

Оглавление

Глава 1. Введение	5
Глава 2. Характеристики рассеивающих объектов . . .	7
Глава 3. Характеристики рассеянного электромагнитного поля. Эффективная площадь рассеяния.	10
Глава 4. Принципы формирования диаграмм обратного рассеяния. Структура математической модели.	13
Глава 5. Аналитические методы расчета характеристик рассеяния (дифракция на шаре)	16
5.1. Решение Ми	16
5.2. Коэффициенты ряда рассеяния	19
5.3. Графическое построение решения	21
Глава 6. Численные методы расчета характеристик рассеяния	24
6.1. Метод моментов	24
6.2. Другие методы	26
Глава 7. Алгоритм расчета характеристик рассеяния электромагнитных волн на ПЭВМ	27
7.1. Расчетные формулы	27

7.2. Алгоритм	31
 Глава 8. Вычислительный эксперимент и анализ результатов оценки характеристик рассеяния электромагнитных волн объектами	
8.1. Вычислительные программы	35
8.2. Подготовка данных	35
8.3. Результаты	36
 Приложение А. Элементы электромагнитной теории .	
А.1. Уравнения Максвелла	42
А.2. Монохроматические поля	43
А.3. Граничные условия	44
А.4. Волновое уравнение	45
А.5. Интегральные уравнения	45
 Приложение Б. Методы решения задач дифракции . .	
Б.1. Строгие методы	48
Б.2. Приближенные методы	51

Глава 1

Введение

Исследование отражения волн (электромагнитных или акустических) от препятствий сложной формы — обширная и сложная задача. Проблема определения рассеивающих, дифракционных и отражательных свойств цели при известном полном и дифрагированном полях или наоборот — предсказание характеристик отраженного поля при заданных свойствах цели является головной болью для великих умов человечества вот уже два столетия. Еще в далеком 1800 году Генрих Герц ставил первые опыты в этой области физики. За столь большой промежуток времени сформировалась, так называемая, теория дифракции ([?]) — основополагающий труд), которая многое охватывает и рассматривает, но в полном смысле задача дифракции не решена и по сей день. Конечно, с точки зрения классической физической теории, явления дифракции и рассеяния волн уже давно относят к числу изученных в том смысле, что известны дифференциальные уравнения, которые описывают эти процессы, и соответствующие граничные условия, то есть остается только решить их. Однако, практически это чрезвычайно сложная задача, даже при простых и идеализированных условиях. Тут на помощь приходят численные методы, которые позволяют с некоторой точностью определить искомые величины, содержащиеся в неявном виде в волновом

уравнении.

По сути всякое исследование должно быть комплексным, то есть сочетать аналитические и экспериментальные методы. В общих чертах количественная информация о явлениях дифракции и рассеяния волн возможна в трех видах: 1) точные аналитические решения для очень немногих простых и идеализированных случаев; 2) приближенные аналитические или численные решения для условий, более или менее близких к реальным физическим условиям; 3) результаты экспериментальных исследований, полученные с помощью специально сконструированной аппаратуры. Все три вида информации очень важны. Для достижения достоверного результата необходимо сопоставлять приближенные математические вычисления с экспериментальными результатами, а также сверять с точными аналитическими расчетами в тех простейших случаях, когда это возможно.

Как с теоретической точки зрения, так и с экспериментальной типичная задача о рассеянии и дифракции электромагнитных волн включает в себя три основных элемента:

1. Передающая система, состоящая из антенны или излучателя какого-либо типа, возбуждаемого генератором электромагнитных волн с известным изменением во времени.
2. Препятствие (или несколько препятствий) произвольной формы, размера, ориентации и материала, покоящееся или движущееся произвольным образом в любом направлении на любом

расстоянии от источника.

3. Зонды или приемные антенны с соответствующими приборами для определения амплитуды, фазы и поляризации электромагнитного поля в любой точке пространства, включая поверхность (или поверхности) препятствия.

Основную задачу можно сформулировать как определение характеристик рассеянного поля от произвольного объекта при известном падающем поле.

Глава 2

Характеристики рассеивающих объектов

В принципе рассеивающее тело может быть совершенно произвольным, но в действительности имеются определенные логические и практические ограничения. Логические ограничения определяются отчасти свойствами тех препятствий, которые наиболее важны в большинстве приложений, а отчасти присущим науке стремлением развиваться систематически и осознанно, а не спорадически и слепо. Практические ограничения связаны с возможностями аналитических и численных методов, с одной стороны, и экспериментальной техники — с другой. Очевидно, что прежде чем начинать исследование отражений от сложных структур, следует изучить отражения от препятствий простых по форме и материальным свойствам. Чтобы добиваться каких-либо успехов в разрешении более общих проблем, нужно, по-видимому, исходить из обобщения и развития методов и техники, которые вначале оказались действенными и полезными при исследовании более простых препятствий. Но что такое *простое* препятствие? С чисто геометрической точки зрения мерой простоты является число измерений или координат, требуемых для описания препятствия. С этой точки зрения можно различать квазиодномерные задачи, например, случай тонких проводов или лент конечной длины, когда малые поперечные размеры не играют существенной

роли; двумерные задачи, соответствующие бесконечным цилиндрам произвольного поперечного сечения, и, наконец, трехмерные задачи. Но в пределах каждого из указанных классов задачи становятся чрезвычайно сложными, если не ограничиться рассмотрением лишь препятствий простейшей формы, а именно прямого провода, бесконечного кругового цилиндра и сферы. Для препятствий более сложной формы особый интерес представляет вопрос о влиянии изменения кривизны границы или наличия разрывов граничного контура или его производной. Кроме того, существенное значение имеет ориентация тела относительно направлений поляризации и распространения падающего электромагнитного поля, а также его размеры по сравнению с длиной волны, что обычно характеризуется волновым числом. Степень сложности задачи зависит не только от геометрических свойств препятствия, но и от свойств вещества или веществ, из которых изготовлено препятствие, от степени его изотропности и однородности. С математической точки зрения геометрическая простота не всегда является синонимом простоты аналитической.

Математически свойства препятствия и падающего поля являются «хорошими», если они позволяют свести задачу к скалярному волновому уравнению. Если говорить о форме границ препятствия, то здесь простой является та форма, которая удобно выражается в подходящих координатах, особенно если в выбранной системе координат уравнение разделяется.

Можно назвать следующие типы простых препятствий, представляющих самостоятельный интерес, а также служащих полезными ступенями в последовательном изучении более сложных форм:

1. Хорошо проводящий тонкий провод в различных модификациях:

- отдельный отрезок прямого провода конечной длины;
- два или несколько одинаковых проводов конечной длины;
- замкнутая петля.

2. Бесконечный цилиндр с поперечным сечением произвольной формы и размеров, в частности:

- бесконечный круговой цилиндр из хорошего проводника, идеального диэлектрика или проводника, покрытого слоем диэлектрика или поглотителя;
- бесконечный эллиптический цилиндр с произвольным эксцентриситетом;
- части бесконечных круговых или эллиптических цилиндров в виде проводящих труб с продольными вырезами различной ширины;
- параллельные связанные круговые цилиндры, проводящие, диэлектрические или с поверхностным покрытием.

3.
 - Сфера из хорошего проводника, идеального диэлектрика или проводника, покрытого слоем диэлектрика;
 - части проводящих сфер со щелями или отверстиями различных размеров;
 - решетки из проводящих, диэлектрических или смешанных сфер.
4. Сфероид, идеально проводящий, диэлектрический или металлический, покрытый слоем диэлектрика.
5. Хорошо проводящий экран:
 - полубесконечный с прямым острым краем;
 - полубесконечный, конечной толщины с цилиндрически закругленным краем;
 - бесконечный с круглым, эллиптическим или прямоугольным отверстием.
6. Поглощающие экраны
7. Тонкие диски круглой, эллиптической или прямоугольной формы:
 - металлические;
 - диэлектрические.

Глава 3

Характеристики рассеянного электромагнитного поля. Эффективная площадь рассеяния.

Прежде чем двигаться дальше, целесообразно остановиться на общепринятой терминологии. Осциллирующие заряды и токи возбуждающей антенны образуют *источник*. Электронное поле, обусловленное ими, называется первичным или *падающим полем*. Оно обозначается индексом i , например: \mathbf{E}_i , \mathbf{H}_i . Для изучаемого пассивного элемента употребляются различные термины: препятствие, переизлучатель, рассеиватель, поглотитель, экран, пассивная антенна. Под воздействием первичного поля на поверхности препятствия образуются заряды и меняющиеся во времени токи, которые в свою очередь обуславливают появление электромагнитного поля на препятствии, известное как *рассеянное*, отраженное или переизлученное поле. Оно обозначается индексом s , например: \mathbf{E}_s , \mathbf{H}_s . *Полное* поле (обозначается: \mathbf{E} , \mathbf{H}) является векторной суммой падающего и рассеянного полей, то есть

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_s.$$

В каждой точке для произвольного поля можно определить со-

ответствующий ему вектор Пойтинга

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E}\mathbf{H}],$$

который характеризует мощность и направление поля в точке.

Если падающее поле считать независимым от рассеянного поля (на самом деле это не так), то рассеянное поле можно получить вычитанием падающего поля в отсутствии препятствия из полного поля в той же самой точке при наличии рассеивающего тела.

Основной задачей при исследовании дифракции является определение амплитуды, фазы и поляризации полного поля как функций геометрических и материальных параметров, характеризующих заданную конфигурацию источника и препятствия, а также как функции переменного во времени напряжения или тока в источнике. Аналитически эта задача неразрешима, за исключением тех специальных случаев, когда форма и характер препятствия-источника особенно просты. К счастью, практически часто можно ограничиться лишь простейшим случаем, когда препятствие весьма удалено от источника, так что падающее поле является известной величиной, не зависящей от препятствия. Кроме того, обычно нет необходимости знать всю информацию о полном или рассеянном полях. Часто достаточно знать, например, полную рассеянную мощность или амплитуду электрического поля в заданном направлении. Во многих случаях удобно ввести некоторые средние характеристики способности препятствия переизлучать, поглощать или пропускать падаю-

щую на него плоскую волну. Введем следующие полезные величины. Пусть S_i — абсолютное значение действительной части комплексного вектора Пойтинга \mathbf{S}_i для падающего поля в месте расположения препятствия, P_s — полная рассеянная мощность, а P_a — полная поглощенная мощность. Тогда *полное сечение рассеяния* определяется соотношением

$$\sigma = \frac{P_s}{S_i} \quad (3.1)$$

и аналогично *полное сечение поглощения*

$$\sigma = \frac{P_a}{S_i}. \quad (3.2)$$

В радиолокации¹ представляет интерес мощность рассеянная препятствием в определенном направлении. В так называемых «однопозиционных» установках передатчик и приемник находятся в одной и той же точке, так что принимается лишь мощность, рассеиваемая препятствием обратно в сторону приемно-передающего устройства. Количественной характеристикой мощности, рассеянной препятствием в направлении на источник, является *сечение обратного рассеяния* σ_B . Эта величина совпадает с полным сечением рассеяния, если считать, что препятствие излучает как изотропный источник, то есть

$$\sigma_B = \frac{P_s^{\text{изот.}}}{S_i} \quad (3.3)$$

¹ Здесь коротко, а подробнее в [?], [?], [?]

или

$$\sigma_B = 4\pi \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \frac{|\mathbf{E}_s|^2}{|\mathbf{E}_i|^2} = 4\pi \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \frac{|\mathbf{H}_s|^2}{|\mathbf{H}_i|^2}, \quad (3.4)$$

где r — расстояние от источника до препятствия.

В так называемых «двухпозиционных» установках приемник располагается в произвольном направлении по отношению к передатчику. *Двухпозиционное сечение рассеяния* также определяется формулами (3.3) и (3.4), но в этом случае E_s и H_s — поле рассеяния в заданном направлении. В радиолокации величина σ_B (или просто σ) носит название эффективная площадь рассеяния (ЭПР) и является основной характеристикой цели.

