эффект — вращение перигелия

Меркурия, предсказала общая теория относительности. Новое движение приводит к дополнительной энергии вращения, зависящей от l . В результате энергия уровня $2s$ перестанет совпадать с энергией уровня $2p$ и т.п.

Любое не центрально-симметричное поле (например, магнитное) снимет вырождение по m . В классической физике магнитное поле вызывает прецессию плоскости вращения вокруг направления поля и также появление из-за этого вращения дополнительной энергии. Сказанное можно сформулировать в виде общего вывода:

- Всякое дополнительное взаимодействие, нарушающее симметрию системы, снимает соответствующее ей вырождение уровней энергии. На эксперименте снятие вырождения проявляет себя в расщеплении прежних спектральных линий на несколько компонентов.

31.4 Спин электрона и тонкая структура спектров

Дальнейшее исследование атомных спектров показало, что многие спектральные линии имеют два близких компонента. Так, еще в 1887 г. А. Майкельсон обнаружил расщепление α -линии серии Бальмера в водороде (порождаемой переходом $3p \rightarrow 2s$): она оказалась состоящей из двух линий со средней длиной волны 6563 \AA и разностью длин волн 0.14 \AA (т.е. относительная величина расщепления порядка 10^{-5}). Были обнаружены и линии, расщепленные на 3, 4 и более компонентов. Расщепление линий, как мы теперь понимаем, означает расщепление энергетических уровней атома: у них появляется, как говорят, тонкая структура. Значит, существует неучтенное взаимодействие. Мы говорили, что расщепление линий появляется, например, когда наложенное внешнее поле нарушает симметрию системы. А здесь неучтенное взаимодействие проявляется в отсутствии внешних полей, то есть оно должно быть связано с какими-то внутренними свойствами атома.

Оказалось, что здесь действительно проявились внутренние свойства, но не атома в целом, а электрона. В 1925 г. С. Гаудсмит и Дж. Уленбек выдвинули гипотезу спина электрона: они предположили существование у электрона собственного момента импульса, не связанного с орбитальным движением. Сначала спин представляли себе как верчение (англ. spin) электрона вокруг собственной оси (аналог суточного вращения Земли). Потом осознали, что “верчение” нельзя понимать буквально:

численные оценки давали линейную скорость вращения, превышающую скорость света.

- Сейчас под спином понимается собственный момент количества движения электрона как врожденное квантовое свойство. Его существование остается загадкой, если находиться только в рамках квантовой механики Гейзенберга-Шредингера. Естественное объяснение спин получил только в релятивистской квантовой теории Дирака, соединившей теорию относительности с квантовой механикой.

Из опытов следовало, что электрону надо приписать спиновое квантовое число $s = 1/2$, имеющее те же свойства, что и квантовое число l : собственные значения оператора квадрата спина равны $\hbar^2 s(s+1) = 3\hbar^2/4$, а проекция спина на какую-то ось пробегает через единицу все значения от максимального до минимального (для электрона проекция спина $s_z = \sigma\hbar$, где σ принимает лишь значения $\sigma = \pm 1/2$).

Откуда же взялось расщепление спектральных линий? Попытаемся понять это с помощью полуклассических рассуждений. В классической физике любое вращение электрического заряда создает магнитное поле. Вращающийся по орбите классический электрон можно представить как виток с током силой I , охватывающий площадь S , т.е. как диполь с магнитным моментом $\mu = IS$ (эту формулу знал еще Ш. Кулон). Классическая оценка: электрон на орбите радиусом R и скоростью v имеет период обращения $T = 2\pi R/v$. Возьмем какую-нибудь точку на орбите. За время T через нее проходит заряд e , то есть сила тока по определению равна $I = e/T = ev/2\pi R$. Кроме того, электрон имеет орбитальный момент $L = m_e v R$, так что ток можно выразить через орбитальный момент, исключив скорость электрона: $I = eL/(2m_e \pi R^2) = eL/(2m_e S)$, где мы ввели площадь “витка” $S = \pi R^2$. Тогда орбитальный магнитный момент, создаваемый электроном, равен $\mu = eL/2m_e$. Заменяем теперь в соответствии с правилами квантования $L \rightarrow \hbar\sqrt{l(l+1)}$ и получим выражение для орбитального магнитного момента, которое может быть выведено и более строго:

$$\mu_L = \frac{e\hbar}{2m_e} \sqrt{l(l+1)}. \quad (31.11)$$

Отсюда следуют выводы:

- Естественная единица для магнитных моментов в микромире — так

называемый магнетон Бора

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 5.788 \cdot 10^{-5} \frac{\text{эВ}}{\text{Тл}} = 0.927 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{Тл}}. \quad (31.12)$$

- Проекция магнитного момента на любую ось всегда должна быть целым кратным магнетона Бора: $\mu_{Lz} = \mu_B m$. Теперь понятно, почему квантовое число m названо магнитным.
- Отношение магнитного момента к орбитальному моменту количества движения равно $e/2m_e$ (его называют *гиромагнитным* отношением).

Эксперименты показали, что электрон обладает двойным магнетизмом: его собственный магнитный момент, связанный со спином, равен $\mu_S = 2\mu_B \sqrt{s(s+1)}$, то есть гиромагнитное отношение для него оказалось в два раза большим (e/m_e). Это — лишнее доказательство, что электрон нельзя представлять себе как заряженный шарик, вращающийся вокруг собственной оси: в таком случае должно было бы получиться обычное гиромагнитное отношение. Для проекции собственного магнитного момента имеем $\mu_{Sz} = 2\mu_B \sigma$ и поскольку $\sigma = \pm 1/2$, то $\mu_{Sz} = \pm \mu_B$. В итоге для проекции спинового магнитного момента снова получились целые кратные магнетона Бора как и для орбитального движения. По какой-то причине природа предпочитает иметь дело с целым магнетоном Бора, а не с его частями. Поэтому полуцелое значение собственного момента количества движения она компенсирует двойным гиромагнитным отношением.

Теперь можно понять, почему наличие у электрона собственного магнитного момента приводит к появлению какого-то неучтенного до сих пор взаимодействия. Для этого опять перейдем на полуклассический язык. Орбитальное движение электрона создает магнитное поле, которое действует на собственный магнитный момент электрона. Подобным образом магнитное поле Земли воздействует на стрелку компаса. Энергия этого взаимодействия сдвигает энергетические уровни атома, причем величина сдвига зависит, вообще говоря, от спинового и орбитального моментов количества движения.

- Взаимодействие спинового и орбитального магнитных моментов приводит к снятию вырождения и к расщеплению спектральных линий.

Задача 31.28. Оценить расщепление уровней энергии вследствие взаимодействия спинового и орбитального магнитного моментов электрона в атоме водорода.

Решение. Круговой виток радиусом R с током силой I порождает в центре магнитное поле $B = \mu_0 I / 2R$. В этой главе было показано, что вращающийся по орбите электрон можно представить как виток с током $I = eL / (2\pi m R^2) \approx \mu_B / (\pi R^2)$. Здесь для оценки мы положили $L \approx \hbar$. Тогда получаем для магнитного поля, создаваемого орбитальным движением электрона в атоме величину порядка $B \approx \mu_0 \mu_B / (2\pi R^3)$. Энергия взаимодействия собственного магнитного момента электрона с этим магнитным полем равна по порядку величины:

$$\Delta E \approx \mu_B B \approx \frac{\mu_0 \mu_B^2}{2\pi R^3}.$$

Для оценки положим R равным боровскому радиусу первой орбиты a_B . Подставляя сюда выражения для a_B и μ_B и учитывая, что $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$, получаем оценку сдвига энергетических уровней:

$$\Delta E \approx \frac{mc^2}{2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \right)^4 = \frac{mc^2}{2} \alpha^4, \quad (31.13)$$

где α — введенная выше постоянная тонкой структуры. Энергия первого уровня атома водорода, как известно, равна $E = \alpha^2 mc^2 / 2$, так что (31.13) можно переписать как $\Delta E \approx \alpha^2 E$. Поскольку $\alpha \approx 1/137$, а $E = 13.6$ эВ, то $\Delta E \approx 0.72$ мэВ, а относительный сдвиг уровней $\delta E = \Delta E / E \approx \alpha^2 \approx 5 \cdot 10^{-5}$, что соответствует экспериментальным данным. ■

Это есть оценка (не расчет) искомого расщепления уровней. В сущности, расщепление уровней — это релятивистский эффект: по Бору скорость электрона на первой орбите $v \approx \alpha c$ и $\delta E \approx (v/c)^2$. Поэтому не удивительно, что до конца свойства спина могут быть поняты только в релятивистской квантовой теории. Мы не ставим себе такую задачу, но просто будем учитывать наличие у электрона этого удивительного свойства.

Прямое экспериментальное доказательство существования спина электрона было дано в опыте Штерна-Герлаха в 1922 г. Идея опыта состоит в том, что в магнитном поле, неоднородном по оси z , на электроны действует смещающая сила, направленная вдоль поля.

Происхождение этой силы проще уяснить сначала на примере электрического диполя, помещенного в электрическое поле. Электрический

диполь представляет собой пару противоположных зарядов $\pm e$, расположенных на малом расстоянии l друг от друга. Величина электрического момента определяется как $\vec{d} = e\vec{l}$, причем вектор \vec{l} считается направленным от отрицательного заряда к положительному.

Пусть положительный заряд находится в точке \vec{r} , а отрицательный — в точке \vec{r}_1 , так что $\vec{r}_1 = \vec{r} - \vec{l}$. Пусть диполь помещен в электрическое поле с напряженностью $\vec{E}(\vec{r})$. Найдем силу, действующую на диполь. На положительный заряд действует сила $\vec{F}_1 = e\vec{E}(\vec{r})$, на отрицательный — $\vec{F}_2 = -e\vec{E}(\vec{r}_1)$. Результирующая сила

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = e \left(\vec{E}(\vec{r}) - \vec{E}(\vec{r} - \vec{l}) \right).$$

Так как расстояние между зарядами мало, то поле в точке расположения отрицательного заряда можно приближенно записать как

$$\vec{E}(\vec{r} - \vec{l}) \approx \vec{E}(\vec{r}) - (\vec{l} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r}).$$

Подставляя это разложение в выражение для силы \vec{F} , находим

$$\vec{F} = e(\vec{l} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r}) = (\vec{d} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r}). \quad (31.14)$$

Если поле однородно (\vec{E} не зависит от \vec{r}), то на заряды диполя действуют равные и противоположно направленные силы и результирующая сила равна нулю, как и следует из уравнения (31.14). Как известно, такая пара сил не смещает диполь (который в целом электрически нейтрален), но лишь поворачивает его вдоль поля (магнитный аналог — стрелка компаса). В неоднородном же поле результирующая сила отлична от нуля. В частном случае, когда поле \vec{E} зависит только от координаты z , в уравнении (31.14) отлична от нуля лишь производная по z :

$$\vec{F} = d_z \frac{\partial \vec{E}(z)}{\partial z}, \quad (31.15)$$

где d_z — проекция электрического момента на ось z . Неоднородное поле стремится втянуть диполь в область, где оно сильнее.

Магнитных зарядов не существует, но магнитный диполь реализуется витком с током и его свойства аналогичны свойствам электрического диполя. Поэтому в формуле (31.15) надо заменить электрическое поле на магнитное, электрический момент — на магнитный и написать для силы, действующей на электрон в опыте Штерна-Герлаха, аналогичное выражение:

$$\vec{F} = \mu_z \frac{\partial \vec{B}(z)}{\partial z}.$$

Схема опыта: пучок атомов пролетает сквозь неоднородное магнитное поле, направленное поперечно к скорости атомов. Сила, действующая на магнитные моменты атомов, отклоняет их. Соответственно возможным значениям проекции магнитного момента на направление поля, первоначальный пучок расщепляется на несколько пучков. Если полный магнитный момент атома определяется только спином электрона, то первоначальный пучок расщепится на два. Для многоэлектронных атомов расщепленных пучков может быть больше. Для своего эксперимента Штерн и Герлах использовали серебро, которое испарялось в электрической печи. Численные значения расщепления составляли доли миллиметра. Авторы подчеркнули в своих выводах, что неотклоненных атомов не было зарегистрировано. Ниже мы увидим, что это — специфика опытов с элементами первой группы.

Главный результат опытов Штерна и Герлаха — прямое экспериментальное доказательство *квантования* направления магнитного момента атомов. Согласно классической физике, первоначальный пучок должен не расщепиться, а размазаться в соответствии с произвольностью проекции магнитного момента на направление магнитного поля. Соответственно, на экране за прибором вместо двух отдельных линий, оставленных атомами серебра, должна была бы наблюдаться размытая полоска.

Задача 31.29. Узкий пучок атомов со скоростью v и массой m пропускается через поперечное неоднородное магнитное поле, в котором на них действует сила F_z (рис. 31.3). Протяженность поля l_1 , расстояние от магнита до экрана l_2 . Определить отклонение следа пучка атомов на экране от его положения при выключенном магнитном поле.

Решение. Здесь мы имеем дело с задачей классической механики, которая позволяет подготовиться к количественному рассмотрению опыта Штерна-Герлаха. Время пролета атома через магнит равно $t = l_1/v$. Все это время на атом действует поперечная сила F_z , придающая ему поперечное ускорение $a = F_z/m$. За время пролета атом отклонится на расстояние $s_1 = at^2/2 = F_z l_1^2 / (2mv^2)$ и приобретет поперечную скорость $v_\perp = at = F_z l_1 / (mV)$. Это значит, что из магнита атом вылетает под углом θ к первоначальному направлению движения, причем $\operatorname{tg} \theta = v_\perp / v$. Следовательно, при пролете расстояния l_2 до экрана атом отклонится еще и на расстояние $s_2 = l_2 \operatorname{tg} \theta = l_2 v_\perp / v = F_z l_1 l_2 / (mV^2)$. Складывая

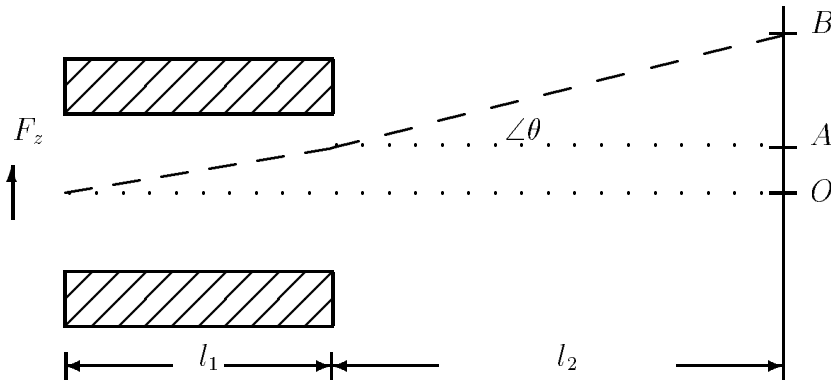


Рис. 31.3: К задаче (31.29.) об отклонении атомов магнитным полем: $OA = s_1$, $AB = s_2$, $OB = s$.

отклонения s_1 и s_2 , получаем искомое отклонение следа атома на экране:

$$s = \frac{F_z}{2mv^2} l_1 (l_1 + 2l_2). \quad (31.16)$$

Часто в задаче стоит вопрос об отклонении пучка атомов при выходе из магнита. В таком случае надо положить $l_2 = 0$ в полученной формуле (31.16). ■

Задача 31.30. Узкий пучок атомов серебра при прохождении магнитного поля с неоднородностью $\partial B / \partial z = 1$ кТл/м протяженностью $l_1 = 4$ см расщепился на два пучка. Экран для наблюдения установлен на расстоянии $l_2 = 10$ см, скорость атомов $v = 0.5$ км/с. Определить расстояние b между компонентами расщепленного пучка на экране.

Решение. Заполненные оболочки дают нулевой вклад в магнитный момент атома. Атом серебра имеет один валентный электрон, и потому его магнитный момент равен магнитному моменту электрона. В неоднородном поле на атом действует сила $F_z = \pm \mu_B \frac{\partial B}{\partial z}$, где μ_B — магнетон Бора. Знаки \pm соответствуют двум возможным направлениям магнитного момента электрона и потому пучок расщепляется на два. На экране наблюдаются две полосы, находящиеся на расстоянии b друг от друга. Если в формулу (31.16) подставить выражение для силы F_z , то получим два отклонения s , отличающиеся знаком. Поэтому искомое расщепление $b = 2s$. В результате приходим к выражению:

$$b = \mu_B \left| \frac{\partial B}{\partial z} \right| \frac{l_1 (l_1 + 2l_2)}{mv^2}. \quad (31.17)$$

Массу атома серебра легко найти по таблице Менделеева: молярная масса атомная масса $M = 107.868$ г/моль. Чтобы найти массу, надо

M разделить на число Авогадро: $m = 107.868 \cdot 10^{-3} / 6.02 \cdot 10^{23} = 1.79 \cdot 10^{-25}$ кг. Подставим теперь в (31.17) численные значения:

$$b = 9.27 \cdot 10^{-24} \times 10^3 \times \frac{4 \cdot 10^{-2} \times (4 + 2 \times 10) \cdot 10^{-2}}{1.79 \cdot 10^{-25} \times (0.5 \cdot 10^3)^2} \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 2 \text{ мм}.$$

Такое расщепление вполне наблюдаемо в опытах. ■

31.5 Векторная модель атома

Обсудим качественные изменения, вносимые спином электрона в теорию атома. Полный момент импульса \vec{J} складывается теперь из орбитальной \vec{L} и спиновой \vec{S} частей. Возникает новое квантовое число j , принимающее два значения $j = l \pm \frac{1}{2}$ (при $l = 0$ полный момент импульса $j = 1/2$). Эти значения соответствуют двум случаям, когда спин параллелен и антипараллелен орбитальному моменту импульса. Необходимо ввести новые обозначения уровней: добавляется индекс, указывающий величину полного момента импульса: уровни обозначают nx_j , где n — главное квантовое число, а x — прежний буквенный символ для обозначения величины азимутального квантового числа l . Свойства полного момента те же, что и у орбитального и спиновых моментов. Как следствие нового вида взаимодействия возникает более богатая структура атомных спектров, наблюдавшаяся на опыте. Проиллюстрируем это на примере первых возбужденных уровней атома водорода (таблица 31.1).

Энергия уровней уже выражается не формулой Бора, но содержит поправки относительной величины α^2 . Мы не станем ее приводить, но отметим характерное свойство: в отсутствие внешних полей энергия по-прежнему не зависит от орбитального момента l , но лишь от полного момента импульса j . Значит, уровни $2s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$ вырождены (их энергии совпадают). Уровень $2p_{3/2}$, как оказывается, лежит чуть выше.

Состояния многоэлектронных атомов классифицируются подобным образом. Если \vec{L} — суммарный орбитальный момент всех электронов, а \vec{S} — их суммарный спиновый момент, то полный момент системы определяется как $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$. Соответственно и обозначается это состояние как $^{2S+1}X_J$. Под X понимается тот же буквенный символ, обозначающий значение орбитального момента количества движения (только в этом случае используется заглавная буква). Верхний левый индекс равен числу спиновых состояний (для одиночного электрона в нем не было необходимости, так как его спин всегда равен $1/2$).

Таблица 31.1: Схема нижних уровней атома водорода

$$\begin{array}{ll}
n = 1, \quad l = 0, \quad j = \frac{1}{2} : & 1s_{1/2} \\
n = 2, \quad l = \begin{cases} 0, & j = \frac{1}{2} : & 2s_{1/2} \\ 1, & \begin{cases} j = \frac{1}{2} : & 2p_{1/2} \\ j = \frac{3}{2} : & 2p_{3/2} \end{cases} \end{cases} \\
n = 3, \quad l = \begin{cases} 0, & j = \frac{1}{2} : & 3s_{1/2} \\ 1, & \begin{cases} j = \frac{1}{2} : & 3p_{1/2} \\ j = \frac{3}{2} : & 3p_{3/2} \end{cases} \\ 2, & \begin{cases} j = \frac{3}{2} : & 3d_{3/2} \\ j = \frac{5}{2} : & 3d_{5/2} \end{cases} \end{cases}
\end{array}$$

Итак, пусть дано состояние $^{2S+1}X_J$. Встает вопрос: чему равен магнитный момент системы $\vec{\mu}_J$? Ясно, что он направлен вдоль полного момента количества движения \vec{J} , а его размерность определяется магнетонном Бора μ_B . Тогда

$$\begin{aligned}
\vec{\mu}_J &= g\mu_B \frac{\vec{J}}{\hbar}, \\
\mu_J &= g\mu_B \sqrt{J(J+1)}.
\end{aligned} \tag{31.18}$$

Для гиромагнитного отношения (обобщение аналогичной величины, связанной с орбитальным и спиновым моментами) можно тогда написать выражение вида $eg/2m_e$. Коэффициент пропорциональности g называется множителем Ланде или просто g -фактором. Для орбитального движения $g = 1$, для спинового магнитного момента $g = 2$. Задача о магнитном моменте атома сводится к нахождению зависимости g от квантовых чисел J , L и S .

Ответ можно получить с помощью простой полуклассической модели, получившей название векторной модели атома. Сначала возведем в квадрат уравнение, связывающее \vec{J} с \vec{L} и \vec{S} : $\vec{J}^2 = \vec{L}^2 + 2\vec{L}\vec{S} + \vec{S}^2$. Квадраты моментов можно выразить через соответствующие квантовые числа по уже известным нам правилам. Находим тогда выражение для скалярного

произведения

$$\vec{L}\vec{S} = \frac{\hbar^2}{2} (J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)) . \quad (31.19)$$

Полный магнитный момент складывается из магнитного момента, создаваемого суммарным орбитальным моментом количества движения, и суммарного спинового магнитного момента. Но спин, как уже говорилось, обладает двойным магнетизмом. Поэтому с учетом уравнения (31.18) можно записать:

$$g\mu_B \frac{\vec{J}}{\hbar} = \mu_B \frac{\vec{L}}{\hbar} + 2\mu_B \frac{\vec{S}}{\hbar} .$$

Сокращая общий множитель μ_B и умножая обе части на \vec{J}/\hbar (в правой части \vec{J} заменен на $\vec{L} + \vec{S}$), получаем:

$$gJ(J+1) = \frac{1}{\hbar^2} (\vec{L} + 2\vec{S})(\vec{L} + \vec{S}) = L(L+1) + 2S(S+1) + \frac{3}{\hbar^2} (\vec{L}\vec{S}) .$$

Если подставить сюда выражение (31.19) для скалярного произведения $\vec{L}\vec{S}$, то получим окончательный ответ:

$$g = 1 + \frac{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2J(J+1)} . \quad (31.20)$$

Убедимся, что эта формула воспроизводит уже известные результаты. Если полный спиновый момент равен нулю, то полный момент совпадает с орбитальным. Подставляя в (31.20) значения $S = 0$, $J = L$, получаем $g = 1$, как и должно быть для магнитного момента, создаваемого чисто орбитальным движением электронов. В обратном случае нулю равен орбитальный момент и полный момент количества движения равен спиновому. Подставляя в (31.20) значения $L = 0$, $J = S$, находим $g = 2$ в полном согласии с двойным магнетизмом спинового момента. Именно такой случай реализуется для элементов первой группы в опыте Штерна-Герлаха. Упоминалось, что для сложных атомов (например, серы) расщепление пучков будет более сложным. Теперь мы можем предсказать результат количественно. Основное состояние серы 3P_2 , то есть $S = 1$, $L = 1$, $J = 2$. Из формулы (31.20) для множителя Ланде легко получаем $g = 3/2$, так что магнитный момент атома равен

$$\vec{\mu}_J = \frac{3}{2}\mu_B \frac{\vec{J}}{\hbar} .$$

Проекция магнитного момента на ось z

$$\mu_{Jz} = \frac{3}{2}\mu_B m_J,$$

где m_J (проекция полного момента количества движения) принимает пять различных значений в соответствии с правилами квантования момента: $m_J = \pm 2, \pm 1, 0$. Теперь, используя результаты задач в конце главы, можно рассчитать расщепление пучка атомов серы в опыте Штерна-Герлаха. Ясно, что пучок расщепится на пять компонентов, причем одна из них ($m_J = 0$) не будет отклоняться магнитным полем.

31.6 Принцип Паули и валентность элементов

Мы видели, что орбитальный момент импульса характеризуется азимутальным квантовым числом l , принимающим целые значения. Собственный спиновый момент характеризуется спиновым квантовым числом s , равным $1/2$ для электрона. Спин — фундаментальное квантовое свойство всех элементарных частиц. В соответствии со значением спинового квантового числа s частицы делятся на два класса: *бозоны* (целые s) и *фермионы* (полуцелые s). Другие значения s науке не известны. Примеры фермионов: электрон, мюон, нейтрино, кварки, частицы из трех кварков (протон, нейтрон). Пример бозонов: фотон, недавно открытые W^\pm и Z , частицы из двух кварков (π -мезоны и др.).

- Бозоны и фермионы — это не имена собственные каких-то частиц, а названия целых семейств. Каждая микрочастица принадлежит одному из них и поменять принадлежность уже не в состоянии. В теории элементарных частиц замечено, что из фермионов построено вещество, а бозоны переносят фундаментальные взаимодействия.

Если собрать вместе несколько бозонов, то они не мешают друг другу занять низшее энергетическое состояние и, следовательно, все там окажутся. Поведение коллектива фермионов регулируется принципом Паули:

- два одинаковых фермиона не могут находиться в одном и том же состоянии.

В применении к атому принцип Паули запрещает двум электронам иметь одинаковый набор квантовых чисел: состояния электронов должны отличаться значением хотя бы одного из них. Если бы принципа Паули

не существовало, то у всех атомов в основном состоянии все электроны находились бы на нижнем энергетическом уровне и атомы различных элементов были бы до ужаса похожи друг на друга. Таким образом, известная нам химия, все разнообразие элементов и их свойств (в частности, гамма вкусовых ощущений, отличающая, скажем, вино от сыра) — следствия принципа Паули. До сих пор мы в основном рассматривали только атом с одним электроном. Станем добавлять лишний электрон и, соответственно, увеличивать на единицу заряд ядра. Иными словами, совершим прогулку по таблице Менделеева. Введем понятия оболочки как совокупности уровней с одинаковыми главными квантовыми числами n и подоболочки (уровни данной оболочки с одинаковыми l). Традиционные обозначения

$$\begin{array}{rcl} n = & 1, & 2, 3, 4, \dots \\ \text{символ} & K, & L, M, N, \dots \end{array}$$

Число уровней в оболочке мы фактически уже подсчитали: оно равно кратности вырождения по m и l , умноженной на 2 в соответствии с двумя возможными направлениями спина электрона. Таким образом, оболочка может вместить $2n^2$ электронов, а подоболочка — $2(2l + 1)$ электронов (число различных значений m , удвоенное по той же причине). Состояния в атоме различаются квантовыми числами n , l , m и σ (проекция спина). По принципу Паули лишь один электрон может иметь данный конкретный набор квантовых чисел.

- Напоминание: три квантовых числа n , l и m отражают трехмерность пространства, σ — внутренние свойства электрона.

Порядок замещения уровней в многоэлектронных атомах определяется энергией уровней с учетом влияния заполненных оболочек. Нижние оболочки частично экранируют заряд ядра, что ведет к некулоновскому полю для высших оболочек. Этим объясняется зависимость энергии уровней от квантового числа l . Чем больше l , тем дальше находится электрон от ядра и тем слабее его связь с ядром, т.е. такой уровень лежит выше. При больших моментах (состояния d , f и т.п.) уровень близок или даже выше s -подуровней следующей оболочки. В целом заполнение идет в таком порядке (случаются небольшие отклонения):

$$1s \parallel 2s, 2p \parallel 3s, 3p \parallel 4s, 3d, 4p \parallel 5s, 4d, 5p \parallel 6s, 4f, 5d, 6p \parallel \text{etc.}$$

В этом ряду знаком \parallel отделены периоды таблицы Менделеева. В соответствии с полученными формулами для числа уровней в зависимости от

n и l , I период содержит 2 элемента, II и III — по 8, в IV и V — по 18 элементов. Здесь “вклиниваются” заполнения d -подоболочек (по 10 элементов — переходные металлы). В VI периоде добавляется заполнение f -подоболочки (14 элементов — лантаниды) и т.д.

Химические свойства зависят в основном от строения внешней электронной оболочки (валентных электронов). Отсюда и вытекает периодичность повторения свойств элементов. Так, у благородных газов заполнены внешние s - и p -подоболочки из 8 электронов. У элементов первой группы (щелочные металлы) на внешней оболочке имеется всего один электрон, а галогенам (VII группа) не хватает одного электрона для заполнения внешней p -подоболочки. Все эти рассуждения хорошо знакомы по курсу химии, но они носят качественный характер. Как известно, валентность элемента определяется не столько количеством электронов, сколько степенью легкости, с которой их можно вырвать из атома. Понятно, что внешние электроны оторвать легче, но хотелось бы получить хоть какой-нибудь количественный критерий. Таким критерием может служить так называемый *потенциал ионизации* — энергия, которую необходимо затратить, чтобы удалить электрон из атома. Расчет сложных атомов непросто, но в целом таблица Менделеева объясняется квантовой механикой. Мы ограничимся лишь самыми простыми атомами и точные расчеты заменим количественными оценками. Экспериментальные результаты представлены на рис. 31.4.

Эффективный заряд ядра, оценки потенциала ионизации и закон Мозли

Мы в деталях изучили энергетические уровни водородоподобных атомов, описываемые формулой Бора

$$E_n = -13.6 \text{ эВ} \frac{Z^2}{n^2}.$$

Для более сложных систем со многими электронами эта формула неверна, но мы будем ее использовать, вводя поправку на экранировку ядра электронами путем замены заряда ядра Z на некий *эффективный* заряд Z_{eff} . Большой точности сравнения с экспериментальными данными так не добиться, но мы удовлетворимся совпадением по порядку величины.

Водород Заряд ядра $Z = 1$, экранировки нет, в основном состоянии $n = 1$. Энергия основного уровня $E_1 = -13.6$ эВ, минимальная энергия электрона, вырванного из атома, равна нулю. Следовательно,

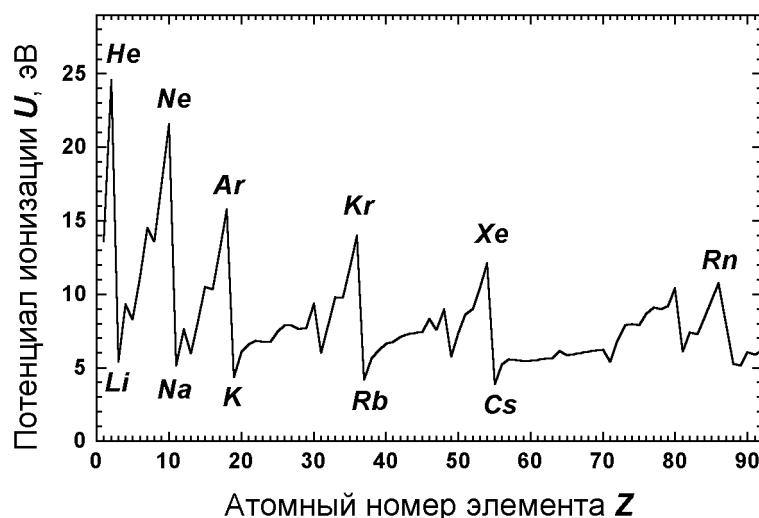


Рис. 31.4: Потенциал ионизации для элементов от водорода до урана. Ясно видна периодичность свойств элементом. Пики потенциала ионизации случаются для благородных газов, минимумы — для щелочных металлов.

ионизационный потенциал U — это абсолютное значение энергии основного состояния: $U = 13.6$ эВ. Это значение будет служить нам ориентиром, позволяющим не заблудиться в энергетической шкале микромира.

Положительный ион гелия Ион He^+ отличается от водорода только удвоенным зарядом ядра: $Z = 2$. Отсюда $U = 13.6 \times 4 = 54.4$ эВ.

Гелий Нейтральный атом гелия в основном состоянии имеет два электрона на нижней оболочке ($n = 1$), отличающиеся проекциями спинов. Представим себе такую картину. Когда второй электрон находится дальше от ядра, чем первый, то заряд ядра от него экранируется и равен (с его “точки зрения”) единице. Когда же второй электрон располагается к ядру ближе первого, то “видимый” им заряд ядра равен двум. Оба электрона равноправны, так что описанные ситуации равновероятны. Поэтому для оценки эффективного заряда ядра мы возьмем среднее арифметическое: $Z_{eff} = (1 + 2)/2 = 3/2$. Конечно, электрон не может полностью экранировать ядро от своего партнера. Конечно, надо принять во внимание энергию кулоновского отталкивания электронов. И все же получающаяся оценка не столь

плоха:

$$U \approx 13.6 \frac{Z_{eff}^2}{n^2} = 13.6 \frac{9}{4} = 30.6 \text{ эВ}.$$

Эксперимент дает $U = 24.6 \text{ эВ}$.

- Бросается в глаза огромная величина ионизационного потенциала у гелия (самый большой в таблице Менделеева). Инертность гелия — прямое следствие этого факта.

Дважды ионизованный атом лития Li^{++} Водородоподобная система с $Z = 3$. Поэтому $U = 13.6 \times 9 = 122.4 \text{ эВ}$.

Ион лития Ион Li^+ подобен атому гелия, но для него эффективный заряд ядра на единицу больше: $Z_{eff} = 5/2$. Отсюда $U \approx 13.6 \times (25/4) = 85 \text{ эВ}$. Эксперимент дает $U = 81 \text{ эВ}$.

Литий Третий электрон в нейтральном атоме лития располагается на второй оболочке — уровне с $n = 2$. По этой причине два внутренних электрона почти полностью экранируют от него две единицы заряда ядра: $Z_{eff} \approx 1$. Отсюда $U \approx 13.6/4 \approx 3.4 \text{ эВ}$. Эксперимент дает $U = 5.4 \text{ эВ}$.

- Эти оценки очень показательны: насколько легче (в сравнении с водородом) оторвать от лития один электрон и как трудно удалить последующие. Поэтому литий — одновалентен.

Бериллий Ионы Be^{+++} и Be^{++} аналогичны водороду и гелию и имеют огромные потенциалы ионизации. Ион Be^+ похож на литий, но у него на единицу больше эффективный заряд ядра, “видимый” третьим электроном: $Z_{eff} = 9/4$. Получаем $U \approx 13.6(81/16)(1/4) = 17.2 \text{ эВ}$. Эксперимент дает 18.2 эВ . Это значение не намного больше потенциала ионизации атома водорода и заведомо много меньше потенциала ионизации иона Be^{++} . В нейтральном атоме Be на второй оболочке помещаются два электрона. Система похожа на ион Li^- , но эффективный заряд ядра на единицу больше: $Z_{eff} \approx 3/2$. Отсюда $U \approx 13.6(9/4)(1/4) = 13.6(9/16) = 7.7 \text{ эВ}$. Экспериментальное значение $U = 10.4 \text{ эВ}$.

- Отсюда вывод: поскольку первые два электрона вырвать из атома бериллия гораздо легче, чем последующие, то Be — двухвалентен.

Понятие эффективного заряда ядра полезно также при рассмотрении свойств так называемого характеристического рентгеновского излучения, возникающего при переходе внешних электронов на свободное место на внутренних оболочках. Как мы выяснили, для электронов на K оболочке $Z_{eff} \approx Z - 1/2$. Пример: для Cu $Z = 29$ и $Z_{eff} \approx 28.5$. При переходе внешних, далеких от ядра электронов с энергией, почти равной нулю, испускается фотон с энергией $E \approx 13.6 \times (28.5)^2 \approx 11000$ эВ. Длина волны такого фотона $\lambda = c/\nu = hc/E = 1.12 \text{ \AA}$. В 1913 г. был установлен закон Мозли, связывающий частоту ν характеристического рентгеновского излучения элемента и его атомный номер Z :

$$\sqrt{\frac{\nu}{Ryc}} = \frac{Z - \sigma_n}{n}.$$

где Ry — постоянная Ридберга, c — скорость света, n — главное квантовое число оболочки, на которую совершается переход, а σ_n — некая постоянная. В этом законе легко теперь увидеть проявление экранирования ядра, то есть влияние на отдельный электрон атома всех остальных электронов. Исторически закон Мозли окончательно подтвердил, что свойства элемента зависят от Z , а не от атомной массы. Это устранило последние сомнения в правильности расположения элементов в периодической системе.

Электронная конфигурация атомов

Для атома любого элемента мы можем указать его электронную конфигурацию. Теперь познакомимся с двумя правилами, позволяющими узнать для основного состояния каждого атома значение его суммарных моментов: спинowego S , орбитального L и полного J .

- Наименьшей энергией обладает атом с наибольшим возможным при данной электронной конфигурации значением S и наибольшим возможным при этом S значением L (*правило Хунда*).
- Если в незаполненной подоболочке атома находится не более половины максимально возможного для нее числа электронов, то $J = |L - S|$. Если же подоболочка заполнена более, чем наполовину, то $J = L + S$.

Правило Хунда является эмпирическим (т.е. не выведенным из теории, а установленным экспериментально); второе правило выводится из него

и из полученной выше формулы (31.19) для скалярного произведения $\vec{S}\vec{L}$. Для облегчения применения правила Хунда полезно запомнить, что:

- 1) надо рассматривать только незаполненную электронную оболочку, так как моменты электронов в заполненных оболочках взаимно компенсируются;
- 2) значения S и L одинаковы для двух оболочек, из которых одна имеет столько электронов, сколько не хватает для заполнения другой.

Для примера применения указанных правил рассмотрим атом серы. Его атомный номер $Z = 16$ и, следовательно, электронная конфигурация имеет вид $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^4$. Индексы справа сверху обозначают числа электронов в указанных состояниях. Видим, что незаполненной остается третья оболочка, на которой находятся четыре электрона с орбитальными моментами, равными единице. При данном $L = 1$ согласно принципу Паули параллельными могут быть лишь спины трех электронов, отличающихся значениями $m = -1, 0, 1$. Спин четвертого электрона должен быть направлен в противоположную сторону, и потому максимально возможное значение суммарного спина для данной конфигурации равно $S = 3/2 - 1/2 = 1$.

При этом значении S сумма проекций орбитальных моментов электронов с одинаково направленными спинами равна нулю, следовательно, максимально возможное значение проекции суммарного орбитального момента определяется четвертым электроном и равна единице. Поэтому $L = 1$. Так как внешняя оболочка заполнена более чем наполовину, то $J = L + S = 2$. Мы пришли к выводу, что основным состоянием атома серы является 3P_2 .

Для сравнения найдем основное состояние атома кремния ($Z = 14$). От атома серы он отличается тем, что на внешней оболочке у него находятся два, а не четыре p -электрона. Для ее заполнения не хватает четырех электронов, то есть столько, сколько их имеется у серы. Поэтому для атома кремния получаем те же значения $S = 1$ и $L = 1$. Внешняя оболочка заполнена менее чем наполовину, откуда $J = |L - S| = 0$. Поэтому основным состоянием кремния является 3P_0 .

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте правила квантования момента импульса и проекции момента на выделенную ось.
2. Какими квантовыми числами описывается состояние электрона в атоме? От каких квантовых чисел зависит энергия электрона?
3. Какова кратность вырождения энергетического уровня в атоме водорода?
4. Какова размерность волновой функции электрона в СИ?
5. Чему равен потенциал ионизации атома водорода? Какова зависимость энергии электрона от главного квантового числа?
6. В каких аспектах волновая теория атома совпадает с теорией Бора, а в каких эти теории различны?
7. Перечислите свойства электрона, связанные с наличием у него спина.
8. Что такое магнетон Бора? Чему равно гиромагнитное отношение для орбитального движения и для спина?
9. Опишите схему опыта Штерна-Герлаха. От чего зависит число компонентов, на которые расщепляется пучок атомов в этом опыте?
10. Почему направление магнитного момента электрона противоположно направлению его спина?
11. Сформулируйте принцип Паули. Что такое электронные оболочки и подоболочки в атоме? Объясните роль принципа Паули в повторяемости (периодичности) свойств химических элементов.
12. Как связан потенциал ионизации с валентностью элемента? Почему электрон труднее удалить из атома неона, чем из атома натрия?
13. Предположим, что никакого спина у электрона не существует, так что его состояние в атоме определяется лишь тремя квантовыми числами n, l, m . Какие последствия это имело бы для таблицы элементов Менделеева и нашей жизни?
14. Предположим, что спин электрона равен $3/2$. Какой элемент играл бы тогда роль гелия — первого из группы благородных газов? Какой элемент был бы вторым в этой же группе?
15. * Найти основное состояние атома фосфора ($Z = 15$).

Глава 32

Физическая природа химической связи

32.1 Молекулы

Атомы представляют собой связанные электрическими силами системы ядер и электронов. В свою очередь, атомы под действием тех же сил в определенных условиях могут объединяться в молекулы. Первоначально химия предполагала существование специфических “химических сил” для объяснения образования молекул из атомов, а также химических реакций между атомами или молекулами. Однако таких “химических сил” не существует: образование молекул обусловлено обычными электрическими (кулоновскими) силами взаимодействия между заряженными частицами, т.е. электронами и ядрами, из которых состоят атомы. Но механизм образования молекул можно понять только на основе квантовой механики. Для простоты ограничимся рассмотрением простейших двухатомных молекул. Силы, удерживающие атомы в молекуле, вызваны взаимодействием внешних электронов, а электроны внутренних оболочек при объединении атомов в молекулы остаются в прежних состояниях. Различают два вида связи между атомами в молекуле: ионную (гетерополярную) и ковалентную (гомеополярную).

Ионная связь

Этот вид химической связи обусловлен переносом валентных электронов с одного атома на другой и кулоновским притяжением образовавшихся ионов. Иными словами, ионная связь осуществляется в том случае, когда электроны в молекуле можно разделить на две группы, каждая из которых все время находится около одного из ядер. Электроны разде-

ляются так, что около одного из ядер образуется избыток электронов, а около другого — их недостаток, т.е. молекулу можно представить как образование, состоящее из отрицательного и положительного ионов, притягивающихся друг к другу (например, молекула NaCl состоит из ионов Na^+ и Cl^-).

Для описания ионных молекул еще до создания квантовой механики с успехом применялись полуэмпирические способы расчета энергии связи, основанные на классической электростатике. Пусть, например, мы имеем дело с молекулами типа KCl, NaCl и т.п. Обозначим через U_m ионизационный потенциал щелочного металла, а через U_h — сродство галогена к электрону. В начальном состоянии имеем два нейтральных атома K и Cl, разнесенные на бесконечно большое расстояние. Попытаемся мысленно построить из них молекулу. Затрачивая энергию U_m , мы отрываем электрон от металла и переносим его на галоген. При присоединении электрона к последнему выделится энергия U_h , так что энергосвободное на этом этапе составляет $U_h - U_m$. Далее сближаем образованные нами ионы до равновесного расстояния R_0 (размер молекулы). При этом выделится дополнительная энергия кулоновского взаимодействия E_C . Полная выделившаяся энергия и есть энергия связи $E_{\text{св}}$ получившейся молекулы: именно ее надо затратить, чтобы разорвать молекулу на составные части:

$$E_{\text{св}} = U_h - U_m + E_C. \quad (32.1)$$

Учитывая, что кулоновская энергия $E_C = e^2/(4\pi\epsilon_0 R_0)$, находим отсюда выражение для равновесного расстояния:

$$R_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 (E_{\text{св}} - U_h + U_m)}. \quad (32.2)$$

Применим полученную формулу для оценки размера молекулы KCl. Берем экспериментальные данные: $U_m = 4.3$ эВ, $U_h = 3.8$ эВ, $E_{\text{св}} = 4.8$ эВ, так что кулоновская энергия $E_C = 4.8 - 3.8 + 4.3 = 5.3$ эВ = $5.3 \times 1.6 \cdot 10^{-19} = 8.5 \cdot 10^{-19}$ Дж. Отсюда легко находим размер молекулы:

$$R_0 = \frac{(1.6 \cdot 10^{-19})^2}{4\pi \times 8.854 \cdot 10^{-12} \times 8.5 \cdot 10^{-19}} = 2.7 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 2.7 \text{ Å}. \quad (32.3)$$

Получившаяся величина примерно в пять раз превышает радиус Бора и дает вполне приемлемую оценку размера молекулы.

Оценим также размер молекулы другого соединения — HCl , для которого $U_m = 13.6$ эВ и $E_{\text{св}} = 2.7$ эВ. Чтобы не повторять аналогичных выкладок, используем уже полученный результат. Имеем в этом случае: $E_C = 2.7 - 3.8 + 13.6 = 12.5$ эВ, что в $12.5/5.3 \approx 2.36$ больше кулоновской энергии для молекулы KCl . Соответственно, размер молекулы будет в такое же число раз меньшим: $R_0 \approx 2.7 \text{ \AA} / 2.36 = 1.1 \text{ \AA}$ (эксперимент дает значение $R_0 = 1.3 \text{ \AA}$).

Отчуждение электрона одним ионом у другого (ионная связь) встречается в большинстве неорганических соединений, особенно в молекулах из атомов далеких групп. Кроме соединений щелочных металлов и галогенов можно привести и другие примеры. Однако изложенные классические соображения не дают возможности вычислить независимо энергию связи молекулы (или ее размер). Само возникновение равновесного расстояния остается вне пределов компетенции такой теории. Силы электростатического притяжения между ионами должны уравниваться в равновесном состоянии какими-то силами отталкивания. Природа этих сил довольно сложна и связана с перекрытием оболочек ионов. При сближении атомов оболочки начинают сильно деформироваться, что препятствует дальнейшему сближению. Величина R_0 — это равновесное расстояние между ионами, на котором силы электрического притяжения уравниваются квантовомеханическим отталкиванием атомов на близких расстояниях.

Ковалентная связь

Второй вид связи наблюдается в молекулах, где электроны, осуществляющие связь, значительную часть времени проводят в пространстве между атомами и в какой-то мере являются “общими” для обоих ядер. Гомеоплярная (ковалентная) связь характерна для большинства молекул с двумя одинаковыми атомами (H_2 , N_2 , O_2 и т.п.). Гомеоплярная связь не поддается классическому описанию, а требует квантового рассмотрения.

Рассмотрим простейшую гомеоплярную молекулу — молекулу водорода. Впервые это было сделано в 1927 г. Гайтлером и Лондоном. Мы ограничимся принципиальным анализом, опуская проведение расчетов, т.к. нашей задачей является уяснение физической природы ковалентной (гомеоплярной) связи. Схема взаимодействий в такой молекуле, состоящей из двух протонов (ядер атома водорода) A и B и двух электронов 1 и 2, показана на рис. 32.1.

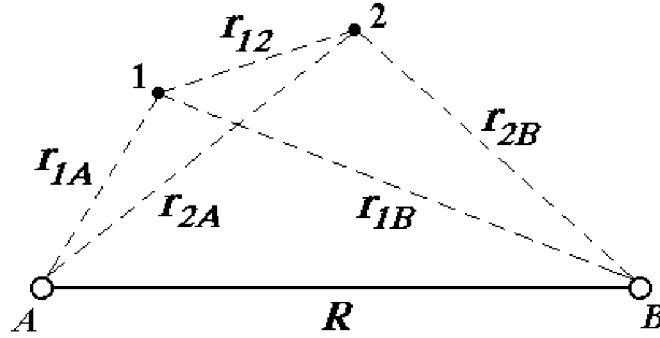


Рис. 32.1: Схема взаимодействий в молекуле водорода.

Уравнение Шредингера для системы имеет вид:

$$\hat{H}\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = E\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2), \quad (32.4)$$

где через \vec{r}_1 и \vec{r}_2 обозначены координаты первого и второго электронов, а \hat{H} — гамильтониан системы:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{U}, \\ \hat{H}_1 &= -\frac{\hbar^2}{2m_e} \vec{\nabla}_1^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{1A}}, \quad \hat{H}_2 = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \vec{\nabla}_2^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{2B}}, \\ \hat{U} &= -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{1B}} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{2A}} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R}. \end{aligned} \quad (32.5)$$

Гамильтониан \hat{H}_1 содержит оператор кинетической энергии электрона 1 и потенциальную энергию того же электрона в кулоновском поле ядра A. Аналогичную структуру имеет гамильтониан \hat{H}_2 . Оператор \hat{U} описывает четыре взаимодействия: электрона 1 с ядром B, электрона 2 с ядром A, электронов между собой и ядер — также между собой. Ядра имеют массу, примерно в 2000 раз превышающую массу электрона, поэтому они движутся гораздо медленнее электронов, и в первом приближении их можно считать неподвижными (такое приближение называется адиабатическим). Поэтому волновая функция $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ рассматривается как функция координат только электронов, а расстояние R между ядрами, важное в проблеме ковалентной связи, входит в волновую функцию Ψ как параметр. Получающиеся из уравнения Шредингера собственные значения энергии будут тогда зависеть от расстояния R , т.е. $E = E(R)$, причем в случаях параллельной и антипараллельной ориентации спинов электронов характер этой зависимости оказывается различным.

Полная волновая функция зависит не только от пространственных координат электронов, но и от их спинов. Вследствие принципа Паули

(согласно которому данный набор квантовых чисел может иметь лишь одна частица), такая полная волновая функция должна быть антисимметричной относительно перестановки электронов. Поскольку спиновое состояние не зависит от орбитального, пространственные и спиновые переменные разделяются, и полную волновую функцию электронов в молекуле водорода можно представить в виде произведения координатной и спиновой функций:

$$\Psi_{12} = \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\Phi(\vec{s}_1, \vec{s}_2). \quad (32.6)$$

Из принципа Паули следует, что:

- 1) если спиновая волновая функция симметрична, тогда пространственная функция антисимметрична;
- 2) если спиновая волновая функция антисимметрична, тогда пространственная функция должна быть симметричной.

Симметричная спиновая волновая функция соответствует параллельному расположению векторов спинов электронов, т.е. суммарному спину электронов $S = 1$. Такое состояние называется триплетным по числу $(2S + 1) = 3$ возможных проекций суммарного спина. Во втором же случае антисимметричная спиновая функция связана с противоположно ориентированными спинами, дающими в сумме $S = 0$, и следовательно, возможно только одно значение проекции полного спина, и состояние называется синглетным.

Взаимодействие между нейтральными атомами, когда расстояние между ядрами R много больше характерных размеров электронных оболочек (т.е. радиуса Бора $a_B = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/(me^2) \approx 5.3 \cdot 10^{-11}$ м), практически отсутствует, а энергия системы равна удвоенной энергии связи атома водорода $2E_0$, где $E_0 = -me^4/(2(4\pi\epsilon_0)^2\hbar^2) \approx -13.6$ эВ. При уменьшении R до нуля эта энергия будет бесконечно возрастать из-за кулоновского отталкивания ядер.

Результаты расчетов можно описать следующим образом. Если спины электронов параллельны, то при сближении атомов водорода энергия системы монотонно увеличивается, никакого связанного состояния не возникает (кривая E_- на рис. 32.2). В этом случае предоставленные самим себе два атома вновь разойдутся, стремясь к состоянию с наименьшей возможной энергией. Условие существования связанного состояния — наличие минимума энергии системы при некотором значении R_0 — выполняется только при синглетном состоянии электронов, когда их спины антипараллельны (кривая E_+ на рис. 32.2).

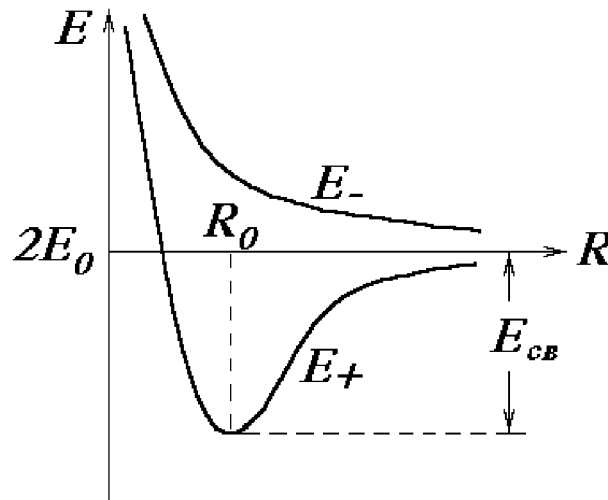


Рис. 32.2: Зависимость энергии E молекулы водорода от расстояния R между атомами. На больших расстояниях имеем два нейтральных атома водорода с общей энергией $2E_0 = 2 \times (-13.6 \text{ эВ}) = -27.2 \text{ эВ}$. Кривая E_- соответствует триплетному состоянию электронов и проходит выше асимптотического значения $2E_0$ — связанного состояния молекулы в этом случае не существует. Кривая E_+ соответствует синглетному состоянию электронов, она имеет минимум при $R = R_0$ (конечный размер молекулы), расстояние которого от асимптотического значения и есть энергия связи $E_{св}$ молекулы водорода.

Понять такое поведение энергии можно на качественном уровне, если рассмотреть два водородных атома, находящихся на большом расстоянии $R \gg a_B$ друг от друга. Тогда членом взаимодействия \hat{U} в гамильтониане (32.5) можно пренебречь, и мы имеем два независимых атома, описываемых суммой гамильтонианов \hat{H}_1 и \hat{H}_2 . Решения соответствующего каждому из них уравнения Шредингера мы уже знаем. Введем обозначения для получающихся волновых функций: $\psi_A(\vec{r}_1)$ и $\psi_B(\vec{r}_2)$. Тогда решение для суммы гамильтонианов $\hat{H}_1 + \hat{H}_2$ будет представляться в виде произведения волновых функций $\psi_A(\vec{r}_1)\psi_B(\vec{r}_2)$, а энергия — в виде суммы энергий, т.е. будет равна $2E_0$. Физический смысл произведения волновых функций очевиден: электрон 1 находится в поле ядра A , а электрон 2 — в поле ядра B . Но электроны неразличимы, и эта физическая ситуация ничем не отличается от случая, когда электрон 2 находится в поле ядра A , а электрон 1 — в поле ядра B . Этому соответствует иное произведение волновых функций: $\psi_A(\vec{r}_2)\psi_B(\vec{r}_1)$, которое тоже является решением уравнения Шредингера с той же энергией $2E_0$. Согласно принципу суперпозиции, решением с этой же энергией будет и любая линейная комбинация указанных произведений. Поскольку принцип Паули требует, чтобы пол-

ная волновая функция была либо симметрична, либо антисимметрична по пространственным координатам электрона, она должна иметь вид:

$$\Psi_{\pm}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = N_{\pm} [\psi_A(\vec{r}_1)\psi_B(\vec{r}_2) \pm \psi_A(\vec{r}_2)\psi_B(\vec{r}_1)], \quad (32.7)$$

где N_{\pm} — вычисляемые нормировочные коэффициенты, обеспечивающие равенство единице полной вероятности: $\int \Psi_{\pm}^2 d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 = 1$. Подставляя сюда выражения (32.7) и учитывая, что $\psi_A(\vec{r})$ и $\psi_B(\vec{r})$ уже нормированы на единицу, получаем:

$$N_{\pm}^2(1 \pm 2P^2 + 1) = 1, \quad (32.8)$$

откуда

$$N_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2(1 \pm P^2)}}. \quad (32.9)$$

Величина P , называемая интегралом перекрытия, равна

$$P = \int \psi_A(\vec{r})\psi_B(\vec{r}) d^3\vec{r}. \quad (32.10)$$

Она характеризует степень перекрытия волновых функций ψ_A и ψ_B , т.е. степень независимости пространственного распределения электронов друг от друга, и играет важную роль в теоретических расчетах свойств молекул.

Если учесть теперь член взаимодействия \hat{U} , то в зависимости от симметрии волновой функции Ψ_{\pm} получатся поправки к энергии разных знаков. В случае антисимметричного состояния Ψ_{-} (полный спин электронов $S = 1$) поправка получается положительной (отталкивание атомов), и связанного состояния не возникает. В случае же симметричного состояния Ψ_{+} (полный спин электронов $S = 0$) поправка для больших R отрицательна (притяжение атомов), что приводит к образованию молекулы водорода.

Осмыслить такое поведение поправки к энергии помогает график волновой функции. Ось z направим по линии, соединяющей ядра атомов водорода, а начало отсчета выберем в средней точке между ядрами, так что координаты ядра A равны $\{0, 0, -R/2\}$, а ядра B — $\{0, 0, R/2\}$. Для простоты мы рассмотрим волновые функции на этой оси, причем для случая симметричного расположения электронов относительно начала отсчета: $\vec{r}_1 = \{0, 0, -z\}$, $\vec{r}_2 = \{0, 0, z\}$. Тогда

$$\Psi_{\pm}(z) = N_{\pm} \left(e^{-2|z+R/2|} \pm e^{-2|z-R/2|} \right). \quad (32.11)$$

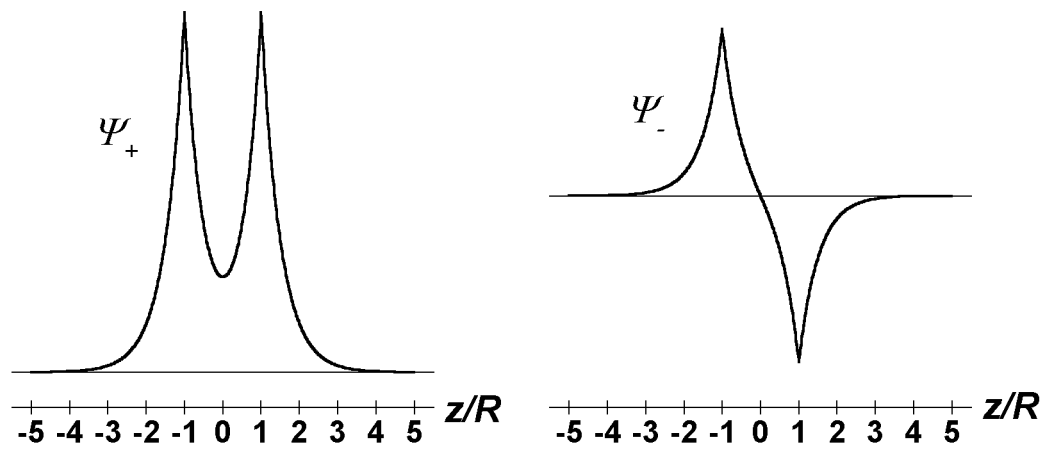


Рис. 32.3: Волновые функции электронов в молекуле водорода на оси, соединяющей ядра атомов для синглетного Ψ_+ и триплетного Ψ_- состояний.

График этих функций представлен на рис. 32.3.

Мы видим, что в обоих случаях существует наибольшая вероятность найти электроны вблизи ядер — волновые функции имеют экстремумы в точках $z = \pm R$. Однако, при сближении атомов в пространстве между ядрами происходит перераспределение плотности электронов, поведение которой различается в зависимости от типа симметрии пространственной части волновой функции — Ψ_+ или Ψ_- . В состоянии Ψ_+ электроны часть времени проводят в области между протонами (волновая функция в этой области заметно отлична от нуля). В центре между атомами получается электронное облачко, притягивающее к себе протоны — возникает стягивающее действие и образуется молекула. В состоянии же Ψ_- плотность электронов между протонами уменьшается (волновая функция проходит через нуль), отталкивание протонов не экранируется, что и приводит к увеличению энергии системы в этом состоянии (см. рис. 32.2). Положение минимума, таким образом, определяется из решения уравнения Шредингера с учетом потенциальной энергии электрического взаимодействия электронов и протонов в молекуле.

Численные результаты $R_0 = 0.87 \text{ \AA}$, $E_{\text{св}} = 3.1 \text{ эВ}$ для кривой E_+ , полученные в таком подходе, следует сравнить с экспериментальными данными: $R_0 = 0.74 \text{ \AA}$, $E_{\text{св}} = 4.5 \text{ эВ}$. Разница в энергии связи составляет 31%, в размере молекулы — 17%.

Комбинации различных типов связи

Мы познакомились с двумя типами связи — ионной и ковалентной. В первой основную роль играет “перескок” электронов от одного атома к другому, во второй — дополнительные силы притяжения между атомами, порождаемые парой электронов с противоположными спинами. На самом деле оказывается, что такое резкое разделение не есть внутреннее свойство системы, но, скорее, недостаток наших методов расчета. Так, для улучшения согласия с экспериментом использованное приближение Гайтлера-Лондона может быть уточнено. Именно, ранее исходным моментом были волновые функции электронов — электрона 1 в поле ядра A и электрона 2 — в поле ядра B . Но электрон 1 также находится и в поле ядра B , а электрон 2 — в поле ядра A . Эти взаимодействия были учтены в поправочных членах, входящих в оператор \hat{U} . Можно, однако, попытаться включить эти взаимодействия в рассмотрение с самого начала. Для этого представим волновую функцию первого электрона в виде $\psi_1(\vec{r}_1) = c\psi_A(\vec{r}_1) + d\psi_B(\vec{r}_1)$, где c, d — некие численные коэффициенты. Они не являются независимыми: условие нормировки волновой функции ψ_1 приводит к связи между ними:

$$\int \psi_1^2(\vec{r}_1) d^3\vec{r}_1 = c^2 + d^2 + 2cdP = 1, \quad (32.12)$$

где P — тот же интеграл перекрытия (32.10). Аналогичный вид имеет и волновая функция второго электрона: $\psi_2(\vec{r}_2) = c\psi_A(\vec{r}_2) + d\psi_B(\vec{r}_2)$. Волновую функцию синглетного двухэлектронного состояния строим как произведение:

$$\begin{aligned} \Psi_+(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= \psi_1(\vec{r}_1)\psi_2(\vec{r}_2) = \\ &= c^2\psi_A(\vec{r}_1)\psi_A(\vec{r}_2) + d^2\psi_B(\vec{r}_1)\psi_B(\vec{r}_2) + \\ &+ cd[\psi_A(\vec{r}_1)\psi_B(\vec{r}_2) + \psi_B(\vec{r}_1)\psi_A(\vec{r}_2)]. \end{aligned} \quad (32.13)$$

Мы видим, что здесь содержится волновая функция Гайтлера-Лондона — это последнее слагаемое в (32.13). Однако, в приведенных формулах содержится и описание другого случая: слагаемые $\psi_A(\vec{r}_1)\psi_A(\vec{r}_2)$ и $\psi_B(\vec{r}_1)\psi_B(\vec{r}_2)$. Физический смысл первого из них достаточно очевиден: оба электрона сосредоточены вокруг ядра A , образуя ион водорода H^- , в то время, как ядро B , лишившееся электрона, образует ион H^+ . Мы видим, что этот случай описывает ионную связь. Второе слагаемое описывает аналогичную ситуацию, только ядра A и B меняются

ролями. Для симметричной молекулы при обмене ядер местами ничего не меняется, откуда следует равенство коэффициентов $c^2 = d^2 = |cd|$.

Таким образом, волновая функция (32.11) описывает некую комбинацию ионной и ковалентной связи, причем относительные веса этих двух типов связи одинаковы. Физически это, однако, не так, поскольку мы уже убедились, что метод Гайтлера-Лондона дает неплохое описание молекулы водорода. Но мы нащупали путь. Ясно, что недостаток метода Гайтлера-Лондона заключается в пренебрежении ионными членами, а недостаток только что изложенного подхода (его называют методом молекулярных орбит) — в переоценке влияния этих членов.

Можно принять оба этих метода как два различных исходных приближения, и естественным обобщением может стать улучшение численных значений коэффициентов в волновой функции, определяющих статистический вес ионной и ковалентной связей. Представим, например, симметричную волновую функцию как суперпозицию отдельных двухэлектронных состояний с произвольными коэффициентами a_1, a_2, a_3 :

$$\begin{aligned}\Psi_+(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = & a_1\psi_A(\vec{r}_1)\psi_A(\vec{r}_2) + a_2\psi_B(\vec{r}_1)\psi_B(\vec{r}_2) + \\ & + a_3[\psi_A(\vec{r}_1)\psi_B(\vec{r}_2) + \psi_B(\vec{r}_1)\psi_A(\vec{r}_2)].\end{aligned}\quad (32.14)$$

При использовании такой волновой функции согласие с экспериментом заметно улучшается. В реальных расчетах коэффициенты a_1, a_2, a_3 определяются из условия минимума средней энергии, и их численные значения получаются автоматически, в зависимости от свойств системы. Если окажется, что численное значение одного из них намного превосходит по абсолютной величине два других, то можно говорить о преобладании связи определенного типа. Так, если $|a_1| \gg |a_2|, |a_3|$, то это будет ионная связь A^-B^+ (электрон “перепрыгнул” с ядра B на ядро A ; если $|a_2| \gg |a_1|, |a_3|$, то это имеем случай ионной связи A^+B^- (электрон перешел с ядра A на ядро B); если же, наконец, $|a_3| \gg |a_1|, |a_2|$, то мы имеем дело с ковалентной связью.

Этот подход применим как к молекулам из двух разных атомов, так и к соединениям одинаковых атомов, и позволяет учесть вклад ковалентного соединения в ионных молекулах и вклад ионной связи — в ковалентных молекулах. В применении к симметричным молекулам должно выполняться равенство $|a_1| = |a_2|$, но третий коэффициент a_3 остается независимым, в отличие от метода молекулярных орбит. Сравнение экспериментов с расчетами по волновой функции (32.14) показало, что доля ионной связи в ковалентной молекуле атома водорода равна 20%.

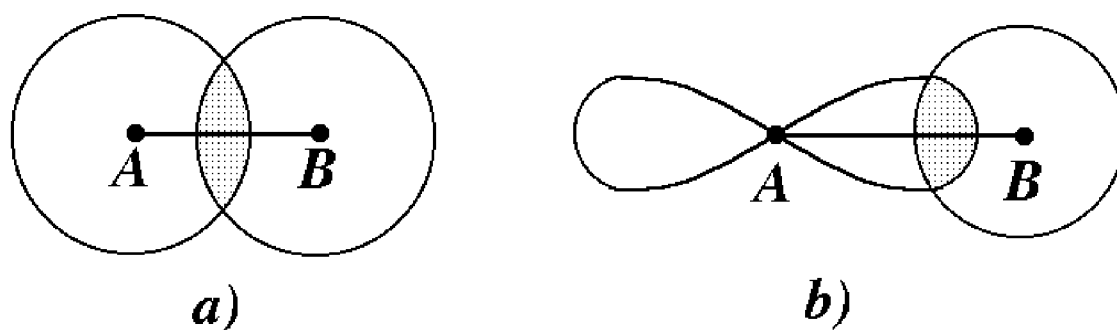


Рис. 32.4: Форма перекрывания электронных оболочек, а) когда оба электрона находятся в s -состоянии, б) когда один из электронов находится в p -состоянии. Штриховкой показана перекрывающаяся часть электронных облаков.

32.2 Пространственное строение молекул

В молекуле водорода химическая связь двух атомов осуществляется, как мы видели, за счет влияния электронных облаков между атомами. В невозбужденных атомах эти электроны находятся в s -состояниях, и их волновые функции сферически симметричны. Форма перекрывания этих облаков показана на рис. 32.4,а).

Но часто валентные электроны находятся в p -состоянии с угловым моментом, равным единице. В этом состоянии волновая функция, соответствующая нулевой проекции момента на какую-либо ось, пропорциональна косинусу угла ϑ между этой осью и радиус-вектором. Следовательно, электронное облако имеет плотность, пропорциональную $\cos^2 \vartheta$. Если изобразить такое облако на рисунке, то оно будет иметь форму восьмерки (точнее, тела, образованного вращением восьмерки вокруг продольной оси). Если такой p -электрон “спаривается” с s -электроном другого атома, то последний стремится пристроиться таким образом, чтобы перекрытие волновых функций было максимальным. Очевидно, что такая связь осуществляется в направлении вытянутости облака p -электрона (рис. 32.4,б).

Электронное облако в состоянии $m = 0$ “обволакивает” ось z , в двух других состояниях с проекциями $m = \pm 1$ такие же облака вытянуты по осям x и y . Это помогает уяснить пространственное строение молекул различных веществ. Ниже мы приводим некоторые характерные примеры.

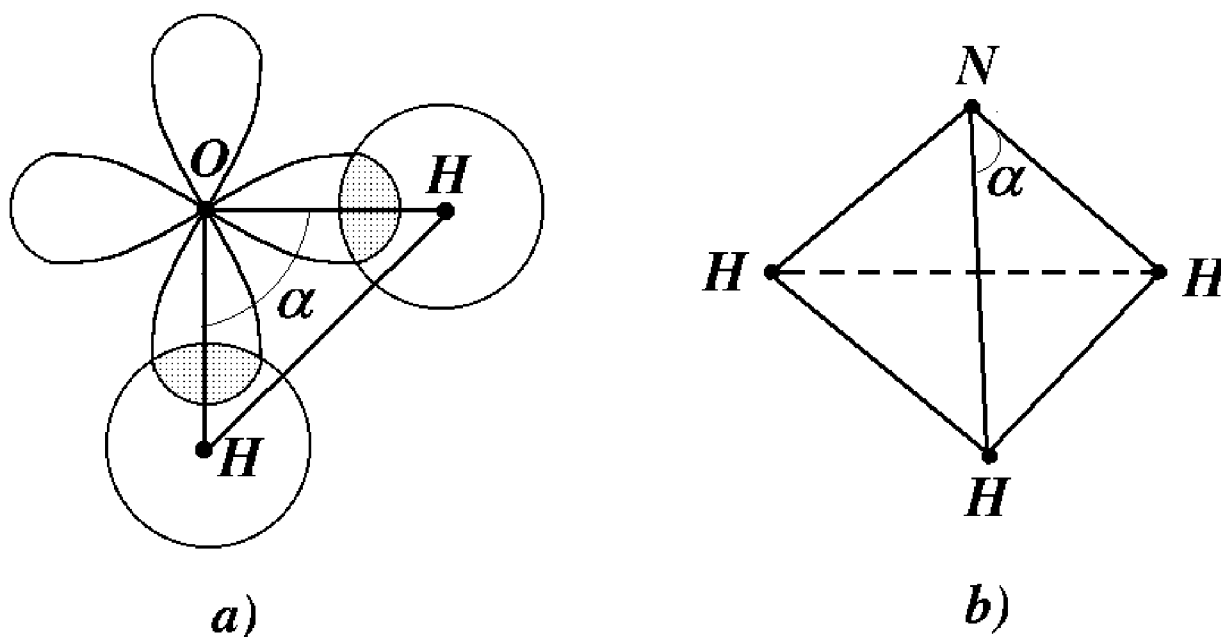


Рис. 32.5: Расположение атомов в молекуле а) воды, б) аммиака.

Вода H₂O. Атом кислорода имеет две заполненные оболочки: 1s и 2s, на которых размещаются четыре электрона. Оставшиеся четыре валентных электрона находятся на оболочке 2p. Их электронные облака отталкиваются и стремятся расположиться подальше друг от друга: три облака вытягиваются по осям x , y , z и четвертому деваться некуда. Скажем, оно располагается по оси z , причем электрон имеет противоположный спин по сравнению с другим электроном, облако которого также расположено вдоль этой оси. Образуются “спаренные” электроны, не участвующие в химической связи. Для химической связи остаются свободными два электрона — облака по осям x и y . Атомы водорода, подсоединяясь как было сказано, образуют молекулу треугольной формы (рис. 32.5,а), причем угол α между направлениями на атомы водорода должен быть равен 90° . Но частично “оголенные” протоны также отталкиваются, и этот угол несколько возрастает: его экспериментальное значение $\alpha = 105^\circ$. Это увеличение тем меньше, чем больше размер атома. Так, в аналогичном соединении H₂S атом серы больше атома кислорода, отталкивание протонов слабее и угол уменьшается до $\alpha = 93^\circ$. Еще больше атом селена, и в молекуле H₂Se атомы водорода расположены под углом $\alpha = 90^\circ$.

Аммиак NH₃. Атом азота имеет конфигурацию $(1s)^2(2s)^2(2p)^3$. Как и в кислороде, четыре электрона, находящиеся в 1s и в 2s состояниях, попарно спарены и не участвуют в химической связи. Остаются три

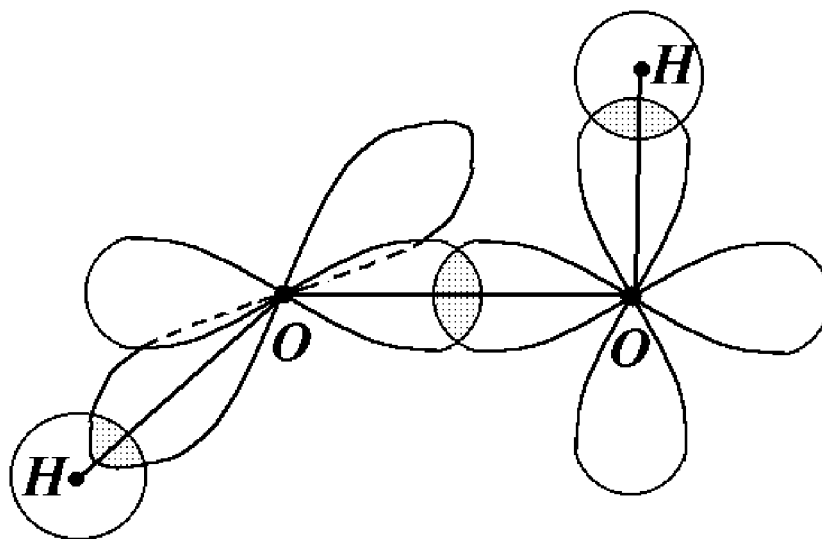


Рис. 32.6: Форма и расположение электронных облаков в молекуле перекиси водорода.

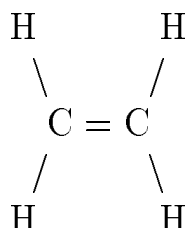
p -электрона, и все три связи расположены по осям x , y , z . При подсоединении трех атомов водорода образуется правильная треугольная пирамида с атомом азота в вершине (см. рис. 32.5,b). Из-за отталкивания протонов углы α при вершине чуть больше 90° . У похожего соединения, фосфина PH_3 , угол ближе к прямому, а у AsH_3 просто $\alpha = 90^\circ$. Из объемности молекулы аммиака следует существование двух вырожденных состояний, отличающихся положением атома азота по ту или иную сторону от основания пирамиды. Однако вырождение снимается вследствие квантовомеханического туннелирования, что ведет к расщеплению вырожденных уровней. Переходы между ними приводят к излучению, которое сделало возможным создание аммиачного лазера.

Перекись водорода H_2O_2 .

В случае, когда спариваются два p -электрона, максимальное перекрытие получается, если их “восьмерки” ориентированы вдоль одной оси. Таким образом соединяются два атома кислорода в молекуле перекиси водорода (рис. 32.6). К ним подсоединяются обычным способом атомы водорода, причем вследствие отталкивания атомы водорода подсоединяются к кислородным облакам вдоль разных осей, так что линия OO и две линии OH на рис. 32.6) все взаимно ортогональны (на самом деле валентный угол между OO и OH возрастает до 100°).

В некоторых молекулах связи между атомами осуществляются не одной, а двумя или тремя парами электронов (двойные или тройные связи).

Пример тройной связи: молекула N_2 , которую химики записывают в виде $N \equiv N$ (черточка соответствует паре электронов). Тройная связь атома углерода имеет место в молекуле ацетилена: $H-C \equiv C-H$. Двойная связь атома углерода в молекуле этилена:



Квантовая механика объясняет эти и более сложные типы связей.

32.3 Молекулярные спектры

По сравнению с линейчатыми атомными спектрами молекулярные имеют более сложную структуру. Они состоят из совокупности полос, которые в свою очередь, распадаются на ряд тесно расположенных линий. Причина такого усложнения спектров заключается в том, что наряду с движением электронов вокруг ядер, в молекуле происходит колебание самих ядер относительно положения равновесия и вращение молекул как целого. Этим трем видам движений соответствуют три типа квантовых уровней энергии: электронные, колебательные и вращательные. В первом приближении движения можно считать независимыми. При изучении молекулярных спектров чрезвычайно важно то обстоятельство, что масса ядра более чем на три порядка превосходит электронную: $M/m_e \sim 10^3 \div 10^4$. Поэтому скорости движения ядер в молекуле малы по сравнению со скоростями электронов. Движение электронов мгновенно приспосабливается к изменению расположения ядер. Таким образом, конфигурацию ядер можно рассматривать как параметр при определении уровней энергии $E_{эл}$. Полная энергия молекулы E складывается, соответственно, из трех квантованных значений энергий:

$$E = E_{эл} + E_{кол} + E_{вр}. \quad (32.15)$$

Электронные уровни энергии

Молекула, подобно атому, обладает рядом возбужденных состояний, различающихся строением электронной оболочки. Переходы электрона из

одного состояния в другое связаны с поглощением или испусканием квантов света. Порядок энергии электронных уровней молекулы можно оценить из соотношения неопределенностей Гейзенберга, аналогично тому, как была получена энергия основного состояния атома водорода. Если линейные размеры молекулы водорода R_0 , то энергия уровня

$$E_{эл} \sim \frac{(\Delta p)^2}{m_e} \approx \frac{\hbar^2}{m_e R_0^2}, \quad (32.16)$$

что при типичных значениях $R_0 \sim 10^{-10}$ м составляет несколько электронвольт и соответствует переходам с испусканием квантов в видимой и ультрафиолетовой областях спектра.

Энергия колебательного движения ядер

Движение ядер в молекуле можно рассматривать при заданном электронном состоянии. Изучение относительного движения ядер с массами M_1 и M_2 в молекуле сводится к решению задачи о поведении частицы с приведенной массой $M_{прив} = M_1 M_2 / (M_1 + M_2)$ в потенциальном поле. Для заданного связанного электронного состояния молекулы энергия $E(R)$ имеет минимум, когда ядра расположены на расстоянии R_0 . Разложим $E(R)$ в ряд Тейлора вблизи точки минимума по степеням $(R - R_0)$:

$$E(R) = E(R_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial R^2} \right)_{R_0} (R - R_0)^2 + \dots \quad (32.17)$$

С точностью до постоянной $E(R_0)$ энергия движения ядер пропорциональна квадрату расстояния от положения равновесия. Следовательно, эти атомы колеблются под действием квазиупругой силы

$$F = -\frac{\partial E}{\partial R} = -k_0(R - R_0). \quad (32.18)$$

Квантовая механика позволяет определить энергетические состояния такой колебательной системы (гармонического осциллятора), которые образуют совокупность эквидистантных (равноотстоящих) уровней

$$E_{кол} = \hbar \omega_0 \left(v + \frac{1}{2} \right), \quad v = 0, 1, 2, \dots, \quad (32.19)$$

где v — колебательное (вибрационное) квантовое число, а частота $\omega_0 = \sqrt{k_0/M_{пр}}$ совпадает с частотой классического осциллятора. Переходы

между колебательными уровнями подчиняются правилу отбора $\Delta v = \pm 1$, т.е. вибрационное число при переходе может измениться лишь на единицу.

Для оценки порядка величины энергии колебательного движения заметим, что при амплитуде колебаний порядка расстояния R_0 между ядрами молекула диссоциирует (разваливается). Энергия таких колебаний составляет величину порядка $k_0 R_0^2$. С другой стороны, изменение энергии при амплитуде колебаний R_0 близки к величине электронной энергии $E_{эл}$. Действительно, изменение межъядерного расстояния на величину R_0 должно вызывать существенные искажения электронной волновой функции Ψ_+ , т.е. возбуждение электронов с изменением их энергии на величину порядка $E_{эл}$. Таким образом, получаем оценку “коэффициента жесткости” молекулярного осциллятора: $k_0 R_0^2 \sim E_{эл} \implies k_0 \sim E_{эл}/R_0^2 \approx m_e E_{эл}^2/\hbar^2$ (см. соотношение (32.11)). Таким образом, для энергии колебательного движения получаем следующую оценку

$$E_{кол} = \hbar\omega_0 = \hbar\sqrt{\frac{k_0}{M_{пр}}} \approx \sqrt{\frac{m_e}{M_{пр}}} E_{эл}, \quad (32.20)$$

что соответствует энергиям порядка десятых или сотых долей электрон-вольта и излучению в инфракрасной области спектра. Таким образом, колебательная энергия много меньше энергии электронного уровня.

Энергия вращательного движения молекул

Вращение молекул рассмотрим в предположении жесткой связи между ядрами, т.е. пренебрегая колебаниями. Для двухатомной молекулы момент инерции относительно оси, перпендикулярной оси молекулы и проходящий через центр инерции, равен $I = M_{пр} R_0^2/2$. Согласно законам механики, энергия вращательного движения связана с вращательным моментом количества движения молекулы L : $E_{вр} = L^2/2I$. Вращательный момент квантуется: $L = \hbar\sqrt{J(J+1)}$, где $J = 0, 1, 2, \dots$ — ротационное квантовое число. Это позволяет определить вращательные уровни энергии:

$$E_{вр} = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1). \quad (32.21)$$

Отсюда следует оценка величины вращательной энергии:

$$E_{вр} \sim \frac{\hbar^2}{2I} \approx \frac{\hbar^2}{M_{пр} R_0^2} \approx \frac{m_e}{M_{пр}} E_{эл}, \quad (32.22)$$

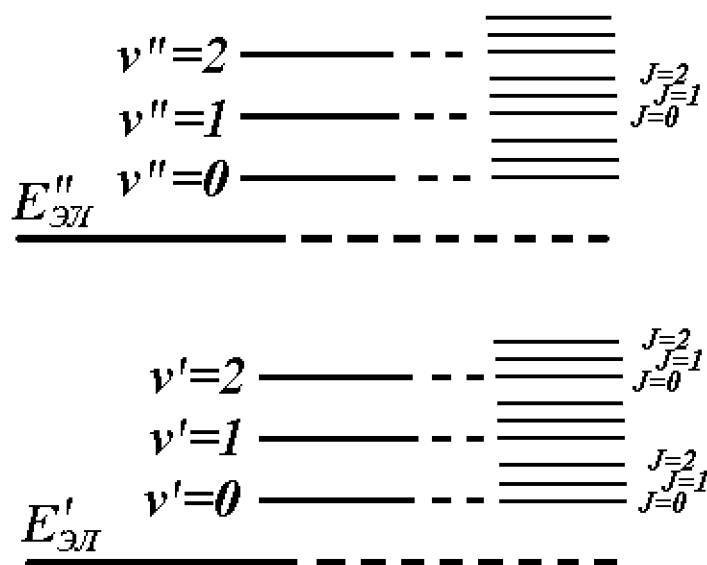


Рис. 32.7: Схема расположения электронных, вращательных и колебательных уровней молекулы.

т.е. величину порядка $10^{-3} \div 10^{-5}$ эВ, соответствующую излучению в далекой инфракрасной и микроволновой (СВЧ) областях спектра. Для вращательного спектра разрешены переходы с $\Delta J = \pm 1$.

Молекулярные спектры

Проведенные оценки величины трех типов уровней в молекуле показывают, что

$$E_{эл} : E_{кол} : E_{вр} = 1 : \sqrt{\frac{m_e}{M_{пр}}} : \frac{m_e}{M_{пр}}. \quad (32.23)$$

В соответствии с этими отношениями, система уровней молекулы складывается из сравнительно далеко отстоящих электронных уровней, испытывающих расщепление под влиянием колебаний ядер. Эти расщепленные уровни, в свою очередь, испытывают еще более тонкое расщепление в связи с вращением молекул (рис. 32.7).

Изменение электронного состояния молекулы связано обычно с целой серией изменений: колебательное движение претерпевает изменения, так как новому состоянию соответствует измененное равновесное расстояние между ядрами; при этом также изменяется и момент инерции молекулы и, следовательно, положение вращательных уровней. Эти изменения вызывают целую серию поглощаемых или испускаемых квантов, энергии

которых соответствуют разнице энергий каких-либо уровней, между которыми происходит переход.

Если атомные спектры состоят из отдельных линий, то при наблюдении с низким разрешением молекулярные спектры представляются состоящими из полос. При применении приборов с высокой разрешающей способностью обнаруживается, что полосы состоят из большого числа тесно расположенных линий. В соответствии с их характером спектры молекул носят название полосатых спектров. В зависимости от того, изменение каких видов энергии (электронной, колебательной или вращательной) вызывает испускание молекулой фотона, различают следующие типы полос: 1) вращательные, 2) колебательно-вращательные и 3) электронно-колебательные.

В основном состоянии молекулы все три вида энергии имеют минимальное значение. При сообщении молекуле достаточного количества энергии она переходит в возбужденное состояние и затем, совершая разрешенный правилами отбора переход в одно из более низких энергетических состояний, излучает фотон с энергией

$$\begin{aligned} \hbar\omega_{ph} &= \Delta E_{эл} + \Delta E_{кол} + \Delta E_{вр} = \\ &= E'_{эл} - E''_{эл} + \left(v' + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega' - \left(v'' + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega'' + \\ &\quad + \frac{\hbar^2 J'(J' + 1)}{2I'} - \frac{\hbar^2 J''(J'' + 1)}{2I''}. \end{aligned} \quad (32.24)$$

Следует отметить, что ω и I отличаются для различных электронных конфигураций молекулы.

Учитывая соотношения между энергиями $\Delta E_{эл} \gg \Delta E_{кол} \gg \Delta E_{вр}$, приходим к выводу, что при слабых возбуждениях изменяется только $E_{вр}$, при более сильных — $E_{кол}$, и лишь при еще более сильных возбуждениях изменяется электронная конфигурация молекулы, т.е. $E_{эл}$. Соответственно, наименьшей энергией обладают фотоны, связанные с вращательными переходами (электронная конфигурация и энергия колебательного движения не изменяются). Учитывая, что $\Delta J = \pm 1$, находим

$$\omega_{ph} = \frac{\Delta E_{вр}}{\hbar} = \frac{\hbar}{2I} [(J+1)(J+2) - J(J+1)] = \frac{\hbar}{I} (J+1). \quad (32.25)$$

Измерение энергии таких фотонов, позволяет определить момент инерции молекулы и, следовательно, ее размер R_0 . Например, для HCl найдено: $I = 2.71 \cdot 10^{-47}$ кг·м², что соответствует $R_0 = 1.29 \cdot 10^{-10}$ м = 1.29 Å.

При переходах, сопровождающихся изменениями и колебательного, и вращательного состояний молекулы, частота излучаемого фотона может быть записана в виде

$$\begin{aligned}\omega_{ph} &= \frac{\Delta E_{\text{кол}} + \Delta E_{\text{вр}}}{\hbar} = \omega_{\text{кол}} \left(v' + \frac{1}{2} \right) - \omega_{\text{кол}} \left(v'' + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar}{I}(J + 1) = \\ &= \omega_{\text{кол}} + \frac{\hbar}{I}(J + 1),\end{aligned}\quad (32.26)$$

где было учтено, что $\Delta v = \pm 1$.

32.4 Комбинационное рассеяние света

В 1928 г. советские ученые Г. С. Ландсберг и Л. И. Мандельштам и одновременно индийские физики Ч. Раман и К. Кришнан обнаружили, что в спектре рассеяния, возникающем при прохождении света через газы, жидкости или прозрачные кристаллические тела, помимо несмещенной линии с частотой падающего света содержатся новые линии, частоты которых представляют комбинации частоты падающего света ω_0 и частоты ω_i колебательных или вращательных переходов рассеивающих молекул: $\omega = \omega_0 \pm \omega_i$. Это явление получило название комбинационного (рамановского) рассеяния света, и за его открытие Раман был удостоен в 1930 г. Нобелевской премии.

Из рис. 32.8 видно, что спектр комбинационного рассеяния состоит из несмещенной линии ω_0 , симметрично которой располагаются ряд спутников. Каждому “красному” спутнику (т.е. спутнику, смещенному в сторону больших длин волн) с частотой $\omega_0 - \omega_i$ соответствует “фиолетовый” спутник с частотой $\omega_0 + \omega_i$. При обычных температурах интенсивность фиолетовых спутников значительно меньше, чем красных. С увеличением температуры интенсивность фиолетовых спутников быстро возрастает.

Процесс рассеяния света в рамках квантовой теории можно рассматривать как соударение фотонов с молекулами (упругое и неупругое). При соударении фотон может отдать молекуле или получить от нее только такие количества энергии, которые равны разностям двух ее энергетических уровней. Рассеяние фотона с энергией $\hbar\omega_0$ может сопровождаться переходами молекулы между различными вращательными или колебательными уровнями E_1, E_2, E_3 и т.д. Если при столкновении с фотоном молекула переходит из состояния с энергией E_1 в состояние с энергией

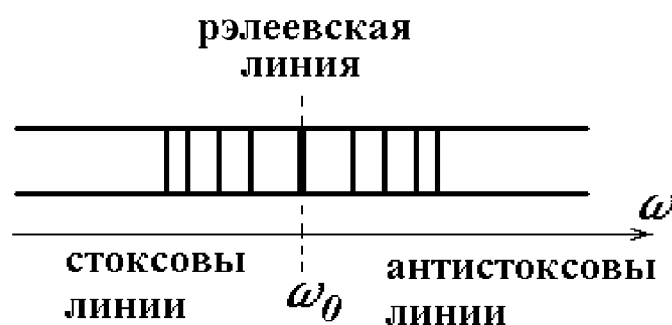


Рис. 32.8: Спектр комбинационного рассеяния.

E_2 (причем $E_2 > E_1$), то энергия фотона после рассеяния уменьшается: $\hbar\omega = \hbar\omega_0 - \Delta E$, где $\Delta E = E_2 - E_1$, т.е. возникает красный спутник в спектре. Если же первоначально молекула находилась в возбужденном состоянии с энергией E_2 , она может в результате взаимодействия с фотоном перейти в состояние с энергией E_1 , отдав избыток энергии фотону. В результате этого энергия фотона увеличивается: $\hbar\omega = \hbar\omega_0 + \Delta E$, т.е. возникает фиолетовый спутник. Таким образом, могут возникать ряд симметрично расположенных спутников.

При обычных температурах число молекул, находящихся в основном состоянии, намного превосходит число молекул, находящихся в возбужденных состояниях. Поэтому столкновения, сопровождающиеся увеличением энергии молекулы, происходят чаще, чем переходы, сопровождающиеся уменьшением энергии. Этим объясняется большая интенсивность красных спутников по сравнению с фиолетовыми. При увеличении температуры число молекул в возбужденных энергетических состояниях быстро растет, что обуславливает увеличение интенсивности фиолетовых спутников.

Следует отметить, что комбинационное рассеяние относится к числу нелинейных эффектов квантовой теории излучения. Оно стало эффективным методом исследования строения молекул и их взаимодействия со средой. Методами комбинационного рассеяния изучают квазичастицы в твердом теле. Применение лазеров в качестве источников света значительно расширило круг объектов (газы, порошки), доступных для исследования методами комбинационного рассеяния света.

Часть VI

Основы статистической физики и термодинамики

Передо мною мир стоит
Мифологической проблемой:
Мне Менделеев говорит
Периодической системой;
Соединяет разум мой
Законы Бойля, Ван-дер-Ваальса —
Со снами веющего вальса,
С богами зреющего тьмой . . .

.....

И было: много, много дум;
И метафизики, и шумов . . .
И строгой физикой мой ум
Переполнял: профессор Умов.
Над мглой космической он пел,
Развив власы и выгнув выю,
Что парадоксами Максвелл
Уничтожает энтропию . . .

А. Белый. ПЕРВОЕ СВИДАНИЕ.
М.: Худ. лит., 1990.

Глава 33

Идеальный газ

В нашем курсе, как принято во всех учебниках, мы постепенно продвигаемся от простого к сложному. До сих пор мы занимались в основном поведением одной частицы в разных силовых полях и свойствами этих полей. Но реальные физические системы состоят из невообразимо огромного числа частиц, так что проследить за движением каждой из них не под силу самым мощным компьютерам. Таким (макроскопическим) системам и посвящен в целом весь данный раздел.

В науке сложились два метода изучения свойств вещества и физических явлений, связанных с изменением свойств макроскопических тел: молекулярно-кинетический и термодинамический. Оба метода дополняют друг друга. В этой главе мы сосредоточимся на молекулярно-кинетическом подходе.

33.1 Общие положения

Молекулярно-кинетический подход

Молекулярная физика исходит из двух основных положений:

- Любое тело — твердое, жидкое или газообразное — состоит из обособленных частиц, которые мы называем молекулами.
- Молекулы всякого вещества находятся в беспорядочном хаотическом движении, не имеющем какого-либо преимущественного направления. Это движение называют тепловым, так как его интенсивность определяет температуру вещества.

Молекулярно-кинетическая теория ставит перед собой цель истолковать те свойства вещества, которые непосредственно наблюдаются на опыте

(вязкость, теплопроводность и т.п.) как суммарный результат действия молекул. При этом она пользуется статистическим методом, интересуясь не движением каждой отдельной молекулы, но лишь такими средними величинами, которые характеризуют движение и взаимодействие всей совокупности молекул. Молекулярно-кинетическая теория оперирует при этом основными закономерностями физики, действующими на *микроскопическом* уровне — законами классической механики, электродинамики и прочее. Поэтому она в состоянии предсказать величины многих физических параметров системы на основе, как говорят, первых принципов. В этой главе мы займемся выводом хорошо известных законов для идеальных газов на основе молекулярно-кинетической теории.

Состояние системы

В любом разделе физики изучение явлений начинается с выделения определенной совокупности тел, которую называют системой. Все тела, которые не входят в систему, но могут влиять на ее свойства и поведение, называют окружающей средой. Представим, например, газ (система) в закрытом цилиндре под поршнем (среда). Изменение положения поршня или температуры стенок цилиндра меняет состояние системы.

Величины, характеризующие состояние системы, называются ее *параметрами*. Состояние таких простейших систем, как газ, характеризуется следующими макроскопическими параметрами: объемом V , давлением p , температурой T . Естественно, нужны также параметры, определяющие систему — ее масса m , относительная молекулярная масса M (или масса моля μ). Напомним, что относительная молекулярная масса M — это безразмерная величина, равная отношению массы молекулы данного вещества к $1/12$ массы атома углерода ^{12}C . *Моль* — это количество данного вещества, масса которого, выраженная в граммах, численно равна относительной молекулярной массе. Масса моля (*молярная масса* μ) имеет в СИ размерность кг/моль. При решении задач значения относительной молекулярной массы элементов берутся из таблицы Менделеева. Молярная масса рассчитывается легко: $\mu = M \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Например, для золота $\mu_{\text{Au}} = 197 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Для сложных веществ необходимо произвести простые арифметические действия, например $\mu_{\text{CO}_2} = (12 + 2 \times 16) \cdot 10^{-3} = 44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Вообще говоря, параметры системы могут иметь разные значения в различных ее точках. В этом случае системе в целом нельзя приписать

определенных значений этих параметров и мы имеем дело с *неравновесным состоянием*. Опыт показывает, однако, что если внешние условия неизменны, то система приходит в *равновесное* состояние: выравниваются давления и температуры ее отдельных частей, так что параметры системы принимают определенные значения, остающиеся постоянными сколь угодно долго. При этом внешние условия должны быть таковы, чтобы в системе не было переноса вещества, энергии, импульса и т.п. В равновесном состоянии системы между параметрами имеется связь: заданные два параметра системы (например, ее температура и объем) однозначно определяют третий (в данном случае, давление). Математически эту связь можно изобразить т.н. *уравнением состояния* $F(V, p, T) = 0$, где конкретный вид функции F зависит от системы. Примером служат уравнения Клапейрона-Менделеева для идеального или Ван дер Ваальса для неидеальных газов (см. ниже). Равновесное состояние может быть изображено графически точкой на плоскости, где по осям отложены какие-нибудь два из параметров — (p, V) , (p, T) или (V, T) . Примеры даны на рис. 33.1.

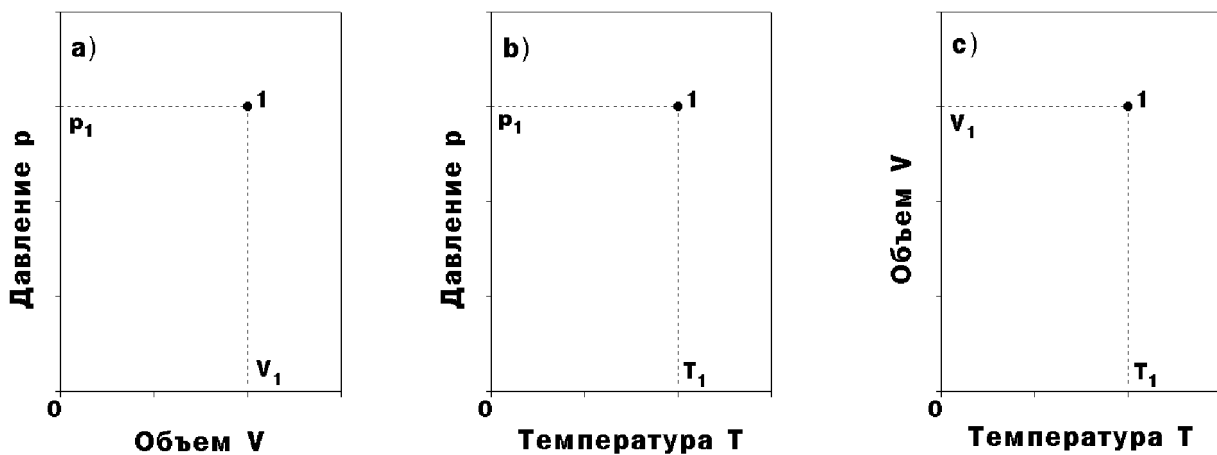


Рис. 33.1: Равновесные состояния системы на диаграммах (p, V) , (p, T) и (V, T) .

Под *процессом* понимается всякий переход системы из одного состояния в другое. Процесс связан с нарушением равновесного состояния системы. Если состояние системы меняется со временем, то в системе происходит какой-то процесс. Обратное, вообще говоря, неверно: состояние системы может не меняться, хотя в ней и идет процесс. Например, при стационарном процессе переноса тепла состояние системы является неравновесным, хотя и остается неизменным в том смысле, что не меня-

ются распределения температур по объему системы.

При бесконечно медленном протекании процесса можно считать, что в каждый данный момент времени состояние системы равновесное. Физически это означает, что характерное для процесса время t_p много больше времени установления равновесия в системе t_e . Такой процесс называют *равновесным* процессом, и его можно представить себе как последовательность равновесных состояний. В дальнейшем будут изучаться (если иное специально не оговорено) лишь равновесные процессы.

Поскольку состояние системы изображается точкой на диаграмме, а процесс — это последовательность равновесных состояний, то такой процесс изображается на диаграмме линией. Каждая точка на линии — условно равновесное промежуточное состояние системы. Равновесный процесс является процессом *обратимым*, т.е. он может протекать в обратном направлении, проходя те же промежуточные состояния в обратном порядке, причем в окружающих телах не останется никаких изменений. Естественно, что в системе тогда не должно действовать никаких сил, подобных силам трения. Ниже мы познакомимся с диаграммами, описывающими некоторые характерные процессы в термодинамических системах.

Зная состояние системы, мы можем найти различные *функции состояния* — физические характеристики, которые зависят только от состояния системы, т.е. принимают те же значения всякий раз, когда система оказывается в данном состоянии независимо от ее предыстории.

Температура

Любая система обладает неким запасом *внутренней* энергии, не связанной с положением или движением системы как целого относительно внешней среды. О внутренней энергии мы еще поговорим подробнее, а сейчас нам достаточно интуитивного понимания, что бросив с какой-то скоростью яйцо, мы его не сварим, хотя кинетическая энергия яйца и увеличится. Чтобы приготовить яйцо всмятку, его надо не бросать, а подогреть.

Для количественной характеристики внутренней энергии вводится понятие *температуры*. Температура занимает особое место в ряду физических величин. Опыт показывает, что она характеризует состояние теплового равновесия тел. Если привести в соприкосновение два тела с разными температурами, то в результате взаимодействия между моле-

кулами эти тела будут обмениваться энергией. Через некоторое время температуры выравниваются и передача теплоты прекратится, наступит состояние теплового равновесия. Состояние теплового равновесия и есть то состояние, в которое переходит с течением времени любая изолированная система.

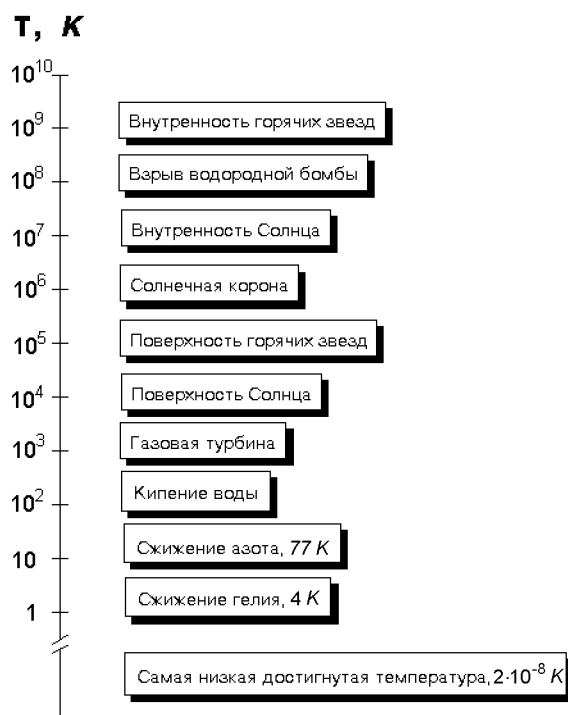


Рис. 33.2: Примеры различных температур в природе. Абсолютный ноль $T = 0$ соответствует бесконечно удаленной точке ($10^{-\infty}$) на логарифмической шкале и не может быть показан на рисунке.

Обычные способы определения температуры основаны на зависимости от нее ряда свойств тел (объема, давления и др.). При этом выбирается термометрическое тело и градуировка температурной шкалы. Наиболее распространенной является стоградусная шкала. Участок этой шкалы между точками замерзания и кипения воды при нормальном атмосферном давлении делится на 100 равных частей. Такая часть называется градусом Цельсия (обозначается $t^{\circ}C$). Таким образом, точка кристаллизации воды соответствует $0^{\circ}C$, а точка кипения — $100^{\circ}C$. В США используют также шкалу Фаренгейта (обозначается $t^{\circ}F$). За ноль своей шкалы Г. Фаренгейт выбрал наинизшую температуру, которую он мог воспроизвести в своей лаборатории — точку плавления смеси соли и льда. Точке замерзания воды в этой шкале соответствует температура $32^{\circ}F$, а точке

кипения — $212^{\circ}F$. Этот интервал разделен не на сто, а на 180 частей (аналогично угловым градусам). Поэтому градус Фаренгейта меньше градуса Цельсия (фактор $100/180 = 5/9$). Связь температур в этих двух шкалах дается формулами

$$t^{\circ}F = 32 + \frac{9}{5}t^{\circ}C, \quad t^{\circ}C = \frac{5}{9}(t^{\circ}F - 32). \quad (33.1)$$

Тем, кто собирается в США: для быстрого перевода надо умножить температуру по Цельсию на два, уменьшить результат на 10% и прибавить 32 градуса. Пример: $36.6^{\circ}C \Rightarrow 2 \cdot 36.6 = 73.2 \Rightarrow 73.2 - 7.32 \approx 65.9 \Rightarrow 65.9 + 32 = 97.9^{\circ}F$. Таким образом, нормальная температура тела человека в США — это $98^{\circ}F$. Еще проще обратный перевод: температуру по Фаренгейту делим на два, отнимаем 16 и добавляем 11% от полученного результата. Например, $-30^{\circ}F \Rightarrow -30/2 - 16 = -31 \Rightarrow -31 - 3.1 - 0.3 = -34.4^{\circ}C$.

В физике пользуются абсолютной шкалой температур T (шкалой Кельвина), которая не зависит от термометрического тела, а устанавливается на основе законов термодинамики. Величина одного градуса в шкале Кельвина (обозначается K) совпадает с градусом Цельсия, а за ноль взята температура, при которой прекращается тепловое движение молекул. Связь абсолютной температуры T с температурой по стоградусной шкале дается соотношением

$$T K \approx t^{\circ}C + 273.15. \quad (33.2)$$

Таким образом, абсолютному нулю температуры $T = 0 K$ в стоградусной шкале соответствует температура $t = -273.15^{\circ}C$. Это значение было установлено опытным путем. Примеры температур в природе см. на рис. 33.2.

33.2 Уравнение Клапейрона-Менделеева

В этом разделе мы знакомимся с уравнением состояния идеального газа. Под идеальным понимается настолько разреженный газ, что взаимодействием между его молекулами можно пренебречь. Эксперименты показали, что при обычных для нашего мира температурах и давлениях свойства реальных газов близки к свойствам идеального. Убедимся в этом, скажем, на примере водяного пара.

По таблице Менделеева можно определить массу моля $\mu_{H_2O} \approx 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Плотность воды в жидком состоянии $\rho_{H_2O} \approx 1 \cdot 10^3$ кг/м³. Отсюда можно найти объем одного моля воды: $V_{H_2O} = \mu_{H_2O} / \rho_{H_2O} \approx 18 \cdot 10^{-6}$ м³/моль. Один моль любого вещества содержит одно и то же число молекул. Это число называют числом Авогадро: $N_A = 6.023 \cdot 10^{23}$ 1/моль. Получаем отсюда объем V_1 , приходящийся на одну молекулу воды: $V_1 = V_{H_2O} / N_A \approx 3 \cdot 10^{-29}$ м³. В конденсированном состоянии молекулы располагаются вплотную друг к другу, то есть в сущности V_1 есть объем молекулы воды. Отсюда получается оценка на ее линейный размер (диаметр): $D \approx \sqrt[3]{V_1} \approx 3 \cdot 10^{-10}$ м.

С другой стороны, известно, что объем V_m одного моля любого газа при нормальных условиях равен $V_m \approx 22.4 \cdot 10^{-3}$ м³/моль. Поэтому на одну молекулу водяного пара приходится объем $v \approx V_m / N_A \approx 3.7 \cdot 10^{-26}$ м³. Это значит, что газ можно нарезать мысленно на кубики с длиной ребра $L = \sqrt[3]{v} \approx 3 \cdot 10^{-9}$ м, и в каждом таком кубике окажется одна молекула. Иными словами, L — среднее расстояние между молекулами водяного пара. Мы видим, что L на порядок превосходит размер D молекулы. Аналогичные оценки получаются и для других газов, так что с хорошей точностью можно считать, что молекулы не взаимодействуют друг с другом и при нормальных условиях газ идеален.

Как уже говорилось, уравнение состояния, имеющее вид $F(p, V, T) = 0$, позволяет выразить один термодинамический параметр через два других. Конкретный вид этого уравнения зависит от того, какое вещество и в каком агрегатном состоянии рассматривается. Уравнение состояния идеального газа объединяет ряд экспериментально установленных частных газовых законов. Каждый из них описывает поведение газа при условии, что изменяются лишь два параметра.

1. Закон Бойля—Мариотта. Для данной массы конкретного газа при постоянной температуре $T = \text{const}$ выполняется соотношение

$$pV = \text{const}. \quad (33.3)$$

Переход газа из одного состояния в другое, совершающийся при постоянной температуре, называется *изотермическим* процессом. Графически эти процессы изображены на (p, V) диаграмме (рис. 33.3). Показанные кривые представляют собой гиперболы $p = \text{const}/V$, располагающиеся тем выше, чем выше температура газа.

2. Закон Гей-Люссака. Описывает тепловое расширение газов при

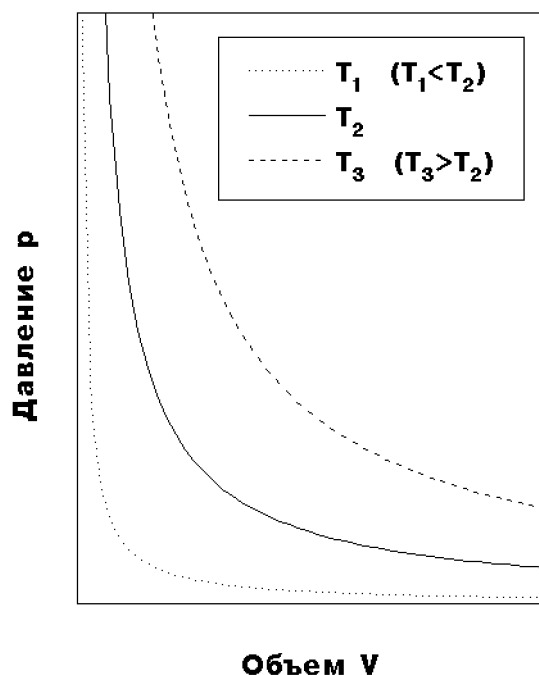


Рис. 33.3: Изотермы идеального газа.

