

УДК 537.87

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА БИИЗОТРОПНОМ ШАРЕ В БИИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

В.Н. Капшай¹, В.В. Кондратюк²¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель²Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, Гомель

SCATTERING OF ELECTROMAGNETIC WAVES ON BIISOTROPIC SPHERE IN BIISOTROPIC MEDIUM

V.N. Kapshai¹, V.V. Kondratjuk²¹F. Scorina Gomel State University, Gomel²P.O. Sukhoi Gomel State Technical University, Gomel

Решена задача о рассеянии электромагнитных волн на биизотропном шаре в биизотропной среде. Получены аналитические выражения для коэффициентов разложения рассеянного и внутреннего полей по полной и ортонормированной системе шаровых векторов. Численно проанализированы зависимости этих амплитудных коэффициентов от параметров биизотропных сред и радиуса шара. Показано, что в частном случае взаимных гиротропных сред из полученных нами выражений следуют формулы, известные из более ранних работ.

Ключевые слова: биизотропная среда, материальные уравнения, теория Ми, шаровые векторы, сферические волны.

The problem of electromagnetic wave scattering on biisotropic sphere in biisotropic medium is solved. Analytical expressions for expansion coefficients of the scattered and inner fields on the complete orthonormal system of spherical vectors are obtained. These coefficients are numerically analyzed depending on the parameters of biisotropic media. It is shown that in the particular case of gyrotropic media our results yield solutions known earlier.

Keywords: biisotropic medium, constitutive relations, Mie theory, spherical vectors, spherical waves.

Введение

В последнее время интенсивно ведутся исследования различных сложных искусственных макроскопических сред, электромагнитные свойства которых описывают материальными уравнениями вида [1]–[8]

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon \vec{E} + (\chi + i\alpha) \vec{H}; \\ \vec{B} &= (\chi - i\alpha) \vec{E} + \mu \vec{H},\end{aligned}\quad (0.1)$$

содержащими «перекрестные» магнитоэлектрические слагаемые. Такие среды получили в научной литературе название «биизотропных» («biisotropic»). Любое внешнее поле обуславливает в них электрическую и магнитную поляризацию. Частными вариантами таких сред являются:

- а) изотропные диэлектрики (при $\alpha = 0$, $\chi = 0$);
- б) естественно гиротропные (киральные) среды (при $\chi = 0$, $\alpha \neq 0$);
- в) среды Теллегена (при $\alpha = 0$, $\chi \neq 0$).

Важность изучения биизотропных сред объясняется тем, что, оставаясь изотропными, они, тем не менее, могут иметь электромагнитные свойства, существенно отличные от свойств более простых сред типа изотропных диэлектриков. Более того, биизотропные среды могут проявлять свойства, заметно отличающиеся от

свойств киральных сред или сред Теллегена. Различные аспекты исследования киральных и биизотропных сред хорошо освещены в литературе, в частности в монографиях [9], [10] и статьях [11]–[21].

Возрастающий интерес к исследованиям электродинамических свойств киральных и биизотропных сред во многом обусловлен успехами в создании композитных сред, структурированных в микроскопическом и нанометровом масштабе. При этом спектральная область, в которой могут проявляться специфические свойства искусственных сред, значительно шире, чем оптический диапазон, в котором свойства сред типа киральности обусловлены свойствами молекул. С усовершенствованием методов синтеза полимеров стало возможно реализовать взаимные киральные среды в целях практического использования их свойств в СВЧ и миллиметровом волновом диапазоне. Среди многочисленных потенциальных применений киральной среды можно указать использование слоёв из них в качестве объектов, поглощающих излучение радаров.

Биизотропные среды, рассматриваемые как обобщение случая киральных сред, кроме киральности, обладают также свойством невзаимности, в силу чего они очень перспективны в прикладном отношении. Биизотропные (невзаимные киральные) среды, при описании их

макроскопических электромагнитных свойств, характеризуют четырематериальными параметрами (вместо трех, используемых для характеристики взаимных киральных сред). Вследствие этого способы создания искусственных материалов, обладающих требуемыми электромагнитными свойствами, более вариативны. Таким образом, все больше и больше внимания привлекается к области взаимодействия электромагнитных волн со средами этого класса и соответствующим граничным задачам.

Следует отметить, что с середины 90-х годов прошлого века в литературе ведется дискуссия о «распознаваемом существовании» невазимных биизотропных сред [22]–[34]. Как указано в [7], [8] эта дискуссия фактически не завершена, поэтому именно при решении граничных задач могут быть найдены дополнительные аргументы в пользу утверждения о том, что нельзя эффекты, обусловленные отличием от нуля значения параметра невазимности χ , объяснить изменением значений других параметров при $\chi = 0$. Чтобы найти такие эффекты, следует решить различные граничные задачи для электромагнитных полей в биизотропной среде, граничащей с другими различными средами в условиях, когда граница раздела является плоской, сферической, цилиндрической и др. Задачи об отражении электромагнитных волн от плоских границ раздела «вакуум – биизотропная среда», «биизотропная среда 1 – биизотропная среда 2» рассмотрены в работах [35], [36]. В настоящей статье рассматривается задача об отражении электромагнитных волн от сферической границы раздела двух биизотропных сред.

1 Задача Ми для биизотропных сред

Теория рассеяния электромагнитных волн на сферически симметричных объектах различной природы, помещенных в ту или иную среду (теория Ми), имеет более чем столетнюю историю [37], по этой проблеме имеется обширная библиография. В качестве путеводителей по этой теории укажем монографии [38]–[40], в которых содержатся десятки ссылок на оригинальные работы. Рассеяние на киральных и других сферически симметричных объектах было рассмотрено в [13]–[15]. Аналогичная задача о рассеянии электромагнитных волн на биизотропном шаре в вакууме решена в [17]. В настоящей работе мы представляем решение более общей граничной задачи о рассеянии плоской монохроматической электромагнитной волны на биизотропном шаре радиуса R , помещенном в биизотропную среду, параметры которой отличаются от параметров частицы-шара. В определенном смысле такая задача является наиболее общей задачей для двух сред с изотропными свойствами. Как и при решении всякой «наиболее общей» задачи, для

исследований с необходимостью требуется привлечение наиболее эффективного математического аппарата. В ходе решения задач такого рода мы убедились в том, что таким самым мощным средством является квантовомеханическая и квантовоэлектродинамическая теория шаровых векторов $\bar{Y}_{JM}^L(\bar{n}_r)$ [41], [42]

$$\bar{Y}_{JM}^L(\bar{n}_r) = \sum_{m,\mu} C_{Lm1\mu}^{JM} Y_{Lm}(\bar{n}_r) \bar{e}_\mu, \quad (1.1)$$

где $Y_{Lm}(\bar{n}_r)$ – сферические гармоники, $\bar{n}_r = \vec{r}/r$, $C_{Lm1\mu}^{JM}$ – коэффициенты Клебша – Гордана группы трехмерных вращений, \bar{e}_μ – циклические орты:

$$\bar{e}_0 = \bar{e}_z, \quad \bar{e}_{\pm 1} = \mp(\bar{e}_x \pm i\bar{e}_y)/\sqrt{2}.$$

Посредством векторов (1.1) удобно определить сферические волны [12]–[15]:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{JM}^{(z)}(k|\vec{r}) &= z_J(kr) \bar{Y}_{JM}^J(\bar{n}_r) - \\ &- iv \left[a_J z_{J+1}(kr) \bar{Y}_{JM}^{J+1}(\bar{n}_r) - \right. \\ &\left. - b_J z_{J-1}(kr) \bar{Y}_{JM}^{J-1}(\bar{n}_r) \right]. \end{aligned} \quad (1.2)$$

В выражении (1.2) верхний индекс z используется для обозначения типа сферических функций $z_L(\rho)$. В частности нами применяются сферические функции Бесселя $z_L(\rho) = j_L(\rho)$, Неймана $z_L(\rho) = n_L(\rho)$ или Ханкеля 1-го и 2-го рода $z_L(\rho) = h_L^{(1,2)}(\rho) = j_L(\rho) \pm in_L(\rho)$. Коэффициенты a_J и b_J в (1.2) определены следующим образом:

$$a_J = \sqrt{J/(2J+1)}, \quad b_J = \sqrt{(J+1)/(2J+1)}.$$

Нетрудно показать, что плоскую монохроматическую циркулярно поляризованную волну можно разложить по сферическим волнам (1.2) следующим образом (множитель $e^{-i\omega t}$ мы опускаем):

$$\bar{E}_v^n(\vec{r}) = -v \bar{e}_v E_0 \exp(ik_v z) = \sum_{J=1}^{\infty} E_J \bar{F}_{JM}^{(j)}(k_v|\vec{r}), \quad (1.3)$$

$$E_J = E_0 \sqrt{2\pi(2J+1)} i^J,$$

где $k_v = (\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2} + v\alpha)\omega/c$ – волновые числа, соответствующие волнам, распространяющимся в биизотропной среде; индексом $v = \pm 1$ обозначается поляризация волны ($v = 1$ для правоциркулярно поляризованной волны и $v = -1$ для левоциркулярно поляризованной).