Заметим, что определить сечения рассеяния или пропускания аналитически и экспериментально гораздо проще, чем определить все рассеянное поле.

Глава 4

Принципы формирования диаграмм обратного рассеяния. Структура математической модели.

Физическая природа процесса рассеяния электромагнитных волн заключается в том, что излученное источником (антенной) электромагнитное поле \mathbf{F}_i при взаимодействии с препятствием возбуждает на его поверхности вторичные токи, которые в свою очередь обуславливают появление электромагнитного поля \mathbf{F}_s , известное как рассеянное, отраженное или переизлученное. На практике и в теории электромагнитные поля рассматривают в виде плоских гармонических волн, то есть распространяющиеся по закону $Ce^{i\omega t}$.

Отраженное поле в первую очередь позволяет обнаружить объект, а во-вторых определить некоторые свойства объекта: положение и ориентация в пространстве, скорость перемещения и форму (задача распознавания). Однако, практически это очень сложные задачи. Даже обнаружить объект на фоне помех не всегда предоставляется возможным. Кроме того, объект может и вовсе не переизлучать, если длина падающей волны больше размера объекта (говорят, что волна огибает препятствие) или слабо переизлучать, если объект изготовлен из поглощающих материалов (stealth).

Для решения вышеперечисленных радиолокационных задач необходимо знать характеристики поля, которое рассеивает тот или иной объект, а чтобы выяснить эти характеристики нужно решить дифракционную задачу.

Дифракционная задача может решаться прямым методом (аналитически) — непосредственное решение волнового уравнения¹ методом разделения переменных, реализуемый для очень ограниченного числа объектов, а также методом поверхностных токов (численно), который математически сводится к определению вторичных токов на поверхности объекта через решение интегральных уравнений, и далее, зная вторичные токи, переизлученное поле в любой точке пространства легко находится с помощью функции Грина. Подробнее об этих методах в следующих главах.

Метод поверхностных токов является наиболее строгим в отличие от других численных методов² и годится для объектов практически любой формы (единственное ограничение — замкнутость поверхности), потому этот метод будет взят за основу. Аналитический метод решения дифракционной задачи не является столь универсальным, но зато с его помощью можно откалибровать любой другой метод решения на тех объектах где это возможно (в нашем случае на шаре). Таким образом построение математической модели сводится к следующим пунктам.

¹ см. приложение А.4

² см. приложение Б

1. Ввод исходных данных: рассеивающий объект в виде САД-модели, параметры источника возбуждения (направление, поляризация и частота падающей электромагнитной волны).
2. Подготовка исходных данных. Для корректной работы метода поверхностных токов необходима триангуляция поверхности рассеивающего объекта, то есть разбиение его на множество фацетов (треугольников) в соответствии с длиной падающей волны. На данный момент существует масса программных пакетов, занимающихся этой задачей, например: GMSH [?, ?] и SALOME [?]. В нашей реализации будет использоваться GMSH.
3. Составление и сведение интегрального уравнения к матричному с помощью метода моментов.
4. Решение матричного уравнения (например, методом LU-разложения) и, как результат, нахождение поверхностных токов на поверхности объекта.
5. Расчет поля в дальней зоне для заданного направления с помощью функции Грина. Построение диаграммы обратного рассеяния.

Глава 5

Аналитические методы расчета характеристик рассеяния (дифракция на шаре)

В этой главе приведем в сокращенной форме (в подробной см. [?]) решение задачи дифракции на шаре методом разделения переменных. Это одна из немногочисленных задач, которая имеет красивое аналитическое решение. Поэтому решение этой задачи используется для калибровки вычислительных программ, использующие численные методы решения, а также радиолокационных устройств.

5.1. Решение Ми

Пусть тело, характеризующееся определенными размерами, формой и оптическими свойствами, освещается монохроматической волной с произвольной поляризацией. Требуется определить электромагнитное поле во всех точках тела и во всех точках однородной среды, в которую погружено это тело. Наше рассмотрение ограничено плоскими гармоническими волнами, однако это ограничение не такое сильное, как могло бы показаться на первый взгляд. Действительно, произвольное поле можно разложить на фурье-составляющие, кото-

рые являются плоскими волнами. Поэтому можно получить решение задачи рассеяния-поглощения при произвольном освещении, используя принцип суперпозиции.

Поле внутри тела обозначим $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$, а поле в среде, окружающее тело, $(\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2)$ представляет собой суперпозицию падающего поля $(\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i)$ и рассеянного поля $(\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s)$:

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s, \quad \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_s,$$

где

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t), \quad \mathbf{H}_i = \mathbf{H}_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t),$$

а \mathbf{k} — волновой вектор, соответствующей окружающей среде. Эти поля удовлетворяют векторному волновому уравнению¹ (A.19):

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k_0^2 \mathbf{E} = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{H} + k_0^2 \mathbf{H} = 0,$$

Векторное волновое уравнение сводится к скалярному с помощью введения векторных потенциалов

$$\mathbf{M} = \text{rot}(\mathbf{c}\psi)$$

и

$$\mathbf{N} = \frac{\text{rot } \mathbf{M}}{k_0}.$$

\mathbf{M} и \mathbf{N} обладают всеми необходимыми свойствами электромагнитного поля, а именно: они удовлетворяют векторному волновому уравнению, их дивергенции равны нулю, ротор вектора \mathbf{M} пропорционален

¹ см. приложение A.4

\mathbf{N} , а ротор \mathbf{N} пропорционален \mathbf{M} . Таким образом, задача нахождения решений уравнений поля сводится к сравнительно простой задаче решений скалярного волнового уравнения. Скалярную функцию ψ называют *производящей функцией* для *векторных гармоник* \mathbf{M} и \mathbf{N} , а вектор \mathbf{c} иногда называют направляющим вектором.

Выбор производящих функций диктуется видом симметрии в задаче. Так как в данной задаче дифракция происходит на сфере, то логично выбрать функции ψ , удовлетворяющие волновому уравнению, записанному в сферических координатах r, θ, ϕ . Выбор направляющего вектора менее очевиден. По сути можно выбрать некоторый произвольный вектор \mathbf{c} . Между тем, если положить, что

$$\mathbf{M} = \text{rot}(\mathbf{r}\psi), \quad (5.1)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор, то \mathbf{M} будет решением векторного волнового уравнения в сферических координатах. Поэтому в задач со сферической симметрией в качестве фундаментальных решений уравнений поля берут функцию \mathbf{M} , определяемую (5.1), и соответствующую функцию \mathbf{N} . Отметим, что \mathbf{M} всюду является касательным к любой сфере $|\mathbf{r}| = \text{const}$ (т.е. $\mathbf{r} \cdot \mathbf{M} = 0$).

Скалярное волновое уравнение в сферических координатах имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + k_0^2 \psi = 0, \quad (5.2)$$

которое очевидным образом ($\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$) может быть

разделено.

Опуская промежуточные выкладки приведем окончательное решение уравнения известное как ряд Ми:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_s(P, \omega) &= - \sum_{n=1}^{\infty} E_0 (A_n \mathbf{M}_{o1n} + i B_n \mathbf{N}_{e1n}), \\ \mathbf{H}_s(P, \omega) &= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \sum_{n=1}^{\infty} E_n (i A_n \mathbf{N}_{o1n} - B_n \mathbf{M}_{e1n}),\end{aligned}\tag{5.3}$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{o1n} &= \mp \frac{1}{\sin \theta} h_n^{(1)}(k_0 r) P_n^1(\cos \theta) \begin{bmatrix} \sin \phi \\ \cos \phi \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &\quad - h_n^{(1)}(k_0 r) \frac{d}{d\theta} P_n^1(\cos \theta) P_n^1(\cos \theta) \begin{bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\phi}},\end{aligned}\tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_{e1n} &= \frac{n(n+1)}{k_0 r} h_n^{(1)}(k_0 r) P_n^1(\cos \theta) \begin{bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{bmatrix} \hat{\mathbf{r}} \\ &\quad + \frac{1}{k_0 r} \frac{d}{d(k_0 r)} [k_0 r h_n^{(1)}(k_0 r)] \frac{d}{d\theta} P_n^1(\cos \theta) \begin{bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &\quad \mp \frac{1}{k_0 r \sin \theta} \frac{d}{d(k_0 r)} [k_0 r h_n^{(1)}(k_0 r)] P_n^1(\cos \theta) \begin{bmatrix} \sin \phi \\ \cos \phi \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\phi}},\end{aligned}\tag{5.5}$$

P_n^m — присоединенные функции Лежандра первого рода, n — степень, m — порядок, причем $n = m, m+1, \dots$;

$h^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода.

В практических задачах чаще всего требуется рассчитывать рассеянное поле в дальней зоне, в этом случае справедлива следующая аппроксимация [?]:

$$\mathbf{E}_s = E_n \frac{e^{ik_0 r}}{k_0 r} \left[\cos \phi S_1(\theta) \hat{\boldsymbol{\theta}} - \sin \phi S_2(\theta) \hat{\boldsymbol{\phi}} \right],\tag{5.6}$$

где

$$S_1(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^{n+1} E_n \left[B_n \frac{d}{d\theta} P_n^1(\cos \theta) - A_n \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \right], \quad (5.7)$$

$$S_2(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^{n+1} E_n \left[B_n \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} - A_n \frac{d}{d\theta} P_n^1(\cos \theta) \right]. \quad (5.8)$$

В случае обратного рассеяния $S_1(0) = S_2(0) = F(0)$:

$$F(0) = \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^{n-1} E_n \frac{n(n+1)}{2} (A_n - B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} i(n+1/2) (A_n - B_n), \quad (5.9)$$

и в случае прямого рассеяния $S_1(\pi) = -S_2(\pi) = F(\pi)$:

$$F(0) = - \sum_{n=1}^{\infty} (i)^{n-1} E_n \frac{n(n+1)}{2} (A_n + B_n) = - \sum_{n=1}^{\infty} i(n+1/2) (A_n + B_n). \quad (5.10)$$

5.2. Коэффициенты ряда рассеяния

Коэффициенты A_n и B_n , которые выше остались без внимания, задают оптические свойства шара. Для однородного диэлектрического шара коэффициенты принимают вид

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\mu j_n(k_0 a) [k_1 a j_n(k_1 a)]' - \mu_1 j_n(k_1 a) [k_0 a j_n(k_0 a)]'}{\mu h_n^{(1)}(k_0 a) [k_1 a j_n(k_1 a)]' - \mu_1 j_n(k_1 a) [k_0 a h_n^{(1)}(k_0 a)]'}, \\ B_n &= \frac{\mu_1 j_n(k_0 a) [k_1 a j_n(k_1 a)]' - \mu m^2 j_n(k_1 a) [k_0 a j_n(k_0 a)]'}{\mu_1 h_n^{(1)}(k_0 a) [k_1 a j_n(k_1 a)]' - \mu m^2 j_n(k_1 a) [k_0 a h_n^{(1)}(k_0 a)]'}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Для идеально проводящего (металлического) шара:

$$A_n = \frac{j_n(k_0 a)}{h_n^{(1)}(k_0 a)}, \quad B_n = \frac{[k_0 a j_n(k_0 a)]'}{[k_0 a h_n^{(1)}(k_0 a)]'}. \quad (5.12)$$

Практический интерес представляет также рассеяние на неоднородном шаре. Коэффициенты A_n и B_n для неоднородного шара записываются в виде