постоянном давлении $p = \text{const}$:

$$V = V_0(1 + \alpha t^\circ C). \quad (33.4)$$

Здесь V_0 — объем газа при $t = 0^\circ C$. Такие процессы называются *изобарными*. Графически эта зависимость показана на (V, t) диаграмме (рис. 33.4, слева). Чем выше давление газа, тем ниже располагаются соответствующие прямые.

Гей-Люссак установил, что температурный коэффициент расширения α не зависит от природы газа: $\alpha = 1/(273.15^\circ C)$. Переходя к абсолютной шкале температур, можем записать этот закон в виде

$$V = \text{const} \cdot T. \quad (33.5)$$

3. Закон Шарля. Для данной массы газа, заключенного в постоянный объем $V = \text{const}$, выполняется соотношение

$$p = p_0(1 + \alpha t^\circ C). \quad (33.6)$$

Здесь p_0 — давление газа при $t = 0^\circ C$. Процессы при постоянном объеме называются *изохорными*. Графически они показаны на (p, t) диаграмме

(см. рис. 33.4, справа). Переходя к абсолютной температуре, записываем закон в виде:

$$p = \text{const} \cdot T. \quad (33.7)$$

Если объединить эти законы, то получим уравнение состояния идеального газа (для одного моля):

$$pV = RT. \quad (33.8)$$

Т.н. *универсальная газовая постоянная* $R = 8.31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{K})$.

При тех же значениях объема и температуры системы давление газа пропорционально числу молей вещества $\nu = m/\mu$. Поэтому для произвольной массы газа m уравнение состояния идеального газа (33.8) примет вид:

$$pV = \frac{m}{\mu}RT. \quad (33.9)$$

Это уравнение называют уравнением Клапейрона-Менделеева.

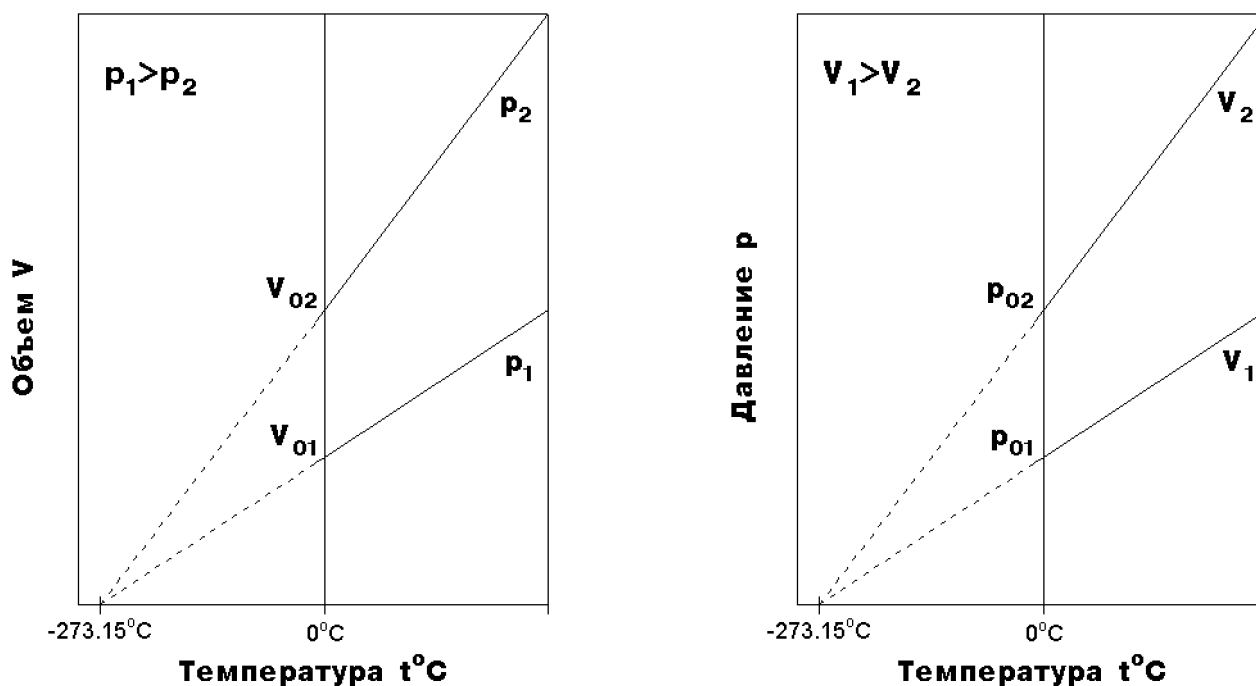


Рис. 33.4: Изобарный (слева) и изохорный (справа) процессы.

33.3 Кинетическая теория идеальных газов

В этом разделе мы переходим к молекулярно-кинетическому описанию идеального газа.

При выводе уравнения состояния будем считать молекулы маленькими твердыми шариками, упруго отражающимися от стенок сосуда. Припишем каждой молекуле номер i , ($i = 1, 2, \dots, N$), где N — полное число молекул в системе. Пусть молекула i подлетает к стенке, ограничивающей движение вдоль оси x , со скоростью $v_{i,x}$ и импульсом $p_{i,x}$. При отражении она меняет импульс на обратный $-p_{i,x}$, так что изменение x -компоненты импульса молекулы равно $\Delta p_{i,x} = p_{i,x} - (-p_{i,x}) = 2p_{i,x}$. Молекула после отражения долетит до противоположной стенки, снова отразится и в следующий раз подлетит к той же стенке через время $\Delta t = 2l/v_{i,x}$, где l — длина сосуда. Поскольку импульс $\Delta p_{i,x}$ передается стенке каждые Δt секунд, на стенку со стороны одной молекулы действует средняя сила

$$\langle F_i \rangle = \frac{\Delta p_{i,x}}{\Delta t} = \frac{p_{i,x} v_{i,x}}{l}. \quad (33.10)$$

(Заметим на будущее, что средние значения мы будем обозначать чертой сверху или, если это будет более удобно, угловыми скобками, так что обозначения \overline{F} и $\langle F \rangle$ эквивалентны.) Если в сосуде заключено N молекул, то полная сила F получится суммированием выражения (33.10) по всем молекулам: $F = \sum_i^N F_i$. При этом сумма произведений импульсов на скорости представима в виде

$$\sum_i^N p_{i,x} v_{i,x} = N \left(\frac{1}{N} \sum_i^N p_{i,x} v_{i,x} \right) = N \langle p_x v_x \rangle,$$

Так как все направления равноправны и молекулы совершенно одинаково отражаются от всех стенок сосуда, имеем $\langle p_x v_x \rangle = \langle p_y v_y \rangle = \langle p_z v_z \rangle$. С другой стороны, среднее значение произведения импульса молекулы на ее скорость определяется как $\langle \vec{p} \cdot \vec{v} \rangle = \langle p_x v_x \rangle + \langle p_y v_y \rangle + \langle p_z v_z \rangle$. Поэтому $\langle p_x v_x \rangle = \langle \vec{p} \cdot \vec{v} \rangle / 3$ и выражение для полной силы, действующей на стенку со стороны газа, приобретает вид:

$$F = N \frac{\langle \vec{p} \cdot \vec{v} \rangle}{3l}. \quad (33.11)$$

Разделив полную силу на площадь стенки S , мы получим выражение для давления газа, где заменим произведение Sl на объем V сосуда. В итоге

приходим к уравнению:

$$pV = N \frac{\langle \vec{p} \cdot \vec{v} \rangle}{3}. \quad (33.12)$$

Используем теперь тот факт, что скорость движения молекул при обычных для нашего мира температурах много меньше скорости света, так что импульс молекулы представим в виде $\vec{p} = m_0 \vec{v}$, где m_0 — масса молекулы. Получаем тогда из (33.11):

$$pV = \frac{2}{3} N \left\langle \frac{m_0 v^2}{2} \right\rangle = \frac{2}{3} N \langle E_{\text{пост}} \rangle, \quad (33.13)$$

где $\langle E_{\text{пост}} \rangle$ — средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы. Произведение $N \langle E_{\text{пост}} \rangle$ есть полная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул газа.

Быть может, на первый взгляд трудно узнать в (33.13) знакомое нам уравнение Клапейрона-Менделеева

$$pV = \frac{m}{\mu} R T,$$

поэтому преобразуем слегка последнее. Введем новую величину — *постоянную Больцмана* $k_B = R/N_A = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К. Важность этой физической постоянной определяется тем, что с ее помощью устанавливается связь между энергией и температурой, как это видно уже по ее размерности. Далее используем, что $\nu = m/\mu$ — число молей вещества в системе, а N_A — число молекул в одном моле, так что νN_A равно полному числу частиц в системе. Приходим тогда к следующей форме уравнения Клапейрона-Менделеева:

$$pV = N k_B T. \quad (33.14)$$

Сравнивая (33.13) и (33.14), мы видим, что в сущности имеем дело с одним и тем же уравнением, если *определить* абсолютную температуру соотношением

$$\overline{E}_{\text{пост}} = \left\langle \frac{m_0 \vec{v}^2}{2} \right\rangle = \frac{3}{2} k_B T. \quad (33.15)$$

Именно так абсолютная температура появляется в физике. Слева в уравнении (33.15) стоит средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы. При нулевой температуре, как мы теперь воочию убеждаемся, действительно прекращается тепловое движение молекул, и поэтому абсолютный ноль недостижим.

Приведем численный пример, демонстрирующий использование энергии газа в правой части уравнения Клапейрона-Менделеева (33.13).

Задача 33.31. В подземной полости радиусом $r = 100$ м проводится подземное испытание ядерного оружия мощностью 50 килотонн. Оценить давление газа в полости и минимальную глубину испытательной шахты, чтобы продукты взрыва не вырвались наружу.

Решение. Для решения задачи в приведенной формулировке нам пока не хватает данных. Сначала надо найти полную энергию газа, образовавшегося при взрыве. Намек на ее величину содержится в указании т.н. тротилового эквивалента. По традиции энергию взрыва сравнивают с энергией взрыва тротила (тола). Энергия W взрыва 50-килотонной бомбы эквивалентна энергии взрыва $5 \cdot 10^4$ т $= 5 \cdot 10^7$ кг тротила. В справочнике (например, в Советском энциклопедическом словаре) находим, что энергия взрыва 1 кг. тротила равна 4.2 МДж. Таким образом, при взрыве этой бомбы выделяется энергия $W = 4.2 \cdot 10^6 \times 5 \cdot 10^7 = 2.1 \cdot 10^{14}$ Дж. Поскольку взрыв происходит в полости, будем считать, что вся эта энергия превратилась в кинетическую энергию продуктов взрыва. Так как нам известен объем полости $V = 4\pi r^3/3 \approx 4.2 \cdot 10^6$ м³, то величину давления находим из уравнения Клапейрона-Менделеева:

$$p = \frac{2}{3} \frac{W}{V} \approx 3.1 \cdot 10^7 \text{ Па.}$$

Получим теперь ответ на второй вопрос задачи. Газы не вырвутся наружу, если внешнее давление породы над полостью превышает давление продуктов взрыва. Внешнее давление можно оценить по известной формуле гидростатики $p_{\text{внеш}} = \rho g h$, где ρ — плотность породы. В том же справочнике находим, например, плотность гранита $\rho = 2600$ кг/м³, которую можно взять за основу оценки. Из равенства $p = p_{\text{внеш}}$ находим минимальную глубину шахты h :

$$h = \frac{p}{\rho g} = \frac{3.1 \cdot 10^7}{2.6 \cdot 10^3 \times 9.8} \approx 1.2 \text{ км.}$$

■

В заключение этого раздела сделаем замечание. Мы специально не предполагали с самого начала классической зависимости импульса частицы от его скорости. Поэтому уравнение (33.12) имеет более широкую область применимости, нежели уравнение Клапейрона-Менделеева

(33.13). Например, в дальнейшем мы увидим, что электромагнитное излучение можно представить как совокупность особых частиц (*фотонов*), движущихся со скоростью света. Поэтому для фотонов $\langle \vec{p} \cdot \vec{v} \rangle = c \langle |\vec{p}| \rangle$, где c — скорость света. С другой стороны, энергия фотонов E_γ связана с их импульсом соотношением $E_\gamma = |\vec{p}|c$, так что уравнение (33.12) приобретает в этом случае вид:

$$pV = \frac{1}{3} N \langle E_\gamma \rangle. \quad (33.16)$$

Мы видим, что уравнение состояния идеального газа фотонов отличается множителем в правой части по сравнению с уравнением для газа обычных частиц.

33.4 Распределение энергии по степеням свободы

Итак, вклад в давление идеального газа дает кинетическая энергия поступательного движения молекул. Если же говорить о полной внутренней энергии газа U , то она складывается, вообще говоря, из многих компонентов. Чтобы разобраться со связью температуры с внутренней энергией, введем новое понятие — *число степеней свободы*.

Числом степеней свободы механической системы называется количество независимых величин, полностью определяющих положение системы в пространстве. Одноатомные молекулы, которые мы представляем маленькими твердыми шариками (материальными точками) имеют три степени свободы, так как их положение полностью определяется тремя координатами x, y, z . Молекула из n атомов должна иметь, казалось бы, $3n$ степеней свободы. Именно столькими параметрами мы можем описать положение каждого из них. Так и было бы, будь эти атомы совершенно независимы. Но они связаны в молекулу, и число степеней свободы уменьшается. Так, говоря об абсолютно твердом теле, расстояния между двумя точками которого не изменяются, мы используем всего шесть величин для задания его положения в пространстве — три координаты для положения центра масс, два угла для фиксации направления какой-либо оси, жестко связанной с телом, и угол поворота вокруг этой оси. Аналогичную ситуацию мы имеем при рассмотрении различных молекул.

Возьмем для начала двухатомную молекулу с жесткой связью: два атома, расстояние между которыми строго фиксировано (рис. 33.5,а). Ее движение можно представить как два одновременно происходящих дви-

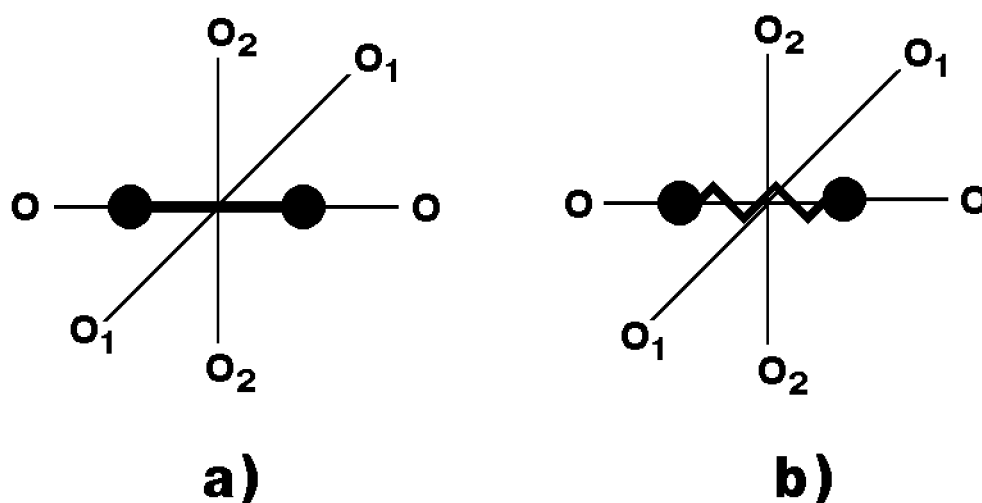


Рис. 33.5: Модель двухатомной молекулы с жесткой связью между атомами (a) и с дополнительной колебательной степенью свободы (b).

жения: 1) поступательного движения центра масс, для описания положения которого надо задать три координаты, и 2) вращательного движения относительно двух осей, перпендикулярных продольной оси молекулы OO , для описания которого надо задать два угла поворота. Мы говорим, что такая молекула имеет пять степеней свободы — три поступательные ($i_{\text{пост}} = 3$) и две вращательные ($i_{\text{вращ}} = 2$). Описание вращения относительно третьей оси, совпадающей с осью молекулы, не имеет смысла, так как атомы мы представляем материальными точками. Иначе говоря, из шести степеней свободы, которыми обладают два независимых атома, одна исключается из-за жесткой связи между ними.

Если связь между атомами не жесткая, что изображено на рис. 33.5,b пружиной между ними, то взаимное расстояние может меняться вследствие внутренних колебаний молекулы. Поэтому к трем поступательным (координаты центра масс) и двум вращательным (углы поворота) степеням свободы надо добавить еще одну колебательную ($i_{\text{кол}} = 1$) степень свободы (расстояние между атомами), так что полное число степеней свободы станет равным шести.

Для трехатомной молекулы с жесткой связью между всеми атомами мы имеем $i_{\text{пост}} = 3$ и $i_{\text{вращ}} = 3$, так что полное число степеней свободы равно шести. Это число степеней свободы не изменяется при переходе к молекулам, состоящим из 4, 5, ..., n атомов. Поскольку полное число

степеней свободы n независимых атомов равно $3n$, на долю колебательных степеней свободы в случае, когда связь между атомами не жесткая, остается $i_{\text{кол}} = 3n - 6$. Здесь предполагается, что атомы не лежат все на одной прямой: в таком случае мы имеем (как в двухатомной молекуле) $i_{\text{пост}} = 3$, $i_{\text{вращ}} = 2$ и, стало быть, $i_{\text{кол}} = 3n - 5$.

Вернемся теперь к идеальному газу. Мы видели, что средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул равна $(3/2)k_B T$ и что поступательному движению соответствуют три степени свободы. Значит, на одну степень свободы приходится средняя энергия $k_B T/2$. Но все виды движения равноправны. Молекулы сталкиваются и легко может статься так, что энергия поступательного движения перейдет в энергию вращательного движения. Поэтому на каждую из вращательных степеней свободы должно приходиться в среднем то же количество энергии — $k_B T/2$. Это утверждение известно как закон *равнораспределения энергии* по степеням свободы. Похожим образом столкновения молекул могут породить и колебательные движения в них, так что закон равнораспределения относится также и к колебательным степеням свободы молекул. Но здесь есть одна тонкость. При колебаниях молекула будет обладать как кинетической энергией колебаний, так и потенциальной. Из механики известно, что при колебательном движении средние значения кинетической и потенциальной энергий равны между собой. Поэтому колебательным степеням свободы следует приписывать удвоенную энергию $k_B T$. Если ввести *эффективное число степеней свободы*

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} + 2i_{\text{кол}}, \quad (33.17)$$

то средняя энергия одной молекулы будет равна $\bar{E} = i k_B T/2$. Значит, полная внутренняя энергия газа будет в N раз больше:

$$U = \frac{i}{2} N k_B T = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R T. \quad (33.18)$$

Уравнение Клапейрона-Менделеева может быть записано как

$$pV = \frac{2}{i} U \quad (33.19)$$

или в слегка другой форме:

$$pV = (\gamma - 1) U. \quad (33.20)$$

С так называемым показателем адиабаты

$$\gamma = \frac{i + 2}{i} \quad (33.21)$$

мы еще встретимся в дальнейшем.

Задача 33.32. В комнате объемом $V = 75 \text{ м}^3$ находится двухатомный газ (воздух) при температуре $t_1 = 12^\circ\text{C}$ ($T_1 = 285 \text{ K}$). Включают обогреватель и поднимают температуру воздуха до $t_2 = 22^\circ\text{C}$ ($T_2 = 295 \text{ K}$). Поскольку комната не герметизирована, давление газа остается все время постоянным $p = 100 \text{ кПа}$. Найти изменение внутренней энергии газа в комнате. Какая энергия была потрачена на обогрев окружающей среды?

Решение. Ответ несколько неожидан: согласно (33.20) внутренняя энергия газа в комнате не изменилась, поскольку остались прежними и его давление, и объем. С другой стороны, часть газа из комнаты вышла: если вначале там содержалось $\nu_1 = pV/RT_1 = 75 \times 10^5 / (8.31 \times 285) = 3166.76$ молей вещества, то после подогрева осталось лишь $\nu_2 = pV/RT_2 = 75 \times 10^5 / (8.31 \times 295) = 3059.41$ молей. На улицу вышло $\delta\nu = \nu_1 - \nu_2 = 107.35$ молей воздуха или $100\%(\Delta\nu/\nu_1) = 3.39\%$ его начального количества.

Подсчитаем, сколько энергии ушло на “обогрев” улицы. Условно разобьем весь процесс на два этапа (на самом деле они происходят одновременно, но это не меняет сути дела). На первом этапе мы обогреваем герметичную комнату. Начальная внутренняя энергия газа $U_1 = pV/(\gamma - 1) = 75 \times 10^5 / 0.4 = 18.75 \text{ МДж}$. Поскольку внутренняя энергия пропорциональна температуре, после нагрева герметичной комнаты она становится равной $U_2 = U_1 (T_2/T_1) = 18.75 \times (295/285) = 19.408 \text{ МДж}$, то есть от печки получена энергия $\Delta U = U_2 - U_1 = 0.658 \text{ МДж}$. На втором этапе мы удаляем из комнаты 3.39% подогретого воздуха, и вместе с ним ту же долю энергии. Удаляемая энергия $0.0339 \times U_2 = 0.0339 \times 19.408 = 0.658 \text{ МДж}$ в точности равна энергии, полученной от печки. Иным путем мы снова пришли к тому же выводу.

Итак, теперь окончательно ясно, что ушедший на улицу воздух унес с собой *всю* энергию, полученную от печки. В чем же тогда роль печки? Стоило ли ее вообще включать, если она обогревает только улицу? Полезный эффект печки состоит в том, что та же полная внутренняя энергия распределена между меньшим количеством молекул. Значит, возросла средняя энергия, приходящаяся на одну молекулу. По теореме о равнораспределении энергии возрастает и средняя энергия молекул тел, находящихся в комнате. Стало быть, повысится их температура (затраты энергии на это в решении не учитывались). ■

33.5 Смеси газов

Встает естественный вопрос: какие уравнения описывают смеси идеальных газов? Ведь с чистыми газами нам редко приходится встречаться в природе. Например, наша естественная среда обитания — воздух — состоит из азота N_2 (78.08%), кислорода O_2 (20.95%), инертных газов (0.94%), углекислого газа CO_2 (0.03%).

Итак, пусть в некотором объеме V при некоторой температуре T содержится смесь газов (которые мы будем нумеровать индексом i). Роль каждого компонента смеси будем характеризовать т.н. *массовой долей*:

$$w_i = \frac{m_i}{m}, \quad (33.22)$$

где m_i — масса i -го компонента. Наша задача — написать уравнение, подобное уравнению Клапейрона-Менделеева и разобраться с эффективным числом степеней свободы смеси, где могут содержаться и одноатомные, и многоатомные молекулы. Прежде всего заметим, что мы рассматриваем идеальные газы. Молекулы не взаимодействуют друг с другом, и потому каждый компонент не мешает любому другому “жить” в том же общем сосуде. Различные газы в сосуде просто не замечают друг друга. Поэтому для каждого из компонентов справедливо то же уравнение Клапейрона-Менделеева:

$$p_i V = \frac{m_i}{\mu_i} RT = \nu_i RT, \quad (33.23)$$

где ν_i — число молей вещества в i -ом компоненте. Полное число ν молей в смеси равно сумме числа молей ν_i в каждом из компонентов: $\nu = \sum_i \nu_i$. Аналогично, полная масса смеси равна сумме масс каждого из компонентов $m = \sum_i m_i$, и естественно определить *эффективную массу одного моля смеси* μ как

$$\mu = \frac{m}{\nu} = \frac{\sum_i m_i}{\sum_i \nu_i}.$$

Давление p_i , оказываемое i -ым компонентом, называется *парциальным* давлением (от слова *part* — часть). Полное давление равно сумме всех парциальных давлений: $p = \sum_i p_i$ (закон Дальтона). Суммируя левые и правые части (33.23), приходим к стандартной форме уравнения Клапейрона-Менделеева

$$pV = \frac{m}{\mu} RT = \nu RT, \quad (33.24)$$

где m, μ, ν определяются из условия конкретной задачи. Например, если заданы массовые доли компонентов, то эффективную массу моля смеси находим из соотношения

$$\frac{1}{\mu} = \left(\sum_i \frac{w_i}{\mu_i} \right). \quad (33.25)$$

Внутренняя энергия U_i i -го компонента определяется в соответствии с уравнениями (33.4) и (33.8):

$$U_i = \frac{\nu_i}{\gamma_i - 1} RT. \quad (33.26)$$

С одной стороны, полная внутренняя энергия смеси равна сумме энергий каждого компонента:

$$U = \sum_i U_i = \left(\sum_i \frac{\nu_i}{\gamma_i - 1} \right) RT. \quad (33.27)$$

С другой стороны, мы хотим иметь стандартное выражение

$$U = \frac{\nu}{\gamma - 1} RT. \quad (33.28)$$

Сравнивая (33.27) и (33.28), получаем выражение для эффективного показателя адиабаты смеси:

$$\gamma = 1 + \frac{\nu}{\sum_i \nu_i / (\gamma_i - 1)}. \quad (33.29)$$

Найдя массу моля и показатель адиабаты смеси, мы можем пользоваться всеми формулами, полученными ранее для “чистых” идеальных газов.

Задача 33.33. Дана смесь кислорода O_2 (компонент 1) и аргона Ar (компонент 2), причем количества вещества обоих компонентов одинаковы $\nu_1 = \nu_2$. Найти показатель адиабаты смеси.

Решение. Показатель адиабаты двухатомного кислорода равен $\gamma_1 = 7/5$, а одноатомного аргона $\gamma_2 = 5/3$. Поэтому

$$\gamma = 1 + \frac{2\nu_1}{\nu_1(5/2 + 3/2)} = 1 + \frac{4}{8} = 1.5.$$

■

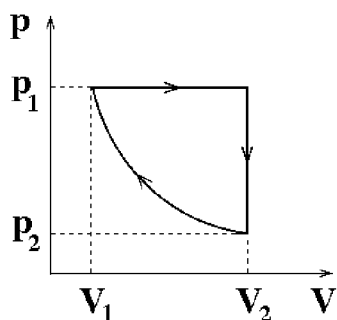


Рис. 33.6: К контрольному вопросу 10.

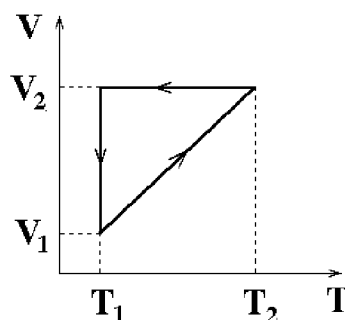


Рис. 33.7: К контрольному вопросу 11.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте основные положения молекулярно-кинетической теории строения вещества.
2. Какими макроскопическими параметрами определяется состояние простейших систем?
3. При каком условии мы можем изучать процессы в системе, рассматривая их как последовательность равновесных состояний?
4. При какой температуре ее численное значение одинаково в шкалах Цельсия и Фаренгейта?
5. Является ли температура микроскопическим или макроскопическим параметром?
6. Студенту сообщили, что температура в центре Солнца составляет $1.5 \cdot 10^7$ градусов. Он спросил, по Цельсию или по Кельвину? Как бы Вы ответили на его вопрос?
7. Объясните физический смысл абсолютной температуры.
8. Почему нагретая медицинская банка “присасывается” к телу человека?
9. Объясните, почему порой снять плотно закрытую крышку сосуда бывает проще после прогрева ее под струей горячей воды?
10. На рисунке 33.6 изображена диаграмма процесса. Постройте диаграмму в координатах (p, T) и (V, T) .
11. С некоторым газом совершен круговой процесс (рис. 33.7). Изобразите тот же процесс на графиках (p, V) и (p, T) .
12. Каковы основные положения, лежащие в основе модели идеального газа.
13. Запишите уравнение Клапейрона-Менделеева через плотность газа.

14. Воздушный пузырек на дне озера глубиной 16 м имеет объем 1.1 см^3 . Температура на дне озера равна 4°C , а на поверхности — 16°C . Определите объем пузырька в тот момент времени, когда он достигнет поверхности воды.
15. Самое низкое давление, получаемое с помощью самой совершенной вакуумной техники, приблизительно равно 10^{-12} Па. Сколько молекул содержится при таком давлении в 1 см^3 при температуре 0°C ?
16. Сколько молекул Вы вдыхаете, если при одном вдохе получаете 1 л воздуха?
17. Как Вы думаете, почему при оценке характеристик ядерного взрыва в задаче 33.31. мы неявно предположили, что вся энергия взрыва перешла в энергию *поступательного* движения его продуктов. Не следовало бы учесть вращательные и колебательные степени свободы молекул?
18. В последние годы бурно развивалась технология изготовления тонких пленок различных материалов толщиной в несколько десятков атомных слоев. Частицы в пленках движутся как будто в двумерном пространстве, а не в обычном трехмерном. Сколько степеней свободы имеет в такой пленке: 1) материальная точка; 2) двухатомная молекула в виде “гантели”; 3) двухатомная молекула, где атомы соединены “пружиной”; 4) трехатомная молекула?
19. Если бы комната в задаче 33.32. была герметизирована, то рост температуры привел бы к повышению давления в комнате. На какой глубине под водой ныряльщик испытал бы такое же повышение давления?
20. Из формулы (33.20) следует, что давление газа пропорционально плотности энергии, т.е. энергии молекул в единице объема. Значит, $1 \text{ Па} = 1 \text{ Дж/м}^3$. Проверьте, так ли это?
21. Вычислите молярную массу смеси газов (N_2 — 80%, O_2 — 20%).
22. Парциальное давление углекислого газа (CO_2) в легких приблизительно равно 35 мм ртутного столба. Каково процентное содержание CO_2 в легких?
23. Каково минимальное и максимальное значения показателя адиабаты для всех мыслимых газов?

Глава 34

Элементы термодинамики

В отличие от молекулярно-кинетической теории классическая термодинамика изучает *макроскопические* свойства тел и характеристики различных явлений, не интересуясь их микроскопической природой. Поэтому уже с самого начала она оперирует величинами, характеризующими систему как целое (давление, температура, объем и т.п.). Как правило, термодинамика не в состоянии объяснить значения тех или иных физических параметров, которые определяются экспериментально. В основе термодинамики лежат несколько фундаментальных законов, называемых *началами термодинамики*. Они были установлены на основании обобщения большой совокупности опытных фактов. Их применение позволяет изучать протекание различных процессов и делать выводы, имеющие общий характер.

34.1 Первое начало термодинамики

Примером функции состояния системы является ее *внутренняя энергия* U . Она составляется из кинетической энергии хаотического движения молекул, потенциальной энергии взаимодействия между молекулами, кинетической энергии атомов внутри молекул, потенциальной энергии взаимодействия между атомами внутри молекул, а также кинетической и потенциальной энергии частиц, входящих в состав атомов (ядер и электронов). Внутренняя энергия *не включает* кинетическую и потенциальную энергии, которыми система может обладать как целое (скажем, при движении сосуда с газом или помещении газа во внешнее потенциальное поле). Каждый раз, когда система оказывается в том же состоянии (например, при каких-то конкретных температуре и давлении), ее внутренняя энергия принимает присущее этому состоянию значение, независимо

от способа, каким система приведена в данное состояние. При переходе из состояния 1 в состояние 2 изменение внутренней энергии равно разности значений внутренней энергии в этих состояниях:

$$\Delta U = U_2 - U_1, \quad (34.1)$$

и также не зависит от того, какие процессы перевели систему из 1 в 2. Внутренняя энергия системы может изменяться двумя способами: 1) путем совершения над системой работы A и 2) путем передачи ей количества теплоты Q .

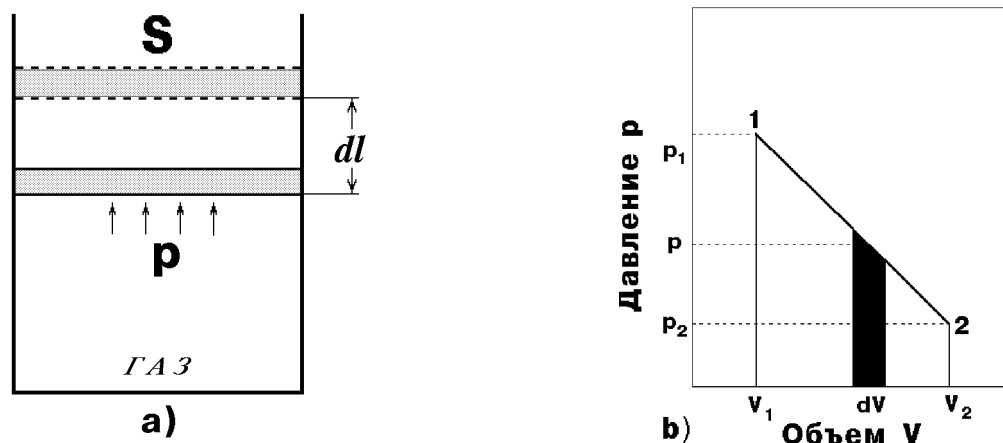


Рис. 34.1: Расширение газа под поршнем (а) и графическое изображение (б) производимой им работы. Площадь трапеции на диаграмме (p, V) равна работе $A_{1 \rightarrow 2}$, совершаемой газом при расширении от объема V_1 до объема V_2 . Площадь зачерненного участка — одна из элементарных работ δA , из которых складывается $A_{1 \rightarrow 2}$.

Совершение работы сопровождается перемещением внешних тел, действующих на систему. Рассмотрим заключенный в сосуд газ под поршнем (рис. 34.1,а). При перемещении поршня на расстояние dl газ совершает работу $\delta A = F dl$. Если S — площадь поперечного сечения сосуда, то силу F можно выразить через давление ($F = pS$), которое при малом перемещении поршня можно считать постоянным. Перемещение выражается через изменение объема газа ($dl = dV/S$), так что элементарная работа, совершенная газом, представляется в виде

$$\delta A = p dV. \quad (34.2)$$

Работа есть мера механической энергии, переданной от одной системы к другой. Этот тип передачи энергии всегда связан с перемещением

макроскопических частей системы и внешних тел. Если бы такого перемещения не происходило, т.е. не менялся бы объем системы ($dV = 0$), то, как следует из соотношения (34.2), газ не мог бы совершить работы ($\delta A = 0$). При увеличении объема системы работа положительна (газ совершает работу), а при уменьшении — отрицательна (работа совершается внешними силами над газом).

При конечном изменении объема системы ($V_1 \rightarrow V_2$) совершаемая газом работа является суммой всех элементарных работ:

$$A_{1 \rightarrow 2} = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (34.3)$$

Графически работа изображается площадью криволинейной трапеции под графиком процесса на (p, V) диаграмме (см. рис. 34.1,b). Видно, что эта площадь зависит не только от положения конечных точек (p_1, V_1) и (p_2, V_2) , но и от всего процесса (положения кривой) перехода из состояния 1 в состояние 2. Поэтому работа не является функцией состояния системы.

Количество теплоты (или просто теплота) Q — это количественная мера энергии хаотического движения молекул, переданной от одной системы к другой. Теплообмен — такой процесс обмена энергией, который не связан с перемещением макроскопических тел или их частей. Тепло, полученное системой, считается положительным, а отданное ею тепло — отрицательным. Поскольку количество теплоты, переданное при теплообмене, связано с изменением энергии движения молекул системы, то о хаотическом беспорядочном движении молекул часто говорят как о тепловом движении.

Будучи одной из форм энергии, теплота измеряется в джоулях (Дж). Но прежде чем была понята связь теплоты и энергии, теплоту измеряли в специальных единицах — *калориях*: сообщение одной калории 1 г. воды поднимало ее температуру на один градус Цельсия. Сейчас калория определяется просто как $1 \text{ кал} = 4.1868 \text{ Дж}$. Калория все еще применяется в некоторых областях человеческой деятельности. Вспомните, например, калорийность продуктов питания, в которых многие стараются себя ограничить. При окислении 100 г животных жиров освобождается около 1000 ккал энергии (для других продуктов поменьше: хлеб — 214 ккал, сыр — 313 ккал, сахар — 390 ккал, шоколад — 428 ккал, масло — 734 ккал).

Задача 34.34. Человек массой 90 кг, желающий похудеть, ежедневно 10 раз взбегает по лестнице на 12 этаж (расстояние между этажами порядка 3 м). Если его диета не меняется, то какой вес он потеряет за неделю?

Решение. Оценим прежде всего совершаемую за семь дней работу: $A = (7 \times 10)mgh \approx 70 \times 90 \times 9.8 \times 36 = 2.2 \cdot 10^6$ Дж. Переведем эту работу в калории: $A = 2.2 \cdot 10^6 / 4.1868 = 531$ ккал. Это соответствует примерно потере 50 г веса. ■

Первое начало термодинамики — это закон сохранения и превращения энергии, примененный к тепловым явлениям. Именно, при получении системой тепловой энергии δQ часть ее тратится на совершение работы δA , а остаток расходуется на изменение внутренней энергии dU системы:

$$\delta Q = dU + \delta A. \quad (34.4)$$

При конечных изменениях параметров системы имеем

$$Q_{1 \rightarrow 2} = U_{12} + A_{1 \rightarrow 2}. \quad (34.5)$$

Как мы видели, внутренняя энергия является функцией состояния системы, а работа — нет, что мы показали, используя в индексе стрелку, подчеркивающую зависимость от пути перехода из 1 в 2. Отсюда следует, что и теплота не есть функция состояния системы, она тоже зависит от особенностей рассматриваемого процесса. Именно поэтому мы использовали символы δA и δQ для элементарных приращений этих величин: в варианте написания dA , dQ может создаться ложное впечатление, что мы имеем дело с дифференциалами функций A , Q , которых на самом деле не существует.

34.2 Работа идеального газа в различных процессах

Имея уравнение состояния (33.9) идеального газа, мы найдем совершаемую им работу при некоторых типичных процессах. Заодно определим количество теплоты, получаемое от внешнего источника.

1. Изохорный процесс $V = \text{const}$ — самый простой случай. Работа просто равна нулю, поскольку объем не меняется. Получаемое количество теплоты полностью идет на изменение внутренней энергии газа (33.20):

$$Q_{1 \rightarrow 2|V=\text{const}} = U_{12|V=\text{const}} = \frac{V(p_2 - p_1)}{\gamma - 1}. \quad (34.6)$$

То же самое можно выразить через изменение температуры газа:

$$Q_{1 \rightarrow 2|V=const} = U_{12|V=const} = \frac{m}{\mu} R \frac{(T_2 - T_1)}{\gamma - 1}. \quad (34.7)$$

2. Работа при изобарном расширении. Поскольку в этом процессе $p = const$, давление можно вынести из-под знака интеграла в (34.3):

$$A_{1 \rightarrow 2|p=const} = p (V_2 - V_1) = \frac{m}{\mu} R (T_2 - T_1). \quad (34.8)$$

Изменение внутренней энергии газа следует из (33.20):

$$U_{12|p=const} = \frac{p (V_2 - V_1)}{\gamma - 1} = \frac{m}{\mu} R \frac{T_2 - T_1}{\gamma - 1}. \quad (34.9)$$

Складывая (34.8) и (34.9), находим количество теплоты, переданное газу в этом процессе:

$$Q_{1 \rightarrow 2|p=const} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} p (V_2 - V_1) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{m}{\mu} R (T_2 - T_1). \quad (34.10)$$

Задача 34.35. Пусть система получила при постоянном давлении определенное количество теплоты Q . Какая часть расходуется на совершение работы A , а какая — на увеличение внутренней энергии газа? Как зависит ответ от вида используемого газа?

Решение. Из наших формул сразу следует, что

$$A_{1 \rightarrow 2|p=const} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} Q_{1 \rightarrow 2|p=const},$$

$$U_{12|p=const} = \frac{1}{\gamma} Q_{1 \rightarrow 2|p=const}.$$

Чем больше γ , тем большая часть тепла переходит в работу: для одноатомных газов $A = 2Q/5 = 0.4Q$, для двухатомных $A = 2Q/7 \approx 0.286Q$ и для многоатомных газов $A = Q/4 = 0.25Q$. ■

Заметим, что мы излагаем достаточно общий подход, который может быть применен не только к идеальным газам. Для иных систем может измениться уравнение состояния, как следствие изменятся выражения для совершенной работы, но принципы их вывода остаются одними и теми же. Приведем пример. Пусть для некоего материала давление, температура и объем связаны соотношением

$$pV = aT - bT^2. \quad (34.11)$$

Найти выражение для работы материала при изменении его температуры от T_1 до T_2 при постоянном давлении.

Поскольку давление постоянно, имеем для работы стандартное выражение $A_{1\rightarrow 2} = p(V_2 - V_1)$. Используя уравнение состояния (34.11), находим отсюда

$$A_{1\rightarrow 2} = a(T_2 - T_1) - b(T_2^2 - T_1^2) = (T_2 - T_1)[a - b(T_2 + T_1)].$$

3. Работа при изотермическом расширении. Используя уравнение состояния и выражение (34.2) для элементарной работы, находим

$$\delta A = \frac{m}{\mu} RT \frac{dV}{V}. \quad (34.12)$$

Далее используем выражение (34.3) для процесса при конечном изменении объема:

$$A_{1\rightarrow 2|T=\text{const}} = \frac{m}{\mu} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (34.13)$$

Поскольку объем обратно пропорционален давлению, тот же результат можно представить в виде

$$A_{1\rightarrow 2|T=\text{const}} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (34.14)$$

Так как внутренняя энергия идеального газа не меняется при изотермическом процессе, в работу преобразовалась вся теплота, полученная от источника: $Q_{1\rightarrow 2} = A_{1\rightarrow 2}$.

Задача 34.36. Расширяясь, водород совершил работу $A = 6$ кДж. Определить количество теплоты Q , подведенное к газу, если процесс протекал: а) изобарно; б) изотермически.

Решение. Рассмотрим сначала изобарное расширение. Из формул (34.8) и (34.10) следует связь количества теплоты и совершенной работы:

$$Q_{1\rightarrow 2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} A_{1\rightarrow 2} = \frac{7}{2} A = 21 \text{ кДж}. \quad (34.15)$$

Мы использовали значение $\gamma = 7/5$ для двухатомного газа. Для изотермического расширения, как мы видели, полученное количество теплоты просто равно произведенной работе: $Q_{1\rightarrow 2} = A = 6$ кДж. ■

34.3 Теплоемкость системы

Введем теперь очень важную термодинамическую характеристику, называемую *теплоемкостью* системы (традиционно обозначается буквой C с различными индексами). Теплоемкость — это физическая величина, равная количеству теплоты, которое необходимо передать системе, чтобы изменить ее температуру на один кельвин:

$$C = \frac{\delta Q}{dT}. \quad (34.16)$$

Теплоемкость — величина аддитивная, она зависит от количества вещества в системе. Поэтому вводят также *удельную* $c = C/m$ и *молярную* $c_m = C/\nu$ теплоемкости (напомним, что $\nu = m/\mu$ — количество молей вещества в системе). Поскольку количество теплоты не есть функция состояния и зависит от процесса, теплоемкость также будет зависеть от способа подвода тепла к системе. Чтобы понять это, вспомним первое начало термодинамики. Разделив уравнение (34.4) на элементарное приращение абсолютной температуры dT , получим соотношение

$$C = \frac{dU}{dT} + \frac{\delta A}{dT}. \quad (34.17)$$

Второе слагаемое, как мы убедились, зависит от вида процесса.

Мы рассмотрим два частных случая, соответствующих процессу подведения теплоты при 1) постоянном объеме и 2) постоянном давлении в системе. В первом случае работа $\delta A = 0$ и мы получаем т.н. теплоемкость C_V при постоянном объеме:

$$C_V = \frac{dU}{dT}. \quad (34.18)$$

Для вычисления теплоемкости C_p при постоянном давлении ($dp = 0$) мы учтем, что из уравнения (34.8) следует выражение для элементарной работы при бесконечно малом изменении температуры: $\delta A = (m/\mu) R dT$. Получаем в итоге:

$$C_p = \frac{dU}{dT} + \frac{m}{\mu} R = C_V + \frac{m}{\mu} R. \quad (34.19)$$

Разделив это уравнение (его называют *соотношением Майера*) на число молей вещества в системе, получаем аналогичное соотношение для молярных теплоемкостей при постоянном объеме и давлении:

$$c_{m,p} = c_{m,V} + R. \quad (34.20)$$

Теплоемкость при постоянном давлении больше теплоемкости при постоянном объеме, так как часть подведенной энергии тратится на совершение работы и для того же нагревания требуется подвести больше теплоты. Отметим, что из (34.20) следует физический смысл газовой постоянной R — это работа, совершаемая 1 моле идеального газа при повышении его температуры на 1 K при постоянном давлении.

Таким образом, теплоемкость оказывается зависящей не только от рода вещества, но и от условий, в которых происходит процесс изменения температуры. Теплоемкость реальных веществ зависит, вообще говоря, также и от самой температуры T , но, как мы увидим в дальнейшем, для идеального газа этой зависимости нет. Примем пока этот факт как предположение, основанное на опыте.

Из полученных формул для количества теплоты, переданной в различных процессах, сразу находим выражения для соответствующих теплоемкостей. Для изохорного процесса C_V следует из (34.7):

$$C_V = \frac{\Delta Q}{\Delta T|_{V=\text{const}}} = \frac{m}{\mu} R \frac{1}{\gamma - 1}, \quad (34.21)$$

Для изобарного процесса выражение для C_p вытекает из (34.10):

$$C_p = \frac{\Delta Q}{\Delta T|_{p=\text{const}}} = \frac{m}{\mu} R \frac{\gamma}{\gamma - 1}. \quad (34.22)$$

Отношение теплоемкостей $C_p/C_V = \gamma$. Для молярных теплоемкостей отсюда получается:

$$c_{m,V} = R \frac{1}{\gamma - 1}, \quad c_{m,p} = R \frac{\gamma}{\gamma - 1}. \quad (34.23)$$

Итогом проведенного рассмотрения стали выражения для теплоемкостей идеального газа. Все они зависят от величины отношения теплоемкостей $\gamma = C_p/C_V$ (его называют также *показателем адиабаты*, и смысл этого названия станет ясным из следующего раздела). На термодинамическом уровне нельзя предсказать численное значение γ ; нам удалось это сделать лишь при рассмотрении микроскопических свойств системы [см. выше выражения (33.21) и (33.29) для смеси газов]. Из наших формул следуют теоретические предсказания для молярных теплоемкостей газов и показателя адиабаты:

Одноатомные газы ($i = 3$) :

Таблица 34.1: Молярная теплоемкость веществ при комнатной температуре и нормальном давлении.

Вещество	$c_{m,p}$, Дж/(моль · К)	$c_{m,V}$, Дж/(моль · К)	γ
<i>He</i>	20.97	12.65	1.66
<i>Ar</i>	20.79	12.43	1.67
<i>H₂</i>	28.77	20.42	1.41
<i>O₂</i>	29.34	20.90	1.40
<i>N₂</i>	29.08	20.87	1.39
<i>CO</i>	29.33	21.12	1.39
<i>CO₂</i>	37.23	28.74	1.30
<i>NH₃</i>	36.70	27.73	1.32
<i>Al</i>	24.18	—	—
<i>Cu</i>	24.47	—	—
<i>Ag</i>	25.24	—	—
<i>Au</i>	25.61	—	—
<i>Hg</i>	27.68	—	—

$$\begin{aligned}
c_{m,p} &= \frac{5}{2} R = 20.78 \text{ Дж/}(\text{моль} \cdot \text{К}), \\
c_{m,V} &= \frac{3}{2} R = 12.47 \text{ Дж/}(\text{моль} \cdot \text{К}), \\
\gamma &= \frac{5}{3} = 1.67;
\end{aligned} \tag{34.24}$$

Двухатомные газы ($i = 5$) :

$$\begin{aligned}
c_{m,p} &= \frac{7}{2} R = 29.09 \text{ Дж/}(\text{моль} \cdot \text{К}), \\
c_{m,V} &= \frac{5}{2} R = 20.78 \text{ Дж/}(\text{моль} \cdot \text{К}), \\
\gamma &= \frac{7}{5} = 1.4;
\end{aligned} \tag{34.25}$$

Многоатомные газы ($i = 6$) :

$$\begin{aligned}
c_{m,p} &= 4 R = 33.24 \text{ Дж/}(\text{моль} \cdot \text{К}), \\
c_{m,V} &= 3 R = 24.93 \text{ Дж/}(\text{моль} \cdot \text{К}), \\
\gamma &= \frac{4}{3} = 1.33.
\end{aligned} \tag{34.26}$$

Экспериментальные данные для различных веществ см. в таблице 34.1.

Видно, что простая модель идеальных газов в целом неплохо описы-

вает свойства реальных газов. Обращаем внимание, что совпадение было получено без учета колебательных степеней свободы. Краткое обсуждение этого вопроса дано в конце раздела 12.5.2 следующей главы.

Мы привели также значения молярной теплоемкости некоторых металлов при комнатной температуре. Если представить кристаллическую решетку металла как упорядоченный набор твердых шариков, соединенных пружинками с соседними шариками, то каждая частица может колебаться в трех направлениях ($i_{\text{кол}} = 3$) и с каждой такой степенью свободы связаны кинетическая $k_B T/2$ и такая же потенциальная энергия. Поэтому на частицу кристалла приходится внутренняя энергия $3k_B T$. Умножая на число Авогадро, получим внутреннюю энергию одного моля $U_m = 3RT$, откуда вытекает значение молярной теплоемкости $c_m = 3R = 24.93$ Дж/(моль \cdot K). Вследствие малого коэффициента теплового расширения твердых тел для них не различают c_p и c_V . Приведенное значение молярной теплоемкости твердых тел называется законом Дюлонга-Пти, и из таблицы видно также хорошее совпадение с экспериментом.

Однако говоря о неплохом соответствии выведенных нами соотношений и данных опытов, следует отметить, что таковое наблюдается лишь в определенном диапазоне температур. Иначе говоря, теплоемкость системы зависит от температуры, и наши результаты имеют ограниченную область применимости. Рассмотрим сначала рис. 34.2, на котором изображена теплоемкость $c_{m,V}$ газообразного водорода.

При температурах ниже 100 K теплоемкость $c_{m,V} \approx 3R/2$, что указывает на отсутствие вращательных степеней свободы. Далее с ростом температуры теплоемкость быстро возрастает до классического значения $5R/2$, характерного для двухатомной молекулы с жесткой связью, в которой нет колебательных степеней свободы. При температурах выше 2000 K теплоемкость обнаруживает новый скачок до значения $7R/2$. Этот результат свидетельствует о появлении еще и колебательной степени свободы. Но все это выглядит необъяснимым. Почему молекула не может вращаться при низких температурах? И почему колебания в молекуле возникают лишь при очень высоких температурах? В разделах 12.5.3 и 12.5.4 следующей главы будут даны ответы на эти вопросы. А сейчас можно сказать только, что все дело сводится к специфически квантовым явлениям, необъяснимым с позиций классической физики.

Обратимся теперь к рис. 34.3, представляющему зависимость моляр-

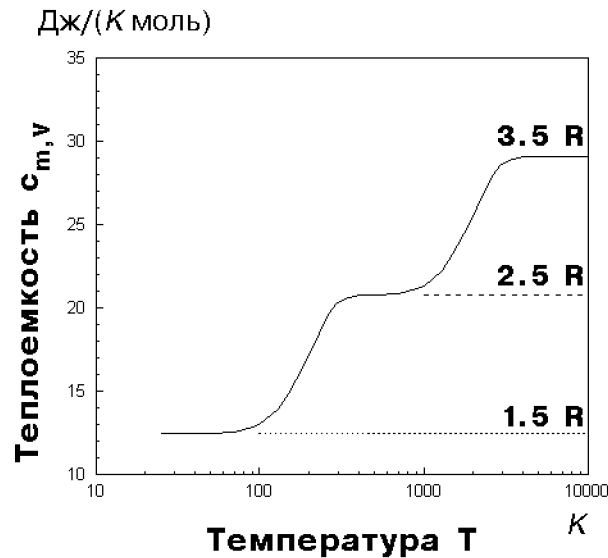


Рис. 34.2: Молярная теплоемкость газообразного водорода H_2 при постоянном объеме как функция температуры.

ных теплоемкостей трех элементов от температуры. При высоких температурах все три кривые стремятся к одному и тому же значению $3R$, соответствующему закону Дюлонга-Пти. Свинец и железо практически имеют это предельное значение теплоемкости уже при комнатной температуре. Для алмаза же такая температура еще не достаточно высока. А при низких температурах все три кривые демонстрируют значительное отклонение от закона Дюлонга-Пти. Это — еще одно проявление законов квантовой механики. Классическая физика оказывается бессильной объяснить наблюдаемые при низких температурах закономерности.

34.4 Адиабатный процесс

Адиабатным называется процесс, при котором не происходит теплообмена с внешней средой ($\delta Q = 0$). Физически это означает, что процесс протекает достаточно быстро и система не успевает обмениваться теплотой с внешними телами. Однако, коль скоро мы имеем дело с равновесными процессами, скорость адиабатного процесса не должна быть слишком уж велика. Примером таких процессов может служить распространение звуковых колебаний в упругой среде.

Попытаемся вывести уравнение, описывающее адиабатный процесс (ранее мы имели дело с самыми простыми уравнениями процессов —

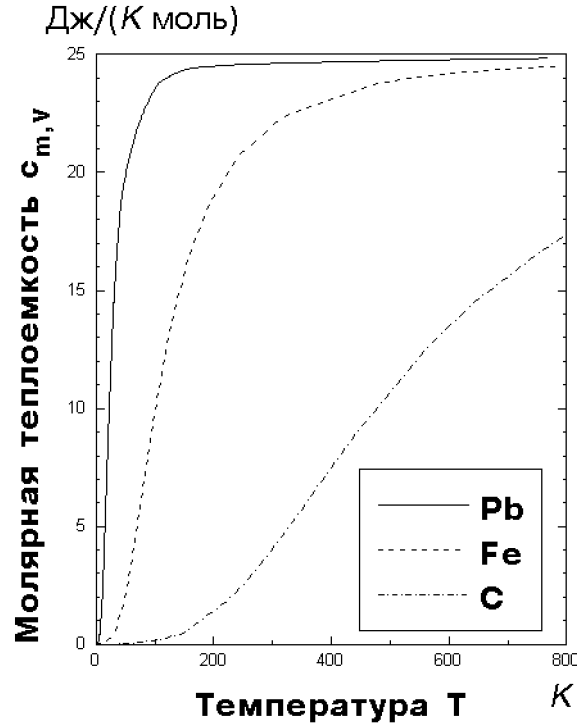


Рис. 34.3: Зависимость молярной теплоемкости трех элементов — свинца, железа и углерода (алмаза) — от температуры.

$pV = \text{const}$ для изотермического, $p = \text{const}$ для изобарного и $V = \text{const}$ для изохорного процессов). Поскольку $\delta Q = 0$, из первого начала термодинамики следует, что $dU = -\delta A = -p dV$. С другой стороны, $dU = d(pV)/(\gamma - 1) = (V dp + p dV)/(\gamma - 1)$. Приравнявая эти выражения, находим

$$\gamma p dV + V dp = 0. \quad (34.27)$$

Умножая уравнение (34.27) на $V^{\gamma-1}$, получаем в левой части полный дифференциал:

$$\gamma p V^{\gamma-1} dV + V^{\gamma} dp = d(pV^{\gamma}) = 0. \quad (34.28)$$

В результате приходим к уравнению адиабатного процесса:

$$p V^{\gamma} = \text{const}. \quad (34.29)$$

Графически адиабатный процесс описывается на (p, V) диаграмме кривыми, похожими на изотермы, но идущими круче, так как $\gamma > 1$ (поскольку $C_p > C_V$). Это и понятно, так как при адиабатном расширении

газ совершает работу за счет внутренней энергии и его температура падает, что еще больше уменьшает давление по сравнению с изотермическим расширением. Учитывая, что из уравнения состояния идеального газа следует пропорциональность $pV \sim T$, уравнение адиабатного процесса можно представить в виде

$$T V^{\gamma-1} = \text{const} . \quad (34.30)$$

Вместе с уравнением состояния идеального газа, уравнение процесса позволяет вычислить работу газа при адиабатном расширении. Если в начальной и конечной точках процесса давления и объемы равны, соответственно, p_1, V_1 и p_2, V_2 , то из (34.29) следуют выражения

$$p = \frac{p_1 V_1^\gamma}{V^\gamma}, \quad p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma.$$

Поэтому для работы газа при переходе из состояния 1 в состояние 2 получаем:

$$\begin{aligned} A_{1 \rightarrow 2 | \delta Q = 0} &= p_1 V_1^\gamma \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma} = -\frac{p_1 V_1^\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{1}{V_2^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_1^{\gamma-1}} \right) = \\ &= -\frac{1}{\gamma - 1} \left(\frac{p_2 V_2^\gamma}{V_2^{\gamma-1}} - \frac{p_1 V_1^\gamma}{V_1^{\gamma-1}} \right) = \\ &= \frac{1}{\gamma - 1} (p_1 V_1 - p_2 V_2) . \end{aligned} \quad (34.31)$$

Выражения для работы при адиабатном процессе с помощью уравнения Клапейрона-Менделеева можно выразить также через температуры в начале T_1 и конце T_2 процесса:

$$A_{1 \rightarrow 2 | \delta Q = 0} = -\frac{m}{\mu} R \frac{T_2 - T_1}{\gamma - 1} . \quad (34.32)$$

Для бесконечно малых изменений параметров уравнения (34.31), (34.32) переходят в соотношения

$$\delta A = -\frac{d(pV)}{\gamma - 1} = -\frac{m}{\mu} R \frac{dT}{\gamma - 1} . \quad (34.33)$$

Задача 34.37. Горючая смесь в двигателе Дизеля воспламеняется при температуре $T_2 = 1100 \text{ K}$. Начальная температура смеси $T_1 = 350 \text{ K}$. Во сколько раз нужно уменьшить объем смеси при сжатии, чтобы она воспламенилась? Сжатие считать адиабатным. Показатель адиабаты для смеси $\gamma = 1.4$.

Решение. Для решения удобнее воспользоваться уравнением адиабатного процесса в форме (34.30):

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}.$$

Отсюда сразу следует выражение для степени сжатия горючей смеси:

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left(\frac{1100}{350} \right)^{5/2} \approx 17.5 .$$

■

34.5 Уравнение Ван дер Ваальса для реальных газов

Уравнение Клапейрона-Менделеева следует из молекулярно-кинетической теории в предположении идеальности газа. Если мы хотим описывать поведение реальных систем, надо учесть взаимодействие молекул между собой. Точный учет межмолекулярных сил — задача чрезвычайно трудная. Поэтому было предложено несколько модификаций уравнения состояния идеального газа, которые могли бы ухватить основные черты поведения реальных систем. Наиболее удачной попыткой стало уравнение Ван дер Ваальса.

Уравнение идеального газа имеет вид:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT.$$

В подходе Ван дер Ваальса взаимодействие молекул между собой учитывается двумя способами. Во-первых, принимается во внимание, что молекулы имеют конечные размеры. Если обозначить собственный объем всех молекул в моле вещества буквой b , то для движения молекул остается свободный объем

$$V - \frac{m}{\mu} b$$

и именно он должен фигурировать в уравнении состояния. Во-вторых, учитывается, что молекула, подлетающая к стенке сосуда, “чувствует” притяжение других молекул, которое уравнивалось, когда молекула была внутри сосуда. Дополнительная сила, направленная внутрь сосуда, эквивалента дополнительному давлению p_i (его называют внутренним

давлением газа). Поэтому вместо внешнего давления p уравнение состояния должно содержать сумму $p + p_i$. Как зависит внутреннее давление p_i от параметров системы? Сила, действующая на молекулу, пропорциональна плотности n числа молекул в системе. Число подлетающих к стенке молекул также пропорционально n , и потому внутреннее давление пропорционально квадрату плотности числа частиц:

$$p_i \sim n^2 \sim \frac{m^2}{\mu^2} \frac{1}{V^2}.$$

Обозначая коэффициент пропорциональности буквой a , приходим к уравнению Ван дер Ваальса:

$$\left(p + \frac{m^2}{\mu^2} \frac{a}{V^2}\right) \left(V - \frac{m}{\mu} b\right) = \frac{m}{\mu} R T. \quad (34.34)$$

Для одного моля вещества это уравнение упрощается:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right) (V - b) = R T. \quad (34.35)$$

Рассмотрим вид изотерм газа на (p, V) диаграмме. Они описываются функцией

$$p = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}. \quad (34.36)$$

При достаточно высоких температурах и больших объемах введенными поправками можно пренебречь, и вид изотерм получится обычным. При понижении температуры вид изотерм все более искажается и при некотором критическом значении температуры T_c данная изотерма приобретает точку перегиба (критическую точку) с координатами p_c , V_c , в которой равны нулю первая и вторая производные давления по объему. При дальнейшем понижении температуры точка перегиба превращается в минимум и максимум функции $p(V)$.

Найдем сначала значения параметров, соответствующих критической точке. Берем первую и вторую производные функции (34.36) и приравняем их нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial V} &= -\frac{RT}{(V - b)^2} + \frac{2a}{V^3} = 0, \\ \frac{\partial^2 p}{\partial V^2} &= \frac{2RT}{(V - b)^3} - \frac{6a}{V^4} = 0. \end{aligned} \quad (34.37)$$

Решение этой пары уравнений даст нам критические значения T_c и V_c . Находя из первого уравнения значение

$$RT = 2a \frac{(V - b)^2}{V^3}, \quad (34.38)$$

подставляем его во второе уравнение, откуда тогда следует

$$\frac{4a}{(V - b)V^3} = \frac{6a}{V^4} \Rightarrow 4V = 6(V - b).$$

Получаем сначала значение молярного критического объема

$$V_{m,c} = 3b. \quad (34.39)$$

Подставляя его в уравнение (34.38), находим критическую температуру

$$T_c = \frac{8a}{27bR}. \quad (34.40)$$

Наконец, подставляя найденные значения T_c , V_c в уравнение (34.36), находим критическое давление

$$p_c = \frac{a}{27b^2}. \quad (34.41)$$

Эти критические значения получены для одного моля вещества. Чтобы найти их для произвольного числа молей, заметим, что при переходе от уравнения (34.35) к (34.34) надо произвести масштабное преобразование $R \rightarrow Rm/\mu$, $b \rightarrow bm/\mu$, $a \rightarrow am^2/\mu^2$. Выполняя то же преобразование в формулах для критических значений термодинамических параметров, убеждаемся, что критические температура и давление не изменяются, а объем преобразуется естественным образом:

$$V_c = \frac{m}{\mu} V_{m,c} = 3b \frac{m}{\mu}. \quad (34.42)$$

Значения критических параметров берутся из данных эксперимента. Отметим, что газовая постоянная R также может быть выражена через критические параметры:

$$R = \frac{8}{3} \frac{p_c V_{m,c}}{T_c}. \quad (34.43)$$

Для каждого реального газа следует вычислять свою *индивидуальную* газовую постоянную R , которая будет отличаться от универсальной газовой постоянной $N_A k_B$ идеального газа. Этому не следует удивляться,

Таблица 34.2: Критические параметры некоторых газов.

Газ	T_c , K	p_c , МПа	$V_{m,c}$, см ³ /моль	$R/N_A k_B$
He	5.2	0.23	57.5	0.82
H ₂	33.2	1.30	65.5	0.82
O ₂	154.8	5.08	78	0.82
CO ₂	304.1	7.39	94	0.73
H ₂ O	647.3	22.1	56.3	0.62

учитывая феноменологический приближенный характер уравнения Ван дер Ваальса. Значения критических параметров некоторых веществ и их газовая постоянная приведены в таблице 34.2.

Возьмем для примера пары воды. Из таблицы следует значение коэффициента $b = V_{m,c}/3 = 18.77 \cdot 10^{-6}$ м³/моль. Поделив на число Авогадро, получаем объем одной молекулы $v = b/N_A = 31.2 \cdot 10^{-30}$ м³, откуда для диаметра молекулы следует оценка $d \approx \sqrt[3]{6v/\pi} = 0.39$ нм. Это действительно близко к размерам молекулы воды, что свидетельствует о правильности модели Ван дер Ваальса.

Введем обозначения в виде соответствующих греческих букв для термодинамических параметров, измеренных в единицах их критических значений, т.е. для безразмерных отношений:

$$\pi = \frac{p}{p_c}, \quad v = \frac{V}{V_c}, \quad \theta = \frac{T}{T_c}. \quad (34.44)$$

В этих обозначениях все критические значения термодинамических параметров равны единице, а уравнение Ван дер Ваальса (34.34) принимает простой вид:

$$\pi = \frac{8\theta}{3v-1} - \frac{3}{v^2}. \quad (34.45)$$

Отметим универсальность этого уравнения, которое может быть использовано даже без точного знания значений критических параметров (но которые нужны, конечно, при возвращении к обычным единицам измерения температуры, давления и объема).

На рис. 34.4 представлены изотермы газа Ван дер Ваальса для нескольких значений температур ($\theta = 2, 1.1, 1, 0.9, 0.85$). При достаточно высоких температурах $T = 2T_c$ ($\theta = 2$) изотермы Ван дер Ваальса совпадают с изотермами идеального газа за исключением области малых

объемов. При понижении температуры гиперболы начинают искажаться и при $T = T_c$ ($\theta = 1$) график имеет точку перегиба при $p = p_c$, $V = V_c$ ($\pi = 1$, $v = 1$). При еще более низких температурах на изотерме появляются минимум и максимум.

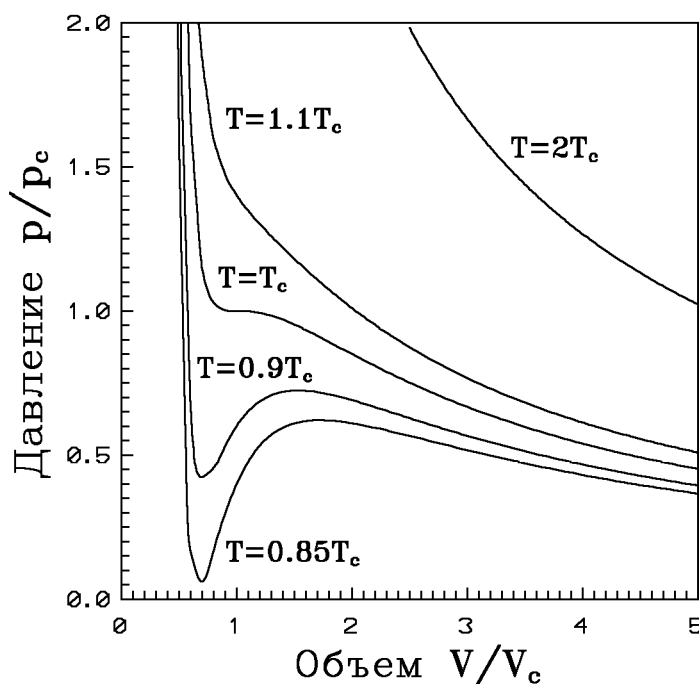


Рис. 34.4: Изотермы газа Ван дер Ваальса, показанные для различных значений температуры. График построен для безразмерных отношений термодинамических параметров p , V , T к их критическим значениям p_c , V_c , T_c .

Теоретическая изотерма Ван дер Ваальса отличается от экспериментальной. Иначе и быть не может, так как область между минимумом и максимумом описывает нестабильное состояние системы, которое не может быть реализовано. В этой области давление растет при увеличении объема и падает при уменьшении. Представим себе какое-нибудь состояние в этой области (точку на растущей ветви графика). Если в результате флуктуации внешняя сила, удерживающая газ в некотором объеме, несколько возрастет, то объем газа слегка уменьшится, и это, в отличие от обычных состояний, приведет к *уменьшению* давления газа. Испытывая меньшее сопротивление, внешняя сила сильнее сожмет газ, давление его еще больше уменьшится, и т.д. Словом, такое состояние столь же нестабильно, как и равновесие иглы, стоящей на кончике.

Поэтому если газ изотермически сжимается (при $T < T_c$), то в какой-

то момент его давление перестает меняться. На рисунке 34.5 (слева) это выглядит как плоский участок изотермы. На этом участке начинается конденсация газа в жидкость и над жидкостью образуется насыщенный пар, давление которого $p_n(T)$ зависит только от температуры и потому не меняется (плоский участок изотермы). Чем меньше объем газа, тем большая его часть переходит в жидкое состояние. Наконец, весь газ переходит в жидкость, плоский участок изотермы заканчивается и давление резко возрастает. Если построить такие плоские участки изотерм для разных температур $T < T_c$, то они заполнят область, граница которой показана пунктирной линией на рисунке 34.5 (справа). Эта область соответствует сосуществованию жидкой и газообразной фаз, справа от нее лежит область газообразной фазы, слева — жидкой.

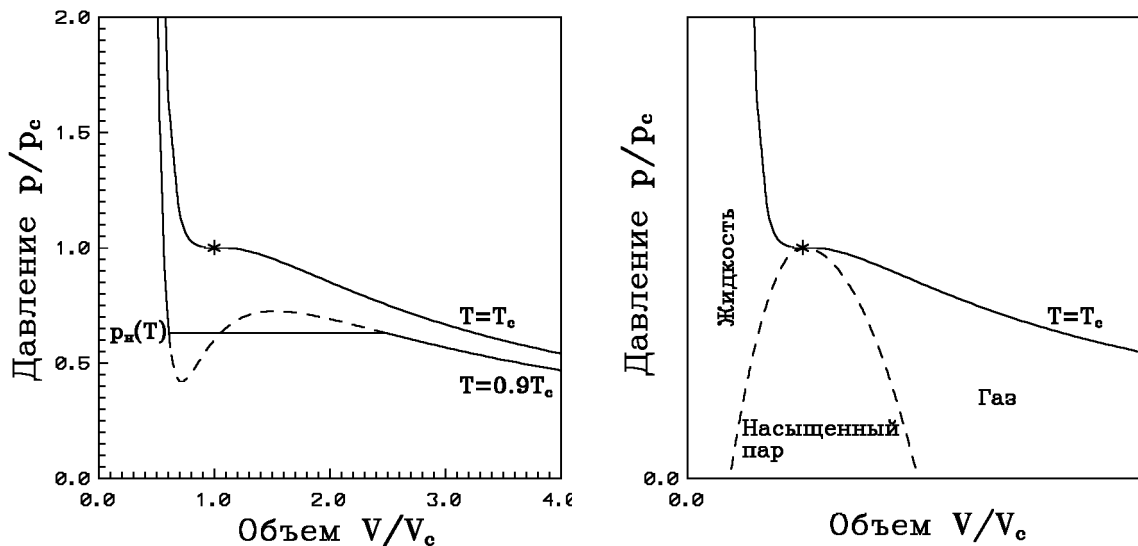


Рис. 34.5: На рисунке слева показаны те же изотермы Ван дер Ваальса. Пунктирная часть изотермы при $T = 0.9T_c$ соответствует неустойчивым состояниям газа. На рисунке справа изображена область сосуществования газообразной и жидкой фаз, полученная соединением концов плоских участков изотерм при различных температурах.

Рассматривая рисунки, можно прийти к следующим выводам:

- При температуре выше критической вещество может существовать только в газообразном состоянии. Никаким сжатием газ при $T > T_c$ нельзя превратить в жидкость. В критической точке (отмечена на рисунках звездочкой) исчезает различие между газом и жидкостью.
- Давление насыщенного пара $p_n(T)$ не может превышать критического давления p_c .

Таблица 34.3: Давление насыщенных паров воды.

$t^{\circ}\text{C}$	$p_{\text{н}}, \text{кПа}$	$t^{\circ}\text{C}$	$p_{\text{н}}, \text{кПа}$	$t^{\circ}\text{C}$	$p_{\text{н}}, \text{кПа}$	$t^{\circ}\text{C}$	$p_{\text{н}}, \text{МПа}$
0	0.61	25	3.17	60	19.9	200	2.32
5	0.87	30	4.24	70	31.2	250	3.98
10	1.23	35	5.63	80	47.4	300	8.59
15	1.71	40	7.37	90	70.1	350	16.5
20	2.34	50	12.3	100	101	374	22.1

- Объем вещества в жидком состоянии не может превышать его критический объем.

Задача 34.38. Найти наибольший объем V , который может занимать вода массой $m = 1$ кг.

Решение. Как было сказано, из вида изотерм Ван дер Ваальса на рис. 34.4 следует, что наибольший объем жидкость может занимать в критической точке. Поэтому используем (34.42): $V = V_c = (m/\mu)V_{m,c}$. Значение $V_{m,c}$ берем из таблицы 34.2: $V = (1/18 \cdot 10^{-3}) \times 56.3 = 3.1 \cdot 10^3 \text{ см}^3 = 3.1 \text{ л}$ — в три раза больше объема воды при обычных условиях! ■

Заметим, что зависимость давления насыщенного пара от температуры $p_{\text{н}}(T)$ проявляется, в частности, в изменении температуры кипения воды при подъеме в горы. Точка кипения определяется из равенства давления насыщенного пара атмосферному давлению. Понижение последнего приводит к более низкой изотерме на нашем рисунке, т.е. к понижению температуры кипения.

Напомним заодно, что вместе с атмосферным давлением и температурой воздуха в сводках погоды сообщают и его относительную влажность. Под ней понимается выраженное в процентах отношение парциального давления водяного пара, содержащегося в воздухе, к давлению насыщенного пара при данной температуре. Таким образом, 100% влажность вовсе не означает, что вместо воздуха мы стали дышать водой. Давление насыщенного водяного пара при некоторых значениях температуры приведено в таблице 34.3.

Задача 34.39. По радио передали, что атмосферное давление равно $p = 757$ мм ртутного столба (плотность ртути $\rho = 13.55 \text{ т/м}^3$), относительная влажность воздуха $r = 86\%$, а температура воздуха $t = 20^{\circ}\text{C}$. Какова

абсолютная влажность воздуха r_a (масса водяных паров в единице объема)? Какую долю η от атмосферного давления составляет парциальное давление водяных паров?

Решение. Сначала переведем значение атмосферного давления в СИ. Давление ртутного столба высотой h равно $p = \rho gh = 13.55 \cdot 10^3 \times 9.81 \times 0.757 = 100.6$ кПа. По таблице 34.3 находим давление насыщенных паров при данной температуре воздуха: $p_n = 2.34$ кПа. Парциальное давление паров воды $p_i = p_n (r/100\%) = 2.34 \times 0.86 = 2.01$ кПа, и мы можем уже ответить на второй вопрос задачи: $\eta = p_i/p = 2.01/100.6 = 0.02$.

Теперь применим уравнение Клапейрона-Менделеева для водяного пара. Поскольку искомая абсолютная влажность есть не что иное, как плотность водяного пара $r_a = m/V$, то немедленно находим:

$$r_a = \frac{p_i \mu}{RT} = \frac{2.01 \cdot 10^3 \times 18 \cdot 10^{-3}}{8.31 \times 293} = 14.9 \frac{\text{г}}{\text{м}^3}.$$

■

Задача 34.40. Если температура в задаче 34.39. понизится, то в воздухе может появиться туман. При какой температуре t_p это произойдет? Какое количество росы выпадет на землю при понижении температуры до $t_1 = 10^\circ\text{C}$?

Решение. Надо найти температуру t_p (ее называют *точкой росы*), при которой давление p_n насыщенного водяного пара станет равным полученному выше парциальному давлению $p_i = 2.01$ кПа. Тогда относительная влажность воздуха достигнет 100%, и дальнейшее понижение температуры приведет к конденсации “излишков” пара. В таблице 34.3 нет значения 2.01 кПа для давления насыщенного пара. Но можно утверждать, что искомая температура находится в интервале от 15°C до 20°C . Поскольку он не столь велик, для более точного определения точки росы используем линейное приближение: будем считать, что в указанном интервале зависимость давления от температуры дается формулой

$$p_n = 1.71 + \frac{t - 15}{5} (2.34 - 1.71) = 0.126t - 0.180, \quad (34.46)$$

где давление измеряется в кПа, а температура — в градусах Цельсия. Приравняв p_n и p_i , находим точку росы $t_p = (2.01 + 0.18)/0.126 \approx 17^\circ\text{C}$.

При понижении температуры до значения $t_1 = 10^\circ$ давление насыщенного пара понижается до $p_{i,1} = 1.23$ кПа, как следует из той же

таблицы, т.е. становится меньше прежнего $p_i = 2.01$ кПа. В этой же пропорции уменьшается плотность водяных паров: $r_{a,1} = r_a \cdot (p_{i,1}/p_i) = 14.9 \times (1.23/2.01) = 9.1$ г/м³. Следовательно, из каждого кубометра воздуха на землю выпадет $(14.9-9.1)=5.8$ г воды. ■

А теперь — информация для размышления: при решении задачи 34.40. в целях упрощения намеренно были допущены неточности. Какие именно? Существенно ли они влияют на результаты?

Внутреннее давление газа Ван дер Ваальса означает изменение внутренней энергии молекул газа. К их кинетической энергии добавится энергия потенциального взаимодействия молекул между собой. Поскольку давление всегда связано с плотностью энергии (или иначе, произведение давления на объем дает нам энергию газа), эта дополнительная потенциальная энергия получается равной $-p_i V$, где отрицательный знак означает притяжение между молекулами. Тогда для внутренней энергии газа Ван дер Ваальса имеем соотношение:

$$U = U_{id}(T) - \frac{m^2}{\mu^2} \frac{a}{V}. \quad (34.47)$$

Формула отражает тот факт, что при увеличении объема производится работа против сил притяжения между молекулами. Из нее следует теоретическое объяснение т.н. *эффекта Джоуля-Томсона*. В этом эффекте газ адиабатно расширяется в пустоту. Поскольку нет подвода тепла и газ не совершает работы против внешнего давления, его внутренняя энергия U должна оставаться постоянной. Для идеального газа это эквивалентно постоянству температуры. Но в реальном газе уменьшение вычитаемого в (34.47) влечет за собой уменьшение первого члена, т.е. понижение температуры. Этим эффектом пользуются при сжижении газов. В веществах, где доминирует отталкивание между молекулами, наблюдается повышение температуры при адиабатном расширении, т.е. обратный эффект Джоуля-Томсона.

Контрольные вопросы

1. Какую работу должен совершить человек, чтобы компенсировать съеденный кусок пирога калорийностью 400 ккал? В течение какого времени человек должен работать, если при средней физической нагрузке он развивает мощность 500 Вт?
2. Какое количество теплоты выделяется, когда тормоза автомобиля массой 1200 кг замедляют его скорость от 90 км/час до нуля?

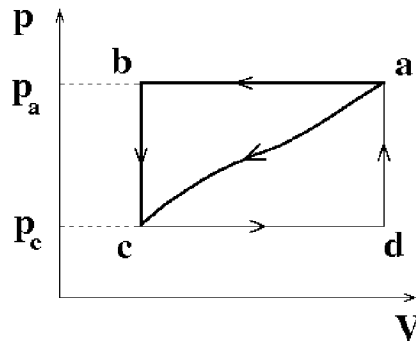


Рис. 34.6: К контрольному вопросу 4.

3. Баллон с манометром содержит сжатый газ. Открыв кран, из баллона выпускают газ, так что давление падает до атмосферного. Кран закрывают, но через некоторое время манометр показывает, что давление в баллоне превышает атмосферное. Объясните это явление.
4. Газ переходит из состояния “а” в состояние “с” вдоль кривой “ас” (рис. 34.6). При этом газ совершает работу $\Delta A = -35$ Дж, и ему сообщается теплота $\Delta Q = -63$ Дж. Если же процесс описывается линией “а-б-с”, то совершенная работа равна $\Delta A = -48$ Дж. 1) Чему равна сообщаемая газу теплота ΔQ для процесса “а-б-с”? 2) Если $p_c = p_a/2$, то какая работа совершается в процессе “с-d-a”? 3) Чему равна сообщаемая теплота ΔQ в процессе “с-d-a”? 4) Чему равна разность внутренних энергий $U = U_a - U_c$? 5) Если $\Delta U = U_d - U_c = 5$ Дж, то чему равна теплота ΔQ для процесса “d-a”?
5. Один моль азота N_2 при температуре $0^\circ C$ нагревается до $100^\circ C$ при постоянном давлении 1.0 атм. Определите: 1) изменение внутренней энергии; 2) работу, совершенную газом; 3) сообщенное ему количество теплоты.
6. Молоток массой 0,5 кг имел скорость 5 м/с непосредственно перед ударом по гвоздю. Оцените повышение температуры железного гвоздя массой 15 г после десяти ударов молотка, быстро следующих один за другим, считая, что гвоздь полностью поглощает всю выделившуюся теплоту. Указание: обратите внимание на рис. 34.3 и объяснения к нему в тексте.
7. В результате физической работы человек массой 70 кг развивает мощность 0.5 л.с. Считая, что 20% произведенной энергии переходит в полезную работу, а остальные 80% — в теплоту, вычислите, насколько повысится температура тела человека спустя один час, если теплообмен со окружающей средой отсутствует. Указание: человек в основном состоит из воды, молярная теплоемкость которой $c_m = 75.3$ Дж/(моль \cdot К).
8. При очень низких температурах молярная теплоемкость многих веществ пропорциональна абсолютной температуре в кубе: $c_m = c_{0,m} T^3$ (это соотношение иногда называют законом Дебая). Для каменной соли $T_0 = 281$ К и $c_{0,m} =$

1940 Дж/(моль \cdot K³). Определите количество теплоты, необходимое для нагревания 3.5 молей этого вещества от температуры 12 К до 38 К.

9. Идеальный одноатомный газ медленно расширяется до тех пор, пока его первоначальный объем не удвоится. Изобразите на pV -диаграмме 1) изотермический, 2) адиабатический и 3) изобарический процессы. В каких процессах происходит наибольшее и наименьшее изменение внутренней энергии? В каких процессах совершается наибольшая и наименьшая работа? В каких процессах газу сообщается наибольшее и наименьшее количество теплоты?
10. При адиабатическом расширении объем идеального газа увеличивается в два раза, причем газ совершает 850 Дж работы. 1) Какое количество теплоты сообщается газу при этом? 2) Чему равно изменение внутренней энергии газа? 3) Повышается или уменьшается температура газа?
11. В каком состоянии (жидком или газообразном) находится углекислый газ в баллоне, если давление $p = 120$ атм, а температура $t = 20^\circ\text{C}$? Тот же вопрос, если в баллоне находится кислород. Примечание: внесистемная единица давления $1 \text{ атм} \approx 101 \text{ кПа}$.
12. В прочный сосуд налили воду и нагрели ее до температуры $t = 500^\circ\text{C}$. Давление в сосуде увеличилось до $p = 500$ атм. Жидкость или газ находятся в сосуде?
13. Горцы, пасущие скот на высокогорных пастбищах, при варке мяса плотно закрывают котлы крышкой и накладывают на нее камни. Для чего?
14. Почему запотевают очки у человека, вошедшего в теплое помещение с холода?
15. Почему летом после захода солнца туман появляется сначала в низинах? Почему облака осенью бывают ниже, чем летом?

Глава 35

Распределение молекул по скоростям и координатам

Предположение о равномерном распределении молекул в пространстве и равномерном распределении скоростей по всем направлениям называют *предположением о молекулярном хаосе*. Как ни странно это выглядит, именно благодаря абсолютной хаотичности движения молекул можно установить определенные закономерности, которым подчиняется состояние системы.

35.1 О закономерностях в мире хаоса

Пусть имеется некоторый замкнутый сосуд небольшого (чтобы пренебречь действием внешних силовых полей) объема, заполненный газом. Предположим, что в газе установилось *состояние равновесия*. Равновесным состоянием системы называется такое состояние, при котором все параметры системы имеют определенные значения, остающиеся постоянными сколь угодно долго при неизменных внешних условиях. Эти условия должны быть такими, чтобы в системе не было переноса вещества, энергии, импульса и т.п. Опыт показывает, что при равновесии:

- молекулы газа распределяются по всему объему замкнутого сосуда с равномерной плотностью

$$n(\vec{r}) = Const, \quad (35.1)$$

- молекулы газа обладают скоростями, равномерно распределенными по всем направлениям в пространстве. Это означает, что число молекул, движущихся по любому направлению должно быть одинако-

вым. Если бы это было не так и существовало бы направление преимущественного движения молекул, то в этом направлении возник бы поток газа. Из опыта следует, что в газе, заключенном в замкнутый сосуд и не подвергающемся воздействию извне, возникновение установившегося потока газа невозможно.

В пределах любым образом ориентированных, но постоянных по величине телесных углов лежат направления движения в среднем одинакового числа молекул (рис. 35.1). Соударения молекул не изменяют эту ситуацию.

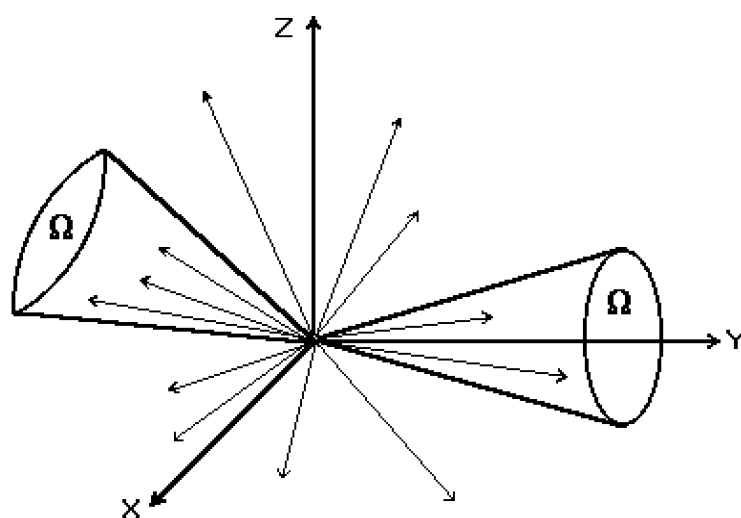


Рис. 35.1: Распределение молекул по направлениям движения.

Для простоты мы будем рассматривать *идеальный газ*. С точки зрения кинетической теории, идеальный газ — простейшая молекулярно-кинетическая модель газа. Эта модель предполагает следующие два свойства:

- Силы взаимодействия между молекулами отсутствуют (взаимодействие возникает при соударении молекул друг с другом или со стенками сосуда. Соударения носят упругий характер).
- Собственным объемом молекул можно пренебречь по сравнению с объемом, занятым газом.

Реальные газы близки к идеальному газу при малых плотностях. При уменьшении плотности средние расстояния между молекулами значительно превосходят линейные размеры молекул и сила взаимодействия друг с другом уменьшается практически до нуля.

Функция распределения

Что такое *распределение*? Начнем с простого примера, позволяющего внести необходимые определения. Пусть в некотором коллективе из 100 человек 10 имеют рост от 160 до 165 см, 25 — от 165 до 170, 35 — от 170 до 175, 15 — от 175 до 180, 10 — от 180 до 185 и остальные 5 — от 185 до 190. Это перечисление удобно изобразить в виде простой общепринятой диаграммы, рисуя вертикальные прямоугольники, пропорциональные числу людей данного роста (рис. 35.2). Такую диаграмму называют гистограммой. Если построить ее не для ста человек, а для взрослого населения целой страны, то можно ввести гораздо более мелкие подразделения по росту. Например, определять рост с точностью не 5 см, а 0.5 см (применительно к росту человека бóльшая точность вряд ли имеет смысл).

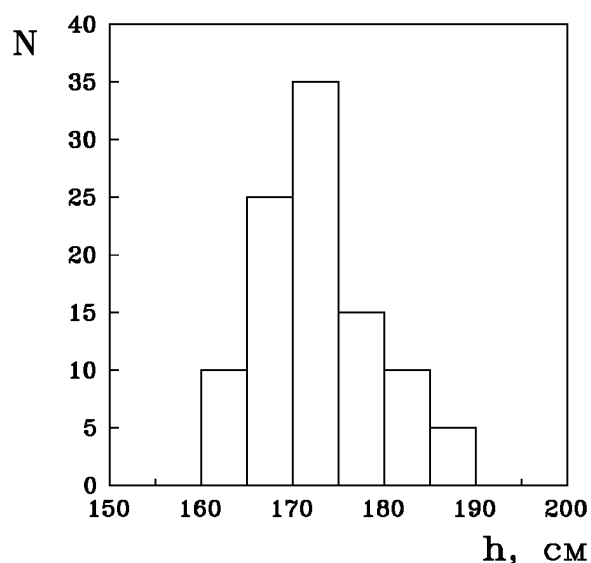


Рис. 35.2: Гистограмма, изображающая распределение людей по росту.

Допустим, однако, что некоторая изучаемая величина может задаваться сколь угодно точно, так что для весьма большого коллектива законно перейти от гистограммы к плавной *функции распределения*, график которой проходит через вершины вертикальных прямоугольников гистограммы. Кривую такого рода мы и должны построить для распределения молекул газа по скоростям.

Элементы теории вероятностей

Случайные события

Теория вероятностей — раздел математики, изучающий случайные явления. Основой теории вероятностей является понятие *случайного* события как одного из возможных исходов некоторого *испытания* — процесса, который принципиально может воспроизводиться неограниченное число раз. На интуитивном уровне это понятие ясно, и мы не станем вдаваться в его формальное определение, принятое в современной математике. Выпадение числа 6 (или любого другого) при бросании игральной кости, появление красного или черного в игре в рулетку — примеры случайных событий.

Зачастую, однако, мы имеем дело с невозпроизводимыми событиями, к которым все же применима теория вероятности. Речь идет о количественных характеристиках *массовых* явлений. Скажем, на предприятии изготавливается транзистор. Он может быть дефектным или исправным, но в отличие от бросания игральной кости повторить процесс, изготовить тот же самый транзистор во второй, третий, ..., миллионный раз уже невозможно. К этому же классу явлений относится появление данного числа вызовов на телефонной станции, возраст человека, занимающего определенное место на стотысячном стадионе и т.п.

Можно ли случайные события или массовые явления описывать математическими формулами? Можно ли в мире случайностей найти некоторые закономерности? Такие попытки предпринимались издавна из-за потребностей практики. Еще в древних государствах делались прогнозы роста народонаселения и количества собираемого урожая и податей. Развитие страхового дела в средние века потребовало оценки степени опасности кораблекрушения. В XVII веке в Италии было основано первое общество по страхованию жизни, и его основателю надо было знать степень риска смерти клиента в зависимости от его возраста и профессии. Последним толчком к появлению теории вероятностей как самостоятельной математической дисциплины стало распространение азартных игр.

Вероятность случайного события

Каждому случайному событию можно приписать число, которое называется *вероятностью* события. Вероятность некоторого случайного события определяется *относительной частотой* его появления в ряду дру-

гих случайных событий. Чем чаще происходит событие, тем больше его вероятность.

Пусть производится некоторое испытание, исходом которого является какой-то набор случайных событий A, B, C, \dots . Скажем, бросается игральная кость, которая предполагается геометрически правильной, так что все ее грани равноправны. Возможно всего шесть событий — выпадение чисел $1, 2, \dots, 6$. Пусть произведено n испытаний, и событие A наступило $k_n(A)$ раз. Величина $P_n(A) = k_n(A)/n$ представляет собой относительную частоту события A в данной серии испытаний. Вообще говоря, значение $P_n(A)$ колеблется при переходе от одной серии испытаний к другой. Если при увеличении числа n испытаний в серии число $P_n(A)$ стремится к определенному пределу $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(A)$, то этот предел $P(A)$ называется вероятностью события A . Если кость бросается достаточно много раз в нашем примере, то частота выпадения каждого из чисел будет одинаковой. Мы скажем, что вероятность выпадения любого из них равна $1/6$.

Из классического определения вероятности следует, что она всегда заключена между нулем и единицей: $0 \leq P(A) \leq 1$. Вероятность *невозможного* события равна нулю, вероятность *достоверного* события равна единице. Обратные утверждения, вообще говоря, неверны. Например, не следует думать, что никогда не может осуществиться событие, вероятность которого равна нулю. События, которые осуществляются при бросании кости, дискретны: возможно выпадение единицы или двойки, но не двух с половиной. Но что делать, если события будут непрерывными? Например, вернемся к примеру группы людей. Какова вероятность того, что рост наудачу выбранного индивидуума будет в точности равен $176.543 \dots$ см? Ясно, что эта вероятность равна нулю: существует бесчисленное множество непрерывно распределенных значений роста (возможных исходов измерений), так что знаменатель нашего определения вероятности бесконечно велик. Но все же может случиться так, что какой-то индивидуум имеет в точности такой рост. Чтобы избежать подобных трудностей в таких случаях вместо вероятности события удобнее пользоваться *плотностью вероятности*, или *распределением*. Зная эту величину, мы сможем, например, ответить на такой вопрос: какова вероятность того, что рост этого индивидуума заключен между 175 см и 180 см? В нашем примере эта вероятность составляет $15/100 = 0.15$. Та плавная кривая, которая соответствует гистограмме на рис. 35.2 при

уменьшении интервала измерений роста, изобразила бы как раз плотность вероятности.

Закон сложения вероятностей

Два события A и B называются *несовместимыми*, если при проведении испытания они не могут произойти одновременно. *Суммой* или *объединением* событий $A \cup B$ называется наступление одного из них (знак \cup означает *или-или*). Вероятность наступления одного из двух *несовместимых* событий A или B определяется *законом сложения вероятностей*:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \quad (35.2)$$

Обобщение закона (35.2) на произвольное число несовместимых событий очевидно.

Задача 35.41. Какова вероятность, что при однократном бросании кости выпадет четное число?

Решение. Поскольку выпадение какого-то из чисел исключает выпадение другого, то эти события несовместимы. На гранях кости имеются четные числа 2, 4, 6, вероятности появления которых одинаковы: $P(2) = P(4) = P(6) = 1/6$. Вероятность выпадения четного числа $P(2 \cup 4 \cup 6) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2$. Очевидность полученного результата иллюстрирует высказывание французского математика Лапласа, что теория вероятностей есть здравый смысл, сведенный к математическому исчислению. ■

Другой пример — рассмотренный выше коллектив из ста человек. Здесь мы имеем дело с вероятностями, что рост индивидуума заключен в определенных пределах. Так, мы знаем вероятности того, что рост находится в пределах $175 \div 180$ см (0.15), $180 \div 185$ см (0.1) и $185 \div 190$ (0.05). Какова вероятность того, что рост наугад выбранного человека из этого же коллектива превышает 175 см? По закону сложения вероятности приходим к ответу $0.15 + 0.1 + 0.05 = 0.3$. Аналогично находится вероятность того, что рост будет ниже 175 см: $0.1 + 0.25 + 0.35 = 0.7$. Зададим теперь вопрос: чему равна вероятность того, что произвольно выбранный индивидуум имеет какой-нибудь рост? Вероятность эта равна единице:

$$\sum_i P_i = \frac{10}{100} + \frac{25}{100} + \frac{35}{100} + \frac{15}{100} + \frac{10}{100} + \frac{5}{100} = \frac{100}{100} = 1,$$

что согласуется с определением вероятности. Мы рассмотрели пример так называемого *условия нормировки* вероятности.

Непрерывные события описываются кривой функции распределения. Для нашего примера с распределением ростов в большом коллективе мы обозначим ее $w(h)$. Тогда бесконечно малая величина $w(h)dh$ равна вероятности того, что рост индивидуума заключен в пределах от h до $h + dh$. Чтобы узнать вероятность $P(h_1, h_2)$, что индивидуум имеет рост в пределах $h_1 \leq h \leq h_2$, надо просуммировать все эти бесконечно малые величины, то есть вычислить площадь под частью кривой между точками с координатами h_1 и h_2 :

$$P(h_1, h_2) = \int_{h_1}^{h_2} w(h) dh. \quad (35.3)$$

Площадь кривой под функцией распределения во всей области ее определения должна быть равна единице, поскольку сумма всех возможных событий является достоверным событием.

Закон умножения вероятностей

Произведением или пересечением событий $A \cap B$ называется осуществление обоих из них (знак \cap имеет смысл *и-и*). Два события называются *независимыми*, если наступление одного из них не влияет на вероятность наступления другого. Для двух *независимых* событий выполняется закон *умножения вероятностей*:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \quad (35.4)$$

Задача 35.42. Пусть бросаются две игральные кости. Какова вероятность, что сумма чисел на гранях равна 12?

Решение. Такой исход возможен при выпадении шестерок на каждой из костей, причем число очков на одной из костей с очевидностью не влияет на число очков на другой. Искомая вероятность равна $(1/6) \cdot (1/6) = 1/36$.

■

Другой пример: возьмем три коллектива по сто человек в каждом, один из которых состоит исключительно из блондинов, другой — из брюнетов, а третий — из шатенов. Пусть в каждом из них имеется то же самое распределение по росту, что и рассмотренном выше примере. Перемешаем коллективы и получим новый коллектив из трехсот человек.

Ясно, что при таком перемешивании распределение по росту не изменилось, причем рост индивидуума не зависит от цвета его волос. Вероятности того, что индивидуум будет брюнетом, блондином или шатеном равны между собой ($1/3$). Вопрос: какова вероятность, что наугад выбранный человек окажется брюнетом с ростом в пределах от 175 см до 180 см? Ответ получается на основе закона умножения вероятностей: $(1/3) \cdot 0.15 = 0.05$.

Средние величины

Понятие статистического среднего является естественным обобщением привычного нам понятия среднего арифметического. В рассматриваемом примере у нас имеется ряд значений роста индивидуума. Под *арифметическим средним* мы понимаем отношение суммы всех этих значений к полному их числу, т.е. сумму вида $\sum h_i N_i / N$, где h_i — значение роста, N_i — число индивидуумов, имеющих это значение роста, N — полное число индивидуумов (измерений).

Статистическим средним величины h , которое мы будем обозначать через $\langle h \rangle$, называется предел отношения

$$\langle h \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_i h_i N_i}{N} = \sum_i h_i P_i, \quad (35.5)$$

где P_i — вероятность того, что величина h имеет значение h_i . Получаем

$$\begin{aligned} \langle h \rangle &= 160 \frac{10}{100} + 165 \frac{25}{100} + 170 \frac{35}{100} + 175 \frac{15}{100} + 180 \frac{10}{100} + 185 \frac{5}{100} \\ &= 170.25 \text{ см.} \end{aligned}$$

В случае непрерывно распределенных событий мы должны будем вычислить соответствующий интеграл $\int h w(h) dh$, взятый в пределах всей области изменения переменной h .

35.2 Распределение молекул по скоростям

В этом разделе, являющемся центральным для данной темы, устанавливается вид так называемого распределения Максвелла.

Газ, предоставленный самому себе и находящийся в постоянных внешних условиях, приходит в состояние равновесия. С макроскопической

точки зрения в нем устанавливаются постоянная температура и постоянное давление (а если газ состоит из нескольких компонент, как воздух, то и состав газа в разных местах в сосуде будет одинаков). Молекулы газа даже в равновесии движутся беспорядочно, сталкиваясь между собой и со стенками сосуда, непрерывно меняя свою скорость. Однако, не все столь хаотично, как кажется на первый взгляд. Как бы ни изменялась скорость, среднее значение ее квадрата (как это следует из молекулярно-кинетической теории идеальных газов) остается постоянной:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3k_B T}{m_0}. \quad (35.6)$$

Зададим вопрос: сколько молекул (или лучше, какая доля молекул) движется с определенной скоростью в данный момент? Из предположения о хаотическом характере молекулярного движения следует, что возможно появление молекул с любыми скоростями, так что распределение молекул по скоростям надо характеризовать непрерывной функцией. Несмотря на полную хаотичность молекулярных движений, несмотря на случайный характер столкновений и вызываемых ими изменений скорости молекул, их распределение по скоростям, как показывают теория и опыт, оказывается вполне определенным. На характер распределения по скоростям не влияют даже внешние поля при условии, что состояние системы является равновесным.

Будем считать, что возможные значения скорости заключены, в принципе, от 0 до ∞ . В реальных системах скорость не может быть бесконечно большой, т.к. всякая система состоит из большого, но конечного числа молекул. Поэтому даже если представить себе такой практически невероятный случай, при котором все молекулы остановятся, передав всю энергию одной единственной молекуле, то и тогда энергия этой молекулы и, следовательно, ее скорость будет конечной. Мы здесь даже не говорим об ограничениях, налагаемых теорией относительности, согласно которой скорость любой молекулы не может превысить скорость света. Очень малые и очень большие по сравнению со средним значением скорости мы будем считать в принципе возможными, но, как мы убедимся, они окажутся маловероятными.

Прежде чем приступить к рассмотрению закона распределения молекул газа по скоростям, выясним сущность задачи о распределении. Определить распределение молекул по скоростям, казалось бы, означает определить число молекул, обладающих той или иной заданной скоро-

стью. Однако в такой постановке вопрос не имеет смысла так как число молекул, имеющих точно (математически точно!) заданную скорость, равно нулю. Действительно, число различных значений скорости бесконечно велико, число же молекул конечно. Поэтому число молекул, приходящихся на долю каждого произвольно заданного значения скорости, равно нулю. Вследствие этого вопрос должен быть сформулирован иначе: сколько молекул (или какая доля молекул) обладает скоростями, лежащими в некотором интервале вблизи заданной скорости?

Итак, найти распределение молекул по скоростям — это значит определить, сколько молекул или какая доля молекул из общего числа N обладают скоростями, лежащими в интервале от \vec{v} до $\vec{v} + \Delta\vec{v}$.

Функция распределения молекул по скоростям

Если ΔN — число молекул, имеющих при заданном состоянии системы скорости от \vec{v} до $\vec{v} + \Delta\vec{v}$, то это число, вообще говоря, зависит от:

- общего числа молекул N в системе,
- величины интервала $\Delta\vec{v}$,
- значения самой скорости \vec{v} (т.к. в одинаковых по величине интервалах, но при разных абсолютных значениях скорости число частиц будет различным).

Таким образом, $\Delta N = \Delta N(N, \Delta\vec{v}, \vec{v})$. Здесь под \vec{v} понимается вектор с компонентами $\{v_x, v_y, v_z\}$ (в декартовой системе координат). Кроме того, нам понадобится величина $\Delta^3 v = \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z$, то есть объем интервала скоростей.

При уменьшении этого объема (т.е. интервала скоростей) число частиц в нем естественно стремится к нулю. В таких случаях, как было пояснено выше, необходимо пользоваться другой функцией (мы обозначим ее буквой F), численно равной количеству молекул, приходящемуся на единичный объем интервала скоростей:

$$F = \frac{\Delta N}{\Delta^3 v}. \quad (35.7)$$

Неограниченно уменьшая $\Delta\vec{v}$, переходим в пределе к дифференциальной величине:

$$F = \frac{dN}{d^3 v}, \quad (35.8)$$

где бесконечно малый объем скоростей $d^3v = dv_x dv_y dv_z$. Эта величина зависит уже лишь от N и \vec{v} : $F = F(N, \vec{v})$; зависимость от *конечного* интервала скоростей может быть получена обратной операцией — интегрированием.

Обратимся теперь к зависимости функции F от числа молекул в системе. Чем больше полное число N молекул, тем больше число молекул ΔN , приходящееся на единичный объем интервала скоростей. В пределе бесконечно большого числа молекул ($N \rightarrow \infty$) величина F пропорциональна рассматриваемому количеству молекул N и, следовательно, для различных порций газа будет различна. Поэтому рассмотрим другую функцию:

$$n(\vec{v}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{F(N, \vec{v})}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \frac{dN}{d^3v}. \quad (35.9)$$

Эта функция зависит лишь от скорости и дает относительное количество (долю) молекул, имеющих скорость в единичном интервале скоростей вблизи скорости \vec{v} . Эта функция $n(\vec{v})$ называется *функцией распределения молекул по скоростям*. Если взять несколько порций одного и того же газа, находящихся в идентичных условиях (одинаковы p и T), то распределение молекул по скоростям в них также будет идентично. Зная вид $n(\vec{v})$, можно найти количество молекул dN из общего числа молекул N , скорости которых попадают внутрь интервала $d\vec{v}$, т.е. имеют значения, заключенные в пределах от \vec{v} до $\vec{v} + d\vec{v}$: $dN(\vec{v}) = Nn(\vec{v})d^3v$. Исходя из определения вероятности мы можем заключить, что величина $dN/N = n(\vec{v})d^3v$ является вероятностью того, что любая из молекул газа обладает скоростью, лежащей в интервале $d\vec{v}$ вблизи \vec{v} , а сама функция $n(\vec{v})$ имеет смысл плотности вероятности.

Функция распределения должна подчиняться условию, имеющему простой физический смысл: число молекул с произвольными значениями скорости от 0 до ∞ в объеме V равно полному числу молекул N , находящихся в этом объеме. Если просуммировать числа $\Delta N(\vec{v})$ по всем скоростям от 0 до ∞ , то эта сумма должна равняться полному числу молекул N . Для более точных вычислений нужно брать интервал бесконечно малым, а сумму заменить интегралом $\int Nn(\vec{v})d^3v = N$, откуда

$$\int n(\vec{v})d^3v = 1. \quad (35.10)$$

Итак, хотя функция $n(\vec{v})$ пока нам неизвестна, мы уже знаем, что интеграл от нее, взятый по всем возможным скоростям, равен 1. Это условие

называют *условием нормировки* функции распределения. Функция распределения для газов была найдена теоретически Максвеллом (1859) и носит его имя. В следующем разделе мы установим ее вид.

Распределение Максвелла

Поскольку все направления движения молекул в пространстве равноправны, распределение скоростей должно быть изотропным и функция распределения $n(\vec{v})$ не может зависеть от направления скорости. Это означает, что $n(\vec{v})$ не может быть произвольной функцией от компонент скорости v_x, v_y, v_z , а должна являться функцией абсолютной величины скорости $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$. В зависимости от выбранной системы координат вероятность dN/N имеет различный вид. В декартовой системе:

$$\frac{dN}{N} = n(v)dv_x dv_y dv_z; \quad (35.11)$$

в цилиндрической системе:

$$\frac{dN}{N} = n(v)v_r dv_r dv_z d\varphi; \quad (35.12)$$

в сферической системе:

$$\frac{dN}{N} = n(v)v^2 dv \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (35.13)$$

Далее предлагается простой, хотя и не вполне строгий вывод вида функции распределения. Рассмотрим процесс столкновения двух частиц, движущихся со скоростями \vec{v}_1 и \vec{v}_2 . Пусть в результате соударения скорости молекул изменяются и превращаются в \vec{v}_3 и \vec{v}_4 . Число таких столкновений в единицу времени в единице объема газа должно быть пропорционально числу молекул со скоростями \vec{v}_1 и \vec{v}_2 , т.е. произведению $n(v_1) \cdot n(v_2)$. Рассмотрим далее процесс соударения, являющийся обратным данному. При этом скорости молекул изменяются от значений \vec{v}_3 и \vec{v}_4 до значений \vec{v}_1 и \vec{v}_2 . Число таких соударений в единицу времени в объеме пропорционально количеству молекул со скоростями \vec{v}_3 и \vec{v}_4 , т.е. $n(v_3) \cdot n(v_4)$.

В силу предположения о молекулярном хаосе и предположения о том, что число молекул с данными значениями скорости не изменяется процессами молекулярных столкновений в газе, находящемся в стационарном состоянии, можно считать, что число молекул, у которых скорости

изменяются от значений \vec{v}_1, \vec{v}_2 до значений \vec{v}_3, \vec{v}_4 , равно числу молекул, у которых скорости изменяются от \vec{v}_3, \vec{v}_4 до \vec{v}_1, \vec{v}_2 . Отсюда следует, что

$$n(v_1)n(v_2) = n(v_3)n(v_4). \quad (35.14)$$

Равенство (35.14) выражает баланс частиц, получающих и теряющих соответствующую скорость, причем в процессе соударения энергия сохраняется:

$$\frac{m_0}{2}v_1^2 + \frac{m_0}{2}v_2^2 = \frac{m_0}{2}v_3^2 + \frac{m_0}{2}v_4^2. \quad (35.15)$$

Равенства (35.10), (35.14) и (35.15) представляют совокупности условий, которым должна удовлетворять искомая функция распределения.