Учитывая структуру выражения (1.3), рассеянное и внутреннее поля будем искать в виде разложений:

$$\begin{aligned} \bar{E}_v^p(\vec{r}) &= -\sum_{J=1}^{\infty} E_J \sum_{\sigma=\pm 1} f_{\sigma}^J \bar{F}_{J\sigma}^{(h)}(k_\sigma|\vec{r}), \\ \bar{E}_v^b(\vec{r}) &= \sum_{J=1}^{\infty} E_J \sum_{\sigma=\pm 1} g_{\sigma}^J \bar{F}_{J\sigma}^{(z)}(k_\sigma|\vec{r}). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь $k_\sigma^1 = (\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \chi_1^2} + \sigma \alpha_1) \omega / c$ – волновые числа для внутренних волн (волн в биизотропном шаре), $f_{\sigma\nu}^J$ и $g_{\sigma\nu}^J$ – искомые коэффициенты разложения полей рассеянной и внутренней волн соответственно; индексом σ отмечено состояние поляризации рассеянной и внутренней волн ($\sigma = \pm 1$). В силу ортонормированности и линейной независимости системы шаровых векторов на сфере в формулах (1.4) фигурируют шаровые векторы $\bar{Y}_{JM}^L(\bar{n}_r)$ только с $M = \nu$. Для рассеянной волны используются сферические функции Ханкеля первого рода $h_L^{(1)}(\rho)$, имеющие правильную асимптотику («расходящаяся волна») на бесконечности. Удобно сферические функции Бесселя для внутренних волн обозначать $z_L(\rho) \equiv j_L(\rho)$.

Используя уравнения Максвелла и материальные уравнения (0.1) для биизотропной среды, можно найти напряженности магнитных полей, соответствующих этим волнам:

$$\begin{aligned}\bar{H}_\nu^n(\bar{r}) &= -\sum_{J=1}^{\infty} E_J b_\nu \bar{F}_{J\nu}^{(j)}(k_\nu | \bar{r}), \\ \bar{H}_\nu^p(\bar{r}) &= \sum_{J=1}^{\infty} E_J \sum_{\sigma=\pm 1} f_{\sigma\nu}^J b_\sigma \bar{F}_{J\sigma\nu}^{(h^1)}(k_\sigma | \bar{r}), \\ \bar{H}_\nu^B(\bar{r}) &= -\sum_{J=1}^{\infty} E_J \sum_{\sigma=\pm 1} g_{\sigma\nu}^J b_\sigma^1 \bar{F}_{J\sigma\nu}^{(z)}(k_\sigma^1 | \bar{r}).\end{aligned}\quad (1.5)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}b_\sigma &= \frac{1}{\mu} (\chi + i\sigma\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2}), \\ b_\sigma^1 &= \frac{1}{\mu_1} (\chi_1 + i\sigma\sqrt{\varepsilon_1\mu_1 - \chi_1^2}).\end{aligned}\quad (1.6)$$

Граничные условия заключаются в непрерывности тангенциальных составляющих результирующих электрического и магнитного полей на границе раздела двух сред (сфера радиуса R). Математически это требование может быть записано в виде:

$$\begin{aligned}[\bar{n}, \bar{E}_\nu^n + \bar{E}_\nu^p - \bar{E}_\nu^B]_{r=R} &= 0, \\ [\bar{n}, \bar{H}_\nu^n + \bar{H}_\nu^p - \bar{H}_\nu^B]_{r=R} &= 0.\end{aligned}\quad (1.7)$$

Проецируя векторы, содержащиеся в (1.7), на оси локальной системы координат $(\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_\varphi)$ [41], получим систему уравнений

$$\begin{cases} E_\theta^n + E_\theta^p - E_\theta^B = 0 \\ E_\varphi^n + E_\varphi^p - E_\varphi^B = 0 \\ H_\theta^n + H_\theta^p - H_\theta^B = 0 \\ H_\varphi^n + H_\varphi^p - H_\varphi^B = 0. \end{cases}\quad (1.8)$$

Для удобства применения граничных условий выразим функции $\bar{F}_{J\nu M}^{(z)}(k | \bar{r})$ через векторы $\bar{Y}_{JM}^{(\lambda)}(\theta, \varphi)$ ($\lambda = 0, \pm 1$), используя их связь с

шаровыми векторами $\bar{Y}_{JM}^L(\theta, \varphi)$ [41]:

$$\begin{aligned}\bar{Y}_{JM}^{J+1}(\theta, \varphi) &= a_J \bar{Y}_{JM}^{(1)}(\theta, \varphi) - b_J \bar{Y}_{JM}^{(-1)}(\theta, \varphi), \\ \bar{Y}_{JM}^J(\theta, \varphi) &= \bar{Y}_{JM}^{(0)}(\theta, \varphi), \\ \bar{Y}_{JM}^{J-1}(\theta, \varphi) &= b_J \bar{Y}_{JM}^{(1)}(\theta, \varphi) + a_J \bar{Y}_{JM}^{(-1)}(\theta, \varphi).\end{aligned}\quad (1.9)$$

Подставляя формулы (1.9) в выражение для сферических электромагнитных волн (1.2), а также используя рекуррентные соотношения для сферических функций:

$$z_{n-1}(\rho) + z_{n+1}(\rho) = \frac{2n+1}{\rho} z_n(\rho), \quad (1.10)$$

$$(2n+1) \frac{d}{d\rho} z_n(\rho) = n z_{n-1}(\rho) - (n+1) z_{n+1}(\rho),$$

получим следующее выражение для функций $\bar{F}_{J\nu M}^{(z)}(k | \bar{r})$:

$$\begin{aligned}\bar{F}_{J\nu M}^{(z)}(k | \bar{r}) &= z_J(kr) \bar{Y}_{JM}^{(0)}(\bar{n}_r) + \\ &+ \frac{i\nu}{kr} \hat{z}'_J(kr) \bar{Y}_{JM}^{(1)}(\bar{n}_r) + \\ &+ i\nu a_J b_J \frac{2J+1}{kr} z_J(kr) \bar{Y}_{JM}^{(-1)}(\bar{n}_r).\end{aligned}\quad (1.11)$$

Здесь использовано обозначение $\hat{z}_L(\rho) = \rho z_L(\rho)$ для функций Риккати – Бесселя, Риккати – Неймана и Риккати – Ханкеля, а штрихом обозначено дифференцирование по соответствующему аргументу.

Подставляя выражение (1.11) в формулы (1.3)–(1.4), получим выражения для напряженностей электрического поля падающей, рассеянной и внутренней волн:

$$\begin{aligned}\bar{E}_\nu^n(\bar{r}) &= \sum_{J=1}^{\infty} E_J \left\{ j_J(k_\nu r) \bar{Y}_{J\nu}^{(0)}(\bar{n}_r) + \right. \\ &+ \frac{i\nu}{k_\nu r} \hat{j}'_J(k_\nu r) \bar{Y}_{J\nu}^{(1)}(\bar{n}_r) + \\ &+ i\nu a_J b_J \frac{2J+1}{k_\nu r} j_J(k_\nu r) \bar{Y}_{J\nu}^{(-1)}(\bar{n}_r) \Big\}, \\ \bar{E}_\nu^p(\bar{r}) &= -\sum_{J=1}^{\infty} E_J \sum_{\sigma=\pm 1} f_{\sigma\nu}^J \left\{ h_J^{(1)}(k_\sigma r) \bar{Y}_{J\nu}^{(0)}(\bar{n}_r) + \right. \\ &+ \frac{i\sigma}{k_\sigma r} \hat{h}'_J^{(1)}(k_\sigma r) \bar{Y}_{J\nu}^{(1)}(\bar{n}_r) + \\ &+ i\sigma a_J b_J \frac{2J+1}{k_\sigma r} h_J^{(1)}(k_\sigma r) \bar{Y}_{J\nu}^{(-1)}(\bar{n}_r) \Big\}, \\ \bar{E}_\nu^B(\bar{r}) &= \sum_{J=1}^{\infty} E_J \sum_{\sigma=\pm 1} g_{\sigma\nu}^J \left\{ z_J(k_\sigma^1 r) \bar{Y}_{J\nu}^{(0)}(\bar{n}_r) + \right. \\ &+ \frac{i\sigma}{k_\sigma^1 r} \hat{z}'_J(k_\sigma^1 r) \bar{Y}_{J\nu}^{(1)}(\bar{n}_r) + \\ &+ i\sigma a_J b_J \frac{2J+1}{k_\sigma^1 r} z_J(k_\sigma^1 r) \bar{Y}_{J\nu}^{(-1)}(\bar{n}_r) \Big\}.\end{aligned}$$

Соответствующие напряженности магнитного поля запишутся в виде:

$$\begin{aligned}\bar{H}_v^n(\vec{r}) &= -\sum_{j=1}^{\infty} E_j b_v \left\{ j_j(k_v r) \bar{Y}_{jv}^{(0)}(\vec{n}_r) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{iv}{k_v r} \hat{j}'_j(k_v r) \bar{Y}_{jv}^{(1)}(\vec{n}_r) + \right. \\ &\quad \left. + i v a_j b_j \frac{2J+1}{k_v r} j_j(k_v r) \bar{Y}_{jv}^{(-1)}(\vec{n}_r) \right\}, \\ \bar{H}_v^p(\vec{r}) &= \sum_{j=1}^{\infty} E_j \sum_{\sigma=\pm 1} f_{\sigma v}^j b_{\sigma} \left\{ h_j^{(1)}(k_{\sigma} r) \bar{Y}_{jv}^{(0)}(\vec{n}_r) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i\sigma}{k_{\sigma} r} \hat{h}'_j(k_{\sigma} r) \bar{Y}_{jv}^{(1)}(\vec{n}_r) + \right. \\ &\quad \left. + i \sigma a_j b_j \frac{2J+1}{k_{\sigma} r} h_j^{(1)}(k_{\sigma} r) \bar{Y}_{jv}^{(-1)}(\vec{n}_r) \right\}, \\ \bar{H}_v^b(\vec{r}) &= -\sum_{j=1}^{\infty} E_j \sum_{\sigma=\pm 1} g_{\sigma v}^j b_{\sigma}^1 \left\{ z_j(k_{\sigma}^1 r) \bar{Y}_{jv}^{(0)}(\vec{n}_r) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i\sigma}{k_{\sigma}^1 r} \hat{z}'_j(k_{\sigma}^1 r) \bar{Y}_{jv}^{(1)}(\vec{n}_r) + \right. \\ &\quad \left. + i \sigma a_j b_j \frac{2J+1}{k_{\sigma}^1 r} z_j(k_{\sigma}^1 r) \bar{Y}_{jv}^{(-1)}(\vec{n}_r) \right\}.\end{aligned}$$