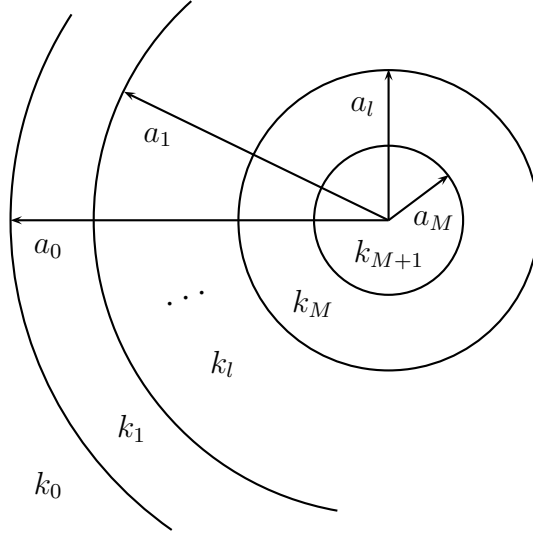
$$\begin{aligned} A_n &= \frac{k_0 a_0 j_n(k_0 a_0) - i Z_n(k_0 a_0) [k_0 a_0 j_n(k_0 a_0)]'}{k_0 a_0 h_n(k_0 a_0) - i Z_n(k_0 a_0) [k_0 a_0 h_n(k_0 a_0)]'}, \\ B_n &= \frac{k_0 a_0 j_n(k_0 a_0) - i Y_n(k_0 a_0) [k_0 a_0 j_n(k_0 a_0)]'}{k_0 a_0 h_n(k_0 a_0) - i Y_n(k_0 a_0) [k_0 a_0 h_n(k_0 a_0)]'}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

где a_0 — внешний радиус шара (см. рис. 5.1), h_n — сферическая функция Ханкеля первого рода $h_n^{(1)}$. Коэффициенты $Z_n(k_0 a_0)$ и $Y_n(k_0 a_0)$ определяют, соответственно, характеристические поверхностные сопротивление и проводимость. Для каждого типа неоднородности эти коэффициенты задаются по-разному. В частном случае, если шар однородный, коэффициенты Z_n и Y_n имеют вид

$$\begin{aligned} Z_n(k_0 a_0) &= -i \frac{\mu_1 k_0}{\mu_0 k_1} \frac{k_1 a_0 j_n(k_1 a_0)}{[k_1 a_0 j_n(k_1 a_0)]'}, \\ Y_n(k_0 a_0) &= -i \frac{\mu_0 k_1}{\mu_1 k_0} \frac{k_1 a_0 j_n(k_1 a_0)}{[k_1 a_0 j_n(k_1 a_0)]'}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

и сводят формулы (5.13) к (5.12).

Рассмотрим многослойный диэлектрический шар (рис. 5.1), состоящий из M слоев. Каждый l -слой характеризуется волновым числом $k_l = \omega \sqrt{\varepsilon_l \mu_l}$ и радиусом a_{l-1} . Поверхностные сопротивление

Рис. 5.1. M -слойный диэлектрический шар

$Z_n(k_0 a_0)$ и проводимость $Y_n(k_0 a_0)$ находятся по следующим формулам.

Определим

$$P_n(x) = \frac{x j_n(x)}{[x j_n(x)]'} \quad \text{и} \quad Q_n(x) = \frac{x h_n(x)}{[x h_n(x)]'}. \quad (5.15)$$

Также определим

$$U_n^{(l)} = \frac{[k_{l+1} a_{l+1} j_n(k_{l+1} a_{l+1})]'}{[k_{l+1} a_l j_n(k_{l+1} a_l)]'} \frac{[k_{l+1} a_l h_n(k_{l+1} a_l)]'}{[k_{l+1} a_{l+1} h_n(k_{l+1} a_{l+1})]'}. \quad (5.16)$$

и

$$V_n^{(l)} = \frac{k_{l+1} a_{l+1} j_n(k_{l+1} a_{l+1})}{k_{l+1} a_l j_n(k_{l+1} a_l)} \frac{k_{l+1} a_l h_n(k_{l+1} a_l)}{k_{l+1} a_{l+1} h_n(k_{l+1} a_{l+1})}. \quad (5.17)$$

Затем

$$Z_n^{(M)} = \eta_{M+1} P_n(k_{M+1} a_M) \quad \text{и} \quad Y_n^{(M)} = \frac{1}{\eta_{M+1}} P_n(k_{M+1} a_M). \quad (5.18)$$

Тогда поверхностные сопротивление и проводимость для l -слоя определяются рекуррентными соотношениями

$$Z_n^{(l)} = \eta_{l+1} P_n(k_{l+1} a_l) \left[1 - V_n^{(l)} \frac{1 - Z_n^{(l+1)} / \eta_{l+1} P_n(k_{l+1} a_{l+1})}{1 - Z_n^{(l+1)} / \eta_{l+1} Q_n(k_{l+1} a_{l+1})} \right] \times \left[1 - U_n^{(l)} \frac{1 - \eta_{l+1} P_n(k_{l+1} a_{l+1}) / Z_n^{(l+1)}}{1 - \eta_{l+1} Q_n(k_{l+1} a_{l+1}) / Z_n^{(l+1)}} \right]^{-1}, \quad (5.19)$$

$$Y_n^{(l)} = \frac{(k_{l+1} a_l)}{\eta_{l+1} P_n} \left[1 - V_n^{(l)} \frac{1 - \eta_{l+1} Y_n^{(l+1)} / P_n(k_{l+1} a_{l+1})}{1 - \eta_{l+1} Y_n^{(l+1)} / Q_n(k_{l+1} a_{l+1})} \right] \times \left[1 - U_n^{(l)} \frac{1 - P_n(k_{l+1} a_{l+1}) / \eta_{l+1} Y_n^{(l+1)}}{1 - Q_n(k_{l+1} a_{l+1}) / \eta_{l+1} Y_n^{(l+1)}} \right]^{-1}, \quad (5.20)$$

где l изменяется от $M - 1$ до 0.

Итого

$$Z_n(k_0 a_0) = -i \frac{1}{\eta_0} Z_n^{(0)} \quad \text{и} \quad Y_n(k_0 a_0) = -i \eta_0 Y_n^{(0)}. \quad (5.21)$$

5.3. Графическое построение решения

Полученные формулы аналитического решения были запрограммированы для случая обратного рассеяния от однородного металлического шара. На рисунке 5.2 изображены (с помощью **gnuplot**) результаты программы, а именно действительная и мнимая части нормированной амплитуды обратного рассеяния в зависимости от ka , где k — волновое число, a — радиус сферы. На рисунке 5.3 изображено сечение обратного рассеяния шара или эффективная площадь

рассеяния, то есть сумма квадратов мнимой и действительной частей амплитуды обратного рассеяния. Как видно, при $ka = 1$ функция достигает максимального значения, что соответствует резонансной области. Далее функция затухает и при большом ka стремится к единице, то есть к πa^2 без учета нормировки.

Данное решение будет использоваться для калибровки численных методов.

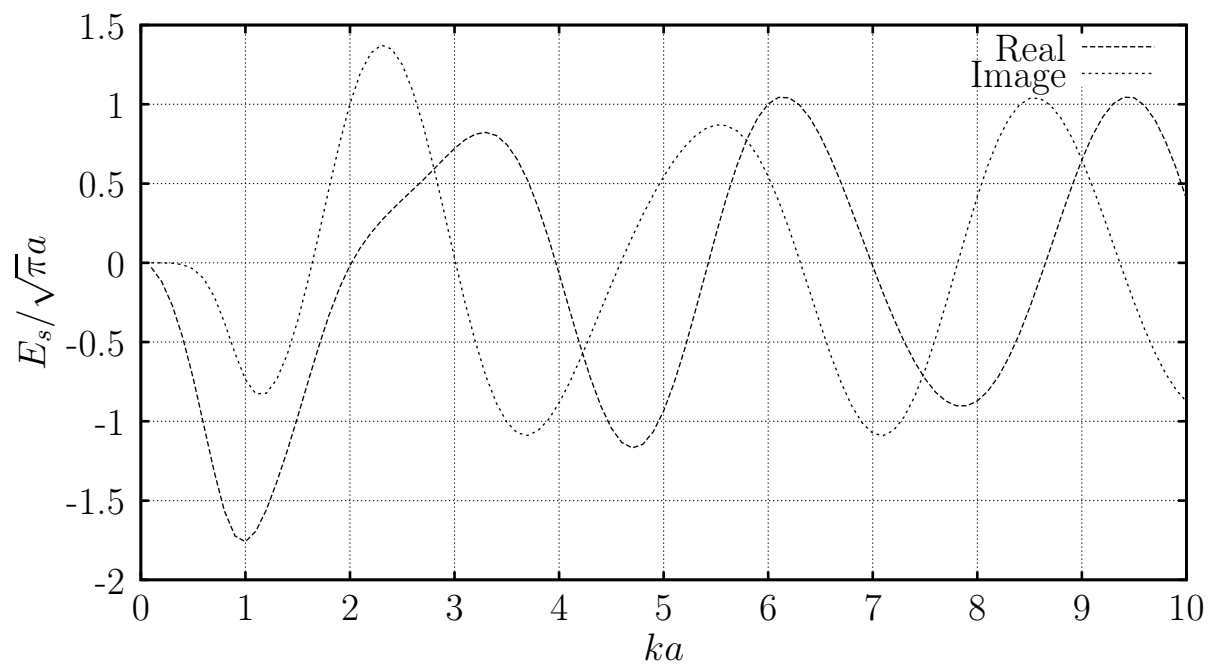


Рис. 5.2. Амплитуда обратного рассеяния для металлического шара

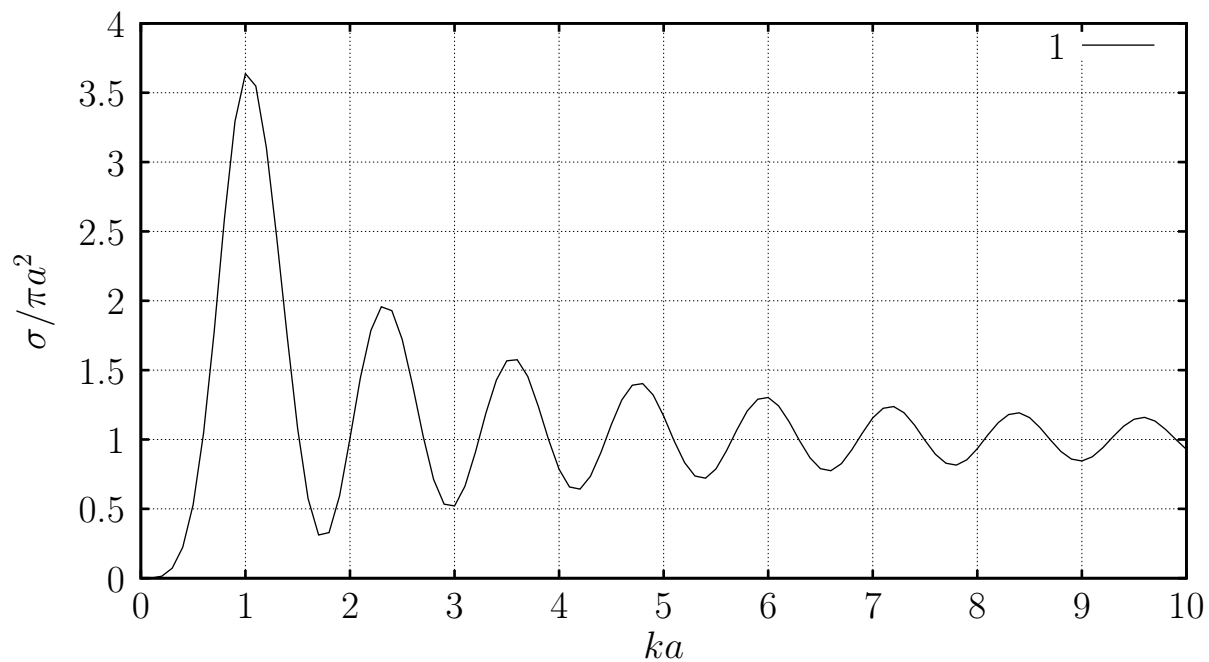


Рис. 5.3. Сечение обратного рассеяния для металлического шара

Глава 6

Численные методы расчета характеристик рассеяния

Из-за аналитической неразрешимости большинства дифракционных задач чаще всего используют приближенные методы. Самый распространенный — метод поверхностных токов или метод интегрального уравнения, который, вообще говоря, является строгим¹, так как ошибку полученного решения всегда можно оценить. В этой работе будут рассматриваться фацетные конструкции (объекты разбитые на множество маленьких поверхностей-треугольников — фацеты), которым соответствуют интегральные уравнения (А.22) и (А.23) (см. приложение А.5). Такие уравнения решаются численно, например, методом моментов.