Используя (35.15), выразим v_4 через v_1, v_2, v_3 :

$$v_4 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - v_3^2}. \quad (35.16)$$

Функциональные уравнения (35.14) и (35.16) легко превратить в простое дифференциальное уравнение. Взяв логарифм от (35.14), имеем

$$\ln n(v_1) + \ln n(v_2) = \ln n(v_3) + \ln n(v_4). \quad (35.17)$$

Продифференцируем (35.17) по аргументу v_1 :

$$\frac{d \ln n(v_1)}{dv_1} = \frac{d \ln n(v_4)}{dv_4} \frac{\partial v_4}{\partial v_1}. \quad (35.18)$$

Аналогично

$$\frac{d \ln n(v_2)}{dv_2} = \frac{d \ln n(v_4)}{dv_4} \frac{\partial v_4}{\partial v_2}. \quad (35.19)$$

Учитывая уравнение (35.16), находим

$$\frac{\partial v_4}{\partial v_1} = \frac{v_1}{v_4}, \quad \frac{\partial v_4}{\partial v_2} = \frac{v_2}{v_4}. \quad (35.20)$$

Подставляя (35.20) в правые части соотношений (35.18) и (35.19), приходим к равенству

$$\frac{1}{v_1} \frac{d \ln n(v_1)}{dv_1} = \frac{1}{v_2} \frac{d \ln n(v_2)}{dv_2}. \quad (35.21)$$

При этом мы должны помнить, что уравнение (35.21) справедливо при совершенно произвольных значениях v_1, v_2 , которые являются независимыми переменными. Это значит, что равенство (35.21) должно иметь

место при совершенно произвольных значениях скоростей, поэтому оно может быть выполнено только тогда, когда правая и левая части (35.21) равны некоторой постоянной (которую мы обозначим через $(-\alpha)$):

$$\frac{d \ln n(v)}{dv} = -\alpha v, \quad (35.22)$$

где переменная v может принимать значения v_1, v_2 или любое иное. Разделяя переменные, записываем (35.22) в виде

$$d \ln n(v) = -\frac{\alpha}{2} d(v^2). \quad (35.23)$$

Интегрируя (35.23), находим

$$n(v) = A \exp \left(-\frac{\alpha}{2} v^2 \right), \quad (35.24)$$

где A — постоянная интегрирования. Из физических соображений очевидно, что $n \rightarrow 0$ при $v \rightarrow \infty$: неограниченно большие скорости молекул маловероятны. Поэтому коэффициент $\alpha > 0$. Постоянная A определяется из условия нормировки (35.10):

$$A = \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^{3/2}. \quad (35.25)$$

В дальнейшем можно будет показать, что параметр α связан с абсолютной температурой T соотношением:

$$\alpha = \frac{m_0}{k_B T}. \quad (35.26)$$

Следовательно,

$$n(v) = \left(\frac{m_0}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_0 v^2}{2k_B T} \right). \quad (35.27)$$

Формула (35.27) и представляет собой искомое распределение молекул по скоростям.

Учитывая, что $n(v)$ зависит только от модуля скорости, а их направления равновероятны, можно ввести функцию распределения $f(v)$ молекул по абсолютной величине скорости. Для этого надо проинтегрировать выражение (35.13) по углам, что дает

$$\begin{aligned} \frac{dN}{N} &= n(v) v^2 dv \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \\ &= 4\pi n(v) v^2 dv = f(v) dv. \end{aligned} \quad (35.28)$$

Отсюда и из (35.27) следует выражение для функции распределения $f(v)$:

$$f(v) = 4\pi n(v)v^2 = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 \exp \left(-\frac{m_0 v^2}{2k_B T} \right). \quad (35.29)$$

Величина $f(v)dv$ есть вероятность найти частицу с модулем скорости, лежащим в интервале от v до $v + dv$. Условие нормировки распределения $f(v)$ принимает теперь вид:

$$\int_0^{\infty} f(v)dv = 1. \quad (35.30)$$

35.3 Характерные скорости молекул

В этом разделе приводятся некоторые следствия, вытекающие из (35.30). Построим график функции $f(v)$. Получающаяся кривая описывает распределение некоторой случайной величины около среднего значения и называется нормальным законом распределения (или распределением Гаусса). На рис. 35.3 изображены две кривые, соответствующие распределениям молекул кислорода O_2 по абсолютным величинам скоростей при температурах $T_1 = 300\text{ K}$ и $T_2 = 1300\text{ K}$.

Наиболее вероятная скорость

При бесконечно малых и неограниченно больших значениях скоростей $f \rightarrow 0$ — такие предельные значения скоростей маловероятны в системе. Следовательно, при каком-то значении скорости функция $f(v)$ достигает своего максимума. Скорость $v_{\text{вер}}$, отвечающая максимальному значению функции распределения, называется *наиболее вероятной*. Ее можно найти, решая уравнение $df(v)/dv = 0$, откуда следует, что

$$v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m_0}}. \quad (35.31)$$

Иными словами, наиболее вероятной называется скорость, вблизи которой на единичный интервал приходится наибольшее число молекул. В этой точке $f(v)$ принимает максимальное значение:

$$f(v_{\text{вер}}) = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \frac{2k_B T}{m_0 e} = \frac{4}{e} \sqrt{\frac{m_0}{2\pi k_B T}} = 0.587 \sqrt{\frac{m_0}{k_B T}}. \quad (35.32)$$

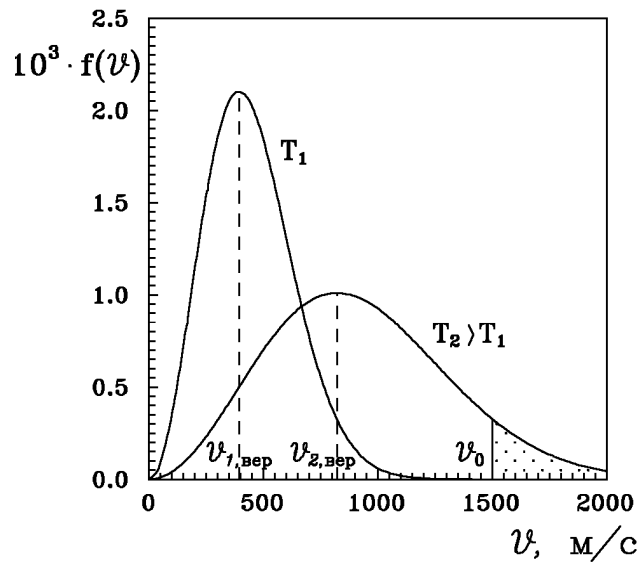


Рис. 35.3: Распределение молекул кислорода по скоростям при разных температурах $T_1 = 300\text{ K}$ и $T_2 = 1300\text{ K}$.

Соотношения (35.31), (35.32) могут быть полезны для анализа *изменения* функции распределения при изменении *температуры* газа или при изменении рода газа, т.е. *массы* молекул.

С ростом температуры $v_{\text{вер}}$ (35.31) увеличивается, т.е. максимум сдвигается вправо ($T_2 > T_1$) (см. рис. 35.3). При этом $f(v_{\text{вер}})$ уменьшается, кривая становится более полой. Так же деформируется кривая, если температура постоянна, но масса молекул уменьшается. Напомним, что при любых деформациях площадь под кривыми 1 и 2 постоянна и равна 1.

Относительное количество молекул, скорость которых превышает некоторое значение v_0 , определяется выражением

$$\frac{N(v \geq v_0)}{N} = \int_{v_0}^{\infty} f(v) dv. \quad (35.33)$$

На графике (см. рис. 35.3) этому интегралу соответствует лежащая справа от v_0 часть площади (помечена точками), ограниченная кривой $f(v)$ и осью скоростей. Как видно из рис. 35.3, относительное количество молекул, имеющих скорости, превышающие v_0 , растет с повышением температуры.

В заключение этого раздела заметим, что во всех формулах для функции распределения и характерных скоростей встречается отношение массы молекулы к постоянной Больцмана m_0/k_B . Умножая числитель и знаме-

натель на число Авогадро N_A и учитывая, что $m_0 N_A = \mu$ (молекулярному весу газа), а $k_B N_A = R$ (универсальной газовой постоянной), мы всюду можем использовать это отношение в наиболее удобной для конкретной задачи форме: $m_0/k_B = \mu/R$.

Распределение молекул по величинам безразмерной скорости

Если при графическом изображении закона Максвелла (35.27) по оси абсцисс откладывать скорости молекул v , то форма кривой и положение максимума будут зависеть от массы молекул и от температуры газа. Но если по горизонтальной оси откладывать отношение скорости к наиболее вероятной скорости, т.е. безразмерную скорость $u = v/v_{\text{вер}}$, то для всех температур и любых масс молекул (любых газов), получится одна и та же кривая (рис. 35.4).

Сделав замену переменной $u = v/v_{\text{вер}}$, $2k_B T/m_0 = v_{\text{вер}}^2$, $dv = v_{\text{вер}} du$ в (35.28) и (35.29), получим распределение Максвелла в форме:

$$f(u) = \frac{1}{N} \frac{dN}{du} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2. \quad (35.34)$$

Эта формула (35.34) и соответствующий ей график (см. рис. 35.4) удобны для решения многих задач.

Задача 35.43. Найти, какая часть общего числа молекул кислорода имеет при температуре 27°C : 1) скорости, отличающиеся от наиболее вероятной на 1%; 2) скорости в интервале 562–572 м/с.

Решение. Произведем необходимые вычисления.

- Чтобы ответить на первый вопрос задачи, учтем, что $u = 1$ при $v = v_{\text{вер}}$. Величина интервала $\Delta u = 0.02$. Следовательно,

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-1} \cdot 1 \cdot \Delta u = \frac{4}{\sqrt{3.14}} \cdot \frac{1}{e} \cdot 1 \cdot 0.02 = 0.0166 = 1.66\%.$$

- Вычислим наиболее вероятную скорость:

$$v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8.31 \cdot 300}{32 \cdot 10^{-3}}} = 395 \text{ м/с}.$$

Найдем отношение $v = 562$ м/с и $v_{\text{вер}}$:

$$u = \frac{v}{v_{\text{вер}}} = \frac{562}{395} = 1.42.$$

Определим по кривой (см. рис. 35.4) значение функции $f(u)$ при $u = 1.42$. Получаем $f(u) = 0.62$. Ширина интервала $\Delta v = 10$ м/с ($\Delta u = 10/395 = 0.0253$). Следовательно, доля молекул в этом интервале $f(u)\Delta u = 0.62 \cdot 0.0253 = 0.0156 = 1.56\%$. ■

Интересно отметить, что молекула кислорода проходит за секунду путь, равный в среднем 0.4 км. Но не нужно забывать о соударениях молекул. Из-за них молекула по прямой движется очень недолго, и ее путь представляет собой ломаную линию. Поэтому молекула, двигаясь с огромной скоростью по отдельным звеньям ломаной траектории, передвигается от слоя к слою газа со сравнительно небольшой скоростью.

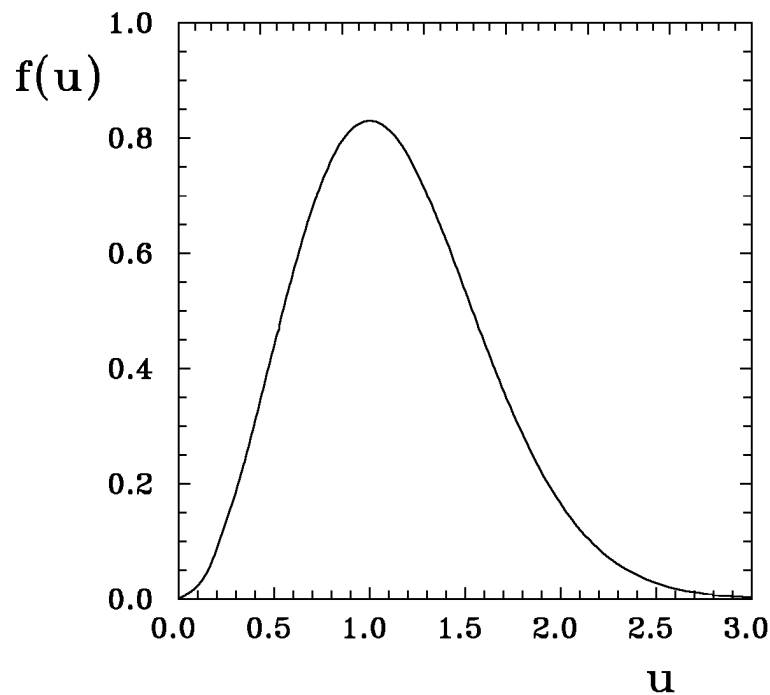


Рис. 35.4: Распределение Максвелла по величинам безразмерной скорости.

Средняя арифметическая скорость

Знание функции распределения молекул по скоростям $f(v)$ дает возможность найти среднее значение скорости, а также любой величины, являющейся функцией скорости, например квадрата скорости v^2 или кинетической энергии молекулы $mv^2/2$.

Средняя арифметическая скорость равна отношению суммы абсолютных величин скоростей всех молекул в системе к числу этих молекул. Разобьем интервал всех возможных значений скорости от 0 до ∞ на

малые интервалы Δv_i . Каждому интервалу соответствует количество молекул:

$$\Delta N_i = N f(v_i) \Delta v_i. \quad (35.35)$$

Так как интервалы малы, то можно приближенно считать скорости молекул данного интервала одинаковыми и равными v_i . Сумма значений скоростей молекул интервала:

$$v_i \Delta N_i = v_i N f(v_i) \Delta v_i. \quad (35.36)$$

Сумма значений скоростей всех молекул:

$$\sum_i v_i \Delta N_i = N \sum_i v_i f(v_i) \Delta v_i. \quad (35.37)$$

Разделив эту сумму на число молекул, получим выражение для средней арифметической скорости:

$$\langle v \rangle = \sum_i v_i f(v_i) \Delta v_i. \quad (35.38)$$

Переходя от суммы к интегралу, получаем

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v f(v) dv. \quad (35.39)$$

После вычислений:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8 k_B T}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8 RT}{\pi \mu}}. \quad (35.40)$$

Среднеквадратичная скорость

Чтобы найти среднее значение произвольной функции $L(v)$ скорости, нужно эту функцию умножить на функцию распределения и проинтегрировать по всем возможным значениям скорости:

$$\langle L(v) \rangle = \int_0^{\infty} L(v) f(v) dv. \quad (35.41)$$

В частности, при $L(v) = v$ отсюда находится $\langle v \rangle$.

Среднее значение квадрата скорости равно отношению суммы квадратов скоростей всех молекул системы к общему числу молекул. Таким образом,

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^\infty v^2 f(v) dv = \frac{3k_B T}{m_0} = \frac{3RT}{\mu}. \quad (35.42)$$

Среднеквадратичная скорость молекулы $v_{\text{кв}}$ определяется отсюда как $v_{\text{кв}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3RT/\mu}$. Следует отметить, что

$$v_{\text{вер}} < \langle v \rangle < v_{\text{кв}}, \quad (35.43)$$

но зависимость от T и m_0 (μ) у них одинаковая. Эти скорости отличаются друг от друга численными множителями.

Через среднеквадратичную скорость выражается средняя кинетическая энергия молекулы:

$$\langle T \rangle = \left\langle \frac{m_0 v^2}{2} \right\rangle = \frac{m_0 v_{\text{кв}}^2}{2} = \frac{3}{2} k_B T. \quad (35.44)$$

Этот результат находится в согласии с *теоремой о равнораспределении энергии* — на каждую степень свободы молекулы приходится энергия $k_B T/2$. Три степени свободы поступательного движения молекулы как раз соответствуют результату (35.44). В сущности, именно для того, чтобы получить (35.44), мы выбрали должным образом коэффициент α в (35.26).

Эксперимент по проверке распределения Максвелла

Необходимо еще раз подчеркнуть, что установленный Максвеллом закон распределения молекул по скоростям и все вытекающие из него следствия справедливы только для газа, находящегося в равновесии. Закон справедлив для любого числа N , если только это число достаточно велико. Закон Максвелла — статистический, а законы статистики выполняются тем точнее, чем к большему числу одинаковых объектов они применяются. При малом числе объектов могут наблюдаться значительные отклонения от предсказанной статистики.

Экспериментальное определение распределения скоростей молекул было осуществлено впервые Штерном в 1920 г. Исследовалось распределение по скоростям одноатомных молекул паров металлов (Ag или Pt), из

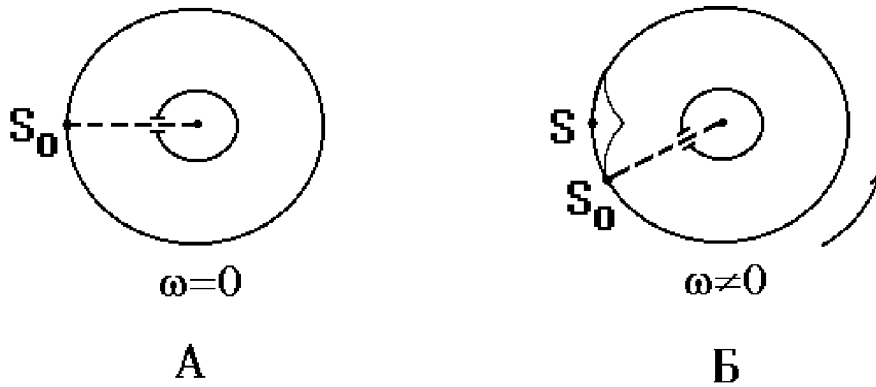


Рис. 35.5: Схема эксперимента Штерна.

которых изготовлена нить. Нить нагревается электрическим током, и металл испаряется (рис. 35.5).

Молекулы, прошедшие через щель, летят по прямой и оседают на стенке холодного цилиндра (А). Если привести всю установку во вращение (щель все время против точки S_0), то молекулы, обладающие большой скоростью v , попадут в некоторую точку вблизи S_0 , а более медленные затратят на путь больше времени и попадут в точку, отстоящую дальше от S_0 (Б). Следует обратить внимание, что вылетающие молекулы движутся по прямой, они не участвуют во вращательном движении. Поскольку молекулы в зависимости от скорости попадают в разные точки внешнего цилиндра, то исследуя толщину слоя металла, осевшего на его стенку, можно составить представление о распределении молекул по скоростям.

Найдем распределение молекул по расстояниям S от точки S_0 до места их попадания на стенку цилиндра. Если R и r — радиусы большого и малого цилиндров, соответственно (см. рис. 35.5), то время полета от щели до стенки цилиндра $t = (R - r)/v$. За это время цилиндр повернется на угол $\varphi = \omega t$, где ω — угловая скорость вращения установки. Соответственно, точка попадания будет смещена относительно S_0 на расстояние $S = \varphi R = \omega R t$. Подставляя сюда время полета, получаем связь скорости молекулы с расстоянием S :

$$v = \frac{\omega R(R - r)}{S}. \quad (35.45)$$

Подставляя в свою очередь выражение (35.45) в распределение Максвелла (35.28) и учитывая, что $dv \sim dS/S^2$, находим распределение молекул по

расстояниям S :

$$\begin{aligned}\frac{dN}{N} &= f(v)dv = C \exp\left(-\frac{\beta}{S^2}\right) \frac{dS}{S^4}, \\ \beta &= \frac{m_0 \omega^2 R^2 (R-r)^2}{2k_B T}\end{aligned}\quad (35.46)$$

(мы опускаем выражение для нормировочной постоянной C).

Опыты Штерна подтвердили справедливость закона, установленного Максвеллом.

35.4 Распределение молекул по координатам

В этом разделе мы перейдем теперь к анализу распределения молекул газа по координатам. Очевидно, что если на молекулы газа не действуют внешние силы, то газ *равномерно* распределяется по заданному объему. В этом случае давление и плотность газа будут одинаковы во всех точках. Если же газ находится в силовом поле (как, например, атмосферный воздух, который испытывает притяжение Земли), то давление и плотность газа уже не будут всюду одинаковыми, а будут меняться от точки к точке.

Барометрическая формула

Мы должны найти закон, по которому изменяется давление атмосферы (или плотность) по мере удаления от поверхности Земли.

Выделим вертикальный столб воздуха с площадью горизонтального сечения S . Предположим, что: 1) этот столб находится в тепловом равновесии, т.е. температура везде одинакова. В реальной атмосфере это не так, но для простоты анализа будем предполагать $T = \text{Const}$; 2) газ идеальный, т.е. для него справедливо соотношение:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT; \quad (35.47)$$

3) можно пренебречь изменением ускорения свободного падения g с высотой (что справедливо для не очень больших высот).

Атмосферное давление на высоте h обусловлено весом вышележащих слоев газа. Пусть на высоте h давление будет p . Тогда на высоте $h + dh$ давление $p + dp$ (рис. 35.6). При этом, если $dh > 0$, то давление уменьшается, $dp < 0$, так как уменьшается вес вышележащих слоев атмосферы.

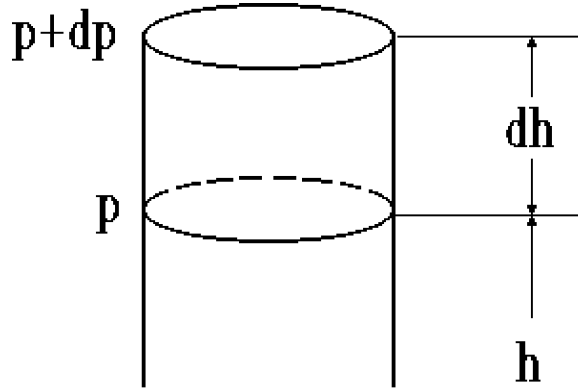


Рис. 35.6: Вертикальный воздушный цилиндр.

Выделенный слой газа, высотой dh и массой m , находится в равновесии. Следовательно, сумма действующих на него сил должна быть равна нулю: $\sum_i \vec{F}_i = 0$. В проекциях на вертикальную ось получаем

$$(p + dp)S + \rho g S dh - pS = 0, \quad (35.48)$$

где ρ — плотность газа на высоте h . Раскрывая скобки и приводя подобные члены, переходим к уравнению

$$dp = -\rho g dh. \quad (35.49)$$

Воспользуемся уравнением Клапейрона–Менделеева (35.47) для выделенной массы газа m и выразим плотность через давление:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}. \quad (35.50)$$

Подставляя (35.50) в (35.49), окончательно получаем:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} dh. \quad (35.51)$$

Это уравнение можно проинтегрировать в случае изотермической атмосферы ($T = \text{Const}$):

$$p(h) = p_0 \exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right). \quad (35.52)$$

Постоянная интегрирования p_0 равна давлению на поверхности ($h = 0$).

Полученная зависимость называется *барометрической формулой*. Она описывает распределение давления газа по высоте в однородном поле тяжести при постоянной температуре. Следует обратить внимание на то,

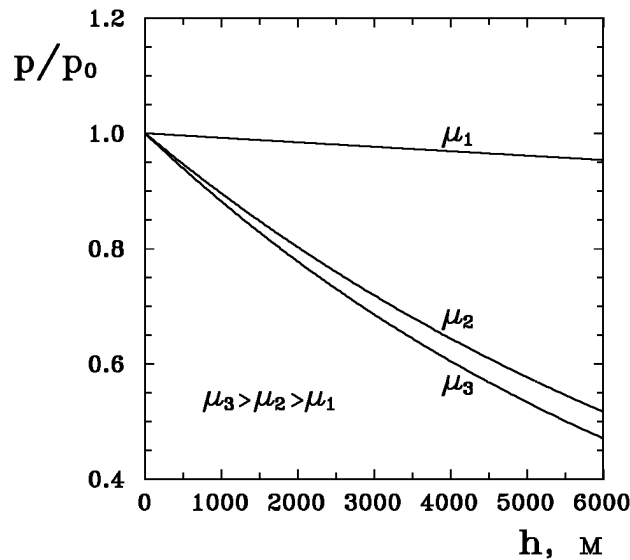


Рис. 35.7: Зависимость давления трех разных газов H_2 , N_2 и O_2 от высоты.

что распределение зависит от рода газа. Чем меньше μ , тем меньше по абсолютной величине показатель степени, и тем медленнее для такого газа уменьшается давление при увеличении высоты. На рис. 35.7 показаны зависимости давления от высоты при температуре $T = 300\text{ K}$ (27°C) для трех газов различной молярной массы — водорода H_2 ($\mu_1 = 2.016\text{ г/моль}$), азота N_2 ($\mu_2 = 28.013\text{ г/моль}$) и кислорода O_2 ($\mu_3 = 31.999\text{ г/моль}$).

Задача 35.44. Определить, на какой высоте давление кислорода уменьшается в два раза (при $T = 300\text{ K}$).

Решение. Применяем барометрическую формулу:

$$p(h) = \frac{p_0}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right).$$

Тогда

$$\ln \frac{1}{2} = -\frac{\mu gh}{RT} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{RT \ln 2}{\mu g} \simeq 5.5\text{ км.}$$

Используя уравнение идеального газа в форме

$$p = nk_B T, \quad (35.53)$$

из барометрической формулы легко получить закон изменения с высотой числа n молекул в единице объема:

$$n(h) = n_0 \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right). \quad (35.54)$$

Из (35.54) следует, что состав воздуха с удалением от поверхности Земли будет меняться количественно: возрастет концентрация газов с малой молярной массой, например водорода и гелия.

У поверхности воздух представляет собой смесь газов: N_2 — 78.08%, O_2 — 20.95%, CO_2 — 0.03%, инертные газы — 0.94%. Посмотрим, как изменится относительное количество кислорода к азоту в изотермической атмосфере ($T = 300\text{ K}$) на высоте 10 км.

$$\begin{aligned}\frac{n(O_2)}{n(N_2)} &= \frac{n_0(O_2)}{n_0(N_2)} \exp \left[-\frac{(\mu_{O_2} - \mu_{N_2})gh}{RT} \right] = \\ &= \frac{0.21}{0.78} e^{-0.16} = 0.27 e^{-0.16} = 0.23.\end{aligned}$$

Отношение концентраций кислорода и азота уменьшится от 0.27 до 0.23. Наш расчет справедлив лишь для изотермической атмосферы и сравнительно небольших высот, для которых ускорение свободного падения изменяется незначительно: $g = \text{Const}$, $T = \text{Const}$. ■

Распределение Больцмана

Число молекул в единице объема зависит от высоты h и температуры T , причем обе переменные входят в показатель экспоненты. Уравнение (35.54) можно записать в виде:

$$n(h) = n_0 \exp \left(-\frac{m_0 gh}{k_B T} \right), \quad (35.55)$$

где m_0 — масса одной молекулы газа. При этом выражение $m_0 gh$, стоящее в числителе, есть не что иное, как потенциальная энергия одной молекулы в поле тяжести Земли. Поэтому можно говорить, что мы имеем распределение молекул по значениям потенциальной энергии. При этом чем больше потенциальная энергия, тем меньше таких молекул. В знаменателе показателя степени стоит $k_B T$ — величина, пропорциональная средней энергии молекулы. Если T велико, то энергия молекул (энергия теплового движения) велика. Значение экспоненциального множителя при увеличении T будет возрастать. На рис. 35.8 показаны кривые концентрации молекул кислорода O_2 на разных высотах при двух различных температурах $T_1 = 300\text{ K}$ и $T_2 = 1300\text{ K}$ (последний случай, конечно, нереален и используется лишь как иллюстрация).

Видно, что число частиц в единице объема при большой температуре медленнее убывает с высотой. При уменьшении температуры большая

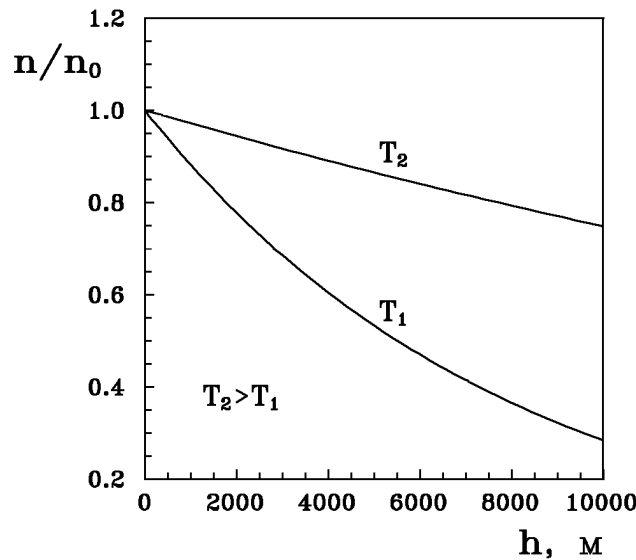


Рис. 35.8: Зависимость концентрации молекул кислорода от высоты при разных температурах $T_1 = 300\text{ K}$ и $T_2 = 1300\text{ K}$.

часть частиц располагается на меньшей высоте. А при $T = 0$ все частицы расположились бы на поверхности Земли. Этот факт имеет простое физическое объяснение. Каждое конкретное распределение молекул по высоте устанавливается в результате действия двух тенденций:

- 1) притяжение молекул к Земле (m_0gh) стремится расположить их на поверхности Земли;
- 2) тепловое движение ($k_B T$) стремится разбросать молекулы по всем высотам равномерно.

Обозначив $E_p = m_0gh$, получим

$$n = n_0 \exp \left(-\frac{E_p}{k_B T} \right). \quad (35.56)$$

Молекулы располагаются преимущественно там, где меньше их потенциальная энергия. Это согласуется с общим принципом, которому подчиняется природа. Всякая система стремится занять положение с наименьшей потенциальной энергией. Частицы будут с большей вероятностью располагаться в тех точках пространства, где потенциальная энергия меньше.

Больцман доказал, что такое распределение осуществляется в поле любых сил, а не только в гравитационном поле. Поэтому распределение (35.56), где n — концентрация частиц с потенциальной энергией E_p , называется *распределением Больцмана*.

35.5 Распределение Максвелла-Больцмана

Мы установили функцию, определяющую распределение молекул по величине скорости (распределение Максвелла), и зависимость, определяющую распределение молекул по значениям потенциальной энергии (распределение Больцмана). Оба распределения можно объединить в один закон *Максвелла-Больцмана*.

Рассмотрим бесконечно малый объем d^3r газа, расположенный в точке с радиус-вектором \vec{r} в большой системе, представляющей идеальный газ при постоянной температуре во внешних силовых полях. Число молекул в выделенном объеме $n(\vec{r})d^3r$. Поскольку объем невелик, в его пределах плотность частиц можно считать постоянной. Это означает, что выполнено условие справедливости распределения Максвелла. Тогда число молекул dN , имеющих скорости от \vec{v} до $\vec{v} + d\vec{v}$, равно

$$dN = An(\vec{r}) \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2k_B T}\right) d^3v d^3r. \quad (35.57)$$

Но концентрация молекул $n(\vec{r})$ зависит от расположения этого объема во внешних силовых полях:

$$n(\vec{r}) = n_0 \exp\left(-\frac{E_p}{k_B T}\right), \quad (35.58)$$

где n_0 — концентрация молекул в точке, где $E_p = 0$. Тогда

$$dN = B \exp\left(-\frac{E_p + m_0 v^2/2}{k_B T}\right). \quad (35.59)$$

Поскольку выражение

$$E = E_p + \frac{m_0 v^2}{2} \quad (35.60)$$

представляет собой полную энергию частицы во внешнем потенциальном силовом поле, мы приходим к обобщенному *распределению Максвелла-Больцмана по энергиям* молекул:

$$dN = N \frac{\exp(-E/k_B T) d^3r d^3v}{\int \exp(-E/k_B T) d^3r d^3v}, \quad (35.61)$$

где N — полное число частиц в системе, а dN — число частиц с координатами между \vec{r} и $\vec{r} + d\vec{r}$ и (одновременно) со скоростями между \vec{v} и $\vec{v} + d\vec{v}$. Интеграл в знаменателе обеспечивает равенство $\int dN = N$.

Распределение по энергиям для многоатомных молекул

Если учесть сложную структуру молекул, т.е. наличие у нее не только поступательных, но и вращательных и колебательных степеней свободы, то полная энергия представится в виде суммы кинетической E_k и потенциальной E_p энергий, а кинетическая энергия, в свою очередь, складывается из поступательной, вращательной и колебательной частей:

$$\begin{aligned} E &= E_k + E_p, \\ E_k &= E_{\text{пост}} + E_{\text{вр}} + E_{\text{кол}}. \end{aligned} \quad (35.62)$$

Например, двухатомная молекула (скажем, H_2) имеет шесть степеней свободы:

$$E_{\text{пост}} = \frac{m_0 v^2}{2} = \frac{m_0 v_x^2}{2} + \frac{m_0 v_y^2}{2} + \frac{m_0 v_z^2}{2}, \quad (35.63)$$

$$E_{\text{вр}} = \frac{I \omega^2}{2} = \frac{I \omega_x^2}{2} + \frac{I \omega_y^2}{2}, \quad (35.64)$$

$$E_{\text{кол}} = \frac{m_0 \dot{x}^2}{2} + \frac{k x^2}{2}, \quad (35.65)$$

где k — коэффициент, характеризующий упругую связь между атомами двухатомной молекулы; x — смещение атомов от равновесного положения. Распределение Максвелла-Больцмана для многоатомных молекул записывается в том же виде (35.61), где выражение для полной энергии дается уравнениями (35.62)-(35.65).

Средняя энергия квантового осциллятора

Распределение Максвелла-Больцмана было получено в классической физике, но оно оказалось справедливым и в квантовой механике, где были подвергнуты пересмотру многие казавшиеся незыблемыми положения. В этом разделе мы хотим впервые познакомить читателя с некоторыми следствиями квантовых законов. Поскольку более систематическое изложение квантовой механики будет дано в последних частях курса, авторы просят пока принять на веру некоторые сделанные здесь утверждения.

Для примера рассмотрим задачу о грузе массой m , прикрепленном к центру пружинкой жесткости k . Уравнение движения хорошо известно и его решением являются гармонические колебания тела с круговой частотой $\omega = \sqrt{k/m}$. Классическая энергия системы, моделирующей атомы и

молекулы, дается формулой (35.65) и может принимать любые значения в зависимости от амплитуды колебаний. В курсе же квантовой механики показывается, что энергия *квантуется*, принимает дискретный ряд значений в соответствии с формулой

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (35.66)$$

Здесь n — т.н. *главное квантовое число*, а \hbar — постоянная Планка ($\hbar = 1.0546 \cdot 10^{-34}$ Дж·с; употребляют также $h = 2\pi\hbar = 6.6261 \cdot 10^{-34}$ Дж·с).

В соответствии с общими принципами статистической физики вероятность P_n найти осциллятор в состоянии, характеризуемом неким значением n главного квантового числа, определяется формулой:

$$P_n = A e^{-E_n/k_B T} = A \exp \left[-\frac{\hbar\omega}{k_B T} (n + 1/2) \right], \quad (35.67)$$

где A — нормировочная постоянная. Для ее определения надо воспользоваться условием нормировки вероятности:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = A e^{-\hbar\omega/2k_B T} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\hbar\omega/k_B T} = 1. \quad (35.68)$$

Для этого в известную формулу для геометрической прогрессии

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad (35.69)$$

подставим значение $q = \exp(-\hbar\omega/k_B T)$. Получаем тогда вместо (35.68)

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = A \frac{\exp(-\hbar\omega/2k_B T)}{1 - \exp(-\hbar\omega/k_B T)} = 1, \quad (35.70)$$

откуда следует выражение для постоянной A . Используя его в выражении (35.67), приходим к вероятности

$$P_n = \left(1 - e^{-\hbar\omega/k_B T} \right) e^{-n\hbar\omega/k_B T}. \quad (35.71)$$

Видно, что чем больше значение квантового числа n , тем меньше вероятность обнаружить осциллятор в таком состоянии. Чем выше температура, тем большие значения n становятся практически значимыми для системы. При $T \rightarrow 0$ к нулю стремятся все вероятности P_n с $n \geq 1$,

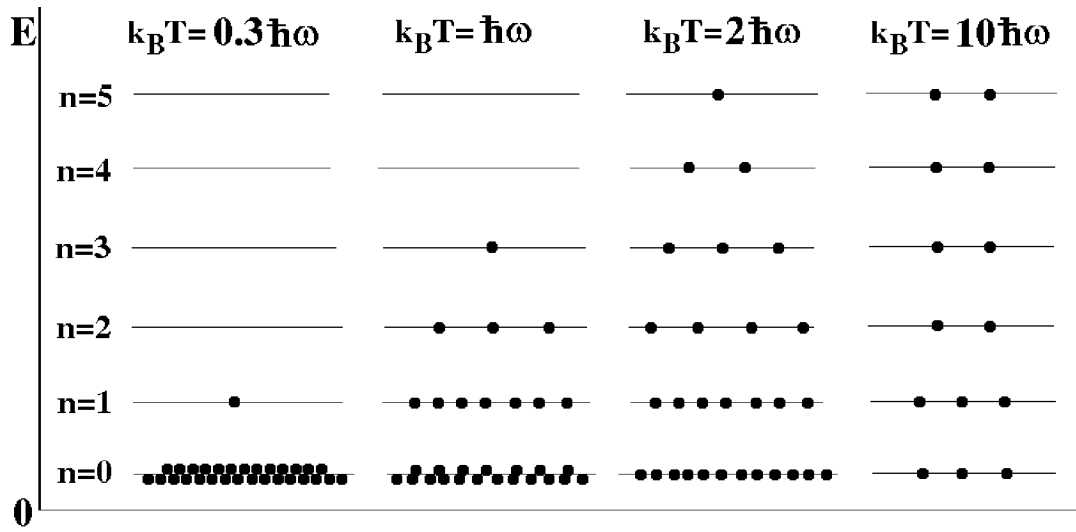


Рис. 35.9: Примерное распределение $N = 30$ квантовых осцилляторов по энергетическим уровням в зависимости от температуры. Показаны только основной и пять возбужденных уровней энергии. При $T = 0$ все осцилляторы находятся в основном состоянии. При температуре, равной $T = 0.3\hbar\omega/k_B$, наиболее вероятно найти только один осциллятор в первом возбужденном состоянии, а остальные скорее всего по-прежнему будут находиться в основном состоянии. По мере роста температуры становятся доступными все более высокие энергии, и распределение осцилляторов по уровням становится все более равномерным.

и лишь $P_0 \rightarrow 1$. Иными словами, при нулевой температуре нет тепловых возбуждений и осциллятор находится в *основном* состоянии с наименьшей энергией $E_0 = \hbar\omega/2$. Распределение осцилляторов по энергиям в зависимости от температуры системы показано на рис. 35.9. Для наглядности мы взяли систему из небольшого ($N = 30$) числа осцилляторов (строгое говоря, статистические законы применимы к системам с гораздо большим числом частиц).

Встает вопрос: каково *среднее* значение $\langle n \rangle$ главного квантового числа при конечной температуре? Для ответа мы должны подсчитать сумму:

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = \left(1 - e^{-\hbar\omega/k_B T}\right) \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-n\hbar\omega/k_B T}. \quad (35.72)$$

Чтобы сделать это, продифференцируем по q формулу (35.69) для геометрической прогрессии:

$$\frac{\partial}{\partial q} \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} n q^{n-1},$$

$$\frac{\partial}{\partial q} \frac{1}{1-q} = \frac{1}{(1-q)^2},$$

откуда получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}. \quad (35.73)$$

Используя (35.73) при $q = \exp(-\hbar\omega/k_B T)$, получаем из (35.72) выражение для искомого среднего:

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1}. \quad (35.74)$$

Теперь легко получить среднюю энергию осциллятора

$$\langle E \rangle = \hbar\omega \left(\langle n \rangle + \frac{1}{2} \right) = \frac{\hbar\omega}{2} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2k_B T}, \quad (35.75)$$

где функция *гиперболический котангенс* определена соотношениями

$$\operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}. \quad (35.76)$$

На рис. 35.10 изображена средняя энергия квантового осциллятора, измеренная в единицах $\hbar\omega$, в зависимости от “безразмерной температуры” $\theta = k_B T / \hbar\omega$ (сплошная линия). Пунктирная линия $\langle E \rangle = k_B T$ соответствует результату классической физики. Действительно, энергия $k_B T / 2$, приходящаяся на одну степень свободы, является средним значением как кинетической, так и потенциальной энергий классического осциллятора, так что среднее значение полной энергии как раз равно $k_B T$. Видно, что квантовые поправки важны при низких температурах: при $\theta < 0.3$ средняя энергия осциллятора близка к энергии основного состояния $\hbar\omega/2$. В таком случае говорят, что колебательные степени свободы “заморожены”, т.е. тепловой энергии недостаточно для возбуждения колебаний. Но уже при $\theta \simeq 2$ обе энергии практически совпадают, т.е. квантовые поправки малы. Значение $\theta = 1$ можно принять за условную границу между квантовой и классическими областями. Ее смысл прозрачен: при $k_B T = \hbar\omega$ тепловая энергия равна минимальной энергии возбуждения осциллятора, т.е. разности между энергией $E_1 = 3\hbar\omega/2$ первого возбужденного состояния и энергией $E_0 = \hbar\omega/2$ основного состояния осциллятора.

Какие же температуры можно считать низкими для осциллятора, моделирующего реальную систему, например молекулу водорода H_2 ? Характерные частоты молекулярных колебаний располагаются обычно в

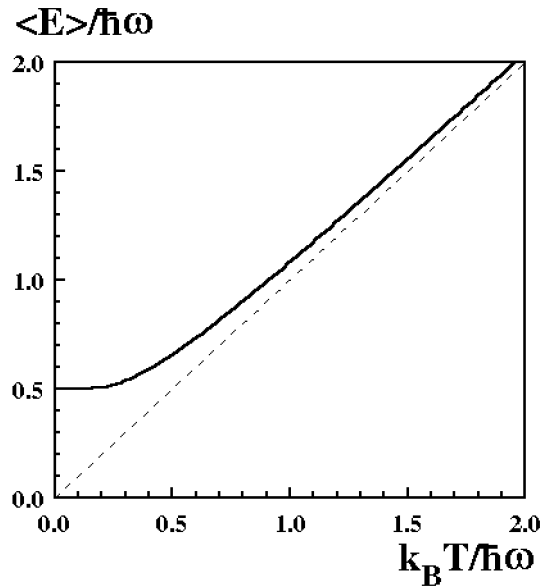


Рис. 35.10: Средняя энергия квантового осциллятора в зависимости от температуры.

инфракрасной области и имеют порядок $\nu \approx 10^{14}$ Гц. Этому соответствуют энергия $\hbar\omega = h\nu \approx 6 \cdot 10^{-20}$ Дж и температура $T_{\text{кол}} \sim \hbar\omega/k_B \approx 4000$ К.

Средняя энергия квантового ротатора

Таким образом, привычные для нас комнатные температуры оказываются достаточно низкими с точки зрения возбуждения колебаний молекул. Посмотрим, что происходит с молекулами при температурах $T < T_{\text{кол}}$. Так как колебания отсутствуют, двухатомную молекулу можно представить в виде “гантели” — двух атомов, жестко соединенных между собой. Такая система называется *ротатором*. Она имеет пять степеней свободы — три поступательных (движение центра масс) и две вращательных. Энергия вращательного движения классического ротатора имеет вид (35.64). Учитывая связь $I\omega = L$ между угловой частотой вращения ω , моментом инерции I и моментом количества движения L , записываем классическую энергию вращения молекулы как $E_{\text{вр}} = L^2/2I$. В квантовой механике квадрат момента количества движения квантуется: $L^2 = \hbar^2 \ell(\ell + 1)$, где $\ell = 0, 1, 2, \dots$ — *азимутальное квантовое число*. Поэтому квантуется и энергия вращательного движения молекулы:

$$E_\ell = \frac{\hbar^2}{2I} \ell(\ell + 1). \quad (35.77)$$

Используя (35.77) и распределение Больцмана, можно получить выражение для средней энергии квантового ротатора. Однако в этом случае формулы достаточно сложны, и мы ограничимся качественными результатами. При высоких температурах средняя энергия стремится к классическому значению $k_B T$, соответствующему двум степеням свободы (вращение вокруг двух ортогональных осей). При низких температурах ротатор будет находиться в основном состоянии, соответствующем значению $\ell = 0$ (отсутствие вращения). “Переход” между двумя этими предельными случаями осуществляется, очевидно, при такой температуре $T_{\text{вр}}$, когда тепловое движение способно возбудить вращательное движение. Минимальная (отличная от нуля) энергия вращения равна $E_1 = \hbar^2/I$, как это следует из (35.77) при $\ell = 1$. Поэтому $T_{\text{вр}} \sim E_1/k_B = \hbar^2/Ik_B$. Для момента инерции молекулы можно принять оценку $I \sim 2m_p a_B^2$, где $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг (масса протона), а $a_B = 5 \cdot 10^{-11}$ м (т.н. радиус Бора, задающий размер атома водорода). Получаем тогда $I \sim 8.4 \cdot 10^{-48}$ кг·м², $E_1 \sim 1.3 \cdot 10^{-21}$ Дж и $T_{\text{вр}} \sim 100$ К.

Полученные оценки подтверждаются измерениями молярной теплоемкости при постоянном объеме $c_{m,V}$, которые мы уже обсуждали в предыдущей главе. При температурах ниже 100 К в тепловом движении участвуют только поступательные степени свободы молекулы. Средняя энергия молекулы равна $3k_B T/2$, а энергия одного моля — $3N_A k_B T/2 = 3RT/2$, откуда следует выражение для теплоемкости $c_{m,V} = 3R/2$. В диапазоне температур 100 ÷ 200 К молярная теплоемкость увеличивается до значения $c_{m,V} = 5R/2$, что свидетельствует о “размораживании” двух дополнительных (вращательных) степеней свободы (т.е. о добавлении энергии $k_B T$ на молекулу). В районе температур 4000 ÷ 5000 К молярная теплоемкость снова увеличивается, на этот раз до значения $c_{m,V} = 7R/2$. Это “разморозилась” колебательная степень свободы, что принесло дополнительную энергию $k_B T$ на молекулу.

Скорость химических реакций

У химиков есть эмпирическое правило, что при повышении температуры на 10°C скорость реакции удваивается. Это — всего лишь грубое обобщение, из него есть множество исключений, но все же в целом оно более или менее верно. Объяснение можно дать на основе того же распределения Максвелла-Больцмана.

Для протекания многих химических реакций необходимо, чтобы энер-

гия участвующих в них частиц превышала некое пороговое значение, которое мы обозначим E_0 . Чем больше таких частиц, тем выше скорость реакции. Из формул (35.28), (35.29) следует распределение частиц по энергиям. В них надо лишь выразить скорость частицы v через ее кинетическую энергию E ($v = \sqrt{2E/m_0}$) и учесть, что $dv = dE/\sqrt{2m_0E}$. В результате находим:

$$\frac{dN}{N} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{E}{k_B T}} e^{-E/k_B T} \frac{dE}{k_B T}. \quad (35.78)$$

Отсюда находим число частиц с энергией $E \geq E_0$:

$$\begin{aligned} N(E \geq E_0) &= N \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{E_0}^{\infty} \sqrt{\frac{E}{k_B T}} e^{-E/k_B T} \frac{dE}{k_B T} = \\ &= N \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{E_0/k_B T}^{\infty} dx \sqrt{x} e^{-x}, \end{aligned} \quad (35.79)$$

где мы сделали замену переменных интегрирования $E = x k_B T$.

Для численных оценок мы примем пороговую энергию равной энергии возбуждения колебаний молекулы: $E_0 \sim 6 \cdot 10^{-20}$ Дж. Тогда для комнатной температуры $T_1 = 300$ К получаем величину $E_0/k_B T_1 \sim 14.5$, а для температуры $T_2 = 310$ К это отношение равно $E_0/k_B T_2 \sim 14.0$. Числа частиц, участвующих в реакции, определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} N_1(E \geq E_0) &\sim N \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{14.5}^{\infty} dx \sqrt{x} e^{-x} \approx 2.24 \cdot 10^{-6} N, \\ N_2(E \geq E_0) &\sim N \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{14.0}^{\infty} dx \sqrt{x} e^{-x} \approx 3.63 \cdot 10^{-6} N, \\ \frac{N_2(E \geq E_0)}{N_1(E \geq E_0)} &\approx 1.6. \end{aligned} \quad (35.80)$$

Действительно, повышение температуры всего на 10 градусов привело к увеличению на 60% числа частиц, энергия которых превышает пороговое значение.

Контрольные вопросы

1. Представьте себе, что Вы периодически встряхиваете в ладони шесть монет и

бросаете их на стол. Какова вероятность выпадения шести “решек”?

2. Дана группа частиц со следующим распределением по скоростям (N_i — число частиц, имеющих скорость v_i):

N_i	2	4	6	8	2
v_i (см/с)	1	2	3	4	5

Каковы характерные скорости этой системы: 1) среднеквадратичная $v_{\text{кв}}$, 2) средняя арифметическая $\langle v \rangle$ и 3) наиболее вероятная $v_{\text{вер}}$?

- При какой температуре газа число молекул со скоростями в заданном интервале $v_0, v_0 + dv$ будет максимально? Масса молекулы равна m_0 .
- При какой температуре смеси азота и кислорода наиболее вероятные скорости молекул азота и кислорода отличаются друг от друга на $\Delta v = 30$ м/с?
- Покажите, что среднеквадратичная скорость движения молекулы газа определяется выражением $v_{\text{кв}} = \sqrt{3p/\rho}$, где p — давление газа, а ρ — его плотность.
- В открытом космосе плотность вещества приблизительно равна одному атому в 1 см^3 (в основном это атомы водорода), а температура равна приблизительно 3.4 К. Вычислите среднеквадратичную скорость движения этих атомов водорода и их давление. Сравните с нормальным давлением.
- Можно ли определить температуру вакуума?
- При какой температуре газа среднеквадратичная скорость молекул водорода отличается от их наиболее вероятной скорости на $\Delta v = 400$ м/с?
- Космический корабль входит в атмосферу Земли со скоростью около 8 км/с. Молекулы (пусть это будет азот N_2) ударяются о нос космического корабля с такой же скоростью. Какой температуре соответствует такое же значение среднеквадратичной скорости движения молекул?
- Чему равно среднеарифметическое значение проекции скорости $\langle v_x \rangle$ молекул газа, если масса молекулы m_0 , а температура газа T ?
- Чему равно среднеквадратичное значение проекции скорости $\sqrt{\langle v_x^2 \rangle}$ молекул газа, если масса молекулы m_0 , а температура газа T ?
- Пользуясь распределением Максвелла и вычисленными в главе 5 значениями космических скоростей, объясните, почему водород, если он когда-то был в атмосфере Земли, все-таки улетучился?
- Для простоты будем считать, что наша атмосфера состоит из 79% азота и 21% кислорода и имеет постоянную температуру $T = 300$ К. Как изменится ее состав на высоте 10 км (ср. конец раздела 12.4.1).
- Почему атмосфера, подобная земной, не может существовать на Луне? (Указание: ускорение свободного падения на Луне $g_{\text{л}} = 1.6 \text{ м/с}^2$, радиус Луны $R_{\text{л}} = 1740$ км.)

-
15. Используя (35.78), найти наиболее вероятную энергию $E_{\text{вер}}$. Соответствует ли она наиболее вероятной скорости, т.е. выполняется ли равенство $E_{\text{вер}} = m_0 v_{\text{вер}}^2 / 2$?
 16. Используя (35.78), найти среднее значение энергии $\langle E \rangle$. Какой скорости она соответствует?

Глава 36

Явления переноса

В предыдущих главах мы имели дело с равновесными системами. В результате движения молекул, перераспределения энергии между ними в различных частях системы устанавливаются равновесные температура, концентрация частиц. Например, в отсутствии внешних полей концентрация частиц будет одинаковой во всех частях системы, находящейся в равновесии. Во внешнем гравитационном поле концентрация меняется в зависимости от высоты, но имеет строго определенное значение и одинакова в горизонтальном направлении.

В реальных системах, однако, возникают ситуации, когда система не находится в состоянии равновесия. Между частями системы может возникнуть перепад (градиент, если говорить на научном языке) температур, концентрации частиц, массы, импульса. Тогда в системе возникнут потоки соответствующей характеристики в направлении, обратном ее градиенту, так что система будет приближаться к состоянию термодинамического равновесия. Такого рода процессы называются *явлениями переноса*, они ответственны, как мы увидим в этой главе, за теплопроводность тел, вязкость жидкости, диффузию частиц. Здесь мы по-прежнему пользуемся молекулярно-кинетическим подходом. Наша цель --- понять, каким образом блуждающие молекулы переносят ту или иную информацию в другие части системы.

36.1 Столкновения молекул

Говоря об идеальном газе, мы исходили из того, что молекулы не взаимодействуют между собой. На самом деле предполагалось, конечно, отсутствие потенциальной энергии взаимодействия между ними. Упругие столкновения между молекулами и молекул со стенками обязательно

должны происходить хотя бы потому, что иначе будет непонятен механизм, с помощью которого устанавливается равное распределение энергии по степеням свободы, иначе нельзя будет говорить о температуре системы, давлении в ней и т.п. Столкновения молекул происходят случайно. Они приводят к изменению направления и величины скорости частиц, но не меняют распределения молекул по скоростям и координатам в равновесных системах.

Возникает вопрос: а всегда ли молекулы будут сталкиваться друг с другом? Ведь молекулы очень малы, а расстояния между ними в идеальном газе на порядок больше их линейных размеров. Быть может, для сосудов малых размеров они летят без соударений от стенки к стенке? Подсчитаем, сколько раз в единицу времени одна молекула может столкнуться с другими и какое расстояние она пролетает в среднем между столкновениями.

Прежде чем перейти к вычислениям, примем простейшую модель для молекулы. Будем представлять их в виде упругих шариков. При столкновении молекул диаметрами d_1 и d_2 их центры сближаются на расстояние $(d_1 + d_2)/2$ (рис. 36.1). Если представить себе, что молекула 1 налетает на молекулу 2, то столкновение произойдет, если первая молекула попадет в сферу радиуса $R = (d_1 + d_2)/2$, описанную вокруг второй молекулы. Площадь сечения этой сферы $\sigma = \pi R^2 = \pi(d_1 + d_2)^2/4$. Величина R называется *эффективным радиусом взаимодействия* молекул 1 и 2, а σ — *эффективным сечением взаимодействия* этих молекул. При столкновении одинаковых молекул диаметром d имеем $R = d$ и $\sigma = \pi d^2$.

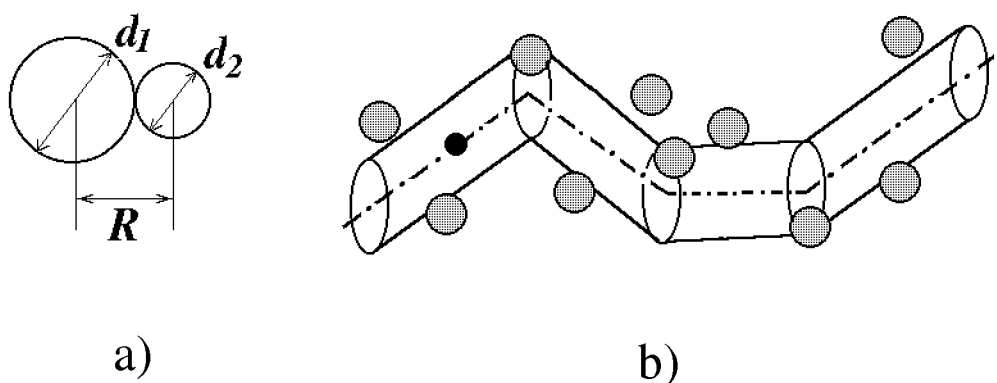


Рис. 36.1: Столкновение двух молекул (а) и траектория движения выделенной молекулы газа (б). Направление движения меняется, когда какая-то из молекул среды окажется от нее в радиусе $R = (d_1 + d_2)/2$.

За время между двумя последовательными столкновениями молекула пролетает некоторый путь l (его называют *длиной свободного пробега*). Разумеется, для каждой отдельной молекулы дело чистой случайности, сколь далеко ей удастся продвинуться без столкновений. Но усредняя l по всем молекулам системы, мы получим физическую величину $\lambda = \bar{l}$, называемую *средней длиной свободного пробега*. Ее статистический смысл (или, если хотите, определение) таков: отношение малого отрезка длины dx к λ дает вероятность столкновения $dW = dx/\lambda$ на пути dx . Пусть $P(x)$ — вероятность пролететь без столкновений расстояние x . Тогда $P(x + dx) \approx P(x) + P'(x)dx$ — вероятность пролететь без столкновений расстояние $x + dx$ (здесь $P'(x)$ — производная функции $P(x)$ по переменной x). Последнее событие складывается из двух независимых событий: 1) частица пролетела без столкновений расстояние x [вероятность чего равна $P(x)$] и 2) также без столкновений преодолела еще и маленький отрезок пути dx (вероятность чего равна $1 - dx/\lambda$). По теореме об умножении вероятностей имеем тогда:

$$P(x) + P'(x)dx = P(x) \left(1 - \frac{dx}{\lambda}\right),$$

откуда следует уравнение для вероятности $P(x)$:

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = -\frac{dx}{\lambda}.$$

Поскольку вероятность преодолеть нулевое расстояние без столкновений равна единице, имеем дополнительно начальное условие $P(0) = 1$. Интегрируя дифференциальное уравнение, находим окончательно

$$P(x) = \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right). \quad (36.1)$$

Как видно, чем больше путь x , тем меньше вероятность преодолеть его без столкновений.

Убедимся теперь, что λ — действительно средняя длина свободного пробега. Вычислим, с какой вероятностью молекула будет иметь длину свободного пробега l . Это значит, что частица пролетела без столкновений расстояние $x = l$ (вероятность чего есть $P(l)$) и столкнулась с другой частицей непосредственно за этим — на малом отрезке длины dl (вероятность чего можно найти как dl/λ). Вероятность dw такого события по теореме умножения вероятностей равна $dw = P(l) dl/\lambda$. Находим тогда

среднюю длину свободного пробега:

$$\bar{l} = \int l dw = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-l/\lambda} l dl = \lambda. \quad (36.2)$$

Не следует думать, конечно, что вероятность преодолеть расстояние λ равна нулю: часть молекул может пролететь очень большие расстояния, но лишь крайне небольшая их часть. При $x = \lambda$, как следует из (36.1), вероятность равна $P(\lambda) = 1/e \approx 0.368$, то есть 36.8% частиц испытают столкновения на этом пути. При длине пути $x = 2\lambda$ получаем $P(2\lambda) = 1/e^2 \approx 0.135$, т.е. столкновения суждены уже 86.5% частиц, при $x = 3\lambda$ в столкновениях участвует уже 95% частиц ($P(3\lambda) = 1/e^3 \approx 0.0498$).

Чтобы определить среднее число столкновений ν одной молекулы с другими в единицу времени, сделаем следующие допущения:

- Все молекулы одинаковы, то есть мы не рассматриваем смеси газов.
- Все молекулы, за исключением той, за которой мы наблюдаем, неподвижны. В дальнейшем мы покажем, как избавиться от этого заведомо неверного предположения.
- При столкновениях скорость $v_{от}$ молекулы не меняется. Это предположение, в сущности, того же уровня, что и предыдущее: при упругом столкновении с препятствием, которое остается неподвижным, модуль скорости действительно не меняется. Смысл индекса “от” станет ясным в дальнейшем.

Путь нашей молекулы диаметром d остается прямолинейным до тех пор, пока ей не встретится неподвижная молекула, чей центр окажется от линии движения на расстоянии, меньшем $R = d$. После этого молекула сменит направление движения и будет двигаться прямолинейно до нового соударения. За интервал времени Δt молекула пройдет (ломаный) путь $v_{от}\Delta t$ и столкнется со всеми молекулами, попавшими в (ломаный) цилиндр радиусом d и площадью основания $\sigma = \pi d^2$ (см. рис. 36.1). Объем этого цилиндра равен $\pi d^2 v_{от} \Delta t$. Если n — концентрация молекул в системе (их число в единице объема), то легко найти количество неподвижных молекул в цилиндре, то есть число столкновений ΔN :

$$\Delta N = n \pi d^2 v_{от} \Delta t.$$

Отсюда следует частота столкновений (т.е. число столкновений в единицу времени):

$$\nu = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \pi d^2 v_{\text{от}} n = \sigma v_{\text{от}} n. \quad (36.3)$$

Избавимся теперь от последствий нашего предположения о неподвижности молекул. Пусть мы следим за молекулой 1 со скоростью \vec{v}_1 , и она сталкивается с молекулой 2, имеющей скорость \vec{v}_2 . В системе отсчета, связанной со второй молекулой, она неподвижна, зато первая молекула имеет скорость $\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$. Ясно теперь, что именно среднее значение *относительной* скорости молекул играет роль скорости $v_{\text{от}}$, использованной нами при выводе соотношения (36.3) для частоты столкновений. Имеем тогда:

$$v_{\text{от}}^2 = \langle \vec{v}_{12}^2 \rangle = \langle \vec{v}_1^2 + \vec{v}_2^2 - 2v_1v_2 \cos \theta_{12} \rangle, \quad (36.4)$$

где θ_{12} — угол между направлениями движения молекул. Из-за хаотичности движения этот угол равновероятно принимает любые значения, так что среднее значение его косинуса равно нулю. А усреднение квадратов скоростей приводит к появлению среднеквадратичной скорости молекул $v_{\text{кв}} = \sqrt{\langle \vec{v}_1^2 \rangle} = \sqrt{\langle \vec{v}_2^2 \rangle}$, уже знакомой нам по предыдущей главе. Получаем в итоге, что $v_{\text{от}} = \sqrt{2}v_{\text{кв}}$, и формула (36.3) записывается в окончательном виде:

$$\nu = \sqrt{2}\pi d^2 v_{\text{кв}} n = \sqrt{2}\sigma v_{\text{кв}} n. \quad (36.5)$$

Заметим, что перейдя от скорости молекулы к ее среднеквадратичной скорости, мы на самом деле избавились и от третьего предположения, поскольку $v_{\text{кв}}$ постоянна при заданной температуре.

Зная частоту столкновений, можно найти среднюю длину свободного пробега. Действительно, время между двумя последовательными соударениями $\tau = 1/\nu$, и за это время частица проходит путь $\lambda = v_{\text{кв}}\tau$. Таким образом,

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n}. \quad (36.6)$$

Поскольку при постоянной температуре концентрация частиц пропорциональна давлению, то с ростом давления длина свободного пробега уменьшается. Это и понятно, так как уменьшается среднее расстояние между частицами. На самом деле молекула не является твердым шариком. Поэтому ее диаметр d — величина не совсем постоянная: он уменьшается

при увеличении температуры, хотя и незначительно. Поэтому средняя длина свободного пробега слегка растет с повышением температуры.

Следует отметить, что среднее расстояние между частицами далеко не совпадает со средней длиной свободного пробега. Ранее мы оценили диаметр молекулы водяного пара $d = 3 \cdot 10^{-10}$ м и среднее расстояние между молекулами при нормальных условиях $L = 3 \cdot 10^{-9}$ м. Отсюда находим концентрацию молекул $n = 1/L^3 \approx 4 \cdot 10^{25}$ м⁻³. Подставляя найденное n в выражение для длины свободного пробега, находим $\lambda \approx 6 \cdot 10^{-8}$ м. Мы видим, что длина свободного пробега в 200 раз больше диаметра молекулы и в 20 раз — больше среднего расстояния между молекулами. Для полноты картины оценим также частоту столкновений. Кинетическая энергия поступательного движения молекулы $W = 3k_B T/2 \approx 6 \cdot 10^{-21}$ Дж. Зная массу молекулы воды $m = 18 \cdot 10^{-3}$ (кг/моль)/ $N_A \approx 3 \cdot 10^{-26}$ кг, получаем оценку среднеквадратичной скорости $v_{\text{кв}} = \sqrt{2W/m} \approx 630$ м/с. Наконец, определяем $\nu = v_{\text{кв}}/\lambda \approx 10^{10}$ с⁻¹. Иначе говоря, молекула испытывает 10 млрд соударений в секунду! Линейный размер сосуда, содержащего один литр газа, равен $l = 10$ см = 0.1 м. При скорости 630 м/с молекула могла бы пролететь путь от стенки до стенки за время $t = l/v_{\text{кв}} = 0.1/630 \approx 1.6 \cdot 10^{-4}$ с и за это время она испытает $N = l\lambda = 0.1/6 \cdot 10^{-8} = 1.7 \cdot 10^6$ столкновений с другими молекулами.

У нас осталось без обсуждения первое предположение об одинаковости всех молекул. Оно было нужно не по принципиальным соображениям, а для упрощения вывода и окончательных выражений. Если это не так, если мы рассматриваем смесь газов, то компоненты имеют разные плотности числа частиц, различные среднеквадратичные скорости, а их молекулы — разные массы. Как следствие, изменится формула для средней длины свободного пробега, причем результаты будут отличаться для различных сортов молекул.

Задача 36.45. Как изменится формула (36.6) для средней длины свободного пробега молекул, если они представляют собой плоские диски,двигающиеся в материале тонкой пленки, будучи не в состоянии из нее вылететь?

Решение. Как и прежде, для столкновения молекул диаметрами d_1 и d_2 они должны сблизиться на расстояние $R = (d_1 + d_2)/2$. Поэтому при движении молекулы по плоскости пленки она заденет все другие молекулы, которые попадут в ломаный прямоугольник (в отличие от цилиндра в

трехмерном случае) шириной $2R$ и длиной $v_{\text{от}}\Delta t$. Площадь этого прямоугольника $S = (d_1 + d_2)v_{\text{от}}\Delta t$. При поверхностной концентрации n молекул (в этом случае n — их число на единицу площади) произойдет $\Delta N = Sn$ столкновений. Отсюда для частоты столкновений находим

$$\nu = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \sqrt{2}(d_1 + d_2)v_{\text{кв}}n, \quad (36.7)$$

где мы учли, что, как и прежде, относительная скорость $v_{\text{от}} = \sqrt{2}v_{\text{кв}}$. Отсюда длина свободного пробега $\lambda = v_{\text{кв}}/\nu$ для плоских молекул получается равной

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}(d_1 + d_2)n}. \quad (36.8)$$

При одинаковых молекулах ($d_1 = d_2 = d$)

$$\lambda = \frac{1}{2\sqrt{2}dn}. \quad (36.9)$$

■

Свидание в лесу, ежик в тумане и атомная бомба

Идея длины свободного пробега может быть использована для оценки видимости в лесу, в тумане или даже для грубой оценки критической массы урана в атомной бомбе. Можно было бы просто использовать уравнение (36.8), но нам представляется поучительным провести несколько иные рассуждения.

Представьте себе, что у Вас назначено свидание в лесу. С какого максимального расстояния R Вы заметите своего партнера (а партнер — Вас)? Положим, Вы включаете фонарик, чтобы подать ему/ей сигнал. Если не учитывать рассеяние света, то все деревья отбрасывают тени, линейный размер которых можно считать примерно равным диаметру d деревьев. На рис. 36.2 Ваше положение отмечено крестиком, вокруг проведена окружность радиусом R , деревья показаны кружками, а их тени на окружности отмечены черным. Определим, какую часть окружности покрывают тени. Пусть n — плотность посадки деревьев (их число на единицу площади). Если l — среднее расстояние между деревьями, то $n \approx 1/l^2$. Внутри окружности попадает $\pi R^2 n$ деревьев. Полная длина тени на окружности равна поэтому $\pi R^2 n d$. Мы видим, что полная длина тени растет как квадрат радиуса и при каком-то значении R превысит

длину окружности $2\pi R$. Но если вся окружность покрыта тенями, то свет дальше не пройдет. Это значение R и будет максимальным расстоянием видимости в лесу. Теперь понятно, что оно определяется из равенства $\pi R^2 n d = 2\pi R$, то есть мы получили оценку

$$R \approx \frac{2}{nd} = \frac{2l^2}{d}. \quad (36.10)$$

Для численного примера можно взять значения, исходя из своего жизненного опыта. Скажем, свидание назначено среди березок со средним диаметром ствола $d = 0.25$ м и средним расстоянием между деревьями $l = 10$ м. Тогда находим $R \approx 800$ м.

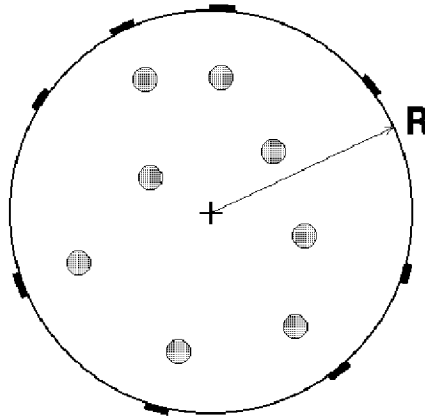


Рис. 36.2: К задаче об оценке видимости в лесу.

Установим теперь связь полученного результата с формулой (36.8) для средней длины свободного пробега. У нас одна молекула (световой луч) не имеет размера ($d_1 = 0$), размер прочих молекул равен среднему диаметру ствола ($d_2 = d$) и, наконец, молекулы (стволы) — покоятся, т.е. надо отбросить множитель $\sqrt{2}$. Получаем в результате из (36.8) в применении к нашей задаче выражение

$$\lambda = \frac{1}{dn}.$$

Таким образом, найденный нами радиус видимости $R \approx 2\lambda$. Вероятность свету преодолеть это расстояние без “столкновений” с деревьями равна $P(R) = \exp(-R/\lambda) = e^{-2} = 0.135$. Иными словами, с вероятностью 86.5% свет будет задержан деревьями.

Свидание в лесу происходило на плоскости. Сейчас мы вернемся в объемный мир. Тот же рисунок изображает теперь сферу радиусом R и

препятствия в виде шариков диаметром d . Например, мы хотим оценить видимость для ежика, заблудившегося в тумане, и роль деревьев теперь исполняют водяные капли. Если концентрация капель равна n (их число в единице объема), то внутри сферы находится $(4\pi/3) R^3 n$ капель. Их тени на сфере представляют собой окружности площадью $\pi d^2/4$. При максимальном расстоянии видимости тени покрывают всю сферу:

$$\frac{4\pi}{3} R^3 n \frac{\pi d^2}{4} = 4\pi R^2.$$

Отсюда находим расстояние видимости в тумане:

$$R \approx \frac{12}{\pi n d^2}. \quad (36.11)$$

Снова сравним этот результат с формулой (36.6) для длины свободного пробега молекулы в газовой среде, где надо отбросить фактор $\sqrt{2}$ и взять $\sigma = \pi(d_1 + d_2)^2/4 = \pi(0 + d)^2/4 = \pi d^2/4$:

$$\lambda = \frac{4}{\pi d^2 n}, \quad R = 3\lambda. \quad (36.12)$$

Вероятность преодолеть путь $R = 3\lambda$ без столкновений равна $P(R) = \exp(-R/\lambda) = e^{-3} = 0.05$. Стало быть, с вероятностью 95% столкновение на этом пути произойдет.

Получим численную оценку. Наши рассуждения годятся, если размер капель заметно (скажем, на порядок-два) превышает длину световой волны. Так как видимый диапазон имеет длины волн $0.4 \div 0.7$ мкм, то для диаметра капель примем оценку $d \approx 10^{-4}$ м. Для концентрации капель возьмем значение $n \approx 3 \cdot 10^7 \text{ м}^{-3}$ (о происхождении этого числа см. чуть ниже). Тогда видимость в тумане $R \approx 12/(\pi \times 3 \cdot 10^7 \times 10^{-8}) \approx 13$ м.

Концентрацию капель мы оценили следующим образом. Давление насыщенного водяного пара при, скажем, 20° C ($T = 293 \text{ K}$) равно $p_n \approx 2.3 \cdot 10^3 \text{ Па}$. Применяя уравнение Клапейрона-Менделеева, находим плотность водяного пара при 100% влажности:

$$\frac{m}{V} = \frac{p_n \mu_{H_2O}}{RT} \approx \frac{2.3 \cdot 10^3 \times 18 \cdot 10^{-3}}{8.31 \times 293} \approx 0.017 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

При резком понижении температуры весь пар конденсируется в капли указанного размера — образуется густой туман. Масса одной капли равна

$$m_{\text{кап}} = \rho_{H_2O} \frac{4\pi}{3} \left(\frac{d}{2}\right)^3 \approx 520 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \times d^3.$$

Количество образовавшихся капель в объеме V находим как отношение массы пара m к массе капли $m_{\text{кап}}$. Тогда концентрация капель определится из соотношения:

$$n = \frac{m}{m_{\text{кап}} V} \approx \frac{0.017}{520 d^3} \approx \frac{3.3 \cdot 10^{-5}}{d^3}.$$

При $d = 10^{-4}$ м получаем использованное выше значение $n \approx 3 \cdot 10^7 \text{ м}^{-3}$.

Зависимость расстояния видимости в тумане от размера капель дается, таким образом, соотношением:

$$R = \frac{12}{\pi n d^2} \approx \frac{12 d^3}{\pi \times 3.3 \cdot 10^{-5} \times d^2} \approx 1.2 \cdot 10^5 d.$$

При предельно малых капельках с диаметром порядка десяти длин световой волны $d \sim 10^{-5}$ м видимость сокращается до одного метра. Что называется, “не видно дальше своего носа”. При еще меньших размерах капель наша модель становится неверной, так как свет уже нельзя рассматривать как совокупность частиц с ничтожно малым размером. Начинают играть роль эффекты дифракции, и выражение для эффективного сечения взаимодействия света с каплями уже не будет определяться чисто геометрическим сечением капель.

Решенная задача имеет также отношение к вопросу о критической массе урана-235, применяемого для изготовления атомных бомб. Вместо света в этой задаче мы имеем нейтроны, а вместо капель — ядра ^{235}U . При столкновении с ядрами нейтроны расщепляют их на осколки, и при этом вылетает еще 3-4 нейтрона. При критическом радиусе $R_{\text{крит}}$ количество нейтронов не будет уменьшаться и возникнет самоподдерживающаяся цепная реакция — произойдет атомный взрыв. За основу определения критического радиуса можно взять радиус видимости $R = 12/\pi n d^2$, уменьшенный на коэффициент размножения нейтронов $k = 3.5$. Поскольку $12/3.5\pi \approx 1$, получаем:

$$R_{\text{крит}} \approx \frac{1}{n d^2}.$$

Радиус ядра $r_{\text{я}} \sim 1.4 \cdot 10^{-15} \times 235^{1/3} \approx 8.6 \cdot 10^{-15}$ м, где $r_0 = 1.4 \cdot 10^{-15}$ м — радиус ядра с массовым числом $A = 1$, т.е. протона (нейтрона). Поэтому эффективный диаметр взаимодействия равен $d = 2(r_{\text{я}} + r_0) \approx 2 \cdot 10^{-14}$ м.

В справочнике (например, Советском энциклопедическом словаре) находим плотность урана: $\rho_U = 19 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. Массу ядра урана-235 определяем по массе протона: $m_U = 235 m_p \approx 235 \times 1.66 \cdot 10^{-27} \approx 3.9 \cdot 10^{-25} \text{ кг/м}^3$.

Отсюда находим концентрацию ядер $n = \rho_U / m_U \approx 5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$. Теперь мы можем вычислить критический радиус:

$$R_{\text{крит}} \approx \frac{1}{5 \cdot 10^{28} (2 \cdot 10^{-14})^2} = 0.05 \text{ м.}$$

Критический объем $V_{\text{крит}} \approx (4\pi/3) R_{\text{крит}}^3 \approx 5.2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$, а критическая масса $M_{\text{крит}} = \rho_U V_{\text{крит}} \approx 10 \text{ кг}$.

Отметим, что мы не выдаем никаких секретов производства ядерного оружия: слишком грубы наши оценки. Единственная наша цель — продемонстрировать еще раз единство законов физики, действующих в самых разнообразных системах.

36.2 Законы процессов переноса

Если газ выведен из состояния равновесия, то в нем возникают процессы, стремящиеся вернуть систему в равновесное состояние. Например, разные части системы имеют разные температуры или концентрации частиц. Соответственно, температуры или концентрации стремятся выравниваться, что сопровождается передачей тех или иных физических величин от одной части системы к другой. Такие процессы называются *явлениями переноса*. Эти явления имеют много общего и классифицируются по тому, какая именно физическая характеристика “переносится” из одного места в другое.

Диффузия. Пусть в системе имеются молекулы, концентрация которых $n(z)$ зависит от координаты z . Мысленно поместим в точке с координатой z квадратик площадью S , ортогональный оси z . В системе происходит процесс выравнивания концентрации n частиц, сопровождающийся их переносом в направлении убывания n . Эксперимент показал, что через площадь S за единицу времени проходит количество частиц

$$\Phi = -D \frac{\partial n}{\partial z} S, \quad (36.13)$$

где D определяется свойствами системы и называется *коэффициентом диффузии*. Величина Φ (поток частиц — число частиц в единицу времени) имеет размерность $[\Phi] = \text{с}^{-1}$, размерность концентрации частиц $[n] = \text{м}^{-3}$, и поэтому размерность коэффициента диффузии $[D] = \text{м}^2/\text{с}$. Отрицательный знак в законе диффузии как раз и означает, что поток

частиц направлен от больших значений концентрации к меньшим. Действительно, пусть $n(z)$ — убывающая функция, то есть концентрация частиц падает с ростом z . Тогда производная $n(z)$ отрицательна, а поток Φ получается положительным, т.е. направлен в сторону увеличения z .

Если обе части уравнения (36.13) умножить на массу m диффундирующих молекул, то для потока массы $M = m\Phi$ получим аналогичное уравнение:

$$M = -D \frac{\partial \rho}{\partial z} S,$$

где $\rho = mn$ — масса диффундирующего вещества в единице объема, т.е. его плотность. Связь (36.13) потока частиц с градиентом $\partial n / \partial z$ концентрации называется *первым законом Фика*.

Первый закон Фика ничего не говорит о величине коэффициента диффузии, который должен в каждом конкретном случае определяться экспериментально. Поэтому этот закон носит эмпирический характер. Он применим не только для газов, но и для твердых и жидких тел. Следует отметить также, что перенос вещества в газах и жидкостях может осуществляться и механическим путем за счет конвекционных потоков (скажем, за счет ветра в атмосфере или течения в океане). Важно не путать диффузию, которая происходит из-за молекулярного движения, с конвекцией, возникающей вследствие воздействия внешних сил.

Заметим, что если система является смесью, то первый закон Фика записывается точно в такой же форме для каждого из компонентов в отдельности, но коэффициенты диффузии, вообще говоря, различаются. Это значит, что в смеси, скажем, двух газов может случиться так, что концентрация частиц одного из компонентов уже выравнялась, а второго — еще нет.

Второй закон Фика позволяет найти зависимость концентрации диффундирующих частиц от времени. Для его вывода рассмотрим два параллельных друг другу одинаковых квадрата, расположенных в близких точках с координатами z и $z + dz$. Для определенности будем считать, что $n(z)$ — убывающая функция (рис. 36.3). Тогда через левую площадку за время dt входит $\Phi(z) dt$ частиц, а через правую выходит $\Phi(z + dz) dt$ частиц.

Увеличение числа частиц dN в пространстве между площадками равно разности числа входящих и выходящих частиц:

$$dN = [\Phi(z) - \Phi(z + dz)] dt = -\Phi'(z) dz dt.$$

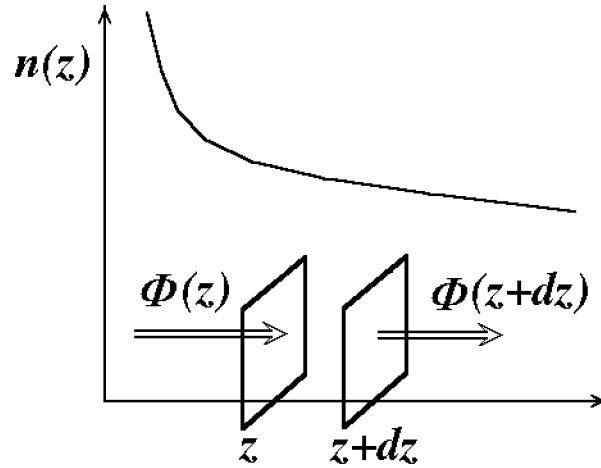


Рис. 36.3: К выводу второго закона Фика.

Здесь штрихом обозначена производная потока частиц по z . Разделив dN на объем $S dz$ зазора между квадратиками, получаем изменение концентрации частиц за время dt :

$$dn = -\frac{\partial \Phi(z)}{\partial z} \frac{dt}{S}. \quad (36.14)$$

Используя первый закон Фика, находим отсюда

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial n}{\partial z} \right).$$

Обычно коэффициент диффузии не зависит от координаты, и мы получаем уравнение, выражающее *второй закон Фика*:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial z^2}. \quad (36.15)$$

Если ввести *плотность* потока частиц $j = \Phi/S$ (число частиц, пересекающих единичную площадь в единицу времени), то уравнение (36.14) можно записать в иной форме:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial z} = 0. \quad (36.16)$$

Это уравнение — один из примеров т.н. *уравнения непрерывности*, встречающегося во многих областях физики и выражающего закон сохранения числа частиц. Его смысл: скорость изменения числа частиц в объеме равна разности потоков входящих и выходящих частиц (при условии, что внутри объема не происходит образование или исчезновение частиц).

Вязкость. Рассмотрим следующий мысленный опыт. Пусть на поверхности жидкости плавает пластина, которую медленно тянут направо с силой F (рис. 36.4). Опыт показывает, что при установившемся движении пластина перемещается с постоянной скоростью u_0 . Пусть расстояние до неподвижного дна равно d , а площадь пластины равна S . Что мы можем сказать о течении жидкости?

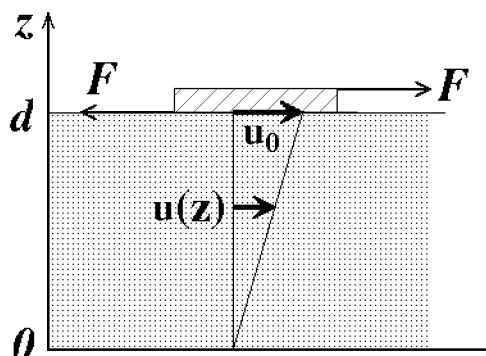


Рис. 36.4: К выводу силы внутреннего трения.

Ясно, что кроме силы F на пластину должно действовать что-то еще: иначе она двигалась бы равноускоренно. Это “что-то еще” может действовать только со стороны жидкости. Другими словами, на пластину со стороны жидкости действует сила, подобная силе трения. Она направлена налево и по величине равна действующей силе F . Каково происхождение этой силы? Прилегающий к пластине слой жидкости “прилипает” к ней и движется с той же скоростью u_0 . Аналогично, слой жидкости, прилегающий ко дну, имеет нулевую скорость. Следовательно, в системе устанавливается некоторое распределение скоростей $u(z)$, где z — расстояние от дна. В конечном итоге неподвижное дно через жидкость действует на пластину, порождая *силу внутреннего трения*, направленную против течения. В соответствии со сказанным, заведомо должны выполняться граничные условия $u(0) = 0$, $u(d) = u_0$. Сила трения возникает как раз вследствие этого распределения скоростей: вышележащий слой “трется” об нижележащий и тормозится им (соответственно, более быстрый слой стремится ускорить более медленный).

Опыт показывает, что сила F связана со скоростью u_0 соотношением:

$$F = \eta u_0 \frac{S}{d}. \quad (36.17)$$

Коэффициент η , имеющий размерность $[\eta] = \text{Н} \cdot \text{с} / \text{м}^2 = \text{Па} \cdot \text{с}$, называется

коэффициентом динамической вязкости.

Чтобы найти распределение скоростей в этой системе, представим себе наблюдателя, находящегося на расстоянии z ото дна и движущегося вместе с жидкостью со скоростью $u(z)$. С точки зрения этого наблюдателя, его слой покоится, а пластина движется со скоростью $u_0 - u(z)$. Зависимость той же силы F от скорости должна теперь описываться аналогичной формулой с заменой $u_0 \rightarrow u_0 - u(z)$ и $d \rightarrow d - z$:

$$F = \eta (u_0 - u(z)) \frac{S}{d - z}. \quad (36.18)$$

Приравняв выражения (36.17) и (36.18), находим скорость слоя как функцию расстояния ото дна:

$$u(z) = u_0 \frac{z}{d}. \quad (36.19)$$

Мы получили линейный закон распределения скоростей, удовлетворяющий нашим граничным условиям $u(0) = 0$, $u(d) = u_0$.

Такое распределение скоростей связано с простотой рассмотренной системы. В других случаях течение имеет более сложный характер, но и тогда мы можем воспользоваться найденной закономерностью. Действительно, рассмотрим жидкость, в которой существует градиент скоростей по координате z . Относительная скорость слоев с координатами z и $z + dz$ равна $u(z + dz) - u(z) \approx u'(z) dz$. Поскольку мы рассматриваем сколь угодно малые расстояния dz , то для малых площадей S течение можно считать плоским и описываемым прежними формулами. Тогда сила внутреннего трения между соседними слоями будет определяться уравнением (36.17), где вместо u_0 стоит относительная скорость слоев $u'(z) dz$, а вместо d — расстояние между слоями dz :

$$F(z) = \eta \frac{du}{dz} S. \quad (36.20)$$

Такое выражение действительно соответствует опытам по определению силы внутреннего трения между слоями жидкости или газа при ламинарном течении.

Теплопроводность. Предположим теперь, что есть два источника тепла различной температуры T_1 и T_2 . Представим их себе как широкие пластины, расположенные перпендикулярно оси z в точках с координатами $z = 0$ и $z = d$. Газ, заполняющий зазор между пластинами, передает тепловую энергию от горячего тела к более холодному. При этом в

газе устанавливается некоторое распределение температур $T(z)$, так что $T(0) = T_1$ и $T(d) = T_2$ (рис. 36.5).

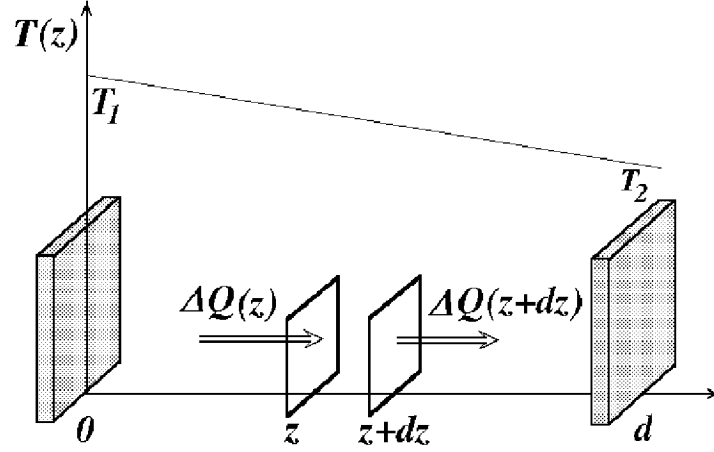


Рис. 36.5: Распределение температуры между источниками 1 и 2.

Поместим между источниками квадратик площадью S , также ортогональный пластинам. Опыт показывает, что за время Δt через площадь S протекает количество теплоты (δQ), причем

$$\delta Q = -\kappa \frac{\partial T}{\partial z} S \Delta t. \quad (36.21)$$

Постоянная κ называется *коэффициентом теплопроводности* и имеет размерность $[\kappa] = \text{Дж}/(\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{K})$. Отрицательный знак указывает, что поток тепла направлен в сторону понижения температуры. При указанных условиях в равновесном состоянии в газе установится линейный закон изменения температуры. Действительно, через квадратик единичной площади, расположенный в точке z , в единицу времени втекает количество теплоты $\delta Q|_z = -\kappa T'(z)$. Через такой же квадратик в точке $z + dz$ в единицу времени вытекает теплота $\delta Q|_{z+dz} = -\kappa T'(z + dz)$. Если температура между квадратиками не меняется (установилось равновесие), то эти количества теплоты равны между собой, т.е. $T'(z + dz) - T'(z) = T''(z) dz = 0$. Из равенства нулю второй производной следует, что функция линейна: $T(z) = a + bz$. Из граничных условий в концевых точках находим константы интегрирования: $T(z) = T_1 + (z/d)(T_2 - T_1)$. В сущности, мы получили аналог закона распределения скоростей при рассмотрении вязкости жидкости: достаточно заменить $T(z) \rightarrow u(z)$, $T_1 \rightarrow 0$, $T_2 \rightarrow u_0$. Это — следствие стационарности, того факта, что мы рассматривали установившееся течение или распределение температур. То же самое

следует из второго закона Фика: для стационарной системы производная по времени в левой части уравнения (36.15) равна нулю, откуда следует равенство нулю второй производной концентрации частиц по координате z , что эквивалентно линейности функции $n(z)$.

Задача 36.46. Какое количество тепловой энергии уносится в единицу времени через окно площадью $S = 2 \text{ м}^2$ и расстоянием между стеклами $d = 5 \text{ см}$, если в комнате поддерживается температура $t_1 = 20^\circ\text{C}$, а на улице стоит мороз $t_2 = -20^\circ\text{C}$?

Решение. Сразу заметим, что поскольку величина градуса по шкалам Цельсия и Кельвина совпадают, то разность температур $T_1 - T_2 = t_1 - t_2 = 40 \text{ К}$. Коэффициент теплопроводности воздуха $\kappa = 0.034 \text{ Дж}/(\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К})$. Для стекла этот коэффициент в 20 раз больше, так что его наличие можно не учитывать. К тому же толщина стекла много меньше промежутка между стеклами. Поэтому от мороза нас оберегает именно воздушная прослойка между стеклами. В соответствии со сказанным, в этом промежутке устанавливается линейное распределение температуры, так что $T'(z)$ постоянна и равна $T'(z) = (T_1 - T_2)/d$. Поток тепловой энергии в единицу времени равен тогда

$$\frac{\delta Q}{dt} = -\kappa S \frac{T_1 - T_2}{d} = -0.034 \times 2 \times \frac{40}{0.05} = 54.4 \text{ Вт}.$$

Расход тепловой энергии через одно окно за месяц $Q = 54.4 \cdot 24 \cdot 30 = 39.2 \text{ кВт} \cdot \text{час}$.

Решая эту задачу, мы неявно сделали сильное предположение, что температура внутреннего стекла совпадает с температурой в комнате, а наружного — с температурой окружающего воздуха. Из практики каждый знает, что это не так: на самом деле наружная поверхность теплее, а внутренняя — холоднее. В реальности градиент температур в промежутке между рамами может быть раза в два меньше, что соответственно уменьшает поток тепловой энергии наружу. Однако точное решение задачи выходит за рамки данного курса. ■

Нетрудно заметить то общее, что есть у всех обсуждавшихся законов. Всюду входит градиент некоторой величины — концентрации частиц, скорости течения, температуры. Всюду при условии стационарности устанавливается линейное распределение этой величины. Все это потому, что явления переноса имеют общее происхождение — молекулярное движение.

36.3 Кинетическая теория переноса

Изложенные выше законы явлений переноса — первый закон Фика и аналогичные законы для внутреннего трения и теплопроводности — были установлены экспериментально. В этом разделе мы покажем, что они следуют из молекулярно-кинетической теории. Основу всех явлений переноса составляет хаотичное движение молекул. При переходе в другие части системы молекулы переносят туда информацию о тех условиях, в которых они пребывали прежде. Перенос массы (или сам переход частиц) определяет диффузию. Перенос энергии от одних слоев газа к другим определяет его теплопроводность. И перенос импульса, как мы увидим, определяет явление внутреннего молекулярного трения газа (жидкости).

Диффузия

Проведем сначала анализ процесса диффузии (точнее, самодиффузии, т.е. диффузии каким-то образом выделенных молекул в среде, состоящих из таких же частиц). В этом случае средние скорости частиц среды и диффундирующих частиц одинаковы, а длина свободного пробега дается уже знакомым выражением $\lambda = 1/(\sqrt{2} \sigma n)$. Выделим мысленно в среде какую-то площадку S и направим ось z ортогонально к ней. Две другие оси x и y параллельны площадке. Хаотичность движения молекул смоделируем следующим образом. Будем считать, что ровно $1/3$ молекул движется вдоль оси x , $1/3$ — вдоль оси y и $1/3$ — вдоль оси z . Из молекул, летящих параллельно z ровно половина ($1/6$ часть полного числа молекул) движется в положительном направлении, и еще $1/6$ часть полного числа молекул в системе — в отрицательном. Подсчитаем количество молекул, пересекающих площадь S в единицу времени (рис. 36.6). Ясно, что молекулы, летящие вдоль осей x и y площадку не пересекут. За время dt молекулы преодолевают расстояние $\langle v \rangle dt$. Потому на площадку попадет только $1/6$ часть молекул из объема $dt \langle v \rangle S$ справа и $1/6$ часть молекул из объема слева. Но концентрация частиц слева и справа разная, т.к. n зависит от z .

Внимательный читатель может спросить: ведь мы рассматриваем бесконечно малый промежуток времени dt , следовательно наши объемы в сущности диски бесконечно малой толщины $\langle v \rangle dt$. Поэтому, казалось бы, и концентрации частиц слева и справа должны совпадать? Вопрос правилен, но дело в том, что последний раз перед попаданием на площадку

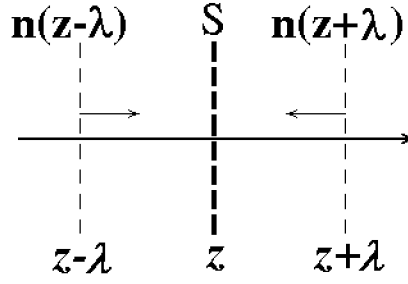


Рис. 36.6: К выводу первого закона Фика.

S молекулы сталкивались с другими молекулами на расстоянии длины свободного пробега λ от площадки. Поэтому к выделенной нами площади они подходят с теми концентрациями частиц, которые сложились в точках с координатами $z - \lambda$ и $z + \lambda$ (если z — координата площадки). Слева на площадку попадет число частиц dN_{\rightarrow} , а справа — dN_{\leftarrow} , причем эти числа будут различаться:

$$\begin{aligned} dN_{\rightarrow} &= \frac{1}{6} n(z - \lambda) \langle v \rangle S dt, \\ dN_{\leftarrow} &= \frac{1}{6} n(z + \lambda) \langle v \rangle S dt. \end{aligned} \quad (36.22)$$

Поскольку λ мало, можем разложить концентрации частиц в ряд, удерживая только два первых члена:

$$\begin{aligned} n(z - \lambda) &\approx n(z) - \lambda \frac{\partial n(z)}{\partial z}, \\ n(z + \lambda) &\approx n(z) + \lambda \frac{\partial n(z)}{\partial z}, \end{aligned} \quad (36.23)$$

Полное число частиц dN , пересекающих площадку в положительном направлении оси z , равно разности чисел частиц, пересекающих площадку слева и справа. Находим тогда:

$$dN = dN_{\rightarrow} - dN_{\leftarrow} = -\frac{1}{6} 2\lambda \frac{\partial n(z)}{\partial z} \langle v \rangle S dt. \quad (36.24)$$

Выражение для потока числа частиц

$$\Phi(z) = \frac{dN}{dt} = -\frac{1}{3} \langle v \rangle \lambda \frac{\partial n(z)}{\partial z} S \quad (36.25)$$

по структуре в точности совпадает с первым законом Фика (36.13). Стало быть, мы не только вывели этот закон, но и определили коэффициент диффузии:

$$D = \frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle. \quad (36.26)$$

Учитывая, что $\langle v \rangle \sim \sqrt{T/\mu}$ и что $\lambda \sim 1/\sigma n \sim T/\sigma p$, получаем:

$$D \sim \frac{1}{\sigma n} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \sim \frac{T^{3/2}}{\sigma \sqrt{\mu} p}. \quad (36.27)$$

Такая зависимость коэффициента диффузии в газах от температуры и давления подтверждается экспериментом.

Вязкость

Рассмотрим теперь механизм возникновения вязкости газа или жидкости. Ось z теперь будем представлять расположенной вертикально в соответствие с рис. 36.4. Сути дела это, разумеется, не меняет. Снова предположим, что концентрация частиц одинакова во всех частях системы, так что числа частиц $dN = \frac{1}{6} n \langle v \rangle S dt$, приходящих снизу и сверху, равны. Однако молекулы приходят из слоев, имеющих разные скорости упорядоченного (не молекулярного!) движения $u(z)$. Когда более медленная молекула из нижнего слоя попадает в верхний, она притормаживает его упорядоченное движение, а сама ускоряется. Наоборот, молекулы из верхнего слоя ускоряют нижний и тормозятся им. Таким образом, этот процесс способствует выравниванию скоростей в системе, а именно в этом и заключается явление внутреннего трения (вязкости).

Мы предполагаем, что скорость упорядоченного движения много меньше средней скорости теплового движения молекул (составляющей сотни м/с). Тогда среднюю скорость теплового движения $\langle v \rangle$ можно по-прежнему считать постоянной. Для импульсов упорядоченного движения, переносимого через площадь S снизу и сверху, имеем:

$$\begin{aligned} dp_{\uparrow} &= m_0 u(z - \lambda) dN, \\ dp_{\downarrow} &= m_0 u(z + \lambda) dN. \end{aligned} \quad (36.28)$$

Отсюда для полного импульса, переносимого в положительном направлении оси z , получаем:

$$dp = dp_{\uparrow} - dp_{\downarrow} = -2 \lambda \frac{du(z)}{dz} \left(\frac{1}{6} \rho \langle v \rangle \right) S dt. \quad (36.29)$$

В этой формуле мы использовали плотность газа $\rho = m_0 n$.

Переносимый импульс параллелен скорости u , а его направление зависит от знака производной. При распределении скоростей, показанном на рис. 36.4, скорость растет с ростом z , так что производная $du/dz > 0$. Знак минус в уравнении (36.29) означает, что импульс, поступающий снизу от более медленных слоев меньше импульса, поступающего сверху, от более быстрых. Поэтому импульс слоя с координатой z в данном случае стремится возрасти на величину $-dp$. Производная $-dp/dt$ дает силу, действующую на слой жидкости площадью S и имеющий координату z :

$$F(z) = -\frac{dp}{dt} = \frac{1}{3}\rho \lambda \langle v \rangle \frac{du}{dz} S. \quad (36.30)$$

Мы вывели закон (36.20) и получили выражение для коэффициента динамической вязкости

$$\eta = \frac{1}{3}\rho \lambda \langle v \rangle. \quad (36.31)$$

Теперь нетрудно установить зависимость η от температуры и рода газа:

$$\eta \sim \frac{1}{\sigma} \sqrt{\mu T}. \quad (36.32)$$

Обратите внимание, что коэффициент динамической вязкости не зависит в конечном итоге от плотности, т.е. от давления. Это происходит потому, что с ростом давления увеличивается плотность газа, но и пропорционально растет концентрация частиц, т.е. уменьшается длина свободного пробега. Эти два эффекта компенсируют друг друга.

Теплопроводность

Проанализируем теперь явление теплопроводности. Предположим, что концентрация частиц в системе всюду одинакова, так что слева и справа площадку пересекает одинаковое число частиц, как и в предыдущем разделе:

$$dN = \frac{1}{6} n \langle v \rangle S dt, \quad (36.33)$$

так что полный поток частиц через S равен нулю. Однако молекулы приносят с собой те средние энергии w , которыми они обладали в слоях с координатами $z - \lambda$ и $z + \lambda$. Эти энергии пропорциональны температуре:

$w = (i/2) k_B T$. Умножая среднюю энергию на число частиц, пересекающих площадку, получаем для переносимого ими количества энергии слева и справа:

$$\begin{aligned} dW_{\rightarrow} &= \left(\frac{1}{6} n \langle v \rangle S dt \right) \frac{i}{2} k_B T (z - \lambda), \\ dW_{\leftarrow} &= \left(\frac{1}{6} n \langle v \rangle S dt \right) \frac{i}{2} k_B T (z + \lambda). \end{aligned} \quad (36.34)$$

Для тепла, переносимого в положительном направлении оси z отсюда получаем выражение:

$$\delta Q = dW_{\rightarrow} - dW_{\leftarrow} = - \left(\frac{1}{3} n \langle v \rangle \lambda \right) \frac{i}{2} k_B \frac{\partial T}{\partial z} S dt. \quad (36.35)$$

Мы вывели закон (36.21) и нашли коэффициент теплопроводности

$$\kappa = \left(\frac{1}{3} n \langle v \rangle \lambda \right) \frac{i}{2} k_B. \quad (36.36)$$

Напомним, что i — эффективное число степеней свободы. Поскольку $\lambda \sim 1/(\sigma n)$, то коэффициент теплопроводности не зависит от плотности газа. Зависимость от внешних условий и рода газа такова:

$$\kappa \sim \frac{i}{\sigma} \sqrt{\frac{T}{\mu}}. \quad (36.37)$$

Введем удельную теплоемкость (т.е. теплоемкость единицы массы вещества) при постоянном объеме $c_V = (i/2)R/\mu = (i/2)k_B N_A/\mu$ и учтем далее, что масса молекулы равна $m_0 = \mu/N_A$, откуда следует связь концентрации частиц с плотностью газа $\rho = m_0 n = \mu n/N_A$. Отсюда получаем для коэффициента теплопроводности несколько иное выражение:

$$\kappa = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \lambda c_V. \quad (36.38)$$

Из проведенного анализа явлений переноса следуют связи между соответствующими коэффициентами [см. соотношения (36.26), (36.31) и (36.38)]:

$$\begin{aligned} \eta &= \rho D, \\ \kappa &= \eta c_V = \rho c_V D. \end{aligned} \quad (36.39)$$

Приведем численные оценки, воспользовавшись полученными ранее результатами для водяного пара, характерными при нормальных условиях для всех газов: плотность $\rho \approx 0.7 \text{ кг/м}^3$, $\langle v \rangle \approx 600 \text{ м/с}$, длина свободного пробега $\lambda \approx 6 \cdot 10^{-8} \text{ м}$, концентрация частиц $n \approx 4 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$. Тогда находим: коэффициент диффузии $D \approx 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, коэффициент теплопроводности ($i = 6$) $\kappa \approx 0.02 \text{ Дж/(м} \cdot \text{с} \cdot \text{К)}$, коэффициент динамической вязкости $\eta \approx 0.8 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$. Сравним полученные оценки с опытными данными для воздуха: $D = 2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $\kappa = 0.034 \text{ Дж/(м} \cdot \text{с} \cdot \text{К)}$, $\eta = 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$. Мы видим, что не ошиблись, по крайней мере, в порядках величин, хотя наши оценки коэффициентов и не совсем точны.

36.4 Броуновское движение

Задача о блуждающем матросе

Решим сначала классическую задачу о пьяном матросе. Матрос выходит из кабака и собирается направиться домой. Он движется с постоянной скоростью v , но в состоянии поддерживать выбранное направление движения лишь на пути λ (т.е. в течение времени $\tau = \lambda/v$). После этого его разворачивает, он теряет ориентировку и движется в каком-то другом направлении. Выбор направления каждый раз происходит случайным образом, так что любые направления равновероятны. Спрашивается, на каком среднем расстоянии $R_{\text{кв}}$ от кабака находится матрос в момент времени t (предполагается, что $t \gg \tau$). Слово “среднее” здесь означает следующее. Предположим, что такое происходит каждый день, и каждый раз мы измеряем удаление матроса от кабака. Среднее квадратичное полученных значений при большом числе испытаний (скажем, за год) и дает нам искомую величину $R_{\text{кв}}$.

Итак, возьмем кабачок за начало отсчета координат и будем характеризовать положение матроса в момент времени t радиус-вектором \vec{R} . Путь матроса состоит из ломаных линий, число которых $k = t/\tau$. Пусть i — номер линии ($i = 1, 2, \dots, k$). Перемещение матроса по линии с номером i задаем вектором \vec{r}_i , так что для всех значений i имеем $\vec{r}_i^2 = \lambda^2$ (рис. 36.7). Тогда радиус-вектор \vec{R} представляется в виде суммы векторов \vec{r}_i :

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^k \vec{r}_i. \quad (36.40)$$

Возведем в квадрат обе части равенства (36.40):

$$\begin{aligned}\vec{R}^2 &= \sum_{i=1}^k \vec{r}_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^k r_i r_j \cos \theta_{ij} = \\ &= \lambda^2 k + 2\lambda^2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^k \cos \theta_{ij}.\end{aligned}\quad (36.41)$$

Здесь θ_{ij} — угол между векторами \vec{r}_i и \vec{r}_j . Усредним теперь обе части равенства (36.41) по всем случаям похода матроса в кабачок. Среднее значения всех косинусов равны нулю в силу равновероятности выбора матросом следующего направления движения после прямого отрезка. Получаем тогда:

$$\begin{aligned}\langle \vec{R}^2 \rangle &= k \lambda^2 = \frac{t}{\tau} \lambda^2 = \\ &= \lambda v t.\end{aligned}\quad (36.42)$$

Отсюда следует искомое среднеквадратичное расстояние

$$R_{\text{KB}} = \sqrt{\langle \vec{R}^2 \rangle} = \sqrt{\lambda v t}.\quad (36.43)$$

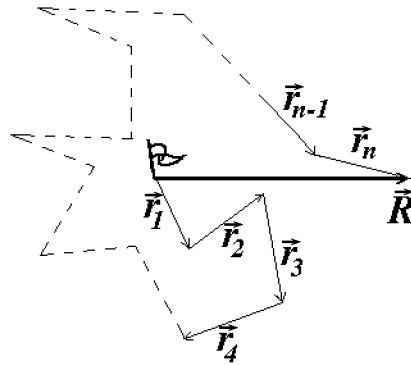


Рис. 36.7: Траектория блуждающего матроса.

Заметим, что это расстояние зависит от квадратного корня из времени в отличие от случая прямолинейного и равномерного движения. Это существенно меняет характер движения. Приведем численный пример. Пусть матрос движется медленно, со скоростью $v = 0.9$ км/час = 0.25 м/с. За время $t = 3$ час = 10800 с при прямолинейном движении он удалился бы на расстояние $0.9 \cdot 3 = 2.7$ км. Предположим, что по прямой он в состоянии двигаться только $\lambda = 20$ м. Тогда среднее его удаление от кабачка за то же время составит $R_{\text{KB}} = \sqrt{20 \cdot 0.25 \cdot 10800} \approx 232$ м!

Броуновское движение и диффузия

Оставив нашего матроса петлять в окрестностях кабачка, мы вправе задать вопрос: а какое он имеет отношение к молекулярно-кинетической теории? Оказывается, самое прямое. Пусть в воде плавает пылинка, за которой мы наблюдаем в микроскоп. Пылинка подвергается ударам со стороны молекул среды, случайным образом меняя свое направление движения и скорость. Случайность траектории пылинки здесь связана с тем, что 1) с разных сторон ее может ударить различное число молекул и 2) молекулы, ударяющие с одной стороны, могут в этот момент иметь бóльшие скорости, нежели молекулы, ударяющие с другой. Поэтому пылинка движется по ломаной траектории. Это явление называется *броуновским движением*. С повышением температуры интенсивность броуновского движения растет. При увеличении размеров пылинки случайности ее столкновения с молекулами сглаживаются и броуновское движение становится ненаблюдаемым. Броуновское движение является самым непосредственным доказательством хаотического движения молекул. Наш блуждающий матрос — имитация броуновского движения. На этой простой задаче мы продемонстрировали характерную особенность — зависимость среднеквадратичного смещения пылинки от корня из времени движения. Произведение λv в уравнении (36.43) имеет ту же размерность и ту же структуру, что и коэффициент диффузии. Поэтому для броуновского движения также следует ожидать зависимости среднеквадратичного смещения вида $R_{\text{кв}} \sim \sqrt{Dt}$.

Броуновское движение тесно связано с диффузией. Обратимся ко второму закону Фика (36.15). Это — уравнение первого порядка по времени, и оно позволяет найти функцию $n(z, t)$, если задана начальная концентрация числа частиц $n(z, 0)$. Мы не будем решать эту задачу точно. Отметим только, что с течением времени начальное распределение “расплывается” в пространстве и при этом изменяет свою форму. Но есть один вид начального распределения (т.н. *гауссово* распределение), форма которого остается неизменной. Мы займемся только этим, самым простым, случаем, позволяющим тем не менее получить все характерные особенности процесса. В процессе вычислений нам понадобятся два стандартных интеграла:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2l^2} dz = \sqrt{2\pi} l \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2/2l^2} dz = \sqrt{2\pi} l^3.$$

Пусть распределение частиц в начальный момент времени $t = 0$ имеет вид:

$$n(z, 0) = \frac{N}{\sqrt{2\pi} l(0)} \exp\left(-\frac{z^2}{2l^2(0)}\right). \quad (36.44)$$

Вид этой функции представлен на рис. 36.8. Здесь N — полное число частиц, распределенных по оси z с концентрацией $n(z, 0)$:

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} n(z, 0) dz.$$

Величина $l(0)$ характеризует ширину распределения. Действительно, выражение $n dz/N$ дает относительное число частиц на интервале $(z, z + dz)$, то есть вероятность частице оказаться на этом отрезке. Поэтому среднее значение квадрата координаты равно

$$\langle z^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \frac{n(z, 0)}{N} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi} l(0)} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2/2l^2(0)} dz = l^2(0). \quad (36.45)$$

Если определить ширину распределения как расстояние между точками $z = -\sqrt{\langle z^2 \rangle}$ и $z = +\sqrt{\langle z^2 \rangle}$, то $l(0) = \sqrt{\langle z^2 \rangle}$ есть среднеквадратичная полуширина распределения в начальный момент времени $t = 0$.