С учетом того факта, что вектор $\bar{Y}_{JM}^{(-1)}(\vec{n}_r)$ не имеет тангенциальной составляющей, из граничных условий (1.8) следует алгебраическая система уравнений для определения коэффициентов рассеянного и внутреннего полей в условиях, соответствующих рассматриваемой задаче:

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma=\pm 1} \left\{ f_{\sigma v}^j h_j^{(1)}(k_{\sigma} R) + g_{\sigma v}^j z_j(k_{\sigma}^1 R) \right\} &= \\ &= j_j(k_v R); \\ \sum_{\sigma=\pm 1} \left\{ f_{\sigma v}^j \frac{\sigma}{k_{\sigma}} \hat{h}'_j(k_{\sigma} R) + g_{\sigma v}^j \frac{\sigma}{k_{\sigma}^1} \hat{z}'_j(k_{\sigma}^1 R) \right\} &= \\ &= \frac{v}{k_v} \hat{j}'_j(k_v R); \\ \sum_{\sigma=\pm 1} \left\{ f_{\sigma v}^j b_{\sigma} h_j^{(1)}(k_{\sigma} R) + g_{\sigma v}^j b_{\sigma}^1 z_j(k_{\sigma}^1 R) \right\} &= \\ &= b_v j_j(k_v R); \\ \sum_{\sigma=\pm 1} \left\{ f_{\sigma v}^j b_{\sigma} \frac{\sigma}{k_{\sigma}} \hat{h}'_j(k_{\sigma} R) + g_{\sigma v}^j b_{\sigma}^1 \frac{\sigma}{k_{\sigma}^1} \hat{z}'_j(k_{\sigma}^1 R) \right\} &= \\ &= b_v \frac{v}{k_v} \hat{j}'_j(k_v R).\end{aligned}\quad (1.12)$$

Эту систему целесообразно записать в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} \hat{h}_j^{(1)}(k_{+1} R) & \hat{h}_j^{(1)}(k_{-1} R) & \hat{z}_j(k_{+1}^1 R) & \hat{z}_j(k_{-1}^1 R) \\ \hat{h}_j^{(1)'}(k_{+1} R) & -\hat{h}_j^{(1)'}(k_{-1} R) & \hat{z}'_j(k_{+1}^1 R) & -\hat{z}'_j(k_{-1}^1 R) \\ b_{+1} \hat{h}_j^{(1)}(k_{+1} R) & b_{-1} \hat{h}_j^{(1)}(k_{-1} R) & b_{+1} \hat{z}_j(k_{+1}^1 R) & b_{-1} \hat{z}_j(k_{-1}^1 R) \\ b_{+1} \hat{h}_j^{(1)'}(k_{+1} R) & -b_{-1} \hat{h}_j^{(1)'}(k_{-1} R) & b_{+1} \hat{z}'_j(k_{+1}^1 R) & -b_{-1} \hat{z}'_j(k_{-1}^1 R) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{+1v}^j/k_{+1} \\ f_{-1v}^j/k_{-1} \\ g_{+1v}^j/k_{+1}^1 \\ g_{-1v}^j/k_{-1}^1 \end{bmatrix} = \frac{1}{k_v} \begin{bmatrix} \hat{j}_j(k_v R) \\ v \hat{j}'_j(k_v R) \\ b_v \hat{j}_j(k_v R) \\ v b_v \hat{j}'_j(k_v R) \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

Решения системы (1.13), то есть коэффициенты $f_{\sigma v}^j$ и $g_{\sigma v}^j$, можно найти по правилам:

$$f_{\sigma v}^j = \frac{k_{\sigma}}{k_v} \frac{\Delta_{\sigma v}^f}{\Delta}; \quad g_{\sigma v}^j = \frac{k_{\sigma}^1}{k_v} \frac{\Delta_{\sigma v}^g}{\Delta}, \quad (1.14)$$

где Δ – главный определитель системы, $\Delta_{\sigma v}^f$, $\Delta_{\sigma v}^g$ – характеристические определители. Проводя их вычисления с учетом хорошо известных свойств определителей, находим для Δ выражение

$$\begin{aligned}\Delta &= [b_{+1} b_{-1} + b_{+1}^1 b_{-1}^1] \Pi(\hat{h}_+ \hat{h}_-) \Pi(\hat{z}_+ \hat{z}_-) + \\ &+ [b_{+1} b_{+1}^1 + b_{-1} b_{-1}^1] W(\hat{h}_+ \hat{z}_+) W(\hat{h}_- \hat{z}_-) - \\ &- [b_{+1} b_{-1}^1 + b_{-1} b_{+1}^1] \Pi(\hat{h}_+ \hat{z}_+) \Pi(\hat{h}_- \hat{z}_-).\end{aligned}\quad (1.15)$$

При записи определителей мы используем обозначения

$$W(y_1 y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2,$$

$$\Pi(y_1 y_2) = y_1 y_2' + y_1' y_2,$$

и сокращенные обозначения функций

$$\hat{j}_v = \hat{j}_j(k_v R),$$

$$\hat{h}_{\sigma} = \hat{h}_j^{(1)}(k_{\sigma} R),$$

$$\hat{z}_{\sigma} = \hat{z}_j(k_{\sigma}^1 R).$$

При вычислении характеристических определителей $\Delta_{\sigma v}^f$ и $\Delta_{\sigma v}^g$, получаем выражения:

$$\begin{aligned}\Delta_{\sigma v}^f &= [b_v b_{-\sigma} + b_{+1}^1 b_{-1}^1] \Pi(\hat{z}_+ \hat{z}_-) (\hat{j}_v \hat{h}_{-\sigma}' + v \sigma \hat{j}_v' \hat{h}_{-\sigma}) + \\ &+ [b_{-\sigma} b_{-\sigma}^1 + b_v b_{\sigma}^1] W(\hat{h}_{-\sigma} \hat{z}_{-\sigma}) (\hat{j}_v \hat{z}_{-\sigma}' - v \sigma \hat{j}_v' \hat{z}_{-\sigma}) - \\ &- [b_{-\sigma} b_{\sigma}^1 + b_v b_{-1}^1] \Pi(\hat{h}_{-\sigma} \hat{z}_{-\sigma}) (\hat{j}_v \hat{z}_{-\sigma}' + v \sigma \hat{j}_v' \hat{z}_{-\sigma}),\end{aligned}\quad (1.16)$$

$$\begin{aligned}\Delta_{\sigma v}^g &= [b_v b_{-\sigma}^1 + b_{+1} b_{-1}] \Pi(\hat{h}_+ \hat{h}_-) (\hat{j}_v \hat{z}_{-\sigma}' + v \sigma \hat{j}_v' \hat{z}_{-\sigma}) - \\ &- [b_v b_{\sigma} + b_{-\sigma} b_{-\sigma}^1] W(\hat{h}_{-\sigma} \hat{z}_{-\sigma}) (\hat{j}_v \hat{h}_{\sigma}' - v \sigma \hat{j}_v' \hat{h}_{\sigma}) - \\ &- [b_v b_{-\sigma} + b_{\sigma} b_{-\sigma}^1] \Pi(\hat{h}_{\sigma} \hat{z}_{-\sigma}) (\hat{j}_v \hat{h}_{-\sigma}' + v \sigma \hat{j}_v' \hat{h}_{-\sigma}).\end{aligned}\quad (1.17)$$

Формулы (1.14)–(1.17) в совокупности составляют ответ к задаче о нахождении коэффициентов разложения рассеянного и внутреннего полей (1.4), (1.5).

Проиллюстрируем полученные аналитические результаты точного решения задачи Ми для биизотропных сред с применением результатов численных расчетов. На рисунках 1–8 приведены зависимости вещественных и мнимых частей коэффициентов $f_{\sigma v}^j$ и $g_{\sigma v}^j$ от отношения R/λ

для различных значений J ($J=1; 3; 6$) и всех возможных вариантов значений поляризационных индексов σ и ν .

Необходимость большого числа иллюстраций обусловлена очень большим количеством параметров задачи: 8 материальных постоянных, 4 значения пары поляризационных индексов (σ, ν) , отношение R/λ , индекс J , значением которого определяется полный момент сферической волны. Чтобы систематизировать графики, мы на каждом из рисунков 1–4 представляем значения величин $\operatorname{Re} f_{\sigma\nu}^J$ и $\operatorname{Im} f_{\sigma\nu}^J$ при одних и тех же значениях пары поляризационных индексов (σ, ν) . Аналогично на каждом из рисунков 5–8 представлены значения величин $\operatorname{Re} g_{\sigma\nu}^J$ и $\operatorname{Im} g_{\sigma\nu}^J$ при одних и тех же значениях пары индексов (σ, ν) . Таким образом, в пределах каждого рисунка постоянны поляризационные индексы σ и ν .

На всех восьми рисунках установлено соответствие: а) $J=1$; б) $J=3$; в) $J=6$; указанные значения полного момента выбраны для примера. При этом на левых (правых) рисунках изображается функциональная зависимость вещественной (мнимой) части, соответствующей функции f или g от параметра R/λ . На каждом из рисунков кривым, пронумерованным цифрами 1–4, соответствует следующий выбор значений материальных постоянных (одинаковый для всех рисунков):

- 1) $\alpha=0,1$, $\chi=0,1$, $\alpha_1=0,1$, $\chi_1=0,2$;
- 2) $\alpha=0,1$, $\chi=0,2$, $\alpha_1=0,3$, $\chi_1=0,3$;
- 3) $\alpha=0,3$, $\chi=0,4$, $\alpha_1=0,4$, $\chi_1=0,5$;
- 4) $\alpha=0,4$, $\chi=0,5$, $\alpha_1=0,2$, $\chi_1=0,1$.