6.1. Метод моментов

Метод моментов применим к линейным операторным уравнениям общего вида

$$Lf = e, \tag{6.1}$$

¹ см. приложение Б

где f — неизвестная реакция, e — известное возбуждение и L — линейный оператор (в данном случае интегральный оператор). Неизвестную функцию f можно разложить в сумму базисных функций f_j

$$f = \sum_{j=1}^N \alpha_j f_j. \quad (6.2)$$

Систему уравнений для коэффициентов α_j можно получить, умножив скалярно слева уравнение (6.1) на набор весовых функций w_i

$$\langle w_i, Lf \rangle = \langle w_i, e \rangle \quad i = 1, \dots, N. \quad (6.3)$$

Так как оператор L линейный, подстановка (6.2) в уравнение (6.3) дает

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \langle w_i, Lf_j \rangle = \langle w_i, e \rangle, \quad i = 1, \dots, N.$$

Это уравнение можно переписать в матричной форме

$$[G][A] = [E], \quad (6.4)$$

где $G_{ij} = \langle w_i, Lf_j \rangle$,

$$A_j = \alpha_j,$$

$$E_i = \langle w_i, e \rangle. \text{ Его решением является}$$

$$[A] = [G]^{-1}[E].$$

Для решения интегральных уравнений скалярное произведение определим как

$$\langle f, g \rangle = \int_S f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})dA,$$

где интегрирование производится по поверхности объекта. Для весовых функций $\{w_i\}$ и базисных функций $\{f_j\}$ возможны различные варианты. Если $w_i = f_i$, то процедура решения называется методом Галеркина. В общем случае базисные и весовые функции различны. Обычно w_i представляют набором дельта функций

$$w_i(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i),$$

где $\{\mathbf{x}_i\}$ — набор точек на проводящей поверхности. Результатом является выборка точек интегральных уравнений, известный как метод коллокации решения: провода делятся на короткие прямые сегменты с выбранной точкой в центре каждого из них, а поверхности аппроксимируются плоскими фацетами или гранями с точкой в центре каждого фацета поверхности.

После того, как матричное уравнение составлено остается его решить. Самым эффективным и быстрым методом решения матричного уравнения, то есть обращения матрицы, является метод LU разложения, который требует порядка $1/3N^3$ операций умножения. Не стоит забывать, что в случае плохообусловленной матрицы (то есть почти всегда), необходимо применять методы регуляризации (например, метод регуляризации Тихонова). Потому обращение матрицы является самой ресурсоемкой задачей, занимающей около 90% времени.

Описанный выше метод численного решения электродинамических задач является наиболее распространенным и используется в

программах NEC, WIPL-D, FEKO, EIGER. К сожалению почти все эти программы коммерческие. На сегодняшний день общедоступными являются только NEC-2 (старая разработка 70-х годов) и EIGER.

6.2. Другие методы

К поставленной задаче применимы и другие численные методы решения, например, метод конечных элементов, а также современный быстрый метод мультиполей, который в основу берет идею, что фацеты (элементы объекта) можно группировать и вычислять токи не для каждого фацета отдельно, а группами, с каждым шагом разбивая эти группы на новые. Оказывается, что в таком случае получается система линейных уравнений, которая быстро решается итерационным методом (методом сопряженных градиентов) порядка за $N \log N$ операций (подробнее в [?]). Метод мультиполей на данный момент является наиболее быстрым и востребованным, однако, его мы коснемся в другой раз...

Глава 7

Алгоритм расчета характеристик рассеяния электромагнитных волн на ПЭВМ

7.1. Расчетные формулы

Интегральные уравнения магнитного поля для фацетных конструкций (А.22) и (А.23) с помощью метода моментов сводятся к системе линейных уравнений, которые имеют вид

$$\sum_{j=1}^{2M} d_j D_{kj} = H_k, \quad k = \overline{1, 2M}, \quad (7.1)$$

где

M = количество фацетов;

$D_{kj} = -\hat{v}_k \cdot$ (магнитное поле \mathbf{H} в точке $\bar{p}_{[(k+1)/2]}$ вызванное током на $[(j+1)/2]$ -м фацете в направлении \hat{u}_j) $\cdot S_{[(k+1)/2]} + \frac{1}{2}\sigma_{kj}$;

$H_k = \hat{v}_k \cdot$ (падающее магнитное поле в точке $\bar{p}_{[(k+1)/2]}$) $\cdot S_{[(k+1)/2]}$;

\bar{p}_i = координаты центра i -го фацета;

$$\hat{u}_i = \begin{cases} \hat{t}_1, & \text{если } i \text{ нечетно} \\ \hat{t}_2, & \text{если } i \text{ четно} \end{cases} \quad \text{для } [(i+1)/2]\text{-го фацета}; \quad (7.2)$$

$$\hat{v}_i = \begin{cases} \hat{t}_2, & \text{если } i \text{ нечетно} \\ \hat{t}_1, & \text{если } i \text{ четно} \end{cases} \quad \text{для } [(i+1)/2]\text{-го факета;} \quad (7.3)$$

$$S_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \hat{t}_1 \times \hat{t}_2 = \hat{n} \text{ на } i\text{-м факете,} \\ -1, & \text{если } \hat{t}_1 \times \hat{t}_2 = -\hat{n} \text{ на } i\text{-м факете;} \end{cases} \quad (7.4)$$

$$\sigma_{kj} = \begin{cases} -1, & \text{если } k = j - \text{нечетны,} \\ +1, & \text{если } k = j - \text{четны,} \\ 0, & \text{если } k \neq j. \end{cases} \quad (7.5)$$

7.1.1. Определение элементов матрицы D_{kj}

Поле \mathbf{H} в точке $\bar{r} = X_i\hat{x} + Y_i\hat{y} + Z_i\hat{z}$, вызванное током на факете i , с центром в \bar{r}_i определяется по формуле

$$\mathbf{H}(\bar{r}) = -\frac{1}{4\pi} \left[(1 + ik\bar{R}) \frac{\exp(-ik\bar{R})}{(\bar{R}/\lambda)^3} \right] [(\bar{R}/\lambda) \times \bar{J}_i] A_i / \lambda^2$$

где $\bar{R} = \bar{r} - \bar{r}_i$, \bar{J}_i — направление тока на факете и A_i — площадь i -го факета. Это выражение соответствует току, сосредоточенному в центре факета. Поле \mathbf{H} вычисляется для единичных токов, направленных вдоль касательных к факету векторов \hat{t}_{1i} и \hat{t}_{2i} .

То есть

$$D_{kj} = \frac{1}{2}\sigma_{kj} + \frac{1}{4\pi} S_{[(k+1)/2]} \cdot \hat{v}_k \cdot \left[(1 + ik\bar{R}) \frac{\exp(-ik\bar{R})}{(\bar{R}/\lambda)^3} \right] [(\bar{R}/\lambda) \times \hat{u}_j] A_{[(j+1)/2]} / \lambda^2, \quad (7.6)$$

где $\bar{R} = \bar{p}_{[(k+1)/2]} - \bar{p}_{[(j+1)/2]}$.

7.1.2. Определение элементов вектор-столбца H_k

В случае возбуждения плоской волной (направление распространения и поляризация волны показаны на рисунке 7.1, где \hat{P} — единичный вектор нормальный к \hat{k} в плоскости образованной векторами \hat{k} и \hat{z})

$$\bar{H}_i(\bar{r}) = \frac{1}{\eta} \hat{k} \times \bar{E}_0 \exp(-i\bar{k} \cdot \bar{r}),$$

где $\bar{k} = (2\pi/\lambda)\hat{k}$,

\hat{k} — единичный вектор в направлении распространения

$$\bar{E}_0 = \begin{cases} \hat{E}_1 & \text{для линейной поляризации,} \\ (\hat{E}_1 - iA\hat{E}_2) & \text{для правосторонней эллиптической поляризации} \\ (\hat{E}_1 + iA\hat{E}_2) & \text{для левосторонней эллиптической поляризации} \end{cases}$$

A — отношение осей эллипса,

$$\hat{E}_2 = \hat{k} \times \hat{E}_1.$$

То есть

$$H_k = S_{[(k+1)/2]} \hat{v}_k \cdot \left[\frac{1}{\eta} \hat{k} \times \bar{E}_0 \exp(-i\bar{k} \cdot \bar{p}_{[(k+1)/2]}) \right]. \quad (7.7)$$

7.1.3. Рассеянное поле в дальней зоне

Уравнение для рассеянного поля в дальней зоне в точке \bar{r}_0 имеет вид

$$\mathbf{E}(\bar{r}_0) = \frac{i\eta \exp(-ikr_0)}{2} \frac{r_0/\lambda}{r_0/\lambda} (\hat{k}\hat{k} - \bar{\bar{I}}) \cdot \int_S \mathbf{J}_s(\bar{r}) \exp(-i\bar{k} \cdot \bar{r}) dA / \lambda^2$$

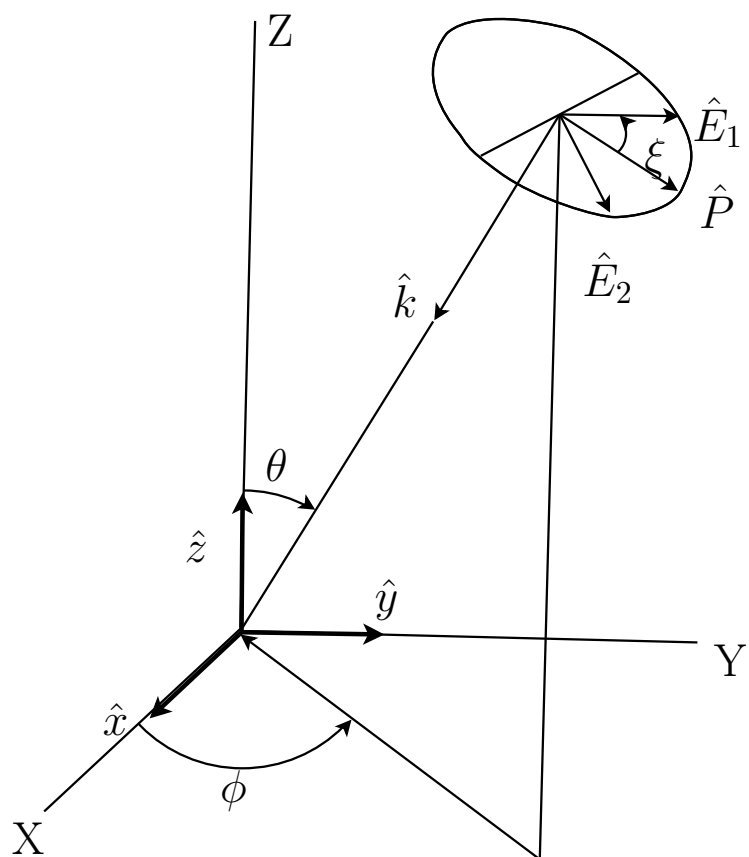


Рис. 7.1. Параметры падающей плоской волны

где $r_0 = |\bar{r}_0|$,

$$\hat{k} = \bar{r}_0 / |\bar{r}_0|,$$

$$k = 2\pi / \lambda,$$

$$\bar{k} = k \hat{k},$$

\mathbf{J}_s — вектор плотности тока на поверхности S ,

$\bar{\bar{I}}$ — единичный оператор.

Скалярное произведение на оператор $\hat{k} \hat{k} - \bar{\bar{I}}$ дает проекцию ин-

теграла

$$\mathbf{F}(\bar{r}_0) = \int_S \mathbf{J}_s(\bar{r}) \exp(-i\bar{k} \cdot \bar{r}) dA / \lambda^2$$

на подпространство, ортогональное \hat{k} . Интеграл вычисляется путем суммирования по факетам в предположении постоянства тока на каждом факете.