Как уже было сказано, гауссово распределение — единственное, не меняющее своей формы при распылении. Это значит, что в произвольный момент времени t распределение будет иметь вид:

$$n(z, t) = \frac{N}{\sqrt{2\pi} l(t)} \exp\left(-\frac{z^2}{2l^2(t)}\right). \quad (36.46)$$

Соответственно, для произвольного момента времени $\langle z^2 \rangle = l^2(t)$, где пока неизвестная функция $l(t)$ есть меняющаяся полуширина распределения.

Наша задача упростилась: вместо решения дифференциального уравнения в частных производных (36.15), нам достаточно теперь подставить туда выражение (36.46), убедиться, что оно действительно является решением и найти зависимость полуширины распределения от времени (т.е. определить функцию $l(t)$).

Продифференцируем (36.46) по координате z :

$$\frac{\partial n}{\partial z} = -\frac{z}{l^2(t)} n. \quad (36.47)$$

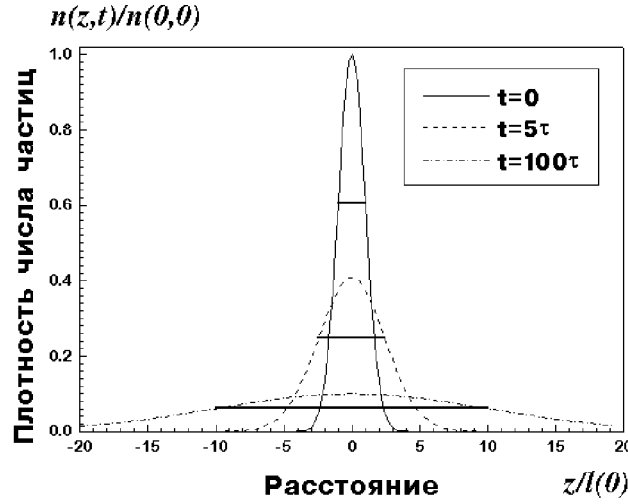


Рис. 36.8: Расплывание распределения концентрации частиц гауссовой формы с течением времени. Три кривые соответствуют трем различным значениям времени, измеренного в единицах $\tau = l^2(0)/(2D)$. По оси абсцисс отложены “безразмерные” расстояния, измеренные в единицах полуширины $l(0)$ начального распределения. По оси ординат показано отношение концентрации частиц $n(z, t)$ к ее максимальному значению $n(0, 0)$ в начальный момент времени $t = 0$. Горизонтальные прямые показывают среднеквадратичную ширину $2l(t)/l(0)$ каждого из распределений.

Продифференцируем по z еще раз, принимая во внимание результат первого дифференцирования:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} &= -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{l^2(t)} n \right) = -\frac{n}{l^2(t)} - \frac{z}{l^2(t)} \frac{\partial n}{\partial z} = \\ &= n \frac{z^2 - l^2(t)}{l^4(t)}. \end{aligned} \quad (36.48)$$

Теперь продифференцируем (36.46) по времени:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} &= \frac{dl(t)}{dt} \frac{dn}{dl(t)} = \frac{dl(t)}{dt} \left(n \frac{z^2}{l^3(t)} - \frac{n}{l(t)} \right) = \\ &= \frac{dl(t)}{dt} l(t) n \frac{z^2 - l^2(t)}{l^4(t)}. \end{aligned} \quad (36.49)$$

Подставляя выражения (36.48) и (36.49) в уравнение (36.15) второго закона Фика, убеждаемся, что $n(z, t)$ в форме (36.46) действительно является решением, если полуширина распределения $l(t)$ удовлетворяет уравнению

$$l \frac{dl}{dt} = D. \quad (36.50)$$

Это уравнение легко интегрируется:

$$\int_{l(0)}^{l(t)} l \, dl = D \int_0^t dt \Rightarrow \frac{l^2(t)}{2} - \frac{l^2(0)}{2} = Dt,$$

откуда находим зависимость полуширины распределения от времени:

$$l(t) = \sqrt{l^2(0) + 2Dt}. \quad (36.51)$$

Если в начальный момент времени $t = 0$ все молекулы были сосредоточены в одном месте ($l(0) = 0$), то

$$l(t) = \sqrt{2Dt}, \quad (36.52)$$

что на новом уровне воспроизводит результат, угаданный нами при анализе блужданий матроса. Увеличение полуширины распределения дает смещение броуновской частицы. Выражение для среднеквадратичного смещения броуновской частицы $\langle \Delta z^2 \rangle = l^2(t) - l^2(0) = 2Dt$ — это классический результат Эйнштейна-Смолуховского, построивших теорию броуновского движения.

Задача 36.47. В аудиторию входит студентка. Оценить время, через которое запах ее духов достигнет экзаменатора, сидящего за столом.

Решение. Коэффициент диффузии молекул в газах мы оценили как $D \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$. Расстояние $l(t)$ до экзаменатора примем равным 4 м, а ширина начального распределения примерно равна диаметру головы студентки $l(0) \approx 0.2 \text{ м}$. Поскольку $l(t) \gg l(0)$, можно воспользоваться уравнением (36.52), откуда находим:

$$t \approx \frac{l^2(t)}{2D} = 4 \cdot 10^5 \text{ с} \approx 4.6 \text{ суток}.$$

Ответ явно несуразен и противоречит всему мировому опыту приема экзаменов. Из этого примера ясно, что распространение запахов по комнате происходит не вследствие диффузии, а из-за более быстрых процессов — конвекционных течений воздуха в комнате. ■

Численные оценки для броуновского движения

Если диффузионные процессы столь медленны, то как удалось наблюдать броуновское движение? Для ответа на этот вопрос мы оценим сейчас коэффициент диффузии пылинки в жидкости. Мы уже знаем, что

среднеквадратичное смещение частицы вдоль какой-то оси линейно зависит от времени:

$$\langle z^2(t) \rangle = \langle z^2(0) \rangle + 2Dt. \quad (36.53)$$

Этот закон можно взять как определение коэффициента диффузии броуновских частиц. Рассмотрим теперь уравнение движения частицы вдоль выбранной оси z :

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z - 6\pi r \eta \frac{dz}{dt}. \quad (36.54)$$

Здесь F_z — случайная сила, действующая на частицы со стороны молекул, а второй член в правой части — сила сопротивления движению частицы вследствие вязкости жидкости (закон Стокса: предполагается, что броуновские частицы являются шариками радиусом r). Поскольку нас интересует зависимость от времени *квадрата* координаты z , мы умножим уравнение (36.54) на z и используем соотношения

$$\begin{aligned} z \frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(z \frac{dz}{dt} \right) - \left(\frac{dz}{dt} \right)^2, \\ z \frac{dz}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{dz^2}{dt}. \end{aligned}$$

Усредняя получившееся уравнение, приходим к выражению

$$\frac{m}{2} \frac{d^2 \langle z^2 \rangle}{dt^2} - m \left\langle \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right\rangle = -\frac{6\pi r \eta}{2} \frac{d \langle z^2 \rangle}{dt}. \quad (36.55)$$

Здесь учтено, что $\langle z F_z \rangle = 0$ из-за случайности сил, действующих на пылинку со стороны молекул. В силу (36.53) $d \langle z^2 \rangle / dt = 2D$, $d^2 \langle z^2 \rangle / dt^2 = 0$. Подставляя эти значения в (36.55) и учитывая, что $m \langle v_z^2 \rangle = k_B T$, находим искомое выражение для коэффициента диффузии броуновских частиц:

$$D = \frac{k_B T}{6\pi r \eta}. \quad (36.56)$$

Выполним теперь численные оценки. Радиус броуновских частиц (пылинок) $r \sim 0.5 \cdot 10^{-6}$ м. Принимая $\eta = 10^{-3}$ Па · с (вода) и $T = 300$ К, получаем из (36.56) $D \approx 0.44 \cdot 10^{-12}$ м²/с, что гораздо меньше коэффициента диффузии молекул духов студентки. Тем не менее, броуновское

движение наблюдаемо. Скажем, за 30 секунд среднеквадратичное смещение частицы составит $z_{\text{кв}} = \sqrt{2Dt} = 10^{-6} \sqrt{2 \cdot 0.44 \cdot 30} = 5 \cdot 10^{-6}$ м, что в пять раз превышает диаметр пылинки. Поэтому такие смещения можно наблюдать в микроскоп. Пример демонстрирует извечную научную истину: сами по себе величины не могут априори считаться малыми или большими, все познается в сравнении.

Контрольные вопросы

1. Приведите примеры экспериментального подтверждения молекулярно-кинетической теории. Укажите физические явления, подтверждающие: 1) существование промежутков между молекулами; 2) движение молекул; 3) существование сил притяжения и отталкивания между молекулами.
2. Пусть средняя длина пробега молекулы в 100 раз превышает размеры сосуда с газом. Можно ли осуществить такое? Если ответ положителен, то можно ли считать, что каждая молекула “не замечает” присутствия всех остальных?
3. Оценить длину λ свободного пробега баскетболистов на площадке в предположении, что они движутся хаотически. Размеры площадки $26 \text{ м} \times 14 \text{ м}$, на ней находится 10 игроков. (Указание: представьте себе вид на площадку сверху. Рассматривая проекцию баскетболистов на горизонтальную плоскость, сводим задачу к движению дисков диаметром d по плоскости. Величину d предлагается выбрать самостоятельно, исходя из жизненного опыта.)
4. Оцените максимально допустимое давление в кинескопе длиной 45 см, если 98% всех электронов должны попасть на экран, не столкнувшись ни с одной молекулой воздуха. (Указание: электрон надо считать материальной точкой.)
5. “Нахохлится Воробей Воробеич, подберет под себя ноги, да и сидит”, — писал Мамин-Сибиряк. Объясните нахохливание птиц зимой с точки зрения законов физики.
6. Наружная стена комнаты имеет ширину $l = 6 \text{ м}$ и толщину $d = 20 \text{ см}$. Высота потолка $h = 2.5 \text{ м}$. Какое количество тепловой энергии уходит в единицу времени через стену на улицу при разности температур снаружи и в комнате $\Delta T = 25 \text{ К}$? Материал стены — железобетон ($\kappa = 1.6 \text{ Дж}/(\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К})$). Сравните с результатами для деревянного дома (для дуба $\kappa = 0.2 \text{ Дж}/(\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К})$).
7. Электрическая лампочка мощностью 100 Вт производит 95 Вт теплоты, которая рассеивается через стеклянный баллон лампы радиусом 3 см и толщиной 1 мм. Чему равна разность температур между внутренней и внешней поверхностями стеклянного баллона лампы?
8. Какой газ будет диффундировать быстрее — N_2 или O_2 ? И насколько быстрее (в процентах)?

9. Пусть из кабачка одновременно вышли два матроса (см. раздел 13.4.1). При тех же числовых данных найти среднеквадратичное расстояние $L_{\text{кв}}$ между ними через время $t = 3$ часа.

Глава 37

Второе начало термодинамики

В этой главе мы продолжим изучение термодинамических свойств систем. Основная наша цель сейчас — понять, каким образом тепло может быть преобразовано в работу механизмов. Как мы видели, тепловая энергия — это в конечном итоге энергия хаотического движения молекул. Полезная же работа, извлекаемая из различных устройств, имеет упорядоченный характер. Тепловые машины вращают генераторы на электростанциях, приводят в движение транспортные средства. Каким же образом происходят превращения одного вида энергии в другие? Интуитивно ясно, что различные виды энергии чем-то разнятся, даром что все они подчиняются закону сохранения энергии или первому началу термодинамики. В самом деле, очень легко превратить механическую работу в тепло: достаточно потереть друг о друга два деревянных бруска, и они нагреются (говорят, таким образом удастся даже зажечь огонь). Упорядоченное периодическое движение брусков превращается при этом в хаотическое движение составляющих их молекул. Но сможете ли Вы заставить нагретые бруски истратить часть своей тепловой энергии на возбуждение упорядоченного периодического движения? Словом, в этой главе мы займемся вопросом, с какой эффективностью порядок может быть организован из хаоса.

37.1 Циклы и КПД тепловых машин

Среди всех возможных процессов, изображаемых на диаграммах состояний, особое место занимают процессы, соответствующие замкнутым кривым (рис. 37.1). В этих процессах физическая система проходит через ряд состояний и возвращается в исходное состояние. Этим и обусловлена важность замкнутых процессов (*циклов*).

Рассмотрим подробнее процесс на рис. 37.1. При расширении газа по пути $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$ от минимального (V_1) до максимального (V_2) объема система совершает положительную работу $A_{1 \rightarrow 3 \rightarrow 2}$, численно равную площади под верхней кривой. При возвращении системы в исходное состояние по другому пути $2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ работа $A_{2 \rightarrow 4 \rightarrow 1}$ совершается над системой. Она отрицательна и по абсолютной величине равна площади под нижней кривой. Алгебраическая сумма этих работ $A = A_1 + A_2 = A_1 - |A_2|$ есть полная работа, совершенная системой. Ее численная величина равна разности упомянутых площадей, то есть площади *между* верхней и нижней кривыми. Иными словами, полная работа равна площади данного цикла на диаграмме (p, V) (если процесс совершается по часовой стрелке; в противном случае полная работа отрицательна, но ее модуль также равен площади цикла).

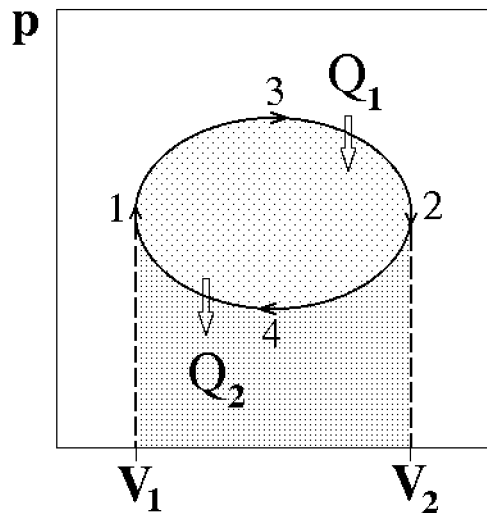


Рис. 37.1: Пример условного замкнутого цикла. Площадь под верхней кривой равна работе, совершаемой системой, а площадь под нижней кривой — работе внешних сил над системой (показана темным тоном). Разность площадей (светлый тон) равна полной работе, совершенной системой в цикле. Направление процесса показано стрелками.

В ходе осуществления цикла система взаимодействовала с внешней средой, получала и отдавала теплоту. Если обозначить через Q_1 количество теплоты, полученное системой, то коэффициент полезного действия (КПД) η естественно определить через отношение

$$\eta = \frac{A}{Q_1}. \quad (37.1)$$

КПД часто выражают также в процентах, для чего η надо умножить

на 100%. Если обозначить через Q_2 количество теплоты, *возвращенное* системой во внешнюю среду, то разность $Q_1 - Q_2$ равна совершенной работе A . Это следует из первого начала термодинамики и из того факта, что при возвращении системы в исходное состояние ее внутренняя энергия также принимает исходное значение. Тогда КПД тепловой машины записывается в виде:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}. \quad (37.2)$$

Отсюда видно, что КПД тепловой машины всегда меньше единицы. Это утверждение можно сформулировать как *невозможность вечного двигателя первого рода*: нельзя соорудить периодически действующую тепловую машину, которая совершала бы полезную работу в количестве, превышающем получаемую извне энергию. Существование такого двигателя противоречило бы закону сохранения энергии. Поскольку ни количество теплоты, ни совершенная системой работа не являются функциями состояния, КПД зависит от данного конкретного цикла, по которому работает тепловая машина.

До сих пор мы рассматривали процесс, соответствующий работе именно *тепловой машины*. Если повернуть процесс вспять (пустить его против часовой стрелки на рис. 37.1), то мы получим модель *холодильной установки*. Все стрелки на этом рисунке меняют направления на обратные, система получает от холодильника количество теплоты Q_2 , и за счет работы внешней силы (электромотора) передает нагревателю большее количество теплоты Q_1 . Закон сохранения энергии (первое начало термодинамики) требует выполнения равенства $Q_2 + A = Q_1$. Эффективность холодильной установки можно определить аналогично КПД тепловой машины. Надо только учесть, что полезным теперь является количество отнимаемого тепла Q_2 , для чего мы совершаем работу A . Поэтому в литературе часто определяют *холодильный коэффициент* η' как отношение отнимаемой теплоты к совершаемой при этом работе:

$$\eta' = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}. \quad (37.3)$$

Заметим, что холодильный коэффициент может стать больше единицы. Если мы хотим пользоваться привычным коэффициентом полезного действия, то для холодильной установки естественно определить его как

отношение отнятого тепла к переданному во внешнюю среду:

$$\eta_{\text{хол}} = \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{Q_2}{Q_2 + A}. \quad (37.4)$$

Такое определение соответствует традиционным взглядам на КПД установок. Действительно, в холодильнике с 100%-й эффективностью (если бы он был возможен) все количество отнятой теплоты передавалось бы без совершения работы во внешнюю среду. Тогда мы имели бы $Q_2 = Q_1$ и $\eta_{\text{хол}} = 1$. Наоборот, когда мы совершаем какую-то работу, но не отнимаем никакой теплоты, то $Q_2 = 0$ и $\eta_{\text{хол}} = 0$.

37.2 Цикл Карно

Для работы любой тепловой машины по замкнутому циклу необходима внешняя среда, которую условно можно представить себе как два тела — нагреватель, находящийся при температуре T_{max} , и холодильник, находящийся при температуре T_{min} ($T_{\text{min}} < T_{\text{max}}$). Предполагается, что при контакте с нашей системой температуры нагревателя и холодильника не меняются. При контакте с нагревателем система получает тепло, при контакте с холодильником — отдает.

В термодинамике существует теорема, с которой мы познакомимся ближе чуть позже: *при заданных температурах нагревателя и холодильника максимально возможный КПД тепловой машины определяется формулой*

$$\eta_C = \frac{T_{\text{max}} - T_{\text{min}}}{T_{\text{max}}} \quad (37.5)$$

и не зависит от рабочего тела машины. Реализация максимально возможного КПД достигается в так называемом *цикле Карно*, когда идеальный газ проходит замкнутый цикл, составленный из двух адиабат и двух изотерм (рис. 37.2).

Убедимся, что показанный замкнутый процесс действительно имеет КПД, соответствующий формуле (37.5). Температура системы равна T_1 в точках 1, 2 и T_2 в точках 3, 4. Значения остальных термодинамических параметров (p, V) будут иметь в качестве индекса номер соответствующей точки на диаграмме. Нам надо вычислить количества полученной Q_1 и отданной Q_2 теплоты, найти совершенную газом работу $A = Q_1 - Q_2$ и определить КПД цикла. Сразу заметим, что на участках $2 \rightarrow 3$ и $4 \rightarrow 1$

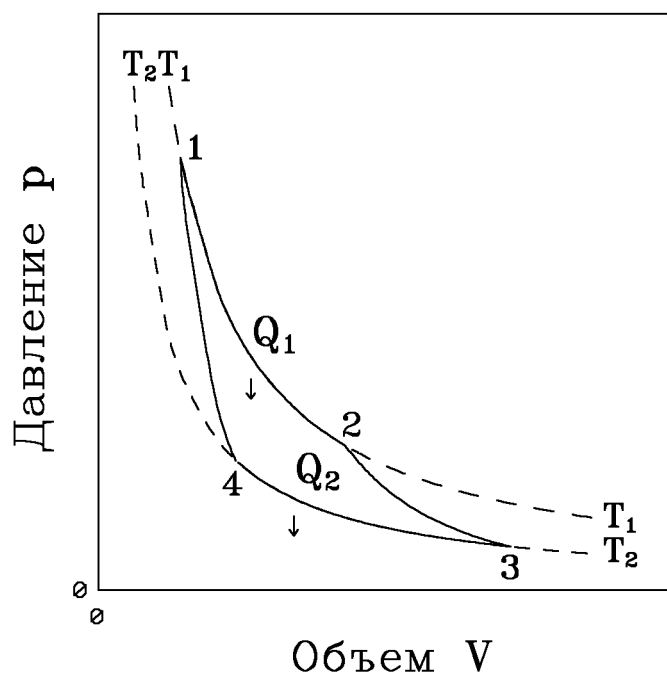


Рис. 37.2: Цикл Карно (обходится по часовой стрелке) — комбинация двух изотерм $1 \rightarrow 2$, $3 \rightarrow 4$ и двух адиабат $2 \rightarrow 3$ и $4 \rightarrow 1$. Для наглядности пунктиром показаны ветви соответствующих изотерм, не проходимые системой в данном цикле. Теплообмен со средой осуществляется в изотермических ветвях цикла: на участке $1 \rightarrow 2$ газ получает теплоту Q_1 , а на участке $3 \rightarrow 4$ отдает теплоту Q_2 .

система не обменивается теплом с внешней средой. Следовательно, теплоту Q_1 газ получает на участке $1 \rightarrow 2$, а теплоту Q_2 отдает на участке $3 \rightarrow 4$. Рассмотрим подробнее различные участки цикла.

Изотерма $1 \rightarrow 2$. На этом участке газ находится в контакте с нагревателем и происходит изотермическое расширение от объема V_1 до объема V_2 . Температура T_1 не меняется, следовательно не изменяется внутренняя энергия, а вся полученная теплота расходуется на совершение газом работы: $Q_1 = Q_{1 \rightarrow 2} = A_{1 \rightarrow 2}$. Величину этой работы мы уже вычисляли, так что находим:

$$Q_1 = \frac{m}{\mu} R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (37.6)$$

Адиабата $2 \rightarrow 3$. Здесь система отсоединяется от нагревателя и не обменивается теплом с внешней средой: $Q_{2 \rightarrow 3} = 0$. Газ продолжает

расширяться, но уже адиабатно. Работа совершается за счет внутренней энергии газа, и его температура падает до значения T_2 . На этом участке цикла нам нужна информация, доставляемая уравнением адиабаты:

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}. \quad (37.7)$$

Изотерма 3→4. Система подключается к холодильнику и газ начинает сжиматься. Внутренняя энергия остается неизменной, над газом совершается работа ($A_{3\rightarrow4} < 0$), а выделяющееся тепло $Q_2 = |Q_{3\rightarrow4}| = -A_{3\rightarrow4}$ передается холодильнику. Имеем аналогично (37.6):

$$Q_2 = \frac{m}{\mu} R T_2 \ln \frac{V_3}{V_4}. \quad (37.8)$$

Адиабата 4→1. Система отключена от внешней среды и продолжает сжиматься изотермически, что приводит к повышению ее температуры до T_1 . В конечном итоге система возвращается в первоначальное состояние. Поскольку точки 4 и 1 лежат на адиабате, получаем связь объемов и температур, аналогичную (37.7):

$$T_2 V_4^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1}. \quad (37.9)$$

Из уравнений (37.7) и (37.9) находим отношения объемов

$$\left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_1}{T_2},$$

откуда следует, что

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}. \quad (37.10)$$

Поэтому отдаваемую холодильнику теплоту Q_2 [см. уравнение (37.8)] можно записать как

$$Q_2 = \frac{m}{\mu} R T_2 \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (37.11)$$

Используя выражение (37.6) для теплоты, полученной системой, находим совершенную в ходе цикла работу

$$A = Q_1 - Q_2 = \frac{m}{\mu} R (T_1 - T_2) \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (37.12)$$

Из проведенного анализа следует также, что максимальная температура в цикле равна $T_{\max} = T_1$, а минимальная — $T_{\min} = T_2$. Если разделить (37.12) на (37.6), то немедленно получим выражение (37.5) для КПД цикла Карно, из которого выпадают все параметры, кроме температур холодильника и нагревателя.

Задача 37.48. Котел тепловой станции работает при температуре около $t_1 = 550^\circ\text{C}$. Отработанное тепло отводится к реке при температуре около $t_2 = 20^\circ\text{C}$. Каков максимально возможный КПД этой станции?

Решение. Поскольку в формуле для КПД цикла Карно используются абсолютные температуры, надо перейти от шкалы Цельсия к шкале Кельвина: $T_1 = 550 + 273 = 823\text{ K}$, $T_2 = 20 + 273 = 293\text{ K}$. Теперь находим КПД тепловой станции: $\eta = (823 - 293)/823 = 64.4\%$. Конечно, реальный КПД станции заметно ниже. ■

Если цикл Карно осуществить в обратном направлении, т.е. против часовой стрелки на рис. 37.2, то для определения эффективности холодильной установки надо использовать формулы (37.3), (37.4) и выражения (37.6), (37.11). Получаем тогда:

$$\eta' = \frac{T_2}{T_1 - T_2}, \quad \eta_{\text{хол}} = \frac{T_2}{T_1}. \quad (37.13)$$

Печально, но чем ниже температура внешней среды T_1 , тем меньше мы нуждаемся в холодильнике, и тем эффективнее он работает.

Приведем численный пример. Если кондиционер поддерживает в комнате температуру $t_2 = 20^\circ\text{C}$, а температура наружного воздуха равна $t_1 = 30^\circ\text{C}$, то для холодильного коэффициента имеем $\eta' = 293/10 = 29.3$, а для КПД $\eta_{\text{хол}} = 293/303 = 96.7\%$. Конечно, на самом деле температура тепловыделяющего элемента больше наружной температуры на 20-30 градусов, так что разность температур может достигать 30-40 градусов, что приводит к значениям $\eta' \approx 7 \div 10$, $\eta_{\text{хол}} \approx 88 \div 91\%$.

Напомним, что речь идет об идеальных установках, работающих по циклу Карно. Реальный типичный кондиционер потребляет мощность 750 Вт, перекачивая за час около 5 МДж тепловой энергии. Это значит, что за секунду кондиционер совершает работу $A = 750\text{ Дж}$, и отнимает у воздуха в комнате теплоту $Q_2 = 5 \cdot 10^6 / 3600 \approx 1.4\text{ кДж}$. Отсюда находим $\eta' = Q_2/A \approx 1400/750 \approx 1.9$ и $\eta_{\text{хол}} = Q_2/(Q_2 + A) \approx 1400/2150 \approx 65\%$. Мы видим, что реальный кондиционер гораздо менее эффективен, нежели идеальный холодильник Карно.

Еще один численный пример.

Задача 37.49. Пусть в домашнем холодильнике поддерживается температура $t_2 = -3^\circ\text{C}$ ($T_2 = 270\text{ K}$), а температура в кухне равна $t_1 = 27^\circ\text{C}$ ($T_1 = 300\text{ K}$). Пусть далее мотор холодильника потребляет мощность $N = 200\text{ Вт}$. Предполагая, что холодильник работает по циклу Карно и что тепловыделяющий элемент имеет температуру окружающего воздуха, определить мощность потока тепловой энергии, перекачиваемой из камеры холодильника в кухню.

Решение. За время t мотор совершит работу $A = Nt$. КПД холодильника равен $\eta_{\text{хол}} = T_2/T_1 = Q_2/Q_1 = (Q_1 - A)/Q_1$, откуда находим количество теплоты, поступающее в кухню в единицу времени:

$$\frac{Q_1}{t} = N \frac{T_1}{T_1 - T_2} = 200 \frac{300}{300 - 270} = 2\text{ кВт}.$$

Обратите внимание, что холодильник работает как весьма эффективный *обогреватель* помещения. Надо только оплачивать потребляемую мотором мощность 200 Вт, а в кухню поступит в 10 раз бóльшая энергия, 90% которой перекачивается из камеры холодильника (90% — КПД холодильника в этом примере). Любопытно, что если бы вместо холодильника был включен обогреватель той же мощности, то он нагревал бы помещение в 10 раз слабее. ■

Наши численные оценки демонстрируют, в чем заключается проблема теплового загрязнения окружающей среды, свойственная технической цивилизации.

37.3 Двигатель внутреннего сгорания

Теперь познакомимся с одним из циклов, используемых в технике, и сравним его эффективность с циклом Карно. Технические циклы на самом деле необратимы и даже не замкнуты, так как часть рабочего вещества выбрасывается наружу. Задачей техники является создание циклов, приближающихся по своим характеристикам к идеальным. Поэтому мы рассмотрим *идеализированный* процесс (т.н. цикл Отто), близкий к используемому в двигателе внутреннего сгорания. Цикл Отто изображен на рис. 37.3. Как обычно, термодинамические параметры имеют индексом номер соответствующей точки на рисунке (в данном случае надо будет помнить, что $V_3 = V_2$, $V_4 = V_1$).

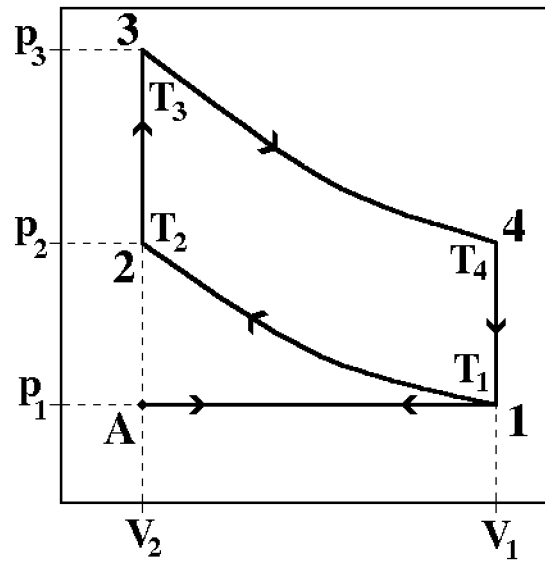


Рис. 37.3: Идеализированный цикл четырехтактного двигателя внутреннего сгорания.

Изобара $A \rightarrow 1$. Первый такт цикла. Вследствие движения поршня в цилиндр всасывается горючее. Приближенно можно считать, что это происходит при атмосферном давлении p_1 . Объем увеличивается от V_2 до V_1 .

Адиабата $1 \rightarrow 2$. Второй такт цикла. Теплообмена со средой нет. Поршень движется в обратном направлении, адиабатно сжимая смесь от объема V_1 до объема V_2 . При этом повышается давление, и температура растет от T_1 до T_2 . Связь температур и объемов в начале и конце адиабатной части цикла дается соотношением:

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_1}. \quad (37.14)$$

Изохора $2 \rightarrow 3$. Начало третьего такта. Под действием электрической искры горючая смесь взрывается: давление почти мгновенно возрастает до значения p_3 , а объем еще не успевает измениться. Температура растет от T_2 до T_3 за счет тепла, выделенного при взрыве. Работа не производится, а количество полученного тепла выражается формулой:

$$Q_1 = Q_{2 \rightarrow 3} = C_V (T_3 - T_2). \quad (37.15)$$

Адиабата $3 \rightarrow 4$. Продолжение третьего такта. Теплообмена со средой нет. Газ адиабатно расширяется до максимального объема цилиндра

V_1 , падают температура и давление. Связь температур и объемов в начале и конце адиабаты дается уравнением:

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_3}{T_4}. \quad (37.16)$$

Изохора 4→1. Конец третьего такта. Открывается клапан, давление падает до атмосферного при постоянном объеме. Температура также падает до значения T_1 .

$$Q_2 = -Q_{4\rightarrow 1} = C_V (T_4 - T_1). \quad (37.17)$$

Изобара 1→А. Четвертый такт. Поршень выталкивает из цилиндра отработанные газы, система возвращается в начальное состояние. Поскольку участок $A \rightarrow 1$ проходится дважды в разных направлениях, соответствующие вклады в работу и в теплоту сокращаются и могут не приниматься во внимание.

Таким образом, получаем для КПД цикла:

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}. \quad (37.18)$$

Из уравнений (37.14), (37.16) следует равенство отношений $T_2/T_1 = T_3/T_4$, откуда находим

$$T_2 = \frac{T_1 T_3}{T_4}. \quad (37.19)$$

Подставляя (37.19) в (37.18), приходим к окончательному выражению для КПД цикла:

$$\eta = \frac{T_3 - T_4}{T_3}. \quad (37.20)$$

Оно получилось очень похожим на формулу для КПД цикла Карно, но обратим внимание, что максимальной температурой здесь является температура в точке 3 ($T_{\max} = T_3$), а минимальной — температура в точке 1 ($T_{\min} = T_1$). Поэтому КПД цикла Карно, работающего между такими температурами, равнялся бы

$$\eta_C = \frac{T_3 - T_1}{T_3}.$$

Разность этих двух выражений отлична от нуля:

$$\eta_C - \eta = \frac{T_4 - T_1}{T_3} > 0, \quad (37.21)$$

поскольку $T_4 > T_1$. Мы воочию убедились, что КПД рассмотренного цикла меньше КПД цикла Карно. Заметим также, что КПД цикла Отто можно выразить через отношение объемов:

$$\eta = 1 - \frac{1}{(V_1/V_2)^{\gamma-1}}. \quad (37.22)$$

Величина V_1/V_2 называется сжатием. Получается, что КПД рассмотренного цикла определяется только величиной сжатия горючей смеси и показателем адиабаты.

37.4 Внутреннеобратимая тепловая машина

Помимо цикла Карно и технических циклов, используемых в различных двигателях, представляет интерес так называемая *внутреннеобратимая* тепловая машина (смысл названия станет ясен позже). Дело в том, что максимальный КПД, соответствующий циклу Карно, никогда не достигается на практике. Более того, если бы это было даже возможно, далеко не очевидно, что такую машину стоило бы создавать. Помимо КПД в реальной жизни немаловажную роль играют также простота устройства и управления, стоимость установки, ее надежность, скорость работы и т.п. требования, которые зачастую конфликтуют между собой. В цикле Карно контакты рабочего тела с тепловыми резервуарами происходят при одинаковой температуре. Это значит, что тепло перетекает бесконечно медленно, что, конечно, очень непрактично. Представление о реальной производительности используемых установок можно получить, рассматривая внутреннеобратимую тепловую машину.

Предположим снова, что мы имеем два тепловых резервуара при температурах T_{max} и T_{min} . Предположим также, что работа производится циклом Карно, функционирующем при температурах нагревателя T_1 и холодильника T_2 . Имеется в виду, что выполняется следующая цепочка неравенств: $T_{max} > T_1 > T_2 > T_{min}$. Иными словами, мы рассматриваем необратимый в целом процесс, внутри которого есть обратимый цикл. Тепло подается к рабочему телу при постоянной разности температур $T_{max} - T_1$ и отводится от него при постоянной разности температур

$T_2 - T_{min}$ (см. схему на рис. 37.4). В этом и заключается главное отличие от стандартного цикла Карно, где соответствующие разности температур равны нулю.

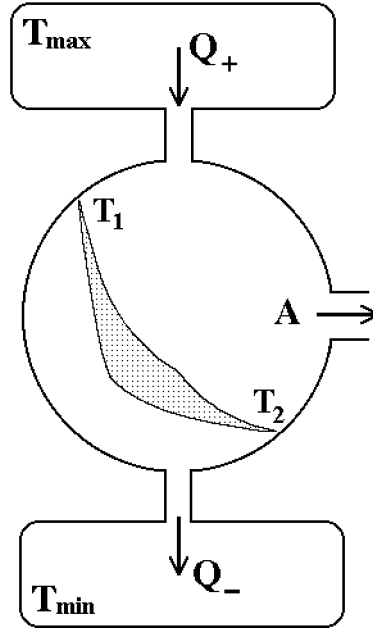


Рис. 37.4: Цикл внутреннеобратимой машины, имитирующий реальные энергетические установки.

Скорость теплообмена между рабочим телом и тепловыми резервуарами пропорциональна разности температур между ними:

$$\begin{aligned} \frac{Q_+}{t_+} &= c_+ (T_{max} - T_1), \\ \frac{Q_-}{t_-} &= c_- (T_2 - T_{min}), \end{aligned} \quad (37.23)$$

где Q_+, t_+ — получаемое количество теплоты и время его передачи рабочему телу при контакте с нагревателем, а Q_-, t_- — количество теплоты, отдаваемой холодильнику, и время этого процесса. Величины c_{\pm} — соответствующие коэффициенты теплопроводности. Тогда полное время t теплообмена равно

$$t = t_+ + t_- = \frac{1}{c_+} \cdot \frac{Q_+}{T_{max} - T_1} + \frac{1}{c_-} \cdot \frac{Q_-}{T_2 - T_{min}}. \quad (37.24)$$

Время, затрачиваемое машиной на внутренний цикл Карно, определяется временем установления равновесия в рабочем теле, которое существенно

меньше, чем время передачи тепла t . Поэтому t можно считать временем совершения полного цикла.

Как обычно, мы предполагаем, что отсутствуют потери тепла на трение и т.п. процессы. Количества теплоты Q_{\pm} и совершенная работа A связаны между собой соотношениями, найденными нами при изучении цикла Карно:

$$Q_+ = A \frac{T_1}{T_1 - T_2}, \quad Q_- = A \frac{T_2}{T_1 - T_2}. \quad (37.25)$$

Подставляя (37.25) в (37.24), находим для времени осуществления цикла выражение:

$$\frac{t}{A} = \frac{1}{T_1 - T_2} \left(\frac{1}{c_+} \cdot \frac{T_1}{T_{max} - T_1} + \frac{1}{c_-} \cdot \frac{T_2}{T_2 - T_{min}} \right). \quad (37.26)$$

Мощность рассматриваемой машины равна A/t . Представим себе, что мы проектируем такую машину. У нас имеется возможность выбрать оптимальным образом температуры $T_{1(2)}$, при которых функционирует внутренний цикл Карно. Выбирая их равными T_{max} и T_{min} , соответственно, мы добьемся максимального КПД. Но из формулы (37.26) следует, что при этом $t \rightarrow \infty$ и выходная мощность машины стремится к нулю. Более практично выбрать температуры таким образом, чтобы максимума достигла выходная мощность. Приравнивая нулю производные по T_1 и T_2 от выражения (37.26) для t/A , находим уравнения для этих температур. Опуская детали, приведем лишь конечный результат: максимальная выходная мощность равна

$$\left(\frac{A}{t} \right)_{max} = c_+ c_- \left(\frac{\sqrt{T_{max}} - \sqrt{T_{min}}}{\sqrt{c_+} + \sqrt{c_-}} \right)^2. \quad (37.27)$$

Достигается это значение при температурах внутреннего цикла Карно

$$T_1 = \sqrt{T_0 T_{max}}, \quad T_2 = \sqrt{T_0 T_{min}}, \quad (37.28)$$

где параметр T_0 , имеющий смысл некой средней температуры системы, определен соотношением:

$$\sqrt{T_0} = \frac{\sqrt{c_+ T_{max}} + \sqrt{c_- T_{min}}}{\sqrt{c_+} + \sqrt{c_-}}. \quad (37.29)$$

Очевидно, что КПД нашей машины равен КПД *внутреннего* цикла Карно $1 - T_2/T_1$. Поскольку отношение температур внутреннего цикла равно

квадратному корню из отношения температур нагревателя и холодильника, находим для КПД внутреннеобратимой машины:

$$\eta_{\text{вот}} = 1 - \sqrt{\frac{T_{\min}}{T_{\max}}}. \quad (37.30)$$

Легко убедиться, что КПД меньше максимально возможного $\eta_C = (1 - T_{\min}/T_{\max})$, но зато мы выиграли в выходной мощности. Любопытно, что КПД оптимизированной по мощности внутреннеобратимой машины не зависит от коэффициентов теплопроводности: как и в цикле Карно, он определяется лишь отношением температур нагревателя и холодильника. Авторы концепции внутреннеобратимой машины (F. L. Curzon and B. Ahlborn, Amer. J. Phys. **43**, 22, 1975) приводят следующую таблицу, где сравниваются несколько крупных электростанций. Видно, что формула (37.30) гораздо лучше соответствует практике, нежели КПД идеального цикла Карно.

Таблица 37.1: Сравнение наблюдаемых КПД нескольких электростанций разных типов с КПД цикла Карно η_C и цикла внутреннеобратимой машины $\eta_{\text{вот}}$.

Местонахождение и тип электростанции	T_{\min} (°C)	T_{\max} (°C)	η_C	$\eta_{\text{вот}}$	Наблюдае- мый КПД
West Thurrock, Великобритания (угольная)	25	565	0.64	0.40	0.36
CANDU, Канада (ядерная)	25	300	0.48	0.28	0.30
Larderello, Италия (геотермальная)	80	250	0.33	0.18	0.16

В заключение этого параграфа приведем численный пример.

Задача 37.50. Пусть коэффициенты теплопроводности c_{\pm} одинаковы и таковы, что при разнице температур $\Delta T = 10 \text{ K}$ мощность теплового потока между тепловыми резервуарами и рабочим телом составляет 1 кВт. Иными словами, $c_+ = c_- = c = 100 \text{ Вт/К}$. Пусть, далее, температуры резервуаров составляют $T_{\max} = 550^\circ\text{C} = 823 \text{ K}$ и $T_{\min} = 20^\circ\text{C} = 293 \text{ K}$. Найти максимальную выходную мощность внутреннеобратимой тепловой машины и температуры $T_{1(2)}$, при которых должно функционировать рабочее тело, использующее цикл Карно.

Решение. Из формулы (37.29) следует, что при равенстве коэффициен-

тов теплопроводности “средняя” температура T_0 определяется как

$$T_0 = \left(\frac{\sqrt{T_{max}} + \sqrt{T_{min}}}{2} \right)^2 = 524.5 \text{ K}.$$

Используя соотношения (37.28), находим оптимальные температуры $T_1 = \sqrt{T_0 T_{max}} = 657 \text{ K}$ (384°C) и $T_2 = \sqrt{T_0 T_{min}} = 392 \text{ K}$ (119°C). КПД такой установки равен $\eta_{\text{вон}} = 0.403$ (ср. $\eta_C = 0.644$). При таком образом выбранных температурах рабочего тела достигается максимальная выходная мощность, определяемая по формуле (37.27):

$$\left(\frac{A}{t} \right)_{max} = c \left(\frac{\sqrt{T_{max}} - \sqrt{T_{min}}}{2} \right)^2 \approx 3.35 \text{ кВт}.$$

■

37.5 Второе начало термодинамики

Конечно, сравнение лишь пары циклов с циклом Карно не может служить доказательством максимальной (по КПД) эффективности последнего. Но даже если мы переберем все мыслимые циклы, то все равно искомого доказательства не получим. Ведь в цикле Карно в качестве рабочего тела используется идеальный газ. Быть может, если заставить работать какое-либо другое вещество, мы сумеем превзойти КПД цикла Карно? Вообразим, что такая тепловая машина X принципиально возможна и посмотрим, к каким последствиям это приведет. Используя эту гипотетическую тепловую машину с КПД η_X , соорудим новую установку: соединим машину X с холодильной установкой Карно и подсоединим их к одному и тому же нагревателю (находящемуся при температуре T_1) и холодильнику (находящемуся при температуре T_2). Схема установки изображена на рис. 37.5.

Как будет работать наш агрегат? Машина X забирает теплоту Q_1 от нагревателя, часть ее превращает в полезную работу $A = \eta_X Q_1$, а остаток $Q_2 = (1 - \eta_X) Q_1$ передает холодильнику. Вся полезная работа A (предполагается, что исключены потери энергии) используется для приведения в действие холодильной установки Карно, КПД которой равен $\eta_{\text{хол}} = T_2/T_1$, а холодильный коэффициент $\eta' = T_2/(T_1 - T_2)$ [см. уравнения (37.13)]. Это значит, что установка Карно забирает из холодильника

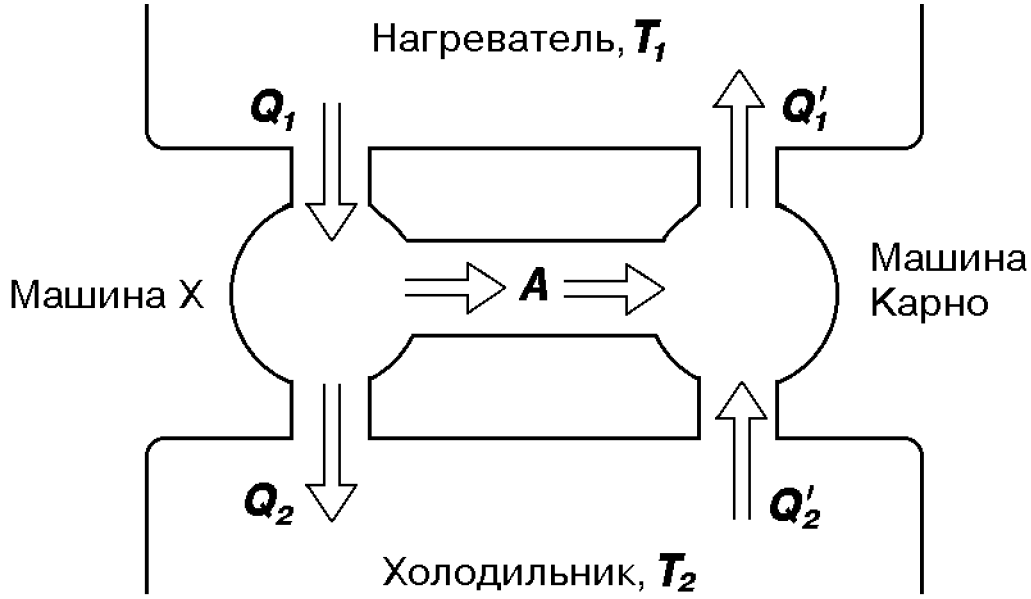


Рис. 37.5: К вопросу о невозможности вечного двигателя второго рода.

теплоту

$$Q'_2 = \eta' A = \eta_X \frac{T_2}{T_1 - T_2} Q_1 \quad (37.31)$$

и передает нагревателю теплоту

$$\begin{aligned} Q'_1 &= \frac{Q'_2}{\eta_{\text{хол}}} = \eta_X \frac{T_1}{T_1 - T_2} Q_1 = \frac{\eta_X}{1 - T_2/T_1} Q_1 = \\ &= Q_1 \frac{\eta_X}{\eta_C}, \end{aligned} \quad (37.32)$$

где, напомним, η_C — КПД *тепловой* машины Карно.

В результате действия агрегата из двух машин получился следующий итог. Никакой работы не произведено, так как вся работа от действия тепловой машины X потрачена на приведение в действие установки Карно. От холодильника отнято количество теплоты

$$\begin{aligned} \Delta Q &= Q'_2 - Q_2 = Q_1 \left(\eta_X \frac{T_2}{T_1 - T_2} + \eta_X - 1 \right) = \\ &= Q_1 \left(\eta_X \frac{T_1}{T_1 - T_2} - 1 \right) = Q_1 \left(\frac{\eta_X}{1 - T_2/T_1} - 1 \right) = \\ &= Q_1 \left(\frac{\eta_X}{\eta_C} - 1 \right). \end{aligned} \quad (37.33)$$

Точно такое же количество теплоты передано нагревателю: как следует из (37.32), $Q'_1 - Q_1 = \Delta Q$. Так что с законом сохранения энергии у нас все в порядке, но если $\eta_X > \eta_C$, то $Q'_1 > Q_1$, $Q'_2 > Q_2$. Это значит, что наш агрегат без всякой работы внешних сил передал какое-то количество теплоты от холодильника к нагревателю. Казалось бы, что беспокоиться не о чем, раз закон сохранения энергии не нарушен. Но никто в природе не наблюдал таких процессов передачи тепла от холодных тел к горячим, при которых в окружающей среде не происходило каких-либо изменений. В конечном итоге на основе опытных фактов было сформулировано *второе начало термодинамики*:

Невозможны процессы, единственным результатом которых был бы переход тепла от тела менее нагретого к телу более нагретому.

Не следует думать, что второе начало термодинамики запрещает передачу тепла от холодного тела к горячему. Отнюдь нет, в холодильной установке так и происходит. Но ключевое слово в формулировке второго начала — это слово *единственный*. Передача тепла от холодного тела к нагретому — не единственный результат действия холодильной установки, она связана с источником внешней работы, за счет которой и функционирует.

Многочисленные опыты и наблюдения привели ко второму началу термодинамики и пониманию, что оно является фундаментальным законом природы. Коль скоро это так, то из второго начала следует вывод: для любой гипотетической тепловой машины X ее КПД не превосходит КПД цикла Карно: $\eta_X \leq \eta_C$.

У второго начала термодинамики есть и другая формулировка:

Невозможно осуществление периодического процесса, единственным результатом которого было бы получение работы за счет тепла, взятого из одного источника.

Иными словами, нельзя построить установку, где все тепло Q_1 , полученное от нагревателя, преобразовывалось бы в полезную работу $A = Q_1$. Тогда КПД такой установки (ее называют *вечным двигателем второго рода*) равнялся бы единице и превысил бы КПД цикла Карно. Таким образом, второе начало термодинамики запрещает существование вечного двигателя второго рода: какое-то количество полученного тепла

обязательно должно быть передано другим телам (холодильнику). Изобретателям остается только пожалеть об этом. Как было бы здорово, если бы можно было использовать огромную тепловую энергию, накопленную, скажем, в мировом океане! Увы, мы вынуждены сжигать топливо, что приводит и к расходованию природных ресурсов, и к выбросу углекислого газа и прочих продуктов сгорания, и к тепловому загрязнению окружающей среды вследствие принципиальной необходимости отводить часть теплоты в атмосферу или водоемы, играющие роль холодильника.

Вопрос о КПД тепловых машин тесно связан с т.н. *обратимостью* процессов. Процесс называется обратимым, если он может быть проведен в обратном направлении, через ту же последовательность равновесных состояний, но в обратном порядке. Обратимость процессов в термодинамике сродни отсутствию трения в механике. Так же как в механике наилучшим механизмом является механизм без трения, так и здесь наилучшей тепловой машиной является обратимая машина. Чтобы показать это, снова обратимся к нашему агрегату на рис. 37.5. Мы не предполагали, что машина X обратима, но получили, что ее КПД не может превышать КПД тепловой машины Карно, работающей в паре с ней в обратном направлении: $(\eta_X \leq \eta_C)$. Пусть теперь машина X будет обратимой. Запустим наш агрегат в обратном направлении: машина Карно производит полезную работу, и она используется для запуска машины X как холодильной установки. Но тогда с помощью таких же аргументов мы получим противоположное неравенство $\eta_X \geq \eta_C$. Из двух противоположных неравенств следует единственный вывод: КПД обеих машин равны: $\eta_X = \eta_C$. Таким образом, все обратимые тепловые машины имеют *одинаковый* КПД, совпадающий с КПД машины Карно. Необратимые же машины имеют меньший КПД

Какие машины в принципе могут быть обратимыми? Мы видели, что тепло может течь только от нагретых тел к холодным. Это и создает необратимость подобных процессов. Есть два исключения. В адиабатном процессе вообще не происходит передачи тепла. Медленно сжимая поршнем газ в теплоизолированном сосуде, мы совершаем работу, нагревая при этом газ. Если отпустить поршень, то газ адиабатно расширится, охладившись до прежней температуры и совершив то же количество работы за счет своей внутренней энергии. Мы имеем дело с обратимым процессом. Другой случай, когда процесс передачи тепла происходит

при одинаковой температуре двух тел. Тогда тоже нет выделенного направления переноса тепловой энергии и такой (изотермический) процесс также будет обратим. Таким образом, обратимыми могут быть адиабатный и изотермический процессы и любой цикл, построенный из таких процессов. С одним из них, циклом Карно, мы уже знакомы.

Но если тепло переносится при разных температурах контактирующих тел и тем более, если в системе есть трение или иные потери энергии, если в газе возникают ударные волны и прочее, то процесс будет необратимым. Взрыв паров бензина в цилиндре автомобильного двигателя не является обратимым процессом: движение поршня в обратном направлении никогда не приводит к рекомбинации продуктов взрыва обратно в пары бензина.

37.6 Энтропия

В классической механике и электродинамике мы привыкли к тому, что невозможность какого-то процесса, как правило, связана с каким-то законом сохранения (энергии, импульса, электрического заряда и т.п.). Почему же невозможен вечный двигатель второго рода? Вроде бы он не нарушает никаких законов сохранения? Чтобы понять это, надо обратиться к новой функции состояния S , называющейся *энтропия*.

Путь к этой новой для нас функции состояния недолог: надо взять уравнение первого начала термодинамики

$$\delta Q = p dV + dU$$

и разделить его обе части на температуру. Прделаем это. Прежде всего учтем, что

$$\frac{dU}{T} = \frac{m}{\mu} c_{m,V} \frac{dT}{T} = \frac{m}{\mu} c_{m,V} d(\ln T).$$

Далее возьмем выражение для элементарной работы $\delta A = p dV$ и выразим объем через давление и температуру с помощью уравнения состояния идеального газа:

$$\frac{\delta A}{T} = \frac{p dV}{T} = \frac{m}{\mu} R \frac{p}{T} d\left(\frac{T}{p}\right) = \frac{m}{\mu} R d\left(\ln \frac{T}{p}\right).$$

Получим в итоге:

$$\frac{\delta Q}{T} = d\left[\frac{m}{\mu} (c_{m,p} \ln T - R \ln p)\right], \quad (37.34)$$

где использовано соотношение между молярными теплоемкостями $c_{m,p} = c_{m,V} + R$. Правая часть представляет собой дифференциал функции термодинамических параметров:

$$S = \frac{m}{\mu} (c_{m,p} \ln T - R \ln p + S_0), \quad (37.35)$$

где S_0 — постоянная интегрирования, не зависящая от термодинамических параметров системы (давления, объема, температуры). Эта функция называется энтропией. Получилось так, что величина δQ , не являющаяся дифференциалом какой-либо функции состояния, при делении на T стала таковым: $\delta Q/T = dS$.

При замкнутом цикле, когда система возвращается в исходное состояние, изменение любой функции состояния (в частности, энтропии) равно нулю:

$$\oint dS = \oint \frac{\delta Q}{T} = 0. \quad (37.36)$$

Знак криволинейного интеграла означает, что интегрирование ведется по замкнутому контуру.

Проверим выполнение (37.36) на примере цикла Карно. Поскольку там тепло получается и отдается на изотермах, температуру можно вынести из-под знака интеграла, и тогда интегрирование даст просто количество теплоты, поделенное на температуру, при которой оно получается или отдается. И действительно, выше было найдено, что на изотермических ветвях цикла при температуре T_1 газ получает теплоту

$$Q_1 = \frac{m}{\mu} R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1},$$

а при температуре T_2 — отдает теплоту

$$Q_2 = \frac{m}{\mu} R T_2 \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Выполнение равенства

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{(-Q_2)}{T_2} = 0$$

теперь очевидно. Напомним, что получаемое тепло имеет положительный знак, а отдаваемое — отрицательный; мы же определили ранее Q_2 как абсолютную величину отдаваемого тепла.

Еще один пример — цикл двигателя внутреннего сгорания (см. рис. 37.3). Тепло получается и отдается на изобарах, так что $dQ = C_V dT$ и $dS = dQ/T = C_V d(\ln T)$. Поэтому для приращения энтропии на ветви $2 \rightarrow 3$ имеем:

$$\Delta_{2 \rightarrow 3} S = \int_2^3 \frac{\delta Q}{T} = C_V \ln \frac{T_3}{T_2},$$

и для изменения энтропии на ветви $4 \rightarrow 1$ находим:

$$\Delta_{4 \rightarrow 1} S = \int_4^1 \frac{\delta Q}{T} = C_V \ln \frac{T_1}{T_4}.$$

Заметим, что на этой части ветви изменение энтропии имеет отрицательный знак. Сумма же этих результатов дает изменение энтропии рабочего вещества в указанном цикле:

$$\Delta S = \oint \frac{\delta Q}{T} = \Delta_{2 \rightarrow 3} S + \Delta_{4 \rightarrow 1} S = C_V \ln \frac{T_1 T_3}{T_2 T_4} = 0,$$

в силу соотношения (37.19) между температурами.

Проведем теперь похожие выкладки с произвольным циклом. Выделим в нем две части: знаком $+$ обозначим те фазы процесса, когда система получает тепло, а знаком $-$ фазы, когда система отдает тепло. Поскольку полный интеграл равен нулю, аналогичные интегралы по двум частям цикла равны между собой:

$$\oint_+ \frac{\delta Q}{T} = \oint_- \frac{(-\delta Q)}{T}. \quad (37.37)$$

Если обозначить через T_1 максимальную температуру в первой части цикла, то неравенство $T \leq T_1$ влечет за собой неравенство:

$$\oint_+ \frac{\delta Q}{T} \geq \frac{1}{T_1} \oint_+ \delta Q = \frac{Q_1}{T_1},$$

где Q_1 как и прежде означает полное количество теплоты, полученное системой. Если ввести минимальную температуру T_2 во второй части цикла, то из $T \geq T_2$ следует:

$$\oint_- \frac{-\delta Q}{T} \leq \frac{1}{T_2} \oint_- (-\delta Q) = \frac{Q_2}{T_2},$$

где Q_2 — количество теплоты, отданное системой. Из этих неравенств и соотношения (37.37) следует, что

$$\frac{Q_1}{T_1} \leq \frac{Q_2}{T_2} \quad \text{или} \quad \frac{Q_2}{Q_1} \geq \frac{T_2}{T_1}. \quad (37.38)$$

Наконец, получаем неравенство для КПД цикла:

$$\eta = \left(1 - \frac{Q_2}{Q_1}\right) \leq \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = \eta_C. \quad (37.39)$$

С помощью понятия энтропии мы получили иным путем тот же результат: КПД любого замкнутого цикла не превышает КПД цикла Карно.

Таким образом, мы убедились, что новая функция состояния — энтропия — связана со вторым началом термодинамики. До сих пор мы ограничивались равновесными процессами. Рассмотрим пример неравновесного процесса. Пусть в начальном состоянии имеются два одинаковых идеальных газа с равными массами m при одинаковой температуре T , но разных давлениях p_1 и p_2 . Определить изменение энтропии ΔS при соединении сосудов с газом.

В первый момент после соединения сосудов, когда газы еще не смешались, энтропия системы равна сумме энтропий газов в отдельных сосудах:

$$S_1 + S_2 = \frac{2m}{\mu} \left(c_{m,p} \ln T - \frac{R}{2} \ln p_1 p_2 + S_0 \right). \quad (37.40)$$

Найдем теперь объемы сосудов:

$$V_1 = \frac{m}{\mu} RT \frac{1}{p_1}, \quad V_2 = \frac{m}{\mu} RT \frac{1}{p_2}.$$

После соединения сосудов масса газа становится равной $2m$, а объем — $V_1 + V_2$. Значит давление p после соединения сосудов равно

$$p = \frac{2m}{\mu} R \frac{T}{V_1 + V_2} = \frac{2p_1 p_2}{p_1 + p_2}. \quad (37.41)$$

Поэтому энтропия газа после соединения сосудов равна

$$S = \frac{2m}{\mu} \left(c_{m,p} \ln T - R \ln \frac{2p_1 p_2}{p_1 + p_2} + S_0 \right). \quad (37.42)$$

Изменение энтропии следует из (37.40) и (37.42):

$$\begin{aligned} \Delta S &= S - S_1 - S_2 = \frac{m}{\mu} R \left(\ln p_1 p_2 - 2 \ln \frac{2p_1 p_2}{p_1 + p_2} \right) = \\ &= \frac{m}{\mu} R \ln \frac{(p_1 + p_2)^2}{4p_1 p_2}. \end{aligned} \quad (37.43)$$

Под знаком логарифма стоит величина, всегда бóльшая единицы. Стало быть, энтропия увеличилась: $\Delta S > 0$.

Самостоятельно предлагается решить аналогичную задачу: определить изменение энтропии при смешивании равных масс двух одинаковых идеальных газов, находящихся при одинаковом давлении p , но разных температурах T_1 и T_2 . Ответ:

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} c_{m,p} \ln \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2}. \quad (37.44)$$

Снова убеждаемся, что $\Delta S > 0$.

Цель этих примеров прежде всего состояла в том, чтобы на частном случае продемонстрировать общее утверждение: *если замкнутая система в некоторый момент времени находится в неравновесном состоянии, то процессы, протекающие в ней, приводят к возрастанию энтропии, которая достигает максимума, когда система придет в равновесие*. Когда мы смешали газы и получили неравновесное состояние с энтропией, равной сумме энтропий, то давления стали выравниваться и энтропия возросла. То же самое происходило при выравнивании температур.

37.7 Статистический смысл энтропии

Закон возрастания энтропии является иной формулировкой второго начала термодинамики. Как мы сейчас убедимся, его смысл сводится к тому, что система стремится к более вероятному состоянию. Вспомним задачу о смешивании газов с разными давлениями. В принципе, можно представить себе обратный процесс: газ в сосуде самопроизвольно разделится на две части, так что давления в каждой из частей будут различаться. Никакой закон сохранения не противоречит такому процессу, но он никогда не происходит в реальности, поскольку вероятность его ничтожно мала. Закон возрастания энтропии связан с тем, что данное *макроскопическое* состояние системы (заданные параметры T, p, V) может быть реализовано множеством способов при различных *микроскопических* состояниях (положения и скорости молекул). Понятно ведь, что можно поменять импульсы или положения какой-то пары молекул, и мы получим другое микроскопическое состояние, но термодинамически система не изменится. Число микроскопических состояний, соответствующих тому же макроскопическому состоянию, определяет вероятность по-

следнего: чем большим числом способов можно его реализовать, тем оно вероятнее. Возрастание энтропии, как уже говорилось, означает лишь то, что система стремится перейти в более вероятное состояние, которое реализуется бóльшим числом микроскопических состояний.

Чтобы убедиться, что энтропия действительно связана с вероятностью, рассмотрим еще один неравновесный процесс. Пусть имеется сосуд объемом V , разделенный на правую и левую половины непроницаемой перегородкой. Пусть идеальный газ из N молекул содержится в левой половине сосуда, в то время как правая половина от молекул свободна. Перегородку делают проницаемой, так что газ может адиабатно расширяться в пустоту как в эффекте Джоуля-Томсона. Определим изменение энтропии газа. Поскольку при расширении в пустоту не совершается работы против внешней силы, а тепла извне не поступает в силу условия адиабатности, идеальный газ не изменяет свою температуру. Увеличение же в два раза объема, занимаемого молекулами газа, приводит к двукратному уменьшению его давления от начального значения p_1 до конечного $p_2 = p_1/2$. Поэтому энтропии газа до и после расширения равны, соответственно:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{m}{\mu} (c_{m,p} \ln T - R \ln p_1 + S_0), \\ S_2 &= \frac{m}{\mu} \left(c_{m,p} \ln T - R \ln \frac{p_1}{2} + S_0 \right), \end{aligned} \quad (37.45)$$

а изменение энтропии дается выражением

$$\begin{aligned} \Delta S &= S_2 - S_1 = \frac{m}{\mu} R \ln 2 = N k_B \ln 2 = \\ &= k_B \ln 2^N. \end{aligned} \quad (37.46)$$

Каково же происхождение фактора 2^N под знаком логарифма? Проследим за какой-нибудь молекулой. При непроницаемой перегородке она могла находиться только в левой половине сосуда, а потом ей стали доступны обе половины. Число способов размещения данной молекулы увеличилось в два раза, и так — для каждой из N молекул. Поэтому полное число способов размещения молекул увеличилось в 2^N раз. В такое же число раз вероятность состояния газа, равномерно занимающего полный объем сосуда, больше вероятности состояния, когда при проницаемой перегородке все молекулы сосредоточатся в левой половине, оставив правую свободной. В принципе, это не противоречит никаким законам, но при

$N = N_A = 6.02 \cdot 10^{23}$ молекул (один моль вещества) вероятность такого события фантастически, грандиозно, невероятно мала (2^{-N_A}).

Еще один пример на ту же тему. Возьмем тот же сосуд и пусть в каждой из его половинок находится равное число $N/2$ молекул при одинаковых температуре и давлении. Мысленно пометим молекулы левой половины черным цветом, а правой — белым, и пусть молекулы слева и справа больше ничем не отличаются. После этого соединим сосуды и определим изменение энтропии ΔS . После перемешивания температуры газов не изменятся, а их *парциальные* давления уменьшатся в два раза, так что полное давление, равное сумме парциальных, останется прежним. Поэтому процесс перемешивания сродни расширению газов черных и белых молекул в пустоту, и мы можем воспользоваться результатом (37.46), учитывая что число молекул каждого цвета равно теперь $N/2$. Складывая затем изменения энтропий обоих газов, получаем

$$\Delta S = 2k_B \ln 2^{N/2} = k_B \ln 2^N \quad (37.47)$$

(N пробегает теперь только четные значения). Убедимся, что и в данном случае 2^N описывает увеличение числа способов распределения молекул по сосуду.

Рассмотрим рис. 37.6. Пусть у нас есть всего по одной молекуле в каждом из сосудов ($N = 2$). Раньше черная молекула могла находиться только в левом сосуде, а после смешивания для нее стали доступны обе части соединенного сосуда. Аналогично расширились возможности для белой молекулы, которая ранее была ограничена в своих передвижениях правым сосудом. Итак, после смешивания молекулы свободно блуждают по сосудам и мы имеем в четыре (2^2) раза больше вариантов их размещения (см. верхнюю часть рис. 37.6). Если у нас имеется $N = 4$ молекулы, то после соединения у них появляется в $16 = 2^4$ больше возможностей распределиться по объему системы (нижняя часть рисунка). Ясно, что в общем случае N молекул число 2^N действительно есть не что иное, как фактор, на который возрастает число способов распределения молекул по объему системы.

Можно дать статистическое определение энтропии:

$$S = k_B \ln \Omega, \quad (37.48)$$

где Ω — число *микроскопических* способов, которыми можно реализовать данное *макроскопическое* состояние. Расчет вероятности макроско-

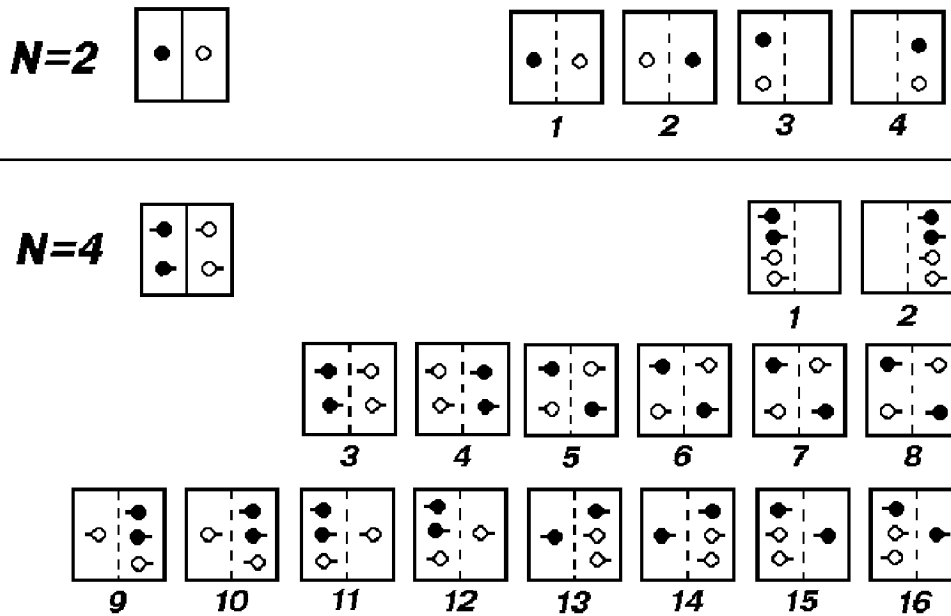


Рис. 37.6: Возрастание энтропии при смешивании одинаковых порций газа. При подсчете различных способов распределения молекул по частям соединенного сосуда надо различать каждую черную и каждую белую молекулы, для чего они снабжены “хвостиками”, торчащими налево либо направо.

пических состояний и подстановка их в эту формулу приводит к прежним выражениям для энтропии идеального газа. Использование логарифма в определении энтропии позволяет свести умножение вероятностей к сложению энтропий. В наших примерах энтропия, приходящаяся на одну молекулу, возросла на величину $\Delta_1 S = k_B \ln 2$. Двойка под логарифмом — это увеличение в два раза свободного пространства, доступного молекуле. Энтропия газа из N молекул в N раз больше: $\Delta S = N k_B \ln 2 = k_B \ln 2^N$.

В классической статистике энтропия определяется с точностью до аддитивной постоянной S_0 . В квантовой статистике, оперирующей с дискретными уровнями энергии, эта постоянная может быть определена. Оттуда, в частности, следует *теорема Нернста*, иногда называемая *третьим началом термодинамики*: при стремлении температуры к абсолютному нулю энтропия также стремится к нулю. При абсолютном нуле температуры всякое тепловое движение прекращается и все молекулы находятся в состоянии с наименьшей энергией. Поэтому есть только один способ реализации такого состояния ($\Omega = 1$), так что $S = 0$.

Представим себе, что мы снимаем фильм о смешивании молекул в сосудах. Сначала у нас слева — черные молекулы, а справа — белые. Молекулы сталкиваются, путешествуют по сосудам и в конечном итоге равномерно перемешиваются (так сказать, их смесь дает более или менее ровный серый цвет). Такое поведение системы большого числа частиц соответствует нашей практике. Запустим теперь фильм в обратном направлении. В каждом отдельном кадре, то есть в конкретном акте соударения молекул, мы не увидим ничего особенного. Законы механики не нарушатся на нашем экране, поскольку они обратимы. Но конечный итог “обратного” фильма поистине чудесен: казалось бы беспорядочные столкновения молекул привели к разделению серого цвета на черный слева и белый справа. В таком процессе энтропия уменьшается, а система приходит от беспорядка к порядку. На самом деле каждая молекула имела в точности такие скорости и положения, испытывала именно такие, а не другие столкновения, чтобы в конце концов прийти в ту половину сосуда, где она оказалась. Такое событие в высшей степени невероятно, хотя и не противоречит микроскопическим законам физики. Закон возрастания энтропии утверждает, что система с течением времени имеет тенденцию перейти в менее упорядоченное состояние. Как говорится, “энтропия возрастает, а мир стремится к хаосу”. Вопрос же о самоорганизации материи, о возникновении порядка из хаоса — предмет совсем другой науки, синергетики.

Контрольные вопросы

1. Закон сохранения энергии — универсальный закон природы. В то же время в прессе и выступлениях политиков можно встретить словосочетание “энергосберегающие технологии”. Что имеется в виду в последнем случае?
2. Может ли данное количество механической энергии быть полностью превращенным в тепло? Если ответ положителен, приведите примеры, если отрицателен — дайте объяснение.
3. Станет ли КПД тепловой машины равным 100%, если свести к нулю трение в частях машины?
4. Что дает большее увеличение КПД идеальной тепловой машины Карно — увеличение на 10° температуры нагревателя или понижение на 10° температуры холодильника?
5. На Гавайских островах реализована идея создания теплового двигателя, действие которого основано на различии между температурами на поверхности океана и

на глубине нескольких сотен метров. В тропических широтах эти температуры могут быть равны, соответственно, 25°C и 5°C . Какой максимальный КПД мог бы иметь такой двигатель?

6. Почему расход топлива автомобилем зимой больше, чем летом?
7. Тепловая электростанция обеспечивает мощность 1 ГВт и использует паровые турбины. Пар подается в турбины подогретым до температуры 520 К и отдает избыточное (неиспользованное) тепло речной воде при температуре 290 К. Будем считать, что турбина работает по обратимому циклу Карно. Если скорости расхода речной воды $40 \text{ м}^3/\text{с}$, то на сколько повысится температура речной воды ниже по течению от электростанции?
8. Тот же вопрос, если электростанция работает по циклу внутреннеобратимой тепловой машины.
9. Обратимы ли процессы упругого и неупругого удара шаров?
10. Желая охладить комнату, некий гражданин включил холодильник и открыл его дверцу. Комната теплоизолирована от окружающего воздуха. Станет ли в комнате холоднее?
11. Первое начало термодинамики иногда несколько вольно формулируют следующим образом: “Невозможно получить что-либо из ничего”, а второе начало: “Невозможно точно восстановить разрушенное”. Объясните, согласуются ли эти вольные формулировки со строгими формулировками первого и второго начала термодинамики.
12. Океаны содержат огромное количество тепловой энергии. Почему, вообще говоря, нельзя использовать всю эту энергию для получения полезной работы?
13. Чему равны приращения энтропии $\Delta S/\Delta m$ в расчете на килограмм проходящей речной воды в вопросах 7, 8?
14. Два автомобиля массами 1200 кг каждый, двигаясь со скоростью 60 км/час навстречу друг другу, сталкиваются и останавливаются. На сколько изменится энтропия Вселенной после этого столкновения?

Глава 38

Взаимодействие излучения с веществом

В этой главе речь пойдет о физических принципах работы квантовых усилителей и генераторов. Принципиальная возможность существования квантового усилителя была отмечена в 1939 г. В. А. Фабрикантом, который обратил внимание на возможность усиления света в среде с инверсной заселенностью. Первые квантовые генераторы, работающие в диапазоне сантиметровых волн, были созданы в 1953 г. (мазеры), а в 1960 г. был создан первый аналогичный прибор, работающий в оптическом диапазоне длин волн (лазер). Название этих приборов происходит от первых букв английских названий: мазер --- Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation (усиление микроволн с помощью вынужденного излучения), лазер --- Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation (усиление света с помощью вынужденного излучения). В 1964 г. Н. Басову, А. Прохорову и Ч. Таунсу за фундаментальные работы в области квантовой электроники, которые привели к созданию генераторов и усилителей нового типа --- мазеров и лазеров, была присуждена Нобелевская премия.

38.1 Вывод формулы М. Планка по А. Эйнштейну

Ранее мы обсудили, что атомы и ансамбли атомов могут находиться в различных состояниях, характеризующихся набором квантовых чисел. Переход из одного энергетического состояния E_n в другое E_m сопровождается поглощением или испусканием кванта электромагнитного излучения — фотона, обладающего энергией $\hbar\omega = E_n - E_m$, где ω — частота излучения. Если $E_n > E_m$, то мы имеем дело со *спонтанным* (самопро-

извольным) переходом атома с более высокого на более низкий уровень, в результате чего излучается фотон с энергией $\hbar\omega$. Схематически этот процесс можно изобразить в виде реакции $A^* \rightarrow A + \gamma$, где звездочка указывает на возбужденное состояние атома A .

Если же $E_n < E_m$, то мы имеем дело с *вынужденным* переходом, сопровождающимся поглощением фотона, энергия $\hbar\omega$ которого идет на увеличение энергии атома (перевод его на более высокий, возбужденный уровень): $\gamma + A \rightarrow A^*$.

В 1918 г. А. Эйнштейн обратил внимание на то, что существуют и “испускаемые” переходы другого типа, которые происходят под действием внешнего электромагнитного излучения и вероятность которых возрастает с увеличением интенсивности излучения. В таком процессе фотон падает на возбужденный атом и заставляет его перейти в низшее состояние с излучением другого фотона. В конечном итоге в системе оказывается два фотона — начальный и излученный: $\gamma + A^* \rightarrow A + \gamma + \gamma$. Возникающее в результате таких переходов излучение называется *индуцированным* излучением. Спонтанное излучение хаотично по направлениям и фазам испускаемых фотонов, т.к. излучающие атомы независимы. Индуцированное же излучение должно быть по своим характеристикам совершенно тождественно с тем внешним излучением, которое, проходя через вещество, его породило. А именно: индуцированное излучение имеет ту же частоту, направление и поляризацию, что и вынуждающее внешнее излучение. Фазы испускаемых фотонов скоррелированы с вынуждающими колебаниями, т.е. индуцированное излучение когерентно.

Выражения для вероятностей всех трех типов излучения рассчитываются в квантовой электродинамике. Во времена Эйнштейна эта теория еще не была создана, и он применил для анализа проблемы наглядные термодинамические соображения. Далее мы для простоты рассматриваем набор атомов, имеющих всего два уровня энергии E_1 и E_2 ($E_2 > E_1$).

Пусть в момент времени t какие-то N_2 из них находятся в более высоком состоянии 2 и пусть вероятность спонтанного излучения отдельного атома в единицу времени равна A_{21} . Тогда изменение числа атомов в состоянии 2 за малое время dt составит $dN_2 = -A_{21}N_2dt$. Знак минус указывает на убыль числа атомов на уровне 2. Величина A_{21} называется коэффициентом Эйнштейна для спонтанного излучения. Теперь интегрированием легко получаем:

$$N_2 = N_2(0)e^{-A_{21}t}, \quad (38.1)$$

где $N_2(0)$ — число атомов в состоянии 2 в начальный момент времени. По смыслу формулы величина $\tau = 1/A_{21}$ есть среднее время жизни атома в возбужденном состоянии (т.е. время, за которое число возбужденных атомов уменьшится в e раз). Этот параметр определяет характерное время затухания спонтанного излучения.

Представим теперь, что наши атомы находятся в равновесии с излучением частотой $\omega = (E_2 - E_1)/\hbar$ и спектральной плотностью энергии $u(\omega, T)$ (плотность энергии в единичном интервале частот). Спектральная плотность энергии пропорциональна числу фотонов данной частоты. Чем больше фотонов, тем вероятнее поглощение одного из них атомом. Поэтому для вероятности вынужденного поглощения излучения атомом в единицу времени можно написать выражение

$$W_{12} = B_{12}u(\omega, T), \quad (38.2)$$

где коэффициент Эйнштейна B_{12} характеризует свойства данного атома. Для числа переходов в возбужденное состояние за время dt имеем:

$$dN_{12} = B_{12}u(\omega, T)N_1dt. \quad (38.3)$$

Для вероятности индуцированного излучения Эйнштейн предложил использовать аналогичную формулу:

$$W_{21}^i = B_{21}u(\omega, T), \quad (38.4)$$

с каким-то другим, вообще говоря, коэффициентом B_{21} . Складывая W_{21}^i с вероятностью спонтанного перехода, получаем полную вероятность перехода из состояния 2 в состояние 1 в единицу времени

$$W_{21} = A_{21} + B_{21}u(\omega, T), \quad (38.5)$$

так что число переходов из возбужденного состояния за время dt равно:

$$dN_{21} = [A_{21} + B_{21}u(\omega, T)]N_2dt. \quad (38.6)$$

При термодинамическом равновесии вещества и электромагнитного поля должен соблюдаться баланс между процессами испускания и поглощения света, т.е. равенство полного числа актов испускания света и актов его поглощения. Такое равновесие устанавливается в замкнутой полости, температура T стенок которой поддерживается постоянной. Если в состоянии равновесия числа переходов $2 \rightarrow 1$ и $1 \rightarrow 2$ равны:

$$[A_{21} + B_{21}u(\omega, T)]N_2 = B_{12}u(\omega, T)N_1, \quad (38.7)$$

то мы получаем:

$$u(\omega, T) = \frac{A_{21}}{B_{12} \frac{N_1}{N_2} - B_{21}}. \quad (38.8)$$

Числа атомов при термодинамическом равновесии подчиняются закону Больцмана (см. Ч. II, уравнение (12.56)):

$$\frac{N_2}{N_1} = \exp \left[-\frac{E_2 - E_1}{k_B T} \right] = \exp \left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T} \right), \quad (38.9)$$

Отсюда

$$u(\omega, T) = \frac{A_{21}}{B_{12} \exp(\hbar\omega/k_B T) - B_{21}}. \quad (38.10)$$

При повышении температуры спектральная плотность должна неограниченно возрастать. Так будет лишь при условии $B_{21} = B_{12}$, т.е. коэффициенты Эйнштейна для вынужденного поглощения и индуцированного излучения света равны. Отсюда

$$u(\omega, T) = \frac{A_{21}/B_{21}}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1}. \quad (38.11)$$

Заметим также, что коэффициенты Эйнштейна не зависят от температуры, ибо относятся к отдельным актам поглощения-испускания фотонов атомом, а температура — это характеристика ансамбля атомов. Тогда в пределе высоких температур мы получаем из (38.11) выражение

$$u(\omega, T)_{|T \rightarrow \infty} = k_B T \frac{A_{21}}{\hbar\omega B_{21}}. \quad (38.12)$$

Из сопоставления предыдущей формулы с законом Рэлея-Джинса (27.18) следует тогда, что

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}. \quad (38.13)$$

Подставляя (38.13) в (38.11), мы получаем формулу Планка (27.26) для спектральной плотности излучения черного тела. Соотношения между коэффициентами Эйнштейна, выведенные им из простых термодинамических соображений, были подтверждены впоследствии точными расчетами.

Разделив $u(\omega, T)$ на число $(\omega^2/\pi^2 c^3)$ типов колебаний в единице объема в единичном интервале частот (см. формулу (27.17)), получаем среднюю энергию одного типа колебания (фотона) частотой ω :

$$\langle \varepsilon_\omega \rangle = \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1}. \quad (38.14)$$

Разделив в свою очередь это выражение на энергию фотона $\hbar\omega$, находим среднее число фотонов данной частоты при равновесии:

$$\langle n_\omega \rangle = \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1}. \quad (38.15)$$

С этой формулой и ее аналогами мы еще встретимся в нашем курсе.

38.2 Квантовые генераторы

Прохождение излучения через вещество. Инверсная заселенность

Снова рассмотрим систему атомов (вещество) с двумя энергетическими уровнями E_2 и E_1 ($E_2 > E_1$). Если на эту систему падает параллельный монохроматический пучок света с частотой $\omega = (E_2 - E_1)/\hbar$, то при прохождении им длины dx изменение плотности энергии пучка будет связано с резонансным поглощением и индуцированным (вынужденным) излучением атомов системы. За счет индуцированного излучения плотность энергии ρ в пучке возрастает, причем это изменение должно быть пропорционально а) плотности энергии в пучке, б) концентрации n_2 атомов в состоянии 2, в) пройденному расстоянию dx и, конечно, г) соответствующему коэффициенту Эйнштейна: $d\rho_+ = \beta B_{21} \rho n_2 dx$. Здесь β — некий коэффициент пропорциональности. Аналогично, за счет процессов поглощения фотонов плотность энергии в пучке уменьшается: $d\rho_- = -\beta B_{12} \rho n_1 dx$. Складывая $d\rho_+$ и $d\rho_-$, находим полное изменение $d\rho$ плотности энергии:

$$d\rho = \beta \rho (B_{21} n_2 - B_{12} n_1) dx. \quad (38.16)$$

Учитывая равенство коэффициентов Эйнштейна $B_{21} = B_{12}$, и вводя т.н. коэффициент абсорбции α , записываем это уравнение в виде:

$$d\rho = \alpha \rho dx, \quad \alpha = \beta B_{21} (n_2 - n_1). \quad (38.17)$$

Решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$\rho = \rho_0 e^{\alpha x}. \quad (38.18)$$

Эта формула дает плотность энергии в пучке фотонов при прохождении им слоя вещества толщиной x .

В термодинамическом равновесии, в соответствии с распределением Больцмана, коэффициент абсорбции α всегда отрицателен:

$$\alpha = \beta B_{21} n_2 \left(1 - \frac{n_1}{n_2} \right) = \beta B_{21} n_2 \left(1 - e^{(E_2 - E_1)/k_B T} \right) < 0. \quad (38.19)$$

Таким образом, плотность излучения убывает по мере прохождения пучка через вещество. Однако, если создать систему, в которой $n_2 > n_1$, то будет иметь место не ослабление, а усиление интенсивности пучка. Состояние системы, в котором $n_2 > n_1$, называется состоянием с инверсной заселенностью уровней. Обычно заселенность более высоких уровней уменьшается, но этот вывод, следующий из распределения Больцмана, относится к термодинамическому равновесию. Мы же сейчас рассматриваем неравновесный процесс. В системах с инверсной заселенностью коэффициент абсорбции α положителен, так что наличие инверсной заселенности создает принципиальную возможность усиления и генерации света.

Принцип работы лазера

Создание лазера стало возможным после того, как были найдены способы осуществления инверсной заселенности уровней в некоторых веществах. Первый практический генератор в видимой области спектра был создан в США Мейманом (1960 г.) на основе рубина. Рубин представляет собой кристаллическую решетку Al_2O_3 , содержащую небольшую (0.03%-0.05%) примесь Cr_2O_3 . На рис. 38.1 представлена схема энергетических уровней рубина.

Широкий уровень E_3 используется для возбуждения атомов хрома светом с широкой полосой частот в зелено-голубой области видимого света. Возбуждение ионов хрома Cr^{+++} за счет накачки энергии от внешнего источника изображено стрелкой W_{13} . Возбужденные атомы с этого уровня совершают быстрый безызлучательный переход на уровень E_2 (изображенно стрелкой S_{32}). Выделяемая энергия передается здесь кристаллу, а не выделяется в виде фотона. Время жизни уровня E_2 составляет

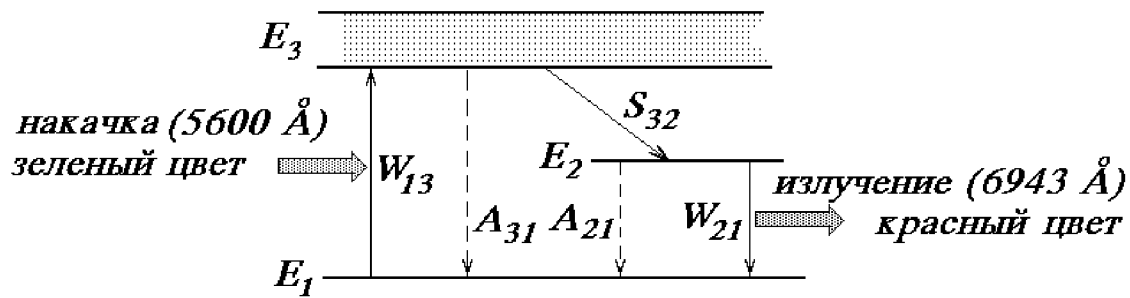


Рис. 38.1: Схема активной трехуровневой среды (рубин).

$10^{-6} \div 10^{-3}$ с, и при достаточной мощности накачки число ионов хрома на уровне E_2 , становится больше числа ионов на уровне E_1 . Таким образом, создается инверсная заселенность. Стрелками A_{31} и A_{21} изображены соответствующие спонтанные переходы на нижележащие уровни. Излученный при спонтанном переходе A_{21} фотон может вызвать испускание дополнительных фотонов (переход W_{21}), которые в свою очередь вызовут индуцированное излучение каскада фотонов с длиной волны $\lambda = 6943 \text{ Å}$.

Задача 38.51. Какой была бы населенность уровня E_2 в кристалле рубина при комнатной температуре, если бы не использовалась накачка?

Решение. Исходя из длины волны, испускаемой рубиновым лазером, находим разность энергий:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6.63 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8}{6.943 \cdot 10^{-7}} = 2.86 \cdot 10^{-19} \text{ Дж.}$$

При комнатной температуре $T = 300 \text{ К}$ имеем: $k_B T = 4.14 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$. Из распределения Больцмана следует теперь:

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\Delta E/k_B T} = e^{-69} = 10^{-30}. \blacksquare$$

Однако, создание активной среды с инверсной населенностью уровней — это лишь половина дела. Необходимо также создать режим генерации света, т.е. положительную обратную связь. Активная среда сама по себе способна усиливать проходящее излучение. Для получения режима генерации надо, чтобы индуцированное излучение компенсировало все потери в системе. Для этого активное вещество помещают в резонатор, образованный двумя параллельными зеркалами. Конструктивно кристалл

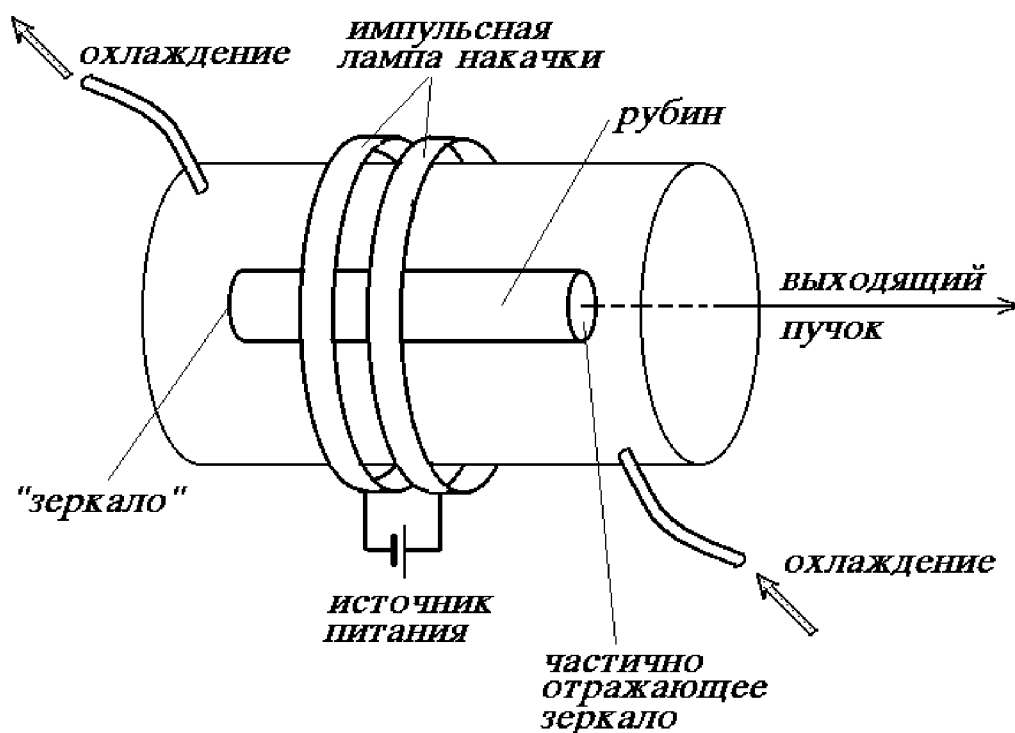


Рис. 38.2: Схема рубинового лазера.

рубина имел форму цилиндра длиной около 40 мм и диаметром около 5 мм. Торцы его были отполированы параллельно друг другу. Один из торцов был посеребрен так, что коэффициент отражения был близок к единице, а другой торец был полупрозрачным, т.е. коэффициент отражения $R \approx 0.5$.

Источником возбуждения была мощная импульсная ксеноновая лампа, обвивающая рубин спиралью (см. рис. 38.2). При достаточной мощности лампы большинство (около половины) ионов хрома переводится в возбужденное состояние. Процесс сообщения рабочему телу лазера (рубину) энергии для перевода атомов в возбужденное состояние называется накачкой. После того как достигается инверсная заселенность, первые спонтанно излучаемые фотоны, соответствующие переходу с уровня E_2 на основной уровень E_1 , вызывают индуцированное излучение, распространяющееся вдоль оси кристалла рубина. Напомним, что фотоны возникающие при возбужденном излучении, летят в том же направлении, что и падающие фотоны. Фотоны, направления движения которых образуют малые углы с осью кристаллического стержня, испытывают многократные отражения от торцов образца. Фотоны же, испущенные спонтанно в других направлениях, выходят из кристалла рубина через

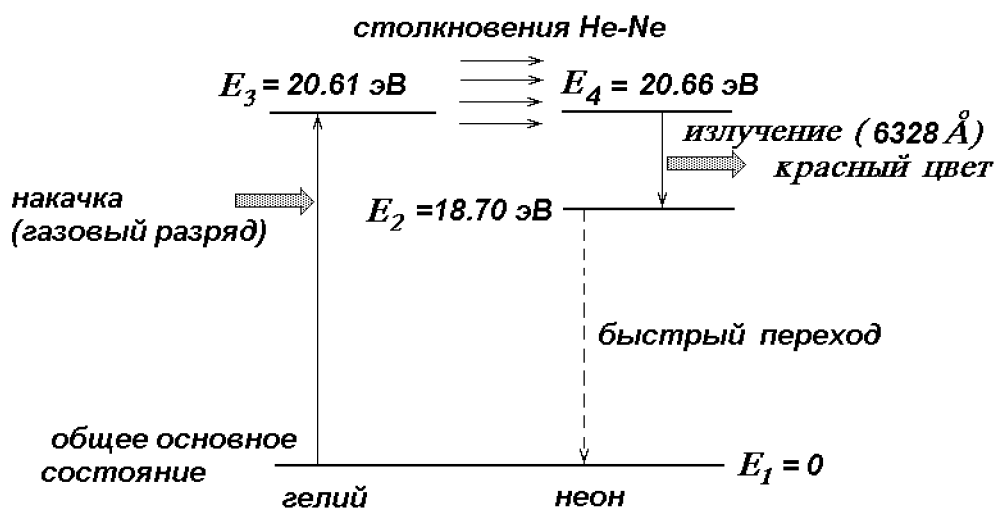


Рис. 38.3: Схема четырехуровневого He-Ne лазера.

его боковую поверхность и не участвуют в формировании выходящего пучка. Таким образом создается узкий пучок света, а многократное прохождение фотонов через активную среду индуцирует излучение все новых и новых фотонов, усиливая интенсивность выходного пучка.

В изложенной трехуровневой схеме для создания инверсной населенности уровня E_2 надо возбудить достаточное число атомов, что требует больших затрат энергии. Часто используют четырехуровневую схему, примером которой может служить гелий-неоновый лазер. В смеси гелия и неона с общей энергией основного состояния E_1 (которую мы принимаем за точку отсчета энергии) накачка происходит с помощью газового разряда, благодаря чему атомы гелия переходят в возбужденное состояние с энергией $E_3 = 20.61$ эВ (рис. 38.3). Случайно уровень $E_4 = 20.66$ эВ в атоме неона оказался близок к уровню E_3 в гелии, и при столкновении атомов гелия с атомами неона энергия возбуждения может быть передана последним без излучения. Таким образом, уровень E_4 оказывается более населенным, нежели нижележащий уровень $E_2 = 18.70$ эВ. Переход между ними сопровождается излучением с длиной волны 632.8 нм. На уровне E_2 атомы неона долго не задерживаются, быстро возвращаясь в основное состояние. Заметим, что уровень E_2 в неоне заселен крайне незначительно, и потому для создания инверсной населенности между E_4 и E_2 надо возбудить небольшое число атомов гелия, что требует гораздо меньших затрат энергии как на накачку, так и на охлаждение установки. На таком же принципе работают и некоторые твердотельные лазеры (например, стекло-Nd).

Задача 38.52. Найти относительную населенность уровня E_2 в неоне при комнатной температуре.

Решение. Эта задача отличается от предыдущей лишь численными значениями. Для разнообразия проведем вычисления в электронвольтах. Выразим сначала в этих единицах постоянную Больцмана: $k_B = 1.3806 \cdot 10^{-23} / 1.602 \cdot 10^{-19} = 8.617 \cdot 10^{-5}$ эВ/К, так что при комнатной температуре $k_B T = 25.85$ мэВ. Теперь легко находим:

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-18.70/25.85 \cdot 10^{-3}} = e^{-723.4} \sim 10^{-314}.$$

Столь малое число с практической точки зрения не отличается от нуля, и даже при легкой накачке создается инверсная населенность уровня E_4 .

Излучение лазеров отличается характерными особенностями:

- 1) Строгая монохроматичность ($\Delta\lambda \approx 0.1 \text{ \AA}$).
- 2) Высокая временная и пространственная когерентность.
- 3) Большая интенсивность пучка ($\approx 10^{13} \text{ Вт/мм}^2$). Короткие импульсы лазера незаменимы для изучения быстротекущих процессов. В импульсе развивается большая мощность (бывает, что превосходит мощность всех электростанций мира). Пример: небольшой лазер Nd/YAG, излучающий энергию 100 мДж, имеет длительность импульса 20 нс. Значит, его мощность составляет 10^{10} Вт , что равно мощности 10 блоков АЭС по миллион кВт каждый.
- 4) Излучение сосредотачивается в узком конусе с углом раствора $\approx 1''$. Ограничения на расходимость пучка накладываются только дифракционными явлениями. Такие узкие пучки позволяют, например, “приваривать” сетчатку к главному дну.

Типы лазеров

В данном пособии мы не можем остановиться подробно на технических применениях лазеров различных типов в виду их многообразия и невозможности подробного освещения в столь коротком курсе. Исключение сделано лишь для проектов использования лазерного оружия в американской программе СОИ (“звездные войны”), так как эта тема, вызывающая большой интерес общественности, еще не освещена в доступной студентам литературе¹.

¹В изложении мы опираемся на лекции В. А. Васильева и В. И. Мухина “Стратегическая оборонная инициатива и эшелонированная противоракетная оборона США”, изд-во МО СССР, Москва, 1990.

Лазеры различаются по активной среде и способу накачки.

1) Твердотельные лазеры. Обычно они бывают импульсными, первым таким лазером был описанный выше рубиновый. Популярны лазеры с рабочим веществом Nd/стекло. Они генерируют свет с длиной волны 1.06 мкм, имеют большие размеры и мощность порядка ТВт. Их надеются использовать для управляемого термоядерного синтеза. Пример — огромный лазер “Шива” в Ливерморской лаборатории в США.

Очень распространен лазер Nd/YAG (гранат). Генерирует волну длиной 1.064 мкм, имеет высокую повторяемость импульсов порядка кГц (у рубинового лазера — 1 импульс в несколько минут), большой коэффициент усиления, что хорошо для военных применений.

2) Газовые лазеры. Обычно это — лазеры непрерывного действия. Отличаются малыми искажениями пучка. Пример: гелий-неоновый лазер, генерирующий свет трех длин волн (0.63, 1.15 и 3.39 мкм) и имеющий мощность порядка мВт. В технике используется лазер CO₂ с мощностью порядка кВт и длинами волн 9.6 и 10.6 мкм. Применяется в промышленности. Обычный способ накачки газовых лазеров — электрический разряд. Разновидность газовых лазеров — химические.

3) Химические лазеры. Генерируют излучение в процессе химической реакции между двумя газами, например водорода (дейтерия) и фтора. В основе лежат экзотермические реакции $H + F_2 \rightarrow HF + F$, $F + H_2 \rightarrow HF + H$. Молекулы HF рождаются с возбуждением колебаний, что сразу создает инверсную населенность. Образовавшаяся рабочая смесь пропускается со сверхзвуковой скоростью через специальное устройство (резонатор), в котором в виде электромагнитного излучения выделяется часть накопленной энергии. С помощью системы зеркал это излучение фокусируется в узкий луч. Такие лазеры излучают большую энергию (более 2 кДж), длительность импульса — порядка 30 нс, мощность — до $2 \cdot 10^{11}$ Вт. КПД (химический) достигает 10%, в то время как обычный показатель других лазеров — доли процента. Генерируемая длина волны — 2.8 мкм (3.8 мкм для лазеров на DF).

Из многочисленных проектов химических лазеров наиболее перспективными признаны лазеры на фтористом водороде (дейтерии). Проблемы: излучение лазеров на фтористом водороде с указанной длиной волны активно рассеивается молекулами воды, всегда имеющимися в атмосфере. Это намного ослабляет яркость излучения. Лазер на фтористом дейтерии работает на длине волны, для которой атмосфера прак-

тически прозрачна. Однако удельное энерговыделение таких лазеров в полтора раза меньше, чем у лазеров на НФ. Это значит, что в космос придется выводить гораздо большее количество химического топлива. Предполагается, что в ближайшее время мощность химических лазеров достигнет нескольких МВт. К лазерному оружию военные специалисты предъявляют высокие требования по скорострельности, что важно для одновременного уничтожения большого числа целей. По оценкам для этого требуется источник энергии огромной мощности в десятки и сотни мегаватт. Поэтому с учетом потерь энергии для одного “выстрела” по ракете требуется около тонны химического топлива. Испускаемое излучение будет фокусироваться на цель зеркалами диаметром около 5 м, причем точность обработки поверхности должна быть порядка долей микрона. Необходимо также создать сложные системы охлаждения, защиты от вибраций и наведения, управляемые компьютером. По расчетам специалистов система наведения должна обеспечить попадание лазерного луча на расстоянии 24 км в 10-центовую монету, летящую со скоростью 24 тыс. км/час. По программе “Альфа” разработан химический лазер на фтористом водороде мощностью 5 МВт, прошедший первые успешные наземные испытания в апреле 1989 г. Предполагается, что в дальнейшем боевые химические лазеры космического базирования будут иметь компактную конструкцию, позволяющую выводить их на орбиту без значительного монтажа в космосе. В США были проведены демонстрационные испытания фтор-водородного инфракрасного лазера МИРАКЛ, который за считанные мгновения прожег оболочку ракеты “Титан-1”, стоящей вертикально на относительно небольшом расстоянии.

4) Жидкостные лазеры. Активное вещество в жидком состоянии однородно и допускает циркуляцию с целью охлаждения, что создает преимущества перед твердотельными лазерами. Это позволяет получить большие энергии и мощности в импульсном и непрерывном режимах. В первых жидкостных лазерах (1964-65 гг.) использовались соединения редкоземельных элементов. На смену им пришли лазеры на красителях, где активной средой служат органические соединения. Особенности — узкие линии излучения и легкость перестройки частоты. Лазеры на красителях перспективны для миниатюризации лазерных устройств.

5) Полупроводниковые лазеры. Накачка производится электронным пучком, простым током. В отличие от лазеров других типов здесь используются переходы не между дискретными уровнями энергии, а между разре-

шенными энергетическими зонами, то есть совокупностями близко расположенных уровней. (Об энергетических зонах в кристаллах подробнее говорится в последующих разделах.) Размеры активного элемента чрезвычайно малы: длина резонатора — менее 1 мм. Типичная мощность порядка нескольких кВт, длительность импульса — 3 нс, КПД — до 50%. Имеет военные применения (волоконная оптика, связь). Может быть использован в проектировании телевизионного изображения на большой экран.

6) Эксимерные лазеры. Эксимер — неустойчивое соединение возбужденной и обычной молекул. Такие лазеры испускают излучение вследствие диссоциации эксимеров под действием электрического разряда. Режим — импульсный, длительность импульса — 1 мкс, длина волны — 0.25 мкм (для самых мощных на FKr), энергия — 10 Дж. Большое внимание уделяют в США созданию эксимерных лазеров на фтористых и хлористых соединениях инертных газов. Существенный недостаток таких лазеров — низкий (несколько процентов) КПД. Расчеты показывают, что масса таких лазерных установок настолько велика, что в обозримом будущем вывод их на космические орбиты невозможен. Наземные испытания показали, что возможно значительное увеличение мощности путем сложения лучей большого числа эксимерных лазеров. Предполагается, что создание мощных эксимерных лазеров потребует меньших затрат по сравнению с другими видами оружия. Создание эксимерных лазеров происходит в рамках проекта глобальной системы лазерного оружия наземно-космического базирования. Главная идея: размещение лазерных станций со всем оборудованием на Земле, а отражающих и фокусирующих зеркал — в космосе. Малая длина волны генерируемого излучения позволяет уменьшить размеры зеркал при той же дальности поражения, что и у химических лазеров. В другом варианте проекта предусматривается размещение эксимерных лазеров на горных вершинах: на высоте 4-5 км примерно в пять раз уменьшаются потери, связанные с поглощением и рассеянием энергии излучения атмосферой. По замыслу авторов проекта каждый лазер будет направлять мощное импульсное излучение на отражающее зеркало, находящееся на геостационарной орбите на высоте 36 тыс. км. оттуда энергия будет переизлучаться на “боевые” зеркала, расположенные на полярных орбитах на высоте около 1000 км и направляющие излучение на цели. По оценкам специалистов энергетические затраты для накачки системы лазеров наземного базирования превысят

мощность 300 электростанций по 1000 МВт каждая, что составляет более 60% суммарной мощности всех электростанций США.

7) Лазеры на свободных электронах. Пучок высокоэнергетических электронов пропускается через “магнитную гребенку” или “вигглер”, которая вынуждает электроны колебаться с заданной частотой. Это устройство представляет собой ряд магнитов, создающих переменное по величине и направлению магнитное поле. Попадая в поле, электроны испускают излучение, длина волны которого зависит от энергии электронов и параметров магнитного поля. Изменяя эти параметры, можно получить на выходе излучение с разной длиной волны. КПД лазеров на свободных электронах может превышать 20%. Можно получить длину волны в диапазоне 0.5-0.6 мкм, в котором атмосфера имеет “окно прозрачности”. Преимущества такого лазера — возможность получения излучения в широком диапазоне волн от миллиметровых до рентгеновских. На длине волны 1 мкм сейчас достигнута пиковая мощность около 1 мВт, для волн с $\lambda \sim 8$ мм — порядка 1 ГВт. Лазеры на свободных электронах родственны лампе бегущей волны, клистрону и прочим генераторам СВЧ. Впервые реализованы в США в 1976-77 гг. на базе линейного ускорителя электронов в Станфорде.

В Ливерморской лаборатории ведется сооружение наземного лазера на свободных электронах для СОИ. Длина установки — 77 м, стоимость — около 55 млн долларов. С ее помощью рассчитывают получить инфракрасное излучение с длиной волны 10 мкм. Планируется провести эксперимент, в котором излучение наземного лазера будет направлено орбитальным зеркалом на стартующую ракету. Но для ее поражения мощность лазера должна быть увеличена в сотню раз.

8) Рентгеновский лазер с ядерной накачкой — наиболее экзотический из разрабатываемых. Считается вершиной американской технической мысли и пользуется наибольшей популярностью в высших эшелонах власти. Место рождения идеи — все та же Ливерморская радиационная лаборатория. В простейшем виде рентгеновский лазер состоит из ядерной боеголовки, на поверхности которой укреплено до 50 металлических стержней, торчащих в разные стороны. Стержни имеют две степени свободы и, подобно стволам орудий, могут направляться в любую точку пространства. Вдоль оси каждого стержня расположена тонкая проволока из плотного активного материала, состав которого представляет один из важнейших секретов. Источником энергии накачки лазера служит

ядерный взрыв. При взрыве активное вещество переходит в плазменное состояние. Через мгновение плазма остывает, испуская когерентное излучение в мягком рентгеновском диапазоне. Излучение, попадая на цель, вызывает высокую концентрацию энергии, что приводит к взрывному испарению вещества, образованию ударной волны и разрушению корпуса поражаемого объекта. Сам лазер при этом, естественно, разрушается. Поэтому предлагается следующая схема его применения. Ядерно-лазерные боеголовки предполагается разместить на подводных лодках. В кризисной ситуации производится пуск ракет. Если ракеты противника поднялись на высоту 200 км, то ракетам с лазерным устройством необходимо подняться примерно на 950 км. Система наведения, управляемая компьютером, наведет лазерные стержни на разные цели, после чего компьютер подаст сигнал к ядерному взрыву. Таким образом, лазер одноразового применения будет использован для поражения множества целей. Поскольку рентгеновское излучение эффективно поглощается атмосферой, применение таких лазеров планируется за ее пределами, в космосе. В декабре 1983 г. под кодовым названием “Романо” проводилось испытание рентгеновского лазера с 50 стержнями с активным веществом из материала высокой плотности порядка плотности золота.

38.3 Нелинейная оптика

Распространение световых волн, получаемых с помощью обычных источников света описывается линейными дифференциальными уравнениями (линейная оптика). После создания квантовых генераторов возникла возможность получения световых волн с напряженностью электромагнитного поля такой же величины, как и напряженность микроскопического поля в атомах. При таких полях показатель преломления зависит от напряженности электрического поля E . В этом случае нарушается принцип суперпозиции, т.к. распространение электромагнитной волны описывается нелинейными дифференциальными уравнениями. Укажем вкратце некоторые нелинейные эффекты:

- 1) Нелинейное отражение света, при котором кроме отраженного луча, имеющего частоту ω , равную частоте падающего света, наблюдается отраженный луч с удвоенной частотой 2ω , который не подчиняется обычному закону отражения.
- 2) Самофокусировка света, когда падающий пучок света с увеличением

мощности уменьшает свою расходимость. Это явление обусловлено тем, что с ростом напряженности E увеличивается показатель преломления, т.е. в области пучка среда становится оптически более плотной, что приводит к изгибанию лучей к оси пучка, т.е. к сжатию пучка.

3) Многофотонные процессы (многофотонный фотоэффект). В одном элементарном акте взаимодействия света с веществом могут поглощаться два (и более) фотона с суммарной частотой $\omega_1 + \omega_2 = (E_2 - E_1)/\hbar$. Удалось наблюдать семифотонную ионизацию инертных газов.

4) Оптические гармоники. При рассеянии лазерного пучка в жидкостях и кристаллах, кроме света с частотой падающего излучения ω , наблюдается рассеянный свет с частотами, кратными первоначальной частоте (т.е. с частотами $2\omega, 3\omega$ и т.д.).