Так как число варьируемых параметров велико, диэлектрические и магнитные проницаемости двух биизотропных сред в численных расчётах были фиксированы и взяты следующими: $\varepsilon=3$, $\mu=1,01$ и $\varepsilon_1=4$, $\mu_1=1,05$.

В ходе анализа зависимостей типа приведённых на рисунках 1–8 и рассчитанных при других значениях параметров выяснилось, что при отличных от нуля значениях параметров не взаимности ($\chi \neq 0$; $\chi_1 \neq 0$) ни одна из кривых не может быть воспроизведена ни при каких (изменённых) значениях других материальных параметров ε ; μ ; α ; ε_1 ; μ_1 ; α_1 , что противоречит предположениям авторов работ [22], [23], [32]–[34]. Другими словами, параметры не взаимности χ и χ_1 не могут быть исключены из соотношений теории рассеяния электромагнитных волн на сферических биизотропных частицах в биизотропной среде ни при каком наборе значений других материальных параметров.

2 Некоторые частные варианты решения задачи Ми для биизотропных сред

В целях проверки полученных результатов рассмотрим два частных случая. В первом из них, когда параметры биизотропных сред (внешней среды и материала частицы-шара) совпадают, имеем: $b_\sigma = b_\sigma^1$ и $k_\sigma = k_\sigma^1$. При этом для коэффициентов рассеянного и внутреннего полей получаем $f_{\sigma\nu}^J = 0$, $g_{\sigma\nu}^J = \delta_{\sigma\nu}$, где $\delta_{\sigma\nu}$ – символ Кронекера. Таким образом, в данной ситуации рассеянная волна отсутствует, а внутренняя волна полностью совпадает с волной падающей, как и должно быть.

В качестве второго теста на правильность полученных формул рассмотрим ситуацию, в которой и внешняя среда и частица-шар являются взаимными гиротропными; при этом $\chi=0$; $\chi_1=0$ и

$$b_\sigma = i\sigma\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}; \quad b_\sigma^1 = i\sigma\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}},$$

а определители (1.15)–(1.17) и выражения (1.14) для коэффициентов $f_{\sigma\nu}^J$ и $g_{\sigma\nu}^J$ упрощаются. При рассмотрении случая двух взаимных гиротропных сред для главного определителя (1.15) получаем выражение:

$$\Delta = \left(-\frac{\varepsilon}{\mu}\right) \left[(1+\delta)^2 W(\hat{h}_- \hat{z}_-) W(\hat{h}_+ \hat{z}_+) - (1-\delta)^2 \Pi(\hat{h}_+ \hat{z}_-) \Pi(\hat{h}_- \hat{z}_+) \right], \quad (2.1)$$

$$\text{где } \delta = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu}{\mu_1 \varepsilon}}.$$

Аналогично упрощаются и характеристические определители:

$$\Delta_{\sigma\nu}^f = \begin{cases} \left(-\frac{\varepsilon}{\mu}\right) \left[(1+\delta)^2 W(\hat{h}_- \hat{z}_-) W(\hat{j}_+ \hat{z}_-) - (1-\delta)^2 \Pi(\hat{h}_- \hat{z}_+) \Pi(\hat{j}_+ \hat{z}_-) \right]; & \sigma = \nu; \\ \left(-\frac{\varepsilon}{\mu}\right) (1-\delta^2) \Pi(\hat{z}_+ \hat{z}_-) W(\hat{j}_+ \hat{h}_+); & \sigma \neq \nu, \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\Delta_{\sigma\nu}^g = \begin{cases} \left(-\frac{\varepsilon}{\mu}\right) 2(1+\delta) W(\hat{h}_- \hat{z}_-) W(\hat{h}_+ \hat{j}_+); & \sigma = \nu; \\ \left(-\frac{\varepsilon}{\mu}\right) 2(1-\delta) \Pi(\hat{h}_+ \hat{z}_+) W(\hat{h}_- \hat{j}_-); & \sigma \neq \nu. \end{cases} \quad (2.3)$$

Таким образом, формулы (2.1)–(2.3), полученные как частный случай выражений (1.14)–(1.17), полностью совпадают с результатами, полученными ранее в работе [14].

Сравнивая формулы (2.1)–(2.3) с общими формулами (1.14)–(1.17), и учитывая результаты сравнения графиков, можно ответить на один из главных вопросов дискуссии, упомянутой во введении – вопрос о распознаваемом существовании биизотропных сред.

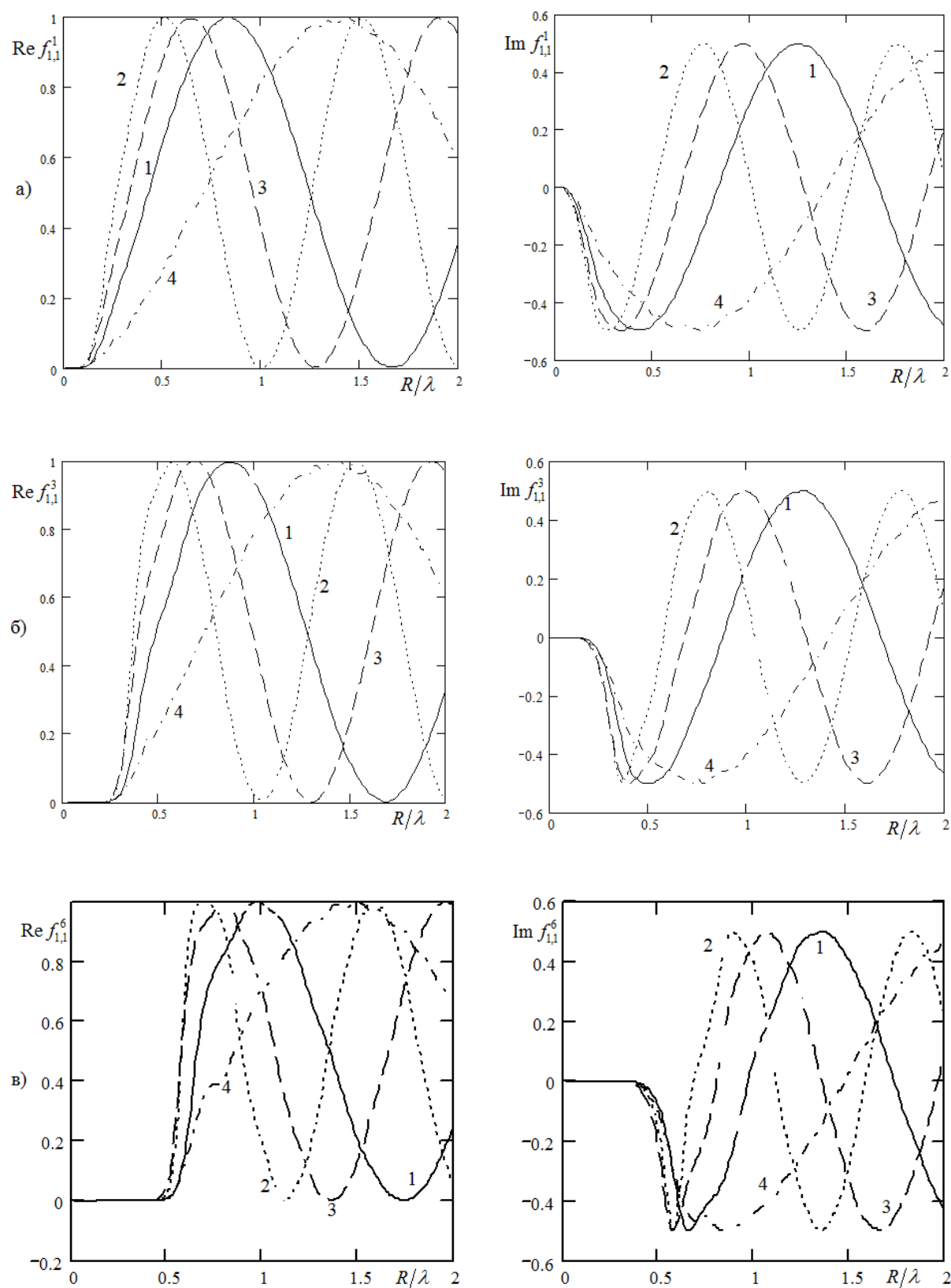


Рисунок 1 – Зависимость вещественной и мнимой частей амплитудных коэффициентов $f_{1,1}^j$ от R/λ :