Итого получаем формулу

$$\mathbf{E}(\bar{r}_0) = \frac{i\eta \exp(-ikr_0)}{2 \frac{r_0}{\lambda}} (\hat{k}\hat{k} - \bar{I}) \cdot \sum_{j=0}^{2M} d_j u_j \exp(-i\bar{k} \cdot \bar{r}) A_{[(j+1)/2]} / \lambda^2. \quad (7.8)$$

7.1.4. Параметры поверхностных факетов

Входными параметрами факетов являются — координаты центра факета, площадь и единичный вектор нормали \hat{n} . Для расчетов требуется также знать компоненты двух, характеризующих поверхность факета, единичных векторов \hat{t}_1 и \hat{t}_2 .

Вектор \hat{t}_1 параллелен стороне треугольного, прямоугольного или четырехугольного факета. Для факета любой формы он выбирается по следующим правилам:

1. для горизонтального факета $\hat{t}_1 = \hat{x}$,
для негоризонтального факета $\hat{t}_1 = (\hat{z} \times \hat{n}) / |\hat{z} \times \hat{n}|$,
2. $\hat{t}_2 = \hat{n} \times \hat{t}_1$.

7.2. Алгоритм

В описании используется язык C++.

1. Входные данные: триангуляция трехмерного рассеивающего объекта (фацетная конструкция) — четыре массива для M фацетов ($p[M]$ — координаты центра фацета, $A[M]$ — площадь фацета, $t1[M]$ и $t2[M]$ — вектора задающие ориентацию фацета в пространстве); параметры падающей электромагнитной волны (λ — длина волны, θ_{inc} — угол по θ , ϕ_{inc} — угол по ϕ , E_1 и E_2 — вектора задающие поляризацию, a — отношение осей эллипса).

```
typedef double Re;
typedef complex<Re> Cx;
Re A[M], lambda, theta_inc, phi_inc, a, E_1, E_2;
vector<3, Re> p[M], t1[M], t2[M];
vector<3, Re> wave_k(-cos(theta_inc)*cos(phi_inc),
                    -cos(theta_inc)*sin(phi_inc), -sin(theta_inc));
\\ скалярное произведение
vector<3, Re> scamul(vector<3, Re>, vector<3, Re>);
\\ векторное произведение
vector<3, Re> vecmul(vector<3, Re>, vector<3, Re>);
```

2. Подготовка рабочих массивов $\hat{u}_i, \hat{v}_i, S_i, \sigma_{kj}$ по формулам (7.2)–(7.5).

```
int S[2*M];
matrix<2*M, 2*M, int> sigma;
vector<3, Re> u[2*M], v[2*M];
```

3. По формуле (7.6) заполняем матрицу D_{kj} :

```
matrix<2M, 2M, Cx> D;
inline R(int k, int j) {return p[(k+1)/2] - p[(j+1)/2];}
D(k,j) = sigma(k,j)/2 + (1/(4*M_PI)*S[(k+1)/2]*v[k]*Cx(1,k*R(k,j))
*exp(Cx(0, -k*R(k,j)))*vecmul((R(k,j)/lambda), u_j)
*A[(j+1)/2]/(R(k,j)/lambda));
```

4. По формуле (7.7) заполняем вектор-столбец H_k

```
vector<3, Re> wave_k(-cos(theta_inc)*cos(phi_inc),
    -cos(theta_inc)*sin(phi_inc),-sin(theta_inc));
Cx H[2*M], E_0(E_1, a*E_2);
wave_k*=2*M_PI/lambda;
H[k] = S[(k+1)/2]*v[k]*vecmul(wave_k,
    E_0*exp(Cx(0,-scmul(wave_k, p_[(k+1)/2]))));
```

5. Решается система линейных уравнений (7.1) $D_{kj}d_j = H_k$ методом LU-разложения и в результате получаем распределения поверхностных токов d_j

```
Cx d[2*M];
```

6. Вычисление рассеянного поля в дальней зоне по формуле (7.8)

```

Re theta_scat, phi_scat; // углы рассеянной волны
vector<3, Cx> E, sum=0;
vector<3, Re> r0(cos(theta_scat)*cos(phi_scat),
    cos(theta_scat)*sin(phi_scat), sin(theta_scat));
Re k=2*M_PI/lambda;
vector<3, Re> _k=k*norm(r0);
vector<3, Re> norm(vector<3, Re>); // возвр. нормир. вектор
for(int j=0; j<2*M; j++) {
    sum+= d[j]*u[j]*exp(Cx(0,-scmul(_k, p[(j+1)/2]))*A_[(j+1)/2])
}
E = (Cx(0,1)*0.5*exp(Cx(0,-2*M_PI*r0/lambda))/(mod(r0)*lambda))*
    (norm(r0)*norm(r0) - matrix(1)) * sum;

```

7. Вывод результатов.

```

Cx E_th, E_ph; // проекции вектора E на theta и phi
Re RCS_th = E_th.real()*E_th.real() + E_th.imag()*E_th.imag();

```

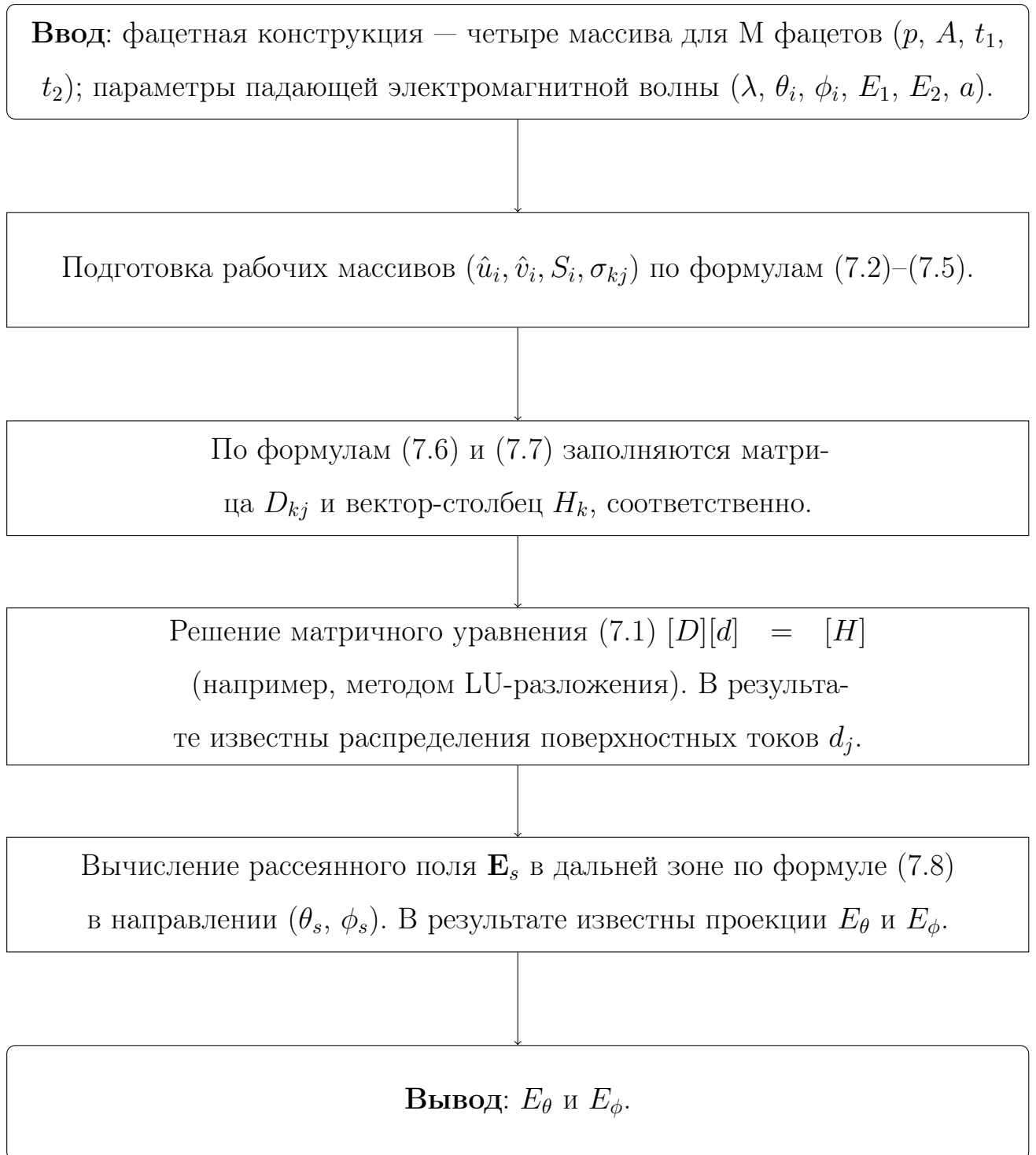


Рис. 7.2. Блок-схема

Глава 8

Вычислительный эксперимент и анализ результатов оценки характеристик рассеяния электромагнитных волн объектами

8.1. Вычислительные программы

EIGER (Electromagnetic Interactions GEneRalized) — opensource программа, разработанная в Lawrence Livermore National Laboratory, для анализа электромагнитных характеристик трехмерных объектов. Она основана на базе численного решения интегральных уравнений. EIGER использует модифицированные методы, описанные в предыдущей главе. Поддержка этой программы приостановилась в 2006 году. Сейчас доступны лишь исходники по адресу [?] без документации. Все возможности и организация работы программы были изучены автором данной работы самостоятельно. Кроме того, были внесены некоторые критические изменения в код программы.

PUMA-EM — современная развивающаяся открытая программа, использующая метод мультиполей. К сожалению PUMA-EM обладает множеством недостатков (на ряду с преимуществами), в част-

ности, точность вычислений оказалась недостаточно высокой, потому она использовалась только в построении визуализации поверхностных токов на сфере.

8.2. Подготовка данных

Для достижения точных результатов важно, чтобы входная 3d-модель была разбита на достаточно маленькие элементы (фацеты) сравнимые с длиной падающей волны. Построением так называемого меша (mesh) занимается целый ряд программ, в частности открыто доступная программа GMSH. Она позволяет создавать/редактировать 3d-модели, делать mesh и сохранять в unv-формате, который далее можно сконвертировать в jfg-формат, используемый в EIGER. Более подробно о GMSH можно почитать на официальном сайте [?].

В данном эксперименте участвуют три объекта: шар радиуса 10 метров (рис. 8.1), металлический самолет, по форме напоминающий самолет «B-2» [?] (рис. 8.2), и самолет «Boeing 737» (рис. 8.3). В GMSH для этих конструкций был создан двумерный меш (фацетная модель) и импортирован в EIGER. Все тела заданы идеально проводящими металлическими фацетами и образуют замкнутую поверхность.

8.3. Результаты

Для шара (рис. 8.1) с помощью EIGER было посчитано моно-статическое обратное рассеяние на разных частотах. Результат этих вычислений можно увидеть на рис. 8.4. Если сравнивать с рис. 5.2, то видно, что для численного решения в низко-частотной области мнимая часть имеет другой знак, однако всё остальное похоже на правду. На рис. 8.5 приведено сравнение ЭПР шара посчитанного аналитически и ЭПР шара посчитанного численно — разница есть, но небольшая, что говорит о достаточно высокой точности численного решения. Также на рис. 8.6 изображена нормированная бистатическая диаграмма рассеяния для шара при частоте 10MHz. Излучение происходит под углом 90° (сверху). Как видно ЭПР прямого рассеяния значительно превосходит ЭПР обратного.

На рис. 8.7 представлена, посчитанная в EIGER, бистатическая диаграмма рассеяния для самолета «В-2» по логарифмической шкале. Аналогичная диаграмма для самолета «Boeing 737» на рис. 8.8.

8.3.1. Применительно к радиолокации

С помощью EIGER можно производить расчет характеристик рассеяния электромагнитных волн от произвольных объектов, а также диаграмм направленности рассеяния антенн. Используя диаграммы направленности антенны измерение угловых координат становится более точным, что в целом повышает эффективность обнаружения

радиолокационных объектов.

EIGER позволяет решить задачу распознавания объектов, что возможно с использованием широкополосного зондирования и последующего сравнения полученных физических измерений с имеющимися радиолокационными портретами. Ранее это было невозможным из-за неимения исходных (теоретических) радиолокационных портретов.