Контрольные вопросы

1. Чем отличаются спонтанное и вынужденное излучение?
2. Почему для работы лазера необходимо создание инверсной населенности двух атомных уровней?
3. Излучение лазера представляет собой почти параллельный пучок лучей. Падает ли интенсивность излучения по закону обратного квадрата расстояния?
4. Чем излучение лазера лучше пучка света от сильной лампы, сфокусированного обычной линзой?
5. Каковы преимущества четырехуровневой схемы работы лазера?

Глава 39

Теплоемкость кристаллов. Квантовая статистика

Мы завершаем свое знакомство со статистической физикой. Классическая статистика, математически выраженная распределением Больцмана-Максвелла, подсчитывала число частиц, находящихся в малом объеме dV вокруг некой точки \vec{r} и имеющих импульсы в малом интервале $d\vec{p}$ вокруг некоего значения \vec{p} . Зная уже законы квантовой механики, нам сразу понимаем, что для квантовых систем такой подход не применим: микрочастицы не могут одновременно иметь определенные значения координаты и импульса, так что необходимо учесть соотношение неопределенностей Гейзенберга. Кроме того, мы уже знакомы с принципом Паули, согласно которому электроны “мешают” друг другу, не могут занять одно и то же состояние. Очевидно, что это также должно найти отражение в квантовой статистике, знакомству с которой посвящена настоящая глава. Первое и почти очевидное применение квантовой статистики нашла в теории теплоемкости твердых тел. Мы коснемся также интереснейших макроскопических квантовых явлений --- сверхтекучести и сверхпроводимости.

39.1 Классические представления

Простейшей моделью кристалла является геометрически правильно построенная кристаллическая решетка, в узлах которой помещаются атомы, которые считаются материальными точками. Атомы совершают тепловые колебания около положений равновесия. Если колебания малы, то их можно считать гармоническими. Энергия каждого атома складывается из кинетической и потенциальной энергий. На каждую степень свободы

приходится в среднем кинетическая энергия $k_B T/2$ и такое же количество средней потенциальной энергии. Таким образом, среднее значение полной энергии, приходящейся на одну колебательную степень свободы, равно

$$\langle \varepsilon \rangle_{\text{кол}} = \langle \varepsilon \rangle_{\text{кин}} + \langle \varepsilon \rangle_{\text{пот}} = k_B T.$$

Рассмотрим теперь теплоемкость кристаллической решетки. Предположим для простоты, что все атомы одинаковы и каждый атом обладает тремя колебательными степенями свободы, а потому на него приходится средняя энергия $3k_B T$. Умножив эту величину на постоянную Авогадро N_A , можно получить внутреннюю энергию одного моля твердого тела:

$$U = N_A \times 3k_B T = 3RT, \quad (39.1)$$

где R — универсальная газовая постоянная. Отсюда для молярной теплоемкости твердого тела имеем

$$c_p = \frac{\partial U}{\partial T} = 3R. \quad (39.2)$$

Этот закон был установлен в 1819 г. Дюлонгом и Пти как эмпирическое правило, согласно которому произведение удельной теплоемкости химического элемента в твердом состоянии на его атомную массу примерно одинаково для всех элементов и равно $3R \approx 25$ Дж/(моль · К).

Если вещество кристалла состоит из молекул, имеющих n_a атомов, то закон Дюлонга-Пти модифицируется очевидным образом: $c_p = 3n_a R$ (так, для молекул поваренной соли NaCl $n_a = 2$).

Недостатки классической теории теплоемкости.

1. Классическая теория не дает объяснения зависимости теплоемкости тел от температуры. Экспериментально установлено, что при приближении к абсолютному нулю теплоемкости c_V и c_p всех тел стремятся к нулю.

2. По теореме о равномерном распределении энергии все степени свободы равноправны. Однако опытные факты приводят к заключению, что при низких температурах вклад в теплоемкость вносят не все из них: при понижении температуры определенные степени свободы становятся малоэффективными (говорят, что они “заморожены”). Так, при температуре $T_{\text{кол}} = \hbar \omega_{\text{кол}} / k_B$ “замерзают” колебательные степени свободы (здесь $\omega_{\text{кол}}$ — частота осциллятора). Совершенно аналогично из-за квантования энергии вращения “замерзают” вращательные степени свободы: это происходит при $T \leq T_{\text{вращ}} = \hbar^2 / I k_B$ (здесь I — момент инерции молекулы). Более подробно см. Ч. II, §12.5.2 и §12.5.3.

3. Закон Дюлонга и Пти был сформулирован для любого твердого тела: металла и диэлектрика. Однако, металл состоит из положительно заряженных ионов, совершающих тепловые колебания вокруг узлов кристаллической решетки. Между ними движутся так называемые свободные электроны, которые ведут себя подобно электронному газу. Наличием свободных электронов объясняется высокая электрическая проводимость металлов. Классическая теория теплоемкости не принимает во внимание наличие электронного газа в металлах. Она учитывает тепловые колебания только ионов и приводит к результату Дюлонга и Пти. В отличие от диэлектриков, в металлах следовало бы учесть вклад в теплоемкость, вносимый электронами. На каждый свободный электрон приходится средняя кинетическая энергия $3k_B T/2$. Поэтому по классической теории теплоемкость электронного газа должна быть сравнимой с теплоемкостью кристаллической решетки. Опыт показывает, что свободные электроны практически не вносят никакого вклада в теплоемкость металлов.

39.2 Квантовая теория теплоемкости Эйнштейна

Квантовая теория в принципе устранила трудности, на которые натолкнулась классическая теория в вопросе теплоемкости твердых тел. Представим тело как систему N осцилляторов, не взаимодействующих друг с другом. Применим к этой системе закон распределения Больцмана, учитывая, что энергия гармонического осциллятора квантуется:

$$\varepsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (39.3)$$

Если обозначить N_n число осцилляторов с квантовым числом n ($\sum_n N_n = N$), то средняя энергия, приходящаяся на одну молекулу в состоянии термодинамического равновесия, определяется выражением

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n N_n. \quad (39.4)$$

Согласно распределению Больцмана, вероятность P_n найти осциллятор в состоянии с квантовым числом n равна

$$P_n = \frac{N_n}{N} = \frac{e^{-\varepsilon_n/k_B T}}{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon_n/k_B T}}. \quad (39.5)$$

Подставляя это выражение в (39.4) и используя (39.3), получаем выражения, представляющие сумму геометрической прогрессии. Простые вычисления позволяют найти среднюю энергию одного осциллятора:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}. \quad (39.6)$$

Первое слагаемое $\hbar\omega/2$ есть нулевая энергия гармонического осциллятора, которая не зависит от температуры и потому не вносит вклада в теплоемкость системы.

Выражение (39.6) было положено А. Эйнштейном в основу квантовой теории теплоемкости твердых тел. Эйнштейн отождествил кристаллическую решетку из N молекул с системой $3n_a N$ независимых гармонических осцилляторов с одинаковой собственной частотой ω . Тогда внутренняя энергия одного моля определяется выражением $U = 3n_a N_A \langle \varepsilon \rangle$. Дифференцируя его по температуре, получаем молярную теплоемкость кристаллической решетки твердых тел:

$$c_p = \frac{\partial U}{\partial T} = 3n_a R \left(\frac{\hbar\omega}{k_B T} \right)^2 \frac{e^{\hbar\omega/k_B T}}{(e^{\hbar\omega/k_B T} - 1)^2}. \quad (39.7)$$

Это и есть формула Эйнштейна. При высоких температурах, когда $\hbar\omega \ll k_B T$, она переходит в классическую формулу $c_p \sim 3n_a R$. В другом предельном случае низких температур, когда $\hbar\omega \gg k_B T$, можно пренебречь единицей в знаменателе и получить

$$c_p \sim 3n_a R \left(\frac{\hbar\omega}{k_B T} \right)^2 e^{-\hbar\omega/k_B T}. \quad (39.8)$$

При $T \rightarrow 0$ полученное выражение стремится к нулю, как это требует тепловая теорема Нернста.

Поясним физический смысл этого результата. Из-за квантовой дискретности между основным и возбужденным уровнем системы осцилляторов имеется конечное расстояние $\hbar\omega$ (энергетическая щель). Меньшее количество энергии осциллятор воспринять просто не в состоянии. При нулевой температуре в системе нет возбуждений — все осцилляторы находятся в основном состоянии. При небольшом повышении температуры тепловой энергии не хватает на преодоление этой щели, и лишь малое количество осцилляторов, пропорциональное $\exp(-\hbar\omega/k_B T)$ согласно закону Больцмана, переходят на первый возбужденный уровень. Именно они ответственны за поглощение тепловой энергии и за появление тем

самым малой теплоемкости кристалла. При высоких температурах тепловой энергии хватает на возбуждение многих вышележащих уровней, так что дискретность энергии уже не играет особой роли — мы возвращаемся к классическому результату Дюлонга-Пти.

Однако, согласие с опытом теории Эйнштейна имеет только качественный характер. В выражении для c_p при низких температурах экспоненциальный множитель убывает быстрее, чем растет множитель $1/T^2$. Поэтому при приближении к абсолютному нулю c_p стремится к нулю практически по экспоненциальному закону. Опыт же показывает, что теплоемкость кристаллов изменяется при низких температурах не экспоненциально, а по закону $c_p \sim T^3$. Как оказалось, эти расхождения теории Эйнштейна с опытом связаны не с существом квантовой теории, а с упрощением расчета, в котором предполагалось, что все гармонические осцилляторы колеблются с одной и той же частотой. На самом деле кристаллическую решетку следует рассматривать как связанную систему взаимодействующих частиц. При вычислении теплоемкости тело действительно можно рассматривать как систему гармонических осцилляторов, но с различными частотами. Задача сводится к отысканию спектра частот.

39.3 Теория теплоемкости твердых тел Дебая

Дебай предположил, что колебания атомов в кристаллической решетке не являются независимыми. Смещение одного из атомов из положения равновесия влечет за собой смещение других соседних с ним атомов. Таким образом, кристалл представляет собой систему N упруго связанных между собой атомов, обладающих $3N$ степенями свободы. Каждая степень свободы (нормальное колебание) может быть представлена как гармонический осциллятор, среднюю энергию которого $\langle \varepsilon \rangle$ мы уже вычислили (см. (39.6)). Из-за связи между атомами частоты нормальных колебаний уже не совпадают между собой. Взаимодействие атомов приводит к тому, что колебание, возникшее в каком-то месте кристалла, передается от одного атома к другому, в результате чего возникает упругая волна. Эта волна, дойдя до границы кристалла, отражается. При наложении прямой и отраженной волн образуется стоячая волна, которой соответствует нормальное колебание кристаллической решетки. Число dN нормальных колебаний, т.е. стоячих волн, в интервале частот от ω

до $\omega + d\omega$ велико, поэтому суммирование в выражении для внутренней энергии системы может быть заменено интегрированием:

$$U = \int \langle \varepsilon \rangle dN. \quad (39.9)$$

Число колебаний в единице объема

В этом разделе мы займемся подсчетом числа стоячих волн, имеющих близкие частоты ω . В сущности, мы проделали уже эти выкладки в разделе 27.3 для электромагнитного излучения, но повторим их снова с небольшими модификациями для применения также и к звуковым колебаниям в кристалле.

Рассмотрим сначала одномерный потенциальный ящик длиной l_x . Мы могли уже убедиться, что стоячая волна в нем (неважно, электромагнитная ли, звуковая или волна де Бройля), описывается функцией $\sin(kx)$, которая должна обращаться в нуль на границах ящика. Отсюда

$$k_x = \frac{\pi n}{l_x}. \quad (39.10)$$

Число n_x нумерует различные стоячие волны вдоль оси x , и потому на малый интервал волнового вектора dk_x приходится число колебаний

$$dn_x = \frac{l_x dk_x}{2\pi}. \quad (39.11)$$

Двойку в знаменателе мы поставили, чтобы избежать двойного счета: замена k_x на $-k_x$ приводит к той же стоячей волне. В трехмерном ящике для волн, распространяющихся по другим осям, получаем аналогичные формулы:

$$dn_y = \frac{l_y dk_y}{2\pi}, \quad dn_z = \frac{l_z dk_z}{2\pi}. \quad (39.12)$$

Перемножая (39.11) и (39.12), находим для полного числа стоячих волн в ящике объемом $V = l_x l_y l_z$:

$$dN = dn_x dn_y dn_z = \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 k. \quad (39.13)$$

Наконец, учтем, что каждой стоячей волне может соответствовать g поляризаций (для частиц со спином s имеем $g = 2s + 1$ — число различных проекций спина). Окончательно имеем:

$$dN = \frac{gV}{(2\pi)^3} d^3 k. \quad (39.14)$$

Формула (39.14) дает число различных стоячих волн (отличающихся числом узлов и направлениями поляризации) в объеме V , приходящихся на элемент объема d^3k пространства значений волнового вектора. Далее, для перехода к частотам волн вспомним соотношение $k = \omega/v$, где v — фазовая скорость волны. Отсюда $dk = d\omega/v$ и

$$dN = \frac{gV}{(2\pi)^3} 4\pi k^2 dk = \frac{gV}{2\pi^2 v^3} \omega^2 d\omega. \quad (39.15)$$

Мы вывели формулу (39.15) для прямоугольного объема, но можно показать, что форма объема не влияет на результат. Не имеет большого значения и физическая природа колебаний, число которых мы подсчитали. Например, для фотонов $v = c$ и $g = 2$ (свет может иметь правую и левую циркулярные поляризации). В итоге получаем уже известную нам формулу (27.17) для числа типов фотонов в объеме V и в интервале частот $d\omega$:

$$dN = \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega. \quad (39.16)$$

Для применения (39.15) к звуковым волнам в кристалле учтем, что там возможна одна продольная волна, распространяющаяся со скоростью v_{\parallel} , и две поперечные волны с разными поляризациями, как у фотонов, распространяющиеся со скоростью v_{\perp} . Очевидно теперь, как обобщить формулу (39.15) на данный случай:

$$\begin{aligned} dN &= \frac{2V}{2\pi^2 v_{\perp}^3} \omega^2 d\omega + \frac{V}{2\pi^2 v_{\parallel}^3} \omega^2 d\omega = \\ &= \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2}{v_{\perp}^3} + \frac{1}{v_{\parallel}^3} \right) \omega^2 d\omega = V \frac{3}{2\pi^2 v^3} \omega^2 d\omega. \end{aligned} \quad (39.17)$$

Здесь мы ввели величину v , играющую роль некоего среднего между скоростями продольных и поперечных волн; она вычисляется из соотношения

$$\frac{3}{v^3} = \frac{2}{v_{\perp}^3} + \frac{1}{v_{\parallel}^3}. \quad (39.18)$$

Характеристическая температура Дебая

Подставляя (39.17) и (39.6) в выражение (39.9) для внутренней энергии, мы получаем:

$$U = V \frac{3}{2\pi^2 v^3} \int_0^{\omega_{\max}} \left(\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \right) \omega^2 d\omega, \quad (39.19)$$

где ω_{\max} — максимальная частота нормальных колебаний, которая определяется из соотношения

$$\int_0^{\omega_{\max}} dN = 3N, \quad (39.20)$$

так как полное число нормальных колебаний равно числу степеней свободы. Используя (39.17), находим

$$3 \frac{N}{V} = 3n = \frac{3}{2\pi^2 v^3} \int_0^{\omega_{\max}} \omega^2 d\omega = \frac{\omega_{\max}^3}{2\pi^2 v^3}, \quad (39.21)$$

где n — концентрация атомов (их число в единице объема кристалла). Таким образом, максимальная частота нормальных колебаний (т.н. дебаевская частота) равна

$$\omega_{\max} = v \sqrt[3]{6\pi^2 n}. \quad (39.22)$$

Следует отметить, что наименьшая длина упругой волны в кристалле, которая соответствует максимальной частоте ω_{\max} , равна

$$\lambda_{\min} = \frac{2\pi v}{\omega_{\max}} = a \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} \approx 1.6a, \quad (39.23)$$

где $a = 1/\sqrt[3]{n}$ — расстояние между соседними атомами в кристаллической решетке. Этот результат согласуется с тем, что волны, длины которых меньше удвоенного межатомного расстояния, не могут существовать в кристалле.

Используя определение (39.22) и учитывая, что для одного моля кристалла концентрация атомов равна $n = n_a(N_A/V)$, где n_a — число атомов в молекуле вещества кристалла, мы можем записать внутреннюю энергию одного моля в виде:

$$U = 9n_a N_A \int_0^{\omega_{\max}} \left(\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \right) \frac{\omega^2 d\omega}{\omega_{\max}^3}. \quad (39.24)$$

Дифференцируя внутреннюю энергию U по температуре, можно получить молярную теплоемкость кристалла:

$$c_p = 9n_a R \left(\frac{\hbar\omega_{\max}}{k_B T} \right)^2 \int_0^{\omega_{\max}} \frac{e^{\hbar\omega/k_B T}}{(e^{\hbar\omega/k_B T} - 1)^2} \frac{\omega^4 d\omega}{\omega_{\max}^5}. \quad (39.25)$$

Введем новый параметр — т.н. характеристическую температуру Дебая

$$\theta_D = \frac{\hbar\omega_{\max}}{k_B} \quad (39.26)$$

и выполним в интеграле (39.25) замену переменных $x = \hbar\omega/k_B T$. Тогда молярную теплоемкость кристалла можно записать в виде:

$$c_p = 9n_a R \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{\theta_D/T} \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} x^4 dx. \quad (39.27)$$

При низких температурах $T \ll \theta_D$ верхний предел интеграла будет очень большим, так что его можно приближенно положить равным бесконечности. Тогда интеграл будет представлять собой число

$$\int_0^{\infty} \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} x^4 dx = \frac{4\pi^4}{15},$$

и теплоемкость окажется пропорциональной кубу температуры:

$$c_p \sim n_a R \frac{12\pi^4}{5} \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3, \quad T \ll \theta_D. \quad (39.28)$$

Эта приближенная зависимость известна как закон Дебая и хорошо согласуется с экспериментом.

При высоких температурах $T \gg \theta_D$ экспонента в числителе приближенно равна единице, а экспоненту в знаменателе можно разложить в ряд Тейлора: $e^x \approx 1 + x$. Тогда для теплоемкости получается значение

$$c_p \sim 9n_a R \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{\theta_D/T} x^2 dx = 3n_a R, \quad T \gg \theta_D, \quad (39.29)$$

т.е. закон Дюлонга-Пти.

О согласии теории Дебая с опытом можно судить по графику 39.1, на котором показаны экспериментальные точки для некоторых веществ.

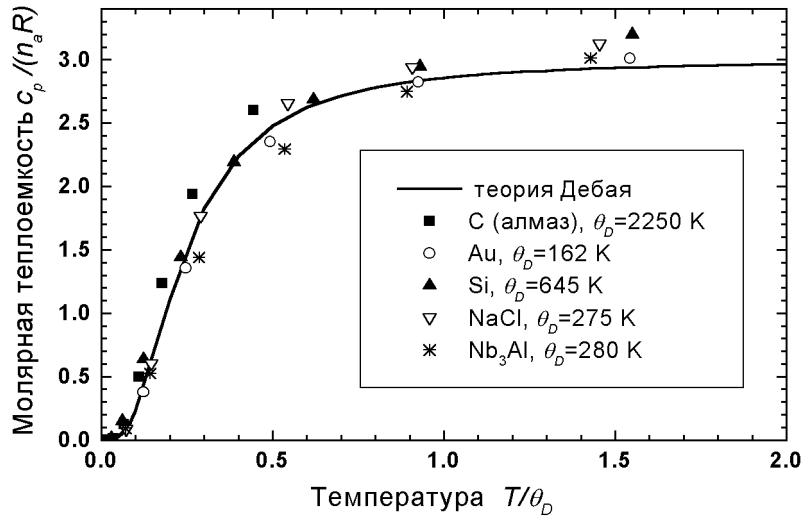


Рис. 39.1: Сравнение теории теплоемкости Дебая с экспериментальными данными. Показаны вещества с заметно отличающимися значениями дебаевской температуры и разным составом молекул ($n_a = 2$ для NaCl и $n_a = 4$ для Nb_3Al), но все точки лежат достаточно близко от теоретической кривой.

Задача 39.53. Пользуясь данными, приведенными на графике 39.1, найти максимальную частоту колебаний ω_{\max} в кристалле золота по теории Дебая.

Решение. Температура Дебая для золота, как указано на графике, равна $\theta_D = 162$ К. Используя (39.26), находим:

$$\omega_{\max} = \frac{k_B \theta_D}{\hbar} = \frac{1.38 \cdot 10^{-23} \times 162}{1.05 \cdot 10^{-34}} = 2.1 \cdot 10^{13} \text{ Гц.} \blacksquare$$

39.4 Фононы

Как и внутри молекул, атомы в кристалле совершают малые колебания вокруг фиксированных положений равновесия. Колебания атомов распространяются по кристаллу в виде слабо взаимодействующих волн с волновыми векторами \vec{k} и частотами $\omega_i(\vec{k})$. Физически нормальные колебания представляют собой волны деформаций кристаллической решетки (т.е. звуковые волны). Таким образом, движение атомов в кристалле может быть описано как суперпозиция плоских волн различной частоты $\exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_i t)]$, т.е. каждой волне можно сопоставить гармонический осциллятор с частотой $\omega_i(\vec{k})$.

Следуя идеям Луи де Бройля, каждой волне можно сопоставить частицу с энергией $E = \hbar\omega_i(\vec{k})$ и импульсом $\vec{p} = \hbar\vec{k}$. Эта квазичастица носит название *фонона*. Фонон — элементарная порция звуковой энергии, подобно тому как фотон — элементарная порция световой (электромагнитной) энергии. Наше сопоставление можно схематически изобразить следующим образом:

$$\text{волна} \implies \text{квантовый осциллятор} \implies \text{фонон}.$$

Индекс i стоит для обозначения типа соответствующей волны (продольная, поперечная, определенный закон дисперсии $\omega_i(\vec{k})$ и т.п.) или, как говорят, *фононной моды*. При квантовомеханическом рассмотрении гармонический осциллятор данной фононной моды может иметь энергию $E_{i,n_i} = (n_i + \frac{1}{2})\hbar\omega_i$, где n_i пробегает целочисленные значения: $n_i = 0, 1, 2, \dots$. При $n_i = 0$ мы имеем нулевые колебания с энергией $E_{0,0} = \hbar\omega_i/2$ — фонона данной моды в твердом теле нет. При $n_i = 1$ мы имеем новое состояние с энергией возбуждения $E_{i,1} - E_{i,0} = \hbar\omega_i$ — это и есть квазичастица фонон. При произвольном квантовом числе n_i энергия возбуждения равна $E_{i,n_i} - E_{i,0} = n_i\hbar\omega_i$. В таком случае мы говорим, что в твердом теле распространяются n_i фононов данной моды i .

Используя полученные выше результаты, в случае термодинамического (теплового) равновесия можно найти среднее число фононов $\langle n_i \rangle$ с частотой ω_i . Действительно, мы уже нашли среднюю энергию $\langle \varepsilon \rangle$ квантового осциллятора (см. (39.6), где частоту ω надо заменить теперь на частоту звуковой волны ω_i). С другой стороны, эту же энергию можно представить в виде $\langle \varepsilon \rangle = \langle (n_i + \frac{1}{2})\hbar\omega_i \rangle = \hbar\omega_i(\frac{1}{2} + \langle n_i \rangle)$. Приравнивая эти выражения, получаем:

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{\hbar\omega_i/k_B T} - 1}. \quad (39.30)$$

При низких температурах $T \ll \hbar\omega_i$ среднее число фононов экспоненциально убывает: в системе не возникает возбуждений. Наоборот, при высоких температурах $T \gg \hbar\omega_i$ экспоненту в знаменателе можно разложить в ряд Тейлора и получить результат $n_i \sim \frac{k_B T}{\hbar\omega_i}$. Следовательно, из полученного соотношения вытекает, что при достаточно высокой температуре в кристалле может одновременно возбуждаться неограниченное количество одинаковых фононов, т.е. принцип Паули на фононы не распространяется. Напомним, что кванты электромагнитного поля — фо-

тоны, находящиеся в состоянии равновесия со стенками полости, также подчиняются этому распределению.

Представление о фононах широко используется в физике твердого тела. Фононы — один из примеров т.н. *квазичастиц*: они существуют только в кристаллах и вполне реальны, но вне среды их нет. Идея квазичастиц впервые выдвинута Л. Д. Ландау в 40-х годах. Кроме фононов есть и другие типы квазичастиц. Тепловые колебания решетки можно рассматривать как фононный газ, при низких температурах — идеальный. При высоких температурах решетка плавится и модель невзаимодействующих фононов неприменима: они перестают быть свободными. Преимущество представления о фононах состоит в том, что в его рамках свойства твердого тела рассматриваются как свойства ансамбля большого числа независимых квазичастиц — фононного газа. Все представления этой модели могут быть использованы для описания поведения кристаллической решетки.

Можно рассматривать также взаимодействие обычных частиц (электронов, фотонов) с фононами. Так, электроны обмениваются фононами, что порождает притяжение. Несмотря на кулоновское отталкивание, может даже образоваться связанное состояние пары электронов. Подобный механизм ведет к явлению *сверхпроводимости*.

Ранее мы обсуждали комбинационное рассеяние света кристаллами. Этот процесс можно трактовать как процесс взаимодействия фотона с фононами. Фотон, пролетающий через кристаллическую решетку, может возбудить в ней фонон одной из частот оптической моды кристалла. При этом фотон израсходует часть своей энергии, вследствие чего его частота уменьшается — возникает красный спутник. Если в кристалле уже был возбужден фонон, то пролетающий фотон может поглотить его, увеличив за этот счет свою энергию; в таком случае возникает фиолетовый спутник.

Мы уже убедились, что число фононов в твердом теле не постоянно. Фононов тем больше, чем интенсивнее тепловое движение атомов, т.е. чем выше температура. При высоких температурах число фононов пропорционально температуре, а с приближением к абсолютному нулю их число стремится к нулю.

39.5 Неразличимость тождественных частиц

Две частицы тождественны, если все их физические свойства в точности совпадают, что исключает возможность экспериментально различать их. В классической теории всегда предполагается, что мы можем в принципе проследить за движением частиц и сказать, какая из них куда полетела. Поэтому в классической теории даже тождественные частицы в принципе различимы. В квантовой механике это не так: принцип неопределенности не позволяет прослеживать траектории и, стало быть, неразличимость частиц имеет принципиальный характер и влияет на результат вычислений.

Пусть, например, система из двух частиц описывается гамильтонианом (оператором энергии) $\hat{H}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ и пусть система находится в состоянии с волновой функцией $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$. Введем оператор \hat{P}_{12} , переставляющий частицы местами, т.е. обменивающий их радиус векторы:

$$\hat{P}_{12}\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \Psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1). \quad (39.31)$$

Математически тождественность частиц выражается в инвариантности (неизменности) гамильтониана относительно операции перестановки \hat{P}_{12} этих частиц, что в квантовой механике записывается как условие коммутации операторов \hat{H} и \hat{P}_{12} :

$$\hat{P}_{12}\hat{H} = \hat{H}\hat{P}_{12}. \quad (39.32)$$

Это условие обеспечивает физическую неразличимость частиц, поскольку тогда волновая функция $\Psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$ будет также решением уравнения Шредингера с тем значением энергии. Действительно, если $\hat{H}\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = E\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ и мы подействуем на обе части этого уравнения оператором \hat{P}_{12} , то получим $\hat{P}_{12}\hat{H}\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = E\Psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$. Из-за условия коммутации мы можем пронести оператор \hat{P}_{12} через гамильтониан: $\hat{P}_{12}\hat{H}\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \hat{H}\hat{P}_{12}\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \hat{H}\Psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$, и наше уравнение примет вид $\hat{H}\Psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1) = E\Psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$.

Но мы помним, что коммутирование операторов с гамильтонианом означает сохранение их собственного значения. Найдем собственные значения p оператора \hat{P}_{12} . Для этого надо решить уравнение:

$$\hat{P}_{12}\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = p\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2). \quad (39.33)$$

С учетом определения (39.31) оператора \hat{P}_{12} , записываем это уравнение в виде:

$$\Psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1) = p\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2). \quad (39.34)$$

Снова подействуем на обе части (39.34) оператором перестановки частиц:

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = p\Psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1). \quad (39.35)$$

Из (39.34) и (39.35) получаем, что

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = p^2\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2), \quad (39.36)$$

т.е. $p = \pm 1$. Таким образом, оператор \hat{P}_{12} может иметь только два собственных значения. При $p = 1$ волновая функция симметрична относительно операции перестановки частиц: $\Psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1) = \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$. При $p = -1$ имеем антисимметричную волновую функцию: $\Psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1) = -\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$. Таким образом, мы получили важный результат: **волновые функции системы двух тождественных частиц могут быть либо четными, либо нечетными относительно операции перестановки частиц местами.**

Справедливо обобщение этого результата: состояния системы тождественных частиц либо симметричны, либо антисимметричны относительно перестановки любых двух из них. Какое состояние реализуется — зависит от природы рассматриваемых частиц. Частицы с симметричными состояниями называются *бозонами*, с антисимметричными — *фермионами*. Ранее этими именами мы называли частицы с целым и полуцелым спинами, соответственно. В релятивистском уравнении Дирака, в отличие от уравнения Шредингера, спин частиц возникает автоматически. Существует фундаментальная теорема (В. Паули): частицы с полуцелым спином ($s = 1/2, 3/2$ и т.д.) описываются антисимметричными волновыми функциями, а с целым ($s = 0, 1, 2$ и т.д.) — симметричными. Эта теорема о связи спина со статистикой является следствием объединения квантовой механики с теорией относительности.

Обратимся для примера к состоянию двух атомных электронов. В пренебрежении взаимодействием между ними волновая функция распадается на произведение волновых функций каждого электрона по отдельности: $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \Psi_i(\vec{r}_1)\Psi_j(\vec{r}_2)$. Индексы здесь i, j обозначают здесь полный набор квантовых чисел (n, l, m, s) , которыми одно состояние отличается от другого. Меняя электроны местами, приходим к состоянию с той же энергией, описываемому волновой функцией $\Psi_i(\vec{r}_2)\Psi_j(\vec{r}_1)$. Поэтому в силу принципа суперпозиции возможны состояния, описываемые любой линейной комбинацией этих двух функций, причем все они будут иметь ту же энергию. Однако, мы теперь знаем, что для электронов со спином

$s = 1/2$ физический смысл имеет лишь антисимметричная комбинация

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = C[\Psi_i(\vec{r}_1)\Psi_j(\vec{r}_2) - \Psi_i(\vec{r}_2)\Psi_j(\vec{r}_1)]. \quad (39.37)$$

Если состояния электронов одинаковы ($i = j$, то есть совпадают все квантовые числа), то $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0$. Мы снова пришли к принципу Паули: не может быть двух электронов в одном состоянии.

39.6 Статистика Ферми-Дирака

Бозоны и фермионы имеют совершенно разные статистические свойства, т.е. по-разному ведут себя в коллективе себе подобных. Кроме непосредственного силового взаимодействия между частицами, имеется специфически квантовое, обменное взаимодействие: это не какие-то дополнительные силы или поля — одни частицы влияют на поведение других одним своим присутствием. Эти эффекты ощущаются частицами, если они находятся друг от друга на расстояниях, меньших или порядка длины волны де Бройля λ . При высоких температурах энергии частиц велики и λ мало — это область классической физики. При низких температурах λ возрастает и квантовые эффекты доминируют.

Рассмотрим систему одинаковых фермионов с энергиями ϵ_i в состоянии i (где i обозначает набор квантовых чисел, включая спин). Обозначим через n_i число частиц в состоянии i . Основной принцип статистической физики (классической и квантовой): вероятность обнаружить систему в таком состоянии равна

$$W(\{n_i\}) = C \exp\left[\sum_i n_i(\mu - \epsilon_i)/k_B T\right], \quad (39.38)$$

где C — нормировочная постоянная, а μ — химический потенциал (этот параметр появляется всегда при фиксированном числе частиц в системе, которое равно $N = \sum_i n_i$, где сумма берется по всем состояниям). По сути дела, уравнение (39.38) — это обобщение известного распределение Больцмана. Из принципа Паули следует, что n_i могут принимать лишь значения 0 и 1 — в данном состоянии i может быть либо одна частица, либо ни одной вообще.

Из всего набора возможных состояний системы проследим за каким-то конкретным состоянием k с энергией ϵ_k . С некой вероятностью

$$W(0) = C \exp\left[\sum_{i \neq k} n_i(\mu - \epsilon_i)/k_B T\right], \quad (39.39)$$

в нем может не оказаться ни одной частицы ($n_k = 0$). С вероятностью

$$W(1) = e^{n_k(\mu - \epsilon_k)/k_B T} C \exp\left[\sum_{i \neq k} n_i(\mu - \epsilon_i)/k_B T\right] = W(0)e^{(\mu - \epsilon_k)/k_B T} \quad (39.40)$$

в нем окажется одна частица ($n_k = 1$). При записи формул (39.39), (39.40) мы использовали общее выражение (39.38) для вероятности $W(\{n_i\})$. Поскольку третьего не дано, должно выполняться условие сохранения полной вероятности $W(0) + W(1) = 1$, откуда следует

$$W(0) = \frac{e^{(\epsilon_k - \mu)/k_B T}}{e^{(\epsilon_k - \mu)/k_B T} + 1}, \quad W(1) = \frac{1}{e^{(\epsilon_k - \mu)/k_B T} + 1}. \quad (39.41)$$

Значит, среднее число частиц $\langle n_k \rangle = W(0) \times 0 + W(1) \times 1 = W(1)$ в состоянии k получается равным:

$$\langle n_k \rangle = \frac{1}{e^{(\epsilon_k - \mu)/k_B T} + 1}. \quad (39.42)$$

Формула (39.42) является основой квантовой статистики Ферми-Дирака. При высоких температурах получаем $\langle n_k \rangle \sim 1/2$, т.е. равномерное распределение частиц по состояниям. Если число частиц N в системе фиксировано, то химический потенциал μ определится из условия

$$N = \sum_k \frac{1}{e^{(\epsilon_k - \mu)/k_B T} + 1}. \quad (39.43)$$

Подчеркнем также, что согласно (39.42) среднее число частиц в данном состоянии всегда не превышает единицы. Это — прямое следствие принципа Паули.

39.7 Статистика Бозе-Эйнштейна

Рассмотрим теперь систему тождественных бозонов. В этом случае число n_i частиц в состоянии i может принимать любое значение от 0 до ∞ (или от 0 до N при фиксированном числе частиц). Рассмотрим какое-то конкретное состояние k системы с энергией ϵ_k . Тогда для вероятности, что в этом состоянии окажутся n частиц, получаем из основного соотношения (39.38):

$$W(n) = \tilde{C} \exp[n(\mu - \epsilon_k)/k_B T], \quad (39.44)$$

где мы ввели обозначение $\tilde{C} = C \sum_{i \neq k} \exp[n_i(\mu - \epsilon_i)/k_B T]$. Сумма $W(n)$ по всем значениям n (включая и нулевое) равна вероятности того, что в состоянии k окажется какое-то количество частиц или не окажется ни одной. Очевидно, такая сумма должна быть равна единице:

$$\sum_{n \geq 0} W(n) = \tilde{C} \sum_{n \geq 0} \exp[n(\mu - \epsilon_k)/k_B T] = \frac{\tilde{C}}{1 - \exp\left(\frac{\mu - \epsilon_k}{k_B T}\right)} = 1. \quad (39.45)$$

Здесь мы использовали формулу

$$\sum_{n \geq 0} q^n = \frac{1}{1 - q} \quad (39.46)$$

для суммы геометрической прогрессии при $q = \exp[(\mu - \epsilon_k)/k_B T]$.

Теперь легко найти нормировочную постоянную:

$$\tilde{C} = 1 - \exp\left(\frac{\mu - \epsilon_k}{k_B T}\right) \quad (39.47)$$

и полное выражение для вероятности $W(n)$. Нас интересует в первую очередь среднее число частиц в состоянии k , которое по смыслу вероятностей выражается как $\langle n_k \rangle = \sum_{n \geq 0} n W(n)$. Сумму ряда вида $\sum_{n \geq 1} n q^n$ нетрудно вычислить дифференцированием по q выражения (39.46):

$$\sum_{n \geq 0} n q^{n-1} = \frac{1}{(1 - q)^2}. \quad (39.48)$$

Левая часть (39.48) может записана в виде:

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} n q^{n-1} &= \sum_{n \geq 1} n q^{n-1} = \sum_{n \geq 0} (n + 1) q^n = \sum_{n \geq 0} n q^n + \sum_{n \geq 0} q^n = \\ &= \sum_{n \geq 0} n q^n + \frac{1}{1 - q}. \end{aligned} \quad (39.49)$$

Вместе с (39.48) это приводит к результату:

$$\sum_{n \geq 0} n q^n = \frac{1}{(1 - q)^2} - \frac{1}{1 - q} = \frac{q}{(1 - q)^2}. \quad (39.50)$$

Подставляя $q = \exp[(\mu - \epsilon_k)/k_B T]$, находим: $\langle n_k \rangle = (1 - q) \sum_{n \geq 0} n q^n = \frac{q}{1 - q} = \frac{1}{q^{-1} - 1}$, откуда следует основное соотношение статистики Бозе-Эйнштейна:

$$\langle n_k \rangle = \frac{1}{e^{(\epsilon_k - \mu)/k_B T} - 1}. \quad (39.51)$$

Разница с фермионами (ср. (39.42)) имеется только в знаке перед единицей в знаменателе. Из-за этого нельзя теперь утверждать, что все средние числа частиц меньше единицы: принцип Паули не распространяется на бозоны. По физическому смыслу все $n_k \geq 0$, следовательно $\mu < \epsilon_0$, где ϵ_0 — минимальная энергия системы (т.е. энергия основного уровня). Для свободных частиц ϵ_0 равна нулю. Отсюда следует, что для свободных бозонов химический потенциал отрицателен. По-прежнему имеется уравнение связи μ и N в случае фиксированного числа частиц:

$$N = \sum_k \frac{1}{e^{(\epsilon_k - \mu)/k_B T} - 1}. \quad (39.52)$$

При высоких температурах $n_k \propto T$, т.е. число бозонов в каждом состоянии растет.

Если в системе число частиц не фиксировано, а определяется условиями равновесия (например, равновесие излучения с веществом, когда фотоны поглощаются и испускаются), то $\mu = 0$. Применяя (39.51) к системе фотонов ($\mu = 0, \epsilon_k = \hbar\omega_k$), приходим к формуле (38.15) и ее аналогу для фононов (39.30).

Заметим, что при $\exp[(\epsilon_k - \mu)/k_B T] \gg 1$ обе формулы (39.42) и (39.51) переходят в классическое распределение Больцмана. В этом случае $n_k \approx \exp[(\mu - \epsilon_k)/k_B T] \ll 1$, что можно интерпретировать как условие малой плотности частиц, как квантовый аналог разреженного газа: в каждом квантовом состоянии фактически находится не более одной частицы. Значит, не существенно не только прямое взаимодействие частиц, но и их квантовое влияние друг на друга, обменные эффекты.

39.8 Макроскопические квантовые явления

Не следует думать, будто законы квантовой механики важны только при рассмотрении явлений в масштабах атомов и молекул. При низких температурах вблизи абсолютного нуля существуют и макроскопические проявления этих законов. С ними мы и познакомимся в этом разделе.

Бозе-эйнштейновская конденсация

Рассмотрим идеальный газ свободных бозонов, которые не взаимодействуют ни друг с другом, ни с внешним полем. Состояние частицы задается ее импульсом \vec{p} и проекцией спина (имеется всего $g = 2s + 1$ возмож-

ностей, для бозонов s — целое число). Среднее число бозонов в данном состоянии k описывается формулой (39.51). Поскольку принцип запрета Паули на бозоны не распространяется, они могут накапливаться в одном состоянии. При нулевой температуре все частицы системы должны занять нижний энергетический уровень с $\epsilon = 0$. Встает вопрос, что будет при $T \neq 0$?

Снова вспомним формулу (39.14) для числа типов колебаний, но заменим в ней волновой вектор на импульс частицы: $\vec{p} = \hbar \vec{k}$. Получаем тогда:

$$dN_{\text{кол}} = \frac{gV}{(2\pi\hbar)^3} d^3p = \frac{gV}{2\pi^2\hbar^3} p^2 dp. \quad (39.53)$$

Учитывая, что энергия свободной нерелятивистской частицы $\epsilon = p^2/2m$, так что $d\epsilon = p dp/m = \sqrt{2\epsilon/m} dp$, записываем (39.53) в виде:

$$dN_{\text{кол}} = Vg \frac{m^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3} \sqrt{\epsilon} d\epsilon. \quad (39.54)$$

Умножая (39.54) на среднее число частиц, имеющих данную энергию ϵ , находим число частиц, приходящееся на интервал энергии $d\epsilon$:

$$dN = Vg \frac{m^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3} \frac{\sqrt{\epsilon} d\epsilon}{\exp[(\epsilon - \mu)/k_B T] - 1}. \quad (39.55)$$

Чтобы получить полное число частиц в системе, проинтегрируем (39.55) по всем значениям энергии:

$$N = V \frac{gm^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\epsilon} d\epsilon}{\exp[(\epsilon - \mu)/k_B T] - 1}. \quad (39.56)$$

Вводя новую переменную интегрирования $z = \epsilon/k_B T$, переписываем (39.56) в виде

$$\frac{N}{V} = \frac{g(mk_B T)^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty \frac{\sqrt{z} dz}{\exp(z - \mu/k_B T) - 1}. \quad (39.57)$$

Это — уравнение для химического потенциала μ . Если при заданной плотности частиц N/V понижать температуру газа, то химический потенциал будет увеличиваться (т.е. уменьшаться по модулю), как следует

из (39.57). Предельного значения $\mu = 0$ он достигнет при температуре T_0 , определяемой уравнением

$$\frac{N}{V} = \frac{g(mk_B T_0)^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{\sqrt{z} dz}{e^z - 1}, \quad (39.58)$$

откуда следует выражение

$$T_0 = 3.31 \frac{\hbar^2}{mk_B} \left(\frac{N}{gV} \right)^{2/3}. \quad (39.59)$$

Разберемся в физическом смысле входящих в формулу (39.59) комбинаций параметров. Если обозначить через l среднее расстояние между частицами, то в объеме радиусом $l/2$ будет содержаться одна частица, то есть плотность частиц $N/V \sim 1/l^3$. Поэтому формулу (39.59) можно переписать в виде $k_B T_0 \sim \hbar^2/ml^2$. Поскольку тепловая энергия движения частиц $mv^2 \sim k_B T_0$, мы получаем отсюда $l^2 \sim \hbar^2/m^2 v^2$, или $l \sim \hbar/mv = \lambda$, где λ — длина волны де Бройля (мы опустили в этом рассуждении не существенные числовые множители). Таким образом, снова приходим к выводу, что квантовые эффекты становятся заметными, когда длина волны де Бройля имеет порядок расстояния между частицами. Формула (39.59) — это общее выражение для “квантовой” температуры: оно еще нам встретится, а меняться может лишь числовой множитель.

Итак, при $T > T_0$ существует физически приемлемое ($\mu < 0$) решение уравнения (39.57). При $T < T_0$ химический потенциал остается равным предельному значению 0, дальше ему меняться некуда, и правая часть уравнения становится меньше N/V . Этот результат удивителен, ибо число частиц в системе фиксировано, и плотность частиц, казалось бы, должна оставаться неизменной. Стало быть, какая-то доля этих частиц куда-то девается, выпадает из системы, перестает участвовать в тепловом движении. Значит, правая часть (39.57) будет теперь описывать те частицы, которые в тепловом движении участвуют, т.е. энергия которых больше нуля:

$$N_{\varepsilon>0} = V \frac{g(mk_B T)^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{\sqrt{z} dz}{\exp(z - \mu/k_B T) - 1}. \quad (39.60)$$

Если умножить и разделить правую часть (39.60) на $T_0^{3/2}$, то можно выделить фактор $(T/T_0)^{3/2}$, а оставшийся сомножитель, в соответствии с

(39.58), будет равен полному числу N частиц в системе:

$$N_{\varepsilon>0} = N \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2}, \quad T \leq T_0. \quad (39.61)$$

Остальные частицы имеют нулевую энергию; их число $N_{\varepsilon=0}$ определится как разность $N - N_{\varepsilon>0}$:

$$N_{\varepsilon=0} = N \left[1 - \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \right], \quad T \leq T_0. \quad (39.62)$$

Итак, при температуре ниже критической $T \leq T_0$ происходит т.н. бозе-эйнштейновская конденсация — накопление частиц в состоянии с $\vec{p} = 0$. Эффект этот — макроскопический, т.к. число частиц конденсата огромно, порядка полного числа частиц N . При понижении температуры ниже критической конденсат появляется внезапно — система испытывает резкое изменение свойств (как говорят, происходит фазовый переход).

При абсолютном нуле температуры все частицы системы находятся в конденсате. При повышении температуры некоторые из них покидают конденсат, и начинают участвовать в тепловом движении. При $T > T_0$ бозе-эйнштейновский конденсат исчезает: в нем не остается частиц. Зависимость доли частиц в конденсате от температуры показана на рис. 39.2.

Важно отметить, что конденсация происходит не в обычном пространстве, как при выпадении, например, росы, но в пространстве импульсов. С точки зрения нашего обычного пространства и конденсат, и нормальный компонент бозе-газа “размешаны”, и система остается пространственно однородной. Но есть и сходство с обычным насыщенным паром: например, при $T \leq T_0$ давление не зависит от объема системы, что для идеального газа необычно.

Явление, предсказанное Эйнштейном и индийским физиком Бозе много лет назад, впервые экспериментально наблюдалось в 1995 г. в США. “Газ” из 2000 атомов рубидия, охлажденный почти до абсолютного нуля (20 нК), “сконденсировался” в “суператом”, который вел себя уже не как газ частиц, но как единое целое. Таким образом, было создано новое состояние вещества, никогда ранее не существовавшее в естественном состоянии во Вселенной, как было сказано в сообщении об этих работах. В 2001 г. авторам этих экспериментальных работ была присуждена Нобелевская премия.

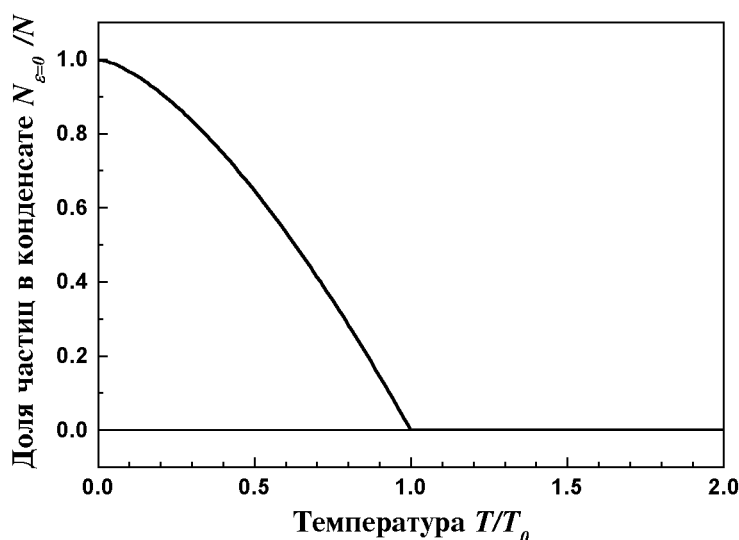


Рис. 39.2: Доля частиц в бозе-эйнштейновском конденсате в зависимости от температуры.

Явление сверхтекучести

Сверхтекучесть — это свойство жидкого гелия протекать без трения сквозь тонкие капилляры при низких температурах $T < 2.17$ К. Явление открыто П. Л. Капицей в 1938 г. (Нобелевская премия была присуждена в 1978 г.). Дальнейшие исследования показали, что в жидком гелии как-бы имеются два компонента: нормальный и сверхтекучий. Из-за отсутствия вязкости сверхтекучий гелий не оказывает сопротивления погруженным телам. В сверхтекучем состоянии жидкий гелий проявляет так много необычных свойств, что мы вправе считать сверхтекучий компонент особым состоянием вещества, которое принято обозначать HeII (в отличие от обычного HeI). Упомянем лишь т.н. эффект фонтанирования: при освещении карманным фонарем нижнего конца капилляра, опущенного в жидкий гелий, он нагревается и доля сверхтекучего компонента падает. Избыточное давление заставляет втекать в капилляр сверхтекучий компонент, что приводит к появлению фонтанчика высотой до 30-40 см. Такое перетекание гелия от холодного места к горячему необычно: в нормальных жидкостях все происходит как раз наоборот.

Фазовая диаграмма для гелия представлена на рис. 39.3. Фазовый переход HeI \Rightarrow HeII происходит на т.н. λ -линии, причем температура перехода уменьшается с ростом давления. Сверхтекучее состояние наблюдалось для изотопа ^4He (сверхтекучесть у другого изотопа ^3He уви-

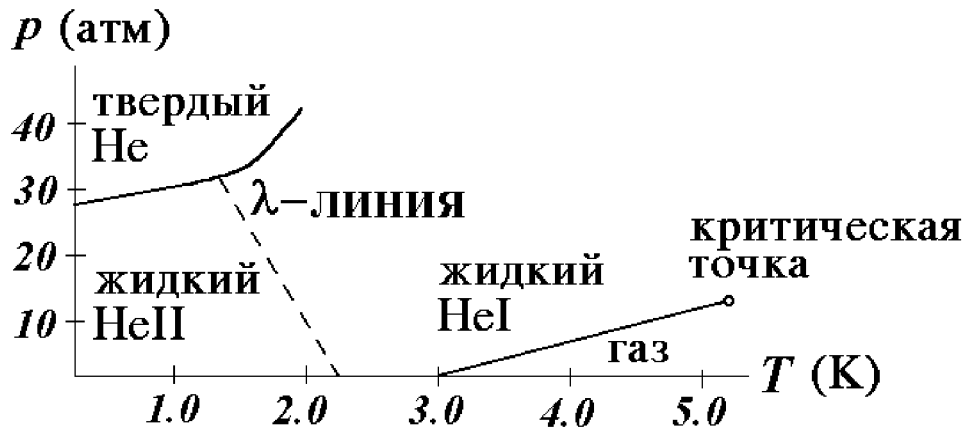


Рис. 39.3: Фазовая диаграмма для ${}^4\text{He}$ (по осям отложены давление и температура). Штрихами показана λ -линия между нормальным (HeI) и сверхтекучим (HeII) состояниями.

дели гораздо позже и с большим трудом, но это — другая история). Поскольку протон и нейтрон, входящие в ядро гелия, имеют спин $1/2$, то спин ядра ${}^4\text{He}$ — целый, а ${}^3\text{He}$ — полуцелый. Здесь возникает разница между бозонами и фермионами. Частицы жидкого ${}^4\text{He}$ — бозоны, и они могут претерпевать конденсацию Бозе-Эйнштейна. К тому же, при типичной плотности частиц в жидкости $N/V = 2 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$, массе ядра гелия $m = 6.7 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ и $g = 1$ (полный спин ядра равен нулю) формула (39.59) дает для температуры бозе-эйнштейновской конденсации значение $T_0 = 2.9 \text{ К}$, что не так далеко от температуры λ -перехода. Представляется весьма соблазнительным связать два необычных состояния вещества — бозе-эйнштейновский конденсат и сверхтекучий компонент. Но все не так просто, как кажется.

Элементы микроскопической теории сверхтекучести

Дело в том, что жидкость — не идеальный газ, там имеется сильное взаимодействие между частицами. А мы рассматривали конденсат в системе идеального газа бозонов. И надо еще разобраться, почему конденсат должен проявлять сверхтекучесть. Согласно микроскопической теории Н. Н. Боголюбова (1947 г.), нельзя говорить о состоянии отдельных атомов гелия, но лишь о состоянии всей системы. Здесь мы впервые встречаемся с *квантовой жидкостью*, с *макроскопическим квантовым эффектом*. При $T = 0$ система находится в основном состоянии, при повышении температуры возникают тепловые возбуждения, переход на

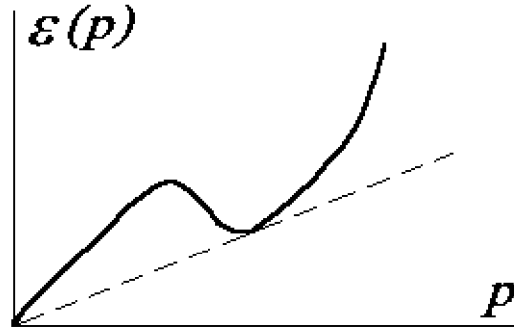


Рис. 39.4: Зависимость энергии квазичастиц в $HeII$ от их импульса (закон дисперсии).

низколежащие возбужденные уровни энергии. Коллективные возбуждения атомов квантуются аналогично колебаниям атомов кристаллической решетки в теории Дебая. Там при квантовании возникали фононы, здесь — квазичастицы, отдельные кванты с энергией $\varepsilon(\vec{p})$. Оказалось, что первостепенную роль играет закон зависимости энергии от импульса \vec{p} — закон дисперсии. В квантовой бозе-жидкости возбуждения (квазичастицы) — также бозоны с нулевым спином. При малых T число квазичастиц мало и их можно считать невзаимодействующими. В этом случае имеем идеальный газ квазичастиц, который при какой-то критической температуре испытывает конденсацию. Но все, повторим, зависит от закона дисперсии, полный расчет которого очень сложен и до сих пор не выполнен. Боголюбов вычислил дисперсию слабовозбужденных состояний. В предельных случаях его формула дает:

$$\begin{aligned}\varepsilon(\vec{p}) &\sim \frac{p^2}{2m}, & (\text{большие импульсы}), \\ \varepsilon(\vec{p}) &\sim vp, & (\text{малые импульсы}),\end{aligned}\tag{39.63}$$

где v — некая постоянная с размерностью скорости. Энергия в первом случае есть не что иное, как энергия атома гелия. Энергия же во втором предельном случае аналогична энергии акустического кванта (фонона). Ход кривой показан на рис. 39.4.

Таким образом, при $T \neq 0$ жидкий гелий состоит из конденсата квазичастиц и идеального газа квазичастиц с энергией $\varepsilon(\vec{p})$. Атомы гелия нельзя разделить на “образующие конденсат” и “порождающие свободные квазичастицы”: все они принимают участие в образовании как основного конденсатного состояния, так и идеального газа. Газ квазичастиц может рассматриваться как нормальный компонент жидкого гелия, а конденсат

— как сверхтекучий. Подобная феноменологическая теория двухкомпонентной жидкости была развита Л. Д. Ландау (1941 г.).

Сверхтекучесть конденсата

Мы разобрались, почему в жидкости может появиться идеальный газ: свободные частицы газа — это не сами атомы гелия, но возбуждения основного состояния (конденсата). Теперь надо понять происхождение сверхтекучести конденсата.

Сначала напомним результаты классической механики, касающиеся перехода к движущимся системам отсчета. Пусть дана система K , в которой радиус-векторы частиц с массами m_i обозначены \vec{r}_i . Импульс такой системы есть $\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i$, а кинетическая энергия $E = \sum_i m_i v_i^2 / 2$ ($\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i$). Пусть дана также система K' , положение начала координат которой задается вектором \vec{R} ; скорость K' относительно K есть $\vec{V} = \dot{\vec{R}}$. В движущейся системе координат радиус-векторы частиц есть $\vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{R}$. Отсюда немедленно следуют выражения для полного импульса и энергии частиц в движущейся системе координат (M — полная масса всех частиц):

$$\vec{P}' = \vec{P} - M\vec{V}, \quad E' = E - \vec{V} \cdot \vec{P} + \frac{MV^2}{2}. \quad (39.64)$$

Это — нерелятивистские преобразования Галилея, известные из классической механики. Следуя рассуждениям Ландау, применим теперь эти формулы к невозбужденному конденсату, текущему по трубке со скоростью \vec{V} . В лабораторной системе отсчета K энергия и импульс конденсата даются очевидными формулами:

$$\vec{P}_1 = M\vec{V}, \quad E_1 = E_0 + \frac{MV^2}{2}, \quad (39.65)$$

где E_0 — энергия покоящегося конденсата в основном состоянии. Возьмем систему K' , движущуюся со скоростью конденсата \vec{V} , так что в ней конденсат покоится. Преобразования Галилея (39.64) тогда дают:

$$\vec{P}'_1 = 0, \quad E'_1 = E_0. \quad (39.66)$$

Эти результаты очевидны, и мы напомним только, что все это относится к конденсату в основном состоянии. В системе K' он покоится, а мимо него со скоростью $-\vec{V}$ движется трубка. Если есть вязкость, то

она проявится в диссипации энергии. Это не может сразу произойти во всей жидкости: сначала возбудятся отдельные внутренние движения, появятся квазичастицы типа фононов. Пусть возникло возбуждение с импульсом \vec{p} и энергией $\varepsilon(\vec{p})$. Для возбужденного конденсата в K' имеем вполне очевидные соотношения:

$$\vec{P}_2' = \vec{p}, \quad E_2' = E_0 + \varepsilon(\vec{p}). \quad (39.67)$$

Как эти формулы будут выглядеть в лабораторной системе отсчета? Чтобы перейти назад в K , используем обратные преобразования Галилея:

$$\vec{P}_2 = \vec{P}_2' + M\vec{V}, \quad E_2 = E_2' + \vec{V} \cdot \vec{P}_2 - \frac{MV^2}{2}, \quad (39.68)$$

откуда находим

$$\vec{P}_2 = M\vec{V} + \vec{p}, \quad E_2 = E_0 + \frac{MV^2}{2} + \varepsilon(\vec{p}) + \vec{V} \cdot \vec{p}. \quad (39.69)$$

Сравнивая формулы (39.65) и (39.69), находим изменение энергии движущегося конденсата в лабораторной системе K при переходе из основного состояния в возбужденное:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \varepsilon(\vec{p}) + \vec{V} \cdot \vec{p}. \quad (39.70)$$

Образование квазичастицы энергетически выгодно, если $\Delta E < 0$. В самом благоприятном для этого случае импульс \vec{p} антипараллелен скорости \vec{V} , и изменение энергии конденсата равно $\Delta E = \varepsilon(\vec{p}) - pV$. Отсюда следует, что для торможения жидкости необходимо выполнение условия:

$$V > \frac{\varepsilon(\vec{p})}{p} \geq \min \frac{\varepsilon(p)}{p} = u^*. \quad (39.71)$$

Здесь мы ввели обозначение u^* для параметра с размерностью скорости — отношения минимума энергии возбуждения к импульсу. Этот параметр равен тангенсу угла наклона штриховой линии на рис. 39.4. Если спектр возбуждений таков, что $u^* > 0$, как это и показано, то условие торможения не выполняется при слабых возбуждениях: как говорят, в спектре возбуждения имеется *энергетическая щель* — некое расстояние между энергией возбуждения и энергией основного состояния. Это значит, что при малых скоростях $V < u^*$ трение невозможно. Иными словами, мы получили явление сверхтекучести (при малых импульсах

скорость u^* равна скорости звука v). Смысл полученного результата в том, что конденсат — это коллективный эффект, реагирующий на выпадение одного из своих членов повышением энергии, в то время как трение должно энергию понижать. Закон дисперсии, изображенный на рис. 39.4 таков, что условие сверхтекучести выполнено. Для обычных бозе-частиц с $\varepsilon = p^2/2m$ имеем $\min \varepsilon/p = 0$ и условие сверхтекучести не выполнено. Вывод: обычные частицы даже в конденсатном состоянии сверхтекучестью не обладают, конденсат не образует связанного коллектива и не реагирует на замедление отдельных частиц.

Еще раз подчеркнем: HeII — не смесь различных веществ, и его компоненты невозможно выделить по отдельности. Лучше было бы говорить об одновременном сосуществовании в гелии не компонентов, а двух видов движения — нормального и сверхтекучего.

Сверхпроводимость

В 1911 г. голландский физик Г. Камерлинг-Оннес открыл удивительное явление. При температуре около 4 К электрическое сопротивление ртути скачком уменьшалось до нуля. Впоследствии явление *сверхпроводимости* было найдено им у олова, свинца, таллия и других веществ. Были проведены многочисленные эксперименты по выявлению свойств сверхпроводящего состояния вещества. Важнейшими из них являются:

1. Наличие критической температуры T_c , при которой возникает сверхпроводящее состояние. Для большинства известных ранее веществ эти температуры имеют порядок 1-15 К. В 1986 г. были открыты керамические соединения, переходящие в сверхпроводящее состояние при температурах порядка 125 К, т.е. выше точки кипения жидкого азота. Поскольку ранее сверхпроводники получались лишь при охлаждении материала жидким гелием, а жидкий азот гораздо дешевле в производстве, открытие т.н. *высокотемпературной сверхпроводимости* сулит развитие многочисленных технических приложений.
2. Выталкивание слабого магнитного поля из толщи сверхпроводника за исключением тонкого слоя вблизи его поверхности (эффект Мейснера).
3. Разрушение сверхпроводящего состояния при наложении достаточно сильного магнитного поля. Критическое значение поля B_c зависит

от температуры сверхпроводника. Характерный график зависимости показан на рис. 39.5. Такое поведение хорошо описывается формулой

$$B_c = B_0 \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right], \quad (39.72)$$

где B_0 — критическое значение поля при абсолютном нуле температуры.

4. Как мы увидим в следующем разделе, теплоемкость нормального металла при низких температурах имеет вид:

$$C = A \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 + \gamma T, \quad (39.73)$$

где первое слагаемое — уже знакомый нам вклад кристаллической решетки, описываемый теорией Дебая, а второе слагаемое — изучаемый в следующем разделе вклад электронного газа. В сверхпроводнике теплоемкость при очень низких температурах определяется, как показывают эксперименты, выражением типа:

$$C = A \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 + a e^{-b/k_B T}. \quad (39.74)$$

Первое слагаемое не изменилось: кристаллическая решетка по-прежнему на месте. Драматическое изменение второго слагаемого (экспонента вместо линейной функции) показывает, что сверхпроводимость связана с какими-то коренными изменениями поведения электронов проводимости.

Микроскопическая теория сверхпроводимости была создана Д. Бардиным, Л. Купером и Д. Шриффером и усовершенствована Н. Н. Боголюбовым. Она слишком сложна для изложения в данном учебнике. Достаточно лишь указать на то, что имеется глубокая аналогия между сверхтекучестью и сверхпроводимостью. Из-за взаимодействия электронов с фононами между электронами возникает притяжение, и при определенных условиях может образоваться своеобразное связанное состояние — куперовская пара электронов с противоположными спинами. Такое образование является уже бозоном и может испытывать бозе-эйнштейновскую конденсацию, что и является предпосылкой перехода материала в сверхпроводящее состояние.

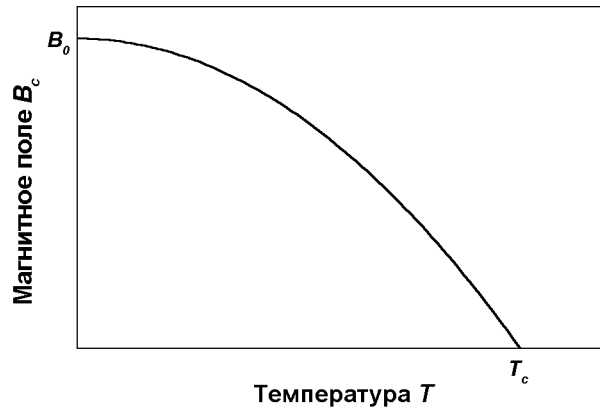


Рис. 39.5: Значение критического магнитного поля как функция температуры.

При абсолютном нуле температуры электронный газ в сверхпроводнике переходит в основное состояние, обладающее свойствами конденсата. Что очень важно, это состояние отделено энергетической щелью E_g от следующего, возбужденного состояния. Иначе говоря, чтобы вывести электрон из основного состояния, надо придать ему некоторую минимальную энергию E_g , а меньшие порции энергии просто не будут восприняты. Нечто подобное мы уже видели для сверхтекучего состояния, а еще ранее — для теплоемкости (“замораживание” вращательных и колебательных степеней свободы, теория теплоемкости Эйнштейна). Теория предсказывает простую связь энергетической щели и критической температуры: $E_g = 3.5k_B T_c$. Наличие энергетической щели сразу объясняет поведение теплоемкости электронного газа. Действительно, энергия E_g — это минимальная энергия, разрушающая куперовскую пару, и ее сообщение порождает пару свободных электронов. Тогда на каждый электрон приходится половинная энергия $E_g/2$. Из статистических соображений можно утверждать тогда, что число электронов вне основного состояния пропорционально величине $e^{-E_g/2k_B T} = e^{-1.75T_c/T}$. Тепловая энергия, поглощаемая при возбуждении, пропорциональна $E_g e^{-1.75T_c/T}$. Производная этой величины по температуре дает теплоемкость электронного газа в сверхпроводящем состоянии:

$$C = \text{const.} \left(\frac{T_c}{T} \right)^2 \exp \left(-1.75 \frac{T_c}{T} \right). \quad (39.75)$$

При низких температурах предэкспоненциальный множитель $1/T^2$ меняется гораздо медленнее экспоненты, так что этот закон практически не отличается от феноменологического соотношения (39.74). При изменении

температуры величина щели изменяется по закону, похожему на изображенный на рис. 39.5. При критической температуре щель исчезает, и вместе с ней исчезают сверхпроводящие свойства. Заметим, что выражение (39.75) аналогично теплоемкости (39.8) в теории Эйнштейна, где также имеется щель между основным и возбужденным уровнями энергии.

Из сказанного ясно, какую важную роль играет энергетическая щель. В системе бозонов она ответственна за явления сверхтекучести и сверхпроводимости. В системе фермионов, как мы увидим в дальнейшем, она ответственна за различие свойств металлов, диэлектриков и полупроводников.

Контрольные вопросы

1. Перечислите трудности классической теории теплоемкости.
2. В чем основные отличия квантовых теорий теплоемкости Эйнштейна и Дебая?
3. Поясните физический смысл характеристической температуры Дебая.
4. Что такое фонон?
5. Что такое конденсация Бозе-Эйнштейна?
6. * Перечислите основные черты явлений сверхтекучести и сверхпроводимости.
7. * Поясните в общих чертах роль энергетической щели при возникновении сверхтекучести и сверхпроводимости.

Часть VII

Основы теории строения вещества

Ныне зиждительных тел основных объясню я движение,
Коим все вещи они порождают и вновь разлагают;
Сила какая к тому принуждает их, скорость какая
Свойственна им на пути в пустоте необъятной простран-
ства,
Ты же внимателен будь и выслушай то, что скажу я.

Тит Лукреций Кар. О ПРИРОДЕ ВЕЩЕЙ, I, 62-66.

Глава 40

Элементы физики твердого тела

Цель настоящей главы --- описать поведение носителей заряда в твердых телах с позиций квантовой механики. Ранее мы обсуждали состояния электронов в изолированных атомах. Здесь мы изучим, как меняется их поведение, если атомы оказываются в кристаллической решетке. Если рассматривать атом как некую потенциальную яму, захватывающую электроны, то объединение атомов в кристалл приводит к появлению в нем периодического потенциального поля. Оказывается, что движение электронов в таком поле отличается важными особенностями. Электроны, обладающие энергией в некоторых диапазонах, движутся в кристалле свободно, а иметь другие энергии им просто запрещено. Квантовая механика позволила создать стройную теорию электронных свойств твердых тел, объясняющую такие явления и свойства, как электропроводность металлов, различия между металлами, диэлектриками и полупроводниками, их оптические свойства.

40.1 Энергетические зоны в твердых телах

Применение оптической аналогии

Вспомним нашу аналогию с оптикой при изучении прохождения света через многослойную структуру. Такая структура, представляющая собой периодический ряд потенциальных барьеров, может служить для моделирования структуры кристалла. Результаты для частицы мы представим в чуть ином виде. Все формулы (30.55), (30.56), (30.58) остаются в силе, только для D_r надо взять выражение (30.49). Уравнение же (30.57)

переписывается в виде:

$$S = \cos (dk_1) \cos (bk_2) - \frac{k_1^2 + k_2^2}{2k_1 k_2} \sin (dk_1) \sin (bk_2). \quad (40.1)$$

Учитывая, что широкие минимумы (где в пределе $D^{(\infty)} = 0$) получаются из гиперболической ветви решения $|S| \geq 1$, мы возьмем лишь тригонометрическую ветвь, и решим численно уравнение $\cos (kl) = S$ относительно энергии частицы $E = \hbar^2 k_1^2 / 2m$, найдя ее зависимость от квазиволнового вектора k . Решение для большого числа барьеров $N \rightarrow \infty$ представлено на рис. 40.1, где для конкретности мы положили межбарьерное расстояние равным ширине прямоугольных барьеров: $d = b = l/2 = 5 \text{ \AA}$, а высоту барьера $U = 3 \text{ эВ}$. При таких значениях изолированная квантовая яма между двумя барьерами имеет два уровня энергии, показанные на рисунке линиями с $n = 1$ и $n = 2$. Нижний уровень практически не изменился из-за того, что мы взяли большое число таких ям: туннелирование между такими состояниями маловероятно. Верхние уровни расщепились из-за туннелирования и образовали полосу (зону) разрешенных значений энергии (показана светлым фоном). Выше потенциальных барьеров разрешенные (светлые) зоны соответствуют таким значениям энергии частицы, при которых она не отражается от барьеров. Темные же зоны соответствуют значениям энергии, при которых коэффициент отражения равен единице: частица с такими энергиями не может проникнуть и двигаться даже над барьерами.

Формирование энергетических зон при объединении атомов в кристаллическую решетку

Здесь мы рассмотрим образование разрешенных и запрещенных зон с несколько иной точки зрения. На рис. 40.2 показан ход электростатического потенциала в окрестности изолированного атома Li (последний помещен в начало координат и показан знаком \oplus). Горизонтальная линия, помеченная "O", соответствует потенциальной энергии, равной нулю, а две более низкие линии — энергетическим уровням $1s$ - и $2s$ -состояний. Два электрона локализованы в $1s$ -состоянии и один — в $2s$ -состоянии. Электрон, находящийся в $2s$ -состоянии, имеет энергию связи 5.4 эВ; чтобы удалить $1s$ -электрон, необходимо затратить энергию 75 эВ, а чтобы удалить и второй $1s$ -электрон, нужно еще примерно 120 эВ.

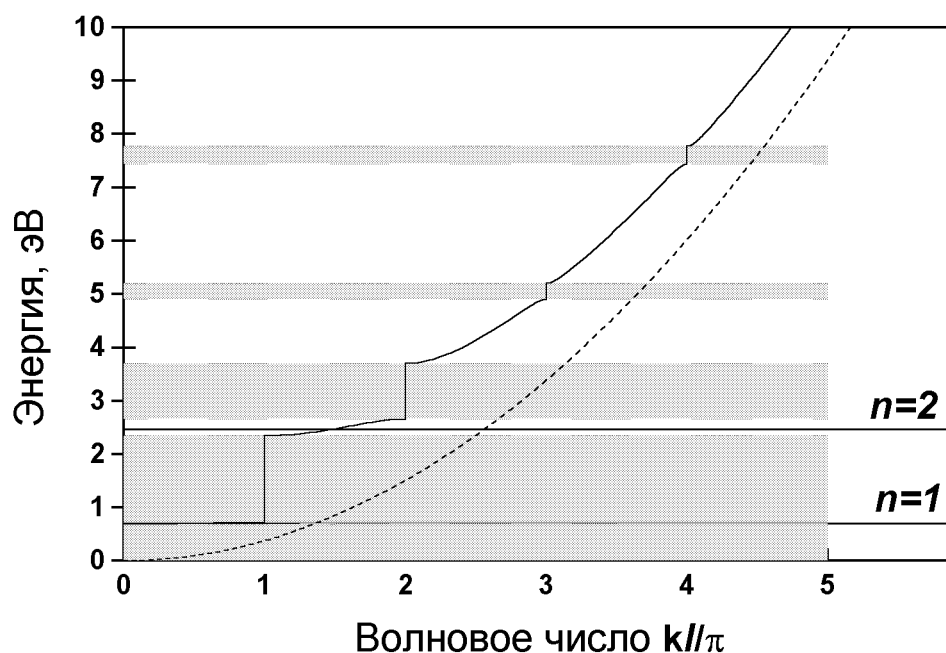


Рис. 40.1: Формирование зон при большом числе барьеров. Сплошная линия показывает зависимость энергии от квазиволнового числа (вектора) k , пунктирная соответствует свободной частице с энергией $E = \hbar^2 k^2 / 2m$. При увеличении энергии сплошная и пунктирные линии сближаются — барьеры оказывают все меньшее влияние, а запрещенные зоны, показанные темным цветом, становятся все уже.

Если атомы лития образуют кристалл, то результирующее электростатическое поле в любой точке внутри кристалла представляет собой сумму полей отдельных атомов. Потенциал между атомами никогда не возрастает до нулевого значения. В действительности потенциал между атомами внутри кристалла существенно ниже потенциала в точке, находящейся на таком же расстоянии от изолированного атома. Это понижение потенциала в кристалле настолько значительно, что $2s$ -электроны, связанные в изолированном атоме, в кристалле уже не встречают потенциального барьера, способного удерживать $2s$ -электроны в окрестности определенного атома Li. Понижение потенциального барьера освобождает $2s$ -электроны, волновые функции которых распространяются на весь кристалл, т.е. в кристалле лития $2s$ -электроны представляют собой свободные электроны. Они “принадлежат” уже не отдельным атомам, а кристаллу в целом. Волновые функции $2s$ -электронов не локализованы, а размазаны по всему кристаллу. Энергетическое $2s$ -состояние изолированного атома лития превращается в энергетическое “состояние” кристалла. Если в кристалле содержится N атомов, то все они будут нахо-

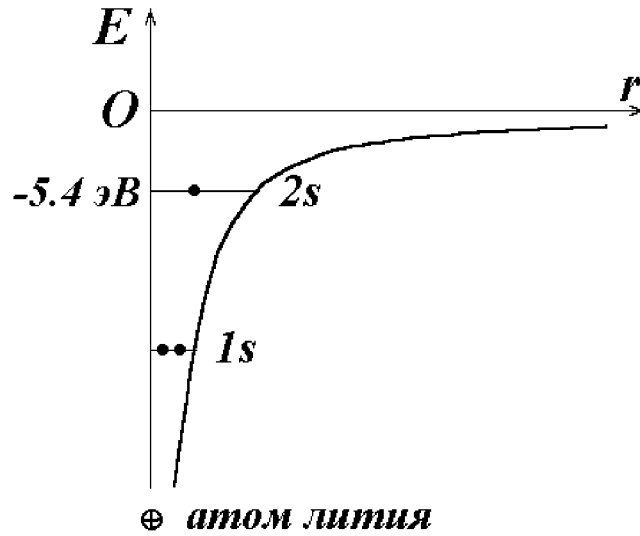


Рис. 40.2: Низшие энергетические уровни атома лития.

дится в этом “состоянии”.

Периодическая решетка кристалла в определенном смысле напоминает систему связанных осцилляторов. В разделе о колебаниях мы видели, что нормальные частоты двух одинаковых слабосвязанных осцилляторов расщепляются на две разные, но близкие частоты. Аналогично, частота N одинаковых связанных осцилляторов расщепится на N близких частот. Похожим образом, $2s$ уровни атома лития превратятся в систему близко расположенных уровней кристалла лития. Поскольку число N атомов в кристалле огромно, разница в энергиях между расщепившимися уровнями энергии настолько мала, что они, по существу, распределены непрерывно, образуя т.н. *валентную зону* (название связано с тем, что эта зона образовалась из-за расщепления уровней, на которых находятся валентные электроны).

Исходя из представления, что валентные электроны уже не принадлежат отдельным атомам, мы можем сказать, что неопределенность их положения в кристалле характеризуется половиной постоянной решетки (расстояния a между ее соседними узлами): $\Delta r_i \sim a/2$. Тогда по соотношению неопределенности Гейзенберга находим неопределенность компоненты импульса электрона $\Delta p_i \sim 2\hbar/a$. Такой же порядок величины имеет и сама компонента импульса, так что неопределенность ΔE энергии электрона равна по порядку величины $\Delta E \sim \sum_i p_i^2/2m \sim 6\hbar^2/(ma^2)$. Подставляя численные значения фундаментальных постоянных, нахо-

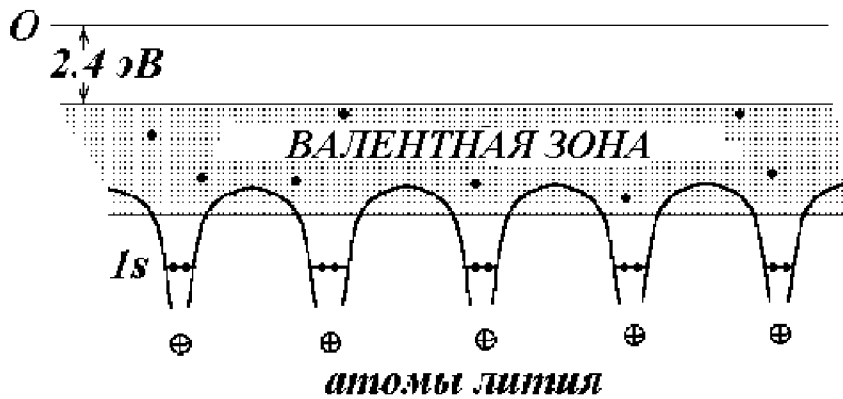


Рис. 40.3: Энергетические уровни кристалла лития.

ДИМ:

$$\Delta E \sim \frac{45.7 \text{ эВ}}{(a/1 \text{ Å})^2}. \quad (40.2)$$

Это соотношение дает оценку ширины валентной зоны. У большинства кристаллов $a=2-4 \text{ Å}$, что приводит к значениям $\Delta E \sim 3-10 \text{ эВ}$. Для лития, например, $a = 3.04 \text{ Å}$, так что (40.2) дает $\Delta E \sim 4.9 \text{ эВ}$. Мы получили не такую плохую оценку, если учесть, что потолок зоны лежит уже на 3 эВ выше $2s$ -уровней (см. рис. 40.2 и 40.3), а из-за упомянутого выше понижения суммарного потенциала дно этой зоны лежит ниже $2s$ -уровней изолированных атомов лития. Поскольку в моле кристалла содержится $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ атомов, то расстояние между соседними уровнями будет равно $\Delta E/N_A \sim 10^{-23} \text{ эВ}$, то есть практически энергия электрона в валентной зоне действительно может принимать непрерывный ряд значений.

В общем случае все энергетические состояния атома превращаются в кристалле в зоны. Пусть первоначально имеется N изолированных атомов какого-либо вещества. Пока атомы изолированы друг от друга, каждый из них имеет одинаковую систему энергетических уровней. Заполнение уровней электронами осуществляется в каждом атоме независимо от заполнения аналогичных уровней в других атомах. Когда атомы сближаются друг с другом, образуя твердое тело, взаимодействие между ними оказывает возмущающее действие на первоначальные атомные энергетические уровни. Вместо одного одинакового для всех N атомов уровней возникают N очень близких, но не совпадающих уровней. Таким образом, каждый уровень изолированного атома превращается в кристалле в

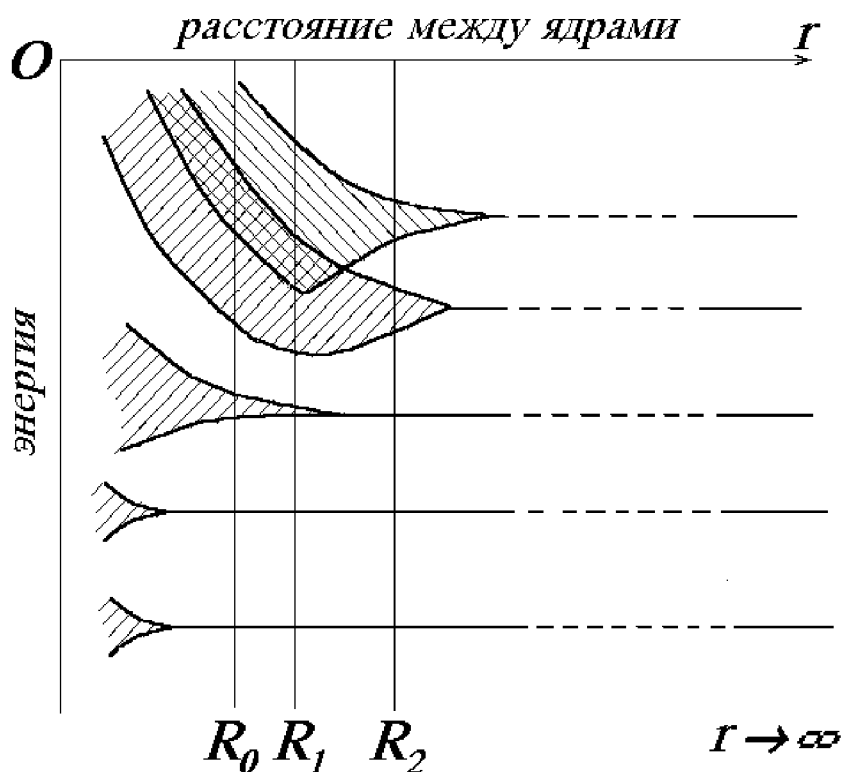


Рис. 40.4: Образование зон при сближении атомов. При $r \rightarrow \infty$ имеется набор энергетических уровней, одинаковый для всех изолированных атомов. При сближении уровни расширяются, образуя зоны. Нижние уровни возмущаются слабее верхних. Возможно также перекрытие зон (показано двойной штриховкой). При равновесном состоянии R_0 на данном рисунке имеется два нижних, практически не возмущенных, уровня (очень узкие зоны), далее следует изолированная зона и две верхние зоны, слившиеся в одну.

N близко расположенных друг к другу энергетических уровней, образующих зону. Величина расщепления для различных уровней атома не одинакова. Сильнее возмущаются уровни, заполненные в атоме внешними электронами. Уровни, заполненные внутренними электронами, возмущаются слабо. На рис. 40.4 видно, что уменьшении расстояния r между атомами, заметно расщепляются лишь уровни, занимаемые валентными электронами. Существенному расщеплению подвергаются и более высокие уровни, не занятые электронами в основном состоянии атома.

Некоторые свойства энергетических зон:

- Во-первых, энергия связи твердого тела должна обуславливаться сдвигом энергетических уровней электронов, подобно тому, что происходит при образовании химической связи. Следовательно, при образовании твердого тела энергетические уровни в среднем сме-

щаются вниз.

- Во-вторых, больше всего подвержены возмущающему действию соседних атомов наиболее удаленные от ядра, т.е. валентные, электроны, так как они расположены ближе всех остальных электронов к соседним ионам.
- В-третьих, равновесное состояние между атомами решетки (R_0 на рис. 40.4) должно соответствовать минимуму энергии, поскольку при дальнейшем сближении атомов энергетические уровни начинают смещаться вверх.
- В-четвертых, состояние исходной системы при сближении атомов должно деформироваться непрерывным образом (см. рис. 40.4), т.е. число состояний в твердом теле должно оставаться тем же, что и число состояний в исходной системе из N изолированных атомов.

Дискретные атомные уровни проявляются в кристалле либо в виде изолированных зон (когда дно верхней зоны лежит выше верхней границы нижней зоны — как для расстояния R_2 на рис. 40.4), либо в виде перекрывающихся зон, для которых уже нельзя установить, к какой подболочке первоначально принадлежали уровни (верхние зоны для расстояния R_1 на рис. 40.4). Число уровней в такой слившейся зоне равно сумме количеств уровней, на которые расщепляется оба первоначальных уровня атома. Высшие энергетические зоны всегда перекрываются, в то время как низшие состояния обычно остаются в виде индивидуальных зон кристалла. Перекрывание зон определяется деталями структуры кристаллической решетки. Вообще, зонная структура энергетических уровней получается непосредственно из решения уравнения Шредингера для электрона, движущегося в периодическом силовом поле кристаллической решетки. Промежутки между энергетическими зонами — это те значения энергии, которые, согласно уравнению Шредингера, невозможны в кристалле. Поэтому такие промежутки называют *запрещенными зонами*.

Заполнение энергетических зон электронами происходит по тем же законам, что и заполнение энергетических уровней в атоме. Например, в s -состоянии могут находиться два электрона, а в кристалле, содержащем N атомов, s -зона может содержать $2N$ электронов, как уже говорилось. Далее, p -зона (если она не перекрывается с s - и d -зонами) может содержать $6N$ электронов и т.д. Если зона целиком заполнена, ни один из

электронов не может приобрести дополнительной энергии, если только эта величина энергии не достаточна для того, чтобы перевести электрон в незанятое состояние в более высокой зоне. В зависимости от положения различных зон энергия, необходимая для переброски электрона из одной зоны в другую, может составлять 5-10 эВ. Если же высшая энергетическая зона заполнена лишь частично (например, $2s$ -зона в литии содержит лишь N электронов и, таким образом, заполнена наполовину), то в этой зоне для находящихся в ней электронов доступно большое число энергетических уровней, расстояние между которыми, как мы видели, чрезвычайно мало. Поэтому электрону частично заполненной зоны можно сообщить любую добавочную энергию, если только его полная энергия не превосходит максимальной энергии, допустимой для данной зоны.

40.2 Металлы, диэлектрики и полупроводники

Энергетические зоны могут быть полностью заполненными электронами, полностью свободными и частично заполненными. В зависимости от конкретной ситуации твердое тело обладает различными свойствами. Существование энергетических зон позволяет объяснить с единой точки зрения разницу свойств металлов, диэлектриков и полупроводников.

При абсолютном нуле температуры валентные электроны заполняют попарно нижние уровни валентной зоны. В зависимости от степени заполнения валентной зоны электронами и ширины запрещенной зоны возможны три случая, изображенные на рис. 40.5.

Если валентная зона заполнена только частично (рис. 40.5, А), то электроны в ней можно заставить двигаться в определенном направлении, приложив внешнее электрическое поле. В таком случае достаточно сообщить электронам, находящимся на верхних заполненных уровнях валентной зоны, совсем небольшую энергию ($\sim 10^{-23}$ эВ) для того, чтобы перевести их на более высокие уровни.

Энергия теплового движения ($k_B T$) при комнатных температурах составляет величину $1/40$ эВ. Следовательно, значительная часть электронов при комнатной температуре переводится на более высокие энергетические уровни. Дополнительная энергия, вызванная действием на электрон электрического поля, также оказывается достаточной для перевода электрона на более высокие уровни. Поэтому электроны могут ускоряться электрическим полем и приобретать дополнительную скорость

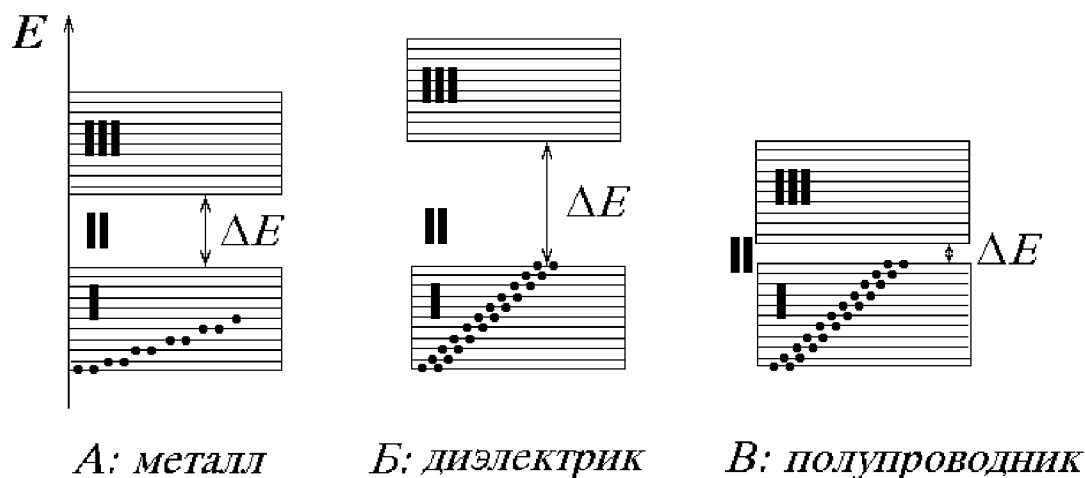


Рис. 40.5: Валентная (I), запрещенная (II) и свободная (III) зоны для металла (A), диэлектрика (B) и полупроводника (V). В первом случае валентная зона заполнена наполовину, в двух других — полностью. Для полупроводника энергетическая щель ΔE намного меньше, чем для диэлектрика.

в направлении, противоположном направлению поля. Таким образом, кристалл с подобной схемой энергетических уровней будет представлять собою проводник. Частичное заполнение валентной зоны (в случае металла ее также называют зоной проводимости) наблюдается в случае, когда на последнем занятом уровне в атоме находится только один электрон (случай атома лития) или, более общо, нечетное число электронов (например, в случае алюминия, галлия и некоторых других металлов). Здесь N электронов проводимости заполняют попарно только половину уровней валентной зоны. Когда зоны перекрываются, кристалл может быть металлом и при четном числе валентных электронов. Так, для элементов второй группы (бериллий, магний) два электрона находятся в s -состоянии, но перекрытие s - и p -зон обеспечивает наличие свободных уровней в зоне проводимости.

В диэлектрике и полупроводнике (рис. 40.5,Б,В) уровни валентной зоны заполнены полностью. Для того чтобы увеличить энергию электрона ему необходимо сообщить количество энергии, не меньшее, чем ширина ΔE запрещенной зоны. Электрическое поле не может заставить двигаться электроны (при условии, что напряженность электрического поля не превышает величины, вызывающей электрический пробой кристалла). Ширина запрещенной зоны определяет электрические свойства кристалла.

Если ширина ΔE запрещенной зоны относительно велика (порядка нескольких электронвольт), тепловое движение ($E \sim k_B T$) не сможет забросить в свободную зону заметное число электронов. В этом случае (рис. 40.5,Б) кристалл оказывается диэлектриком (например, в алмазе $\Delta E \sim 5$ эВ). Если ширина ΔE невелика (порядка $0.1 \div 1$ эВ), то энергия теплового движения оказывается достаточной для того, чтобы перевести часть электронов в верхнюю свободную зону (рис. 40.5,В). Эти электроны будут вести себя аналогично электронам валентной зоны в металле. Свободная зона окажется для них зоной проводимости. Одновременно под действием внешнего электрического поля становится возможным переход электронов валентной зоны на ее освободившиеся верхние уровни. Такой кристалл называется электронным полупроводником. Например, у самых распространенных полупроводников, кремния и германия, ширина запрещенных зон равна 1.1 эВ и 0.75 эВ, соответственно.

40.3 Квантовая теория свободных электронов в металле

Электроны, движущиеся в металле, испытывают притяжение положительных ионов и не могут вылететь из металла, если их кинетическая энергия не слишком велика.

В реальном кристалле максимумы и минимумы потенциальной энергии лежат на очень малых расстояниях (порядка 10^{-10} м). Электрон, прошедший сравнительно малый путь (~ 1 см) в металле, пройдет через области максимумов и минимумов огромное число раз $\sim 10^8$!!! Такую быстро колеблющуюся потенциальную энергию можно в первом приближении заменить некоторой средней потенциальной энергией (отрицательной постоянной по всему кристаллу). Другими словами, распределение ионов можно заменить сплошным “размазанным” положительным зарядом. Так как потенциальная энергия постоянна, то электрон может перемещаться по кристаллу не совершая никакой работы! Но, разумеется, он не может выйти за пределы кристалла.

Тепловое движение в металле сводится к колебаниям ионов кристаллической решетки и хаотическому движению свободных электронов. Наличие свободных электронов в металлах подтверждается явлениями проводимости электрического тока и электронной эмиссии.

В третьей части (§ 18.11) мы познакомились с основами классической

теории металлов, которая встретила с весьма существенными трудностями.

Во-первых, зависимость удельного электрического сопротивления от температуры должна увеличиваться как корень квадратный из температуры: $\rho \sim \sqrt{T}$. Этот вывод классической теории противоречит опытными данным, согласно которым электрическое сопротивление металлов растет пропорционально первой степени температуры, т.е. быстрее, чем \sqrt{T} .

Во-вторых, согласно классической электронной теории молярная теплоемкость металлов должна быть больше, чем у диэлектриков. В соответствии с законом Дюлонга и Пти теплоемкость моля химически простых тел в кристаллическом состоянии одинакова и равна $C_V = 3R$. В металлах электронный газ должен, казалось бы, обладать молярной теплоемкостью, по крайней мере, равной $C_{V,el} = \frac{3}{2}R$, что должно существенно увеличить теплоемкость кристалла. В действительности же теплоемкость металлов не отличается заметно от теплоемкости диэлектрических кристаллов.

В-третьих, классический результат $C_{V,el} = \frac{3}{2}R$ противоречит третьему началу термодинамики, согласно которому при абсолютных температурах, стремящихся к нулю, энтропия стремится к нулю, энергия — к постоянному значению, и теплоемкость также должна стремиться к нулю.

Объяснение таких несоответствий смогла дать лишь квантовая теория металлов. Согласно модели свободных электронов, валентные электроны атомов металла могут почти свободно перемещаться в пределах кристалла. Эти валентные электроны обуславливают электропроводность металла, и по этой причине их называют электронами проводимости.

Подвижность электронов в твердых телах можно объяснить, рассматривая изменения волновой функции, возникающие при сближении изолированных атомов, когда имеет место значительное перекрытие волновых функций изолированного атома. Следует отметить, что некоторое перекрытие появляется уже при конечном расстоянии между атомами: однако перекрытие становится существенным лишь тогда, когда межатомное расстояние достигает величины порядка 10 \AA или меньше. Электрон, находящийся в какой-то момент времени на орбите одного из атомов, обладает отличной от нуля вероятностью того, что он будет захвачен соседним атомом. Чем больше степень перекрытия волновых функций, тем больше вероятность миграции электрона от атома к

атому. При межатомном расстоянии, соответствующем реальным кристаллическим решеткам, перекрытие волновых функций весьма велико, так что валентный электрон не может долго находиться на орбите данного атома и легко переходит к соседнему атому. Поскольку процессы перехода электронов от атома к атому происходят быстро, рассматриваемые электроны следует считать принадлежащими всему коллективу атомов кристалла, а не отдельным атомам.

Волновые функции электронов, расположенных ниже валентной оболочки, сильнее локализованы вблизи ядра, чем волновые функции валентных электронов, поэтому степень перекрытия этих функций значительно меньше. Следовательно, внутренние электроны не участвуют в процессах миграции от атома к атому. Предположим, что все атомы при образовании металла превращаются в ионы, причем каждый атом ионизован однократно. Число свободных электронов в металле будет равно числу атомов. Эти электроны движутся совершенно хаотично и образуют электронный газ, который мы будем считать идеальным, пренебрегая кулоновским взаимодействием между электронами. Электроны распределяются по всему объему металла равномерно. Уровни энергии системы, состоящей из очень большого числа электронов, образуют почти непрерывный спектр. На каждом уровне энергии, согласно принципу запрета Паули, может одновременно находиться не более двух электронов с противоположными ориентациями спина. По два электрона из каждого атома металла будут заполнять нижнее энергетическое состояние. Если принять дно зоны проводимости за начало отсчета энергии, то энергия этих электронов равна нулю. Третий и четвертый электроны из каждого атома вынуждены уже находиться на первом возбужденном уровне. Следующие электроны располагаются на еще более высоких энергетических уровнях, причем каждая пара электронов заполняет соответствующий уровень. Если полное число электронов в металле равно N , то при абсолютном нуле температур будут заполнены первые $N/2$ состояния с энергиями от нуля до некоторого максимального значения, которое мы обозначим E_f . Все остальные состояния с $E \geq E_f$ будут свободны от электронов.

Полная энергия электрона в металле складывается из потенциальной и кинетической энергий. Схематически энергетические уровни зоны проводимости изображены на рис. 40.6, где U_0 — глубина потенциальной ямы, характеризующая энергию, которую необходимо сообщить электрону.

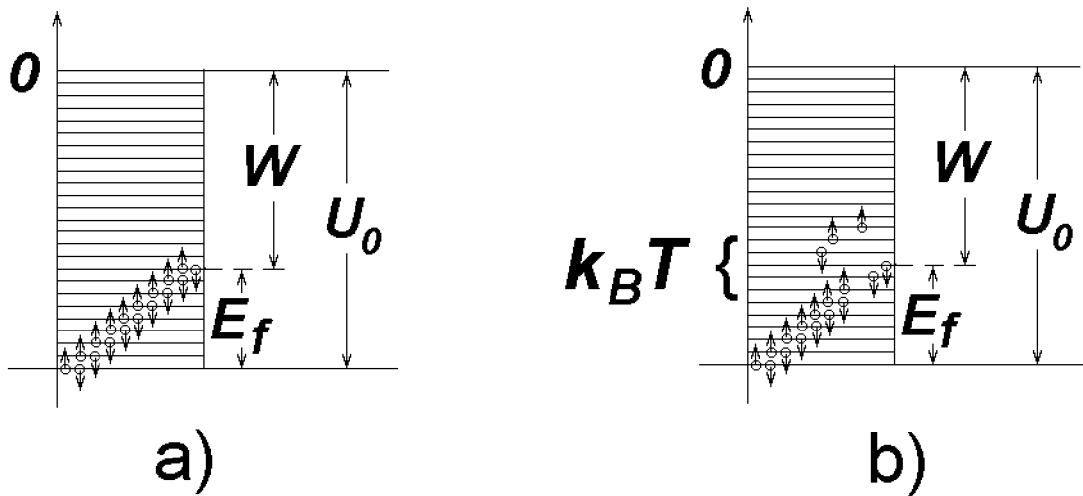


Рис. 40.6: Размещение электронов на нижних уровнях зоны проводимости при $T = 0$ (слева) и $T > 0$ (справа). Здесь U_0 — глубина потенциальной ямы, E_f — максимальная (при $T = 0$) энергия электронов, а $W = U_0 - E_f$ — работа выхода. При нулевой температуре (а) на каждом уровне помещается по два электрона с противоположно направленными спинами. При отличной от нуля температуре (б) часть электронов с верхних уровней переходит на свободные уровни с энергией $E > E_f$. Тепловое возбуждение затрагивает электроны в полосе энергий порядка $k_B T$ вблизи E_f .

трону, находящемуся на самом нижнем уровне зоны проводимости, чтобы удалить его за пределы металла. Величина W определяет работу выхода, т.е. наименьшую энергию, которую необходимо сообщить электрону для того, чтобы удалить его из твердого тела в вакуум. В соответствии с вышесказанным работа выхода определяется соотношением: $W = U_0 - E_f$. При $T = 0$ (см. рис. 40.6,а) число электронов на всех заполненных состояниях равно двум, для незаполненных оно равно нулю. Подчеркнем, что благодаря принципу запрета Паули электроны вынуждены попадать в возбужденные энергетические состояния даже при абсолютном нуле температуры — согласно классической физике все электроны должны были бы образовать “конденсат” с нулевой энергией.

При отличной от нуля температуре часть электронов может перейти на свободные уровни с энергией $E > E_f$. Поскольку энергия теплового возбуждения равна по порядку величины $k_B T$, при относительно невысоких температурах $T \ll E_f/k_B$ тепловое возбуждение затрагивает лишь небольшую долю электронов.

Зонная структура энергетических уровней получается из решения уравнения Шредингера для электрона, движущегося в периодическом силовом

поле. Это поле создается решеткой кристалла. Поскольку потенциал аппроксимируется у нас отрицательной постоянной величиной $-U_0$, то уравнение Шредингера можно переписать в виде уравнения для “свободного” электрона:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi = E\psi, \quad (40.3)$$

где энергия E отсчитывается от “дна ямы”. Решение этого уравнения имеет вид

$$\psi = Ce^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad (40.4)$$

где $\vec{k} = \vec{p}/\hbar$ — волновой вектор электрона, связанный с энергией кинематическим соотношением

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} = \frac{\hbar^2\vec{k}^2}{2m}. \quad (40.5)$$

Для простоты рассматривается образец металла, имеющий форму куба со стороной L . Тогда условие нормировки волновой функции записывается следующим образом:

$$\int \psi^*\psi dV = C^*C \int dV = C^*CL^3 = 1. \quad (40.6)$$

Здесь интегрирование проводится по объему кристалла. Полагая нормировочную постоянную C вещественной, получаем волновую функцию электрона:

$$\psi = \frac{1}{L^{3/2}}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad (40.7)$$

причем ψ должна удовлетворять граничным условиям, которые заключаются в требовании периодичности ψ по x, y, z с периодом L . Волновая функция ψ будет периодической, если

$$k_x = \frac{2\pi}{L}n_x, \quad k_y = \frac{2\pi}{L}n_y, \quad k_z = \frac{2\pi}{L}n_z, \quad (40.8)$$

где n_x, n_y, n_z — целые числа, принимающие независимо друг от друга значения $0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Окончательно:

$$\psi = \frac{1}{L^{3/2}} \exp \left[i \frac{2\pi}{L} (n_x x + n_y y + n_z z) \right]. \quad (40.9)$$

Нетрудно видеть, что замена x на $(x + L)$, либо y на $(y + L)$, либо z на $(z + L)$ не меняет волновую функцию (ψ умножается при этом на единицу).

Таким образом, условие периодичности ψ обуславливает квантование волнового вектора (импульса) электрона. Соответственно, квантуется и энергия электрона проводимости в металле:

$$E_k = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2). \quad (40.10)$$

Состояние электрона проводимости определяется значением волнового вектора (т.е. значениями k_x, k_y, k_z) и спиновым квантовым числом $m_S = \pm 1/2$. Следовательно, состояние электрона можно задать четырьмя квантовыми числами: n_x, n_y, n_z, m_S . (Для сравнения следовало бы вспомнить четыре квантовых числа, определяющих квантовое состояние электрона в изолированном атоме: n, l, m, m_S). Энергия электрона определяется суммой квадратов квантовых чисел n_x, n_y, n_z . Одной и той же сумме квадратов соответствует несколько различных комбинаций чисел n_x, n_y, n_z . Следовательно, уровни энергии являются вырожденными. Основной уровень E_0 ($n_x = n_y = n_z = 0$) невырожден, такую энергию могут иметь два электрона с $m_S = \pm 1/2$. Следующий уровень E_1 реализуется при 6 различных комбинациях квантовых чисел ($n_x = n_y = 0, n_z = \pm 1$; $n_y = n_z = 0, n_x = \pm 1$; $n_z = n_x = 0, n_y = \pm 1$), и такую энергию могут уже иметь 12 электронов. Число электронов с энергией следующего уровня E_2 уже равно 24. Таким образом, с ростом энергии увеличивается число различных состояний, отвечающих данному значению энергии (сравним: в случае изолированного атома кратность вырождения равна $2n^2$).

В металле энергия наивысшего занятого уровня (при $T = 0$) является отрицательной величиной (см. рис. 40.6). Но если энергия электрона проводимости отсчитывается от дна зоны, то E_f — положительная величина. Энергия E_f электронов проводимости с наибольшей скоростью называется энергией Ферми. Найдем энергию E_f последнего, самого высокого из заполненных энергетических состояний электронов при абсолютном нуле температуры.

Для подсчета числа состояний в этом случае мы используем полукочественные соображения, основанные на соотношении неопределенностей. Мы могли бы провести точный расчет, как делали это в случае фотонов и фононов, но разнообразие украшает жизнь. Рассмотрим неопределенность положения любого электрона проводимости в кристалле,

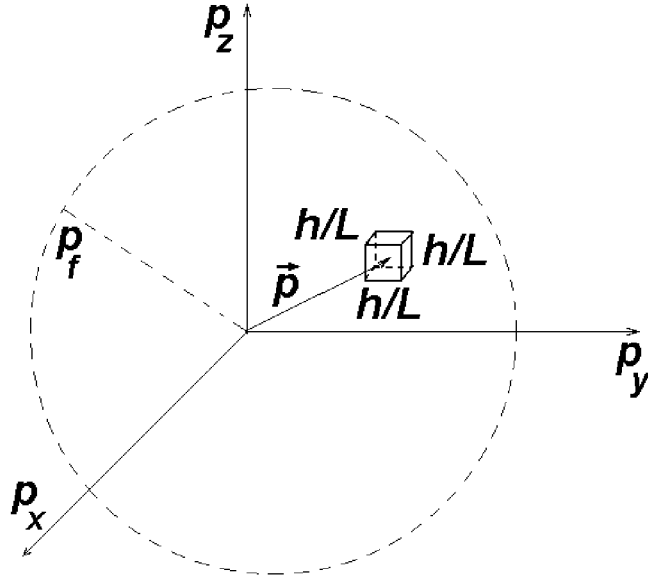


Рис. 40.7: Элементарная ячейка в импульсном пространстве имеет линейный размер h/L . Весь коллектив электронов при $T = 0$ располагается внутри сферы радиусом p_f .

которая равна размеру L кристалла в направлении оси x : $\Delta x \sim L$. Принцип неопределенности Гейзенберга для x -компоненты импульса и координаты запишется в виде

$$\Delta p_x \sim \frac{h}{\Delta x} \sim \frac{h}{L} = \hbar \left(\frac{2\pi}{L} \right), \quad (40.11)$$

где предполагается, что неопределенность в измерении x является минимальной. Реальный кристалл является трехмерным, и значение неопределенности в измерении импульса в направлении каждой из координатной оси равно той же величине.

В трехмерном пространстве импульсов (рис. 40.7) минимальное значение объема, характеризующее неопределенность импульса \vec{p} , равно

$$\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z \sim \hbar^3 \left(\frac{2\pi}{L} \right)^3. \quad (40.12)$$

Эта величина — объем элементарной ячейки в импульсном пространстве, и ее могут занимать два электрона с противоположно направленными спинами. Нетрудно увидеть идентичность этой формулы с (27.14), где надо заменить dN на 2 (два электрона на ячейку) и учесть соотношение $\vec{p} = \hbar \vec{k}$.

Кинетическая энергия электрона возрастает пропорционально квадрату расстояния p от начала координат ($E = p^2/2m$). Все электроны, значения импульсов которых лежат на поверхности сферы радиусом p , имеют одинаковую энергию. Импульсы электронов, обладающих максимальной энергией (энергией Ферми), лежат на сферической поверхности, имеющей радиус $p_f = \sqrt{2mE_f}$. Эта поверхность называется *сферой Ферми*. Импульсы всех электронов, заполняющих зону проводимости, соответствуют радиусам-векторам, лежащим внутри сферы Ферми, а число состояний равно полному числу электронов N в зоне проводимости. Полный объем сферы в пространстве импульсов равен $4\pi p_f^3/3$, а элементарный объем, соответствующий каждому состоянию в пространстве импульсов, равен $h^3 \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3$. Отношение этих объемов дает число элементарных ячеек импульсного пространства, занятых электронами. Так как в каждой ячейке (т.е. в каждом состоянии с данным импульсом) находятся два электрона — один со спином, ориентированным вверх, а другой со спином, направленным вниз, — то полное число электронов N равно:

$$N = 2 \frac{\frac{4\pi}{3} p_f^3}{h^3 \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3} = \frac{8\pi}{3} L^3 \frac{p_f^3}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (40.13)$$

Учитывая, что $E_f = p_f^2/2m$, находим:

$$N = \frac{8\pi}{3} L^3 \frac{(2mE_f)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (40.14)$$

Вводя концентрацию $n = N/L^3$ электронов (их число в единице объема), получаем:

$$E_f = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}. \quad (40.15)$$

Электронные состояния равномерно распределены в пространстве импульсов (рис. 40.8,а), однако по шкале энергий они распределены неоднородно. Заселенность данного энергетического уровня, которую назовем *плотностью занятых состояний* $\rho(E)$, должна увеличиваться при больших значениях импульса, так как количество способов, которыми могут быть скомбинированы отдельные значения $p_x = \frac{2\pi\hbar}{L}n_x, p_y = \frac{2\pi\hbar}{L}n_y, p_z = \frac{2\pi\hbar}{L}n_z$ для получения данного значения $p = \frac{2\pi\hbar}{L}\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$, возрастает с увеличением p . Количественно плотность занятых состояний $\rho(E)$ определяется как $\rho(E) = \frac{dN(E)}{dE}$, где $N(E)$ — полное число

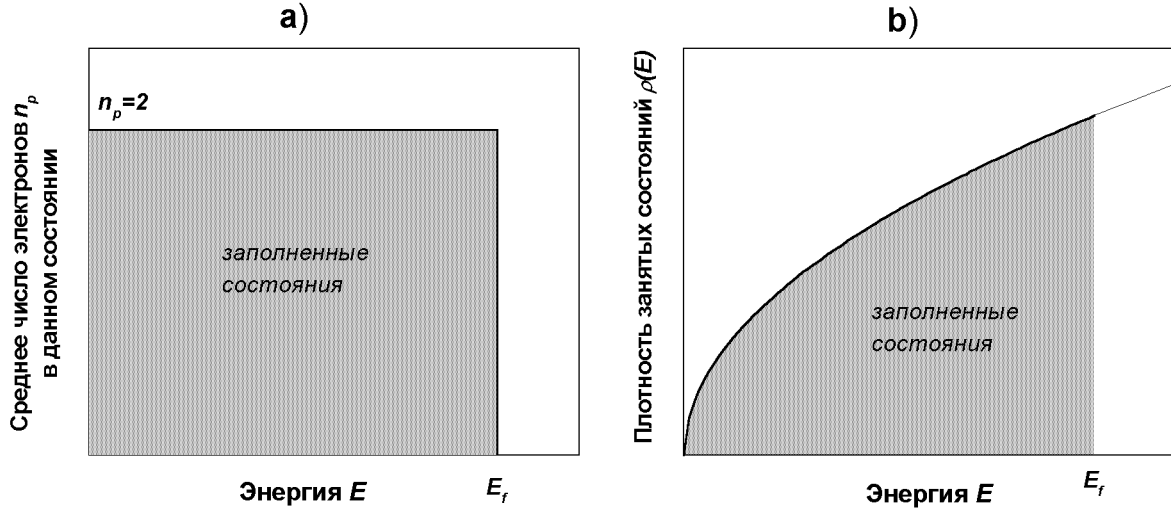


Рис. 40.8: Распределение частиц (a) и плотность занятых состояний (b) при $T = 0$.