а) $f_{1,1}^1$, б) $f_{1,1}^3$, в) $f_{1,1}^6$

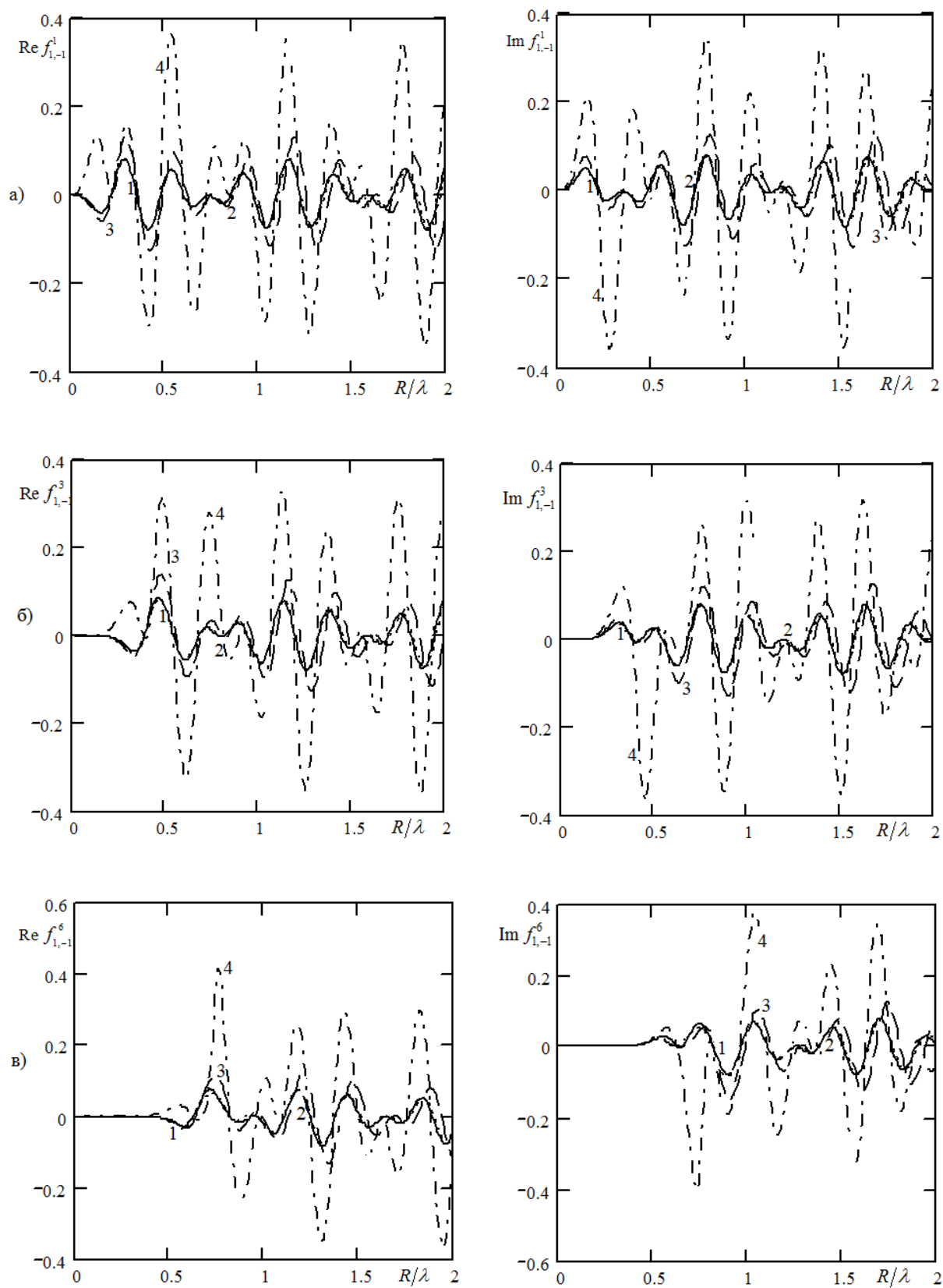


Рисунок 2 – Зависимость вещественной и мнимой частей амплитудных коэффициентов $f_{l,-1}^j$ от R/λ :

а) $f_{1,-1}^1$, б) $f_{1,-1}^3$, в) $f_{1,-1}^6$

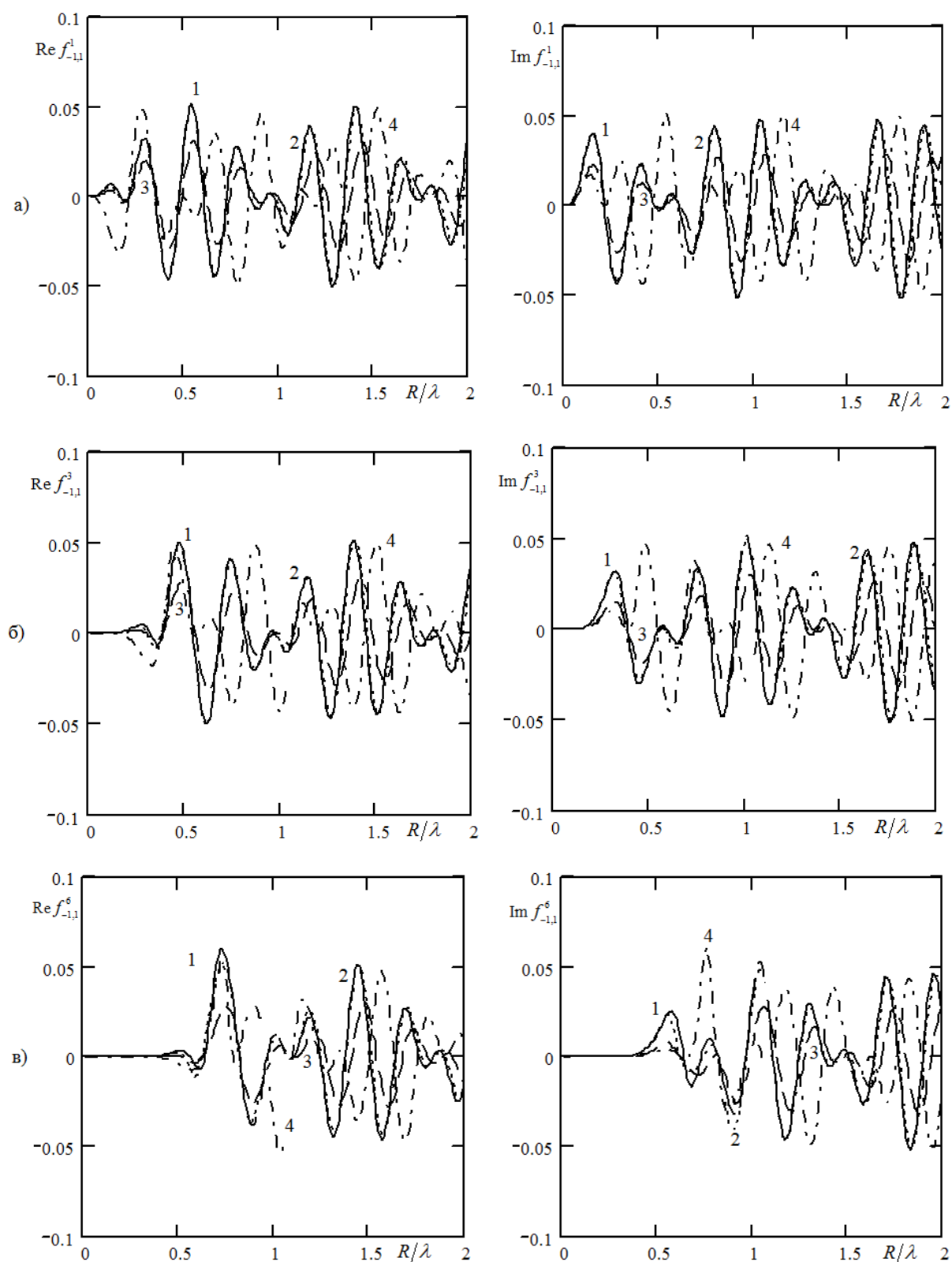


Рисунок 3 – Зависимость вещественной и мнимой частей амплитудных коэффициентов $f_{-1,1}^j$ от R/λ :