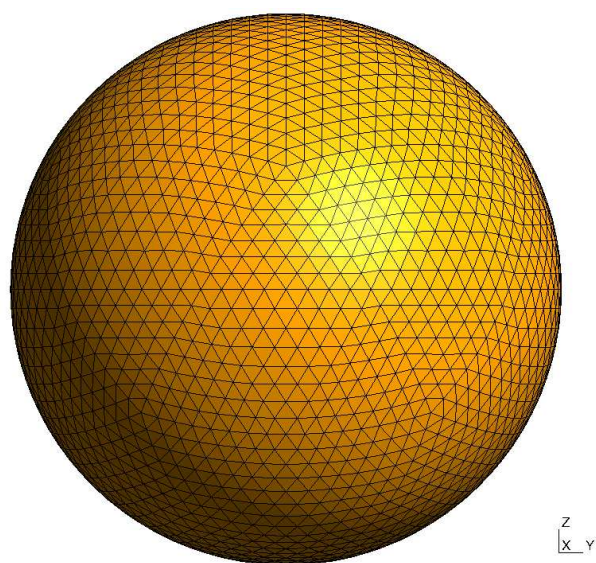


Рис. 8.1. 2d-mesh сферы

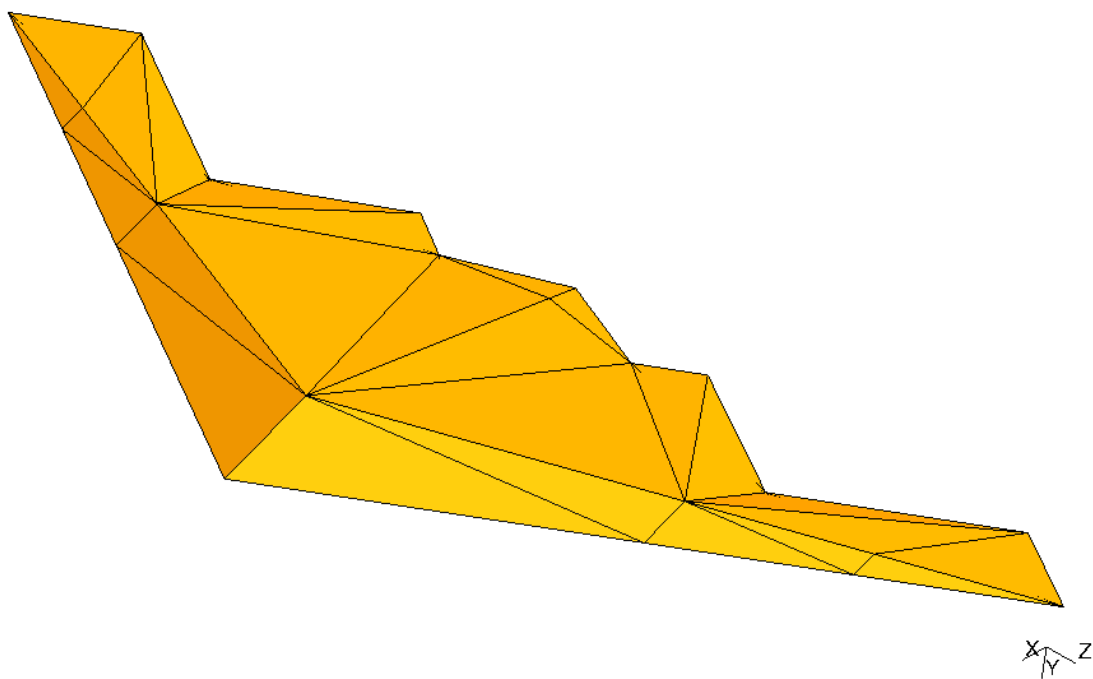


Рис. 8.2. 2d-mesh самолета похожего на «B-2»

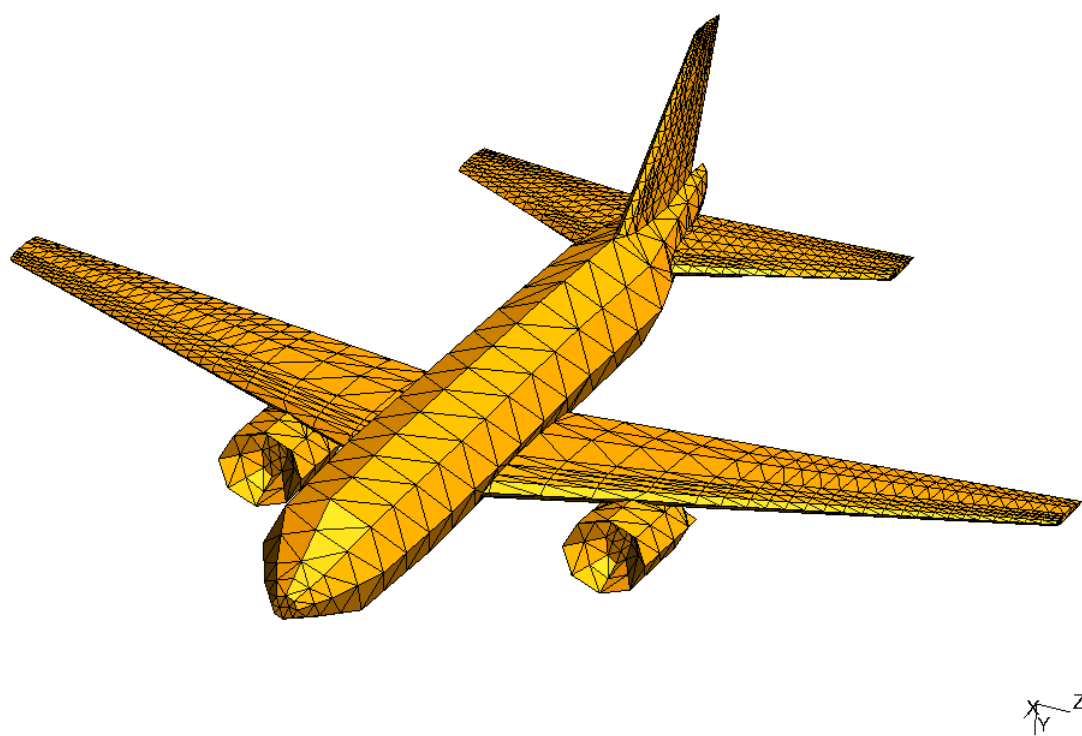


Рис. 8.3. 2d-mesh самолета «Boeing 737»

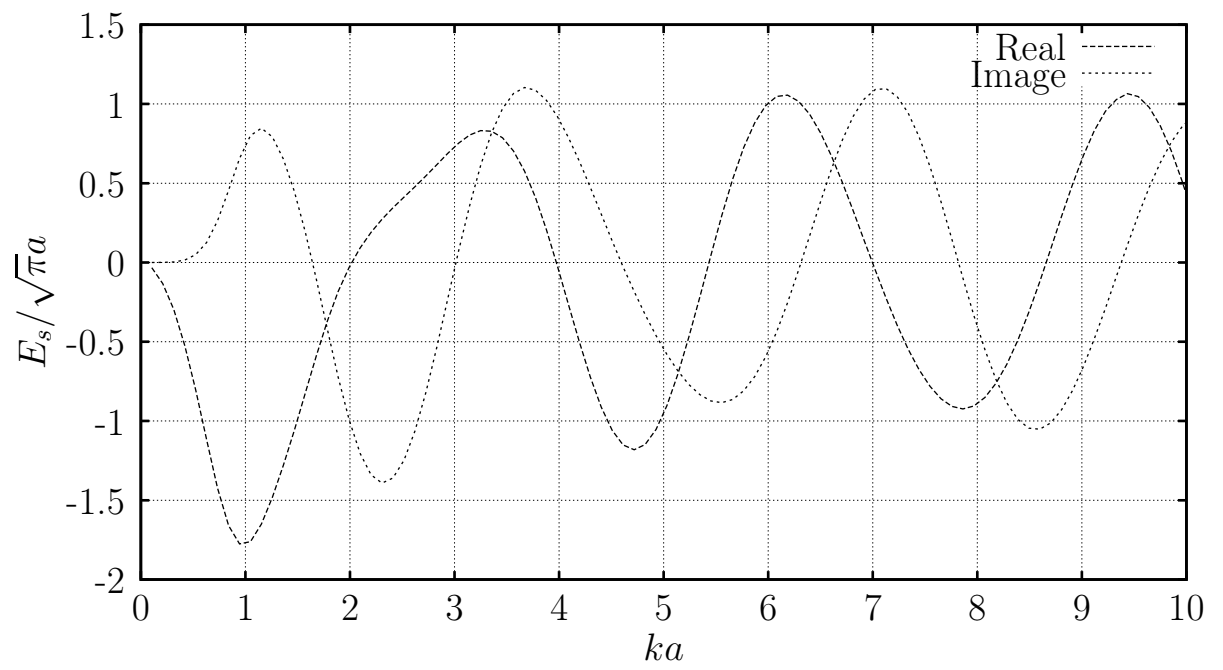


Рис. 8.4. Амплитуда обратного рассеяния для металлического шара (EIGER)

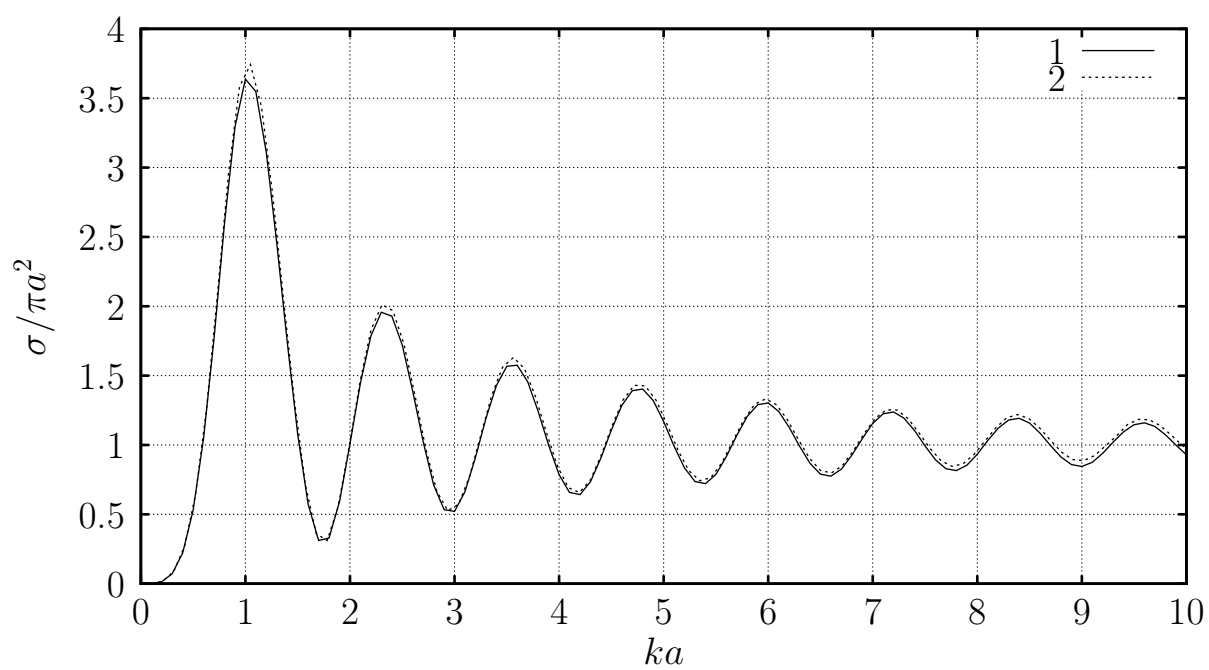


Рис. 8.5. Сечение обратного рассеяния для металлического шара. 1 — аналитическое решение Дебая-Ми, 2 — численное решение EIGER.