частиц, обладающих энергией, меньшей E . Формула (40.14) дает нам число N электронов, чьи энергии меньше энергии Ферми E_f . Аналогичное соотношение связывает $N(E)$ и E :

$$N(E) = \frac{8\pi}{3} L^3 \frac{(2mE)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (40.16)$$

Плотность занятых состояний $\rho(E)$ получается дифференцированием обеих частей уравнения (40.16) по E :

$$\rho(E) = \frac{dN(E)}{dE} = 4\pi L^3 \frac{(2m)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \sqrt{E}. \quad (40.17)$$

Исходя из определения $\rho(E)$ как производной, мы заключаем, что эта функция определяет число частиц, приходящихся на единичный интервал энергии вблизи значения E , а $\rho(E)dE$ равно числу электронов с энергиями в интервале от E до $E + dE$ (см. рис. 40.8,b).

Задача 40.54. Найти среднюю энергию $\langle E \rangle$ электрона в металле при $T = 0$.

Решение. Вероятность того, что электрон имеет энергию в интервале $(E, E + dE)$, равна $\rho(E) dE / N$. Разделив (40.17) на (40.14), находим:

$$\frac{\rho(E) dE}{N} = \frac{3}{2E_f^{3/2}} \sqrt{E}. \quad (40.18)$$

Теперь средняя энергия электрона находится простым интегрированием по энергиям всех электронов от 0 до E_f :

$$\begin{aligned}\langle E \rangle &= \int_0^{E_f} E \frac{\rho(E) dE}{N} = \frac{3}{2E_f^{3/2}} \int_0^{E_f} E^{3/2} dE = \frac{3}{2E_f^{3/2}} \left(\frac{2}{5} E_f^{5/2} \right) = \\ &= \frac{3}{5} E_f.\end{aligned}\tag{40.19}$$

■

Приведем численные оценки. Если использовать для среднего значения концентрации электронов проводимости в металлах $n \sim 5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$, получаем $E_f \sim 5 \text{ эВ}$, $\langle E \rangle \sim 3 \text{ эВ}$, что соответствует температуре Ферми $T_f = E_f/k_B \sim 6 \cdot 10^4 \text{ К}$. Также можно найти максимальную и среднюю скорости электронов при абсолютном нуле: $v_f = \sqrt{2E_f/m} \sim 1.4 \cdot 10^6 \text{ м/с}$ и $\langle v \rangle = \sqrt{2\langle E \rangle/m} \sim 1.1 \cdot 10^6 \text{ м/с}$. Оказывается, скорости электронов очень велики даже при абсолютном нуле температуры. Максимальная энергия электронов E_f меньше глубины потенциальной ямы U_0 (см. рис. 40.6). Поэтому, несмотря на большие скорости, электроны вылететь из металла при $T = 0$ не могут.

Итак, электроны при $T = 0$ не находятся в состоянии покоя, как это следовало бы ожидать, исходя из классических представлений, а движутся с различными скоростями. Средняя скорость этого движения весьма велика. Несмотря на это, электронный газ вносит очень малый вклад в теплоемкость металлов. Действительно, средняя тепловая энергия $k_B T$ при комнатной температуре составляет примерно $1/40 \text{ эВ} \ll E_f$. Такая энергия может возбудить только электроны, находящиеся на самых верхних энергетических уровнях, примыкающих к уровню Ферми. Основная же масса электронов, размещенных на более глубоких нижних уровнях, остается в прежних состояниях, т.е. они не поглощают энергию и не нагреваются. Таким образом, в процессе нагревания металла участвует лишь незначительная часть электронов проводимости, доля которых примерно равна T/T_f . Соответственно, отношение “квантовой” теплоемкости к классической (предполагающей, что в тепловом движении участвуют все электроны), имеет при комнатной температуре порядок $c_{\text{эл}}/c_{\text{реш}} \sim T/T_f \sim 300/6 \cdot 10^4 = 5 \cdot 10^{-3}$. Другими словами, при комнатной температуре вклад электронного газа в полную теплоемкость примерно в 200 раз меньше вклада решетки!

Из молекулярной физики известно, что для одного моля идеального

газа

$$pV = RT = \frac{2}{3}N_A \left(\frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T \right) = \frac{2}{3}N_A \left(\frac{3}{2} k_B T \right) = \frac{2}{3}N_A \langle E \rangle,$$

т.е. $p = \frac{2}{3}n\langle E \rangle$. Подставляя $n = 5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$ и $\langle E \rangle \sim 3 \text{ эВ} = 4.8 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$, получаем оценку $p \sim 2 \cdot 10^{10} \text{ Па} \sim 2 \cdot 10^5 \text{ атм}$. Такое огромное давление электронного газа в металле дополнительно увеличивается взаимным отталкиванием электронов друг от друга из-за сил электрического взаимодействия. Полное давление электронного газа компенсируется силами притяжения между электронным газом и ионами кристаллической решетки (или “положительным размазанным” зарядом, которым мы заменили совокупность ионов решетки).

40.4 Распределение Ферми-Дирака

Рассмотрим теперь свойства электронного газа при температурах, отличных от нуля, но являющихся еще достаточно низкими. Предположим, что температура такова, что $k_B T$ значительно меньше, чем максимальная энергия электронов E_f . В таком случае тепловое возбуждение электронного газа будет сравнительно незначительным, т.к. тепловое возбуждение может переводить электроны из энергетических состояний, заполненных при $T = 0$, только в близлежащие более высокие энергетические состояния. Это означает, что тепловое возбуждение недостаточно для того, чтобы поднять электрон с уровня энергии $E \ll E_f$ на уровень энергии с $E > E_f$. Его хватает лишь на возбуждение электронов, находящихся на энергетических уровнях, лежащих вблизи сферы Ферми ($E \lesssim E_f$) в узком интервале порядка $k_B T$. Часть электронов с этих уровней оказывается переброшенной на уровни, лежащие выше уровня $E = E_f$, но отстоящие от него не дальше, чем на $k_B T$. На рис. 40.6,b) схематически изображено тепловое возбуждение при низких температурах.

Часть уровней, лежащих ниже E_f , оказывается освобожденной, чаще всего — от одного из заполняющих их электронов. На уровнях же, лежащих выше E_f , появляются одиночные электроны. Функция распределения электронов по состояниям изменяется. Если при $T = 0$ она представлялась ступенчатой функцией (см. рис. 40.8,a), то при низких (но отличных от нуля) температурах она принимает вид, изображенный на рис. 40.9. Распределение при $T = 0$ также показано здесь жирной

Рис. 40.9: Среднее число частиц в данном состоянии при разных температурах. Распределение при $T = 0$ показано жирной сплошной линией. При низких температурах размытие этого распределения вблизи уровня Ферми ($E/E_f \sim 1$) имеет порядок $\Delta E \sim 6k_B T$.

сплошной линией. Падение кривой при $E < E_f$ означает, что среднее число электронов на соответствующих уровнях оказывается меньшим двух — электроны переходят на уровни, лежащие выше E_f . Область энергий, в которых среднее число электронов на каждом уровне оказывается меньшим двум, но большим нуля, называется зоной размытости функции распределения. Из рис. 40.9 и сказанного выше следует, что ширина зоны размытости по порядку величина равна нескольким $k_B T$. Число электронов, попадающих на уровни, лежащие выше E_f , весьма мало по сравнению с полным числом электронов. Точно так же число электронов, находящихся на уровне энергии “без пары”, составляет малую долю от полного числа электронов.

Распределение, изображенное на рис. 40.9, представляет распределение по состояниям частиц идеального газа в случае, когда частицы подчиняются принципу запрета Паули. Это распределение носит название распределение Ферми-Дирака:

$$n_p = \frac{2}{e^{\frac{E - \mu}{k_B T}} + 1}. \quad (40.20)$$

Множитель “2” в числителе введён для учёта того, что каждому энергетическому уровню отвечает два состояния, в которых могут находиться

Рис. 40.10: Плотность занятых состояний при разных температурах. Размытие распределения вблизи уровня Ферми имеет тот же порядок, что и на рис. 40.9.

электроны со спинами, имеющими противоположные ориентации. Величина μ называется *химическим потенциалом*. Его физический смысл можно понять из анализа распределения Ферми-Дирака вблизи абсолютного нуля. При $T \rightarrow 0$ распределение Ферми, изображенное на рис. 40.8,а), описывается выражением:

$$n_p = \begin{cases} 2, & E \leq \mu(T=0) = E_f, \\ 0, & E \geq \mu(T=0) = E_f, \end{cases} \quad (40.21)$$

т.е. химический потенциал μ при абсолютном нуле равен максимальной энергии электронов (энергии Ферми). При отличных от нуля температурах химический потенциал представляет собой энергию уровня, вероятность нахождения на котором в точности равна $1/2$.

На рис. 40.10 изображено поведение плотности занятых состояний при конечных температурах, причем по оси y отложены значения безразмерной комбинации $\rho(E)E_f/N$. Плотность занятых состояний при нулевой температуре показана здесь жирной сплошной линией — это та же кривая, что и на рис. 40.8,б). Аналитическая формула для плотности занятых состояний выглядит почти так же, как и (40.17), выведенная для $T = 0$ — из-за (40.20) появляется лишь дополнительный знаменатель, характерный для распределения Ферми:

$$\rho(E) = 4\pi L^3 \frac{(2m)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\sqrt{E}}{e^{\frac{E-\mu}{k_B T}} + 1}. \quad (40.22)$$

Интеграл по всем энергиям дает полное число N электронов в системе:

$$N = 4\pi L^3 \frac{(2m)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{\sqrt{E} dE}{e^{\frac{E-\mu}{k_B T}} + 1}. \quad (40.23)$$

Это соотношение представляет собой уравнение для химического потенциала μ как функции температуры. Оказывается, что μ хотя и зависит от температуры, но очень слабо. При низких температурах $k_B T \ll E_f$ химический потенциал имеет вид:

$$\mu = E_f \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{E_f} \right)^2 \right]. \quad (40.24)$$

Поэтому во многих случаях (например, для металлов) можно полагать $\mu \approx E_f$. Приведем пример: для натрия $E_f = 3.1$ эВ, так что при комнатной температуре $T = 300$ ($k_B T = 0.026$ эВ) отношение $k_B T / E_f \approx 0.0083$, то есть такие и даже в десять раз большие температуры можно считать низкими с точки зрения необходимости применять статистику Ферми. Численный расчет значения химического потенциала по формуле (40.23) представлен на рис. 40.11. Падение химического потенциала с температурой можно заметить также на рис. 40.9: абсцисса точки пересечения горизонтальной линии $n_p = 1$ с кривой среднего числа частиц по распределению Ферми дает значение μ при соответствующей температуре. Так, для кривой с $k_B T = 0.5 E_f$ на этом графике расчет дает $\mu = 0.743 E_f$. При еще более высоких температурах тепловое возбуждение электронов позволяет им расположиться равномерно по состояниям как с $E < E_f$, так и с $E > E_f$, и 50%-ное заполнение нигде не достигается — химический потенциал имеет отрицательное значение.

Аналогично, для средней энергии электронного газа при низких температурах можно получить выражение:

$$\langle E \rangle = \frac{3}{5} E_f \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{E_f} \right)^2 \right]. \quad (40.25)$$

Из этого выражения можно найти теплоемкость электронного газа:

$$C_{V,el} = N \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} = N k_B \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{k_B T}{E_f} \right), \quad (40.26)$$

Рис. 40.11: Зависимость химического потенциала от температуры. При $T = 0$ химический потенциал в точности совпадает с энергией Ферми. При повышении температуры μ убывает и примерно в области $k_B T \sim E_f$ становится равным нулю, а затем принимает отрицательные значения. На графике пунктирными линиями показаны также приближенные расчеты по формулам 40.24 и 40.32 для низких и высоких температур, соответственно.

что согласуется с качественными рассуждениями в предыдущем параграфе. Таким образом, теплоемкость электронного газа оказывается линейной функцией температуры и обращается в нуль при $T = 0$. Коэффициент пропорциональности содержит только известные величины — универсальные постоянные и число электронов. Для меди, например, теоретическое выражение электронной теплоемкости имеет вид $C_{V,el} = 0.9 \cdot 10^{-4} N k_B T$, что согласуется с опытными данными с точностью до 2%, и при комнатной температуре составляет неизмеримо малую долю теплоемкости кристаллической решетки. Однако теплоемкость решетки зависит от температуры по закону $\sim T^3$ согласно (39.28), и при очень низких температурах она становится заметно меньше электронной. На рис. 40.12 показана зависимость решеточной, электронной и полной теплоемкости от температуры вместе с экспериментальными точками. Видно, что сумма решеточной и электронной теплоемкостей отлично описывает эксперимент.

Обсудим теперь зависимость числа электронов в зоне размытости распределения Ферми от температуры. Число электронов в зоне размытости (или число непарных электронов внутри сферы Ферми) называют числом эффективных электронов N_{eff} . Именно они могут изменять свое состоя-

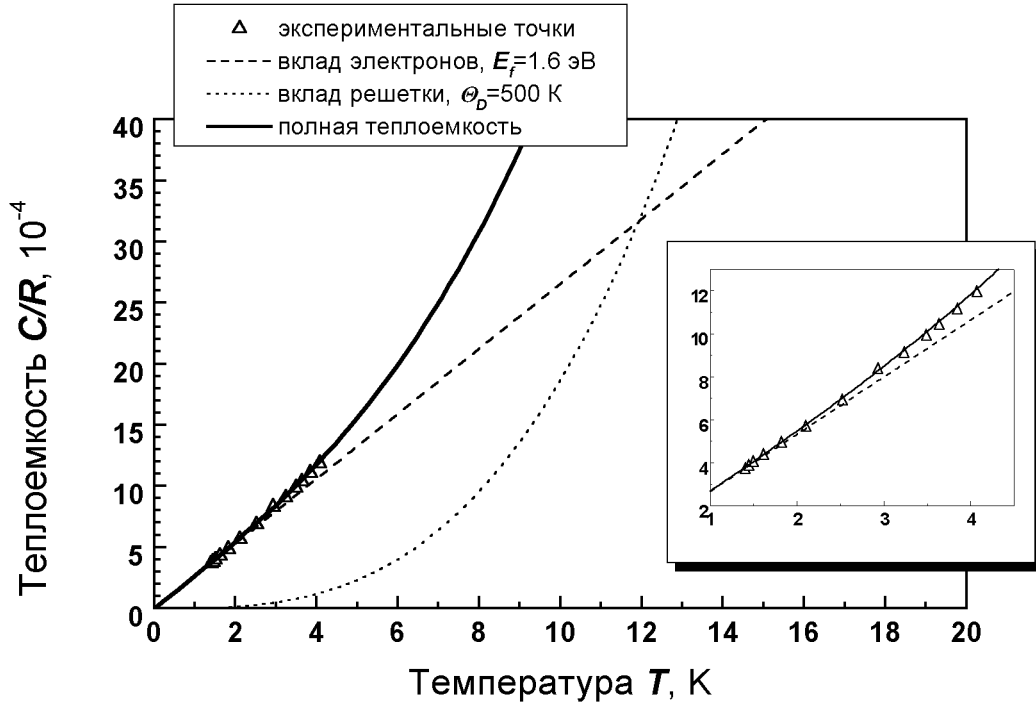


Рис. 40.12: Температурная зависимость молярной теплоемкости решетки (точечная линия), электронного газа (пунктир) и полной теплоемкости (жирная сплошная линия) для сплава V (10%) — Cr (90%) при низких температурах (R — универсальная газовая постоянная). Треугольники соответствуют экспериментальным данным. На врезке показан участок того же графика в увеличенном масштабе.

ние под влиянием внешних воздействий, именно эффективные электроны обуславливают теплоемкость электронного газа, его электропроводность. Число эффективных электронов можно получить точно так же, как и полное число электронов с той разницей, что интеграл по энергиям распространяется на интервал $E \geq E_f$:

$$N_{eff} = 4\pi L^3 \frac{(2m)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \int_{E_f}^{\infty} \frac{\sqrt{E} dE}{e^{\frac{E - \mu}{k_B T}} + 1}. \quad (40.27)$$

При низких температурах можно положить $\mu = E_f$. Учитывая также связь (40.14) энергии Ферми с полным числом частиц и выполняя замену переменных $E = E_f + x k_B T$, уравнение (40.27) можно записать в виде:

$$N_{eff} = \frac{3}{2} N \left(\frac{k_B T}{E_f} \right) \int_0^{\infty} dx \frac{\sqrt{1 + x k_B T / E_f}}{e^x + 1}. \quad (40.28)$$

При низких температурах квадратный корень в числителе можно заменить на единицу, получающийся интеграл равен $\ln 2$, и мы приходим к

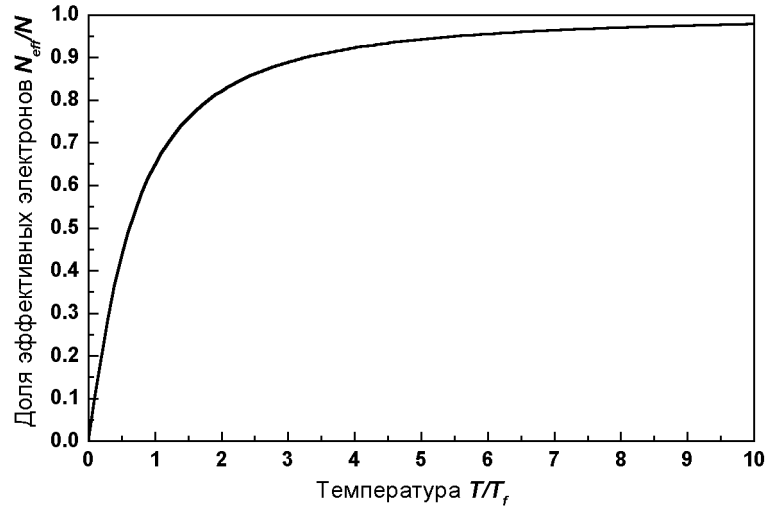


Рис. 40.13: Доля эффективных электронов в зависимости от температуры. При $T = 0$ все частицы находятся внутри сферы Ферми $E \leq E_f$, при $T = 0.05T_f$ там находятся 94.8% частиц, при $T = 0.5T_f$ — только 56.6% частиц. При высоких температурах $T \gg T_f$ большая часть частиц находится вне сферы Ферми, и к ним применима классическая статистика.

оценке числа эффективных электронов:

$$N_{eff} = \frac{3 \ln 2}{2} N \frac{k_B T}{E_f} \sim N \frac{k_B T}{E_f} = N \frac{T}{T_f}. \quad (40.29)$$

Это тоже подтверждает наши качественные рассуждения. В предыдущем параграфе мы установили, что температура Ферми $T_f = E_f/k_B$ для металлов составляет несколько десятков тысяч кельвин. Поэтому даже при температуре, близкой к температуре плавления металла ($\sim 10^3$ K), N_{eff} составляет малую долю от полного числа электронов в единице объема. Зависимость доли эффективных электронов N_{eff}/N от температуры показана на рис. 40.13.

В заключение проведем анализ того, когда необходимо учитывать законы квантовой статистики, а когда можно применять классическую статистику. Заметим, что если в распределении Ферми (40.20) можно пренебречь единицей в знаменателе функции, то распределение электронов по состояниям с различной энергией принимает вид

$$n_p = 2e^{(E-\mu)/k_B T} = C e^{-E/k_B T}, \quad (40.30)$$

т.е. переходит в функцию распределения Больцмана. Это можно сделать, если значение экспоненты в знаменателе гораздо больше единицы.

Это верно в двух случаях. Во-первых, когда энергия рассматриваемого состояния велика: $E - E_f \gg k_B T$. Во-вторых, когда высока температура системы, так что химический потенциал принимает большое отрицательное значение: $\mu \ll -k_B T$. Значение химического потенциала при высоких температурах можно найти из уравнения (40.23), если пренебречь единицей в знаменателе выражения под интегралом. Тогда интегрирование легко выполняется, и мы получаем соотношение:

$$N = 4\pi L^3 \frac{(2m)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \left[e^{\frac{\mu}{k_B T}} (k_B T)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right], \quad (40.31)$$

где в квадратных скобках стоит результат интегрирования. Отсюда получаем, учитывая выражение (40.15) для энергии Ферми:

$$\begin{aligned} e^{\frac{-\mu}{k_B T}} &= \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \left(\frac{k_B T}{E_f} \right)^{3/2} \\ \text{или} \\ \mu &= -k_B T \left(0.2847 + \frac{3}{2} \ln \frac{k_B T}{E_f} \right). \end{aligned} \quad (40.32)$$

Условие $\mu \ll -k_B T$ выполняется при $k_B T \gg E_f$. На практике уже значения температуры порядка одной или нескольких температур Ферми позволяют говорить о близости распределений Ферми и Больцмана. Сделанные утверждения иллюстрируются на рис. 40.14.

Таким образом, поведение электронного газа в сильной степени зависит от соотношения между температурой кристалла и температурой Ферми. Различают два предельных случая:

1. $T \ll T_f$. В этом случае электронный газ называется *вырожденным*. Большая часть электронов находится внутри сферы Ферми, и необходимо учитывать квантовые эффекты.
2. $T \gg T_f$. В этом случае электронный газ называется *невырожденным*. Большая часть электронов находится вне сферы Ферми (см. рис. 40.13), и они описываются функцией распределения Больцмана.

Условие вырождения $k_B T \ll E_f$ может быть записано в виде следующего неравенства:

$$\frac{mk_B T}{\hbar^2} \ll 5n^{2/3}, \quad (40.33)$$

т.е. вырождение может быть обусловлено следующими причинами:

Рис. 40.14: Сравнение распределений Ферми и Больцмана. Видно, что для ферми-частиц большой энергии E порядка нескольких $k_B T$ оба распределения совпадают. Сравнивая левый и правый графики, убеждаемся, что при повышении температуры распределение Ферми приближается к распределению Больцмана для любых энергий.

- малая масса частиц,
- большая плотность газа,
- низкая температура.

Подставляя в (40.33) характерное для металлов значение концентрации электронов $n = 5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$, находим $T \ll 6000 \text{ К}$. Иными словами, для электронного газа в металле условие вырождения выполнено вплоть до температур порядка 1000-2000 К. Однако, в полупроводниках плотность свободных электронов оказывается много меньшей, чем в металлах. Поэтому уже при комнатной температуре электронный газ во многих полупроводниках является невырожденным и подчиняется классической статистике (т.е. описывается распределением Больцмана).

40.5 Динамика электрона в кристалле

Решение волнового уравнения Шредингера для свободного электрона определяется волновым вектором \vec{k} , который связан с импульсом электрона и с энергией кинематическим соотношением $E = p^2/2m = \hbar^2 k^2/2m$. В модели свободных электронов значения энергии образуют квазинепрерывную последовательность. Зависимость $E = E(k)$ состоит из дискретных точек, но точки расположены так густо, что на графике сливаются в сплошную кривую

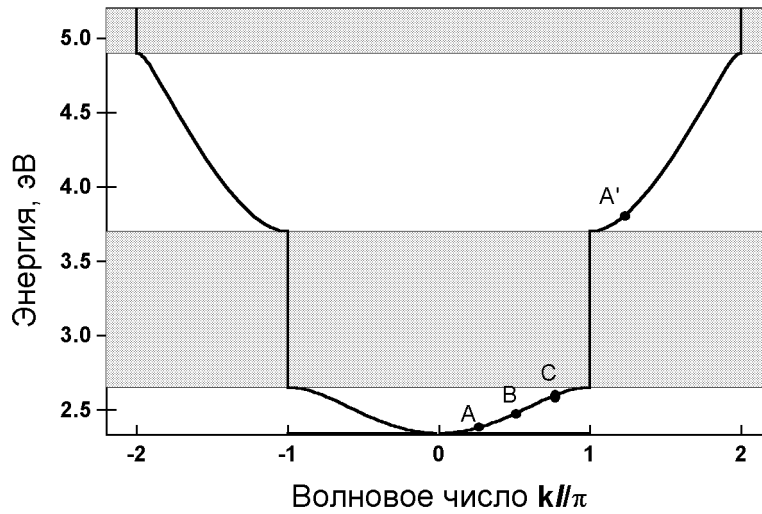


Рис. 40.15: Две энергетические зоны, показанные здесь, взяты с рис. 40.1. Нижняя из них соответствует второму энергетическому уровню ($n = 2$ на рис. 40.1), т.е. моделирует зону проводимости. Поэтому начало отсчета волнового вектора k смещено на период по сравнению с прежним рисунком. Кроме того, показаны симметричные ветви, соответствующие отрицательным значениям k . Запрещенные зоны обозначены темным фоном.

В случае периодического поля зависимость E от квазиволнового вектора k показана на рис. 40.1, и мы видим, что для нижних зон отклонения от параболического закона $E = \hbar^2 k^2 / 2m$ весьма существенны. На рис. 40.1 мы воспроизводим в увеличенном масштабе зону проводимости, получившуюся из верхнего уровня с $n = 2$ (ср. рис. 40.1) и следующую зону. Энергетические зоны обозначены светлым фоном, запрещенные — темным. По сравнению с рис. 40.1 мы сдвинули отсчет волнового вектора, чтобы его нулевое значение соответствовало дну зоны проводимости. Напомним, что l — это пространственный период нашей “кристаллической решетки”. Кроме того, мы показали здесь симметричные ветви решений, соответствующие отрицательным значениям k , когда частица движется в противоположном направлении.

Используя гипотезу де Бройля, электроны можно описывать как суперпозицию волн с частотой и длиной волны, определяемыми соотношениями $\omega = E/\hbar$, $\lambda = h/p = 2\pi/k$. Максимум амплитуды результирующей волны перемещается в кристалле с групповой скоростью $v_{gr} = \frac{d\omega}{dk}$, причем наиболее вероятное местонахождение электрона совпадает с центром группы волн. Следовательно, групповая скорость представляет собой скорость v электрона в кристалле, т.е. с учетом соотношений де

Бройля получаем:

$$v = v_{gr} = \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dk}. \quad (40.34)$$

Рассмотрим поведение электрона под действием приложенного к кристаллу внешнего электрического поля напряженностью \mathcal{E} . В этом случае, кроме сил F_{cr} , создаваемых полем кристаллической решетки, на электрон будет действовать внешняя сила $\mathcal{F} = e\mathcal{E}$. За некоторое время dt эта внешняя сила совершит над электроном работу $dA = \mathcal{F}vdt = \frac{\mathcal{F}}{\hbar} \frac{dE}{dk} dt$. Эта работа dA идет на приращение энергии электрона в кристалле: $dA = dE = \frac{dE}{dk} dk$. Следовательно,

$$\frac{dk}{dt} = \frac{\mathcal{F}}{\hbar}. \quad (40.35)$$

В свободном пространстве действие внешней силы должно дать результат $m(dv/dt)$, а в кристалле мы получили иной закон. Это не означает, конечно, что второй закон Ньютона нарушен, ибо в кристалле на электрон действуют еще и силы со стороны периодической решетки. Однако, мы хотим вывести закон движения электрона в кристалле, куда вошли бы лишь внешние силы. Найдем поэтому ускорение электрона в кристалле:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{\hbar} \frac{d}{dt} \left(\frac{dE}{dk} \right) = \frac{1}{\hbar} \frac{d^2 E}{dk^2} \frac{dk}{dt} = \\ &= \frac{1}{\hbar^2} \frac{d^2 E}{dk^2} \mathcal{F}. \end{aligned} \quad (40.36)$$

Полученное соотношение перепишем следующим образом:

$$\left(\frac{\hbar^2}{d^2 E / dk^2} \right) \frac{dv}{dt} = \mathcal{F}, \quad (40.37)$$

Отсюда вытекает, что внешняя сила пропорциональна ускорению электрона в кристалле. Коэффициент пропорциональности называют *эффективной массой* электрона в кристалле:

$$m^* = \frac{\hbar^2}{d^2 E / dk^2}. \quad (40.38)$$

Мы получили привычную форму второго закона Ньютона:

$$m^* \frac{dv}{dt} = \mathcal{F}. \quad (40.39)$$

Подчеркнем еще раз, что этот результат не является тривиальным, поскольку ускорение должно быть пропорционально сумме всех сил, приложенных к электрону: $\mathcal{F} = e\mathcal{E}$ и F_{cr} , так что уравнение движения электрона должно иметь вид:

$$m \frac{dv}{dt} = \mathcal{F} + F_{cr}. \quad (40.40)$$

За устранение сил со стороны кристаллической решетки из правой части уравнения (40.40) пришлось заплатить свою цену — ввести эффективную массу электрона.

Чтобы пояснить физический механизм отличия эффективной массы m^* электрона в кристалле от его массы m в вакууме, представим себе движение электрона во внешнем электрическом поле.

Если в некотором (гипотетическом) кристалле атомы расположены далеко друг от друга, то частота перехода электрона от одного атома к другому мала, так как мало перекрытие волновых функций. Во внешнем электрическом поле \mathcal{E} электроны будут чаще переходить от атома к атому в направлении, противоположном полю. Однако сильно ускорить электроны внешним полем не удастся, так как они находятся под действием сильного притягивающего поля своих атомов и число переходов электронов от одного атома к другому возрастает незначительно. Поскольку ускорение оказывается небольшим, инертная масса, фигурирующая в законе Ньютона, должна быть в этом случае больше m .

Если атомы сближаются друг с другом, то частота переходов электронов от одного атома к другому увеличивается, и при этих условиях электрическое поле может оказывать на электроны большое ускоряющее действие. Следовательно, инертная масса электрона уменьшается. По мере увеличения перекрытия волновых функций взаимодействие между атомами все менее препятствует трансляционному движению электрона. В некоторых материалах электрон может перемещаться внешним электрическим полем быстрее, чем он перемещался бы им в свободном пространстве. В этих случаях движение электронов по атомным орбитам оказывается таким, что оно дополняет переносное действие электрического поля. Таким образом, можно сказать, что при наличии внешней силы внутренние атомные силы помогают “толкать” электрон вдоль поля. Такой электрон обладает эффективной массой меньшей, чем его масса в свободном состоянии. В частности, эффективная масса m^* может принимать и отрицательные значения.

Введение эффективной массы позволяет, абстрагируясь от взаимодействия электронов с решеткой, определять характер движения электрона под действием внешнего поля. Приписав электрону массу m^* , можно описывать движение электрона под действием силы \mathcal{F} , считая его свободным. Таким образом, все соотношения, полученные в приближении свободных электронов, можно использовать в случае движения электрона в периодическом поле кристаллической решетки, если в них заменить истинную массу m эффективной массой m^* .

Зависимость эффективной массы от расположения электрона внутри разрешенной энергетической зоны можно получить из анализа дисперсионной кривой $E = E(k)$ на рис. 40.15. Вблизи дна зон (точки А и А') ход кривой $E(k)$ подобен обычной параболе и эффективная масса положительна. В точке В перегиба дисперсионной кривой $d^2E/dk^2 = 0$. Следовательно, эффективная масса m^* обращается в бесконечность, т.е. внешнее поле не может оказать никакого воздействия на движение электрона, находящегося в энергетическом состоянии E_B . Вблизи потолка разрешенной зоны (точка С на рис. 40.15) вторая производная $\frac{d^2E}{dk^2} < 0$, и эффективная масса электронов, занимающих уровни энергии вблизи верхнего края разрешенной зоны, оказывается отрицательной. Физически это означает, что под совместным действием внешней силы F_{cr} и \mathcal{F} электрон, находящийся в состоянии с энергией E_C , получает ускорение, направленное в противоположную сторону по отношению к внешней силе $\mathcal{F} = e\mathcal{E}$.

40.6 Полупроводники

Полупроводниками являются вещества (кристаллические, аморфные и стеклообразные, жидкие), у которых валентная зона полностью заполнена электронами (рис. 40.16,а), а ширина запрещенной зоны невелика (у собственных полупроводников — не более 1 эВ). В полупроводниках концентрация подвижных носителей заряда значительно ниже чем концентрация атомов, и может изменяться под влиянием температуры, освещения или относительно малого количества примесей. Эти свойства, а также увеличение проводимости с ростом температуры, качественно отличают полупроводники от металлов.

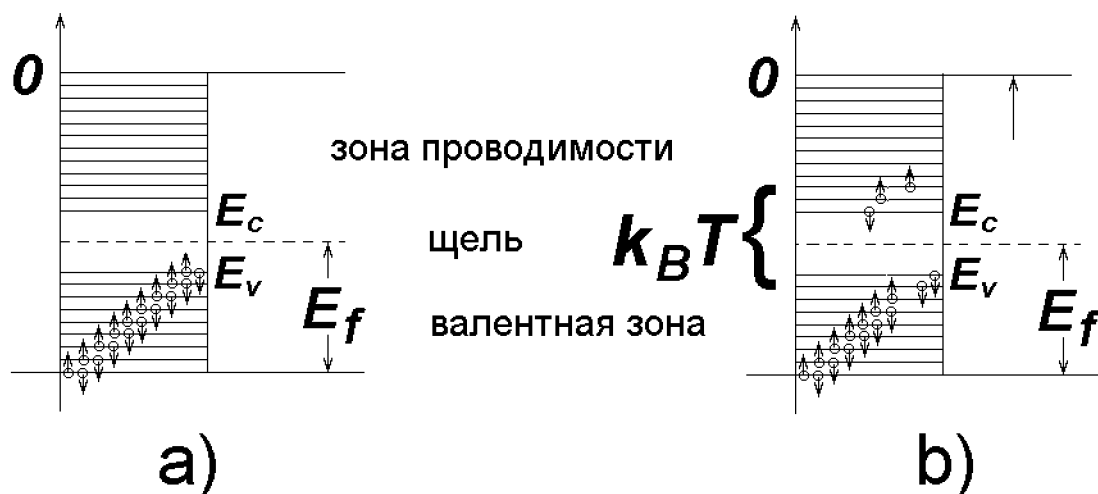


Рис. 40.16: В собственных полупроводниках при $T = 0$ валентная зона полностью заполнена электронами, а зона проводимости свободна (а). Между ними лежит относительно узкая запрещенная зона (щель). При тепловом возбуждении часть электронов переходит в зону проводимости (б), а на их месте в валентной зоне образуются вакансии (дырки). Уровень Ферми E_f лежит в середине запрещенной зоны.

Дырки

Различают полупроводники с собственной проводимостью (собственные полупроводники) и легированные полупроводники с примесной проводимостью (примесные полупроводники). В собственном полупроводнике при абсолютном нуле все уровни валентной зоны полностью заполнены электронами, а в зоне проводимости электроны отсутствуют. Электрическое поле не может перебросить электроны из валентной зоны в зону проводимости, т.е. при $T = 0$ К собственные полупроводники являются диэлектриками. (Предполагается, что внешнее электрическое поле меньше пробойного.) При повышении температуры часть электронов с верхних уровней вблизи потолка валентной (E_v) зоны переходит под действием теплового возбуждения на нижние уровни (E_c) вблизи дна зоны проводимости (рис. 40.16,б).

Таким образом, внешнее электрическое поле получает возможность изменять энергетическое состояние электронов, находящихся в зоне проводимости. Кроме того, вследствие образования вакантных уровней в валентной зоне, электроны этой зоны также могут изменять свою скорость (энергию) под действием внешнего поля. Следовательно, электропроводность полупроводника становится отличной от нуля.

В полностью заполненной валентной зоне с n электронами в единице объема полная сила тока, обусловленная движением электронов, равна нулю ($-e \sum_{i=1}^n \vec{v}_i = 0$, т.к. для каждого электрона со скоростью \vec{v}_i найдется электрон с такой же, но противоположно направленной скоростью $-\vec{v}_i$). При удалении из валентной зоны электрона с некоторой скоростью \vec{v}_k в ней возникает электрический ток:

$$\vec{j} = -e \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \vec{v}_i \neq 0. \quad (40.41)$$

Действительно, выделим из суммы скоростей всех электронов скорость k -го электрона:

$$-e \sum_{i=1}^n \vec{v}_i = -e \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \vec{v}_i - e\vec{v}_k = 0, \quad (40.42)$$

так что (40.42) можно переписать в виде:

$$\vec{j} = e\vec{v}_k. \quad (40.43)$$

Из полученного соотношения вытекает, что при отсутствии k -го электрона в валентной зоне оставшиеся $(n-1)$ электронов создают ток, эквивалентный току, который создала бы частица с положительным зарядом $+e$, движущаяся в том же направлении и с той скоростью, какую имел удаленный электрон. Эта воображаемая частица называется *дыркой*. Таким образом, ток в валентной зоне порождается движением положительного заряда дырки, а движется этот заряд в том же направлении и с той же скоростью, что и удаленный электрон, на месте которого в валентной зоне дырка образовалась.

Вакантные уровни образуются у потолка валентной зоны (см. рис. 40.16). Эффективная масса электрона, находящегося у потолка энергетической зоны, является отрицательной величиной:

$$m^* = \frac{\hbar^2}{d^2 E / dk^2} < 0.$$

Уравнение Ньютона движения электрона во внешнем электрическом поле \mathcal{E} имеет вид $m^* \dot{\vec{v}}_k = -e\vec{\mathcal{E}}$. Умножив обе части этого уравнения на (-1) , получаем:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{d^2 E / dk^2} \right) \frac{d\vec{v}_k}{dt} = e\vec{\mathcal{E}} \quad (40.44)$$

Это уравнение описывает движение дырки с положительным зарядом $+e$ и положительной эффективной массой m_h^* , равной выражению в скобках в левой части (40.45):

$$m_h^* = -\frac{\hbar^2}{d^2 E/dk^2}. \quad (40.45)$$

Итак, по своим электрическим свойствам валентная зона с небольшим числом вакантных состояний эквивалентна пустой зоне, содержащей небольшое число положительно заряженных квазичастиц, называемых дырками. Заметим, что электрон, попавший из валентной зоны в зону проводимости имеет эффективную массу

$$m_e^* = \frac{\hbar^2}{d^2 E/dk^2}, \quad (40.46)$$

причем вторая производная энергии по (квази)волновому вектору берется в районе дна зоны проводимости (точка A' на рис. 40.15), а не потолка валентной зоны (точка A), как в (40.45). Из-за разной, вообще говоря, кривизны дисперсионной кривой в точках A и A' обе массы m_e^* и m_h^* положительны, но могут отличаться численными значениями.

Собственная проводимость полупроводников

Итак, собственная проводимость возникает в результате перехода электронов с верхних уровней валентной зоны в зону проводимости. При этом в зоне проводимости появляется некоторое число носителей тока — электронов, занимающих уровни вблизи дна зоны. Одновременно в валентной зоне освобождается такое же число мест на верхних уровнях вблизи потолка валентной зоны, в результате чего появляются дырки. Как следствие, полный ток определяется как движением электронов, так и движением дырок.

Обозначив n_e и n_h концентрацию электронов и дырок, можно полную плотность тока представить в виде:

$$\vec{j} = e(n_h \vec{v}_h - n_e \vec{v}_e), \quad (40.47)$$

где \vec{v}_h и \vec{v}_e — дрейфовые скорости дырок и электронов под действием электрического поля.

Найдем положение уровня Ферми для полупроводника. Электроны в зоне проводимости могут рассматриваться как свободные, и для плотности занятых состояний мы применим формулу (40.22):

$$\rho(E) = 4\pi L^3 \frac{(2m_e^*)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\sqrt{E - E_c}}{e^{\frac{E - \mu}{k_B T}} + 1}. \quad (40.48)$$

Здесь мы 1) заменили массу электрона на его эффективную массу m_e^* и 2) использовали под знаком квадратного корня энергию, отсчитываемую от дна зоны проводимости (т.е. $\sqrt{E - E_c}$ вместо прежнего \sqrt{E}), т.к. по смыслу вывода выражения для $\rho(E)$ здесь должна стоять кинетическая энергия электронов, а в зоне проводимости последняя как раз и равна $E - E_c$. Полное число электронов в зоне проводимости получается интегрированием плотности занятых состояний по всем энергиям, начиная с дна зоны:

$$N_e = 4\pi L^3 \frac{(2m_e^*)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \int_{E_c}^{\infty} dE \frac{\sqrt{E - E_c}}{e^{\frac{E - \mu}{k_B T}} + 1}. \quad (40.49)$$

Если, как это бывает в полупроводниках при низких температурах, $E - \mu \gg k_B T$, то распределение Ферми переходит в распределение Больцмана: мы можем пренебречь единицей в знаменателе подынтегрального выражения. Делая после этого замену переменной $x = E - E_c$, получаем из (40.49) концентрацию электронов $n_e = N_e/L^3$ в виде:

$$\begin{aligned} n_e &= 4\pi \frac{(2m_e^*)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} e^{\frac{\mu - E_c}{k_B T}} \int_0^{\infty} dx \sqrt{x} e^{-x/k_B T} = \\ &= 2 \left(\frac{m_e^* k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{E_c - \mu}{k_B T}}. \end{aligned} \quad (40.50)$$

Для вычисления концентрации дырок в валентной зоне надо произвести следующие изменения в формуле (40.48). Во-первых, надо учесть, что кинетическая энергия дырок отсчитывается от потолка валентной зоны, т.е. заменить под знаком квадратного корня $E - E_c$ на $E_v - E$. Во-вторых, надо учесть, что сумма вероятностей обнаружить при данной энергии электрон либо дырку равна единице. Тогда распределение для

дырок получается как

$$1 - \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{k_B T}} + 1} = \frac{1}{e^{\frac{-E+\mu}{k_B T}} + 1} \approx e^{\frac{E-\mu}{k_B T}} \quad (40.51)$$

при выполнении условия $\mu - E \gg k_B T$. Мы получили то же самое распределение Ферми (или Больцмана) для дырок, но их энергия теперь отсчитывается в направлении отрицательных значений. Соответственно, интегрирование должно выполняться по всем возможным энергиям дырок, т.е. от $-\infty$ до потолка E_v валентной зоны. Заменяя также эффективную массу электрона на эффективную массу дырки, получаем для числа дырок при низких температурах:

$$N_h = 4\pi L^3 \frac{(2m_h^*)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \int_{-\infty}^{E_v} dE \sqrt{E_v - E} e^{(E-\mu)/k_B T}. \quad (40.52)$$

Заменяя переменную интегрирования $x = E_v - E$, получаем для концентрации дырок:

$$\begin{aligned} n_h &= 4\pi L^3 \frac{(2m_h^*)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} e^{\frac{E_v - \mu}{k_B T}} \int_0^{\infty} dx \sqrt{x} e^{-x/k_B T} = \\ &= 2 \left(\frac{m_h^* k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{\mu - E_v}{k_B T}}. \end{aligned} \quad (40.53)$$

Перемножая (40.50) и (40.53), получаем важное соотношение:

$$n_e n_h = 4 \left(\frac{\sqrt{m_e^* m_h^*} k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^3 e^{-\frac{E_g}{k_B T}}, \quad (40.54)$$

где $E_g = E_c - E_v$ — ширина энергетической щели между зоной проводимости и валентной зоной. Поскольку при выводе соотношений для концентрации электронов и дырок было использовано лишь условие малости температур, соотношение (40.54) применимо не только к собственным полупроводникам. В него входят лишь характеристики вещества (массы, величина щели), и потому можно сделать вывод, что увеличение концентрации электронов сопровождается уменьшением концентрации дырок.

Для собственных полупроводников мы имеем еще т.н. *условие электронейтральности кристалла*: полное число электронов в зоне проводимости равно полному числу дырок в валентной зоне. Казалось бы, условие электронейтральности противоречит соотношению (40.54), но вспомним, что в выражения для концентраций n_e и n_h входит химический потенциал, причем с разными знаками в экспоненте. Подставляя в равенство $n_e = n_h$ выражения (40.50) и (40.53), получаем:

$$e^{2\mu/k_B T} = \left(\frac{m_h^*}{m_e^*} \right)^{3/2} e^{(E_c + E_v)/k_B T}. \quad (40.55)$$

Отсюда находим химический потенциал собственного полупроводника при низких температурах:

$$\mu = \frac{E_v + E_c}{2} + \frac{3}{4} k_B T \ln \frac{m_h^*}{m_e^*}. \quad (40.56)$$

Значение химического потенциала при $T = 0$ дает нам уровень Ферми $E_f = (E_v + E_c)/2$, который лежит в середине запрещенной зоны (щели). При $m_h^* = m_e^*$ химический потенциал совпадает с энергией Ферми, если $m_h^* > m_e^*$, то он смещается слегка вверх из этого положения, а если $m_h^* < m_e^*$, он смещается вниз. Поскольку $k_B T$ обычно много меньше ширины запрещенной зоны $E_g = E_c - E_v$, то смещение химического потенциала от уровня Ферми невелико в масштабе энергии запрещенной зоны: $\mu \approx E_f$.

Итак, энергия Ферми в собственном полупроводнике лежит в центре области запрещенной зоны между валентной зоной и зоной проводимости. Этот результат имеет для собственных полупроводников фундаментальное значение. При переходе электрона с верхнего уровня валентной зоны на нижний уровень зоны проводимости затрачивается энергия E_g . В собственном полупроводнике при появлении электрона в зоне проводимости в валентной зоне обязательно возникает дырка, и поэтому можно считать, что затраченная на весь процесс энергия делится на две равные части — половина тратится на образование дырки, а половина — на перевод электрона в зону проводимости. Иными словами, начало отсчета энергии для каждого из этих процессов должно находиться в центре запрещенной зоны, т.е. энергия Ферми представляет такую энергию, от которой происходит возбуждение электронов и дырок. Сказанное подтверждается выражением для распределения электронов (и дырок), ко-

торое следует из (40.54) при условии $n_e = n_h$:

$$n_e = n_h = 2 \left(\frac{\sqrt{m_e^* m_h^*} k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{E_g}{2k_B T}}. \quad (40.57)$$

Оно выглядит как распределение Больцмана при энергии возбуждения $E_g/2$.

Таким образом, количество электронов, перешедших в зону проводимости, и количество образовавшихся дырок будет пропорционально $e^{-E_g/2k_B T}$, а поскольку электропроводность σ пропорциональна числу носителей, то $\sigma = \sigma_0 e^{-E_g/2k_B T}$, т.е. электропроводность собственных полупроводников быстро растет с температурой. При нулевой температуре собственная проводимость полупроводников уменьшается до нуля, т.е. они становятся диэлектриками. Соответственно, удельное сопротивление полупроводника $\rho = 1/\sigma$ уменьшается с температурой по тому же логарифмическому закону:

$$\ln \rho = \ln \rho_0 + \frac{E_g}{2k_B T}, \quad (40.58)$$

Логарифм удельного сопротивления $\ln \rho$ от обратной величины температуры ($1/T$) линейным образом, что описывается на графике прямой линией, наклон которой позволяет определить ширину щели E_g . Эксперименты подтверждают такую зависимость удельного сопротивления от температуры.

Наиболее важными собственными полупроводниками являются кремний и германий, атомы которых принадлежат к четвертой группе периодической системы элементов Д. И. Менделеева. Они имеют четыре электрона в наполовину заполненной внешней оболочке. В твердом состоянии атомы *Si* и *Ge* образуют решетку типа алмаза, в которой четыре внешних электрона связываются ковалентно с четырьмя соседними атомами, в результате чего образуется полностью заполненная валентная зона, т.е. при $T = 0$ К кремний и германий являются диэлектриками. Однако ширина запрещенной зоны между валентной зоной и зоной проводимости у них невелика: у кремния $E_g = 1.1$ эВ, у германия $E_g = 0.75$ эВ. Благодаря этому уже при сравнительно невысоких температурах значительное число электронов из валентной зоны переходит в зону проводимости. Покинутое электронами место перестает быть нейтральным, в его окрестности возникает нескомпенсированный положительный заряд $+e$ — образуется дырка. На это место может перескочить электрон

одной из соседних пар. В результате дырка начинает мигрировать по кристаллу, как и освободившийся электрон. При встрече электрона с дыркой они могут *рекомбинировать* — электрон занимает свободный уровень в валентной зоне, так что рекомбинация приводит к одновременному исчезновению свободного электрона и дырки. Таким образом, в собственном полупроводнике одновременно происходят два процесса: рождение электрон-дырочных пар и рекомбинация, приводящая к попарному исчезновению электронов и дырок. Вероятность образования пар быстро увеличивается с температурой. Вероятность процесса рекомбинации пропорциональна как концентрации свободных электронов, так и концентрации дырок. Следовательно, для каждой температуры соответствует определенная равновесная концентрация электронов и дырок, которая описывается распределением Больцмана (40.57).

Примесная проводимость полупроводников

Электронные свойства собственного полупроводника существенно меняются при введении в него примесей атомов другого элемента. Процесс введения примесей называется *легированием*.

Примесная проводимость возникает, если некоторые атомы данного полупроводника заменить в узлах кристаллической решетки атомами, валентность которых отличается на единицу от валентности основных атомов.

Пятивалентные атомы, введенные в естественный четырехвалентный полупроводник в качестве примесей, берут на себя четыре ковалентные связи с соседними атомами естественного полупроводника, а пятый электрон пятивалентного атома оказывается сравнительно слабо связанным. Этот электрон продолжает принадлежать своему атому, но его энергия связи с ним очень мала, а радиус орбиты велик по сравнению со значениями этих величин для изолированного атома (рис. 40.17).

Для оценки энергии связи “лишнего” электрона можно применить формулу для энергии водородоподобного атома. Следует учесть только, что закон Кулона (взаимодействие электрона с ионом) в среде имеет вид $-e^2/4\pi\epsilon_0\epsilon r$, где ϵ — диэлектрическая проницаемость. Соответственно, четвертую степень заряда электрона в формуле (31.9) следует заменить на e^4/ϵ^2 ; кроме того, масса электрона заменяется на его эффективную

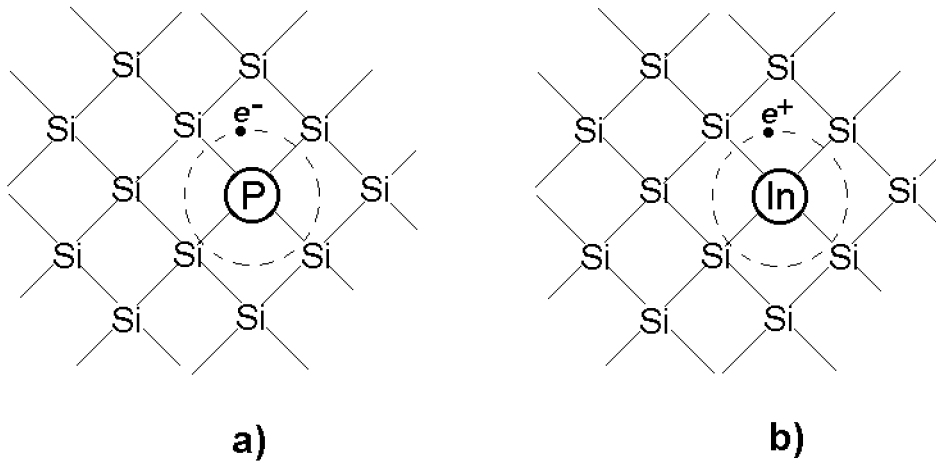


Рис. 40.17: Примесные атомы фосфора (а) и индия (b) в кремнии. При добавлении пятивалентного атома фосфора он замещает один из атомов кремния в кристаллической решетке. Четыре его электрона идут на образование ковалентной связи, а пятый (e^-) оказывается слабо связанным и может оторваться от атома, начав путешествовать по решетке, т.е. переходит в зону проводимости. При добавлении трехвалентного индия одна из ковалентных связей незаполнена (показана как слабо связанный положительный заряд e^+ около атома примеси). На это место может перескочить электрон соседнего атома кремния — в кристалле движется свободная дырка.

массу. В результате имеем при $Z = 1$:

$$E_n = -\frac{m_e^* e^4}{2(4\pi\epsilon_0\epsilon)^2 \hbar^2 n^2}. \quad (40.59)$$

Типичное значение диэлектрической проницаемости полупроводников — $\epsilon \sim 10$, а эффективной массы электрона $m_e^* \sim 0.1m$. В результате получается, что энергия ионизации примесного атома на три порядка меньше энергии ионизации 13.6 эВ атома водорода, т.е. имеет порядок $E_i \sim 0.01$ эВ. Это означает, что уже при температуре $T \sim E_i/k_B \sim 100$ К практически все пятивалентные примесные атомы ионизируются и отдают “лишний” электрон в зону проводимости. Подавляющее число электронов в зоне проводимости при комнатной температуре возникает за счет пятого электрона примесных атомов, число же электронов в зоне проводимости в результате переходов из валентной зоны, обуславливающих собственную проводимость полупроводника, очень мало по сравнению с числом электронов от примесных атомов. Таким образом, примесная электронная проводимость оказывается доминирующей по сравнению с собственной, электронной и дырочной.

Пятивалентные атомы примеси называются *донорными*. Примесные энергетические уровни пятого электрона узки и расположены в запре-

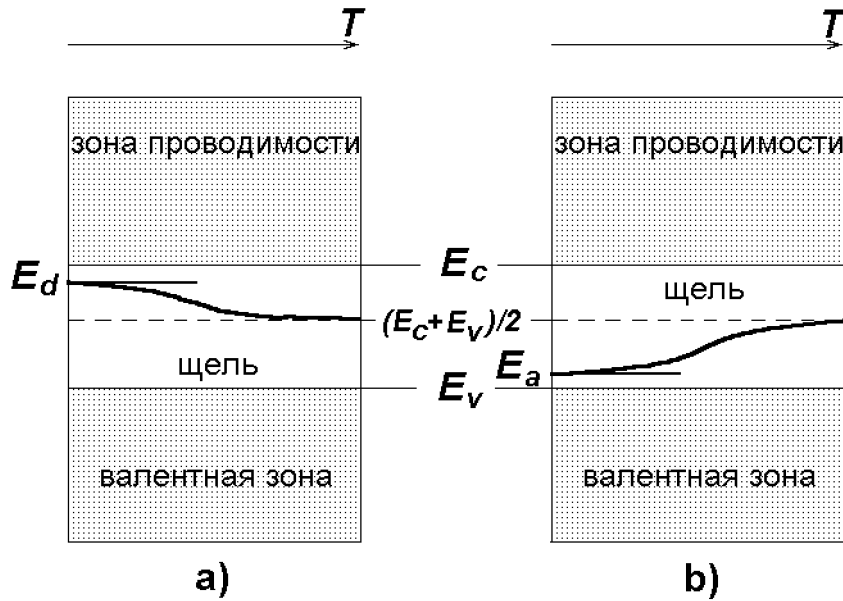


Рис. 40.18: Схема энергетических уровней в доновых (а) и акцепторных (б) полупроводниках. При нулевой температуре химический потенциал (уровень Ферми) находится на донорном E_d (акцепторном E_a) уровне. При повышении температуры он смещается в центр запрещенной зоны, как для чистого полупроводника (показано жирной линией).

щенной зоне близко к дну зоны проводимости, поскольку энергия ионизации мала (рис. 40.18,а). Для полупроводников IV группы периодической системы элементов наиболее важными донорными примесями являются элементы V группы: фосфор, мышьяк, сурьма и висмут.

Если в собственный полупроводник IV группы ввести в качестве примеси трехвалентные атомы из III группы элементов (бор, галлий, индий, таллий), то для осуществления ковалентной связи с четырехвалентным окружением этим атомам не хватает по одному электрону. Недостающие электроны они заимствуют у соседних атомов с затратой небольшой энергии порядка 0.01 эВ. В результате в валентной зоне возникает дырка, которая и обуславливает примесную дырочную проводимость полупроводника.

Поскольку энергия для образования дырки мала, при комнатной температуре на каждый примесный атом приходится по одной дырке. Собственная дырочная и электронная проводимость при этом малы, также как и в случае донорных примесей. Доминирующей проводимостью является примесная дырочная проводимость. Трехвалентные атомы примеси называются *акцепторными*. Акцепторные энергетические уровни лежат в запрещенной зоне весьма близко к потолку валентной зоны (рис. 40.18,б). Образованию дырки отвечает переход электрона из валентной зоны на

акцепторный уровень. Обратный переход соответствует разрыву одной из четырех ковалентных связей атома примеси с его соседями и рекомбинации при этом электрона и дырки.

При повышении температуры концентрация примесных носителей тока достигает насыщения, т.е. практически освобождаются все донорные или заполняются электронами все акцепторные уровни. С ростом температуры увеличивается собственная проводимость полупроводника, обусловленная переходом электронов непосредственно из валентной зоны проводимости. Таким образом, проводимость полупроводника складывается из примесной и собственной проводимостей, при низких температурах преобладает примесная, а при высоких — собственная проводимость.

В заключение этого раздела определим положение химического потенциала в примесных полупроводниках. Уравнения (40.50) и (40.53) остаются в силе, но условие электронейтральности изменяется. Рассмотрим для определенности полупроводник с донорной примесью. Переход электронов с донорного уровня в зону проводимости не приводит к появлению свободных дырок, т.к. атомы примеси находятся на больших расстояниях друг от друга и вакантное место остается незанятым и не может передвигаться по кристаллу. Если обозначить через N_d концентрацию атомов примеси (их число в единице объема), то концентрация N_d^0 неионизованных атомов примеси (т.е. концентрация электронов на донорных уровнях) равна, согласно распределению Ферми,

$$N_d^0 = \frac{N_d}{e^{(E_d - \mu)/k_B T} + 1}. \quad (40.60)$$

Соответственно, концентрация N_d^+ ионизованных атомов примеси определяется как $N_d^+ = N_d - N_d^0$, т.е. равна

$$N_d^+ = \frac{N_d}{e^{-(E_d - \mu)/k_B T} + 1}. \quad (40.61)$$

Условие электронейтральности кристалла требует, чтобы число электронов равнялось числу дырок плюс число ионизованных атомов примеси: $n_e = n_h + N_d^+$. Получаем тогда с учетом (40.50) и (40.53):

$$\begin{aligned} & 2 \left(\frac{m_e^* k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{E_c - \mu}{k_B T}} = \\ & = 2 \left(\frac{m_h^* k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{\mu - E_v}{k_B T}} + \frac{N_d}{e^{-(E_d - \mu)/k_B T} + 1}. \end{aligned} \quad (40.62)$$

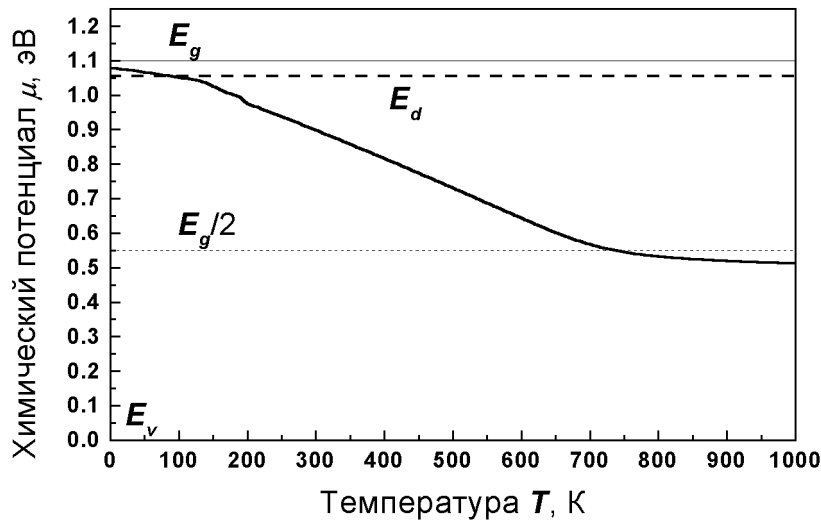


Рис. 40.19: Поведение химического потенциала в зависимости от температуры. Потолок валентной зоны взят за начало отсчета энергий ($E_v = 0$). Тогда дно зоны проводимости (тонкая прямая) расположено на высоте ширины щели ($E_c = E_g$), середина щели (тонкий пунктир) дается выражением $(E_c + E_v)/2 = E_g/2$. Донорный уровень E_d (жирный пунктир) отстоит от дна зоны проводимости на величину энергии ионизации E_i атома примеси.

Это сложное трансцендентное уравнение решено численно для значений характеристик системы, близких к кремнию с примесью фосфора (ширина щели $E_g = 1.10$ эВ, энергия ионизации атома примеси $E_i = E_c - E_d = 0.044$ эВ, эффективные массы электрона $m_e^* = 0.98m_e$ и дырки $m_h^* = 0.52m_e$, концентрация примеси $N_d = 10^{22} \text{ м}^{-3}$). Результат представлен на рис. 40.19. Ход подобных кривых для разных полупроводников зависит от характеристик вещества и от концентрации примеси. Приблизительно говоря, химический потенциал при низких температурах находится вблизи донорного уровня энергии, а при повышении температуры стремится примерно к середине запрещенной зоны, как для чистого полупроводника. Такое обобщенное поведение для химического потенциала показано на рис. 40.18,а) для донорной примеси и на рис. 40.18,б) — для акцепторной.

Физическая интерпретация такого поведения достаточно ясна. При температурах вблизи абсолютного нуля могут возбуждаться лишь атомы примеси (собственная проводимость полупроводника стремится к нулю). Поскольку уровень Ферми — это энергия, от которой отсчитывается возбуждение электронов, в этом случае он совпадает с донорным уровнем

энергии. При комнатных температурах все атомы примеси уже практически ионизованы и дальнейшее повышение температуры ведет к росту собственной проводимости, т.е. полупроводник с примесью все больше ведет себя как чистый полупроводник. Соответственно, химический потенциал стремится к середине щели.

Принцип работы полупроводниковых устройств

Мы посвятили так много времени изучению положения химического потенциала в полупроводниках и металлах, что сразу можно было бы догадаться об исключительно важной роли этой характеристики вещества. И эта роль предопределяется следующим принципом:

- *при контакте двух разных сред их химические потенциалы выравниваются.*

В каждой из сред сохраняется при этом прежнее расположение энергетических зон и уровней относительно химического потенциала (уровня Ферми), за исключением узкого переходного слоя. Из-за этого возникает контактная разность потенциалов при соприкосновении двух разных металлов, на этом принципе работают полупроводниковый выпрямитель, транзистор и прочие устройства. Детальное их рассмотрение выходит за рамки данного курса физики, и мы остановимся лишь на первом практически использованном полупроводниковом элементе электрических схем — выпрямителе. Он представляет собой контакт полупроводника с донорной примесью (т.н. *полупроводника n -типа* от слова negative — отрицательный) и полупроводника с акцепторной примесью (т.н. *полупроводника p -типа* от слова positive — положительный). Изменение энергетических зон показано на рис. 40.20.

Рассмотрим сначала рис. 40.20,а), показывающий изменение расположения энергетических зон в отсутствие внешнего электрического поля. В левой части, в области полупроводника p -типа с акцепторной примесью, уровень Ферми находится у акцепторного уровня, т.е. вблизи потолка валентной зоны, а в области полупроводника n -типа — вблизи донорного уровня, т.е. у дна зоны проводимости. Соответственно, дно зоны проводимости слева поднято по отношению ко дну области проводимости справа — создается потенциальный барьер между полупроводниками. При наложении обратного смещения (см. рис. 40.20,б) на p -контакт подается отрицательное напряжение, а на n -контакт — положительное. По-

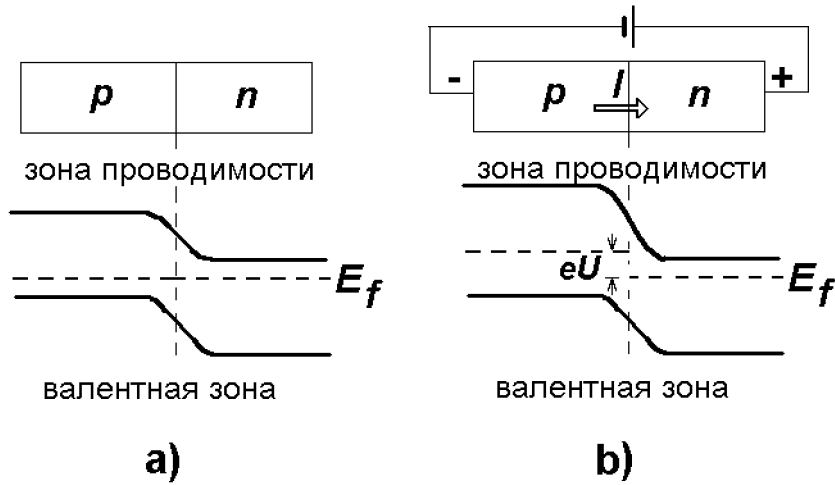


Рис. 40.20: Изменение энергетических зон при переходе через $p - n$ слой в отсутствие внешнего электрического поля (a) и при приложении обратного смещения (b). Направление от p к n считается положительным направлением тока I .

ложительный полюс притягивает электроны, затрудняя их перетекание в p -область, т.е. потенциальный барьер между областями увеличивается за счет относительного смещения уровней Ферми на величину eU , где U — приложенное напряжение, а e — заряд электрона (на рис. 40.20, b напряжение отрицательно, как и электрический заряд, поэтому eU положительно). Электроны, движущиеся слева направо, свободно скатываются с потенциальной “горки” в n -область; это приводит к появлению небольшого обратного тока $I_{\leftarrow} = I_0$. Движение же электронов справа налево затруднено из-за обратного напряжения смещения. Увеличение потенциального барьера приводит к уменьшению прямого тока по сравнению с обратным на больцмановский фактор: $I_{\rightarrow} = I_0 e^{-eU}$. Полный же ток через контакт $I = I_{\rightarrow} - I_{\leftarrow}$ определяется тогда выражением:

$$I = I_0 \left(e^{|e|U} - 1 \right), \quad (40.63)$$

где $|e|$ — абсолютная величина заряда электрона. В отсутствие внешнего поля ($U = 0$) ток равен нулю (в этом и состоит принцип выравнивания химических потенциалов). При подаче на контакт обратного смещения $U < 0$ (как на рис. 40.20, b) при условии, что $|eU|$ превышает несколько $k_B T$, ток равен $I \approx -I_0$, т.е. отрицателен (и невелик по абсолютной величине). При подаче на контакт прямого напряжения ток быстро растет. Вид вольт-амперной характеристики показан на рис. 40.21.

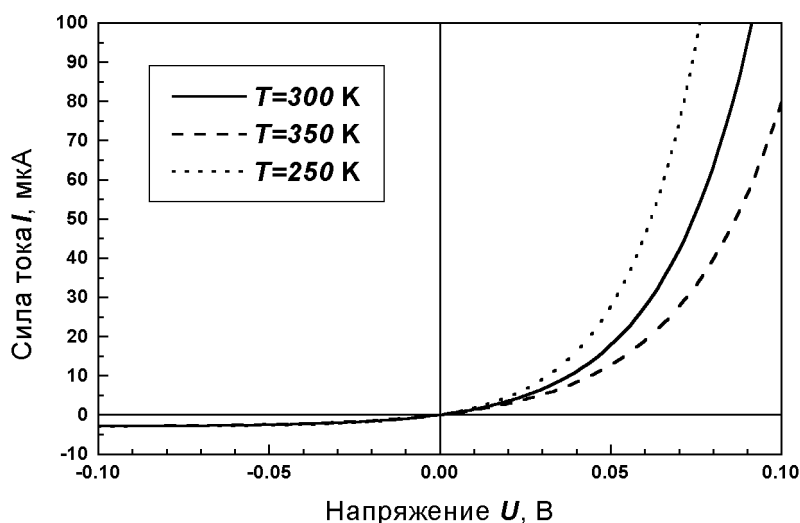


Рис. 40.21: Вольт-амперная характеристика $p-n$ перехода при разных температурах и постоянном значении $I_0 = 3\text{ мкА}$.

Контрольные вопросы

1. Что такое энергетические зоны в кристалле.
2. Объясните механизм формирования энергетических зон при соединении отдельных атомов в кристаллическую решетку.
3. Объясните различие между металлами, диэлектриками и полупроводниками с точки зрения структуры энергетических зон.
4. Перечислите трудности классической модели свободных электронов в металле.
5. Что такое энергия Ферми? Зависит ли энергия Ферми в металле от объема образца?
6. Объясните ход кривых на рис. 40.9. При каких условиях распределение Ферми может быть приближенно заменено на распределение Больцмана?
7. Что такое плотность занятых состояний? Объясните, почему на рис. 40.10 кривые для $T = 0$ и $T = 0.05E_f$ мало отличаются друг от друга.
8. Почему теория теплоемкости Дебая, не учитывающая теплоемкости электронного газа, хорошо работает почти во всем интервале температур? Почему эта теория предсказывает неправильное поведение теплоемкости при очень низких температурах вблизи абсолютного нуля?
9. Что такое эффективная масса электрона? Почему она отличается от массы электрона в вакууме?
10. Что такое дырки в полупроводниках. Перечислите их свойства.

11. Что такое собственная проводимость полупроводника? Как ведет себя удельное сопротивление собственного полупроводника с температурой?
12. Где находится уровень Ферми в чистом и примесном полупроводниках?
13. Опишите перестройку энергетических зон при контакте полупроводников n - и p -типа. Объясните выпрямляющие свойства такого контакта.

Глава 41

Физика атомного ядра

В 1911 г. Эрнест Резерфорд открыл, что атом в сущности представляет собой пустое пространство. До этого физики, как уже упоминалось, считали атом подобием пудинга с изюмом. Предполагалось, что положительный заряд атома (‘‘пудинг”) распределен по его объему, а вкрапленные в него электроны (‘‘изюм”) осциллируют вокруг фиксированных центров. Опыты Резерфорда по рассеянию альфа-частиц на металлической фольге показали, что атом имеет маленькое, но массивное положительно заряженное ядро. Этим открытием мы уже пользовались при изучении квантовой теории атома водорода, когда описывали электрон движущимся в кулоновском поле сил притяжения. В модели пудинга электростатический потенциал был бы, конечно, совершенно другим. Однако свойства атомного ядра, помимо его малых размеров и положительного заряда, нами пока не использовались. Настало время познакомиться и с ними. На этом этапе наших знаний о природе для объяснений всего многообразия мира достаточно трех основных ‘‘кирпичиков” --- элементарных частиц, из которых построен атом и его ядро. Это протон, нейтрон и электрон. В данной главе мы познакомимся с основными свойствами ядра, его радиоактивными распадами, некоторыми применениями ядерной физики в науке и технике.

41.1 Состав атомного ядра

Ядра атомов всех элементов состоят из двух видов элементарных частиц — протонов (p) и нейтронов (n). Для этих частиц используют общее название *нуклоны* (от лат. *nucleus* — ядро). Ядра обозначаются символом A_ZX , где X — химический символ данного элемента (Na, C, O, Al и т.п.) Слева вверху ставится т.н. *массовое число* A , которое равно суммар-

ному числу протонов и нейтронов (т.е. полному числу нуклонов). Слева внизу стоит *атомный номер* Z ядра, определяющий порядковый номер химического элемента в периодической таблице Менделеева. Атомный номер Z — это количество протонов в ядре, так что заряд ядра есть $+Ze$. Число нейтронов в ядре равно $N = A - Z$. Строго говоря, левый нижний индекс не нужен, так как атомный номер ядра легко определяется по химическому символу элемента, и мы иногда будем его опускать (например, для урана ^{235}U по таблице Менделеева находим $Z = 92$).

До открытия нейтрона (Чэдвик, 1932) полагали, что ядро состоит из A протонов и $(A - Z)$ электронов. Однако, в конце 20-х гг. эта теория столкнулась с т.н. азотной катастрофой: ядро азота ($Z = 7, A = 14$) должно было бы состоять из 14 протонов и 7 электронов. Всего в составе получалась 21 частица, и у каждой спин равнялся $1/2$. Следовательно, спин ядра также должен был бы быть полуцелым, а из опытов следовало, что он равен единице. Теперь нам понятно, что ядро азота имеется 7 протонов и 7 нейтронов, и эти 14 частиц с полуцелым спином приводят к целому спину ядра.

Рассмотрим основные характеристики нуклонов. Протон обладает положительным зарядом $+e$, численно равным заряду электрона, и массой $m_p = 1.6726 \cdot 10^{-27}$ кг. (Для сравнения напомним массу электрона: $m_e = 9.10939 \cdot 10^{-31}$ кг, т.е. $m_p = 1836m_e$.) Обычно, используя связь энергии и массы $E = mc^2$, массы элементарных частиц указывают в энергетических единицах (МэВ/ c^2); тогда $m_p = 938.27$ МэВ/ c^2 , $m_e = 0.511$ МэВ/ c^2 . Спин протона равен половине ($s = 1/2$), а его собственный магнитный момент $\mu_p = +2.79\mu_N$, где *ядерный магнетон* $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p} = 5.05 \cdot 10^{-27}$ Дж/Тл $= 3.152 \cdot 10^{-14}$ МэВ/Тл. Из-за массивности протона ядерный магнетон в 1836 раз меньше магнетона Бора. Размеры протона составляют $r_p \sim 1.3 \cdot 10^{-15}$ м.

Нейтрон имеет нулевой электрический заряд и массу $m_n = 1.6749 \cdot 10^{-27}$ кг $= 939.56$ МэВ/ c^2 . Отметим, что нейтрон тяжелее протона: $\delta m = m_n - m_p = 1.3$ МэВ $\approx 2.5m_e$. Спин нейтрона также равен половине ($s = 1/2$), а собственный магнитный момент (несмотря на отсутствие электрического заряда) отличен от нуля и равен $\mu_n = -1.91\mu_N \approx -\frac{2}{3}\mu_p$. Существование магнитного момента у нейтрона, и аномальная величина магнитного момента протона ($2.79\mu_N$ вместо одного ядерного магнетона) связаны с неточечностью нуклонов, о которой мы поговорим позже. В свободном состоянии нейтрон неустойчив (нестабилен): он самопроиз-

вольно распадается на протон (p), электрон (e^-) и *электронное антинейтрино* (символ $\bar{\nu}_e$): $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$. Электронное антинейтрино — элементарная частица с нулевой массой и нулевым зарядом. Среднее время жизни нейтрона равно $\tau_n = 14.8$ мин. Так как при распаде энергия покоя нейтрона $E_{0,n} = m_n c^2 = 939.56$ МэВ превышает сумму энергий покоя образовавшихся частиц $E_{0,p} + E_{0,e} = 938.27 \text{ МэВ} + 0.511 \text{ МэВ} = 938.78 \text{ МэВ}$ на величину $\Delta E = E_{0,n} - E_{0,p} - E_{0,e} = 0.78 \text{ МэВ}$, то этот избыток ΔE выделяется в виде кинетической энергии образовавшихся частиц.

Ядра с одинаковым числом протонов Z , но с разными A называют *изотопами*. Имея одинаковый заряд, они принадлежат тому же химическому элементу. Например, водород имеет три изотопа:

${}_1^1\text{H}$ — обычный водород ($Z = 1, A = 1, N = 0$),

${}_1^2\text{H}$ — тяжелый водород (дейтерий) ($Z = 1, A = 2, N = 1$),

${}_1^3\text{H}$ — сверхтяжелый водород (третий) ($Z = 1, A = 3, N = 2$),

Обычный водород и дейтерий стабильны, а тритий радиоактивен. Большинство химических элементов имеет по несколько стабильных изотопов. Наличие различных изотопов у химических элементов обуславливает нецелую величину атомной массы в периодической таблице Менделеева, поскольку в естественном состоянии элемент представляет собой смесь различных стабильных изотопов.

Ядра с одинаковым массовым числом A называются *изобарами* (например, ${}_{18}^{40}\text{Ar}$ и ${}_{20}^{40}\text{Ca}$). Ядра, имеющие одинаковое число нейтронов $N = A - Z$, носят название *изотонов* (${}_{6}^{13}\text{C}$ и ${}_{7}^{14}\text{N}$).

41.2 Физическая природа ядерных сил

Устойчивость ядер (по крайней мере тех, что встречаются в природе в естественном состоянии, а не “изготовлены” физиками) свидетельствует об интенсивном взаимодействии между нуклонами, которое носит характер притяжения. Притяжение между нуклонами удерживает их на малых расстояниях $\sim 10^{-15}$ м, несмотря на кулоновское отталкивание заряженных протонов. Ядерное взаимодействие между нуклонами называется *сильным взаимодействием*; для него характерны следующие свойства:

1. Ядерные силы являются короткодействующими, их радиус действия имеет порядок 10^{-15} м. Причем, на расстояниях, существенно мень-

ших 10^{-15} м, притяжение нуклонов сменяется сильным отталкиванием.

2. Ядерные силы зарядово независимы, т.е. взаимодействия пар $p - p$, $n - n$, $n - p$ имеют одинаковую интенсивность.
3. Ядерные силы не являются центральными, т.е. взаимодействие между нуклонами не направлено вдоль прямой, соединяющей центры взаимодействующих нуклонов.
4. Ядерные силы зависят от взаимной ориентации спинов нуклонов. Например, ядро тяжелого водорода (дейтрон) образуется только в том случае, когда нейтрон и протон имеют спины, параллельные друг другу (т.е. спин дейтрона равен единице).
5. Ядерные силы имеют свойство насыщения, т.е. каждый нуклон в ядре взаимодействует с определенным числом нуклонов. Свойство насыщения проявляется в том, что плотность ядерного вещества является постоянной, т.е. объем ядра пропорционален числу образующих его нуклонов.

В соответствии с современной физикой, любые взаимодействия между частицами переносятся *квантами* соответствующего поля. В случае электромагнитного взаимодействия таковыми являются фотоны. Кванты поля ядерных сил были названы *мезонами*. Пусть нуклон испустил мезон массой m . Произошло изменение энергии системы $\Delta E \sim mc^2$. Согласно принципу неопределенности, такое “нарушение” закона сохранения энергии принципиально не будет наблюдаемым в течение времени $\Delta t = \hbar/\Delta E = \hbar/(mc^2)$, после чего мезон должен быть поглощен другим нуклоном. Это и будет означать, что наши два нуклона провзаимодействовали друг с другом. Но за время Δt мезон может преодолеть расстояние, не большее

$$r = c\Delta t = \frac{\hbar}{mc} = \lambda_{m,C}. \quad (41.1)$$

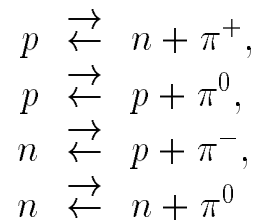
Таким образом, комптоновская длина волны переносчика взаимодействия равна радиусу действия порождаемых им сил.

Электромагнитные силы возникают, когда заряженные частицы обмениваются фотонами. Поскольку масса фотонов равна нулю, радиус действия электромагнитных сил бесконечен. В 1935 г. японский физик

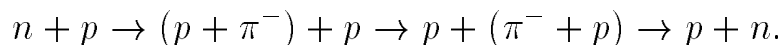
Х. Юкава, исходя из радиуса действия ядерных сил $r_{\text{яд}} \sim 1.3 \cdot 10^{-15}$ м, предположил, что переносчиком ядерного взаимодействия является гипотетические “тяжелые” фотоны с массой $m \sim \hbar/(r_{\text{яд}}c)$. Записывая это соотношение в виде $mc^2 \sim \hbar c/r_{\text{яд}}$ и учитывая значение комбинации фундаментальных постоянных $\hbar c$ в энергетических единицах ($\hbar c = 193.327 \cdot 10^{-15}$ МэВ · м), оцениваем массу переносчиков сильных ядерных взаимодействий: $m \sim 193.327/1.3 \approx 150$ МэВ/ c^2 . Носители ядерных сил (т.н. π -мезоны) были открыты в 1947 г. в экспериментах Окиалини и Поуэлла. Оказалось что существуют заряженные π -мезоны (π^+ и π^- с зарядом, равным заряду электрона $\pm e$ и массой $m_{\pi^\pm} = 139.57$ МэВ/ c^2) и нейтральный π^0 -мезон с массой $m_{\pi^0} = 134.97$ МэВ/ c^2 . Спин всех π -мезонов (заряженных и нейтрального) равен нулю ($s = 0$). Все три π -мезона являются нестабильными. Времена жизни составляют: $\tau_{\pi^\pm} = 2.6 \cdot 10^{-8}$ с, $\tau_{\pi^0} = 0.8 \cdot 10^{-16}$ с.

Процессы испускания частицей квантов поля, когда сами кванты принципиально не могут наблюдаться, но либо поглощаются через короткое время этой же частицей, либо какой-нибудь другой, взаимодействующей с первой, называются *виртуальными*. Заметим, что при испускании заряженного π -мезона заряд частицы меняется, т.е. протоны и нейтроны взаимно превращаются друг в друга.

Таким образом, в результате виртуальных процессов



нуклоны оказываются окруженными облаком виртуальных π -мезонов, образующих поле ядерных сил. Облако π -мезонов иногда называют “мезонной шубой”. Испускание и поглощение виртуальных π -мезонов нуклонами приводит к сильному взаимодействию между ними, которое осуществляется следующей схемой: при взаимодействии, скажем, протона и нейтрона последний может испустить π^- -мезон, превратившись в протон. Начальный же протон, поглощая этот π^- -мезон, превращается в нейтрон. В конечном состоянии остаются те же самые частицы:



Нетрудно записать и другие подобные виртуальные реакции взаимопревращения нуклонов с участием π^+ - и π^0 -мезонов.

Вопрос, почему обмен π -мезонами приводит к притяжению нуклонов, а обмен фотоном — к отталкиванию одноименно заряженных электронов, не может объяснен здесь. Отметим лишь, что это связано со спином квантов переносчиков взаимодействия: $s = 0$ для π -мезонов и $s = 1$ для фотонов.

Наличие “мезонной шубы” позволяет объяснить аномальную величину магнитного момента протона ($\mu_p = 2.79\mu_N$) и ненулевое значение магнитного момента нейтрона ($\mu_n = -1.91\mu_N$, где минус указывает на то, что направление собственных механического (спинового) и магнитного моментов противоположны). Нейтрон вследствие реакции $n \xleftrightarrow{\pi^-} p + \pi^-$ часть времени проводит в виртуальном состоянии “протон + π^- -мезон”, причем орбитальное движение π^- приводит к возникновению у нейтрона отрицательного магнитного момента. Орбитальное движение π^+ -мезона в виртуальном состоянии протона ($p \xleftrightarrow{\pi^+} n + \pi^+$) объясняет аномальный магнитный момент протона.

41.3 Масса и дефект массы ядра

Можно ли подсчитать массу ядра по его составу? На первый взгляд, нет ничего проще. Возьмем в качестве примера дейтрон (ядро тяжелого водорода ${}^2_1\text{H}$), состоящее из протона и нейтрона. Суммарная масса этих частиц равна $m_p + m_n = 938.27 + 939.56 = 1877.83$ МэВ/ c^2 . Эксперимент же дает для массы дейтрона значение $m_d = 1875.63$ МэВ/ c^2 , т.е. на 2.22 МэВ/ c^2 меньше. Это явление, называемое *дефектом массы*, — проявление знаменитой формулы $E = mc^2$. Действительно, при связывании протона и нейтрона в дейтрон выделилась какая-то энергия $E_{\text{св}}$. Но выделение энергии эквивалентно уменьшению массы системы. Поэтому масса дейтрона (и любого другого ядра) меньше массы его компонентов на величину $E_{\text{св}}/c^2$. Чтобы снова разделить дейтрон на свободные протон и нейтрон, точно такую же энергию надо затратить. Это и есть энергия связи дейтрона $E_{\text{св}} = 2.22$ МэВ.

В общем случае, при объединении нуклонов в ядро, масса M ядра всегда меньше (из-за дефекта массы) суммы масс $Zm_p + (A - Z)m_n$ входящих в него частиц на величину

$$\Delta M = Zm_p + (A - Z)m_n - M. \quad (41.2)$$

Соответственно, энергия покоящегося ядра $E = Mc^2$ меньше суммарной

энергии невзаимодействующих покоящихся нуклонов на величину энергии связи:

$$E_{\text{св}} = \Delta_M c^2 = [Zm_p + (A - Z)m_n - M] c^2. \quad (41.3)$$

Энергия связи определяет величину работы, которую необходимо совершить, чтобы удалить нуклоны друг от друга на расстояния, превышающие радиус действия ядерных сил. Величина энергии связи, приходящаяся на один нуклон ядра ($E_{\text{св}}/A$), называется удельной энергией связи нуклонов в ядре. В дейтроне она равна примерно 1.1 МэВ/нуклон.

В ядерной физике часто удобнее пользоваться не массами “голых” ядер, а массами нейтральных атомов, включая и массу всех электронов (дефект массы из-за связи электронов с ядром ничтожен и им пренебрегают). Естественно, формула (41.3) для энергии связи останется прежней, только вместо m_p надо использовать массу нейтрального атома водорода ${}^1\text{H}$. Кроме того, массы часто выражают в т.н. *атомных единицах массы* — *а.е.м.*. По определению, 1 а.е.м. = $1/12$ массы атома углерода ${}^{12}\text{C}$. Установим связь с обычными единицами измерения массы. Один моль атомов ${}^{12}\text{C}$ имеет массу 12 г, следовательно, $1 \text{ а.е.м.} = 10^{-3}/N_A = 1.66054 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$. Учитывая, что энергия E , соответствующая массе $m = 1 \text{ кг}$, равна $E = mc^2 = 8.98755 \cdot 10^{16} \text{ Дж} = 5.60959 \cdot 10^{35} \text{ эВ}$, находим, что $1 \text{ а.е.м.} = 931.495 \text{ МэВ}/c^2$. В этих единицах $m_p = 1.007276 \text{ а.е.м.}$, $m_n = 1.008665 \text{ а.е.м.}$, а масса нейтрального атома водорода $m_{{}^1\text{H}} = 1.007825 \text{ а.е.м.}$

Задача 41.55. Относительная атомная масса водорода, взятая из таблицы Менделеева, равна $A_r = 1.00797 \text{ а.е.м.}$. Естественная смесь водорода содержит некоторую долю тяжелого изотопа — дейтерия. Масса атома дейтерия $m_D = 2.01410 \text{ а.е.м.}$. Найти долю дейтерия в природной смеси водорода. Сколько атомов N водорода приходится на один атом дейтерия?

Решение Если долю дейтерия обозначить через d , то относительная атомная масса водорода должна определяться как $A_r = 1.00797 = 1.00783 \times (1 - d) + 2.01410 \times d = 1.00783 + 1.00627d$, откуда следует $d = 0.00014$. Иными словами, содержание дейтерия в естественных условиях равно примерно 0.014%. Мы получили долю дейтерия по массе. Найдём теперь его долю по числу атомов. Смесь из одного атома дейтерия и N атомов водорода имеет массу $M = 1.00783N + 2.01410 \text{ а.е.м.}$. Только что найденная массовая доля дейтерия равна $d = 0.00014 = m_D/M$, откуда

получаем $0.00014(1.00783N + 2.01410) = 2.01410$. Решение этого уравнения дает $N \approx 14400$. Обратная величина $\eta = 1/N \approx 0.00007$ дает долю дейтерия по числу атомов. Естественно, η примерно в два раза меньше d , поскольку атом дейтерия примерно вдвое тяжелее атома водорода. ■

Задача 41.56. Вычислить дефект массы, энергию связи и удельную энергию связи нуклонов в ядре гелия ${}^4_2\text{He}$. Масса атома гелия составляет 4.00260 а.е.м..

Решение. В состав ядра гелия входят два протона ($Z = 2$) и два нейтрона ($N = A - Z = 2$). Отсюда сначала находим дефект массы: $\Delta_M = 2 \times 1.00783 + 2 \times 1.00867 - 4.00260 = 0.0304$ а.е.м. Для энергии связи теперь получаем: $E_{\text{св}} = \Delta_M c^2 = 0.0304 \times 931.495 = 28.32$ МэВ. Удельная энергии связи при 4-х нуклонах в ядре равна $28.32/4 = 7.08$ МэВ/нуклон. Для сравнения: мы видели, что энергия связи валентных электронов в атомах имеет величину порядка десятка электронвольт, т.е. она почти в миллион раз меньше удельной энергии связи нуклонов в ядрах. ■

Заметим, что выражения (41.2) для дефекта массы и (41.3) можно использовать не только для полного расщепления ядер на составляющие, но и для других распадов. Соответствующие модификации легко понять: если ядро массой M разваливается на ядра меньших масс m_1 и m_2 , то дефект массы и энергию связи следует определять по формулам

$$\Delta_M = m_1 + m_2 - M, \quad E_{\text{св}} = \Delta_M c^2 = (m_1 + m_2 - M) c^2. \quad (41.4)$$

Для иллюстрации применения этих формул рассмотрим поучительный пример последовательного расщепления ядра ${}^4\text{He}$, позволяющий понять, из чего складываются 28.3 МэВ, которые мы нашли для энергии связи ядра гелия. На первом этапе оторвем от ядра протон: ${}^4\text{He} \Rightarrow {}^3\text{H} + {}^1\text{H}$. Масса изотопа ${}^3\text{He}$ равна 3.0161 а.е.м. Поэтому дефект масс в этом случае составляет $\Delta_{M,1} = 3.0161 + 1.0078 - 4.0026 = 0.0213$ а.е.м., а энергия отрыва протона $E_1 = 0.0213 \times 931.5 = 19.84$ МэВ. На втором этапе оторвем от трития ${}^3\text{H}$ нейтрон: ${}^3\text{H} \Rightarrow {}^2\text{H} + n$. Масса атома дейтерия равна 2.0141 а.е.м., так что дефект массы $\Delta_{M,2} = 2.0141 + 1.0087 - 3.0161 = 0.0067$ а.е.м., а энергия отрыва второго нуклона $E_2 = 0.0067 \times 931.5 = 6.24$ МэВ. Наконец, оторвем еще один нейтрон от дейтрона: ${}^2\text{H} \Rightarrow {}^1\text{H} + n$. Дефект массы $\Delta_{M,3} = 1.0078 + 1.0087 - 2.0141 = 0.0024$ а.е.м., энергия отрыва $E_3 = 0.0024 \times 931.5 = 2.23$ МэВ. Складывая найденные величины, получаем в точности энергию связи ядра гелия: $E_1 + E_2 + E_3 =$

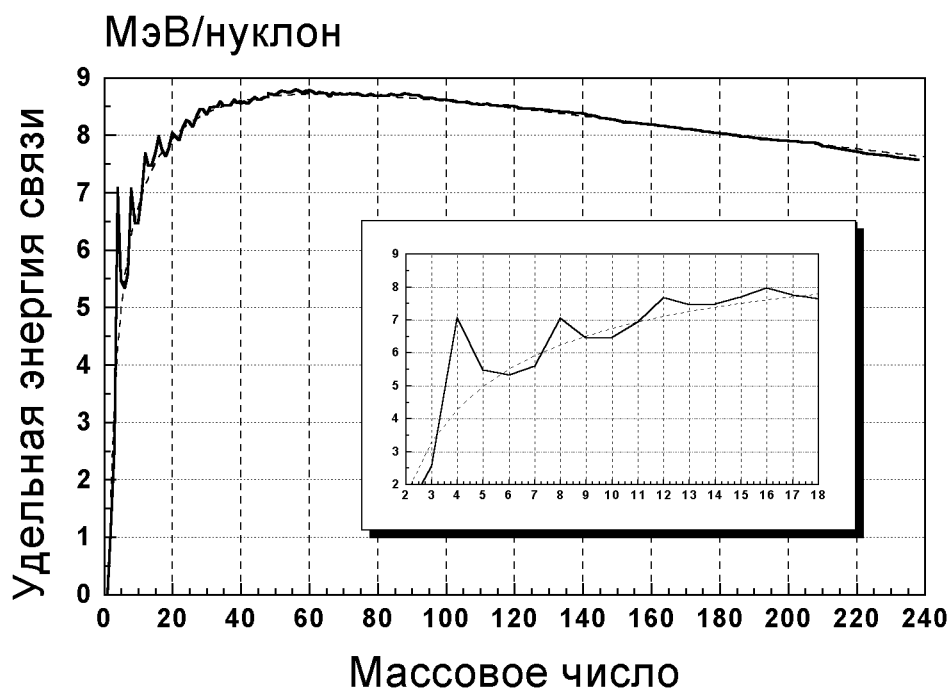


Рис. 41.1: Удельная энергия связи нуклонов в ядрах. Теоретическая кривая, вычисленная по выведенным ниже формулам, показана пунктирной линией, но она практически сливается с экспериментальной кривой (следы ее видны под пиками в области $A = 4 \div 16$ — см. врезку).

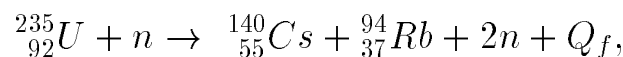
$19.84 + 6.24 + 2.23 = 28.3$ МэВ. Примерно так же будет выглядеть расчет при другом порядке “расщепления” ядра гелия: трудно оторвать первую частицу, легче — последующие.

Очень информативным является график зависимости удельной энергии связи от массового числа A (рис. 41.1). Наибольшей высоты кривая достигает на ядре ${}^{62}\text{Ni}$, близко к вершине лежит ядро железа ${}^{56}\text{Fe}$ и соседних металлов. Энергия связи этих ядер составляет 8.7 МэВ/нуклон. Примерное постоянство энергии связи в средней части графика 41.1 говорит о насыщении ядерных сил: не все нуклоны взаимодействуют друг с другом. В противном случае энергия связи была бы пропорциональна числу пар ($\sim A^2$), а удельная энергия связи тогда бы росла: $E_{\text{св}}/A \sim A$. Насыщение очевидным образом связано с короткодействием ядерных сил. При переходе к еще более тяжелым ядрам с большими A удельная энергия связи постепенно уменьшается, и для урана она составляет 7.5 МэВ/нуклон. Уменьшение устойчивости тяжелых ядер объясняется тем, что кулоновские силы отталкивания между протонами имеют бесконечный радиус действия, что при большом числе протонов приводит к

развалу ядра. Кроме того, если в ядре, как в любой квантовой системе, существуют дискретные уровни энергии, то из-за подчинения нуклонов принципу Паули, они должны занимать все более высокие уровни энергии, которая в тяжелых ядрах в конце концов превысит энергию связи.

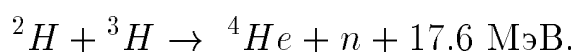
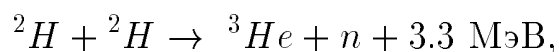
Указанная зависимость $E_{\text{св}}/A$ от A дает принципиальную возможность получать энергию при превращениях атомных ядер. В самом деле, если надо затратить энергию $E_{\text{св}}$ для того, чтобы развалить ядро на составляющие нуклоны, то в процессе собирания этих нуклонов в ядро такое же количество энергии будет выделяться. Полезный выход энергии получится тогда, когда в процессе превращения выделяемая энергия превысит затраченную, то есть когда среди конечных продуктов реакции окажутся ядра с большей энергией связи, нежели у начальных ядер. Иными словами, мы должны в результате реакции подниматься по кривой на рис. 41.1. Такой подъем возможен, если стартовать с тяжелых ядер на правом краю кривой и переходить к ядрам средней массы в центре кривой. Или же надо начинать с совсем легких ядер на левом краю кривой и двигаться в сторону более тяжелых. Физически первый процесс означает деление тяжелых ядер на несколько более легких, а во втором происходит слияние (синтез) легких ядер в одно ядро. Оба процесса сопровождаются выделением большого количества энергии.

Например, одна из возможных реакций деления происходит в ядерном реакторе, когда нейтрон попадает в ядро изотопа урана ${}^{235}_{92}\text{U}$ и разваливает его на несколько осколков:



где Q_f — выделяющаяся энергия. Используя рис. 41.1, мы можем примерно оценить энерговыделение в реакциях деления урана. Поскольку удельная энергия связи урана составляет 7.5 МэВ/нуклон, а удельная энергия связи осколков в середине рисунка равна 8.7 МэВ/нуклон, то выделяемая энергия составит порядка 1 МэВ/нуклон. Умножая на полное число (235) нуклонов в ядре урана, получаем, что полное энерговыделение составляет примерно 240 МэВ.

В земных условиях удалось осуществить две реакции синтеза — слияние ядер дейтерия и трития в ядро гелия:



В первой реакции выделяется энергия $3.3/4 = 0.8$ МэВ/нуклон, во второй — $17.6/5 = 3.5$ МэВ/нуклон. К сожалению, обе реакции пока осуществлены лишь в военных целях — при термоядерных взрывах.

Для сравнения укажем, что при реакции горения



лежащей в основе нашей цивилизации, выделяется энергия $4.2/(12+32) = 0.095$ эВ/нуклон. В пересчете в обычные единицы это и даст теплотворную способность топлива (например, теплота сгорания бензина равна 44 МДж/кг). “Теплотворная” же способность ядерного топлива, как мы видели, намного выше, что и предопределяет развитие ядерной энергетики. Различие в миллионы раз связано с тем, что при химических реакциях пространственная область, в которой происходит перегруппировка частиц, определяется размерами молекул, а в случае ядерных превращений — гораздо меньшими размерами ядра.

41.4 Модели атомного ядра

В этом разделе мы очень коротко познакомимся с двумя моделями ядра, применяемыми для описания хода кривой энергии связи ядер.

Модель жидкой капли

Для начала проведем оценку плотности атома водорода. Масса протона $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ кг, радиус атома $a_B = 0.5 \cdot 10^{-10}$ м. Тогда средняя плотность атома равна $\rho = \frac{m_p}{4\pi a_B^3/3} \approx 3.2 \cdot 10^3$ кг/м³ = 3.2 кг/дм³. Плотности обычных для нас веществ имеют близкие значения: жидкости — $0.7 \div 1.8$ кг/дм³, уголь — 1.4 кг/дм³, алюминий — 2.7 кг/дм³, гранит — 2.8 кг/дм³, железо — 7.8 кг/дм³. Вывод: атомы в веществе плотно упакованы, так что плотность вещества примерно равна плотности атомов.

Вполне естественно предположить, что нуклоны тоже упакованы плотно в ядрах, тем более, что последние представляют собой гораздо более однородную структуру, нежели атомы: разные вещества построены из различных атомов, в то время как все ядра состоят из одинаковых нуклонов. Оценим среднюю плотность протона, исходя из известного нам радиуса действия ядерных сил (или, что то же самое, радиуса протона $r_p = 1.3 \cdot 10^{-15}$ м, совпадающего с комптоновской длиной волны π -мезонов): $\rho_p = \frac{m_p}{4\pi r_p^3/3} = 1.8 \cdot 10^{17}$ кг/дм³. Примерно такое же значение

должна иметь плотность ядерной материи во всех ядрах. Это и есть первое предположение, лежащее в основе модели жидкой капли, развитой в 30-е гг (Г. А. Гамов, Н. Бор, Я. И. Френкель). Плотность ядерной материи пропорциональна числу нуклонов A и обратно пропорциональна объему ядра, т.е. величине $r_{\text{я}}^3$, где $r_{\text{я}}$ — радиус ядра. Коль скоро отношение $A/r_{\text{я}}^3 = \text{const}$, то $r_{\text{я}} \sim A^{1/3}$. Коэффициент пропорциональности должен быть равен радиусу протона, чтобы получилось правильное значение при $A = 1$. Таким образом, в первом приближении ядро можно рассматривать как шар радиусом

$$r_{\text{я}} = r_p A^{1/3}, \quad (41.5)$$

где $r_p = 1.3 \cdot 10^{-15}$ м — радиус протона.

Задача 41.57. Нейтронная звезда — это объект, чья плотность примерно равна плотности ядерной материи. Вычислить, какой радиус имело бы Солнце, превратившись в нейтронную звезду. Считать, что при таком превращении масса Солнца $M_{\odot} = 1.99 \cdot 10^{30}$ кг не изменилась.

Решение. Плотность ядерной материи находится по данным о протоне: $\rho_p = \frac{m_p}{4\pi r_p^3/3}$. Ту же плотность будет иметь Солнце после превращения в нейтронную звезду: $\rho_p = \frac{M_{\odot}}{4\pi R_{n*}^3/3}$. Разделив первое равенство на второе, получим $1 = (m_p R_{n*}^3 / M_{\odot} r_p^3)$, откуда

$$R_{n*} = r_p \sqrt[3]{\frac{M_{\odot}}{m_p}} = 1.3 \cdot 10^{-15} \sqrt[3]{\frac{1.99 \cdot 10^{30}}{1.67 \cdot 10^{-27}}} = 13.8 \text{ км.} \quad (41.6)$$

■

Попробуем вывести полуэмпирическую формулу для массы $M(Z, A)$ ядра. Главным слагаемым в ней, естественно, должна быть полная масса входящих в ядро нуклонов (мы говорим здесь не о собственно ядрах, а о массах соответствующих нейтральных атомов):

$$\begin{aligned} M(Z, A) &= 1.007825Z + 1.008665(A - Z) + \dots = \\ &= 1.008665A - 0.000840Z + \dots \end{aligned} \quad (41.7)$$

Здесь массы выражены в а.е.м., а точками показаны члены, описывающие дефект массы.

Второе предположение капельной модели ядра использует короткодействие ядерных сил. Предполагается, что в выражение для массы ядра

входит член $M_{NN} \sim A$, описывающий взаимодействие нуклонов и пропорциональный массовому числу A . Это слагаемое должно войти с отрицательным знаком — взаимодействие нуклонов понижает массу ядра, придавая ему стабильность (дефект массы). Если бы ядерные силы были дальнедействующими, то каждый нуклон взаимодействовал бы с каждым, так что это слагаемое в полной массе должно было бы меняться как A^2 . Итак, из капельной модели ядра на данном этапе нашего вывода следует выражение вида:

$$M(Z, A) = 1.008665A - 0.000840Z - a_1A + \dots \quad (41.8)$$

Коэффициент пропорциональности a_1 , равно как и коэффициенты при следующих слагаемых, будут определены впоследствии путем сравнения полученной формулы с экспериментальными данными.

Только что введенная поправка приписывает всем нуклонам одинаковую энергию взаимодействия. Но это заведомо не так: нуклоны на поверхности ядра испытывают притяжение только с одной стороны — внутрь капли. Это явление сродни поверхностному натяжению в капле обычной жидкости. Но поверхностное натяжение пропорционально площади поверхности ядра, т.е. мы должны ввести поправку $M_S \sim r_{\text{я}}^2 \sim A^{2/3}$ в соответствии с формулой (41.5). Это слагаемое должно ослабить действие первой поправки на взаимодействие нуклонов, т.е. оно войдет в выражение для массы с положительным знаком:

$$M(Z, A) = 1.008665A - 0.000840Z - a_1A + a_2A^{2/3} + \dots \quad (41.9)$$

Далее, надо отразить в формуле для массы экспериментальный факт, что для легких ядер числа нейтронов и протонов примерно одинаковы: $Z \approx N = A - Z \approx A/2$. Проще всего получить это слагаемое, если представить себе ядро как ферми-жидкость протонов и нейтронов. Энергия Ферми протонов $\varepsilon_{F,p}$ пропорциональна их плотности в степени $2/3$: $\varepsilon_{F,p} \sim (Z/V)^{2/3}$. Так как объем ядра пропорционален массовому числу A , то $\varepsilon_{F,p} \sim (Z/A)^{2/3}$. Полная же энергия протонов равна $E_p = 3Z\varepsilon_{F,p}/5$, т.е. может быть записана как $E_p = c_1Z^{5/3}/A^{2/3}$. Точно значение коэффициента c_1 нам сейчас не так важно. Совершенно аналогичный вид имеет полная энергия нейтронов, только число протонов Z надо заменить на число нейтронов $A - Z$: $E_n = c_1(A - Z)^{5/3}/A^{2/3}$. Из суммы этих энергий надо вычесть значение суммы при равенстве чисел нейтронов и протонов (т.е. ее значение при $Z = A/2$). Получаем тогда поправку к энергии в

виде:

$$E_F = \frac{c_1}{A^{2/3}} \left[Z^{5/3} + (A - Z)^{5/3} - 2 \left(\frac{A}{2} \right)^{5/3} \right]. \quad (41.10)$$

Введем величину Δ , описывающую отклонение числа протонов от числа нейтронов: $\Delta = (N - Z)/2 = A/2 - Z$. Подставляя $Z = A/2 - \Delta$ в (41.10), получаем:

$$\begin{aligned} E_F &= \frac{c_1}{A^{2/3}} \left[\left(\frac{A}{2} - \Delta \right)^{5/3} + \left(\frac{A}{2} + \Delta \right)^{5/3} - 2 \left(\frac{A}{2} \right)^{5/3} \right] = \\ &= \frac{c_1 A}{2^{5/3}} \left[\left(1 - \frac{2\Delta}{A} \right)^{5/3} + \left(1 + \frac{2\Delta}{A} \right)^{5/3} - 2 \right]. \end{aligned} \quad (41.11)$$

Поскольку Δ невелико, мы разложим выражение в квадратных скобках в ряд Тейлора по степеням Δ . Первые два члена разложения взаимно компенсируются, и мы оставим в разложении только первый исчезающий член, пропорциональный $(\Delta/A)^2$. В результате получим, что $E_F \sim A(\Delta/A)^2 = \Delta^2/A = (A/2 - Z)^2/A$. Такой же вид будет иметь соответствующая поправка к массе, причем она должна войти с положительным знаком, т.к. отклонение Z от $N = A - Z$ уменьшает стабильность ядра, т.е. повышает его массу:

$$\begin{aligned} M(Z, A) &= 1.008665A - 0.000840Z - a_1 A + a_2 A^{2/3} + \\ &+ a_3 \frac{(A/2 - Z)^2}{A} + \dots \end{aligned} \quad (41.12)$$

Помимо слагаемых, учитывающих различные детали ядерного взаимодействия нуклонов, в выражение для массы должен войти также член, описывающий кулоновское отталкивание протонов. Если представить себе ядро как однородно заряженный по объему шар с зарядом Ze и радиусом r_j , то его электростатическая энергия равна

$$E_C = \frac{3}{5} \cdot \frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon_0 r_j} = \frac{3}{5} \cdot \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_p} \cdot \frac{Z^2}{A^{1/3}} = (0.6646 \text{ МэВ}) \cdot \frac{Z^2}{A^{1/3}}. \quad (41.13)$$

Переводя коэффициент из энергетических единиц в а.е.м. ($0.6646/931.5 = 0.000713$), получаем поправку на кулоновское взаимодействие протонов в ядре. Оно расталкивает протоны, т.е. уменьшает стабильность ядра

и приводит к повышению его массы:

$$M(Z, A) = 1.008665A - 0.000840Z - a_1A + a_2A^{2/3} + a_3 \frac{(A/2 - Z)^2}{A} + 0.000713 \frac{Z^2}{A^{1/3}}. \quad (41.14)$$

Коэффициенты a_i в (41.14) определяются при сравнении всего массива экспериментальных данных. Мы же для демонстрации эффективности модели возьмем свойства только нескольких ядер, которые выбраны достаточно случайным образом.