а) $f_{-1,1}^1$, б) $f_{-1,1}^3$, в) $f_{-1,1}^6$

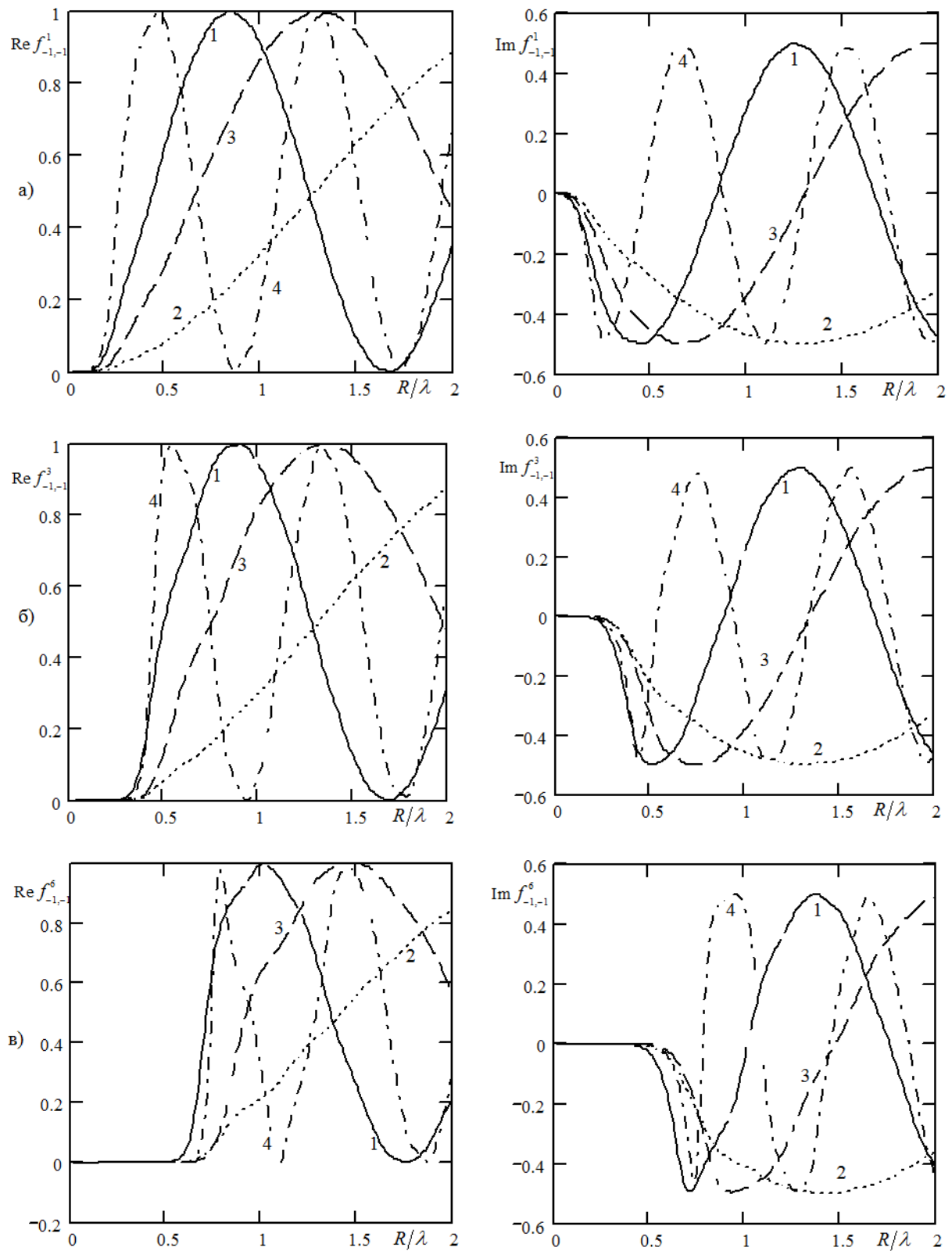


Рисунок 4 – Зависимость вещественной и мнимой частей амплитудных коэффициентов $f_{-1,-1}^j$ от R/λ :

а) $f_{-1,-1}^1$, б) $f_{-1,-1}^3$, в) $f_{-1,-1}^6$

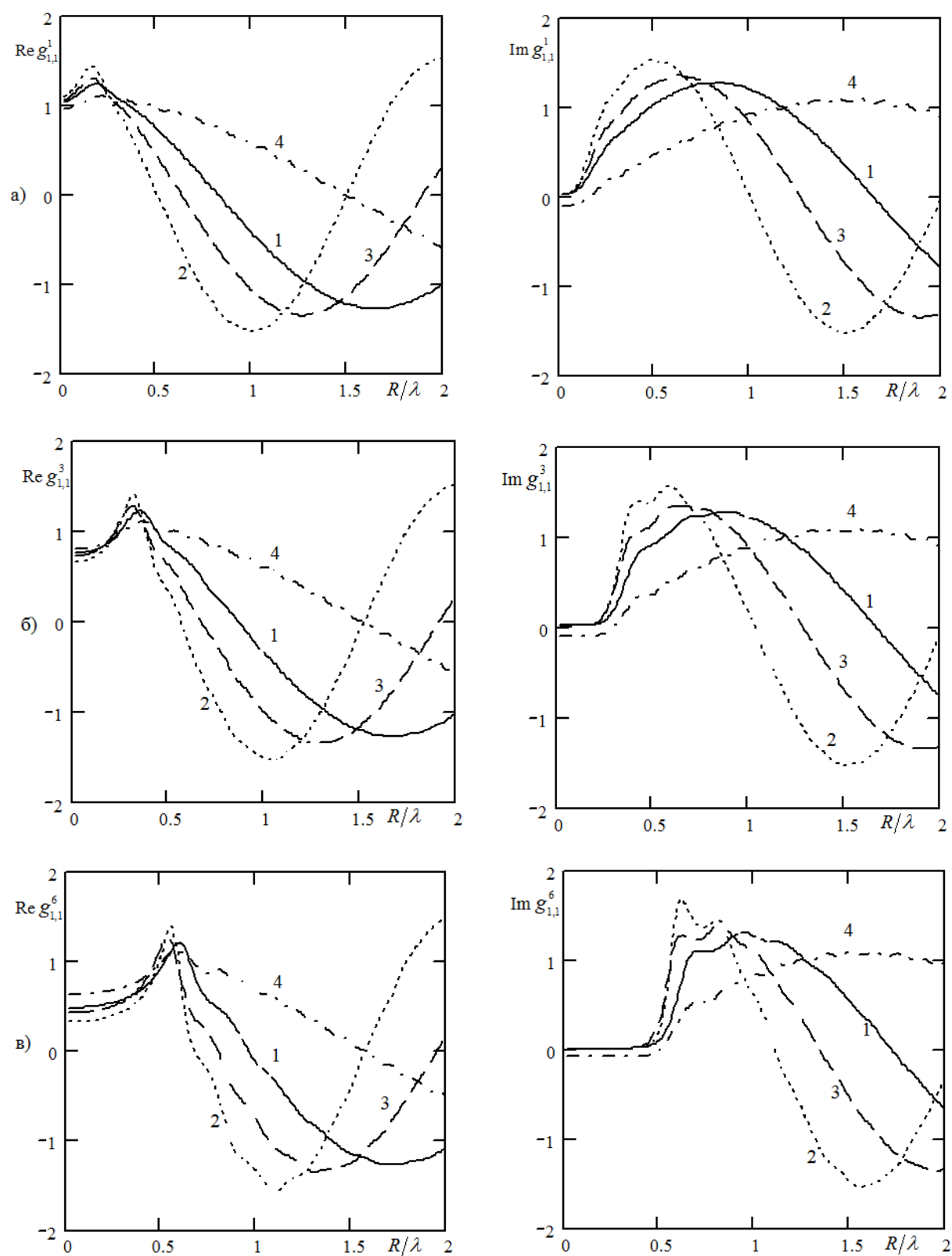


Рисунок 5 – Зависимость вещественной и мнимой частей амплитудных коэффициентов $g_{1,1}^j$ от R/λ :

а) $g_{1,1}^1$, б) $g_{1,1}^3$, в) $g_{1,1}^6$

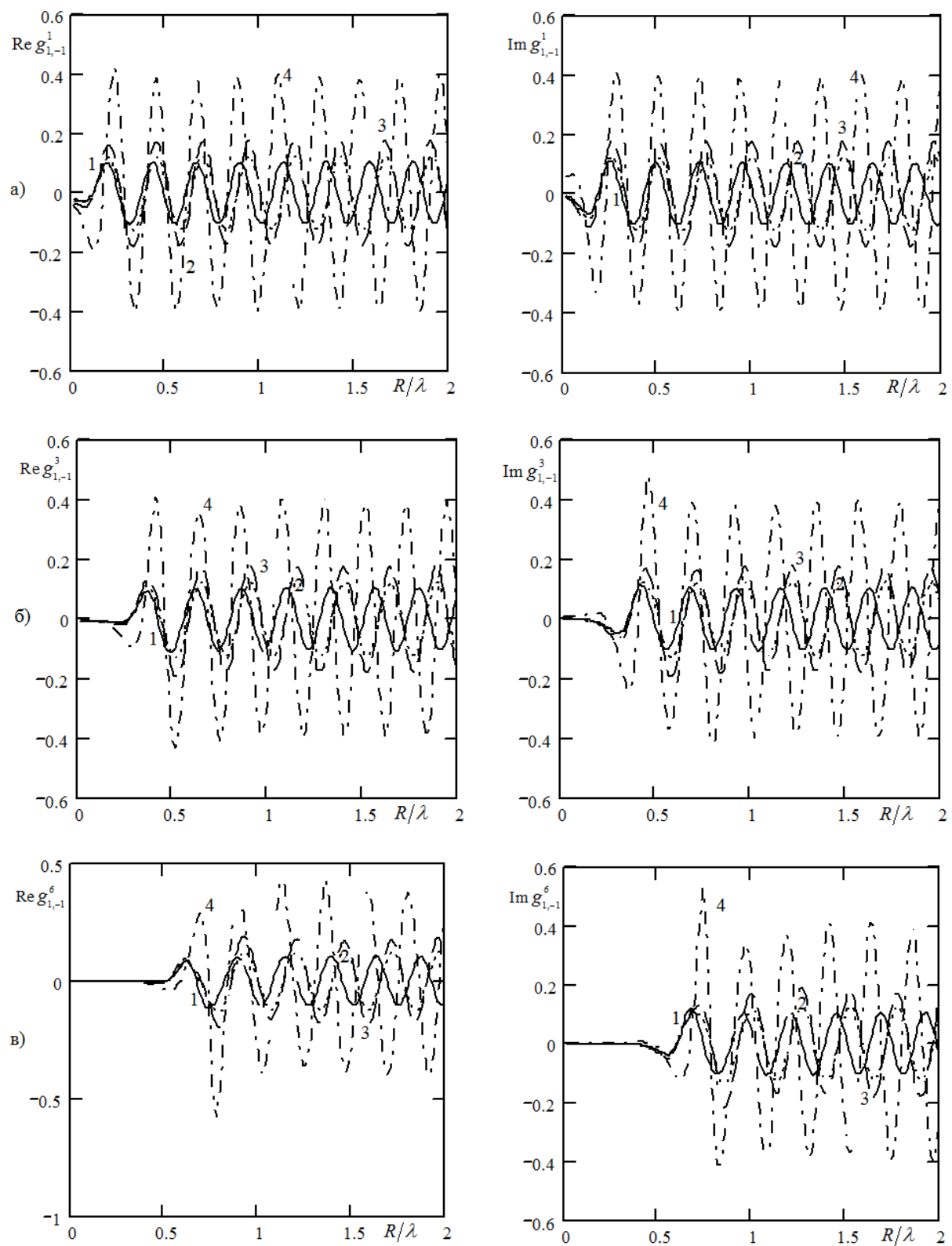


Рисунок 6 – Зависимость вещественной и мнимой частей амплитудных коэффициентов $g_{l,-1}^j$ от R/λ :