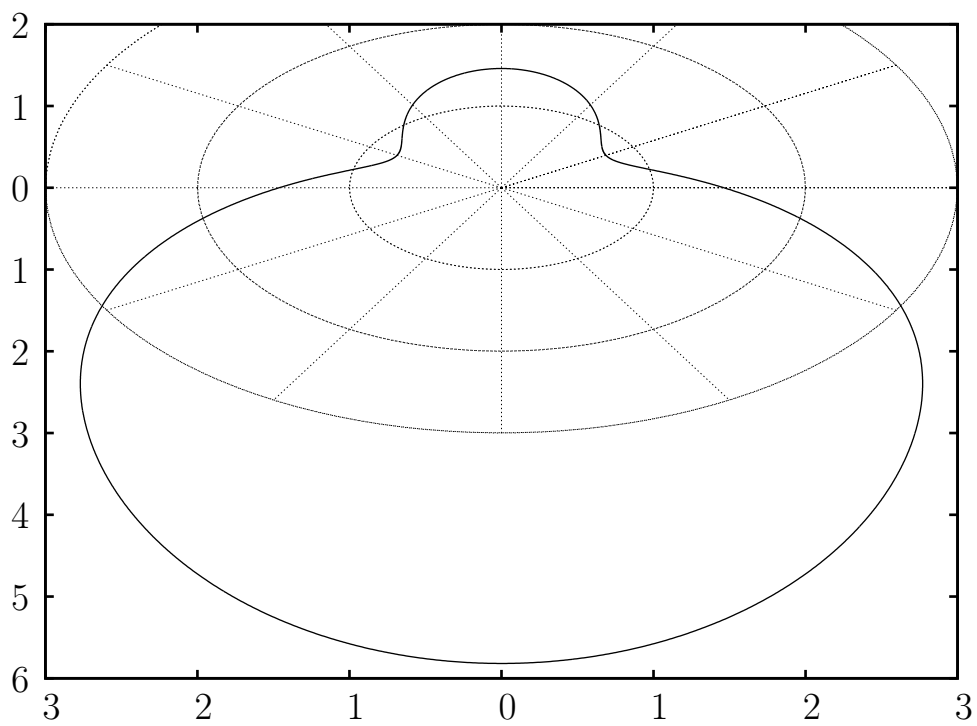


Рис. 8.6. Бистатическая диаграмма рассеяния однородного металлического шара радиуса 10 метров при частоте 10MHz

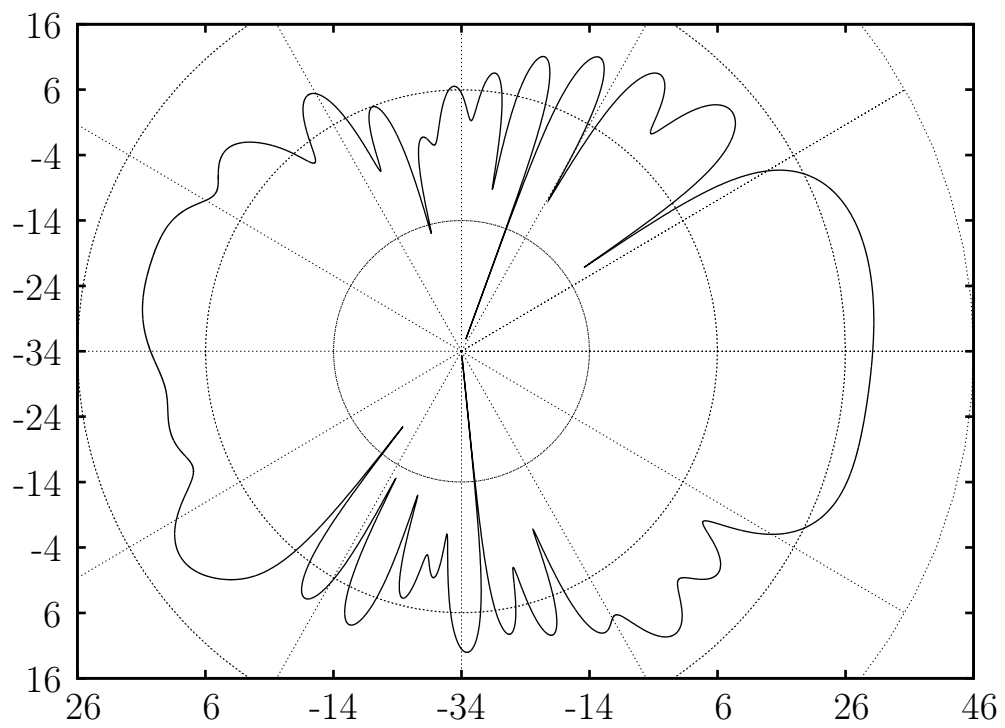


Рис. 8.7. Бистатическая диаграмма рассеяния самолета похожего на «В-2». Падающая плоская волна: 100MHz , $\theta = 30^\circ$, $\varphi = 60^\circ$

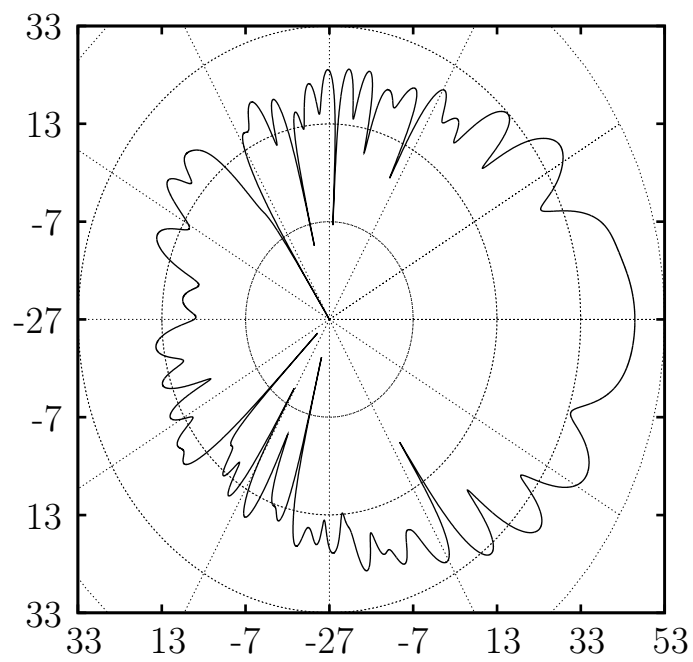


Рис. 8.8. Бистатическая диаграмма рассеяния самолета «Boeing 737». Падающая плоская волна: 200MHz , $\theta = 90^\circ$, $\varphi = 180^\circ$ — распространяется слева, на нос самолета.

Приложение А

Элементы электромагнитной теории

А.1. Уравнения Максвелла

Задача дифракции относится к задачам электромагнетизма, поэтому необходимо зафиксировать некоторые базовые понятия и достижения в этой области.

Разумно начать с уравнений Максвелла ([?]), которые в системе единиц СИ для макроскопического электромагнитного поля внутри вещества могут быть записаны в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (\text{A.2})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j}, \quad (\text{A.3})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (\text{A.4})$$

где ρ — плотность заряда, \mathbf{j} — плотность тока, \mathbf{E} — напряженность электрического поля, \mathbf{D} — индукция электрического поля, \mathbf{H} — напряженность магнитного поля, а \mathbf{B} — магнитная индукция.

Сами по себе уравнения (A.1) – (A.4) еще не являются достаточными; они должны быть дополнены *материальными уравнениями*,

относительно которых предполагается, что они имеют вид

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (\text{A.7})$$

где σ — проводимость, ε_0 — диэлектрическая проницаемость, а μ_0 — магнитная проницаемость среды. *Коэффициенты макроскопической теории* σ , μ_0 и ε_0 зависят от свойств рассматриваемой среды, при этом считается, что они не зависят от полей (среда *линейна*), координат (среда *однородна*) и направления (среда *изотропна*).

А.2. Монохроматические поля

При исследовании дифракции электромагнитных волн наибольшее значение имеют монохроматические или гармонические электромагнитные поля. Это поля, которые изменяются во времени по синусоидальному закону, то есть колеблются с вполне определенной частотой. В общем виде такие поля записываются в форме

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} \cos \omega t + \mathbf{B} \sin \omega t,$$

где ω — *угловая частота*.

Оказалось, что при математическом исследовании монохроматических процессов, подчиняющихся линейным уравнениям, целесообразно ввести комплексные обозначения. Векторам $\mathbf{E}(t)$ и $\mathbf{H}(t)$ —

векторам напряженности электрического и магнитного полей в данной точке — приводят в соответствие комплексные векторные амплитуды $\mathbf{E}(\omega)$ и $\mathbf{H}(\omega)$, которые связаны с физическими величинами соотношениями:

$$\mathbf{E}(t) = \text{Re}\{\mathbf{E}(\omega)e^{-i\omega t}\}, \quad \mathbf{H}(t) = \text{Re}\{\mathbf{H}(\omega)e^{-i\omega t}\}. \quad (\text{A.8})$$

Подставляя выражения (A.8) в уравнения Максвелла (A.1) и (A.2) и пользуясь формулами дифференцирования:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E}(t) &= \text{Re}\{\text{rot } \mathbf{E}(\omega)e^{-i\omega t}\}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(t) &= \text{Re}\{-i\omega \mathbf{B}(\omega)e^{-i\omega t}\}, \end{aligned}$$

получаем уравнения для комплексных амплитуд:

$$\begin{aligned} \text{Re}\{[\text{rot } \mathbf{E}(\omega) + i\omega \mathbf{B}(\omega)]e^{-i\omega t}\} &= 0, \\ \text{Re}\{[\text{rot } \mathbf{H}(\omega) + i\omega \mathbf{D}(\omega)]e^{-i\omega t}\} &= \text{Re}\{\mathbf{j}(\omega)e^{i\omega t}\}, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

то есть

$$\text{rot } \mathbf{E} + i\omega \mathbf{B} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{H} + i\omega \mathbf{D} = \mathbf{j}. \quad (\text{A.10})$$

Пользуясь материальными уравнениями (A.5) – (A.7), получаем уравнения Максвелла для монохроматических полей в комплексной форме:

$$\text{rot } \mathbf{E} = i\omega \mu \mathbf{H}, \quad (\text{A.11})$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 0, \quad (\text{A.12})$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = -i\omega \varepsilon \mathbf{E}, \quad (\text{A.13})$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0, \quad (\text{A.14})$$

где \mathbf{E} и \mathbf{H} — комплексные амплитуды, а ε и μ — комплексные диэлектрическая и магнитная проницаемости, которые в общем случае представляются в виде

$$\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon'' = |\varepsilon|e^{i\delta}, \quad (\text{A.15})$$

$$\mu = \mu' + i\mu'' = |\mu|e^{i\Delta}; \quad (\text{A.16})$$

кроме того, комплексная диэлектрическая проницаемость связана с физическими величинами соотношением

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + i\sigma/\omega. \quad (\text{A.17})$$

В дальнейшем будут рассматриваться только монохроматические электромагнитные поля и, соответственно, комплексные диэлектрические и магнитные проницаемости. Нижний индекс у ε и μ будет указывать на среду, к которой относятся эти величины, то есть ε_0 будет означать комплексную диэлектрическую проницаемость свободного пространства, а не вещественную его часть.

А.3. Граничные условия

От электромагнитного поля требуется, чтобы оно удовлетворяло уравнениям Максвелла во всех точках, где ε_0 и μ_0 непрерывны. Между тем при пересечении границы между телом и средой обычно имеет место резкое изменение этих свойств. Это изменение происходит в пределах переходной области толщиной порядка атомных

размеров. С макроскопической точки зрения имеется разрыв на границе. В таких граничных точках налагают следующие условия на поля:

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{E}_1(\mathbf{x})] \times \hat{\mathbf{n}} &= 0, \\ [\mathbf{H}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{H}_1(\mathbf{x})] \times \hat{\mathbf{n}} &= 0, \end{aligned} \tag{A.18}$$

где \mathbf{x} лежит на поверхности S тела, а $\hat{\mathbf{n}}$ — внешняя нормаль к S . Граничные условия (A.18) представляют собой требование непрерывности *тангенциальных компонент* \mathbf{E} и \mathbf{H} на границе, разделяющей среды с различными свойствами.