Сначала применим (41.14) для определения связи Z и A в наиболее стабильных ядрах. Для этого надо найти минимум $M(Z, A)$ по переменной Z , т.е. решить уравнение $\partial M(Z, A)/\partial Z = 0$. Итак, дифференцируем $M(Z, A)$:

$$\frac{\partial M(Z, A)}{\partial Z} = -0.000840 - 2a_3 \frac{(A/2 - Z)}{A} + 2 \cdot 0.000713 \frac{Z}{A^{1/3}} = 0. \quad (41.15)$$

Подставим сюда значения Z, A для наиболее распространенного изотопа золота $^{197}_{79}\text{Au}$. Имеем тогда уравнение для определения a_3 :

$$-0.000840 - 0.19797a_3 + 0.01936 = 0, \quad (41.16)$$

откуда следует значение $a_3 = 0.0936$ а.е.м.. Подставляя это значение в (41.15), находим выражение

$$Z = \frac{A}{1.98 + 0.015A^{2/3}}, \quad (41.17)$$

дающее связь между числами протонов и нейтронов в наиболее стабильных ядрах. Для легких ядер, при малых A , действительно получаем $Z \approx A/2$, для тяжелых же ядер число нейтронов начинает превосходить число протонов. Читатель, вооружившись таблицей Менделеева, может поиграть с этой формулой и убедиться, что она достаточно хорошо описывает свойства ядер.

Итак, нам осталось найти два коэффициента в выражении для массы ядер. Снова используем данные по золоту: $M(79, 197) = 196.966543$ а.е.м. Подставляя данные в (41.14), получаем одно уравнение:

$$197a_1 - 33.9a_2 = 2.62. \quad (41.18)$$

Для получения второго уравнения возьмем элемент из начала таблицы Менделеева — литий ^7_3Li : $M(3, 7) = 7.016003$ а.е.м. Снова используем (41.14) и приходим к уравнению:

$$7a_1 - 3.66a_2 = 0.0488. \quad (41.19)$$

Совместное решение уравнений (41.18), (41.19) дает значения $a_1 = 0.0164$, $a_2 = 0.0180$. Таким образом, наша формула для массы ядер приобретает вид:

$$M(Z, A) = 1.008665A - 0.000840Z - 0.0164A + 0.0180A^{2/3} + \\ + 0.0936 \frac{(A/2 - Z)^2}{A} + 0.000713 \frac{Z^2}{A^{1/3}}. \quad (41.20)$$

Вычитая из $M(Z, A)$ массы нуклонов, получаем отсюда выражение для дефекта масс, которое переводится в энергию связи $E_{\text{св}}(Z, A)$ умножением на множитель 931.5 МэВ/а.е.м. Далее легко найти выражение для удельной энергии связи (в единицах МэВ/нуклон):

$$\frac{E_{\text{св}}(Z, A)}{A} = 15.3 - \frac{16.8}{A^{1/3}} - 87.2 \left(\frac{1}{2} - \frac{Z}{A} \right)^2 - 0.665 \frac{Z^2}{A^{4/3}}. \quad (41.21)$$

Именно эта формула, где вместо Z использовано выражение (41.17), была графически показана штрихами на рис. 41.1. Модель жидкой капли настолько хорошо передает общий ход кривой, что теоретические и экспериментальные результаты почти неразличимы на рисунке. Разница проявляется в основном в существовании пиков на экспериментальной кривой, наиболее заметным из которых является пик для ядра ${}^4_2\text{He}$. Для описания этого явления в формулу для массы и энергии связи вводят еще одно слагаемое, которое мы здесь обсуждать не будем.

Оболочечная модель ядра

Кривая удельной энергии связи на рис. 41.1 не идет гладко, а имеет пики, соответствующие наиболее устойчивым ядрам. Первый из них соответствует ядру ${}^4_2\text{He}$. Опыт показывает, что есть и другие наиболее устойчивые ядра, получившие название *магических*. У магических ядер число протонов Z или число нейтронов N равно 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126. К магическим ядрам по числу протонов относятся, скажем, ${}^{58}_{28}\text{Ni}$, ${}^{118}_{50}\text{Sn}$, по числу нейтронов — ${}^{39}_{19}\text{K}$, ${}^{52}_{24}\text{Cr}$. Например, энергия связи нейтрона в ${}^{16}\text{O}$ равна 15.7 МэВ, а в ядре ${}^{17}\text{O}$ — всего лишь 4.1 МэВ. У элементов с магическим числом протонов имеется большее число стабильных и долгоживущих изотопов (например, у олова Sn есть 10 устойчивых изотопов, а у соседей олова по таблице Менделеева их гораздо меньше: у In — 1 и у Sb — 2). Ядра, у которых магическими являются и Z , и N , называются

дважды магическими. В природе существует всего пять дважды магических ядер: гелий (${}^4_2\text{He}$), кислород (${}^{16}_8\text{O}$), два изотопа кальция (${}^{40}_{20}\text{Ca}$ и ${}^{48}_{20}\text{Ca}$) и свинец (${}^{208}_{82}\text{Pb}$).

Появление пиков на кривой удельной энергии связи, существование некоего ряда целых чисел, играющих какую-то роль в свойствах ядер, вызывает в памяти аналогии с атомом.

Эти аналогии и развивает оболочечная модель ядра. Согласно этой модели, каждый нуклон движется в общем ядерном потенциале, создаваемом всеми нуклонами ядра. Этот усредненный потенциал можно аппроксимировать трехмерным осциллятором: $V(r) = -V_0 + m\omega^2 r^2/2$. Уровни энергии определяются как сумма энергий трех независимых одномерных осцилляторов:

$$E = -V_0 + \hbar\omega\left(n + \frac{3}{2}\right), \quad n = n_1 + n_2 + n_3, \quad n_i \geq 0. \quad (41.22)$$

Здесь n_1, n_2, n_3 — квантовые числа колебаний нуклона вдоль одной из трех пространственных осей. Эти числа могут быть различными, но энергия зависит от их суммы n , поэтому возможны разные состояния нуклонов с той же энергией — вырождение уровней, связанное с равноправием координатных осей x, y, z .

Задача 41.58. Определить кратность вырождения уровней энергии трехмерного осциллятора.

Решение. При заданном n возможны различные варианты значений квантовых чисел n_1, n_2, n_3 . Число этих вариантов и есть искомая кратность вырождения K_n .

Первое квантовое число n_1 может принимать любое целое значение от 0 до n . При каком-то из этих значений сумма двух других квантовых чисел равна $n_2 + n_3 = n - n_1$. Ясно, что число возможных вариантов при фиксированных n и n_1 равно числу значений, которые принимает n_2 . Так как оно может меняться от 0 до $n - n_1$, то это число равно $n - n_1 + 1$. Кратность вырождения K_n находим теперь, суммируя по всем возможным значениям n_1 :

$$K_n = \sum_{n_1=0}^n (n - n_1 + 1).$$

Вводя новую переменную суммирования $m = n - n_1 + 1$, получаем

$$K_n = \sum_{m=1}^{n+1} m = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \quad (41.23)$$

Таблица 41.1: Номер последней заполненной оболочки K (первая строка) и общее число $Z(K)$ протонов (нейтронов) на оболочках с номерами $1, 2, \dots, K$ в осцилляторном потенциале (вторая строка) в сравнении с магическими числами Z_{mag} протонов и нейтронов в ядрах (третья строка).

K	1	2	3		4	5	6
$Z(K)$	2	8	20		40	70	112
Z_{mag}	2	8	20	28	50	80	126

Итак, для основного состояния $n = 0$ имеем $K_0 = 1$, то есть оно не вырождено. При $n = 1$ получаем из (41.23) $K_1 = 3$. Первое возбужденное состояние трехкратно вырождено, т.к. данному значению энергии соответствуют следующие тройки квантовых чисел $(n_1 n_2 n_3)$: (100), (010) и (001). Второе возбужденное состояние вырождено шестикратно ($K_2 = 6$), т.к. такую энергию имеют состояния со наборами квантовых чисел $(n_1 n_2 n_3)$: (200), (020), (002), (110), (101), (011). ■

Состояния с данным n называются *оболочками*. Найдем теперь, для каких ядер эти оболочки будут совершенно заполнены. По аналогии с атомом мы можем ожидать, что таким путем мы получим магические числа протонов и нейтронов. На каждом уровне могут помещаться два протона и два нейтрона. Максимальное число протонов (или нейтронов) на данной оболочке равно $2K_n$. Например, первая оболочка ($n = 0$) вмещает 2 протона и 2 нейтрона, и она заполняется для элемента ${}^4_2\text{He}$. На второй оболочке ($n = 1$) помещается еще 6 протонов и 6 нейтронов; обе оболочки заполняются, таким образом, в ядре ${}^{16}_8\text{O}$.

Выведем теперь общую формулу. Число протонов (или нейтронов) $Z(K)$, помещающихся на первых K оболочках, дается тогда выражением $Z(K) = \sum_{n=0}^{K-1} 2K_n = \sum_{n=0}^{K-1} (n^2 + 3n + 2)$. Используя известные результаты:

$$\sum_{n=0}^{K-1} n^0 = K, \quad \sum_{n=0}^{K-1} n = \frac{(K-1)K}{2}, \quad \sum_{n=0}^{K-1} n^2 = \frac{(K-1)K(2K-1)}{6},$$

находим:

$$Z(K) = \frac{K(K+1)(K+2)}{3}. \quad (41.24)$$

В таблице 41.1 приведены результаты расчета $Z(K)$ по формуле (41.24) в сравнении с магическими значениями, взятыми из эксперимента.

Видно, что первые три магических числа воспроизведены такой простой моделью, но уже четвертое (28) пропущено, а в последующих наблюдаются сильные расхождения с экспериментом. Учет энергии взаимодействия спина нуклона с его орбитальным моментом импульса усложняет модель, но позволяет объяснить весь ряд магических чисел. Модель оболочек объясняет также спины основных и слабовозбужденных состояний ядер. За развитие оболочечной модели Мария Гепперт-Майер и Г. Иенсен получили Нобелевскую премию (1963).

Мы коснулись лишь двух моделей ядра, исторически бывших самыми первыми созданиями физиков-теоретиков. Дальнейшее развитие науки вызвало к жизни более сложные теории ядер, на которых мы не будем останавливаться.

41.5 Радиоактивность

Самопроизвольное превращение одних атомных ядер в другие, которое сопровождается испусканием элементарных частиц, называется радиоактивностью. Естественная радиоактивность, наблюдаемая у существующих в природе ядер, была открыта в 1896 г. французским ученым А. Беккерелем. Среди процессов радиоактивных превращений различают:

1. α -распад,
2. β -распад (включающий захват электронов),
3. γ -излучение ядер,
4. спонтанное деление тяжелых ядер,
5. протонную радиоактивность.

Физические механизмы этих распадов различны, но общим является то, что радиоактивное ядро не может жить вечно, и число радиоактивных ядер со временем уменьшается.

Закон радиоактивного превращения

Закон радиоактивного превращения определяет количество нераспавшихся атомов в любой момент времени. Пусть в момент t имеется N радиоактивных ядер. Учитывая, что ядра претерпевают превращения независимо друг от друга, можно считать, что количество dN распадающихся

за интервал dt ядер пропорционально их общему числу и интервалу времени, т.е.

$$dN = -\lambda N dt. \quad (41.25)$$

Знак минус свидетельствует об уменьшении числа ядер вследствие происходящего их распада. Коэффициент пропорциональности λ называется *постоянной радиоактивного распада*. Интегрирование дифференциального уравнения (41.25) дает:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (41.26)$$

где N_0 — количество ядер в начальный момент времени, т.е. $N_0 = N(0)$, а $N(t)$ — число нераспавшихся ядер в момент времени t .

Физический смысл постоянной распада λ становится ясным из следующих рассуждений. В начальный момент времени имеется N_0 ядер, к моменту времени t их число равно $N(t)$. В интервале $(t, t + dt)$ распавется $-dN$ ядер. Поэтому отношение $-dN/N_0$ есть вероятность того, что ядро “доживет” до момента t , но не переживет момента $t + dt$. Иными словами, это вероятность того, что ядро “умрет” в возрасте t . Умножая вероятность на возраст и интегрируя по всем возможным временам, получаем отсюда среднее время жизни ядра:

$$\tau = -\frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t dN = \frac{\lambda}{N_0} \int_0^{\infty} t N(t) dt = \lambda \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}. \quad (41.27)$$

Периодом полураспада $T_{1/2}$ называется время, в течение которого распадается половина первоначального количества ядер. Для определения $T_{1/2}$ имеем из (41.26) уравнение

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}, \quad (41.28)$$

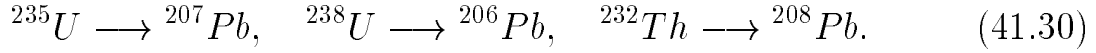
откуда

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda} = 0.693\tau. \quad (41.29)$$

Период полураспада лишь численным множителем отличается от среднего времени жизни ядра.

В природе часто случается, что возникающие в результате радиоактивного превращения ядра в свою очередь оказываются радиоактивными. В результате возникает целый ряд радиоактивных превращений.

В природе существуют три радиоактивных семейства, родоначальниками которых являются изотопы урана или тория, а конечными продуктами — изотопы свинца:



Задача 41.59. В замкнутый объем помещено N_0 атомов радиоактивного элемента, постоянная распада ядер которого равна λ_1 . Ядра элемента, образующегося в результате распада, также радиоактивны, их постоянная распада равна λ_2 . Определить, как с течением времени изменяется число “дочерних” ядер. Рассмотреть предельные случаи $\lambda_1 \gg \lambda_2$ и $\lambda_1 \ll \lambda_2$.

Решение. За время dt число N_2 ядер нового элемента (“дочерних” ядер) изменяется 1) за счет появления новых ядер в результате распада исходных (“материнских”) и 2) за счет убыли собственных в результате их распада:

$$dN_2 = \lambda_1 N_1 dt - \lambda_2 N_2 dt, \quad (41.31)$$

где N_1 — число “материнских” ядер, а N_2 — число “дочерних” в тот же момент времени t . Согласно закону радиоактивного распада $N_1 = N_0 \exp(-\lambda_1 t)$, так что

$$\frac{dN_2}{dt} + \lambda_2 N_2 = \lambda_1 N_0 e^{-\lambda_1 t}. \quad (41.32)$$

Решение неоднородного дифференциального уравнения можно представить в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного. Последнее ищем в виде $Ae^{-\lambda_1 t}$. Подставляя это выражение в (41.32), получаем соотношение

$$-\lambda_1 A + \lambda_2 A = \lambda_1 N_0, \quad (41.33)$$

откуда

$$A = N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}. \quad (41.34)$$

Общее решение однородного уравнения $\dot{N}_2 + \lambda_2 N_2 = 0$ уже хорошо нам известно: $Be^{-\lambda_2 t}$. Таким образом,

$$N_2(t) = Be^{-\lambda_2 t} + N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t}. \quad (41.35)$$

Постоянная B в этом соотношении определяется из начального условия отсутствия “дочерних” ядер в момент времени $t = 0$: соотношение $N_2(0) = 0$ дает $B = -N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$. Окончательно получаем:

$$N_2(t) = N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}). \quad (41.36)$$

В начальный момент и по прошествии достаточно большого времени число “дочерних” ядер равно нулю. В момент t_{\max} выражение (41.36) достигает своего максимального значения. Величину t_{\max} можно определить, приравняв нулю производную dN_2/dt :

$$t_{\max} = \frac{\ln \lambda_2 - \ln \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}. \quad (41.37)$$

Подставляя (41.37) в (41.36), находим максимальное значение N_2 :

$$N_{2,\max} = N_0 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}} \quad (41.38)$$

Общий характер временной зависимости $N_2(t)$ показан на рис. 41.2,а) для случая, когда постоянные распада “материнских” и “дочерних” ядер близки. На практике при разумных временах наблюдения показанный пик может быть очень размыт и в сущности не наблюдаем. Рассмотрим частные случаи.

Если $\lambda_1 \ll \lambda_2$, то “материнские” ядра распадаются гораздо медленнее “дочерних”, и число последних быстро достигает своего максимального значения. Из (41.38) при $\lambda_2 \rightarrow \infty$ следует, что в начальный момент времени это максимальное значение равно $N_{2,\max} \approx N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$. Но такое быстрое “подстраивание” числа “дочерних” ядер под число “материнских” происходит в каждый момент времени, так что закон изменения их числа должен иметь вид $N_2(t) \approx N_1(t) \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} e^{-\lambda_1 t}$. Этот же результат прямо следует из (41.37) при $\lambda_2 \rightarrow \infty$. Обращает внимание, что число “дочерних” ядер уменьшается со временем с постоянной распада “материнских” ядер.

Примером может служить радиоактивный распад радия $^{226}_{88}\text{Ra}$ с постоянной распада $\lambda_1 = 1.354 \cdot 10^{-11} \text{ с}^{-1}$ (период полураспада $T_{1/2}^{(1)} = \ln 2 / \lambda_1 = 1622$ года), продуктом которого является радон $^{222}_{86}\text{Rn}$ с постоянной распада $\lambda_2 = 2.097 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$ (период полураспада $T_{1/2}^{(2)} = 3.83$ суток). Если радий поместить в закрытый сосуд, то уже через месяц содержание радона

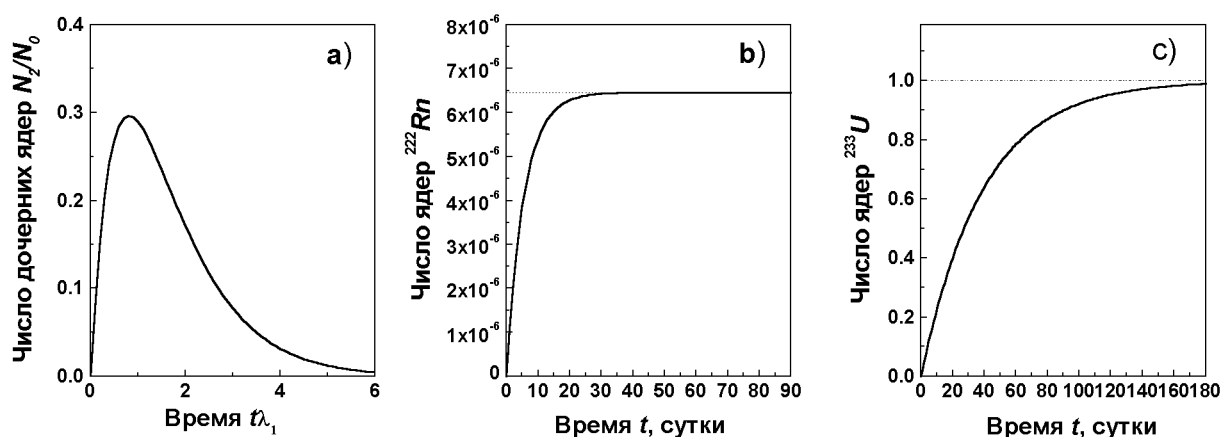


Рис. 41.2: К задаче 41.59.. а) Кривая соответствует близким значениям периода полураспада “материнских” и “дочерних” ядер: $\lambda_2/\lambda_1 = 1.5$, время показано в единицах среднего времени жизни “материнских” ядер ($t\lambda_1$). При таких заданных условиях отчетливо виден пик в зависимости $N_2(t)$. б) Относительное число ядер изотопа радона ^{222}Rn , возникающих при радиоактивном распаде радия ^{226}Ra . Так как радий живет гораздо дольше радона, устанавливается равновесная концентрация радона $N_2 \sim 6 \cdot 10^{-6} N_0$ (показана пунктиром). По прошествии огромного промежутка времени равновесная концентрация радона будет уменьшаться, причем характерное время задано периодом полураспада ядер радия — около 1600 лет. в) Относительное число ядер изотопа урана ^{233}U , возникающих при радиоактивном распаде протактиния ^{233}Pa . Поскольку время жизни урана намного больше времени жизни ядер протактиния, последние достаточно быстро исчезают, и относительная концентрация ядер урана становится близкой к единице. Затем ядра урана распадаются со своей постоянной распада (уменьшение их числа на графике не видно из-за огромного периода полураспада — порядка 160 тыс. лет).

в нем будет лишь на 0.4% меньше равновесного. Само же равновесное значение, как видно из соотношения $N_2/N_0 = \lambda_1/\lambda_2$, составляет лишь около шести миллионных исходного числа атомов радия. Достигнутое значение концентрации радона будет сохраняться неизменным столетиями, в соответствии с периодом полураспада “материнских” ядер (около 1600 лет) Этот случай показан на рис. 41.2,б). Только на интервалах порядка нескольких тысячелетий станет заметным уменьшение числа атомов радона, хотя период полураспада ядер радона составляет менее 4 суток.

Достаточно часто при распаде “материнских” ядер возникает цепочка “дочерних” радиоактивных продуктов, а не лишь один тип ядер. Обычно они все распадаются гораздо быстрее “материнских” ядер. В этом случае полученное нами соотношение для числа “материнских” и равновесного

числа “дочерних” ядер обобщается очевидным образом:

$$\begin{aligned}\lambda_1 N_1 &= \lambda_2 N_2 = \lambda_3 N_3 = \dots = \lambda_k N_k, \\ \lambda_1 &\ll \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k.\end{aligned}\quad (41.39)$$

В обратном случае $\lambda_1 \gg \lambda_2$ “материнские” ядра распадаются гораздо быстрее “дочерних”, так что уже через несколько средних времен жизни “материнских” ядер они почти исчезают, а число “дочерних” ядер становится почти равным начальному числу “материнских”: $N_2 \approx N_0$. Далее “дочерние” ядра распадаются по обычному закону со своей собственной постоянной распада λ_2 : $N_2 = N_0 \exp(-\lambda_2 t)$.

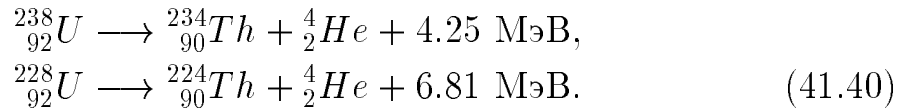
Примером может служить распад протактиния ${}_{91}^{233}\text{Pa}$ ($T_{1/2}^{(1)} = 27$ суток, $\lambda_1 = 2.97 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-1}$), в результате которого образуется изотоп урана ${}_{92}^{233}\text{U}$ ($T_{1/2}^{(2)} = 1.592 \cdot 10^5$ лет, $\lambda_2 = 1.38 \cdot 10^{-13} \text{ с}^{-1}$). Этому случаю соответствует кривая на рис. 41.2,с). В отличие от предыдущего случая, равновесная концентрация “дочерних” ядер близка к единице, а ее уменьшение происходит в соответствии с периодом полураспада “дочерних” ядер (урана в нашем примере). ■

Альфа-распад

Альфа-распад протекает по следующей схеме: ${}_Z^AX \longrightarrow {}_{Z-2}^{A-4}Y + {}_2^4\text{He}$, где альфа-излучение представляет поток ядер гелия ${}_2^4\text{He}$. “Дочернее” ядро ${}_{Z-2}^{A-4}Y$ обычно оказывается радиоактивным (возбужденным) и излучает γ -лучи. Ядра гелия ${}_2^4\text{He}$ (α -частицы в исторически сложившейся терминологии, возникшей еще до выяснения природы различных типов излучения) вылетают из “материнского” ядра ${}_Z^AX$ с большими скоростями порядка 10^7 м/с (т.е. $0.1c$), а их кинетическая энергия составляет от 4 до 10 МэВ. Кинетическая энергия α -частиц возникает за счет дефекта масс “материнского” ядра по отношению к “дочернему” ядру и α -частице, и потому энергия альфа-частиц при распаде любых ядер данного изотопа всегда одна и та же. Эта избыточная энергия распределяется между α -частицей и “дочерним” ядром в отношении, обратно пропорциональном их массам, в соответствии с классическим законом сохранения импульса (т.е. $E_\alpha : E_Y = m_Y : m_\alpha$). Если, как это обычно бывает, масса “дочернего” ядра намного превосходит массу α -частицы, то почти вся выделяемая энергия будет унесена в виде кинетической энергии α -частицы.

Двигаясь в веществе, α -частицы испытывают неупругие соударения, постепенно теряют свою энергию (затрачивая ее на ионизацию моле-

кул вещества) и останавливаются. Пробег α -частиц до остановки существенно зависит от плотности вещества. Например, в воздухе при нормальных условиях пробег имеет величину порядка десятка микрометров (другими словами, обычный лист бумаги полностью экранирует α -излучение). Примером альфа-распада могут служить распад природного урана с образованием тория и аналогичный распад радиоактивного изотопа урана:



Мы выбрали эти распады в качестве примера для дальнейшего обсуждения, поскольку, несмотря на похожесть, они резко отличаются скоростями протекания реакции.

Задача 41.60. На примере распада природного урана оценить энергию кулоновского взаимодействия между α -частицей и “дочерним” ядром в момент ее вылета из “материнского” ядра.

Решение. Радиус “материнского” ядра ${}_Z^AX$ равен $r_X = r_p A^{1/3}$. Именно на таком расстоянии находится α -частица в момент вылета. Заряд “дочернего” ядра равен $q_d = (Z - 2)e$, заряд α -частицы есть $q_\alpha = 2e$, т.е. энергия кулоновского отталкивания равна

$$E_C = \frac{e^2 2(Z - 2)}{4\pi\epsilon_0 r_p A^{1/3}} = E_p \frac{2(Z - 2)}{A^{1/3}}.$$

Входящий сюда множитель E_p одинаков для всех ядер:

$$E_p = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_p} = 1.108 \text{ МэВ}. \quad (41.41)$$

Теперь наша формула для энергии кулоновского взаимодействия может быть записана в виде:

$$E_C = 1.108 \text{ МэВ} \frac{2(Z - 2)}{A^{1/3}}. \quad (41.42)$$

Подставляя в (41.42) значения $A = 238$, $Z = 92$ для урана, получаем:

$$E_C \approx 1.108 \frac{2 \times 90}{238^{1/3}} \approx 32.2 \text{ МэВ}. \quad (41.43)$$

Близкий результат $E_C = 32.6 \text{ МэВ}$ получается и для ядра ${}^{228}\text{U}$. ■

Элементы теории альфа-распада

Исходя из полученной оценки, мы можем представить себе потенциал взаимодействия α частицы с ядром в следующем виде. На расстояниях $r \leq r_X$ α -частица притягивается к ядру огромными, но короткодействующими ядерными силами. Мы описываем это взаимодействие простейшим потенциалом прямоугольной формы, учитывающим общее влияние все нуклонов ядра. Внутри этой потенциальной ямы α -частица движется свободно. Со стороны протонов на заряженную альфа-частицу действуют также силы кулоновского отталкивания. Эти силы значительно слабее ядерных, но убывают с расстоянием очень медленно (дальнодействующие силы). На расстояниях же $r \geq r_X$ ядерные силы уже перестают действовать, и α -частица отталкивается от ядра кулоновскими силами. Таким образом, потенциал имеет вид (рис. 41.3):

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r < r_\alpha, \\ E_C \frac{r_\alpha}{r}, & r > r_\alpha. \end{cases} \quad (41.44)$$

Поскольку α -частица вылетает из ядра с энергией $E_\alpha = 4.2$ МэВ, такова ее энергия на основном уровне в ядерной части потенциала. Как же она смогла преодолеть высокий кулоновский барьер и вылететь наружу? Здесь проявился изученный нами ранее квантовомеханический туннельный эффект.

Туннельный механизм альфа-распада позволяет оценить время жизни материнского ядра. Пусть альфа-частица совершает внутри ядра колебательное движение со скоростью v_{in} . Время между двумя последовательными столкновениями альфа-частицы с барьером равно $\Delta t = 2r_\alpha/v_{in}$. Пусть коэффициент прозрачности барьера равен D . Эта величина дает вероятность прохождения через барьер. За время τ альфа-частица ударится о барьер $\tau/\Delta t$ раз, так что вероятность вылететь наружу за время τ составит $D\tau/\Delta t$. Приравнивая эту вероятность единице, получаем время жизни радиоактивного ядра:

$$\tau = \frac{\Delta t}{D} = \frac{2r_\alpha}{v_{in}D}. \quad (41.45)$$

В соответствии с результатом (30.35) можно вычислить коэффициент прозрачности кулоновского барьера. Подставляя в это выражение куло-

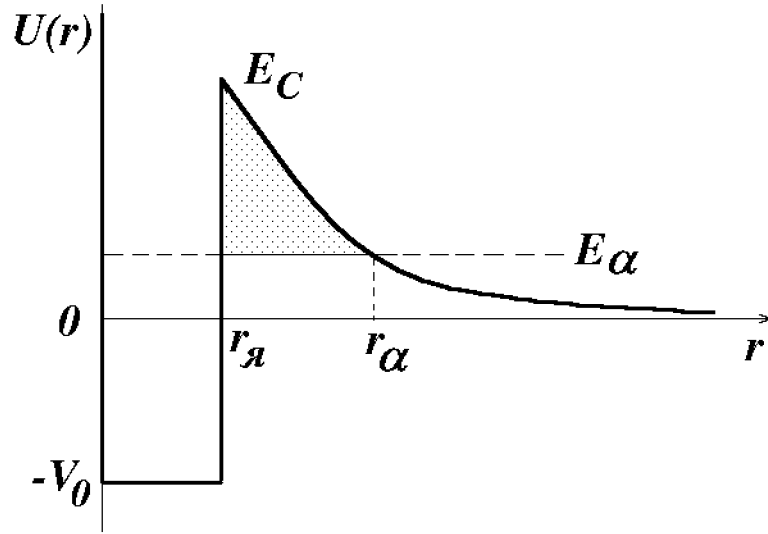


Рис. 41.3: Туннелирование α -частицы при распаде. Штриховкой показана область под барьером, недоступная частице с точки зрения классической физики. При том же потенциале, но большей энергии α -частицы (как в распадах ^{238}U и ^{238}U) высота и ширина барьера уменьшаются, что делает туннелирование гораздо более вероятным.

новскую часть потенциала (41.44), получаем:

$$D = \exp \left[-\frac{2}{\hbar c} \sqrt{2E_0} \int_{r_\alpha}^{r_\alpha} dr \sqrt{E_C \frac{r_\alpha}{r} - E_\alpha} \right], \quad (41.46)$$

где $E_0 = m_\alpha c^2 = 3728$ МэВ — энергия покоя α -частицы, а $r_\alpha = r_\alpha(E_C/E_\alpha)$ — расстояние, при котором энергия α -частицы равна энергии кулоновского отталкивания (см. рис. 41.3). Выполняя в интеграле замену переменных $r = x^2 r_\alpha E_C/E_\alpha$, переписываем (41.46) в виде:

$$\begin{aligned} D &= \exp \left\{ -\frac{4}{\hbar c} r_\alpha E_C \sqrt{\frac{2E_0}{E_\alpha}} \int_{\sqrt{E_\alpha/E_C}}^1 dx \sqrt{1-x^2} \right\} = \\ &= \exp \left[-\frac{2}{\hbar c} r_\alpha E_C \sqrt{\frac{2E_0}{E_\alpha}} \left(\arccos \sqrt{\frac{E_\alpha}{E_C}} - \sqrt{\frac{E_\alpha}{E_C}} \sqrt{1 - \frac{E_\alpha}{E_C}} \right) \right] \end{aligned} \quad (41.47)$$

Применим это выражение сначала для α -распада ^{238}U . Подставим в (41.47) численные значения: $r_\alpha E_C = 2(Z-2)r_p E_p = 180 \times 1.3 \times 1.108 = 259.27$ МэВ · фм, $\hbar c = 197.327$ МэВ · фм, $E_0 = 3728$ МэВ, $E_\alpha = 4.25$ МэВ и вычисленное выше значение $E_C = 32.2$ МэВ. В результате получим $D_1 = \exp(-94.71) = 7.4 \cdot 10^{-41}$. Для распада ^{228}U меняются только зна-

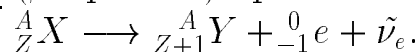
чения $E_\alpha = 6.81$ МэВ и $E_C = 32.6$ МэВ, и прозрачность барьера резко увеличивается: $D_2 = \exp(-59.96) = 9.1 \cdot 10^{-27}$.

Таким образом, для двух рассмотренных распадов (41.40) отношение соответствующих коэффициентов прозрачности D_1 для ^{238}U и D_2 для ^{228}U огромно: $D_2/D_1 = 1.2 \cdot 10^{14}$. Обращает внимание чрезвычайная чувствительность коэффициента прозрачности к высоте и ширине барьера: повышение энергии альфа-частицы (при почти одинаковых потенциалах) всего в полтора раза, от 4.25 МэВ до 6.81 МэВ, и вызванное этим уменьшение барьера приводит к увеличению коэффициента прозрачности на 14 порядков! Соответственно, второй распад будет происходить гораздо быстрее первого. Поскольку расхождение в остальных параметрах (скорость альфа-частиц, радиусы ядер) для этих ядер не столь велико, отношение времен жизни данных изотопов $\tau_1/\tau_2 \approx D_2/D_1 = 1.2 \cdot 10^{14}$. Эксперимент дает следующие значения периодов полураспада: $T_{1/2}^{(1)} = 4.9 \cdot 10^9$ лет $= 1.55 \cdot 10^{17}$ с, $T_{1/2}^{(2)} = 9.1$ мин $= 546$ с, откуда следует отношение $T_{1/2}^{(1)}/T_{1/2}^{(2)} = 3 \cdot 10^{14}$. Это совпадает по порядку величины с данной нами оценкой, что указывает на правильность объяснения альфа-распада в рамках механизма квантового туннелирования. Становятся понятными главные особенности альфа-распада: 1) постоянство энергии α -частиц при распаде ядер данного типа, 2) малый разброс энергий при сравнении распадов разных ядер и 3) широкий разброс периодов полураспада для различных ядер.

Бета-распад

Бета-распад ядер связан с испусканием ядром электрона (или его античастицы с положительным зарядом — позитрона). К этому же типу процессов относится электронный захват, когда ядро поглощает один из электронов атома (в основном, с K -оболочки).

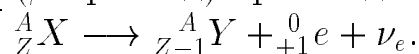
Электронный распад (β^- -распад) происходит по схеме:



Здесь для электрона (массовое число 0, зарядовое число -1) использованы “ядерные” символы. Для антинейтрино и массовое, и зарядовые числа равны нулю. Процесс протекает так, как если бы один из нейтронов “материнского” ядра ${}_Z^AX$ превратился бы в протон с испусканием антинейтрино ($n \longrightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_e$). При этом “дочернее” ядро возникает не только в нормальном, но и в возбужденном состоянии. Затем образовавшееся ядро переходит в состояние с меньшей энергией, и “высвечивается” фо-

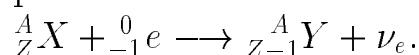
тон, т.е. бета-распад может сопровождаться γ -излучением. Примером β^- -распада может служить превращение изотопа углерода (т.н. *радиоуглерода*) в азот: ${}^{14}_6\text{C} \longrightarrow {}^{14}_7\text{N} + {}^0_{-1}e + \tilde{\nu}_e$.

Позитронный распад (β^+ -распад) происходит по схеме:



Процесс выглядит как распад протона ($p \longrightarrow n + e^+ + \nu_e$). Эта реакция получается из распада нейтрона применением двух правил: 1) если возможен некий процесс, то возможен и обратный, т.е. можно обратить стрелку в реакции, и 2) при переносе частицы из одной части уравнения в другую надо сменить все ее “заряды”, т.е. заменить частицу на античастицу. При таком переносе электрон у нас заменился на позитрон, а антинейтрино — на нейтрино. Заметим, что в свободном состоянии протон распадаться не может, т.к. его масса меньше массы нейтрона. Однако в ядре важен баланс масс “материнского” и “дочернего” ядер, и подобные процессы возможны за счет изменения энергии связи нуклонов. В качестве примера укажем превращение меди в никель: ${}^{64}_{29}\text{Cu} \longrightarrow {}^{64}_{28}\text{Ni} + {}^0_{+1}e + \nu_e$.

Электронный захват, третий тип β -распада, происходит при поглощении ядром одного из электрона K -оболочки, в результате чего один из протонов превращается в нейтрон с испусканием нейтрино: $p + e^- \longrightarrow n + \nu_e$. Эта реакция получается из распада (связанного в ядре) протона перенесением в левую часть позитрона с заменой его на электрон. На уровне ядра схема электронного захвата записывается в виде:



В электронной K -оболочке “материнского” атома образуется вакантное место, которое заполняется электроном из вышележащих энергетических состояний, в результате чего возникает каскад рентгеновского излучения. Например, электронный захват происходит при превращении калия в аргон: ${}^{40}_{19}\text{K} + {}^0_{-1}e \longrightarrow {}^{40}_{18}\text{Ar} + \nu_e$.

Может показаться удивительным, что ядра испускают электроны и нейтрино, а мы все время утверждали, что они состоят из нуклонов. Однако вспомним, что атомы испускают фотоны, и фотоны не содержатся в атомах, но порождаются при переходе электрона с вышележащего уровня на нижний. Электроны и нейтрино не содержатся в ядрах, но порождаются при превращениях протонов в нейтроны и обратно.

Как и при альфа-распаде, в рассмотренных процессах выделяется строго определенное количество энергии Q_f , определяемое дефектом массы “материнского” и “дочернего” ядер. Однако при бета-распаде эта энер-

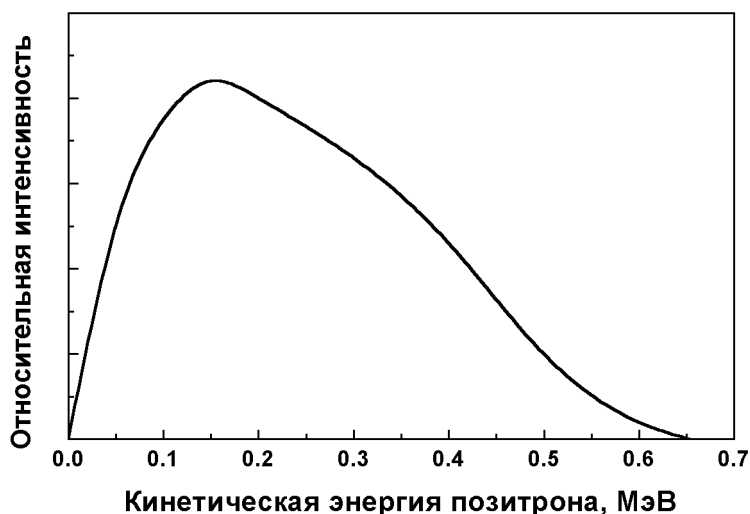


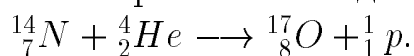
Рис. 41.4: Распределение энергий позитронов, испускаемых при распаде ${}^{64}_{29}\text{Cu} \rightarrow {}^{64}_{28}\text{Ni} + {}^0_{+1}e + \nu_e$. Предельное значение энергии позитрона $Q_f = 0.653$ МэВ. Видно, что чаще всего будут наблюдаться позитроны с энергией $E_e \sim 0.15$ МэВ, и в этих случаях на долю нейтрино приходится энергия $E_{\nu_e} \sim 0.5$ МэВ.

гия делится между позитроном (электроном) и (анти)нейтрино. Иногда почти всю энергию уносит электрон, иногда — нейтрино. Вероятность того или иного распределения энергии определяется законами данного типа взаимодействий (их называют *слабыми*). Поэтому при измерении энергетического спектра электронов (позитронов) получается не строго фиксированная энергия, но равномерное распределение в диапазоне от нуля (вся энергия уносится нейтрино) до порогового значения Q_f (вся выделенная энергия приходится на электрон). Примерный вид энергетического спектра электронов показан на рис. 41.4. В свое время подобные экспериментальные результаты вызвали замешательство физиков, поскольку указывали на нарушение закона сохранения энергии. В 1930 г. швейцарский физик В. Паули предположил, что недостающая часть энергии уносится невидимой нейтральной частицей — нейтрино (название придумано Э. Ферми — уменьшительное от “нейтрон”). Прямое наблюдение потока нейтрино от атомного реактора было осуществлено в 1953 г. Ф. Райнесом и К. Коуэном в США. Это открытие принесло Райнесу в 1995 г. Нобелевскую премию (Коуэн к этому времени уже скончался, а эти премии посмертно не присуждаются).

Ядерные реакции и определение возраста археологических образцов радиоуглеродным методом

Различные процессы сильного взаимодействия атомных ядер с элементарными частицами или с другими ядрами носят название ядерных реакций. Ядерные превращения возникают при сближении взаимодействующих частиц до малых расстояний порядка 10^{-15} м благодаря действию ядерных сил. Неудачи древних алхимиков по превращению элементов связаны с тем, что они пытались использовать химические реакции, для которых характерны энергии порядка нескольких электронвольт, в то время как энергии в ядерных процессах в миллион раз больше. В настоящее время с помощью современных ускорителей удается даже получать новые трансурановые элементы, отсутствующие в естественном состоянии. В нашей стране подобными работами прославлен Объединенный институт ядерных исследований в Дубне, и признание международного научного сообщества выразилось в присвоении имени “дубний” 105-му элементу ${}_{105}^{262}Db$.

Наиболее распространены ядерные реакции, когда легкая частица a сталкивается с ядром X , в результате чего образуется новое ядро Y и легкая частица b : $X + a \longrightarrow Y + b$. Уравнение таких реакций принято также записывать в сокращенном виде $X(a, b)Y$, где в скобках указываются сначала исходная легкая частица, а потом — конечная. Впервые ядерная реакция была осуществлена в 1919 г. Э. Резерфордом. При облучении азота α -частицами некоторые ядра азота превращались в ядра кислорода, испуская при этом протон. Уравнение этой реакции имеет вид ${}_{7}^{14}N(\alpha, p){}_{8}^{17}O$, или, в более привычном виде:



На самом деле, мы уже неоднократно выписывали уравнения различных реакций, и настало время подчеркнуть то, что читатель, быть может, уже и сам заметил: суммы верхних (нижних) индексов справа и слева от стрелки совпадают. Суммы верхних индексов дают число нуклонов, которое сохраняется в реакции. Равенство сумм нижних индексов означает закон сохранения электрического заряда.

Особый интерес представляет ядерная реакция ${}_{7}^{14}N(n, p){}_{6}^{14}C$, которая происходит в атмосфере под действием нейтронов, образуемых космическим излучением. При этом возникает так называемый радиоуглерод ${}_{6}^{14}C$, бета-радиоактивный изотоп с периодом полураспада $T_{1/2} = 5730 \pm 40$ лет (распад идет по схеме ${}_{6}^{14}C \longrightarrow {}_{7}^{14}N + {}_{-1}^{0}e + \tilde{\nu}_e$, максимальная энергия

электронов $Q_f = 0.156$ МэВ). По химическим свойствам радиоуглерод ничем не отличается от обычного углерода, который представляет собой смесь стабильных изотопов ^{12}C (98.9%) и ^{13}C (1.1%). В процессе обмена веществ (фотосинтеза) живые организмы усваивают из воздуха углекислоту CO_2 , часть молекул которой оказывается, таким образом, радиоактивной. Поскольку средняя интенсивность космического излучения в атмосфере мало меняется со временем и географическим положением на Земле, то и процентное содержание радиоуглерода в живом растении также является *почти* неизменным, не зависящим от исторической эпохи. Исследования показывают, что равновесная концентрация радиоуглерода $^{14}_6\text{C}$ такова, что происходит приблизительно $A_0 = 14$ распадов в минуту на каждый грамм естественного углерода.

Задача 41.61. По приведенным данным оценить величину равновесной примеси радиоуглерода в обычном углероде.

Решение. Пусть искомая величина примеси равна η . Тогда в одном грамме обычного углерода содержится η граммов радиоуглерода ^{14}C . Исходя из массового числа 14, заключаем, что 14 г радиоуглерода образуют один моль. Значит, в η граммах радиоуглерода содержится $N = \eta/14 N_a$ атомов. Скорость распада дается выражением $dN/dt = \lambda N$, где постоянная распада $\lambda = \ln 2/T_{1/2} = 3.83 \cdot 10^{-12}$ с. Зная $dN/dt = 14/60 = 0.233$ с $^{-1}$, находим: $\eta = (14/N_a \cdot \lambda)(dN/dt) = 1.4 \cdot 10^{-12}$, т.е. около $10^{-10}\%$. ■

Пока организм живет, его участие в круговороте веществ в природе восполняет убыль радиоуглерода вследствие его распада. В момент смерти организма процесс усвоения прекращается и число атомов радиоуглерода в углероде начинает убывать по закону радиоактивного распада:

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t} = N(0) 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}.$$

По такому же закону меняется активность $A(t)$ радиоуглерода (число распадов в единицу времени), поскольку $A = dN/dt$ пропорциональна числу атомов N . Следовательно, измерив активность радиоуглерода в останках организмов (в древесине, костях и т.п.), можно определить дату их смерти:

$$t = T_{1/2} \frac{\ln[A(0)/A(t)]}{\ln 2}. \quad (41.48)$$

Здесь $A(0)$ — равновесная активность (те самые 14 распадов в минуту).

В принципе, все кажется простым и прозрачным: откапываешь в земле древнюю крепость, сжигаешь кусочек бревна из стены, измеряешь активность образца, и вычисляешь время строительства укрепления. Получили, например, $A(t) = 13.5$ распада в минуту, подставили в формулу (41.48), и нашли возраст крепости: $t = 5730 \frac{\ln(14/13.5)}{\ln 2} = 300$ лет. Радиоуглеродный метод геохронологии был разработан в 1946 г. американцем У. Ф. Либби (Нобелевская премия в 1960 г.). Метод радиоуглеродных часов прошел проверку и считается одним из самых надежных методов датировки ископаемых органического происхождения.

Однако, как и любой научный метод, он имеет свои границы применимости. Несоблюдение “правил игры” приводило иногда к странным результатам: иные живущие организмы, если судить по результатам измерений, должны были давным-давно помереть, а иные ископаемые останки вообще как-будто еще не родились на свет. Имеют место спекуляции на подобных случаях, имеющих целью посеять недоверие к радиоуглеродному методу и изменить традиционные датировки исторических событий. Поэтому мы кратко обсудим условия, при которых метод дает достоверные результаты.

Во-первых, надо обеспечить необходимую точность измерений. Предположим, что при исследовании образца деревянной крепостной стены в задаче 41.61. мы ошиблись в измерениях всего на 1%, т.е. вместо полученных 13.5 распадов в минуту активность образца на самом деле составляла 13.6 распадов в минуту. Значит, истинный возраст крепости будет равен $t = 5730 \frac{\ln(14/13.6)}{\ln 2} = 240$ лет. Ошибка в датировке составила уже 20%.

С погрешностями текущих измерений, как известно, можно бороться путем набора статистики. Оценим, сколько случаев n распада надо зафиксировать, чтобы активность образца была измерена, скажем, с точностью 0.5%? Случайный разброс результатов измерения имеет порядок \sqrt{n} . Относительная точность измерения равна, значит, $\sqrt{n}/n \sim 0.005$. Отсюда следует, что надо зафиксировать $n \sim 40000$ распадов. При массе образца в 1 г на это потребуется $40000/13.5 \approx 3000$ мин ≈ 50 часов. Увеличение же массы образца не всегда возможно. Применение в последние годы масс-спектрометров вместо счетчика распадов позволяет работать с микроскопическими образцами и получать статистически достоверные результаты.

Но ошибка может случиться не только в текущих измерениях нынеш-

ней активности образца, с чем можно бороться, но и в определении его начальной, равновесной активности $A(0)$. Мы написали, что $A(0)$ “почти” не зависит от времени и местоположения, и в приведенных расчетах отождествили $A(0)$ с нынешним значением равновесной активности радиоуглерода (A_0). Но это “почти” весьма ядовито, поскольку колебания равновесной концентрации радиоуглерода могут достигать нескольких процентов. Мы уже знаем, что отклонение в активности образца на 1% приводит к ошибке в датировке на 20%. А что получится, если по каким-то причинам равновесная концентрация радиоуглерода во время и в месте строительства древней крепости задачи 41.61. отличалась от нынешней на 3% и составляла $A(0) = 14.44$ распадов в минуту? Мы этого не знали, использовали вместо $A(0)$ величину A_0 , и определили возраст крепости в 300 лет. На самом деле же он равен $t = 5730 \frac{\ln(14.44/13.5)}{\ln 2} = 556$ лет. Отклонение начальной концентрации $A(0)$ радиоуглерода от современной равновесной $A_0 = 14$ распадов/мин всего на три процента привело к ошибке в датировке почти в два раза! В результате мы приписали Петру I то, что было построено еще при татарском иге.

Ясно, что перед применением радиоуглеродного метода необходимо заняться *калибровкой* — установить начальные концентрации радиоуглерода для различных годов. И эта принципиальная проблема оказалась разрешимой. Дело в том, что информация о начальной концентрации радиоуглерода накапливается в годичных кольцах деревьев. Все годичные кольца, кроме внешнего, в обмене уже не участвуют: они “омертвели”, сохранив информацию о концентрации радиоуглерода в тот год, когда они создавались. Попавший в кольцо радиоуглерод распадается далее по закону радиоактивного распада. Взяв образец древесины из кольца, чья датировка надежно установлена, и измерив его активность в настоящее время, можно найти концентрацию радиоуглерода в момент образования данного кольца. В западных штатах США растет остистая сосна (*Pinus longaeva*) — самое долгоживущее дерево на Земле (более 4000 лет). При этом сосна растет так медленно, что редко превышает 10 м в высоту. В Национальном парке Уайт Маунтинс на границе Калифорнии и Невады до сих пор растет дерево, получившее имя собственное “Мафусаил” — его возраст 4766 лет! Подумать только, что в наше время можно потрогать живое дерево, которое начало расти во времена возникновения египетского государства и правления у шумеров Гильгамеша (правда, местоположение дерева держится в секрете во избежание

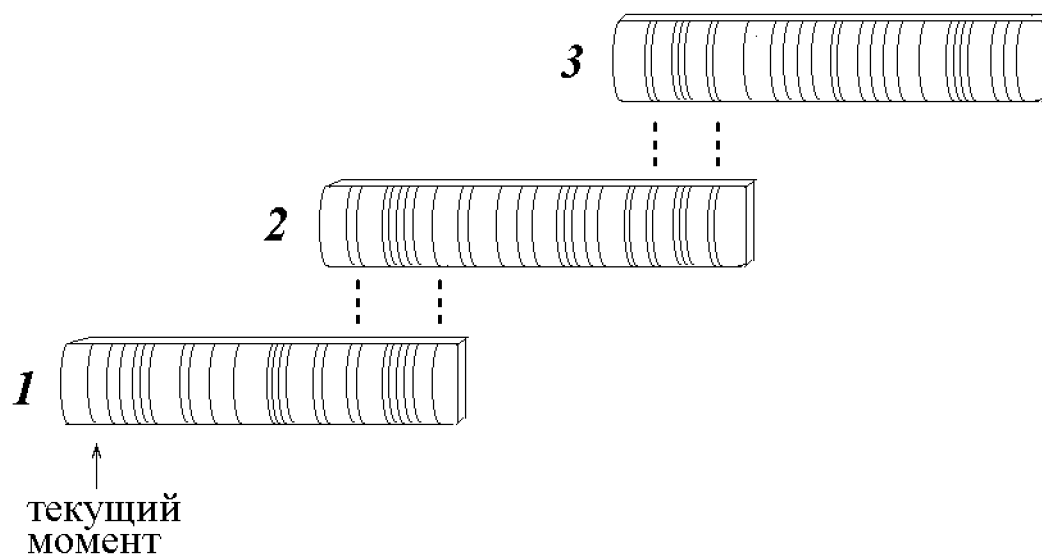


Рис. 41.5: Метод дендрохронологии. Показаны три образца, выпиленные из стволов деревьев (слева — внешняя часть, ближняя к коре, справа — сердцевина), на которых имеются годовичные кольца. В зависимости от климатических условий кольца могут быть шире или уже, образуя своего рода “отпечатки пальцев” того периода, когда жило дерево. Образец 1 взят из ныне живущего дерева, так что датировка внешнего кольца соответствует текущему моменту. Образец 2 взят из стоящего, но давно умершего дерева. В нем найдены та же последовательность колец, что и в первом образце, что позволяет отождествить соответствующие годы (показано пунктирными линиями). Но если в образце 1 эта последовательность колец соответствовала молодости дерева, то в образце 2 она образовалась уже под конец жизни. Поэтому образец 2 позволяет установить более раннюю последовательность годовых колец. Образец 3 еще старше образца 2, и отождествление последовательности колец этих двух деревьев позволяет еще дальше “продвинуться” в прошлое. Таким путем были установлены датировки годовичных колец за последние 9000 лет!

актов вандализма). Исследуя эти долгоживущие деревья, а также немецкие и ирландские дубы, ученые проследили образование годовичных колец на 9000 лет назад и сумели установить начальные концентрации радиоуглерода для этого периода. Принцип такой дендрохронологии объяснен на рис. 41.5.

Итак, определив равновесные концентрации радиоуглерода для разных моментов времени, ученые обнаружили, что она действительно меняется, иногда даже в пределах 5%.

Колебания равновесной концентрации радиоуглерода связаны с вариациями потока космических лучей — из-за изменений уровня солнечной активности и вариаций геомагнитного поля, отклоняющего поток заряженных частиц, попадающих в атмосферу. Кроме того, происходит пе-

пераспределение радиоуглерода между океаном и атмосферой. Океан — это гигантское вместилище CO_2 , и в глубинных водах радиоуглерода распалось больше, чем в атмосфере. При каждом перемешивании океана содержание ^{14}C в атмосфере падает. Интенсивное сжигание органического топлива (угля, нефти), начавшееся два века тому назад, приводит к уменьшению концентрации радиоуглерода, потому что в ископаемом топливе радиоуглерода практически не осталось. Наоборот, после 1950 г. количество радиоуглерода в атмосфере резко возросло из-за испытаний водородных бомб. Наверно, есть и другие причины обнаруженных колебаний равновесной концентрации, о которых нам неизвестно. Итогом подобных исследований стали калибровочные кривые, примерный вид которых показан на рис. 41.6¹. Пусть, например, исследуется образец, и радиоуглеродный метод дает для него дату 500 год н.э. Прямая, проведенная через “радиоуглеродную” дату 500 н.э. параллельно оси Ox , пересекает левую кривую в точке с абсциссой 550, а правую — в точке с абсциссой 650. Отсюда делается вывод, что на самом деле происхождение образца с вероятностью $2/3$ следует отнести к периоду $550 \div 650$ гг. н.э. Калибровочные кривые учитывают статистическую погрешность в определении $A(0)$, но, естественно, не погрешность измерений активности образца в настоящее время.

Следует обратить внимание, что волнообразный характер кривых приводит к тому, что иногда для образца могут получиться две возможные даты возникновения. Так, если радиоуглеродный метод датирует образец 200 годом н.э., то его реальной датировкой может быть и период $100 \div 250$ гг. н.э., и период $150 \div 300$ гг. н.э. Прежде, чем проводить измерения, с калибровочными кривыми консультируются, чтобы понять, может ли радиоуглеродный метод ответить на поставленный вопрос. Скажем, исследуется череп, и имеются подозрения, что он принадлежит либо князю Игорю (†945), либо его предшественнику, князю Олегу (†912). Может ли радиоуглеродный метод помочь ответить на этот вопрос? Если посмотреть на точки с координатами $x = 945$ и $x = 912$ на рис. 41.6, то видно, что в первом случае радиоуглеродный метод скорее всего даст результат $850 \div 970$ гг. н.э., а во втором — $800 \div 1000$ гг. н.э. Оба интервала включают обе даты смерти князей. Значит, для ответа на данный вопрос радиоуглеродный метод оказывается бесполезным, и не стоит тратить денег (это — недешевое удовольствие) для проведения

¹Истинный вид таких кривых см. в Интернете: <http://c14.sci.waikato.ac.nz/webinfo/k12.html>

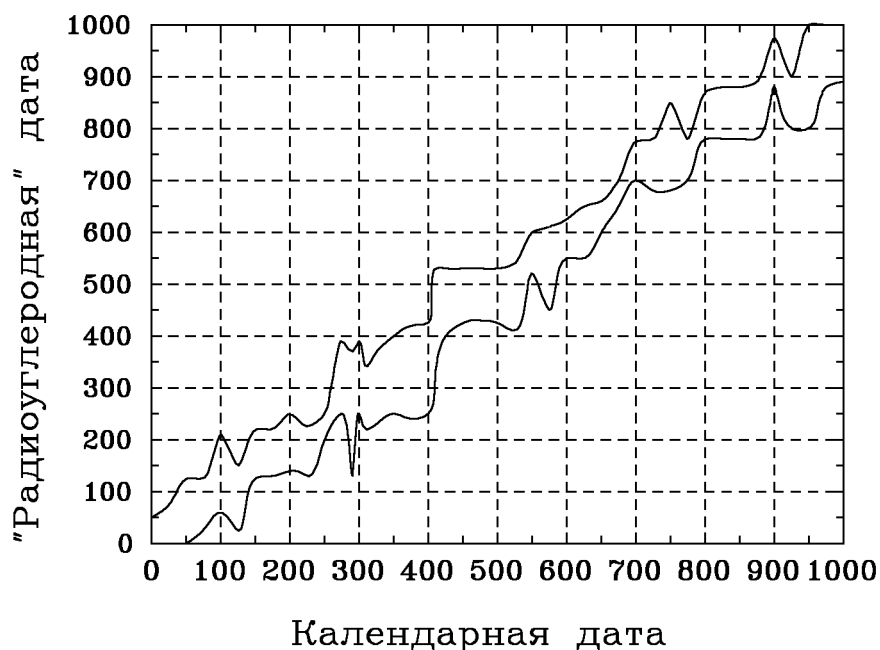


Рис. 41.6: Примерный ход калибровочных кривых для первого тысячелетия н.э. (по осям отложены годы). Левая и правая кривые дают, соответственно, нижнюю и верхнюю границы для искомой календарной даты.

измерений. Следует иметь также в виду, что радиоуглеродный метод в принципе работает для образцов не старше 50-60 тыс. лет. В более древних образцах радиоуглерода осталось так мало, что измерения его количества невозможны. В целом метод очень надежно работает для последнего тысячелетия, а образцы последних 50 лет датируются с точностью до 2-3 лет. Из нашумевших применений радиоуглеродного метода упомянем исследование найденных на Мертвом море свитков (датировка дала период 100 г до н.э. ÷ 100 г. н.э.) и датировка замороженного тела, найденного в Италии в 1991 г. (метод дал результат 3300 ÷ 3100 гг. до н.э.). Один из наиболее скандальных результатов, полученных радиоуглеродным методом, связан с датировкой туринской плащаницы, по преданию — погребальной одежды Иисуса Христа. Исторические упоминания об этой реликвии в литературе относятся к середине 14 века. В 80-х гг. архиепископ Турина дал разрешение на исследование маленьких образцов ткани. Работы проводились в трех лабораториях — в США, Англии и Швейцарии. Результаты всех трех групп согласуются друг с другом: плащаница датируется периодом 1260 ÷ 1390 гг.

Для датировок неорганических образцов используют другие радиоактивные изотопы. Например, радиоактивный изотоп калия ^{40}K распада-

ется в стабильный изотоп аргона ^{40}Ar с периодом полураспада $T_{1/2} = 1.25$ млрд. лет. Измеряя отношение количеств аргона и калия в минерале, можно найти его возраст. Другие медленные распады ($^{235}\text{U} \rightarrow ^{207}\text{Pb}$ и т.п.) служат для дополнительной проверки измерений.

Задача 41.62. Анализ на масс-спектрометре образцов породы, доставленной с Луны, показал, что отношение количества атомов ^{40}Ar и ^{40}K равно $\eta = 10.3$. Каков возраст лунной породы?

Решение. Радиоактивный изотоп калия попал в породу в момент ее образования, и пусть его начальное количество составляло $N_{K,0}$. К моменту времени t число атомов калия составит $N_K = N_{K,0}2^{-t/T_{1/2}}$. Число же атомов аргона, который целиком образовался из распавшегося калия, равно $N_{Ar} = N_{K,0} - N_K$. Отношение количества аргона и калия равно: $\eta = N_{Ar}/N_K = N_{K,0}/N_K - 1 = 2^{t/T_{1/2}} - 1$, откуда находим:

$$t = T_{1/2} \frac{\ln(1 + \eta)}{\ln 2} = 4.37 \cdot 10^9 \text{ лет.}$$

■

41.6 Элементы дозиметрии

Активностью радиоактивного вещества называется число распадов, происходящих в веществе за единицу времени. Если за время dt распадается $dN_{\text{расп}}$ ядер, то активность определяется соотношением $\frac{dN_{\text{расп}}}{dt}$. Поскольку убыль ядер радиоактивного вещества равна по величине и обратна по знаку числу распавшихся ядер ($dN_{\text{расп}} = -dN$), то активность A дается выражением:

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N. \quad (41.49)$$

Таким образом, активность радиоактивного вещества пропорциональна количеству радиоактивных ядер и обратно пропорциональна периоду полураспада. Соотношение (41.39) означает, что в веществе устанавливается такая концентрация ядер, при которой равны активности всех радиоактивных веществ в препарате. Активность в расчете на единицу массы источника называется *удельной* активностью.

В СИ за единицу активности принимают один распад в секунду, для которой установлено название беккерель (Бк). В качестве внесистемной единицы активности используется также единица, называемая кюри,

соответствующая активности такого вещества, в которой происходит $3.7 \cdot 10^{10}$ распадов в секунду, т.е. $1 \text{ Ки} = 3.7 \cdot 10^{10} \text{ Бк} = 37 \text{ ГБк}$. Происхождение этой единицы следующее. Ранее мы рассматривали пример распада радия и образовавшегося радона. Если в закрытый сосуд поместить радий, то вначале количество радона будет возрастать, а затем установится равновесие между вновь возникающих радоном и распадающимися ядрами радона, т.е. число ежесекундно совершающихся актов распада будет оставаться практически постоянным, если не учитывать изменение массы “материнского” радия, которое происходит весьма медленно, вследствие большого периода полураспада (1622 года). Единица активности кюри (1 Ки) представляет собой радиоактивность радона, находящегося в равновесии с одним граммом радия.

Задача 41.63. Изотоп золота ^{198}Au , используемый для терапии рака, имеет период полураспада $T_{1/2} = 2.7$ сут. Вычислить массу препарата, необходимую для получения активности $A = 250 \text{ Ки}$.

Решение. Исходя из определения активности, сразу находим из (41.49), что необходимое количество атомов $N = AT_{1/2}/\ln 2$. Период полураспада, выраженный в секундах, равен $T_{1/2} = 2.7 \times 86400 = 2.33 \cdot 10^5 \text{ с}$. Активность $A = 250 \text{ Ки} = 9.25 \cdot 10^{12} \text{ Бк}$. Подставляя эти численные данные, находим: $N = 3.11 \cdot 10^{18}$. В расчете подобного рода разница в массах протона и нейтрона и дефект массы ядра несуществен, так что массу атома золота находим как $m_{\text{Au}} = (Z+N)m_p = 198 \times 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 3.31 \cdot 10^{-25} \text{ кг}$. Искомая масса препарата тогда равна $m = Nm_{\text{Au}} = 1.03 \cdot 10^{-6} \text{ кг} = 1.03 \text{ мг}$. ■

Образующиеся при радиоактивных распадах заряженные частицы и γ -кванты, пролетая через вещество, постепенно теряют свою энергию, затрачивая ее на ионизацию молекул вещества, и, в конце концов, останавливаются. Например, на образование в воздухе одной пары ионов противоположных знаков тратится в среднем энергия, равная 34 эВ.

Поэтому при исследовании ионизирующих излучений особое значение имеет величина энергии, поглощенной единицей массы данного вещества. *Поглощенной дозой* излучения называется энергия, поглощенная единицей массы облучаемого объекта. Ее размерность $[D] = [E/m] = L^2T^{-2} = \text{Дж/кг}$. В СИ эта единица получила название грей (Гй). Часто используется также внесистемная единица — рад: $1 \text{ рад} = 0.01 \text{ Дж/кг}$, т.е. $1 \text{ Гй} = 100 \text{ рад}$. Рад — крупная единица измерения, и потому поглощен-

ные дозы обычно выражают в долях рад — сотых (сантирад), тысячных (миллирад) и миллионных (микрорад).

Человеческий организм поглощает энергию ионизирующих излучений, причем от количества поглощенной энергии зависит степень лучевых поражений. Но при облучении живых организмов возникающие биологические эффекты зависят не только от поглощенной дозы, но и от вида излучения. Для отражения опасности облучения для живого организма, вводят понятие *эквивалентной дозы*. Чтобы получить значение эквивалентной дозы, надо величину поглощенной дозы умножить на т.н. коэффициент качества излучения Q . Биологическое влияние излучения принято сравнивать с эффектами от рентгеновского и γ -излучения, которое берется за эталон. Для него по определению полагают $Q = 1$. Единицей измерения эквивалентной дозы в СИ служит зиверт (Зв): $1 \text{ Зв} = 1 \text{ Гй} \cdot Q$. Используют также внесистемную единицу — бэр (биологический эквивалент рентгена): $1 \text{ бэр} = 1 \text{ рад} \cdot Q$, т.е. $1 \text{ Зв} = 100 \text{ бэр}$. Таким образом, если организм получил дозу в 1 Зв в виде рентгеновских лучей, то полученная эквивалентная доза составит 100 бэр . Однако при той же поглощенной дозе при облучении нейтронами, для которых $Q = 3$, эквивалентной дозе составляет уже 300 бэр , т.е. в три раза опаснее.

Задача 41.64. Типичная эквивалентная доза при рентгеноскопии грудной клетки составляет $D_{\text{экв}} = 25 \text{ мбэр}$. Предполагая, что облученная часть тела составляет примерно половину массы человека $m = 80 \text{ кг}$, найти поглощенную энергию W .

Решение. В СИ эквивалентная доза равна $D_{\text{экв}} = 25 \cdot 10^{-3}/100 = 2.5 \cdot 10^{-4} \text{ Зв}$. Поглощенная доза составит при этом $D = D_{\text{экв}}/Q = 2.5 \cdot 10^{-4} \text{ Гй}$. Умножая на массу $m/2$ облученной части тела, находим поглощенную энергию: $W = mD/2 = 0.01 \text{ Дж}$. ■

Коэффициент качества излучения отражает степень риска (возникновения рака, лейкемии и т.п.) при хроническом облучении малыми дозами. Гамма излучение сопровождает многие ядерные реакции и распады. Энергия γ -квантов может принимать значения от кэВ до МэВ. Гамма-излучение отличается высокой проникающей способностью, и для защиты от него эффективно применяют материалы с большим удельным весом: свинец, бетон и т.п. Для β -лучей коэффициент качества излучения примерно такой же: $Q \approx 1$. Этот вид излучения — поток электронов и позитронов, обладающих электрическим зарядом и, следовательно,

высокой ионизирующей способностью. Они могут проходить слой воды толщиной 1-2 см. Для защиты от β -излучения обычно достаточно листа алюминия толщиной в несколько миллиметров. Но попадание источников β -излучения в организм с пищей, водой и воздухом может привести к опасному внутреннему облучению организма. Альфа-излучение — поток ядер (ионов) гелия, возникающих при радиоактивном распаде элементов с большими атомными номерами. Альфа-частицы в 7300 раз тяжелее электронов и несут по сравнению с ними двойной электрический заряд. Поэтому их ионизирующая способность чрезвычайно велика, как и у других тяжелых ионов, но они легко задерживаются даже листом бумаги. Пробег α -частиц в воздухе не превышает 11 см. От внешнего α -излучения легко защититься, но оно чрезвычайно опасно при внутреннем облучении. Для α -излучения и облучения тяжелыми ионами $Q \approx 20$. При оценке радиоактивной обстановки существенную роль может играть нейтронное излучение. Нейтроны, например, вылетают из ядер при реакциях деления урана и плутония. Сами они электрически нейтральны и имеют высокую проникающую способность. При взаимодействии нейтронов с веществом возникают заряженные частицы, ионизирующие среду. Нейтронное излучение способно превращать атомы стабильных элементов в их радиоактивные изотопы, что повышает опасность нейтронного излучения. От него хорошо защищают материалы, содержащие водород: парафин, вода и т.п. Для тепловых (медленных) нейтронов $Q \approx 5$, для быстрых — $Q \approx 10 \div 20$ в зависимости от энергии нейтронов.

Поглощенная и эквивалентная дозы характеризуют влияние радиоактивной среды на облучаемые объекты. Для характеристики радиационной обстановки на местности и в помещениях используют понятие *экспозиционной дозы*: количество рентгеновского или γ -излучения, выраженное в единицах заряда одного знака, порожденного им в единице массы сухого воздуха в данной точке пространства. Единицей измерения в СИ является Кл/кг. На практике часто используют внесистемную единицу — рентген (Р): $1 \text{ Р} = 2.58 \cdot 10^{-4} \text{ Кл/кг}$. Так как на образование в воздухе пары ионов, т.е. заряда e (считаются ионы одного знака) тратится 34 эВ, энергия, затрачиваемая на образование единицы заряда, равна $w = 34 \text{ Дж/Кл}$. Теперь экспозиционную дозу можно связать с поглощенной (воздухом же) дозой: $D_{\text{возд}} = 1 \text{ Р} \times w = 2.58 \cdot 10^{-4} \times 34 = 8.77 \text{ мГй} = 0.877 \text{ рад}$. Однако это не означает, что такую же дозу получает находящийся там объект. По величине экспозиционной дозы можно рас-

Таблица 41.2: Природные источники ионизирующего излучения

Источники	Мощность дозы, мбэр/год	Доля источника, %
Космическое излучение на уровне моря	30	$26.8 \div 15.6$
Поверхность Земли (грунт, вода)	$50 \div 130$	$44.6 \div 67.7$
Радиоактивные элементы в теле человека	30	$26.8 \div 15.6$
Прочие источники	2	$1.8 \div 1.1$
Итого:	$112 \div 192$	100

считать поглощенную любым объектом дозу, зная характеристики излучения, состав, форму и т.п. свойства объекта. Поэтому, вообще говоря, нельзя говорить даже о примерной эквивалентности 1 рентгена, 1 рад и 1 бэр: это единицы введены для разных характеристик излучения и оказываемого им влияния.

При прочих равных условиях доза ионизирующего излучения тем больше, чем больше время облучения. Поэтому используют также понятие *мощности дозы*: это соответствующая (экспозиционная, поглощенная или эквивалентная) доза, отнесенная к единице времени: 1 Р/ч и т.п.

Средняя экспозиционная доза от всех естественных источников ионизирующего излучения составляет около 200 мР/год (т.е. ее мощность примерно равна 20 мкР/ч). Примерно такие значения можно слышать в сообщениях по ТВ о радиационной обстановке в городах. В разных областях Земли экспозиционная доза колеблется от 50 до 1000 и более мР/год (6-110 мкР/ч). Экспозиционная доза 200 мР/год примерно соответствует 200 мбэр/год эквивалентной дозы. В таблице 41.2 приведено распределение естественной экспозиционной дозы по источникам происхождения.

В целом приведенные дозы представляют собой естественную среду обитания человека, а указанные факторы облучения действуют уже миллионы лет, создавая природный фон ионизирующего излучения. Конечно, деятельность людей вносит свои коррективы. В естественных горных породах, в почве и строительных материалах содержится какое-то количество радия, при распаде которого возникает радиоактивный газ радон. Плохая вентиляция может увеличить дозу облучения, обусловленную вдыханием радона. Доза от воздействия космических лучей зависит от высоты над уровнем моря. Дополнительному облучению подвергаются, например, пассажиры авиалайнеров. Имеются и другие

Таблица 41.3: Средние годовые дозы от искусственных источников излучения

Источники	Мощность дозы, мбэр/год	Доля от фона, %
Медицинские диагностика	100 ÷ 150	50 ÷ 75
Строительные материалы (пребывание в зданиях)	150	75
Полеты в самолете (10000 км на высоте 12 км)	2.5 ÷ 5	1 ÷ 2.5
Телевизор (4 ч/сут)	1	0.5
ТЭЦ (1 ГВт) на угле на расстоянии до 20 км	0.6 ÷ 6	0.3 ÷ 3
АЭС (1 ГВт) на расстоянии до 20 км на расстоянии до 20 км	0.01 ÷ 0.1	≤ 0.1
Радиоактивные осадки от испытаний ядерного оружия	2.5	1
Прочие источники	40	20
Итого:	300 ÷ 350	150 ÷ 175

искусственные источники облучения, приведенные в таблице 41.3. За естественный фон здесь принято значение 200 мбэр/год. Видно, что деятельность человека примерно утраивает эквивалентную дозу. Основным источником дополнительного облучения являются наше жилье и медицинские приборы. При флюорографии пациент получает около 370 мбэр, при рентгенографии зуба — 3 мбэр, при рентгеноскопии легких — 2 ÷ 8 бэр!

При эксплуатации АЭС нормативными документами установлены пределы для облучения персонала и населения: соответственно, 5 и 0.5 бэр/год. За 70 лет жизни от естественного фона набирается полная доза около 15 бэр. При установлении указанного норматива для населения за основу был взят предельный уровень 35 бэр за жизнь от всех источников излучения. Такая доза считается потенциально не опасной.

При выполнении аварийных работ максимально накопленная доза облучения не должна превышать 25 бэр. Кратковременные незначительные изменения состава крови наблюдались при разовых дозах 25 ÷ 75 бэр. Летальной дозой принято считать дозу проникающего ионизирующего излучения, ведущую с 50%-й вероятностью к летальному исходу в течение 30 дней в отсутствие медицинской помощи. Она составляет 250 ÷ 300 бэр. Предельная доза внешнего облучения может варьироваться в зависимости от условий облучения и свойств излучения.

В заключение приведем любопытный расчет, появившийся в научной литературе в связи с некоторыми теориями, предсказывавшими, что протон может оказаться нестабильным. Потребовались экспериментальные оценки на время жизни протона, и одна из них может быть легко получена на основании только что приведенных данных. Для грубой оценки примем, что человек массой $m = 80$ кг наполовину состоит из протонов. Их число N_p можно найти, разделив $m/2$ на массу протона: $N_p = m/2m_p = 40/(1.67 \cdot 10^{-27}) = 2.4 \cdot 10^{28}$. При распаде протона выделяется его энергия покоя $m_p c^2 = 1$ ГэВ $= 1.6 \cdot 10^{-10}$ Дж. Если среднее время жизни протона составляет τ (в годах), то вероятность распада протона за время жизни человека (70 лет) равна $W_p \sim 70/\tau$. Тогда за 70 лет в теле распадется $n = W_p N_p = 1.7 \cdot 10^{30}/\tau$ протонов, и поглощенная доза составит $(m_p c^2 n)/m = 3.4 \cdot 10^{18}/\tau$ Гй. При распаде протона должны образовываться легкие частицы ($Q = 1$), т.е. эквивалентная доза будет равна $D = 3.4 \cdot 10^{20}/\tau$ бэр. Эта величина не должна превосходить биологически опасного предельного значения 35 бэр (ведь человечество не вымерло от распада протонов, даже если они и происходят). Неравенство $D \leq 35$ бэр дает оценку $\tau \geq (3.4 \cdot 10^{20}/35) \approx 10^{19}$ лет. Конечно, физические эксперименты позволили поднять эту оценку на много порядков, но уже этот простой расчет дает невероятно большое значение для времени жизни протона: наша Вселенная существует “всего” $15 \cdot 10^9$ лет. Так что на нашу обычную жизнь нестабильность протона, если она и имеет место, никакого влияния оказать не может.

41.7 Атомная и термоядерная энергетика

Деление ядер

Из следствий модели жидкой капли остановимся на критерии стабильности относительно деформации ядра. Представим себе, что первоначально сферическое ядро деформировалось и вытянулось в эллипсоид с полуосями $a = r_{\text{я}}(1 + \epsilon)$, $b = r_{\text{я}}/\sqrt{1 + \epsilon}$. (при $\epsilon = 0$ величина полуосей совпадают, и мы имеем рассмотренный случай сферического ядра). Приведенные выражения для полуосей получаются в предположении, что объем ядра при деформации не изменился. В выражении для массы $M_{\epsilon}(Z, A)$ деформированного ядра изменятся два слагаемых. Во-первых, деформация увеличивает площадь поверхности ядра: она становится равной $4\pi r_{\text{я}}^2(1 + 2\epsilon^2/5)$. Соответствующее слагаемое в формуле (41.20) примет

теперь вид $0.0180A^{2/3}(1 + 2\epsilon^2/5)$, т.е. масса ядра увеличилась на величину $\Delta_S M = 0.0072A^{2/3}\epsilon^2$. Во-вторых, меняется энергия кулоновского отталкивания протонов. Она должна уменьшиться, т.к. среднее расстояние между протонами становится больше. Электростатическая энергия эллипсоида имеет вид

$$E_C = \frac{3}{5} \cdot \frac{e^2 Z^2}{4\pi\epsilon_0 r_{\text{я}}} \cdot \left(1 - \frac{\epsilon^2}{5}\right),$$

так что кулоновское слагаемое в формуле (41.20) примет вид $0.000713 \cdot (Z^2/A^{1/3}) \cdot (1 - \epsilon^2/5)$. Это приводит к изменению массы ядра на величину $\Delta_C M = -0.0001426(Z^2/A^{1/3})\epsilon^2$. Теперь находим полное изменение массы ядра при деформации:

$$\begin{aligned} \Delta_\epsilon M &= M(Z, A) - M_\epsilon(Z, A) = -\Delta_S M - \Delta_C M = \\ &= \epsilon^2 \left(-0.0072A^{2/3} + 0.0001426 \frac{Z^2}{A^{1/3}} \right). \end{aligned} \quad (41.50)$$

Если дефект массы $\Delta_\epsilon M$ положителен, то при деформации масса ядра уменьшается, т.е. это энергетическое состояние более выгодно, что позволяет деформации развиваться дальше, пока ядро не развалится на меньшие осколки. Это происходит очень быстро, так что такие ядра просто не существуют в природе. Если же $\Delta_\epsilon M < 0$, то деформация увеличивает массу, и ядро стремится ее уменьшить, возвращаясь к сферической форме.

С помощью (41.50) критерий стабильности ядер $\Delta_\epsilon M < 0$ записывается в виде:

$$\frac{Z^2}{A} < \frac{0.0072}{0.0001426} \approx 50. \quad (41.51)$$

Для элементов в начале и середине таблицы Менделеева это условие заведомо выполнено: например, для ${}^{56}_{26}\text{Fe}$ получается значение $Z^2/A = 12.1$. Для стабильного ядра урана ${}^{238}_{92}\text{U}$ имеем $Z^2/A = 92^2/238 = 35.6$. Для самого тяжелого из элементов, синтезированного в Объединенном институте ядерных исследований (Дубна) в 1999 г. с $Z = 114$, $A = 289$ (название пока не придумано) получаем $Z^2/A = 114^2/289 = 45.0$.

Для наиболее устойчивых ядер мы нашли связь между числом Z протонов и полным числом A нуклонов. Подставляя (41.17) в (41.51), находим предельные значения $A_{\text{max}} = 390$, $Z_{\text{max}} = 140$. Конечно, такого

элемента нет в природе и он никогда не будет создан искусственно. Подчеркнем еще раз: при нарушении условия (41.51) ядра просто не могут существовать, мгновенно разваливаясь на меньшие объекты. Характерное расстояние для ядерных сил — это радиус протона r_p , характерное время для таких, типично ядерных, процессов, дается временем, за которое сигнал успевает пройти “ядерное” расстояние: $\tau_y \sim r_p/c \sim 10^{-23}$ с.

Итак, мы убедились, что для всей таблицы Менделеева ядра устойчивы относительно малых деформаций. Однако представим себе, что ядро все-таки развалилось на два (для простоты — равных) осколка. Посмотрим, как изменится при этом масса системы. Дефект массы в таком процессе равен: $\Delta M(Z, A) = M(Z, A) - 2M(Z/2, A/2)$, где $M(Z, A)$ дается формулой (41.20). Нетрудно получить, что

$$\begin{aligned}\Delta M(Z, A) &= 0.0180A^{2/3}(1 - 2^{1/3}) + 0.000713\frac{Z^2}{A^{1/3}}(1 - 2^{-2/3}) = \\ &= -0.00468A^{2/3} + 0.000264\frac{Z^2}{A^{1/3}}.\end{aligned}\quad (41.52)$$

Ядро стабильно относительно развала на два осколка при $\Delta M(Z, A) < 0$, откуда следует:

$$\frac{Z^2}{A} < \frac{0.00468}{0.000264} \approx 18. \quad (41.53)$$

Видно, что критерий стабильности (41.53) нарушается уже для элементов за ниобием ${}_{41}^{93}\text{Nb}$ в таблице Менделеева.

Мы получили в какой-то степени противоречивый результат: с одной стороны, ядра с $Z^2/A < 50$ устойчивы относительно деформаций, с другой, ядра с $Z^2/A \geq 18$ все-таки могут разваливаться на осколки. Объяснение следует из рис. 41.7, где схематически изображена зависимость энергии покоя (массы) ядра в зависимости от степени его деформации.

Случай а) соответствует ядрам, не удовлетворяющим критерию стабильности (41.51); такие ядра, как мы уже обсуждали, в высшей степени неустойчивы и разваливаются за время порядка 10^{-23} с. Разность начальной и конечной энергий Q_f — это энерговыделение в процессе деления, имеющее своим источником дефект массы.

В трех случаях b)-d) кривая энергии возрастает при малых деформациях, поскольку выполнен критерий (41.51). Случай d) соответствует ядрам, стабильным относительно процесса деления. Они удовлетворяют критерию стабильности (41.53). Здесь конечная масса осколков превы-

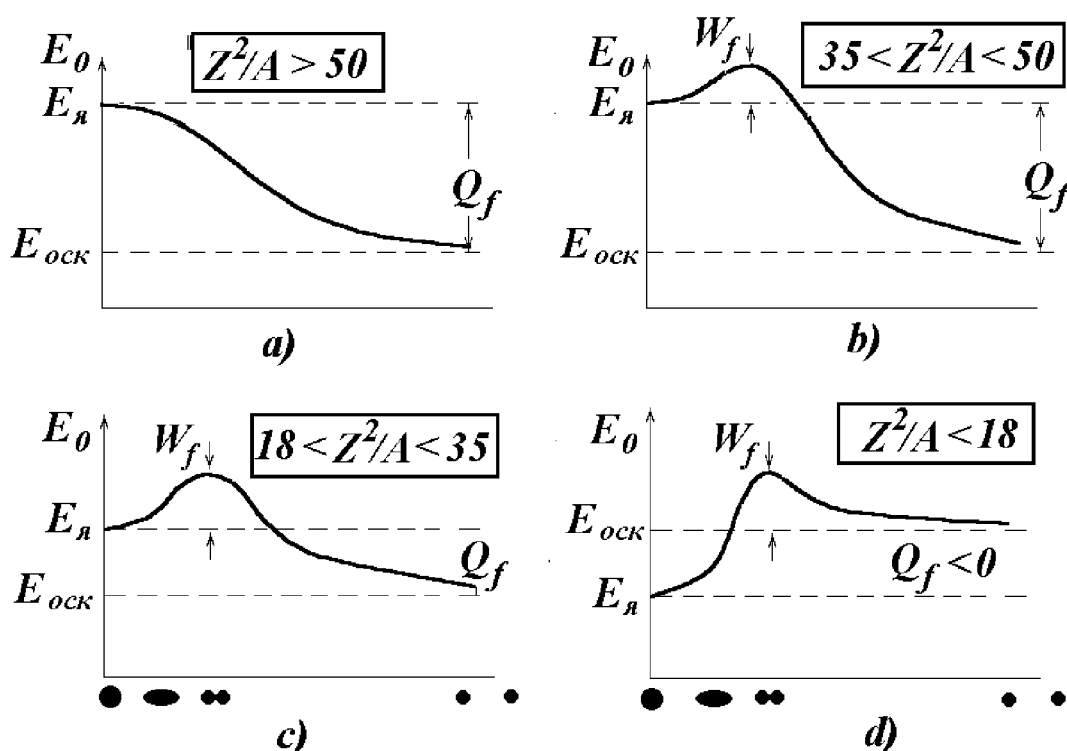


Рис. 41.7: Поведение энергии покоя (массы) ядра в зависимости от его деформации. Деформация ядра символически изображена под осью x : начальная сферическая и слегка деформированная эллипсоидальная формы, критический момент образования двух меньших ядерных “капель”, соединенных узкой перемычкой и финальная стадия, когда осколки удалены на большое расстояние друг от друга. Разность начальной и конечной энергий Q_f — это энергосвободная реакция, величина W_f — барьер деления. Рисунок а) соответствует нестабильным ядрам, которые не могут существовать, т.к. разваливаются за время порядка 10^{-23} с. Рисунок б) описывает случай, когда ядро может делиться, в случаях в) и д) ядра стабильны относительно деления.

шает массу начального ядра, т.е. энергосвободная отрицательно, и такие распады не могут происходить самопроизвольно.

Два других случая описывают ту самую противоречивую ситуацию, с которой мы разбираемся. При малых деформациях масса ядра увеличивается, т.е. состояние ядра устойчиво. При больших же деформациях ядро разваливается, его масса уменьшается и энергосвободная положительно. В недеформированном состоянии ядро находится в локальном минимуме энергии, но как скоро оно сможет выйти из него, чтобы попасть в глобальный минимум (т.е. развалиться на осколки) — вот в чем вопрос?

Выходу из локального минимума препятствует потенциальный барьер, высота которого W_f называется *барьером деления*. С ростом Z^2/A барьер деления быстро уменьшается: при $Z^2/A \sim 32$ (золото, свинец)

$W_f \sim 40 \div 50$ МэВ, но уже при $Z^2/A \sim 35 \div 36$ (для элементов вблизи урана и тория) $W_f \sim 6 \div 8$ МэВ. Энергия деления Q_f растет с ростом Z^2/A . Поскольку для элементов с $Z^2/A < 35$ барьер велик, то такие ядра практически стабильны относительно деления. Этому случаю соответствует рис. 41.7,с).

Если барьер невелик, как показано на рис. 41.7,b), то даже устойчивое к малым деформациям ядро может “просочиться” через потенциальный барьер (квантовомеханическое туннелирование), т.е. развалиться на две меньшие части. Такое *спонтанное* деление ядер урана впервые наблюдалось К. Петржаком и Г. Флеровым (1940). Вероятность туннелирования сильно зависит от размера и высоты барьера. Так, время жизни для спонтанного деления урана очень велико ($\sim 10^{16}$ лет), и оно быстро уменьшается с ростом Z^2/A до десятых долей секунды у “100-х” элементов.

Вывести ядро из локального минимума (сферическая форма) можно также с помощью какого-то внешнего воздействия (бомбардировка нейтронами), сообщаящего ядру дополнительную энергию. Критерием возможности такого процесса служит сравнение высоты барьера с энергией связи нейтрона ε_n в ядре. При $W_f \leq \varepsilon_n$ нейтрон, не испытывающий кулоновского отталкивания, легко проникает в ядро A_ZX и захватывается им. Возникает промежуточное ядро — изотоп ${}^{A+1}_ZX$ первоначального элемента, выделяется энергия связи нейтрона, и этой энергии уже достаточно для деления промежуточного ядра. Если взять полученное выше выражение (41.21) и найти энергии связи ядер $E_{\text{св}}(Z, A+1)$ и $E_{\text{св}}(Z, A)$, то их разность и даст нам энергию связи нейтрона ε_n . Для золота и урана получаются примерно одинаковые значения $\varepsilon_n \sim 6 \div 7$ МэВ. Барьер деления для золота и соседних элементов почти на порядок выше, и потому они нейтронами не делятся. При захвате нейтрона такое ядро приходит в возбужденное состояние, но не делится, а “сбрасывает” лишнюю энергию, излучая γ -кванты или иные частицы (т.е. претерпевая α - или β -распад). Для урана же и близких к нему элементов в таблице Менделеева барьер деления получился примерно таким же, как и энергия связи нейтрона. Поэтому элементы с $Z^2/A \geq 35$ имеют $W_f \leq \varepsilon_n$ и легко делятся быстрыми нейтронами с энергиями порядка 1 МэВ, а некоторые из них — даже тепловыми нейтронами с практически нулевой энергией. В таблице 41.4 приведены данные по энергии связи нейтрона и барьеру деления некоторых ядер. Из нее следует, например, что наибо-

Таблица 41.4: В таблице показано ядро мишени, бомбардируемой нейтронами, промежуточное (делящееся) ядро, энергия связи нейтрона ε_n , барьер деления W_f и указана возможность деления тепловыми нейтронами.

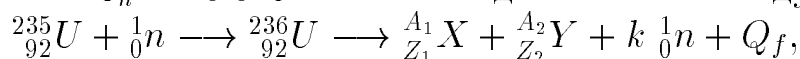
Ядро мишени	Промежуточное ядро	ε_n (МэВ)	W_f (МэВ)	Делится тепловыми нейтронами?
^{235}U	^{236}U	6.5	5.2	да
^{238}U	^{239}U	4.8	5.7	нет
^{239}Pu	^{240}Pu	6.4	4.8	да
^{243}Am	^{244}Am	5.5	5.8	нет

лее распространенный в природе изотоп урана ^{238}U не делится тепловыми нейтронами. Однако, быстрые нейтроны с энергией по крайней мере 1.3 МэВ приводят к делению и такого ядра.

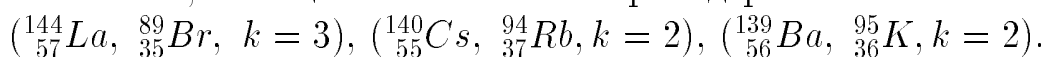
Цепная реакция. Атомные бомбы и реакторы

В 1938 г. немецкие ученые Отто Ган и Фриц Штрассман экспериментально обнаружили деление ядер урана при облучении их нейтронами. Природный уран содержит три изотопа: ^{238}U (99.27%), ^{235}U (0.72%), ^{234}U (0.01%), т.е. приблизительно 1 атом ^{235}U на 140 атомов ^{238}U .

Оказывается, что ^{235}U при поглощении медленного (теплого) нейтрона с энергией $\varepsilon_n \approx 0.025$ эВ может делиться по следующей схеме:



где осколками X, Y чаще всего бывают пары ядер



Здесь указано также число k вылетающих нейтронов.

При делении промежуточного ядра ^{236}U с наибольшей вероятностью образуются осколки, массы которых относятся как 2:3. Удельная энергия связи осколков примерно на 1 МэВ больше, чем у исходного ядра. Таким образом, процесс деления сопровождается выделением большого количества энергии. Но особо важным является тот факт, что при делении каждого ядра вылетает несколько нейтронов. В среднем на каждый акт деления ^{235}U приходится $k = 2.46$ выделившихся нейтронов, при делении плутония ^{239}Pu это число больше: $k = 2.91$. Образующиеся при делении осколки (новые ядра) остаются радиоактивными и претерпевают цепочку бета-распадов, сопровождающихся испусканием гамма-излучения.

Испускание нескольких нейтронов при делении ядра делает возможной цепную ядерную реакцию. Она может осуществляться двумя способами.

Первый способ заключается в выделении из природного урана делящегося изотопа ^{235}U или получения промышленным путем ^{239}Pu . Испускаемые при делении нейтроны могут вызвать новые деления ядер урана или плутония с испусканием новых нейтронов, так что количество нейтронов, рождающихся в каждом поколении, нарастает в геометрической прогрессии. Однако, если масса делящегося изотопа меньше определенного критического значения, то большинство испущенных нейтронов вылетает наружу, не вызвав деления. В этом случае цепная реакция не возникает. Так происходит потому, что объем шара, изготовленного из делящегося материала, растёт как куб его радиуса, а поверхность — как квадрат радиуса. Число рождающихся нейтронов пропорционально объёму тела, а число вылетающих наружу — площади поверхности. Отношение площади поверхности к объёму $S/V \sim 1/R$. Поэтому относительная доля вылетающих наружу через поверхность нейтронов уменьшается с ростом массы (радиуса) делящегося вещества. Для урана-235 критическая масса $M_{\text{кр}} = 50$ кг ($R_{\text{кр}} = 9$ см), для плутония-239 $M_{\text{кр}} = 11$ кг, для урана-233 $M_{\text{кр}} = 16$ кг (данные взяты из книги: Физический энциклопедический словарь. Советская энциклопедия, М., 1983; см. также оценку, данную в Ч. II, раздел 13.1 настоящего учебника). При массе, больше критической, нейтроны быстро размножаются, и реакция приобретает взрывной характер. На этом основано действие атомной бомбы.

В земной атмосфере всегда имеется некоторое количество нейтронов, рожденных космическими лучами. Поэтому, чтобы вызвать взрыв, достаточно соединить части ядерного заряда в один кусок с массой, большей критической.

Первые американские атомные бомбы, разработанные в Лос-Аламосе, назывались “Тонкий” и “Толстый”. В них быстрое сведение вместе нескольких частей заряда ядерного вещества, каждая из которых имела массу меньше критической, осуществлялась с помощью обычного взрывчатого вещества.

Бомба “Тонкий” представляла собой длинный цилиндр, закрытый с обоих концов. В одном конце цилиндра находилась “цель”, представляющая некоторое количество ядерного взрывчатого вещества меньше критической массы, а в другом конце помещался “снаряд” из урана-235, также меньше критической массы. За этим “снарядом” помещался заряд обычного взрывчатого вещества. Устройство “Тонкого” было относительно простым, но не слишком удачным с точки зрения коэффициента

использования ядерного горючего.

Принцип, на котором основано действие атомной бомбы под названием “Толстый” называется “имплозия”, причем этот термин оставался засекреченным в течение многих лет после Хиросимы и Нагасаки. Примерная схема “Толстого” выглядит следующим образом. В самом центре бомбы располагалась полая плутониевая сфера размером, не превышающим мяч для игры в бейсбол. Внутри плутониевой сферы помещался бериллиевый шар, служивший источником нейтронов. Вокруг плутониевой сферы располагалась другая, очень большая сфера, состоящая из тридцати шести очень точно обработанных блоков взрывчатого вещества, выполненных в форме линз. В каждой из 36 линз помещалось для большей надежности по два детонатора, соединенных в единую электрическую цепь. При одновременном взрыве всех детонаторов (синхронизация осуществляется с большой точностью) мгновенная детонация взрывчатого вещества, превышающего по массе тонну, дает очень мощную взрывную волну, направленную в центр бомбы. Часть энергии этой волны фокусируется в месте расположения заряда ядерного взрывчатого вещества. Все эти взрывные волны одновременно сойдутся в одной точке и сожмут полую плутониевую сферу вокруг бериллиевого шара, как мячик для игры в пинг-понг, и направленная внутрь волна взрыва сдавит плутоний в массу, превышающую критическую. Под действием источника нейтронов начнется и в течение одной микросекунды завершится цепная реакция атомного взрыва.

Энергия, выделяющаяся при делении 1 г урана, эквивалентна энергии, выделяющейся при сгорании 2.5 т угля, и составляет 22 МВт · ч. Образующаяся при взрыве ударная волна несет избыточное давление, и при p порядка нескольких десятых долей атмосферы происходят существенные поражения. Радиус поражения приблизительно определяется по формуле $p = E/R^3 = 10^5$ Па, где E — энергия, выделившаяся при ядерном взрыве. Для простоты использования этой формулы вспомним, что такое тротиловый эквивалент: взрыв 1 кг выделяет энергию 4.2 МДж (см. Ч. II, раздел 10.3). Т.о. взрыв 1 кт тротила выделяет энергию $4.2 \cdot 10^{12}$ Дж. Разделив обе части равенства на эту величину, получим энергию взрыва E , выраженную в килотоннах тротилового эквивалента. Умножая дополнительно на 10^9 , выразим R в километрах: $E, \text{ кт} / [R, \text{ км}]^3 = 23.8$, откуда

$$R, \text{ км} = 0.35 \sqrt[3]{E, \text{ кт}}. \quad (41.54)$$

Например, при взрыве бомбы в 20 кт радиус поражения составит $R \sim 1$ км.

Задача 41.65. Оценить, какое количество урана участвует в делении при взрыве 20-килотонной бомбы.

Решение. При делении урана выделяется энергия порядка 1 МэВ/нуклон, т.е. $10^6 \times 1.6 \cdot 10^{-19} / 1.67 \cdot 10^{-27} \approx 10^{14}$ Дж/кг. Энергия же взрыва 20-килотонной бомбы составляет $20 \times 4.2 \cdot 10^{12} = 0.84 \cdot 10^{14}$ Дж. Эти числа примерно совпали, т.е. деление одного килограмма ^{235}U выделяет такую же энергию, как и взрыв 20 килотонн тротила. ■

Усилия ученых были направлены не только на военные применения цепной реакции, но и на создание атомной (правильнее, ядерной) энергетики. Первый в мире ядерный реактор был пущен в декабре 1942 г. в Чикагском университете под руководством итальянского физика Э. Ферми. В нашей стране реактор такого же типа был пущен под руководством И. В. Курчатова в декабре 1946 г. в Москве. Первая атомная электростанция опытно-промышленного назначения (мощностью 5 МВт) была пущена в СССР в Обнинске в 1954 г.

В ядерных реакторах используется другой способ осуществления цепной реакции. В качестве делящегося вещества может служить природный уран, обогащенный изотопом ^{235}U . Нейтроны, испускаемые при делении ядер ^{235}U , имеют в среднем энергию $\varepsilon_n \sim 2$ МэВ, которая соответствует скорости $v_n \sim 2 \cdot 10^7$ м/с. Эти быстрые нейтроны могут поглощаться ядрами неделящейся примеси, вследствие чего, не вызвав деления, выходят из игры и не порождают новых нейтронов. Чтобы предотвратить захват нейтронов, сравнительно небольшие блоки делящегося вещества размещают на некотором расстоянии друг от друга, а промежутки между блоками заполняют замедлителем, т.е. веществом, в котором нейтроны замедляются до тепловых скоростей (2200 м/с). Вероятность реакций деления урана-235 тепловыми нейтронами почти в 200 раз больше вероятности захвата тепловых нейтронов ядрами урана-238. Замедление нейтронов осуществляется за счет упругого рассеяния. В этом случае энергия, теряемая замедляемой частицей, зависит от соотношения масс сталкивающихся частиц. Максимальное количество энергии теряется в случае, когда обе частицы имеют одинаковую массу (см. Ч. I, раздел 4.7). С этой точки зрения идеальным замедлителем было бы вещество, содержащее обычный водород (например, вода — массы протона и нейтрона примерно одинаковы).

Однако вода оказалась непригодной в качестве замедлителя, потому что протоны поглощают нейтроны, вступая с ними в реакцию $p(n, \gamma)d$ образования дейтрона. Ядра замедлителя должны обладать малой вероятностью захвата нейтронов и большой вероятностью упругого рассеяния. Этому условию удовлетворяет дейтерий, а также ядра графита и бериллия. Для уменьшения энергии нейтронов, испускаемых при делении до тепловых энергий $\varepsilon_n \sim k_B T$ в тяжелой воде D_2O достаточно около 25 столкновений, в графите или бериллии — примерно сто столкновений.

Таким образом, основные элементы каждого ядерного реактора, независимо от его назначения и конструкции, — ядерное топливо (а также приспособления для его обновления), замедлитель, устройства для регулирования хода цепной реакции (из материалов, сильно поглощающих нейтроны, например, бор, кадмий, гафний), предохранительные приспособления — устройства, обеспечивающие защиту персонала от излучений, теплоноситель, отводящий избыток тепла, и, кроме того, т.н. отражатель, уменьшающий потери нейтронов через поверхность активной зоны.

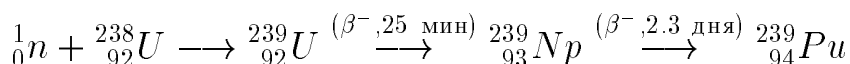
Цепная реакция является основой всех ядерных реакторов. В настоящее время существует много различных типов реакторов, которые используются для исследовательских целей, так и для получения радиоизотопов, а также для производства энергии. Наиболее часто применяют четыре типа реакторов:

- водо-водяной реактор с обычной водой в качестве замедлителя и теплоносителя;
- графито-водяные реакторы с водяным теплоносителем и графитовым замедлителем;
- реакторы, в которых замедлителем является тяжелая вода, а теплоносителем — обычная вода;
- графито-газовые (CO_2 , воздух) реакторы.

Важнейшим параметром любого реактора является т.н. *коэффициент размножения* K , показывающий количество тепловых нейтронов, которые рождаются в каждом новом поколении в ходе цепной реакции. Его значение K_∞ в бесконечно большой среде можно определить по т.н. “формуле четырех сомножителей”: $K_\infty = k\epsilon\phi\theta$, где k — среднее число вторичных нейтронов, ϵ — коэффициент размножения на быстрых нейтронах (т.е. увеличение числа нейтронов за счет деления ^{238}U), ϕ —

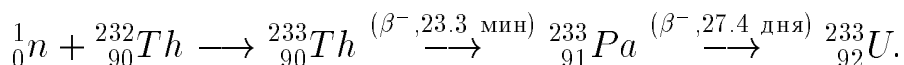
вероятность того, что нейтрон не захватится ядром ^{238}U и θ — вероятность того, что тепловой нейтрон вызовет деление. Так, для реактора на обогащенном естественном уране и графите $k = 2.46$, $\epsilon = 1.03$, $\phi\theta = 0.43$ и $K_\infty = 1.09$. Поскольку активная зона реального реактора имеет конечные размеры, коэффициент размножения равен $K = K_\infty(1 - P)$, где P — вероятность вылета нейтронов из активной зоны. Цепная реакция будет поддерживаться при условии $K \geq 1$, откуда для нашего примера находим $P \leq 0.08$. Это осуществляется лишь при определенных критических размерах активной зоны реактора — порядка 5-10 м. Это в 10-20 раз больше критического размера бомбы и, соответственно, масса активной зоны реактора будет больше массы бомбы в $10^3 \div 10^4$ раз и составит десятки тонн.

Если все реакторы будут работать на обогащенном уране, т.е. на тепловых нейтронах, как указано выше, то при нынешнем уровне использования ядерной энергии существующие запасы урана будут израсходованы в течение нескольких десятилетий. Проблему ядерного горючего можно преодолеть, если построить реакторы-размножители. Такие реакторы дают больше топлива, чем потребляют. В качестве примера рассмотрим активную зону реактора, содержащую в качестве топлива ^{239}Pu и природный уран-238. При делении ядра плутония-239 возникает в среднем 2.91 нейтронов. Один из этих быстрых нейтронов может вызвать деление другого ядра плутония-239, а один может быть захвачен ядром природного урана-238 и привести к реакции:



(над стрелками указаны также периоды полураспада).

Таким образом, в результате захвата нейтрона ураном-238 образуются ядра плутония-239, способные к делению. Плутоний-239 радиоактивен, он претерпевает альфа-распад с образованием урана-235, однако период полураспада плутония весьма велик: $T_{1/2} = 24400$ лет. Другой вид ядерного топлива, которое можно получить искусственным путем в реакторе, — это уран-233, образующийся при облучении нейтронами тория-232:



Уран-233 претерпевает альфа-распад с периодом полураспада $T_{1/2} = 162$ тыс. лет.

Основной параметр реактора-размножителя — это коэффициент воспроизводства, представляющий собой отношение числа атомов вторичного ядерного топлива к числу атомов первичного. Тот факт, что реакторы-размножители (бридеры) не использовались с начала развития ядерной энергетики, объясняется значительными техническими трудностями.

С одной стороны, в реакторах на быстрых нейтронах вследствие более интенсивного нейтронного потока предъявляются особо высокие требования к различным материалам и веществам (проблема радиационной стойкости материалов). Имеются трудности в создании материалов, используемых в тепловыделяющих элементах (ТВЭЛ). Использовать воду не представляется возможным, и в качестве теплоносителя применяют жидкий натрий.

С другой стороны, требуется разработка наиболее эффективных методов регенерации ядерного топлива, включающая выделение плутония-239. Причем, срок наработки плутония в количестве, достаточном для удвоения реакторной мощности, желательно иметь не более 10-12 лет.

Самые мощные в мире бридеры впервые были построены в СССР: один реактор (БН-350, мощность 350 МВт) — на полуострове Мангышлак в г. Шевченко (1972), другой — БН-600 с мощностью 600 МВт — на Белоярской АЭС. Мощный реактор-размножитель (бридер) во Франции носит название “Суперфеникс”. Приведем некоторые параметры этого реактора. Мощность — 3 ГВт (тепловая) и 1.24 ГВт (электрическая). В качестве топлива используется смесь плутония-239 и урана-238. Коэффициент воспроизводства равен 1.24. Максимальный поток нейтронов составляет $6.2 \cdot 10^{15}$ нейтронов/(см² · с). Реактор работает на быстрых нейтронах, что приводит к большой компактности: объем активной зоны реактора порядка 10 м³. Размеры “Суперфеникса”: внутренний диаметр — 64 м, высота — около 80 м. Активная зона реактора представляет собой гексагональную призму, собранную на тонких стержнях длиной 5.4 м. Стержни горючего материала перемежаются с контролирующими стержнями. Замена сгоревших элементов на новые производится один раз в год. Теплоноситель — жидкий натрий. Натрий плавится при температуре 98° С и кипит при 882° С при атмосферном давлении. Температура жидкого натрия в первом контуре “Суперфеникса” не превышает 550° С. Быстрота потока жидкого натрия (массовый расход) — 16.4 тонн/с в первичном контуре. Первичный трубопровод — натриевый, он забирает тепло из реактора и отдает его в котел, откуда те-

Таблица 41.5: Мировое производство первичной энергии в 1998 г. Производство показано в млн т условного топлива (у.т.): 1 кг у.т. имеет теплоту сгорания $7000 \text{ ккал} = 29.308 \text{ МДж} = 8.14 \text{ кВт}\cdot\text{час}$.

	нефть	газ	уголь	ядерная	гидро	Сумма	Доля
США, Канада	510	635	630	200	56	2031	23.2%
Западная Европа	340	266	240	245	45	1136	13.0%
СНГ, Вост. Европа	365	620	196	50	20	1251	14.3%
Ближний Восток	1080	170	20	5	-	1275	14.5%
Китай	165	20	650	15	5	855	9.7%
Япония	-	-	-	85	10	95	1.1%
Азия (проч.)	175	165	230	36	15	621	7.1%
Латинская Америка	510	110	30	45	5	700	8.0%
Африка	360	96	125	5	5	591	6.7%
Австралия	30	30	150	-	5	215	2.5%
Сумма	3535	2112	2271	686	166	8770	100.0%
Доля	40.3%	24.1%	25.9%	7.8%	1.9%	100.0%	

плю забирается вторым, также натриевым, трубопроводом. Во втором теплообменнике тепло забирает третий трубопровод, по которому циркулирует водо-паровая смесь. Выходящий перегретый пар выпускается под давлением 180 атм и при температуре 490°C . Реакторы на быстрых нейтронах могут в пределах использовать весь природный уран, и в этом — преимущество бридеров. Энергетические запасы урана-238 в земной коре, по-видимому, позволяют решить проблемы энергетики в следующем тысячелетии. В таблице 41.5 приведены данные о производстве различных видов первичной энергии по основным мировым регионам. Хотя на пути развития ядерной энергетики на основе реакций деления тяжелых элементов существует ряд препятствий, в том числе и психологического порядка (и многие опасения вполне резонны), ей пока не видно альтернативы. Уже сейчас до 10% энергии производится в развитых странах на ядерных реакторах (во Франции — 27%).

Задача 41.66. Определить массовый расход dm/dt ядерного горючего ^{235}U в реакторе АЭС. Тепловая мощность станции равна $P = 10 \text{ МВт}$. Принять, что в одном акте деления выделяется энергия $Q = 200 \text{ МэВ}$, а КПД станции равен $\eta = 0.2$ (20%).