а) $g_{1,-1}^1$, б) $g_{1,-1}^3$, в) $g_{1,-1}^6$

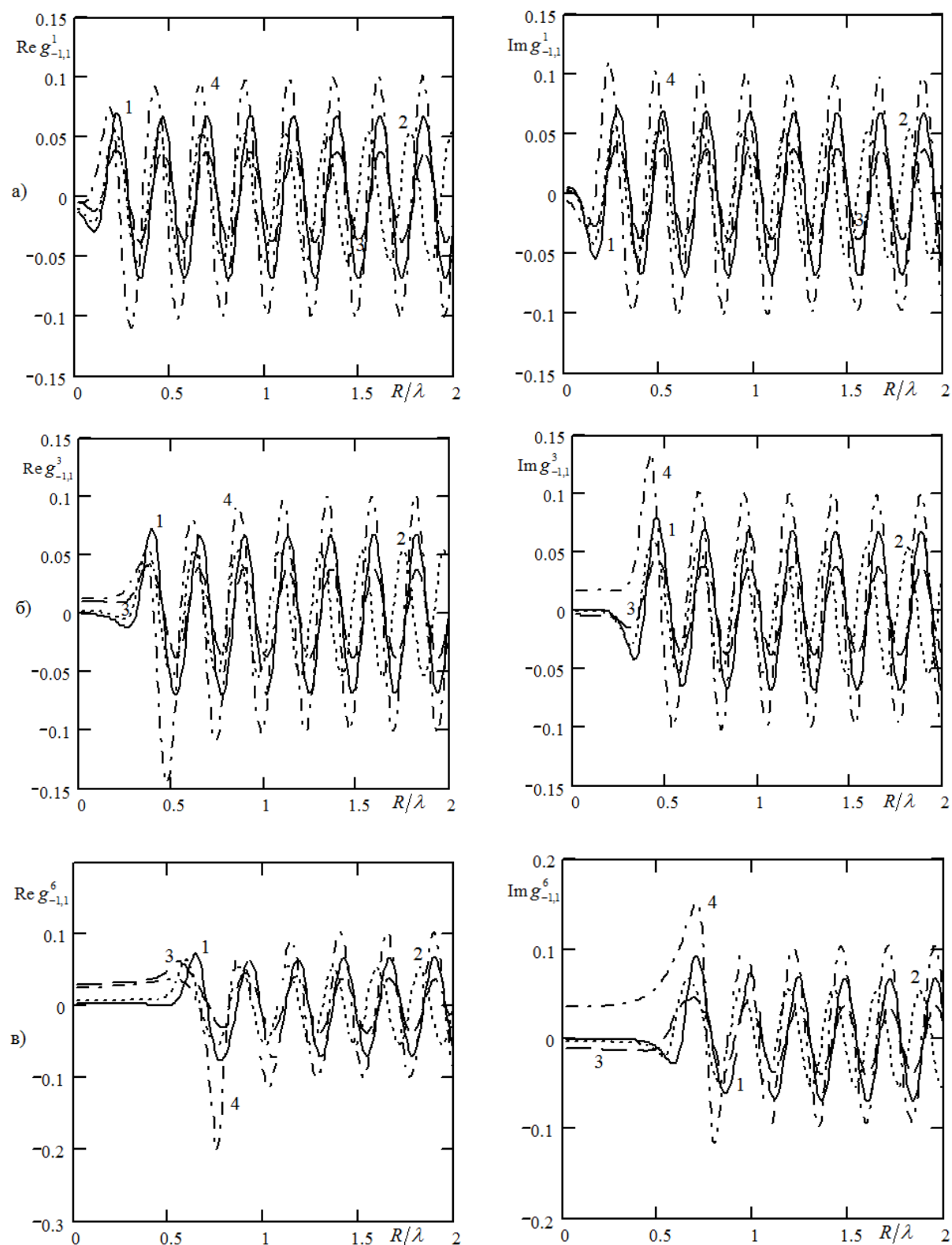


Рисунок 7 – Зависимость вещественной и мнимой частей амплитудных коэффициентов $g_{-1,1}^j$ от R/λ :

а) $g_{-1,1}^1$, б) $g_{-1,1}^3$, в) $g_{-1,1}^6$

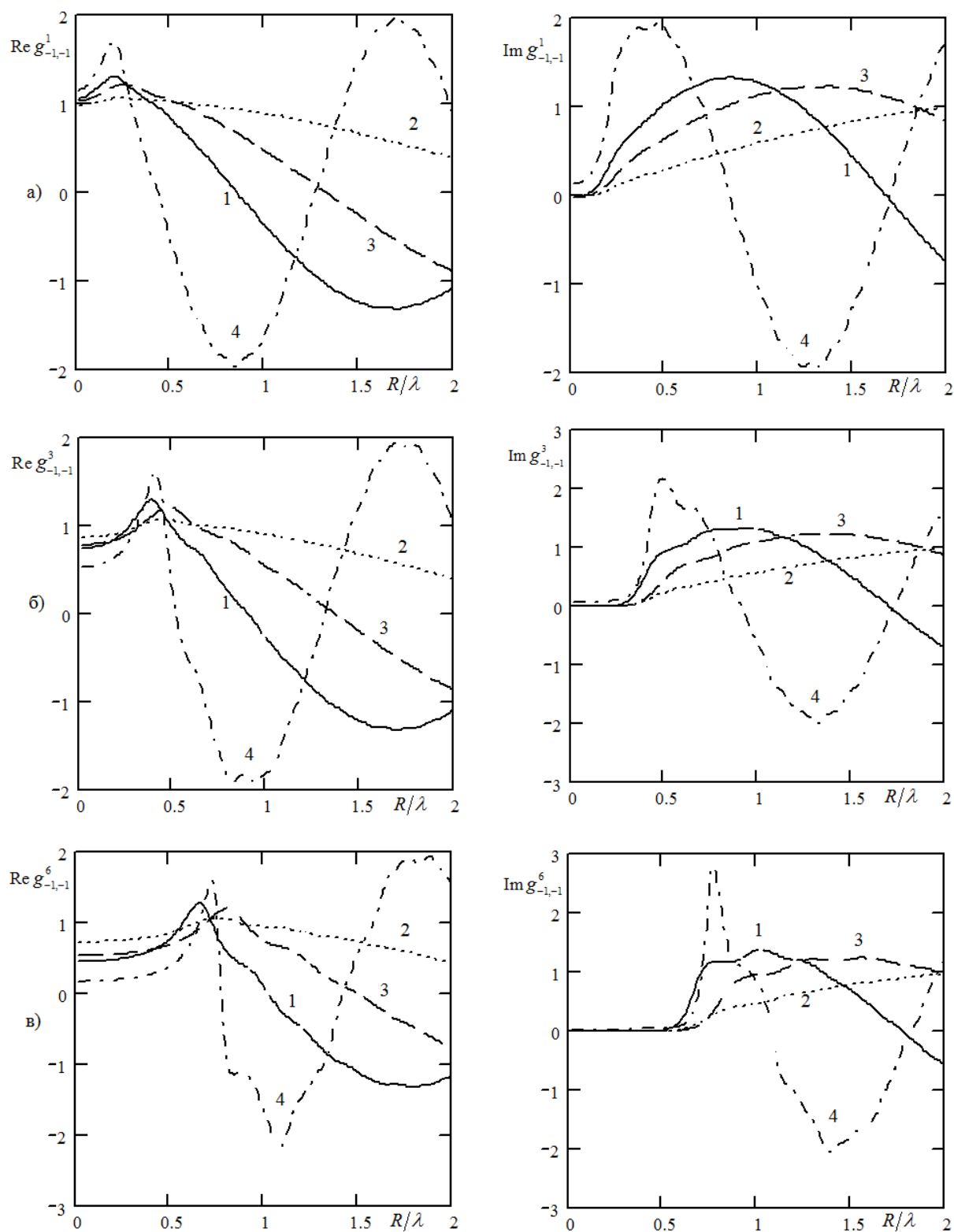


Рисунок 8 – Зависимость вещественной и мнимой частей амплитудных коэффициентов $g_{-l,-1}^J$ от R/λ :

а) $g_{-1,-1}^1$, б) $g_{-1,-1}^3$, в) $g_{-1,-1}^6$

Совершенно ясно, что никаким изменением параметров $\varepsilon; \mu; \alpha; \varepsilon_1; \mu_1; \alpha_1$, входящих в аргументы сферических функций Бесселя и Ханкеля в формулах (2.1)–(2.3) при $\chi = 0$, $\chi_1 = 0$, невозможно воспроизвести более сложные формулы (1.14)–(1.17), содержащие ненулевые значения параметров невязимности.

Из наших выражений (1.14)–(1.17) легко также получить ответы для задачи Ми и в других частных случаях, например, для задач о рассеянии электромагнитной волны на биизотропном шаре, находящемся в вакууме, диэлектрике или среде Теллгена, или о рассеянии на находящемся в биизотропной среде диэлектрическом или гиротропном шаре, на вакуумной полости или на шаре Теллгена в биизотропной среде и в других условиях.

Заключение

В настоящей работе получено точное решение задачи Ми о рассеянии плоских электромагнитных волн на биизотропном шаре, находящемся в биизотропной среде, характеризующейся другими материальными параметрами. Полученные аналитические выражения проиллюстрированы графически с использованием результатов численного расчета коэффициентов $f_{\sigma\nu}^J$ и $g_{\sigma\nu}^J$ рассеянной и внутренней волн. В результате анализа зависимостей указанных коэффициентов от отношения R/λ при различных отличных от нуля значениях параметров невязимности χ и χ_1 доказано, что эти зависимости нельзя воспроизвести пользуясь при расчете формулами, в которых параметры невязимности приняты равными нулю, ни при каких вариантах сочетания значений других материальных параметров. Это и означает, что биизотропные среды – распознаваемы; они принципиально, а не только значениями параметров $\varepsilon; \mu; \alpha$ отличаются от взаимных киральных сред.