А.4. Волновое уравнение

Применив операцию rot к уравнениям (A.11) и (A.13), имеем

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{rot } \mathbf{E}) &= i\omega\mu_0 \text{rot } \mathbf{H} = \omega^2\varepsilon_0\mu_0\mathbf{E}, \\ \text{rot}(\text{rot } \mathbf{H}) &= -i\omega\varepsilon_0 \text{rot } \mathbf{E} = \omega^2\varepsilon_0\mu_0\mathbf{H}, \end{aligned}$$

и воспользовавшись векторным тождеством

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) = \text{grad}(\text{div } \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

получим *векторное волновое уравнение*

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k_0^2 \mathbf{E} = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{H} + k_0^2 \mathbf{H} = 0, \tag{A.19}$$

где $k_0^2 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0$. Любое векторное поле с нулевой дивергенцией, которое удовлетворяет векторному волновому уравнению, описывает

некое электрическое поле; при этом соответствующее магнитное поле выражается через ротор электрического поля при помощи соотношения (А.11).

А.5. Интегральные уравнения

Для моделирования рассеяния электромагнитного поля на произвольных сложных конструкциях используются методы, основанные на интегральном уравнении для электрического поля (ИУЭП) и интегральном уравнении магнитного поля (ИУМП). У каждого из методов есть преимущества для конкретных типов конструкций. ИУЭП хорошо подходит для тонкопроволочных конструкций, имеющих малый объем проводящего материала, в то время как ИУМП эффективен для объемных конструкций, содержащих большие, гладкие поверхности. ИУЭП и ИУМП можно использовать совместно.

Строгий вывод ИУЭП и ИУМП, был произведен Поджо и Миллером в [?], а также в [?]. Здесь приведем только уравнения, которые используются в расчетах.

В общем виде интегральное уравнение электрического поля (ИУЭП), произведенным распределенным по поверхности током \mathbf{J}_s , записывается как

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{-i\eta}{4\pi k} \int_S \mathbf{J}_s(\mathbf{x}') \cdot G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dA', \quad (\text{А.20})$$

где

$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = (k^2 \bar{\bar{I}} + \nabla \nabla)g(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ — функция Грина,

$g(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \exp(-jk|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$,

$k = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$,

$\eta = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$,

\mathbf{x} — точка наблюдения, \mathbf{x}' — точка источника,

$\bar{\bar{I}}$ — единичный оператор в 3-х мерном координатном пространстве,

и временная зависимость подразумевается в виде $\exp(i\omega t)$.

Интегральное уравнение магнитного поля (ИУМП) в свою очередь имеет вид

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \mathbf{J}_s(\mathbf{x}') \times \nabla' g(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dA'. \quad (\text{A.21})$$

где дифференцирование осуществляется относительно переменной интегрирования \mathbf{x}' .

Однако, эти уравнения существуют в различных модификациях в зависимости от поставленной задачи. Так для расчета дифрагированного поля от фацетных конструкций используется ИУМП в следующем виде:

$$\hat{t}_2(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{H}_i(\mathbf{x}_0) = -\frac{1}{2} \hat{t}_1(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{x}_0) - \frac{1}{4\pi} v.p. \int_S \hat{t}_2(\mathbf{x}_0) \cdot [\mathbf{J}_s(\mathbf{x}') \times \nabla' g(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}')] dA', \quad (\text{A.22})$$

$$-\hat{t}_1(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{H}_i(\mathbf{x}_0) = -\frac{1}{2} \hat{t}_2(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{4\pi} v.p. \int_S \hat{t}_1(\mathbf{x}_0) \cdot [\mathbf{J}_s(\mathbf{x}') \times \nabla' g(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}')] dA', \quad (\text{A.23})$$

где

$v.p. \int$ — интеграл главного значения,

\hat{t}_1 и \hat{t}_2 — ортогональные тангенциальные вектора, такие что

$$\hat{t}_1(\mathbf{x}_0) \times \hat{t}_2(\mathbf{x}_0) = \hat{n}(\mathbf{x}_0),$$

для вектора нормали $\hat{n}(\mathbf{x}_0)$ направленного наружу из точки \mathbf{x}_0 .

Приложение Б

Методы решения задач дифракции

Б.1. Строгие методы

Методы решения дифракционных задач делятся на строгие и приближенные (эвристические) в соответствии с [?]. Строгие методы предполагают решение уравнений Максвелла с учетом соответствующих граничных условий на поверхности рассеивающего тела. При гармонической зависимости напряженности электромагнитного поля от времени и при отсутствии других источников, уравнения Максвелла сводятся к уравнениям Гельмгольца для комплексных амплитуд.

Строгие методы дифракции отличаются друг от друга математическими средствами, используемыми при решении этих исходных уравнений. Название «строгие методы» не означает, что их применение обязательно дает точные результаты. Решения могут быть приближенными или асимптотическими. Строгость методов состоит в том, что ошибку полученных решений всегда можно точно оценить с помощью строгих математических приемов на всех этапах решения вплоть до получения численных результатов.

Область применения строгих методов, вообще говоря, не ограничена ни формой, ни размером рассеивающих тел. Однако практически до настоящего времени строгими методами решено лишь неболь-

шое число задач. Причина не только в математических трудностях решения исходных дифференциальных уравнений, но и в том, что решения, получаемые строгими методами, обычно выражаются в виде плохо сходящихся рядов или бесконечных систем алгебраических уравнений. Получение численных результатов на основе таких решений тоже невозможны даже с помощью вычислительных машин.

К строгим методам решения дифракционных задач, в частности, относятся следующие основные методы:

1. Классический метод разделения переменных, называемый также методом собственных функций или методом криволинейных координат.
2. Метод поверхностных токов, называемый также методом интегрального уравнения. Метод предполагает определение тока на поверхности тела как результата одновременного действия падающей волны и вторичного поля, что приводит к интегральному уравнению для поверхностного тока. Дифракционное поле далее определяется как суперпозиция сферических волн, излучаемых каждым элементом поверхностного тока. Метод применим, в первую очередь, к плоским экранам.
3. Метод парных интегральных уравнений, называемый также методом преобразования Фурье. Этот метод, в отличие от предыдущего, оперирует не с поверхностным током, а с его простран-

ственным спектром Фурье, что приводит в случае плоских экранов к парным интегральным уравнениям для поля в дальней зоне.

4. Метод Винера-Хопфа, называемый также методом интегральных преобразований. Развитие этого метода носит название метода Винера-Хопфа-Фока или метода факторизации. Сюда же относится и метод задачи Римана-Гильберта.
5. Вариационный метод, связанный с методом поверхностных токов. Этот метод не является в полной мере строгим и занимает промежуточное положение между строгими и приближенными методами. Он применим, главным образом, к одномерным задачам (тонкий провод) и двумерным (плоские экраны).

Остановимся более подробно на методе разделения переменных. Исходные векторные уравнения Максвелла представляются в виде системы скалярных дифференциальных уравнений для составляющих электрического и магнитного полей в ортогональных криволинейных координатах. Далее, при гармонической зависимости электромагнитного поля от времени, введением вспомогательных скалярных функций (потенциалов) можно разделить составляющие поля, т.е. преобразовать уравнения к такому виду, где каждое из них содержит только одну составляющую поля и одну координату. Разделение удастся осуществить почти во всех ортогональных координатных

системах: декартовой, цилиндрической (круговой, эллиптической и параболической), сферической, сфероидальной (вытянутой и сплюсщенной), эллипсоидальной, параболоидальной и тороидальной.

Однако разделение переменных не означает, что полученные при этом уравнения могут быть решены. Дальнейшее зависит от граничных условий на поверхности рассеивающего поля. Если граничные условия выражаются функциями всех трех или даже двух координат, то система уравнений, как правило, оказывается неразрешимой. Решение возможно только в том случае, когда поверхность рассеивающего тела совпадает с одной из координатных поверхностей системы и, следовательно, граничные условия выражаются функциями только одной координаты. Иными словами, система дифференциальных уравнений с разделенными переменными должны дополняться граничными условиями также с разделенными переменными.

Примером использования метода может служить классическая задача о рассеянии плоской волны на сфере. Эта задача рассматривалась еще Рэлеем и Никольсоном, а позднее, в более общем виде, Ми и Дебаем, которые решили уравнение Гельмгольца в сферических координатах методом разделения переменных и получили ныне широко известные выражения для рассеянного поля в виде рядов по функциям, выражающимся через функции Бесселя и Ханкеля. Эти ряды хорошо сходятся при малых ka (a — радиус сферы), но при увеличении ka их сходимость быстро ухудшается, так что при $ka > 10$

их практически уже нельзя использовать для получения численных результатов. Вместе с тем при $ka > 10$ удается асимптотически суммировать ряды Ми. Подобные асимптотические решения, точность которых увеличивается с возрастанием ka , остаются строгими, поскольку их ошибка заранее известна.

Отметим, что методом разделения переменных также решены задачи о рассеянии плоской волны на бесконечно круговом и эллиптическом цилиндрах, сфероиде и диске.

Б.2. Приближенные методы

В отличие от строгих, приближенные или эвристические методы решения дифракционных задач дают возможность относительно простыми средствами получать приближенные решения в замкнутом виде. Однако при этом возникают неконтролируемые ошибки, которые зависят от заданных конкретных условий и в каждом отдельном случае могут быть различными. Любой эвристический метод обычно применим лишь к узкому кругу задач.

В основе каждого эвристического метода лежит физическая гипотеза, которая позволяет либо полностью устранить, либо существенно упростить чисто математические проблемы, непреодолимые при строгой постановке задачи. Большинство эвристических методов применяется в высокочастотной области, где характерные размеры рассеивающих тел велики по сравнению с длиной волны электромаг-

нитного поля. К приближенным методам относятся:

1. Метод геометрической оптики, называемый также лучевым приближением. Простейший из эвристических методов.
2. Метод физической оптики, называемый также методом волновой оптикой или приближением Кирхгофа. В первую очередь применим к телам с бесконечного радиуса кривизны и резким изломам поверхности. При этом тела должны иметь высокую проводимость.
3. Апертурный метод. Применяется, главным образом, для расчета рассеянного поля, возникающего в результате многократного переотражения волн между плоскими металлическими поверхностями.
4. Метод краевых волн ([?], [?]). Позволяет уточнить приближение физической оптики и учесть дифракционные явления вблизи резких изломов поверхности рассеивающего тела. С помощью метода краевых волн определены характеристики рассеяния диска, конечного цилиндра, конечного конуса, конечного параболоида вращения и сферического сегмента при падении волны вдоль оси вращения.
5. Геометрическая теория дифракции, называемая также методом дифракционных лучей. Этот метод представляет собой раз-

вление и обобщение метода геометрической оптики.

Заключение

1. Дана формулировка задачи дифракции (рассеяния) электромагнитных волн. Рассмотрены основные проблемы и методы их решения. Также приведены характеристики рассеивающих тел и математические соотношения для оценки этих характеристик.
2. На примере классической задачи дифракции плоской электромагнитной волны на однородном металлическом шаре продемонстрирован один из методов аналитического решения — метод разделения переменных. Результат решения представлен формулами (5.3), (5.11), (5.12), а также графиками на рис. 5.2 и рис. 5.3.
3. Изучены основные вычислительные методы решения дифракционных задач для тел произвольной формы.
4. Построен алгоритм расчета характеристик рассеяния электромагнитных волн.
5. Проведена серия вычислительных экспериментов с использованием программы EIGER, доказывающая достоверность теоретических представлений, а также демонстрирующая возможности вычисленных методов в данной области. Результаты предъявлены на рис. 8.1–8.8.

На будущее:

1. Рассмотреть импульсные характеристики рассеяния электромагнитных волн.
2. Изучить метод мультиполей для решения задачи дифракции.
3. Провести эксперименты для более сложных тел с произвольной магнитной и электрической проницаемостью.