Решение. Если за время dt разделилось dN атомов урана, то выделенная энергия равна QdN , а мощность реактора с учетом его КПД составит $P = \eta QdN/dt$. Масса ядра урана равна примерно $m_U = 235 \times 1.67 \cdot$

$10^{-27} = 3.92 \cdot 10^{-25}$ кг, т.е. искомый массовый расход составляет $dm/dt = m_U dN/dt = m_U P/(\eta Q)$. В СИ $Q = 200 \cdot 10^6 \times 1.60 \cdot 10^{-19} = 3.20 \cdot 10^{-11}$ Дж. Отсюда находим:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{3.92 \cdot 10^{-25} \times 10^7}{0.2 \times 3.20 \cdot 10^{-11}} = 6.13 \cdot 10^{-7} \text{ кг/с} = 53 \text{ г/сут.}$$

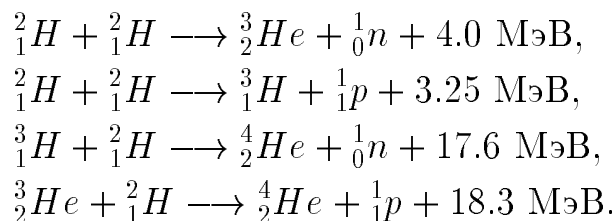
■

Термоядерная энергетика

Слияние легких ядер в одно ядро (ядерный синтез) сопровождается, как и деление тяжелых ядер, выделением огромных количеств энергии. При слиянии двух протонов и двух нейтронов в ядро гелия получается выигрыш в энергии 28.2 МэВ, а для 1 кг синтезированного гелия это составляет около 200 ГВт · час, что в десять раз превышает энерговыделение при делении урана.

На первый взгляд методика осуществления этой реакции очень проста. Единственная сложность состоит в преодолении кулоновского отталкивания, поскольку протоны и другие легкие ядра положительно заряжены. Чтобы преодолеть потенциальный барьер, обусловленный кулоновским отталкиванием, ядра должны обладать достаточной кинетической энергией, порядка 0.35 МэВ, что соответствует температуре порядка 2 млрд. кельвинов. Однако вследствие туннельного эффекта, реакции синтеза могут протекать с заметной интенсивностью уже при температурах порядка нескольких сот миллионов кельвинов (для сравнения укажем, что температура на поверхности Солнца равна примерно 6000 К). Поскольку для синтеза ядер необходимы очень высокие температуры, этот процесс называется термоядерной реакцией.

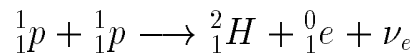
Перечислим несколько основных реакций слияния ядер и приведем для них значения выделяющейся энергии:



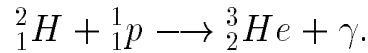
Особенно благоприятны условия для синтеза ядер дейтерия и трития, так как реакция между ними носит резонансный характер. Дейтерий

и тритий используются в качестве заряда термоядерной бомбы. Запа-лом в такой бомбе служит атомная бомба, при взрыве которой возникает температура порядка 10^7 К.

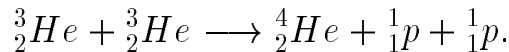
Синтез ядер водорода в ядра гелия, по-видимому, является источником энергии Солнца и звезд, температура в недрах которых $\sim 10^7 \div 10^8$ К. Этот синтез может осуществляться двумя путями. При относительно низких температурах ($\sim 10^7$ К) происходит протон-протонный цикл:



(напомним, что антиэлектрон ${}_1^0e$ (e^+) с зарядом $+1$ называется позитроном). Образовавшийся дейтрон сталкивается с протоном и объединяется в ядро гелия:

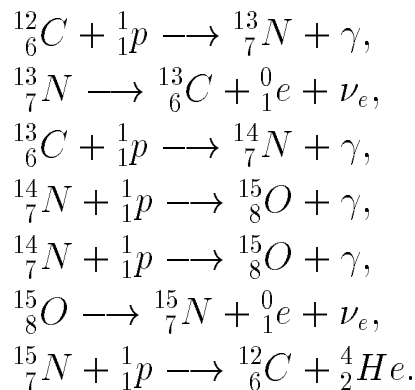


Последним звеном цикла является реакция:



Итогом цикла является превращение четырех протонов в ядро гелия.

При более высоких температурах ($T > 2 \cdot 10^7$ К) большей вероятностью обладает предложенный Г. Бете углеродный (или углерод-азотный цикл):



Как и в протонном цикле, итогом углеродного цикла является исчезновение четырех протонов и образование одного ядра гелия, количество ядер углерода остается неизменным; эти ядра участвуют в реакции в роли катализатора.

Таким образом, топливом, дающим солнечную энергию, является обычный водород, а продуктом горения, “золотом” — гелий. Оценки показывают, что водорода при неизменном выделении энергии должно хватить приблизительно на 10^{11} лет, а возраст Солнца оценивается примерно в

$5 \cdot 10^9$ лет. В звездах, не сходных с нашим Солнцем, ядерные реакции, по-видимому, могут протекать иначе.

При осуществлении неуправляемых термоядерных реакций в земных условиях одним из способов получения температур порядка $10^7 \div 10^8$ К является атомный взрыв. В течение микросекунд, которые длится атомный взрыв, температура оказывается достаточно высокой для осуществления термоядерной реакции, которая высвобождает энергию и далее уже сама поддерживает температуру, необходимую для того, чтобы все термоядерное горючее успело “выгореть”. На этом основан принцип действия водородной бомбы, где термоядерная реакция носит неконтролируемый характер.

Для осуществления управляемых термоядерных реакций необходимо создать и поддерживать в некотором объеме температуру выше сотни миллионов кельвинов. Анализ баланса энергии в термоядерной реакции показывает, что для превышения энергетических затрат на создание и поддержание реагирующей плазмы должен выполняться так называемый критерий Лоусона: произведение плотности n плазмы (т.е. числа ионов в 1 см^3) на время τ реакции (иначе говоря, время удержания плазмы в реагирующем состоянии) должно быть больше некоторой величины зависящей от температуры. Физический смысл критерия Лоусона состоит в том, что в термоядерном реакторе должно выделяться больше энергии, чем ее было затрачено для нагревания и удержания плазмы. Эта величина минимальна при температуре порядка ста миллионов кельвинов и составляет

$$n\tau \geq 2 \cdot 10^{20} \text{ с/м}^3. \quad (41.55)$$

Задача 41.67. Пусть термоядерный реактор позволяет удержать плазму в течение $\tau = 980$ мс. Какой должна быть плотность плазмы n для осуществления термоядерной реакции? Сравнить n с плотностью n_g газа при нормальных условиях.

Решение. По критерию Лоусона немедленно находим: $n \geq 2 \cdot 10^{20} / 980 \cdot 10^{-3} = 2.0 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}$. Рассмотрим моль газа при нормальных условиях. Там содержится $N_A = 6.01 \cdot 10^{23}$ частиц, занимающих стандартный молярный объем $V_m = 22.46 \text{ л} = 22.46 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$. Таким образом, плотность газа равна: $n_g = N_A / V_m = 2.7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$. Это больше плотности плазмы в 135000 раз. ■

Итак, проблема управляемого термоядерного синтеза сводится, в сущности, к следующему: надо нагреть смесь дейтерия и трития до 100 миллионов кельвинов и удерживать в таком состоянии достаточно долго, пока выделяющаяся при термоядерном синтезе энергия не превысит все затраты. Достичь нужных значений параметра Лоусона $n\tau$ можно двумя способами: увеличивая время удержания τ (это можно сделать за счет термоизоляции плазмы магнитным полем — т.н. магнитное удержание), или увеличивая плотность плазмы n до таких значений, когда реакции синтеза успеют произойти раньше, чем плазменное облачко разлетится (инерционное удержание). При этом, очевидно, нагрев вещества, называемого мишенью, должен быть осуществлен за время, меньшее времени разлета, что требует от источников энергии большой мощности. При таком импульсном нагреве произойдет термоядерный микровзрыв.

Таким образом, критерий Лоусона можно выполнить, если нагреть очень плотную плазму ($n \sim 10^{24}$ ионов/см³) до температур в сотни миллионов кельвинов, когда даже маленькое облачко с размерами порядка 1 мм будет разлетаться достаточно долго ($\tau \sim 1$ нс). При таком подходе основной проблемой является сжатие вещества и его быстрый нагрев до требуемых температур, что можно надеяться осуществить с помощью лазеров и пучков релятивистских частиц. Термоядерные системы, основанные на этом принципе, называют системами с инерционным удержанием (т.е. со свободным разлетом плазмы). Предельным и уже реализованным случаем такой системы является взрыв водородной бомбы.

Задача 41.68. Таблетка термоядерного горючего сделана из смеси дейтерия и трития в равных долях. Плотность таблетки $\rho_0 = 200$ кг/м³. Лазерный импульс сжимает таблетку, увеличивая ее плотность в $k = 1000$ раз. Какова плотность n получающейся плазмы и в течение какого времени ее надо удерживать, чтобы осуществить термоядерную реакцию?

Решение. Масса ядра дейтерия $m_d \approx 2m_p = 3.34 \cdot 10^{-27}$ кг, масса ядра трития $m_t \approx 3m_p = 5.01 \cdot 10^{-27}$ кг. Поскольку дейтерий и тритий смешаны в равных пропорциях, средняя масса ядра в таблетке равна $m = (m_d + m_t)/2 = 4.18 \cdot 10^{-27}$ кг. Плотность плазмы после сжатия находим теперь как $n = 1000\rho_0/m = 4.78 \cdot 10^{31}$ м⁻³. Согласно критерию Лоусона, плазму надо удерживать в течение $\tau = 2 \cdot 10^{20}/4.78 \cdot 10^{31} = 4.2 \cdot 10^{-12}$ с. В течение этого времени таблетка должна оставаться сжатой, пока не пойдет термоядерная реакция. ■

Задача исследований по инерционному удержанию сводится к уменьшению энергии взрыва до приемлемых значений и осуществлению серии управляемых микровзрывов. Чтобы выполнить критерий Лоусона при более низких плотностях плазмы и получить спокойное, почти стационарное “горение”, необходимо найти способы эффективной термоизоляции плазмы. В принципе это можно сделать с помощью магнитных полей, предотвращающих контакт горячей плазмы со стенками термоядерного реактора. В системах с магнитным удержанием задача заключается в осуществлении длительной термоизоляции плазмы (например, до 1 с) при значениях плотности около 10^{14} ионов/см³. В зависимости от структуры магнитных полей возможны различные виды ловушек для плазмы: токамаки, стеллараторы, амбиполярные ловушки и т.д. Токамак (аббревиатура от тороидальная камера с магнитной катушкой) был придуман в СССР — в Институте атомной энергии им. И. В. Курчатова. Стеллараторы изобрели в США. Академик Б. Б. Кадомцев считает, что коммерческий термоядерный реактор, вероятно, будет запущен не ранее 2015 г. Даже если оптимистические прогнозы физиков оправдаются, следует учесть неизбежную консервативность энергетической системы, которую невозможно перевести на новые виды топлива скорее, чем за время порядка 50 лет. Так что широкое практическое использование термоядерной энергетике — дело второй половины XXI века.

Контрольные вопросы

1. Из каких составляющих построено атомное ядро. Перечислите их свойства.
2. Что такое изотопы? Приведите примеры.
3. Как Вы думаете, чего в Вашем теле больше — протонов или нейтронов?
4. Почему массовые числа для многих элементов в таблице Менделеева не целочисленны?
5. Откуда мы знаем о существовании сильного (ядерного) взаимодействия? Перечислите свойства ядерных сил.
6. Каков механизм возникновения ядерных сил между нуклонами?
7. Что такое дефект массы и энергия связи ядра ?
8. Нарисуйте примерный график зависимости удельной энергии связи ядра от атомного номера элемента и объясните принципиальную возможность получения полезного выхода энергии при превращении элементов.

9. * Изложите основные идеи капельной модели ядра. Какие свойства ядер она объясняет?
10. * Какие свойства ядер объясняет оболочечная модель ядра?
11. Сформулируйте закон радиоактивного распада. Что такое постоянная распада и период полураспада?
12. Укажите как можно больше различий между альфа-, бета- и гамма излучениями.
13. * Почему скорость α -распада сильно меняется от ядра к ядру, в то время как энергии вылетающих альфа-частиц близки друг к другу?
14. Почему энергия альфа-частиц при распаде данного ядра всегда постоянна, а энергия электронов при бета-распаде может принимать разные значения?
15. * Объясните идею радиоуглеродного метода датировки ископаемых образцов органического происхождения. Перечислите достоинства и недостатки метода.
16. Укажите способ, как осуществить мечту средневековых алхимиков о превращении ртути в золото.
17. Объясните разницу между единицами рад, бэр и рентген.
18. Чем опасно α -излучение, если от него так легко защититься?
19. Почему медленные нейтроны, имеющие небольшую кинетическую энергию, при взаимодействии с ядрами некоторых элементов вызывают их деление?
20. Почему практическое применение нашло деление ядер именно нейтронами, а не протонами?
21. Почему при замедлении быстрых нейтронов используют вещества, содержащие легкие элементы?
22. Обсудите сравнительные достоинства и недостатки, в том числе загрязнение окружающей среды и безопасность получения различных способов получения энергии: сжигание ископаемого горючего, деление ядра, ядерный синтез.

Глава 42

Основные представления физики элементарных частиц

Размышлениям об ‘‘основных кирпичиках’’ природы, из которых построено все видимое разнообразие окружающего нас мира, ученые предавались со времен античности. В разное время на роль этих ‘‘кирпичиков’’ претендовали различные физические объекты. Хорошим кандидатом со времен Демокрита был атом. Однако шло время, обнаруживались все новые и новые виды атомов, и становилось ясно, что атом --- вовсе не самый фундаментальный объект природы. Получив в свое распоряжение квинтэссенцию экспериментальных данных по химии того времени --- периодическую таблицу Д. И. Менделеева, ученые пытались найти общий принцип, по которому она построена. Как мы уже узнали в нашем курсе, для объяснения химических свойств атомов и их расположения в таблице Менделеева было достаточно трех элементарных частиц --- протона, нейтрона и электрона, и одного фундаментального взаимодействия между протоном и электроном --- электромагнитного. Ядро построено из протонов и нейтронов, электрон связан с ним электромагнитными силами, вся эта система описывается квантовой механикой --- вот основные достижения физики 20-30 годов прошлого столетия. Но природа оказалась устроенной не так просто. В этой главе мы очень коротко расскажем о современных представлениях о фундаментальных составляющих окружающего нас вещества и о взаимодействиях между ними.

42.1 Фундаментальные взаимодействия

Первым фундаментальным взаимодействием, с которым столкнулся человек, была гравитация. Открытие Ньютоном закона всемирного тяготения позволило понять, что падение тел на Землю и движение планет в Солнечной системе обусловлены одними и теми же силами. Это стало исторически первым примером объединения казалось бы совершенно различных сил (взаимодействий).

Гравитационное взаимодействие управляет наиболее глобальными процессами во Вселенной, в частности, обеспечивая стабильность нашей Солнечной системы. Оно много меньше других видов взаимодействий в случае частиц малой массы, для которых существенны квантовые эффекты. Поэтому для таких частиц не обнаружены пока никакие экспериментальные проявления гравитационного взаимодействия. Слабость гравитационного взаимодействия в микромире становится очевидной из сравнения характеризующей его безразмерной константы, построенной из гравитационной постоянной G и других фундаментальных постоянных. В законе всемирного тяготения Ньютона силы между двумя телами (в качестве таковых мы возьмем основную структурную единицу атомного ядра — протоны) выражается как $F_g = Gm_p^2/r^2$. Произведение силы на квадрат расстояния $F_g r^2$ имеет размерность Дж · м; точно такую размерность имеет комбинация фундаментальных постоянных $\hbar c$. Поэтому величина $\alpha_g = Gm_p^2/\hbar c$ безразмерна и может служить для характеристики интенсивности гравитационного взаимодействия. Численное значение этой константы гравитационного взаимодействия (как называют подобные величины) равно $\alpha_g = 5.9 \cdot 10^{-39}$. Поступая аналогичным образом с законом Кулона для электростатического взаимодействия, находим соответствующую константу электромагнитного взаимодействия: $\alpha_{em} = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) \approx 7.3 \cdot 10^{-3}$ (мы уже встречались с этой величиной, обозначенной раньше как $\alpha \approx 1/137$). Убеждаемся теперь, что гравитационное взаимодействие слабее электромагнитного на 33 порядка! Поэтому последнее доминирует в микросистемах с размерами порядка атомов и молекул.

Но кроме электрического поля, как мы тоже уже узнали, в природе существуют и магнитные поля. Совершенно разные, опять же, свойства, и все же после создания классической электродинамики Фарадея-Максвелла они оказались объединенными в единое электромагнитное поле, которое проявляется по-разному в зависимости от относительного дви-

жения взаимодействующих зарядов и систем отсчета.

Еще один пример объединения взаимодействий дают наблюдаемые экспериментально силы взаимодействия между молекулами, называемые силами Ван дер Ваальса. Они сложным образом зависят не только от расстояния, но могут быть нецентральными, т.е. зависеть от взаимной ориентации молекул. Эти силы можно свести к электромагнитному взаимодействию заряженных частиц, из которых состоят электронейтральные в целом молекулы. Такие взаимодействия называют “остаточными”, т.к. они “остаются” при объединении заряженных объектов в нейтральные системы.

Экспериментальное открытие позитрона e^+ , этой античастицы по отношению к электрону, создание П. Дираком релятивистской теории электрона и последующая формулировка т.н. *квантовой электродинамики* завершило период развития собственно электромагнетизма — от классической к квантовой теории. Согласно квантовой электродинамике, основным актом является испускание заряженной частицей фотона, кванта электромагнитного поля. Испущенный фотон виртуален — он быстро будет поглощен другой заряженной частицей, то есть произойдет второй акт взаимодействия. В результате этих двух основных актов заряженные частицы будут притягиваться (отталкиваться) друг от друга. В каждом акте сохраняется электрический заряд, так что сами фотоны электрически нейтральны и не взаимодействуют между собой. Это проявляется в линейности уравнений электродинамики и справедливости принципа суперпозиции электромагнитного поля.

При проникновении вглубь атома, при попытках понять свойства атомных ядер, ученые столкнулись с еще одним взаимодействием — сильным ядерным взаимодействием и его переносчиком, π -мезоном. Мы уже говорили о том, что радиус взаимодействия определяется массой переносящей его частицы: $R \sim \hbar/(mc)$. Масса фотона равна нулю, и потому электромагнитными силы являются дальнодействующими. Сильные ядерные взаимодействия имеют радиус действия порядка $R \sim 10^{-15}$ м, что соответствует массе π -мезона около $140 \text{ МэВ}/c^2$, что и наблюдается на эксперименте. Их интенсивность очень велика — соответствующая константа взаимодействия $\alpha_s \sim 10$, но проявляются они лишь на очень малых расстояниях — порядка размеров ядер. Частицы, участвующие в сильном ядерном взаимодействии, называются *адронами*. К этому классу элементарных частиц относятся протон, нейтрон, пи-мезоны и множество

других частиц, открытых в экспериментах на ускорителях.

Вместе с удивительной частицей нейтрино (электрически нейтральной) было обнаружено и *слабое взаимодействие*, ответственное за распад нейтрона на протон и электрон: $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$. Как понятно уже из реакции, в слабом взаимодействии участвуют все эти частицы. Но электрон и нейтрино не принимают участия в сильном взаимодействии. По этому признаку их и им подобные частицы отнесли к классу *лептонов*. Слабое взаимодействие тоже действует лишь на очень малых расстояниях порядка 10^{-18} м, то есть переносчиками должны быть тяжелые частицы с массой порядка $80 - 90 \text{ ГэВ}/c^2$. Такие частицы, тяжелые бозоны W^+ , W^- и Z^0 , действительно были открыты в 80-х гг. 20 века в экспериментах на ускорителях в ЦЕРН (Женева). Интенсивность слабого взаимодействия можно охарактеризовать константой $\alpha_w = G_F m_p^2 c / \hbar^3 = 1.03 \cdot 10^{-5}$ (здесь G_F — так называемая постоянная Ферми, исторически появившаяся в теории задолго до открытия тяжелых бозонов). Видно, что электромагнитное взаимодействие интенсивнее слабого почти в тысячу раз.

Итак, в настоящее время известны четыре вида фундаментальных взаимодействий: гравитационное, электромагнитное, слабое и сильное. Первые открытые элементарные частицы естественным образом разбились на пары адронов и лептонов:

$$\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}. \quad (42.1)$$

Естественно, есть еще две пары соответствующих античастиц — антипротон и антинейтрон в первой и позитрон и антинейтрино — во второй. В дальнейшем мы особо о них упоминать не будем, помня, однако, что они существуют. Частицы в парах расположены так, что заряды частиц в верхних строках на единицу элементарного заряда больше зарядов частиц в нижних.

42.2 Кварки и лептоны

Эксперименты на ускорителях привели к открытию множества частиц, относящихся к классу адронов. Более того, внутри этого класса были обнаружены два семейства — *мезоны* с целым спином и *барионы*, спин которых принимает полуцелые значения. Протон и нейтрон относятся к барионам, первым же открытым мезоном стал т.н. пион или π -мезон.

Пополнение “таблицы Менделеева” для элементарных частиц производилось усилиями многих лабораторий разных стран мира. Были обнаружены т.н. странные частицы, по всем признакам относящиеся к адронам, но чем-то (квантовым числом *странность*) отличающиеся от протона и нейтрона. Всего известно более 300 адронов — слишком много, чтобы их можно было считать полноправными членами аналога таблицы Менделеева для микромира. Поэтому физики начали придумывать модели, позволяющие построить известные науке адроны из более фундаментальных составляющих. Их называли *кварками*, и об их свойствах мы поговорим в этом разделе.

Кроме того, было понято, что обнаруженный экспериментально мюон μ очень похож по свойствам на электрон (за исключением массы) и должен быть отнесен к классу лептонов, как и сопутствующее ему мюонное нейтрино ν_μ , отличающееся от электронного нейтрино ν_e . На этом этапе ученые имели уже дело с двумя парами лептонов, а адронов, как уже упоминалось, стало так много, что возникла необходимость навести какой-то среди них порядок. Это было сделано с помощью модели кварков с необычными свойствами — дробным электрическим зарядом (существуют и антикварки, заряды которых отличаются обратным знаком). Гипотеза о кварках была выдвинута в 1964 г. М. Гелл-Манном и Дж. Цвейгом. Было предположено, что все адроны состоят (по крайней мере, в теории) из кварков трех видов: *u*-кварка с зарядом $2/3$ (в единицах элементарного электрического заряда), *d*-кварка с зарядом $-1/3$ и странного *s*-кварка, также несущего заряд $-1/3$. Согласно этой модели, барионы состоят из трех кварков, а мезоны — из кварка и антикварка. Так, протон составлен из кварков uud (полный заряд, как легко убедиться, равен $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = +1$), нейтрон — из кварков udd (заряд $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$), π^+ -мезон состоит из кварка и антикварка $u\bar{d}$ (заряд $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = +1$), состав π^- -мезона — $\bar{u}d$, странный K^+ -мезон построен из $u\bar{s}$, частица антисигма-минус — $\bar{\Sigma}^-$ из $\bar{d}\bar{d}\bar{s}$ и т.д.

На этом этапе кварки рассматривались как удачная форма систематизации элементарных частиц. Модель кварков удачно описала все многообразие адронов, в том числе и некую группировку их по свойствам, о чем мы здесь говорить не будем. Однако вскоре выяснилось, что кварки — не просто математическая форма классификации адронов, но реально существующие внутри адронов объекты. Согласно модели кварков, открытая экспериментально частица омега-минус должна была состоять

из трех кварков: $\Omega^- = (sss)$. Спин этой частицы равен $3/2$, то есть все три одинаковых странных кварка находятся внутри нее в одинаковом состоянии. Но это противоречит принципу Паули. Выход был найден в предположении о наличии у кварков ранее неведомого заряда. Этот заряд должен был иметь *три* различных значения, в отличие от элементарного электрического заряда, принимающего два значения ± 1 . Новый заряд называли *цветом*, а его значения — условно красным, синим и желтым. Наблюдаемые адроны цветового заряда не имеют, то есть они “бесцветны”. Отсюда следуют свойства цветового заряда: 1) любой цвет компенсируется антицветом (чтобы объяснить бесцветность мезонов, состоящих из кварка и антикварка) и 2) смесь всех трех цветов дает бесцветное (“белое”) состояние — это нужно для объяснения бесцветности адронов, состоящих из трех кварков. То есть протон, например, состоит из красного кварка u , синего кварка u и желтого кварка d , так что в целом он нейтрален по отношению к цветовому заряду (“бесцветен”). Пи-плюс-мезон π^+ состоит, скажем, из красного кварка u и антикрасного антикварка \bar{d} и тоже “бесцветен”.

Следует подчеркнуть, что цветовой заряд кварков ничего общего, кроме аналогии, не имеет с обычным цветом, где любые оттенки могут быть получены смешиванием трех базовых цветов. В 1976 г. М. Гелл-Манн построил квантовую теорию цветовых взаимодействий. Согласно этой теории (ее называли *квантовой хромодинамикой*) цветовой заряд порождает особое поле, подобно тому, как заряд электрический порождает электрическое поле. Кванты этого поля называются *глюонами* (от англ. glue — клей), так как они “склеивают” кварки в адронах. Роль глюонов сводится к “перекрашиванию” кварка. Глюон несет пару цветов (например, синий и антикрасный), и будучи поглощен красным кварком, компенсирует красный цвет и окрашивает кварк в синий. Нетрудно понять, что раз у нас всего три цвета, то можно составить 3×3 цветовых комбинации для глюонов. Но одна из них полностью нейтральна (такой глюон с равной вероятностью компенсировал бы любой из трех цветов и окрасил бы кварк снова в тот же цвет) и во взаимодействие вклада не вносит. Таким образом, в квантовой хромодинамике взаимодействие между кварками осуществляется путем обмена восьмеркой глюонов. Наблюдаемые адроны (мезоны и барионы) составлены из “бесцветных” комбинаций кварков, а наблюдаемые сильные взаимодействия между ними — это “остаток” цветового взаимодействия кварков, входя-

Таблица 42.1: Таблица фундаментальных составляющих вещества согласно Стандартной теории

Поколения	1	2	3	Эл. заряд
Кварки	u	c	t	$2/3$
	d	s	b	$-1/3$
Лептоны	ν_e	ν_μ	ν_τ	0
	e	μ	τ	-1

щих в их состав. Таким образом, с сильным ядерным взаимодействием произошло то же, что и с силами Ван дер Ваальса: оно лишилось своего привилегированного статуса, превратившись в “остаток”, “хвост” более фундаментального цветового взаимодействия между кварками. Частицы с “открытым цветом” в свободном состоянии не наблюдаются — взаимодействие между ними столь сильно, что вырвать кварк или глюон из адрона невозможно (т.н. “тюремное заключение” или *конфайнмент* кварков). Отметим также, что глюоны сами несут цветовой заряд и, стало быть, могут взаимодействовать друг с другом. Поэтому квантовая хромодинамика — существенно нелинейная теория, гораздо более трудная для изучения и применения, чем квантовая электродинамика, где фотон электрическим зарядом не обладает.

Открытие так называемых очарованных частиц ввело в теорию четвертый кварк c (от англ. charm), ставший “парой” для s -кварка. Позже были найдены еще два кварка, t и b , еще более тяжелый тау-лептон τ и соответствующее ему тау-нейтрино ν_τ . Символы u, d, s, c, t, b , отличающие различные типы кварков, расшалившиеся физики называли *ароматами* (раз уж в сложной квантовой теории появился цвет, то почему бы не быть и запаху?).

Всего к настоящему времени обнаружено уже три пары лептонов и, в составе адронов, три пары кварков. Эти пары частиц называют поколениями. Каждой паре кварков в поколении должна соответствовать пара лептонов. Число пар лептонов и кварков должно совпадать, иначе окажется противоречивой другая теория, объединяющая электромагнитные и слабые взаимодействия. Таким образом, современная “таблица Менделеева” 42.1 для свойств фундаментальных частиц имеет простой вид.

А вот на вопрос о числе поколений теория ответа не дает, хотя экспериментальные данные указывают, что их, по всей видимости, не должно

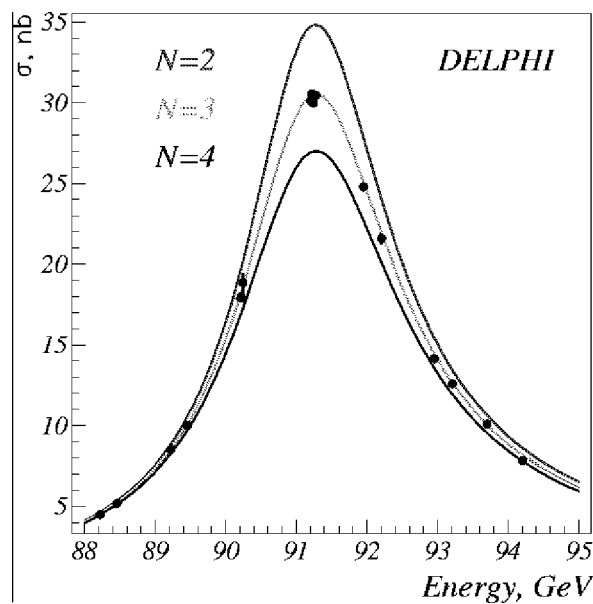


Рис. 42.1: На рисунке приведена зависимость сечения образования адронов в области Z^0 -пика как функция энергия столкновения встречных электрон-позитронных пучков. Три теоретические кривые построены в предположении, что число типов нейтрино (то же, что и число поколений) равно $N = 2, 3, 4$ (верхняя, средняя и нижняя кривые, соответственно). Видно, что экспериментальные точки указывают на наличие трех поколений лептонов. Данные получены на установке DELPHI на первой стадии работы ускорителя на встречных пучках LEP в ЦЕРН (Женева).

быть более трех, как следует из данных, приведенных на рис. 42.1.

42.3 Стандартная модель

Параллельно и даже несколько более быстрыми темпами развивалась теория слабых взаимодействий. В конечном итоге она слилась с квантовой электродинамикой в единую теорию электрослабых взаимодействий. Квантами электрослабого поля являются фотон (ответственность которого за перенос электромагнитного взаимодействия давно была известна) и экспериментально обнаруженная тройка частиц — т.н. заряженные “дублье” (W^+, W^-) и нейтральный “зет” (Z^0) бозоны. В отличие от фотона, эти последние частицы весьма массивны, что объясняет проявление слабых взаимодействий на очень коротких расстояниях, в отличие от дальнедействующих электромагнитных. Тем не менее, эти бозоны являются “кузенами” или даже родными братьями фотона.

Теория взаимодействия фундаментальных частиц (шести кварков и шести лептонов плюс такое же число их античастиц), обменивающихся

восьмеркой глюонов (сильные взаимодействия), фотоном и тройкой бозонов (электрослабые взаимодействия) известна как Стандартная теория или Стандартная модель. Она синтезирует современные представления обо всех элементарных частицах и трех фундаментальных взаимодействиях — сильном, электромагнитном и слабом. Гравитационное взаимодействие модель не рассматривает, поскольку его влияние в процессах физики частиц при достигнутых энергиях пренебрежимо мало. Стандартная теория основана на совокупности экспериментальных данных и на их интерпретации, даваемой теорией электрослабого взаимодействия и квантовой хромодинамикой.

Пока никак не удастся открыть еще одну частицу, предсказанную этой теорией — так называемый “бозон Хиггса”, благодаря взаимодействию с которым переносчики слабого взаимодействия W^+ , W^- и Z^0 приобрели, в отличие от фотона, довольно большую массу. Все остальные предсказания Стандартной теории уже подтверждены в опытах с высокой точностью, а ученые, ее создавшие и обосновавшие экспериментально, увенчаны Нобелевскими премиями в 70-90 гг. 20 века.

42.4 За пределами Стандартной теории

За пределами Стандартной модели сейчас идет только поиск, устоявшейся теории нет, и авторы хотели бы лишь упомянуть некоторые нерешенные проблемы современной физики элементарных частиц.

Масса нейтрино.

Массы лептонов и кварков Стандартной теорией не предсказываются. Принято считать, что масса нейтрино равна нулю, хотя теоретических оснований к этому нет. Более того, имеются определенные экспериментальные указания на то, что масса нейтрино отлична от нуля. Если это так, то возможны процессы превращения нейтрино одного вида в нейтрино другого — т.н. осцилляции нейтрино. Возможно, эта гипотеза может объяснить наблюдаемый экспериментально дефицит нейтрино в потоке солнечного излучения.

Нарушение СР-симметрии.

В свое время думали, что мир симметричен относительно операции Р отражения в обычном зеркале (т.н. гипотеза сохранения четности). После того, как экспериментально обнаружили, что четность не сохраняется в процессах с элементарными частицами, Л. Д. Ландау выдвинул

принцип сохранения т.н. комбинированной четности CP . Предполагалось, что если отразить наш обычный мир в зеркале (операция P) и одновременно заменить все частицы на соответствующие античастицы (операция зарядового сопряжения C), то “антизеркалье”, получившееся в результате комбинированной операции CP , ничем не будет отличаться от прежнего мира. Но и это оказалось неверным: в 1964 г. американские физики Кронин и Фитч обнаружили несохранение CP -четности в распадах нейтральных K^0, \bar{K}^0 -мезонов. Стандартная модель позволяет формально описать нарушение CP -симметрии, но природа явления не совсем ясна. Быть может, трудности понимания явления связаны с тем, что до недавнего времени оно наблюдалось лишь в системе нейтральных K -мезонов, построенных из странного кварка s и его античастицы \bar{s} . В следующем поколении кварков аналогом s является “нижний” кварк b , а аналогами K -мезонов — нейтральные B -мезоны с составом $b\bar{b}$. В их распадах также должно наблюдаться нарушение комбинированной четности, и изучение еще одной системы позволит, как надеются, пролить свет на его механизм. Нарушение CP в системе нейтральных B -мезонов было обнаружено в 2001 г. Очевидно, что нарушение CP -симметрии носит фундаментальный характер и непосредственно связано с какими-то глобальными закономерностями. Так, существует строгая математическая теорема о сохранении симметрии CPT , где T - операция отражения оси времени. Нарушение CP -симметрии, таким образом, “автоматически” означает нарушение T -симметрии, то есть выделенность одного из направлений течения времени. Согласно гипотезе А. Д. Сахарова, нарушение CP -симметрии “ответственно” также за преобладание частиц над античастицами во Вселенной.

Суперсимметрия.

В стандартной модели резко отличаются бозоны — кванты поля с целым спином (фотон γ , W^+ , W^- и Z^0 , глюоны g) и фермионы — частицы вещества с полуцелым спином (кварки и лептоны). Внутри фермионов существует определенная симметрия, выразившаяся в группировке частиц по парам, но с бозонами эта симметрия никак не связана. Очень интересная теория, называемая суперсимметрией, объединяет в пары частицы разных спинов — 0, 1/2, 1, 3/2, 2. Подход дает принципиальную возможность построить квантовую теорию гравитации и объединить электро-слабые и сильные взаимодействия. Теория предсказывает, что каждому фермиону должен соответствовать бозон со спином, отличающимся на

1/2. Гипотетические частицы со спином 0, являющиеся *суперпартнерами* обычных частиц, кварков и лептонов, называют *скварками* и *слептонами*, соответственно. Предсказано существование и суперпартнеров переносчиков взаимодействий - фотино, вино, зино и глюино со спином 1/2. Даже еще не обнаруженный бозон Хиггса имеет суперпартнера — хиггсино, также со спином 1/2.

Пока нет никаких экспериментальных данных, подтверждающих существование суперсимметрии в природе. Однако суперсимметрия привлекает внимание теоретиков, прилагающих усилия по построению единой теории фундаментальных взаимодействий.

Физика высоких энергий и космология.

Согласно принятой модели “горячей Вселенной”, все видимое образовалось примерно 15 млрд. назад в результате процесса, который мы называем *Большим взрывом*. Не совсем тот взрыв, который встает в нашем воображении при этих словах, но все же похоже — некая сингулярная точка, откуда пошло все сущее. Температура Вселенной тогда была высока, и мир постепенно остывал в процессе расширения. Поскольку в своих исследованиях физики забрели в область таких высоких энергий, которые реализовывались в природе в эпоху Большого взрыва, то неизбежным образом прогресс в понимании свойств элементарных частиц приводит к пониманию процесса рождения и устройства нашей Вселенной. Приведем лишь один пример.

Согласно астрофизическим наблюдениям, Вселенная имеет нулевую кривизну, т.е. мы живем в плоском мире, описываемом, грубо говоря, обычной геометрией Евклида. Однако такое возможно, если плотность вещества во Вселенной имеет строго определенное, т.н. критическое значение. Большая плотность означает, что Вселенная имеет положительную кривизну и ее нынешнее расширение сменится в будущем сжатием. Меньшая плотность приводит к отрицательной кривизне Вселенной и ее бесконечному расширению. Однако современные наблюдения показывают, что известные нам виды вещества (т.н. видимая материя) дает примерно 1-10% критической плотности. Наблюдения 1999 г. за взрывами сверхновых указывают, возможно, что еще 60% вклада в плотность материи дает т.н. космологическая постоянная, введенная в уравнения гравитации (общей теории относительности) Эйнштейном. Недостающие 30-40% приходятся на долю т.н. *темной материи*. Это — всего лишь красивое название для того, чего мы не знаем: темная материя не

обнаруживает себя электромагнитными (радио- или оптическими) излучениями и никак не дает о себе знать. Легчайшие суперпартнеры обычных элементарных частиц, нейтралино, могли бы быть составляющими темной материи. Требование соответствия критической плотности накладывает сильные ограничения на возможные массы суперпартнеров — масса нейтралино должна составлять тогда около $300 \text{ ГэВ}/c^2$.

Как бы то ни было, выход за пределы Стандартной теории, возможное Великое объединение электрослабых и сильных взаимодействий в одну теорию, возможность включения в объединенную теорию квантовой гравитации (Суперобъединение) — дело ученых текущего столетия.

Контрольные вопросы

1. Перечислите известные фундаментальные взаимодействия.
2. Почему гравитационное взаимодействие, столь важное в нашей обычной жизни, не играет роли в системах атомных размеров?
3. Чем отличаются два больших класса элементарных частиц — адроны и лептоны?
4. На какие типы частиц подразделяются адроны?
5. Каковы составляющие мезонов и барионов согласно Стандартной теории?
6. Перечислите известные ароматы кварков?
7. Что такое поколение кварков и лептонов? Сколько поколений известно?
8. Что такое цвет кварков?
9. Что такое цветовое взаимодействие?
10. Какие частицы переносят цветовое взаимодействие?
11. Что такое конфайнмент кварков?
12. Перечислите основные нерешенные проблемы физики элементарных частиц?

Часть VIII

Масштабы нашего мира

А для низкой жизни были числа,
Как домашний, подъяремный скот,
Потому что все оттенки смысла
Умное число передает.

Н. Гумилев. *СЛОВО*.
Стихотворения и поэмы. С. 312.

Глава 43

Свойства вещества

В этой главе речь пойдет о свойствах окружающего нас вещества. Следует иметь в виду, что мы приведем лишь оценки различных характеристик материалов, и не следует ожидать точного совпадения с экспериментальными данными. Наша цель --- качественно объяснить окружающий нас мир. Поэтому согласие с экспериментом с точностью до множителей 2, 3 и даже 10 можно будет считать удовлетворительным. Уточнение численных значений --- удел гораздо более сложных теорий.

43.1 Квантовое давление частицы

В этом разделе мы обратимся к поведению частицы, заключенной в некоторой ограниченной области пространства. В классической механике частица может иметь любую энергию, двигаясь между стенками и периодически упруго отражаясь от них. В частном случае она вообще может оставаться в состоянии покоя. Тогда ее энергия принимает наименьшее (нулевое) значение.

Как известно, квантовая механика основана на корпускулярно-волновом дуализме, одним из выражений которого является соотношение неопределенностей Гейзенберга. Если частица массой m заключена в сферической области радиусом R , то неопределенность ее положения $\Delta r \approx R$. Неопределенность ее импульса в основном состоянии порядка самого импульса $\Delta p \approx p$. Из соотношения неопределенностей $\Delta p \cdot \Delta r \approx \hbar$ находим импульс частицы $p \approx \hbar/R$ и энергию ее основного состояния.

$$E = \frac{p^2}{2m} \approx \frac{\hbar^2}{2mR^2}. \quad (43.1)$$

Так как частица ударяется о стенки, на них действует некая сила F , величину которой нетрудно определить. Зная скорость частицы $v = p/m$, находим период ее движения $T = 2R/v = 2mR^2/\hbar$. При упругом ударе о стенку импульс частицы p меняется на обратный $-p$, то есть за время $\Delta t = T$ стенке передается импульс $\Delta p = 2p$. Действующая на стенку сила определяется обычным образом:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2p}{T} = \frac{\hbar^2}{mR^3}. \quad (43.2)$$

Заметим, что тот же результат можно получить по-другому. Представим себе, что стенки чуть-чуть раздвигаются: $R \rightarrow R + \Delta R$. Тогда энергия частицы изменяется на величину $\Delta E = \Delta R (\partial E / \partial R)$. Эта величина отрицательна, так как энергия расходуется на работу $A = F \Delta R$ по передвижению стенки. Из закона сохранения энергии $A = -\Delta E$ находим соотношение $F = -(\partial E / \partial R)$, откуда также следует результат (43.2).

Разделив силу F на площадь поверхности $4\pi R^2$, получаем выражение для квантового давления, оказываемого частицей на стенки:

$$P_q \approx \frac{\hbar^2}{4\pi m R^5}. \quad (43.3)$$

Квантовое давление стремится расширить область заточения частицы. В его существовании нет ничего удивительного: и в классической физике любые обладающие ненулевой энергией объекты стремятся вырваться из объема, ограничивающего свободу их передвижения. Характерным для квантовых результатов является невозможность частице иметь нулевое значение энергии даже в основном состоянии: квантовая частица просто не может находиться в состоянии покоя.

43.2 Атомы

В этом разделе мы оценим линейные размеры атома водорода, исходя из представлений о квантовом давлении. Стандартное решение задачи было дано выше. Электрон удерживается вблизи ядра кулоновской силой электростатического притяжения $F_C = e^2/(4\pi\epsilon_0)R^2$, где R — радиус электронной орбиты. Можно сказать, что атом “сжимается” этой силой, и соответствующее электростатическое давление можно получить, разделив выражение для силы на площадь сферы радиусом R :

$$P_{el} \approx \frac{F_C}{4\pi R^2} = \frac{e^2}{(4\pi\epsilon_0)4\pi R^4}. \quad (43.4)$$

Электростатическому давлению противостоит квантовое давление электрона, удерживаемого внутри области радиусом R . Приравнявая квантовое давление (43.3) электростатическому (43.4), получаем оценку для радиуса атома водорода:

$$R \approx \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} = a_B \approx 0.5 \cdot 10^{-10} \text{ м.} \quad (43.5)$$

Мы получили выражение для так называемого радиуса Бора a_B , характерного размера атома водорода, задающего масштаб и для всех прочих атомов.

Найденный размер атома позволяет определить по порядку величины и другие его характеристики. Кинетическая энергия в атоме в два раза меньше абсолютной величины его (отрицательной) потенциальной энергии $e^2/(4\pi\epsilon_0)a_B$, откуда находим энергию электрона E_a в основном состоянии атома водорода:

$$E_a \approx -\frac{e^2}{(4\pi\epsilon_0)2a_B} = -\frac{m_e e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2} = -13.6 \text{ эВ.} \quad (43.6)$$

Характерная частота обращения электрона в атоме по порядку величины равна

$$\omega_a \approx \frac{E_a}{\hbar} \approx 2 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}. \quad (43.7)$$

Соответственно, длина волны испускаемого атомом света

$$\lambda_a \approx \frac{2\pi c}{\omega_a} \approx 10^{-7} \text{ м,} \quad (43.8)$$

что соответствует ультрафиолетовому диапазону.

43.3 Плотность вещества

Среднюю плотность ρ_a атома водорода можно определить как отношение его массы к объему. Последний по порядку величины равен $4\pi a_B^3/3$, а масса атома водорода сосредоточена в его ядре и потому равна массе m_p протона. Находим тогда:

$$\rho_a \approx \frac{m_p}{(4\pi a_B^3/3)} \approx 2.7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3. \quad (43.9)$$

Таблица 43.1: Плотность твердых веществ и жидкостей

Материал	бензин	вода	алюминий	железо	медь	свинец	ртуть	золото
$\rho, 10^3 \text{ кг/м}^3$	0.7	1	2.7	7.8	8.9	11.3	13.5	19.3

Мы пришли к величине, характерной для твердых тел и жидкостей. Это не удивительно, так как в конденсированных средах атомы плотно упакованы, так что плотность вещества определяется плотностью его составляющих. Иная ситуация в газах, где есть большие промежутки между отдельными атомами. Полученную оценку полезно сравнить с данными таблицы 43.1.

43.4 Тепловое расширение тел

Разделив характерную энергию атома на постоянную Больцмана, найдем эквивалентную температуру T_a :

$$T_a \approx \frac{E_a}{k_B} \approx 10^5 \text{ K}. \quad (43.10)$$

При таких огромных температурах энергии теплового движения атома достаточно, чтобы полностью “содрать” электронные оболочки, то есть превратить газ в плазму. Обратная величина характеризует коэффициент теплового расширения твердых тел. Действительно, представим себе, будто электрон связан с атомным ядром пружинкой жесткостью k . Тогда его колебания будут описываться классическим уравнением Ньютона:

$$m_e \frac{d^2 x}{dt^2} = -k x, \quad (43.11)$$

причем частота колебаний $\omega_a = \sqrt{k/m_e}$. Так как частота ω_a нам уже известна, мы можем найти жесткость эквивалентной “пружины” $k = \omega_a^2 m_e$. С другой стороны, амплитуда колебаний l нашего “маятника” определяется из соотношения $E_a = kl^2/2$, где правая часть представляет собой потенциальную энергию “маятника” в момент наибольшего отклонения. При нагревании среды на ΔT градусов атом получает дополнительную порцию энергии $\Delta E \approx k_B \Delta T$, амплитуда колебаний увеличивается на величину Δl : $\Delta E_a \approx kl\Delta l = k l^2 (\Delta l/l) = 2E_a (\Delta l/l)$. Отсюда находим выражение для коэффициента линейного теплового расширения α , определяемого как относительное удлинение амплитуды колебаний одного

Таблица 43.2: Коэффициент теплового расширения

Материал	алмаз	инвар	фарфор	стекло	сталь	золото	медь	свинец
$\alpha, 10^{-6} K^{-1}$	1.3	1.5	3	8.1	11.2	14.2	16.5	29.0

атома (т.е. пружинки), а значит, и всего образца при нагревании на один градус:

$$\alpha \approx \frac{\Delta l}{l \Delta T} = \frac{\Delta E_a}{2E_a \Delta T} = \frac{k_B}{2E_a} = \frac{1}{2T_a} = 5 \cdot 10^{-6} K^{-1}. \quad (43.12)$$

Сравним полученную оценку с данными для некоторых материалов (таблица 43.2).

43.5 Температура плавления

Представление об атоме как о “пружинке”, соединяющей электрон с протоном, оказывается полезным и при оценке свойств кристаллических структур. Их можно рассматривать как набор атомов, соединенных “пружинками”. Силы, соединяющие атомы в кристалл, имеют ту же самую электромагнитную природу, что позволяет предположить, что жесткость “пружинок” будет той же самой, что и в атомах. Но колеблются уже не электроны, а атомы, так что в ряде формул вместо массы электрона m_e должна появиться масса протона m_p . Например, характерная молекулярная частота будет определяться формулой $\omega_m \approx \sqrt{k/m_p} = \sqrt{m_e/m_p} \omega_a$. Протон почти в 2000 раз массивнее электрона, так что соответствующая частота (а значит, и характерная энергия кристалла) будет примерно в 45 раз меньше. Так, для характерной энергии связи частицы в кристалле и эквивалентной температуры имеем

$$E_m \approx \sqrt{\frac{m_e}{m_p}} E_a \approx 0.3 \text{ эВ}, \quad T_m \approx \sqrt{\frac{m_e}{m_p}} T_a \approx 2200 \text{ K} \approx 2000 \text{ }^\circ\text{C}. \quad (43.13)$$

По физическому смыслу эквивалентная температура — это температура, при которой молекулы отделяются друг от друга, то есть вещество плавится. Температуры плавления некоторых твердых тел приведены в таблице 43.3.

Таблица 43.3: Температура плавления твердых тел

Материал	олово	латунь	золото	чугун	кремний	сталь	иридий	вольфрам
$T_{пл}, ^\circ C$	231.9	920	1063	1200	1420	1500	2454	3380

43.6 Модуль упругости

Квантовое давление в атоме, как мы видели, равно

$$P_q \approx \frac{\hbar^2}{4\pi m_e a_B^5} \approx 2 \cdot 10^{12} \text{ Н/м}^2. \quad (43.14)$$

Такие высокие давления встречаются внутри звезд, о чем речь пойдет дальше. В кристалле энергия уменьшается почти на два порядка, и характерная величина квантового давления (мы обозначим его E) будет равна

$$E \approx \sqrt{\frac{m_e}{m_p}} P_q \approx 4 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2. \quad (43.15)$$

По физическому смыслу эта величина не что иное, как модуль упругости (Юнга) — характеристика сжимаемости твердых тел. В таблице 43.4 приведены соответствующие экспериментальные данные.

Таблица 43.4: Модуль Юнга

Материал	свинец	фарфор	серебро	чугун	медь	сталь	вольфрам
$E, 10^{10} \text{ Н/м}^2$	1.6	5.8	7.9	10.8	12.3	20.6	39

Несмотря на довольно большой разброс данных в этой и других таблицах, должно быть ясно, что различия определяются особенностями структуры данных конкретных веществ, в то время как наше рассмотрение проводится с общей точки зрения и правильно описывает порядок величин.

43.7 Теплота сгорания

Основу нашей цивилизации до сих пор обеспечивает химическая реакция $C + O_2 \rightarrow CO_2 + 4.2 \text{ эВ}$. Массовые числа углерода и кислорода равны 12 и 16, соответственно, так что в одной реакции участвует $12 m_p \approx 2 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$ углерода. Энергетический выход реакции равен $4.2 \text{ эВ} \approx 6.73 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$. Разделив эту величину на массу углерода, получаем величину

Таблица 43.5: Теплота сгорания

Материал	дерево	торф	аммиак	спирт	антрацит	бензин	пропан	водород
H , МДж/кг	8	15	18.4	25	31	42	42.5	120

34 МДж/кг. Таблица 43.5 дает представление о теплоте сгорания H различных видов топлива.

Заметим, что теплотворная способность газов обычно выражается в единицах МДж/м³, что удобнее для практических нужд. В таблице для удобства сравнения эта величина пересчитана в МДж/кг с помощью значения плотности этих газов при нормальных условиях.

В таблице, повторим, выход энергии отнесен к массе горючего; количеством сожженного кислорода мы обычно не интересуемся. Подсчитаем, однако, энергетический выход H' с учетом всех веществ, вступающих в реакцию. Для реакции горения углерода мы должны тогда отнести выход энергии к полной массе всех 44 нуклонов ($44 m_p \approx 7.36 \cdot 10^{-26}$ кг), или умножить полученные 34 МДж/кг на фактор $12/44$, что даст величину порядка $H' = 9.3$ МДж/кг. Реакция горения водорода имеет вид $2H + O \rightarrow H_2O$. Всего в реакции участвует 18 нуклонов, а теплотворная способность H в приведенной таблице отнесена лишь к двум нуклонам водорода. Умножая 120 МДж/кг на фактор $2/18$, получаем $H' = 13.3$ МДж/кг, что довольно близко к значению аналогичной величины для углерода. Теперь мы можем объяснить ее происхождение. Выше была получена оценка энергии E_m , характерной для кристаллической (или молекулярной) структуры: $E_m \approx 0.3$ эВ $\approx 4.8 \cdot 10^{-20}$ Дж. В сущности была оценена энергия связи молекулы водорода H_2 . Относя эту энергию к массе молекулы $2m_p \approx 3.35 \cdot 10^{-27}$ кг, мы и получаем величину нужного порядка:

$$H' \approx \frac{E_m}{2m_p} \approx 14 \text{ МДж/кг.} \quad (43.16)$$

43.8 Поверхностное натяжение и теплота кипения

Молекулы жидкости испытывают притяжение со стороны других молекул. Если данная молекула находится внутри жидкости, то силы со стороны других молекул уравниваются. Если же молекула находится на поверхности, то этого не происходит, и молекула притягивается жидкостью. Такое явление называется поверхностным натяжением,

Таблица 43.6: Молярная теплота кипения и коэффициент поверхностного натяжения

Материал	спирт	ацетон	бензол	вода	алюминий	ртуть	золото
λ , кДж/моль	38.74	29.09	30.76	40.68	293	59.23	331
σ , мДж/м ²	22.8	23.7	28.9	72.9	915	465	1125
$\sqrt{\lambda/(2\pi N_A \sigma)}$, 10^{-10} м	6.7	5.7	5.3	3.8	2.9	1.8	2.8

и характеризуется оно коэффициентом σ , имеющим размерность Дж/м². По смыслу коэффициент поверхностного натяжения — это энергия, приходящаяся на единицу свободной поверхности жидкости. Из-за поверхностного натяжения жидкость в условиях невесомости собирается в шар, так как такая форма обеспечивает минимальную площадь поверхности.

Казалось бы, что общего между коэффициентом поверхностного натяжения и молярной теплотой кипения λ — энергией, затрачиваемой на испарение одного моля жидкости? Но не будем торопиться.

Возьмем моль жидкости, “вооружимся острым ножом” и аккуратно отделим все $N_A = 6.02 \cdot 10^{23}$ молекул друг от друга. На это надо затратить энергию $E_m N_A$. Но отделение молекул друг от друга есть не что иное, как превращение жидкости в пар. Получаем тогда оценку

$$\lambda \approx E_m N_A \approx 30 \text{ кДж/моль.} \quad (43.17)$$

С другой стороны, испарив (“вырезав”) одну молекулу из образца, мы затрачиваем энергию E_m и увеличиваем полную поверхность жидкости на удвоенную площадь поверхности молекулы $S = 2 \cdot 4\pi a_B^2$. На образование единицы площади пошла, таким образом, энергия E_m/S , что ведет к оценке коэффициента поверхностного натяжения:

$$\sigma \approx \frac{E_m}{8\pi a_B^2} \approx 680 \text{ мДж/м}^2. \quad (43.18)$$

В нашей интерпретации интересно то, что зная лишь макроскопические характеристики вещества λ и σ , мы могли бы уже определить диаметр молекул $d \approx \sqrt{\lambda/(2\pi N_A \sigma)}$. Соответствующие экспериментальные данные приведены в таблице 43.6.

Видно, что мы получили неплохую оценку для молярной теплоты кипения обычных жидкостей. Удвоенный же радиус Бора, как видно из последней строки таблицы, меньше реальных размеров молекул жидкости, что и объясняет разницу в оценке коэффициента поверхностного натяжения, которая совсем неплоха для расплавленных металлов. Мы пытаемся объяснить свойства жидкостей в рамках единой схемы, не делая различий

между, скажем, водой и жидким золотом. Отсюда и некоторые расхождения. В то же время числа в последней строке не слишком разнятся друг от друга, так что наши представления о связи молярной теплоты кипения и коэффициента поверхностного натяжения оказываются, по-видимому, правильными.

43.9 Коэффициент теплопроводности

Явление теплопроводности относится к т.н. явлениям переноса. Пусть частицы среды имеют массу m , среднюю скорость теплового движения v , распределены с плотностью n и имеют длину свободного пробега λ . Представим себе какую-то площадку S в среде, расположенную, скажем, горизонтально. Чтобы избежать проблем с интегрированием по скоростям частиц, упростим задачу, представив, что они могут двигаться только по шести направлениям (вверх-вниз, вперед-назад, направо-налево). Время между столкновениями $\tau = \lambda/v$. За это время сверху на площадку попадут частицы из объема $v\tau S$; их число — $nv\tau S/6$. Поскольку время их движения равно τ , они не испытали столкновений до достижения площадки S и несут информацию о свойствах слоя, расположенного на расстоянии λ выше площадки. Пусть температура в том слое равна T_+ . Тогда средняя тепловая энергия частиц этого слоя равна $3k_B T_+/2$, а количество тепловой энергии, проходящей через площадку S сверху, равно $w_+ = nv\tau S k_B T_+/4$. Аналогично, на площадку попадают частицы из слоя, расположенного на расстоянии λ ниже, и переносимая ими энергия равна $w_- = nv\tau S k_B T_-/4$, где T_- — температура нижнего слоя. Находим тогда полный поток энергии через площадку S , то есть количество энергии, проходящей через единицу площади в единицу времени $Q = (w_+ - w_-)/\tau S$:

$$Q = \kappa \frac{dT}{dz}, \quad \kappa \approx \frac{1}{2} k_B n v \lambda. \quad (43.19)$$

Здесь разность температур слоев заменена выражением $T_+ - T_- = 2\lambda(dT/dz)$. Параметр κ называется коэффициентом теплопроводности.

Оценим его величину для жидкости или твердого тела (не проводника, с теми ситуация особая). Плотность частиц имеет порядок $n \approx 1/(2a_B)^3 \approx 0.8 \cdot 10^{30} \text{ 1/м}^3$, длина свободного пробега по порядку величины равна диаметру атома $\lambda \approx 2a_B \approx 10^{-10} \text{ м}$. Средняя скорость теплового движения оценивается из соотношения $m_p v^2/2 \approx 3k_B T_{biol}/2$, откуда

Таблица 43.7: Коэффициент теплопроводности

Материал	воздух	пенопласт	пробка	дерево	асбест	вода	бетон	мрамор
κ (Вт/(мК))	0.034	0.04	0.05	0.1-0.2	0.4-0.8	0.6	0.7-1.2	2.8

$v \approx 2.9 \cdot 10^3$ м/с. В результате приходим к оценке $\kappa \approx 1.7$ Вт/(мК). Сравним этот результат с таблицей 43.7. Видно, что оценка завышена почти на два порядка для пористых материалов, содержащих воздушные пустоты, не учтенные нами. В остальном получается вполне правдоподобная оценка.

Глава 44

Масштабы небесных тел

В этой главе речь пойдет о небесных телах в диапазоне от звезд до астероидов. Если в первой главе этой части мы в основном говорили об электромагнитных взаимодействиях, которые определяют характеристики материалов, то здесь мы обсудим конкуренцию электромагнитных сил с гравитационными, ответственными за образование больших сгустков вещества.

44.1 Квантовое давление ансамбля частиц

Нерелятивистский случай

Спросим себя, как изменится энергия и квантовое давление, если в ящик помещена не одна, а N одинаковых частиц? Человеку, воспитанному в духе классической физики, ответ очевиден — вклады каждой частицы просуммируются, так что полные энергия и давление будут в N раз больше:

$$E_N \approx N \frac{\hbar^2}{2mR^2}, \quad P_{q,N} \approx N \frac{\hbar^2}{4\pi mR^5}. \quad (44.1)$$

Но этот вывод справедлив для действительно независимых частиц, не мешающих друг другу. Таковы частицы с целым спином. Если же речь идет, скажем, об электронах со спином, равным половине постоянной Планка $s = \hbar/2$, то это уже не так. Для подобных частиц (фермионов) действует принцип Паули: в данном квантовом состоянии может находиться лишь одна из них. Это означает, что в основном состоянии находится два электрона, отличающиеся направлениями спина. Следующая пара занимает уже первый возбужденный уровень и т.д. В результате

энергия и давление всех N электронов будут заметно большими, чем это предусмотрено формулами (44.1).

На качественном уровне принцип Паули можно трактовать так, что каждая пара частиц занимает какую-то область пространства, куда уже “не допускает” другие частицы. Если в области с характерным размером R (а значит, с объемом $V \approx R^3$) заключено N фермионов, то на долю каждого из них “достанется” объем $V_N \approx V/(N/2) = 2V/N$, то есть область с характерным размером $R_N \approx (2/N)^{1/3}R$. Полная энергия $E_N^{(f)}$ всего коллектива фермионов получается из той-же формулы (44.1) при замене в ней $R \rightarrow R_N$; давление определяется обычным образом — дифференцированием энергии по R и делением результата на площадь поверхности $4\pi R^2$. Имеем в итоге:

$$E_N^{(f)} \approx N^{5/3} \frac{\hbar^2}{3mR^2}, \quad P_{q,N}^{(f)} \approx N^{5/3} \frac{\hbar^2}{6\pi mR^5}. \quad (44.2)$$

Здесь для упрощения записи мы заменили числовой множитель $2^{2/3} \approx 1.59$ на близкое значение $3/2$.

Релятивистский случай

Рассмотрение квантового давления в предыдущей главке базировалось на классической формуле связи энергии с импульсом $E = p^2/2m$. Однако при больших давлениях энергии частиц становятся настолько большими, что эта формула оказывается неверной. Когда энергия частицы много больше ее энергии покоя ($E \gg mc^2$), связь энергии с импульсом будет такой же, как и для фотонов: $E \approx pc$. Используя соотношение неопределенности Гейзенберга, получаем оценку для энергии одной релятивистской частицы, заключенной в объеме радиусом R : $p \approx \hbar/R \rightarrow E \approx \hbar c/R$. Для ансамбля релятивистских фермионов надо по-прежнему заменить $R \rightarrow R_N$, чтобы прийти к выражению для средней энергии частицы $\langle E \rangle \approx N^{1/3} \hbar c/R$ (мы опустили несущественный множитель $2^{1/3} \approx 1.26$). Умножая среднюю энергию на число частиц, получаем полную энергию ансамбля, откуда вытекает также соответствующее выражение для квантового давления релятивистских фермионов:

$$E_N^{(f,rel)} \approx N^{4/3} \frac{\hbar c}{R}, \quad P_{q,N}^{(f,rel)} \approx N^{4/3} \frac{\hbar c}{4\pi R^4}. \quad (44.3)$$

Полученные формулы понадобятся нам в дальнейшем при рассмотрении механизма устойчивости звезд.

44.2 Излучение черного тела

Поскольку звезды и планеты излучают и поглощают электромагнитные волны, нам нужно будет также использовать соответствующие физические законы. С хорошей степенью точности космические объекты можно рассматривать как черные тела. В этом разделе мы приведем простой вывод закона Стефана-Больцмана для излучения черного тела.

Пусть в некотором объеме имеется электромагнитное излучение. Каждый фотон можно рассматривать как частицу с энергией $E_\gamma = \hbar\omega$, занимающую в пространстве область с линейными размерами порядка c/ω (то есть порядка длины волны). Таким образом на каждый фотон приходится объем $V_\gamma \approx (c/\omega)^3$, откуда следует выражение для плотности энергии $w \approx E_\gamma/V_\gamma \approx \hbar\omega^4/c^3$. Остается связать частоту фотона с температурой T фотонного газа. На каждую степень свободы приходится энергия $k_B T/2$, и фотон имеет две степени свободы (два направления поляризации электромагнитной волны). Поэтому $\hbar\omega \sim k_B T$. Используя это соотношение, находим для плотности энергии излучения черного тела:

$$w \approx \frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3}. \quad (44.4)$$

Точное выражение отличается от (44.4) множителем $\pi^2/15 \approx 0.66$.

Чтобы оценить поток энергии с поверхности черного тела (энергия, излучаемая или поглощаемая единицей поверхности в единицу времени), заметим, что за промежуток времени Δt на какую-нибудь площадку S попадают фотоны из объема $Sc\Delta t$, причем не все, но лишь их шестая часть (фотоны могут двигаться вперед-назад, влево-вправо, вверх-вниз). Тогда на нашу площадку попадет энергия $\Delta E \approx wSc\Delta t/6$. Поток энергии W равен $W = \Delta E/S\Delta t = wc/6$. Получаем в результате закон Стефана-Больцмана

$$W = \sigma T^4, \quad (44.5)$$

где $\sigma \approx k^4/6\hbar^3 c^2 \approx 5.75 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ К}^4)$. Точный ответ для постоянной Стефана-Больцмана имеет вид: $\sigma = \pi^2 k^4/60\hbar^3 \approx 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ К}^4)$, и отличается от нашей простой оценки множителем $\pi^2/10 \approx 0.987$.

44.3 Звезды

Основной вопрос, на который надо ответить — это почему звезда устойчива, т.е. что противостоит силам тяготения, пытающимся сжать веще-

ство звезды? Существует несколько моделей звезд, описывающих разные стадии их развития. Мы начнем с последней стадии, когда звезда превращается в т.н. белого карлика.

Белые карлики

В этой стадии вещество звезды полностью ионизовано, масса звезды определяется числом $N = M_*/m_p$ протонов, число электронов — такое же, так как звезда в целом электрически нейтральна. Силам тяготения, сжимающим звезду, противостоит давление электронов, для которого мы получили оценку (44.3). Протоны гораздо массивнее, и их вклад поэтому относительно невелик.

Тело массой M_* и радиусом R_* создает на своей поверхности гравитационный потенциал GM_*/R_* , где $G = 6.673 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг с}^2$ — гравитационная постоянная. Можно показать, что потенциал в центре гравитирующей массы будет ровно в полтора раза больше. Умножая его на массу звезды, получаем выражение для запаса гравитационной энергии в ней:

$$E_{*,gr} = \frac{3}{2}G \frac{M_*^2}{R_*}. \quad (44.6)$$

Эта энергия должна быть равна энергии (44.3) электронного газа, откуда следует уравнение:

$$\frac{3}{2}G \frac{M_*^2}{R_*} = \left(\frac{M_*}{m_p}\right)^{4/3} \frac{\hbar c}{R_*}. \quad (44.7)$$

Радиус звезды сокращается в этом соотношении и о нем мы ничего не можем сказать в данном предельном случае. Для массы звезды получается выражение:

$$M_* \approx \frac{m_p}{2\alpha_G^{3/2}} \approx 1.85 \cdot 10^{30} \text{ кг}. \quad (44.8)$$

Здесь мы ввели безразмерный параметр $\alpha_G = Gm_p^2/\hbar c \approx 5.89 \cdot 10^{-39}$. Аналогичная величина для электромагнитных сил $\alpha_{em} = e^2/(4\pi\epsilon_0)\hbar c \approx 1/137 \approx 0.0073$. Сравнение α_G и α_{em} говорит об относительной интенсивности гравитационных и электромагнитных сил. Мы также заменили для упрощения формул множитель $(2/3)^{3/2} \approx 0.544$ на $1/2$. Полученная оценка практически совпадает с массой Солнца $M_\odot \approx 1.99 \cdot 10^{30} \text{ кг}$, хотя, как мы скоро увидим, Солнцу до стадии белого карлика остается, по счастью, еще около 5 млрд. лет.

Если масса белого карлика гораздо меньше массы Солнца, то энергии электронов не столь велики, и вместо (44.7) надо пользоваться соответствующим нерелятивистским результатом (см. выше):

$$E_{\star,e} \approx N^{5/3} \frac{\hbar^2}{3m_e R_\star^2}. \quad (44.9)$$

Тогда из равенства гравитационной энергии и полной энергии электронов следует связь массы и радиуса белого карлика:

$$R_\star \approx \frac{\hbar}{m_e c} \frac{1}{5\alpha_G} \left(\frac{m_p}{M_\star} \right)^{1/3}. \quad (44.10)$$

Здесь опять-таки для упрощения записи мы заменили $2/9$ на $1/5$. Используя выражение (44.8), которое мы будем теперь считать массой Солнца, получаем эту же формулу в другом виде:

$$R_\star \approx \frac{\hbar}{m_e c} \frac{1}{4\sqrt{\alpha_G}} \left(\frac{M_\odot}{M_\star} \right)^{1/3} \approx (1.36 \cdot 10^6 \text{ м}) \left(\frac{M_\odot}{M_\star} \right)^{1/3} \quad (44.11)$$

(мы, как всегда, упростили формулы, заменив $2^{1/3}/5$ на $1/4$). Хотя эта формула справедлива при $M_\star \ll M_\odot$, применение ее для Солнца показывает, что получающийся радиус в 500 раз меньше радиуса Солнца $R_\odot \approx 6.6 \cdot 10^8$ м (почему такие звезды и называли карликами). Соответственно, плотность белого карлика в 100 млн. (500^3) раз больше плотности Солнца.

Температура в центре звезды

В предыдущем разделе мы оценили массу звезды на конечной стадии ее жизни. Однако если звезда за время существования сбрасывает в виде излучения не так много своей массы, то наша оценка должна годиться и для звезд в полном расцвете сил. Действительно, наблюдения показывают, что массы звезд сосредоточены в основном в интервале $0.1 M_\odot \div 10 M_\odot$. Этого нельзя сказать о радиусе белого карлика, который, как мы видели, во много раз меньше, чем радиус Солнца. Поэтому принимая для массы типичной звезды оценку (44.8), мы должны найти другой механизм уравновешивания сил тяготения нежели давление электронного газа.

Предположим, что в основном объеме звезды вещество не ионизовано, но существует в виде атомов. Это так, если температура заметно меньше

температуры ионизации (43.10), которую мы оценили в 100 тыс. градусов. Тогда средняя плотность звезды должна совпадать по порядку величины с плотностью атома $\rho_a \approx 2.7 \cdot 10^3$ кг/м (43.9). Зная массу звезды (44.8), получаем оценку для ее радиуса:

$$R_\star \approx a_B \left(\frac{M_\star}{m_p} \right)^{1/3} \approx \frac{a_B}{\sqrt{\alpha_G}} \approx 6.9 \cdot 10^8 \text{ м}, \quad (44.12)$$

где мы пренебрегли множителем $2^{1/3}$ в знаменателе. Совпадение получившегося значения с радиусом Солнца говорит, что мы на верном пути.

Термоядерные реакции идут в центре звезды, ее ядре, где плотность вещества гораздо больше средней плотности звезды, а температуры, соответственно, гораздо выше 100 тыс. градусов. Оценим температуру T_c в центральной области стандартной звезды. Гравитационная энергия (44.6) ведет к гравитационному давлению в центре звезды:

$$P_{gr} \approx \left(-\frac{\partial E_{\star, gr}}{\partial R_\star} \right) \cdot \frac{1}{4\pi R_\star^2} = \frac{3}{8\pi} G \frac{M_\star^2}{R_\star^4}. \quad (44.13)$$

Давлению гравитирующих масс в нормальной звезде противостоит не квантовое давление электронов, а обычное давление газа, описываемое уравнением Клапейрона-Менделеева:

$$P_{gas} = \frac{M_\star}{V} \frac{RT_c}{\mu} = \frac{3}{4\pi} \frac{M_\star}{R_\star^3} \frac{RT_c}{\mu}, \quad (44.14)$$

где $V = 4\pi R_\star^3/3$ — объем звезды, $R = N_A k_B$ — газовая постоянная, $\mu = m_p N_A$ — молекулярный вес вещества (протонов). Приравнивая давления $P_{gas} = P_{gr}$ и используя выражения для массы и радиуса стандартной звезды, получаем оценку для температуры в ее центральной области:

$$T_c \approx \frac{GM_\star m_p}{2k_B R_\star} \approx \frac{\hbar c}{3k_B a_B} = \alpha_{em} \frac{m_e c^2}{3k_B} \approx 14 \text{ млн. К}, \quad (44.15)$$

где множитель $2^{5/3} \approx 3.17$ в знаменателе заменен на 3. При получении численной оценки мы использовали молекулярный вес атомарного водорода (протонов) — основного ядерного горючего нормальных звезд. Любопытно, что из оценки температуры выпала гравитационная постоянная. Полученное число совпадает с температурой в центре Солнца.

Звезды главной последовательности

Наряду с массой и размерами, одной из главных характеристик звезды является ее светимость L , под которой в астрофизике понимается ее излучательная мощность, т.е. выход энергии в единицу времени. Отношение светимости L к площади поверхности звезды — не что иное как поток энергии W , описываемый законом Стефана-Больцмана для излучения черного тела. Если построить график зависимости светимости от массы звезды и нанести на нее наблюдательные данные, то обнаружится, что большинство звезд укладывается на так называемую главную последовательность, описываемую приближенно уравнением

$$L_{\star} \approx L_{\odot} \left(\frac{M_{\star}}{M_{\odot}} \right)^3. \quad (44.16)$$

Задача этого раздела — объяснить наблюдаемую закономерность.

Как уже говорилось, термоядерные реакции синтеза идут в сердцевине, ядре звезды, где и выделяется излучаемая энергия. Но испущенное электромагнитное излучение должно преодолеть всю толщу звезды, чтобы добраться до поверхности и, в конечном итоге, до наших приборов. Вещество звезды оказывается почти непрозрачным для излучения, и поэтому температура поверхности звезды T_e гораздо меньше температуры в центральной области. Для Солнца, например, $T_{e,\odot} \approx 5760 \text{ K}$. Мы не будем заниматься оценками коэффициента ослабления κ потока энергии, идущего из центра звезды. Нам важно только, что он пропорционален плотности звезды и пройденному расстоянию, то есть $\kappa \sim M_{\star}/R_{\star}^2$. Излучаемая в центре звезды энергия, согласно закону Стефана-Больцмана, пропорциональна $T_c^4 \sim (M_{\star}/R_{\star})^4$. Разделив на κ , получим для потока энергии, доходящей до поверхности, величину $W \sim M_{\star}^3/R_{\star}^2$. Умножив этот поток на площадь поверхности звезды ($\sim R_{\star}^2$), находим, что светимость звезды $L_{\star} \sim M_{\star}^3$, что можно записать в виде (44.16). Светимость Солнца $L = 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_{e,\odot}^4 = 3.8 \cdot 10^{26} \text{ Дж/с}$.

Время жизни звезды

Время жизни звезды можно оценить по тому, что мы знаем о ядерных реакциях. В конечном итоге в результате последовательной цепочки реакций четыре протона превращаются в ядро гелия: $4 {}^1\text{H} \rightarrow {}^4\text{He}$. Энергетический выход этой реакции — около 26 МэВ, что составляет 0.7%

от энергии покоя четырех протонов ($4 \cdot 938 = 3752$ МэВ). При этом все вещество звезды выгореть не может: запас ядерного топлива сосредоточен в ядре звезды, и его масса составляет около 10% от массы звезды. Поэтому можно считать, что на излучение тратится энергия порядка $E_{\star, rad} \approx 0.0007 M_{\star} c^2$. Разделив эту величину на мощность излучения, получим время жизни звезды

$$t_{\star} = t_{\odot} \left(\frac{M_{\odot}}{M_{\star}} \right)^2, \quad (44.17)$$

где время жизни Солнца оценивается как

$$t_{\odot} \approx 0.0007 \frac{M_{\odot} c^2}{L_{\odot}} \approx 10^{10} \text{ лет}. \quad (44.18)$$

Здесь мы использовали характеристики Солнца $L_{\odot} \approx 3.83 \cdot 10^{26}$ Дж/с, $M_{\odot} \approx 1.99 \cdot 10^{30}$ кг и продолжительность года $3.16 \cdot 10^7$ с. Солнцу еще только 4 млрд. лет, так что повода для беспокойства пока не видно. Но тяжелые звезды с массами более $30 M_{\odot}$ должны жить в тысячу раз меньше, порядка миллиона или чуть больше лет. Потому таких звезд почти не наблюдают. Вселенная существует около 20 млрд. лет, и некогда родившиеся тяжелые звезды давно исчезли. Конец их должен быть взрывным: давление электронов не способно противостоять гравитации, частицы становятся настолько близки друг к другу, что электроны вжимаются в протоны, превращая их в нейтроны. Процесс сопровождается огромным выделением энергии (астрономы называют его взрывом сверхновой). В результате сбрасывается большая часть массы звезды, после чего она превращается в нейтронную звезды с массой не выше 4 солнечных масс. Вращающиеся намагниченные нейтронные звезды испускают радиоимпульсы с периодом от 0.03 до 3 с. Если же звезда была настолько тяжелой, что и квантового давления нейтронов недостаточно для поддержания равновесия, то она продолжает коллапсировать, превращаясь в черную дыру. Мирная старость и превращение в белого карлика суждены, таким образом, только звездам с относительно небольшой массой порядка нескольких солнечных масс.

Приведем в заключение главки оценку размеров черной дыры. Это такой объект, гравитационное притяжение которого настолько велико, что даже луч света не может оторваться с его поверхности. Пусть $M_{b.h.}$ и $R_{b.h.}$ — масса и радиус черной дыры, соответственно. Потенциальная энергия

тела массы m на ее поверхности равна $GM_{b.h.}m/R_{b.h.}$. Приравнивая потенциальную энергию к кинетической $mv_{esc}^2/2$, находим выражение для второй космической скорости (скорости убегания) $v_{esc} = \sqrt{2GM_{b.h.}/R_{b.h.}}$. Для Земли эта скорость равна 11.2 км/с. Приравняем скорость убегания к скорости света. Строго говоря, так делать нельзя, потому что формула для скорости убегания получена из нерелятивистского выражения для кинетической энергии. Но получающийся результат совпадает с точным релятивистским расчетом (т.н. радиусом Шварцшильда):

$$R_{b.h.} = \frac{2GM_{b.h.}}{c^2}. \quad (44.19)$$

Если бы наше Солнце превратилось в черную дыру, то ее радиус составил бы всего 2.95 км. Соответственно, для звезды с массой $30M_{\odot}$ радиус Шварцшильда был бы менее 90 км.

44.4 Планеты и астероиды

Под планетой мы понимаем холодное небесное тело правильной формы. Почему планеты шаровидны, а астероиды имеют неправильную форму, являясь по сути большими камнями? Ответ прост: потому что планеты достаточно массивны и вещество, из которого они построены, “текло” под действием сил тяготения, принимая из-за поверхностного натяжения шарообразную форму. Оценим исходя из этих соображений максимальные и минимальные размеры планет.

Выражение для запаса гравитационной энергии планеты дается тем же выражением (44.6), что было получено для звезды:

$$E_{pl,gr} = \frac{3}{2}G \frac{M_{pl}^2}{R_{pl}}. \quad (44.20)$$

По смыслу это энергия гравитационного взаимодействия планеты самой с собой. Плотность гравитационной энергии $w_{pl,gr}$ можно получить, разделив $E_{pl,gr}$ на объем тела $4\pi R_{pl}^3/3$. Выражая также массу тела через его размер и плотность ρ_a [см. уравнение (43.9)], приходим к выражению

$$w_{pl,gr} \approx 6\pi G \rho_a^2 R_{pl}^2 \approx 9.2 \cdot 10^{-3} \cdot (R_{pl}/1 \text{ м})^2 \text{ Н/м}^2. \quad (44.21)$$

Если плотность гравитационной энергии превышает модуль упругости E , оценка для которого $E \approx 4 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ была получена выше, то

Таблица 44.1: Размер и масса планет Солнечной системы

Планета	Меркурий	Венера	Земля	Марс	Сатурн	Уран	Нептун
Радиус R_{pl} (10^6 м)	2.4	6.1	6.4	3.4	60.5	26.2	24.8
Масса M_{pl} (10^{24} кг)	0.3	4.8	5.9	0.6	562	86	101

под действием сил тяготения тело примет шарообразную форму. В результате мы получим оценку минимальных размеров планеты, то есть максимальных размеров астероидов. Из равенства $E = w_{pl,gr}$ находим оценку $\min R_{pl} \approx R_{ast} \approx 2 \cdot 10^6$ м = 2000 км. Для массы получаем тогда $\min M_{pl} \approx M_{ast} \approx 10^{23}$ кг. Для сравнения приведем соответствующие данные для Луны: радиус 1737 км, масса $7.35 \cdot 10^{22}$ кг. Видно, что Луна представляет собой планету с размерами, близкими к минимально возможным. Церера, самый большой из астероидов Солнечной системы, имеет радиус 385 км и массу $7.4 \cdot 10^{20}$ кг.

Максимальные размеры для планет можно получить, сравнивая ту же плотность гравитационной энергии с квантовым давлением в атоме P_q (43.14). При таких давлениях начинают разрушаться атомные оболочки. Из равенства $P_q = w_{pl,gr}$ получаем оценку для радиуса $\max R_{pl} \approx 1.5 \cdot 10^7$ м = 15000 км и массы $\max M_{pl} \approx 4 \cdot 10^{25}$ кг. Сравним эти оценки с характеристиками Юпитера, самой большой планеты Солнечной системы: видимый радиус около 70000 км, масса $1.9 \cdot 10^{27}$ кг. Отсюда можно сделать вывод, что Юпитер, достигший максимально возможных для планеты размеров, это несостоявшаяся звезда. Данные по другим планетам приведены в таблице 44.1.

Глава 45

Масштабы биологического мира

В этой главе речь пойдет о масштабах, характерных для живой природы в той единственной форме, которая нам известна. Для начала введем численную характеристику того, что мы понимаем под “нашей формой” живой природы. Мы построены из белка, молекулы которого достаточно тяжелы и велики. Очевидно, при рассмотрении живых организмов нельзя пользоваться оценкой молекулярной энергии связи $E_m \approx 0.3$ эВ, данной ранее. Поступим следующим образом. Нам известно, что белок сворачивается примерно при $50 \div 60^\circ\text{C}$. Этой температуре $T_{biol} \approx 330$ K соответствует характерная энергия связи атома в белковой молекуле $E_{biol} = k_B T_{biol} \approx 4.5 \cdot 10^{-21}$ Дж ≈ 0.03 эВ. Отношение характерных “биологической” и молекулярной энергий равно, таким образом, $\varepsilon_{biol} = E_{biol}/E_{mol} = 0.1$.

45.1 Обитаемые планеты

Сначала о среде обитания живых организмов. Среди всех мыслимых планет с радиусами от тысячи до десятков тысяч километров мы отберем в этом разделе те, на которых возможно существование нашей формы жизни.

Обитаемая планета должна иметь атмосферу, необходимую нам для дыхания. Если планета слишком мала, ее гравитационного притяжения недостаточно, чтобы удержать молекулы атмосферы, и они рассеются в окружающем пространстве. Чтобы этого не произошло, потенциальная энергия молекулы с характерной массой m_p не должна превышать ее тепловой энергии, которая совпадает с E_{biol} :

$$G \frac{M_{min} m_p}{R_{min}} = E_{biol}. \quad (45.1)$$

С другой стороны, плотность планеты дается тем же характерным числом, что и плотность атомов, молекул и т.п.:

$$\frac{M_{min}}{4\pi R_{min}^3/3} = \rho_a. \quad (45.2)$$

Из этих двух уравнений находим наименьшие массу M_{min} и радиус R_{min} обитаемых планет:

$$R_{min} \approx 2300 \text{ км}, \quad M_{min} \approx 1.4 \cdot 10^{23} \text{ кг}. \quad (45.3)$$

Полученные оценки довольно близки к характеристикам Марса ($R \approx 3.4 \cdot 10^6$ м, $M \approx 6 \cdot 10^{23}$ кг. Ускорение свободного падения g_{min} на обитаемой планете наименьших размеров вычисляется по закону тяготения Ньютона:

$$g_{min} = G \frac{M_{min}}{R_{min}^2} \approx 1.8 \text{ м/с}^2. \quad (45.4)$$

На Земле ускорение свободного падения в 7 раз больше, но на Марсе оно всего в два раза превышает полученную оценку.

Высота гор

Самой распространенной горной породой в земной коре является гранит. Механические характеристики гранита не слишком отличаются от оценок, данных выше: плотность $\rho_{гран} = 2.6 \cdot 10^3$ кг/м³, модуль упругости $E \approx 3 \cdot 10^8$ Па. Если представить себе гору в виде цилиндра высотой H и площадью основания S , то объем горы $V = HS$, ее масса $M = HS\rho_{гран}$ и давление на основание равно $P = Mg/S = \rho_{гран}gH$, где $g = 9.8$ м/с² — ускорение свободного падения. Предельная высота горы достигается при выполнении равенства $P = E$, откуда следует выражение для высоты горы $H = E/g\rho_{гран} \approx 11.8$ км. Высота Эвереста, как известно, равна 8.8 км. Ускорение свободного падения на Марсе равно 3.7 м/с², примерно в два с половиной раза меньше, чем на Земле. Во столько же раз должны быть монументальнее горы, достигая, согласно нашей оценке, 30 км высоты. Действительно, космические корабли США серии “Маринер” обнаружили на Марсе грандиозные горы, вздымающиеся на 25 км (Олимп) и 20 км (Арсия) над средним уровнем поверхности.

Продолжительность суток

Как быстро может вращаться обитаемая планета вокруг собственной оси? Чтобы объекты не слетали с ее поверхности (иначе она не будет обитаемой), центростремительное ускорение не должно превышать ускорения свободного падения:

$$G \frac{M_{min}}{R_{min}^2} = \omega_{max}^2 R_{min}, \quad (45.5)$$

откуда находим оценки для угловой скорости и периода вращения:

$$\begin{aligned} \omega_{max} &\approx \sqrt{\frac{GM_{min}}{R_{min}^3}} \approx 8.8 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}, \\ t_{min} &\approx \frac{2\pi}{\omega_{max}} \approx 1.8 \cdot 10^4 \text{ с} \approx 2 \text{ часа}. \end{aligned} \quad (45.6)$$

Но мы оценили максимальную скорость вращения обитаемой планеты. При столь быстром вращении притяжение планеты полностью уравновешивается центробежной силой, так что даже не очень подогретые молекулы атмосферы смогут улететь в пространство. Поэтому для сохранения температуры обитаемой планеты на указанном уровне центробежное ускорение не должно составлять заметной доли ускорения свободного падения. Если центробежное ускорение в сто раз меньше g , то угловая скорость вращения понизится в 10 раз, а период вращения составит уже 20 час. Сутки делятся на Земле, как всем известно, 24 часа, что соответствует угловой скорости $1.15 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$. Заметим также, что линейная скорость вращения точки на земном экваторе равна $v_{eq} = 1.15 \cdot 10^{-5} \cdot 6.4 \cdot 10^6 \approx 70 \text{ м/с}$. Эта же величина задает характерный масштаб скорости для атмосферных явлений (скорость ветра).

Продолжительность года

Продолжительность года t_{year} связана с расстоянием Земли l_{\odot} от Солнца и с массой последнего. Действительно, приравнивая центростремительное ускорение планеты $l_{\odot}\omega_{\odot}^2 = l_{\odot}(2\pi/t_{year})^2$ ускорению, вызываемому силой тяготения GM_{\odot}/l_{\odot}^2 со стороны Солнца, находим в результате

$$t_{year} = 2\pi \sqrt{\frac{l_{\odot}^3}{GM_{\odot}}} \approx 3.16 \cdot 10^7 \text{ с} = 1 \text{ год}. \quad (45.7)$$

(Земля находится от Солнца на расстоянии $l_{\oplus} = 149.6$ млн. км).

Масса и светимость Солнца, как мы видели, достаточно типичны для звезд главной последовательности. Можем ли мы понять, почему обитаемая планета должна находиться именно на таком расстоянии от центрального светила? На расстоянии l_{biol} на планету падает поток энергии $L_{\odot}/4\pi l_{biol}^2$, который должен быть равен σT_{biol}^4 для сохранения теплового баланса. Отсюда получаем для удаленности обитаемой планеты от центрального светила

$$l_{biol} \approx \sqrt{\frac{L_{\odot}}{4\pi\sigma T_{biol}^4}} \approx 2.1 \cdot 10^{11} \text{ м} = 210 \text{ млн. км.} \quad (45.8)$$

Расстояние от Солнца до Земли составляет 149.6 млн. км, до Марса — 227 млн. км. Время одного оборота в этом случае равно 1.7 года (на Марсе 1.88 года).

Как писал немецкий философ И. Г. Гердер (1744-1803), “...нашей Земле, очевидно, выпал двусмысленный золотой жребий посредственности; в утешение мы можем думать, что это — золотая середина”. Добавим только, что эти самые “посредственность” и “золотая середина” оказались, как мы убедились, необходимым условием возникновения жизни на нашей планете.

45.2 О размерах животных

Какую форму имеет змея?

Животные очень различаются своими размерами. Слон в 100 тыс. раз тяжелее мыши, а землеройка — в 10 раз легче. Переход от малого к большому описывается фактором 10^6 . Ни одно из свойств рассмотренных ранее веществ, ни одна из характеристик звезд и планет не лежали в столь широком диапазоне. Можно ли что-то сказать о закономерностях в мире живой природы, отличающемся таким разнообразием? Как и среди звезд, в мире животных наблюдаются экспериментальные закономерности. Одна из них — связь размеров теплокровного животного с его массой. Еще в конце прошлого века заметили, что площадь поверхности животного S зависит от его массы M по закону: $S = kM^{2/3}$. В таблице 45.1 приведены значения коэффициента k для ряда животных.

Примерное постоянство коэффициента $k \approx 0.1 \text{ м}^2/\text{кг}^{2/3}$ для многих животных как будто подтверждает указанную закономерность, хотя труд-

ности измерения площади тела оставляют место для сомнений. Но если это так, то объяснение почти очевидно. Представим себе животное в виде шара радиусом L . Площадь его поверхности $S = 4\pi L^2$, а масса $M = 4\pi\rho_a L^3/3$, где вместо средней плотности тела животного мы используем нашу универсальную оценку — плотность атома водорода ρ_a . Выражая радиус L через массу и подставляя в выражение для площади поверхности, немедленно получаем соотношение

$$S = kM^{2/3}, \quad k = \left(\frac{6\pi}{\rho}\right)^{2/3} \approx 2.5 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2/\text{кг}^{2/3}. \quad (45.9)$$

Согласие не столь плохо, если учесть, что мало какое из названных животных (змея!) походит формой на шар. Но на самом деле указанная закономерность не совсем верна, особенно для больших животных, у которых линейные размеры ведут себя скорее как $L \sim M^{1/4}$, а не $M^{1/3}$, а площадь поверхности тела $S \sim M^{3/4}$. Этому тоже есть свое объяснение: животное представляют в виде цилиндра с определенным соотношением между длиной и радиусом $L^3 \sim R^2$. Тогда $M \sim R^2 L \sim L^4$ и $S \sim R^2 \sim L^3$. Отсюда следуют указанные зависимости длины и площади поверхности от массы. Использованное соотношение между L и R получается в курсе сопротивления материалов для критической длины балки, изгибаемой собственным весом. В этой схеме скорее оцениваются размеры не животного, а дерева, но получается правильная зависимость от массы. Однако в дальнейшем мы будем часто пользоваться моделью “шара” из-за ее простоты.

Какого роста жираф?

Попытаемся оценить максимальные размеры живого существа. Основная идея — при падении с высоты собственного роста организм не должен разрушиться. Потенциальная энергия, высвобождаемая при падении, равна $MgL \approx m_p(L/a_B)^3 gL$. Будем считать опасным падение, при котором разрушаются все белковые молекулы, прилегающие к поверхности тела. Их число — порядка $(L/a_B)^2$, в каждой белковой молекуле

Таблица 45.1: Связь массы и размеров животного

Животное	еж	овца	мышь	корова	кошка	птица	обезьяна	человек	змея
$k \text{ (} 10^{-2} \text{ м}^2/\text{кг}^{2/3}\text{)}$	7.5	8.4	9.0	9.0	10.0	10.0	11.8	11.0	12.5

— порядка 10^5 атомов, и для разрушения этой конструкции нужна энергия порядка $10^5 E_{biol} (L/a_B)^2$. Приравнивая эту энергию потенциальной, находим

$$L \approx \sqrt{\frac{10^5 E_{biol} a_B}{m_p g}} \approx 1.2 \text{ м.} \quad (45.10)$$

Поскольку мы снова представили животное шаром с радиусом L , оценкой его роста будет значение диаметра “шара” $h \approx 2L \approx 2.4$ м. Для массы животного получаем $M \approx 19.5$ т, что является, по-видимому, адекватной оценкой (бегемот — 3 т, слон — 6 т, но жили на Земле и динозавры). Что касается роста, то оценка явно занижена из-за того, что мы приняли модель “шара”: высота слона — 3.5 м, жирафа — 6 м, динозавра — до 25 м. Конечно, оценки очень грубы, но любопытно, что высота безопасного падения для человека оценивается в 1.3 м (при такой высоте ломаются кости). Реально за счет амортизации в коленях высота безопасного падения составляет около 4 м. Это не так далеко от наших оценок и роста большинства животных.

45.3 Организм как силовая установка

Следующая закономерность живого мира — связь мощности N , развиваемой животным, с его массой. Здесь все совсем просто: природа и эволюция все устроили экономно, теплокровный организм производит столько энергии, сколько ему нужно для компенсации потерь тепла через кожу, и потому мощность организма должна быть пропорциональна площади поверхности тела, так что $N \sim M^{2/3}$ для “шара” и $N \sim M^{3/4}$ для “цилиндра”. Данные скорее подтверждают второе из этих соотношений. Посмотрим, можем ли мы оценить количество энергии, вырабатываемой живым организмом.

Мощность организма

Используем полученное в разделе 37.9 значение коэффициента теплопроводности κ для оценки мощности живого (теплокровного) организма. Перепад температур между организмом и внешней средой можно оценить как “биологическую” температуру в градусах Цельсия, т.е. $\Delta T \approx 60$ К, расстояние переноса тепла — как радиус “живого шара” $L \approx 1.2$ м, так

Таблица 45.2: Суточный расход энергии человеком

Специальность	школьник	студент	литейщик	каменщик	спортсмен	косец
Мощность (ккал/сут.)	2400	2900	3300	4000	4500	7200

что градиент температуры равен $dT/dz \approx \Delta T/L \approx 50$ К/м. Применяя формулу (43.19) и оценку коэффициента теплопроводности, получаем для потока тепла с единицы поверхности:

$$Q \approx 85 \text{ Вт/м}^2. \quad (45.11)$$

Используя обсуждавшуюся выше связь $S \approx 0.1 \text{ м}^2 (M/1 \text{ кг})^{2/3}$ площади поверхности с массой организма и умножая Q на S , получаем закон зависимости мощности N организма от его массы:

$$N \approx 8.5 \text{ Вт} \cdot \left(\frac{M}{1 \text{ кг}} \right)^{2/3}. \quad (45.12)$$

Подставляя сюда массу $M \approx 70$ кг, находим $N \approx 144$ Вт. Умножая N на число секунд в сутках (86400) и вспоминая связь калорий с джоулями (1 кал = 4.184 Дж), находим суточный расход энергии человеком: $N \approx 3000$ ккал/сутки. Таблица 45.2 убеждает нас в правильности полученной оценки.

Конечно, не стоит переоценивать степень точности нашего результата: практически полное совпадение получилось случайно, но окончательная формула (45.12) весьма близка к истине.

Одно замечание в заключение этой главки. Зная светимость Солнца и расстояние от него до Земли, нетрудно подсчитать количество солнечной энергии, поступающее к нам из космоса. Солнечная постоянная $C = 1.4 \text{ кВт/м}^2$, что всего в 16 раз больше величины Q в уравнении (45.11). Если бы человек был деревом, это означало бы, что солнечная энергия используется им с КПД 6%, что, возможно, не так далеко от реальности. Человек, конечно, не дерево, но относительная близость Q и C лишний раз наводит на мысль об общности законов природы.

Долго ли суждено жить?

Мощность организма, то есть скорость вырабатывания им энергии, определяет скорость обмена веществ (метаболизма). Необходимая энергия берется при окислении продуктов питания, то есть регулируется поступлением кислорода в кровь. Скорость поступления кислорода пропорциональна произведению объема легких на частоту дыхания ν . В свою

очередь, объем легких пропорционален объему тела и, следовательно, его массе. Поэтому частота дыхания должна зависеть от массы по закону $\nu \sim m^{2/3}/m \sim 1/m^{1/3}$ для модели “шара” (или $\nu \sim 1/m^{1/4}$ для модели “цилиндра”). Этому же закону должны следовать и другие периодические процессы, например, биение сердца. Эмпирическое уравнение, найденное биологами из наблюдений, имеет вид

$$\begin{aligned}\nu_b(\text{дыхание}) &\approx 0.89 \text{ Гц} \left(\frac{1 \text{ кг}}{M} \right)^{0.25}, \\ \nu_h(\text{сердце}) &\approx 4.02 \text{ Гц} \left(\frac{1 \text{ кг}}{M} \right)^{0.25}.\end{aligned}\quad (45.13)$$

Отношение частот сердцебиений и дыхания не зависит от массы животного и равно примерно 4.5. Для человека ($M \approx 70 \text{ кг}$) отсюда следует $\nu_b \approx 0.31 \text{ Гц}$ (19 вдохов в минуту) и $\nu_h \approx 1.4 \text{ Гц}$ (84 удара в минуту). У мышки ($M \approx 20 \text{ г}$) частота сердцебиений должна быть $\nu_h \approx 10.7 \text{ Гц}$ (пульс 640), а у слона $M \approx 6 \text{ т}$ частота $\nu_h \approx 0.46 \text{ Гц}$ (пульс 28 ударов в минуту). Частота дыхания, напомним, должна быть в 4.5 раза меньше.

И здесь возникает естественная гипотеза: давайте предположим, что всем живым “механизмам” отпущен одинаковый в среднем ресурс (ведь все они сделаны из одинаковых материалов и произведены одной фирмой — природой). Скажем, на роду отпущено такое-то количество ударов сердца. Тогда продолжительность жизни животных $T_{life} \sim 1/\nu$ должна зависеть от массы по закону $T_{life} \sim M^{0.25}$. Эмпирическая закономерность, выведенная биологами по наблюдениям за продолжительностью жизни животных в неволе имеет вид:

$$\begin{aligned}T_{life}(\text{млекопитающие}) &\approx 11.8 \text{ лет} (M/1 \text{ кг})^{0.20} \\ T_{life}(\text{птицы}) &\approx 28.3 \text{ лет} (M/1 \text{ кг})^{0.19}.\end{aligned}\quad (45.14)$$

Как видно, продолжительность жизни действительно растет с размерами животного. Показатели степени у млекопитающих и птиц практически одинаковы, и в настоящее время неясно, действительно ли эти показатели достоверно отличаются от ожидаемых 0.25. Если перемножить соответствующие формулы (45.14) и (45.13), то мы найдем отведенное природой число сердцебиений (дыханий). В любом случае зависимость от массы будет слабой. Для млекопитающих, например, получается оценка 1.5 млрд. сердцебиений за жизнь.

Но здесь есть две удивительные вещи. Оказывается, при том же весе птицы живут в два раза дольше, чем млекопитающие. Почему — не-

понятно. И второе. В целом крупные животные живут дольше мелких, и темп их жизни помедленнее. Мышь живет 2-3 года, ее беременность длится 23 дня. Слоны живут до 70 лет, а слонята вынашиваются 18-22 месяцев. Но согласно уравнениям (45.14) животное с весом человека $M = 70$ кг должно жить около 28 лет. А мы живем в 2.5, а то и в 4 раза дольше! Известно также, что мозг человека непропорционально велик по сравнению с мозгом других животных, и он тоже в 3-4 раза больше, чем можно было бы ожидать. Здесь, возможно, есть некая, пока неизученная связь.

Самые маленькие животные

В заключение главки вернемся к вопросу о размерах животных. Мы оценили максимальные размеры из соображений безопасности при падении. Но у теплокровных животных должны быть и минимальные размеры. Дело в том, что вырабатываемая энергия пропорциональна $M^{0.75}$. А потребности в питании каждой единицы массы приводят к необходимости запасать энергию (в виде жира) в пропорции M . Время выносливости животных, которую можно определить как отношение доступной (запасенной) энергии к скорости ее использования, пропорционально тогда $M^{0.25}$. Действительно, мелкие животные питаются почти непрерывно, а в то время суток, когда они не могут этого делать — впадают в оцепенение, снижая интенсивность метаболизма. Труднее для них пережить целый неблагоприятный сезон, и эту проблему они решают либо миграцией (птицы), либо запасанием жира и впадением в зимнюю спячку. При дальнейшем уменьшении массы запасы энергии убывают быстрее расходования, и при некоторых минимальных размерах дальнейшая жизнедеятельность становится невозможной.

Попробуем оценить эти размеры, используя результаты модели “шара”. Представим себе некое малое существо. Днем оно непрерывно питается, поддерживая тем самым свою жизнедеятельность. А ночью использует накопленные запасы энергии. Даже если это существо сожжет себя как птица феникс, оно получит количество энергии $W_1 = HM$, где H — удельная теплота сгорания топлива (порядка 34 МДж/кг). А на теплоотдачу, согласно оценке (45.12), надо израсходовать количество энергии $W_2 = tN$, где $t = 12$ час = 43200 с. Из неравенства $W_1 \geq W_2$ находим $M \geq (8.5 \text{ Вт} \cdot t / H \cdot \text{кг})^3 \text{ кг} \approx 11 \text{ г}$. И действительно, самые мелкие птицы (колибри) и самые мелкие животные (землеройка) имеют примерно оди-

наковую массу (2-3 г) и размеры. Но достигается это, разумеется, не самосожжением, а понижением ночной температуры (спячка).

45.4 О спортивных рекордах

Ходьба

Почему взрослый человек ходит быстрее ребенка? Вполне очевидно, потому что ноги у него длиннее. Как выразить этот ответ количественно?

При ходьбе ноги все время соприкасаются с землей. Центр тяжести человека находится примерно на высоте, равной половине его роста h . По сути дела, при ходьбе центр тяжести все время движется по дуге окружности радиусом $h/2$. На него действуют сила веса mg и сила реакции опоры T . Результирующая создает центростремительное ускорение $v^2/(h/2) = (mg - T)/m \leq g$. Отсюда следует выражение для максимальной скорости передвижения при ходьбе:

$$v \approx \sqrt{\frac{gh}{2}}. \quad (45.15)$$

Подставляя сюда $h = 1.8$ м и $g = 10$ м/с², находим $v \approx 3$ м/с = 10.8 км/час. Для сравнения: расстояние в 20 км. преодолевается на такой скорости за время 1 час 51 мин., а мировой рекорд по ходьбе на такую дистанцию составлял (1988 г.) около 1 час 18 мин.

Найдем теперь частоту шага. Представим ногу как физический маятник длиной $L = h/2$, подвешенный в центре тяжести человека. Для собственной частоты колебаний имеем выражение $\nu = \sqrt{mga/J}$. При равномерном распределении массы вдоль ноги расстояние от центра масс ноги до центра масс тела $a = L/2$, а момент инерции ноги $J = mL^2/3$. Получаем в результате $\nu \approx \sqrt{3g/2L} \approx \sqrt{3g/h}$. При том же росте человека получается $\nu \approx 4$ Гц, то есть 4 шага в секунду. При уменьшении роста частота шагов увеличивается (поэтому дети семенят).

Длину шага можно найти, разделив скорость на частоту: $l_{\text{шаг}} \approx h/\sqrt{6} \approx 0.4h$, что примерно равно длине ноги $L = 0.5h$.

Бег

В отличие от ходьбы, при беге ноги отрываются от земли, и скорость передвижения существенно выше. Численные оценки здесь дать затруднительно, но некоторые общие выводы более или менее общепризнанны.

Свою кинетическую энергию $T \sim Mv^2$ бегун поддерживает на каждом скачке (длина скачка $\sim L$, время $\sim L/v$). Тогда развиваемая мощность $N \sim Mv^3/L$. И эта мощность должна равняться мощности организма $N \sim M^{2/3}$. Отсюда вытекает, что $v^3 \sim L/M^{1/3}$. Так как $M \sim L^3$, то выходит, что скорость бега не зависит от массы животного. Этот же вывод следует из модели “цилиндра”. Таблица 45.3 как-будто подтверждает сказанное. Во всяком случае, различие всего в три раза между человеком на двух ногах и признанными четвероногими спринтерами не позволяет пока сделать других выводов.

Таблица 45.3: Скорость передвижения

Животное	гепард	газель	страус	лисица	лошадь	заяц	гончая	человек
Скорость, м/с	30	28	23	20	19	18	16	11

Прыжки

Похожий анализ можно сделать для прыжков в высоту с места. Здесь рассуждения очень похожи на проведенные выше, только вместо длины шага здесь будет фигурировать глубина приседания. В результате приобретенная скорость, а стало быть, и высота прыжка, не зависят от массы тела. В отличие от бега мы можем сделать здесь численные оценки. Глубину приседания естественно оценить в половину длины ноги (“радиуса”) — $L/2$. Поэтому энергия $Mv^2/2$ набирается за время $L/2v$, так что развиваемая мощность $N \approx Mv^3/L$. Так как $M \approx \rho_a 4L^3$, то $N \approx (3/2)M^{2/3}\rho_a^{1/3}v^3$. Ранее мы оценили мощность организма в покое; при пиковой нагрузке развиваемая мощность обычно на порядок больше: $N \approx 85 \text{ Вт} \cdot (M/\text{кг})^{2/3}$. Отсюда видно, что масса действительно не входит в окончательный ответ

$$v^3 \approx 57 \text{ (м/с)}^3 \left(\frac{\text{кг/м}^3}{\rho_a} \right)^{1/3}$$

или $v \approx 4 \text{ м/с}$. Тело, брошенное вверх с такой скоростью, поднимется на высоту $H = v^2/2g \approx 0.8 \text{ м}$ (здесь имеется в виду перемещение центра тяжести). В таблице 45.4 приведены данные о высоте прыжков некоторых существ, различающихся по размерам в 100 млн. раз.

Надо учесть, что сопротивление воздуха сильнее действует на мелкие организмы: в вакууме блоха прыгала бы выше. Расхожее мнение, что

Таблица 45.4: Высота прыжка с места

Животное	блоха	жук-щелкун	саранча	человек
Высота прыжка, см	20	30	59	60

блоха прыгает лучше человека, так как высота прыжка намного превосходит ее размеры, основано на недоразумении. Увеличение размеров, как показывает наш анализ, не влияет на высоту прыжка.

Что касается прыжков в высоту с разбега, то все зависит от доли используемой кинетической энергии разбега. Наилучший результат дает прыжок с шестом, который позволяет использовать почти всю кинетическую энергию. Действительно, максимальной скорости разбега $v = 10$ м/с соответствовала бы высота подъема центра тяжести $h_1 = 5.1$ м. Сюда надо добавить изначальную высоту центра тяжести $h_2 \approx 1$ м и высоту прыжка с места $h_3 \approx 0.6$ м (здесь — за счет работы рук). В сумме получается $H \approx 6.7$ м. Сергею Бубке еще остается место для подвигов.

Для обычных прыжков в высоту имеем $h_1 \approx 1.40$, так как h_2 будет тем же, а $h_3 = 0$. Это значит, что прыгун использует только $(1.4/5.1)100\% \approx 28\%$ кинетической энергии разбега.

Полеты птиц

Как и для бега, мы ограничимся качественными рассуждениями. Представим себе птицу с линейным размером L . Сопротивление воздуха при ее полете пропорционально квадрату скорости и площади поперечного сечения. Такова же зависимость подъемной силы (в сущности, птица опирается на воздух при взлете): $F \sim v^2 L^2$. Сила веса $P = Mg \sim L^3$. Взлет возможен, если $P = F$, откуда: $v \sim \sqrt{L}$. Требуемая для взлета мощность есть произведение силы на скорость: $N_f = Mgv \sim L^{3.5} \sim M^{7/6}$. Мощность, которой располагает птица, меняется по закону $N \sim M^{2/3}$ (модель “шара”). При увеличении массы N_f растет быстрее N , так что должна существовать верхняя граница для массы летающей птицы. Самая тяжелая из летающих птиц (дрофа) имеет массу около 15 кг. Это наблюдение показывает сомнительность создания летательных аппаратов, приводимых в действие только мускульной силой человека.

Приведенные примеры демонстрируют, насколько надо быть осторожным, рассуждая, что было бы, если бы люди стали лилипутами или превратились в гигантов. Почти никогда, как мы видели, свойства животных не следуют простой пропорциональности. И в этом проявляются

самые основные законы природы.

Можно подозревать существование похожих законов и для социальных явлений. Одним из биологов, наиболее успешно занимавшихся оценками размеров животных и принципом подобия, был Дж. Холдейн. Вот как он закончил свое эссе "Имея правильные размеры", написанное много десятилетий назад:

Для биолога проблема социализма выступает во многом как проблема размера. Крайние социалисты стремятся управлять нацией как единым коммерческим предприятием. Я не думаю, что Генри Форд столкнулся бы с проблемами, управляя на социалистической основе Андоррой или Люксембургом. Уже сейчас в его платежных ведомостях числится больше работников, чем население этих стран. Вполне вероятно, что некому сообществу Фордов, если бы мы смогли найти их, удалось бы заставить приносить доход Бельгию Лтд. или Данию Инк. Национализация отдельных отраслей промышленности в больших странах также вполне возможна. Но нарисовать картину полностью социалистических США или Британской Империи я нахожу не более легким делом, нежели представить кувыркающегося слона или прыгающего бегемота.

Но тут мы вступаем в область совсем других наук, равно как и в область догадок и гипотез. Поэтому физикам лучше прекратить дозволенные им речи.