В частных условиях при которых (невязимные) биизотропные среды трансформируются во (взаимные) гиротропные среды результаты данной работы совпадают с полученными ранее в [14]. Физически правильное заключение об оптической однородности среды следует из полученных формул и при совпадении параметров граничащих сред.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sihvola, A.H. Bi-isotropic constitutive relations / A.H. Sihvola, I.V. Lindell // *Microwave and Opt. Technol. Lett.* – 1991. – Vol. 4, № 8. – P. 295–297.
2. Monzon, J.C. Radiation and scattering in homogeneous general biisotropic regions / J.C. Monzon // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation.* – 1990. – Vol. 38, № 2. – P. 227–235.
3. Lindell, I.V. Plane-wave reflection from a bi-isotropic (non-reciprocal chiral) interface / I.V. Lindell, A.H. Sihvola, A.J. Viitanen // *Microwave and Opt. Technol. Lett.* – 1992. – Vol. 5, № 2. – P. 79–81.
4. Sihvola, A.H. Electromagnetic modeling of bi-isotropic media / A.H. Sihvola // *Progress In Electromagnetics Research (PIER).* – 1994. – Vol. 9. – P. 45–86.
5. Semchenko, I.V. Research on chiral and bi-anisotropic media in Byelorussia and Russia in the last ten years / I.V. Semchenko, S.A. Tretyakov, A.N. Serdyukov // *Progress in Electromagnetics Research (PIER).* – 1996. – Vol. 12. – P. 335–370.
6. Bolioli, S. Advances in Complex Electromagnetic Materials / S. Bolioli. – Kluwer Academic Publishers, Netherlands. – 1997. – P. 33–51.
7. Sihvola, A. Comments on boundary problems and electromagnetic constitutive parameters / A. Sihvola, S. Tretyakov // *Optik.* – 2008. – Vol. 120. – P. 247–249.
8. Obukhov, Y.N. On the boundary-value problems and the validity of the Post constraint in the modern electromagnetism / Y.N. Obukhov, F.W. Hehl // *Optik.* – 2009. – Vol. 120. – P. 418–421.
9. *Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-isotropic Media* / I.V. Lindell [et al.]. – Boston and London: Artech House, 1994. – 500 p.
10. *Electromagnetics of Bi-anisotropic Materials Theory and Applications* / A. Serdyukov [et al.]. – Overseas Publishers Association, 2001. – 400 p.
11. Сферические электромагнитные волны и квантовая теория электромагнитного поля в естественно гиротропной среде / А.А. Афонин [и др.] // *Журнал прикладной спектроскопии.* – 1986. – Т. 45, № 2. – С. 307–312.
12. Годлевская, А.Н. Сферические электромагнитные волны в естественно гиротропных средах / А.Н. Годлевская, В.А. Карпенко, А.Н. Сердюков // *Опт. и спектр.* – 1985. – Т. 59, № 6. – С. 1262–1265.
13. Годлевская, А.Н. Рассеяние электромагнитных волн на металлической сфере в естественно гиротропной среде / А.Н. Годлевская, В.Н. Капшай // *ДАН БССР.* – 1989. – Т. 33, № 4. – С. 332–335.
14. Годлевская, А.Н. Рассеяние электромагнитных волн на сферически симметричных частицах в естественно гиротропной среде / А.Н. Годлевская, В.Н. Капшай // *Опт. и спектр.* – 1990. – Т. 68, № 1. – С. 122–127.
15. Рассеяние электромагнитных волн на двуслойной шаровой частице в естественно гиротропной среде / А.А. Афонин [и др.] // *Опт. и спектр.* – 1990. – Т. 69, В. 2. – С. 406–411.
16. Третьяков, С.Я. Электромагнитные волны в прямоугольных волноводах, заполненных биизотропной (невязимной киральной) средой / С.Я. Третьяков // *Радиотехника и электроника.* – 1991. – Т. 36, № 11. – С. 108–112.

17. Беличенко, В.И. Рассеяние электромагнитных волн биизотропной сферой / В.И. Беличенко, В.В. Фисанов // Изв. вузов. Физика. – 1994. – № 10. – С. 108–112.
18. Капшай, В.Н. Электромагнитные поля в биизотропной среде внутри и вне металлической сферы / В.Н. Капшай, В.В. Кондратюк // Известия ВУЗов. Физика. – Томск, 2000. – № 11. – С. 79–84.
19. Киральные электродинамические объекты / Б.З. Каценеленбаум [и др.] // УНФ. – 1997. – Т. 167, В. 11. – С. 1201–1212.
20. Сихвола, А. Метаматериалы с экстремальными материальными параметрами / А. Сихвола, С.А. Третьяков, А. де Баас // Радиотехника и электроника. – 2007. – Т. 52. – № 9. – С. 1066–1071.
21. Санников, Д.Г. Интерференция встречных волн в невзаимной киральной среде / Д.Г. Санников, Д.И. Семенов // Письма в ЖТФ. – 2007. – Т. 33, Вып. 23. – С. 19–26.
22. Weiglhofer, W.S. On the non-existence of linear non-reciprocal bi-isotropic (NRBI) media / W.S. Weiglhofer, A.J. Lakhtakia // J. Phys. A. : Math. Gen. – 1997. – Vol. 30. – P. 2597–2600.
23. Лакхтакия, А. Замечание о не существовании линейной среды Теллегена / А. Лакхтакия, В.С. Вейгльхофер // Радиотехника и электроника. – 1998. – Т. 43, № 4. – С. 494–495.
24. Reflection and transmission by a uniaxial bi-anisotropic slab under normal incidence of plane waves / I.V. Semchenko [et al.] // J. Phys. D. : Appl. Phys. – 1998. – Vol. 31. – P. 2458–2464.
25. Reply to comment on «Reflection and transmission by uniaxial bi-anisotropic slab under normal incidence of plane waves» / S.A. Tretyakov [et al.] // J. Phys. D. : Appl. Phys. – 1999. – Vol. 32. – P. 2705–2706.
26. Raab, R.E. On the existence of linear non-reciprocal bi-isotropic (NRBI) media / R.E. Raab, A.H. Sihvola // J. Phys. A. : Math. Gen. – 1997. – Vol. 30. – P. 1335–1344.
27. de Lange, O.L. Post's constraint for electromagnetic constitutive relations / O.L. de Lange, R.E. Raab // J. Opt. A: Pure Appl. Opt. – 2001. – Vol. 3. – P. L23–L26.
28. Weiglhofer, W.S. Comment on «Post's constraint for electromagnetic constitutive relations» / W.S. Weiglhofer // J. Opt. A: Pure Appl. Opt. – 2002. – Vol. 4. – P. 213–214.
29. Raab, R.E. Reply to «Comment on "Post's constraint for electromagnetic constitutive relations» / R.E. Raab, O.L. de Lange // J. Opt. A: Pure Appl. Opt. – 2002. – Vol. 4. – P. 215–216.
30. Lakhtakia, A. On the genesis of Post constraint in modern electromagnetism / A. Lakhtakia // Optik. – 2004. – Vol. 115. – P. 151–158.
31. Hehl, F.W. Linear media in classical electrodynamics and the Post constraint / F.W. Hehl, Y.N. Obuhov // Physics Letters A. – 2005. – Vol. 334. – P. 249–259.
32. Lakhtakia, A. Boundary-value problems and the validity of the Post constraint in modern electromagnetism / A. Lakhtakia // Optik. – 2006. – Vol. 117. – P. 188–192.
33. Lakhtakia, A. Remarks on the current status of the Post constraint / A. Lakhtakia // Optik. – 2009. – Vol. 120. – P. 422–424.
34. Lakhtakia, A. Response to comments on boundary problems and electromagnetic constitutive parameters / A. Lakhtakia // Optik. – 2008. – Vol. 119. – P. 250–252.
35. Капшай, В.Н. Отражение и преломление плоских электромагнитных волн на границе раздела с биизотропной средой / В.Н. Капшай, В.В. Кондратюк // Известия ГГУ им. Ф.Скорины. – 2009. – № 4 (55), Ч. 2. – С. 113–122.
36. Капшай, В.Н. Отражение и преломление плоской электромагнитной волны на границе раздела биизотропных сред / В.Н. Капшай, В.В. Кондратюк // Известия ГГУ им. Ф.Скорины. – 2009. – № 5 (56). – С. 129–133.
37. Mie, G. Beitrage zur Optik trüber Medien speciell kolloidaler Metallösungen / G. Mie, // Annalen der Physik. – 1908. – B. 25. – S. 377–445.
38. Стрэттон, Дж. Теория электромагнетизма / Дж. Стрэттон. – М. : Физматгиз, 1947. – 539 с.
39. Ван де Хюлст, Г. Рассеяние света малыми частицами / Г. Ван де Хюлст. – М. : Из-во иностр. лит., 1961. – 288 с.
40. Борен, К. Поглощение и рассеяние света малыми частицами / К. Борен, Д.Хафмен. – М. : Мир, 1986. – 664 с.
41. Варшалович, А.Б. Квантовая теория углового момента / А.Б. Варшалович, А.Н. Москалев, В.К. Херсонский. – Л. : Наука, 1975. – 600 с.
42. Ахиезер, А.И. Квантовая электродинамика / А.И. Ахиезер, В.Б. Берестецкий. – М. : Наука, 1969. – 623 с.

Поступила в редакцию 01.07.10.